

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère De l'Enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique
Université Mouloud Mammeri De TIZI-OUZOU
Faculté des Sciences
Département des Mathématiques



Mémoire de fin d'étude

En vue d'obtention du diplôme master en mathématiques appliquée
Spécialité : Recherche Opérationnelle

**Application de la théorie du contrôle optimal pour une politique
d'investissement financier, cas de la BADR AZAZGA**

Réalisé par :

Bennouar Melissa

Yassa Céline

Devant le jury

<u>Promoteur</u> :	Aidene Mohamed	Professeur	UMMTO
<u>Président</u> :	Merakeb Abdelkader	Professeur	UMMTO
<u>Examineur</u> :	Harrache Fazia	M.C.B	UMMTO
<u>Co-encadrant</u> :	Zaidi Tarik	Directeur	BADR

2023-2024

Dédicaces

Louange à dieu seul

Je dédie cet ouvrage

À ma chère maman Chafia la reine de mon cœur, femme brave et forte, tu es mon guide, mon étoile, tu as sacrifié tant de choses pour mon bien être, tu as porté la vie avec force et courage, aujourd'hui je veux exprimer mon amour et ma gratitude d'avoir une maman comme toi. À mon cher papa Ouahmed, tu es un homme unique, tu m'as toujours protégé et aimé, tes principes forts coulent dans mes veines, j'espère que je te rendrai à jamais fier, il n'y a pas assez de mots pour décrire combien tu compte pour moi et l'influence que tu as toujours eu en moi, merci papa. Que dieu vous garde toujours auprès de moi.

À ma sœur, ma moitié Taous, merci pour tes sacrifices, ta bonté, ton amour, tu es ma douce sœur, avec qui la vie de famille est un beau paradis, merci de grandir à mes côtés dans le même nid, je t'aime.

À ma sœur Djoujou, à mes frères Mehdi et Ouamar, merci d'être les meilleurs compagnons de vie merci de m'avoir fait rire à chaque fois que je me sens perdu, merci pour votre amour infini, à tout mes chers oncles et toutes mes précieuses tantes qui m'ont élevée, qui m'ont protégé, merci pour votre amour et soutien, à mes cousins et cousines, merci de rendre mon enfance exceptionnelle et d'avoir partagé avec moi tout les moments de joie, à mamie Taous et toute ma famille du côté paternelle, merci tous pour votre amour et encouragement, je vous aime.

À ma grand-mère Tunsia, à toi ma deuxième maman, à toi mon âme sœur, tu es un ange, un être fait de lumière, tes histoires d'enfance et même de jeunesse vont être gardé dans ma mémoire à jamais, tu resteras pour moi la plus belle créature au monde je t'aime, que dieu te garde pour moi.

À mon adorable oncle Tarik, merci d'être la personne que tu es, je suis si fier d'être ta nièce, je te dédie ce travail que sans toi il n'aurait pas été parfaitement réalisé.

À mon binôme, ma sœur du cœur Céline, qui sait toujours comment procurer la joie et le bonheur pour tout le monde autour d'elle, merci d'être la mathématicienne que tu es et l'amie que tu es, j'ai rêvé de toi avant même de faire ta connaissance, tu avait ce magnifique rire et cette joie immense, je t'ai connu bien avant, le destin nous a choisi afin d'être copines pour la vie et même au delà de ce monde.

À tous mes précieux amis que leurs rencontres m'a fait fleurir le cœur à

jamais, ceux qui ont gravé des souvenirs dans mon âme, des personnes tout simplement exceptionnelles. Nous en avons traversé des moments ensemble. Des épreuves, c'est vrai, mais surtout des instants de magie, des fous rires, des histoires sans fin, j'espère dans dix ans, nous pourrons faire un bilan de notre amitié de toute une vie.

À tout mes enseignants, mes professeurs, que ce rapport vous fait preuve de toutes les connaissances que vous m'avez transmises.

À toutes les personnes que j'ai cité, Puisse dieu vous donner la santé et longue vie afin que je puisse à mon tour vous combler.

À la mémoire de mes deux grand-pères ALI et OUAMAR.

Reposez en paix

Dédicaces

Merci, Allah (mon Dieu), de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout de mes rêves, et le bonheur de lever mes mains vers le ciel pour dire "Ya Kayoum" à Toi,
ô Tout-Puissant.

Je dédie ce modeste travail à ma très chère mère, Fazia, grâce à toi, maman, j'ai appris le sens du travail et de la responsabilité. Je te remercie pour ton amour et ta générosité. Ton soutien a été une lumière tout au long de mon parcours. Ce travail est le fruit de tous les sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation. Je t'aime, maman, et j'implore le

Tout-Puissant de t'accorder une bonne santé et une longue vie.

À mon très cher père, Rabah , permets-moi d'exprimer mon grand amour, mon attachement et ma plus haute considération pour toi. Je suis très fière d'être ta fille et de pouvoir enfin réaliser ce que tu as tant espéré et attendu de moi. Tu n'as jamais cessé de déployer tous tes efforts pour subvenir à nos besoins, nous encourager et nous aider à choisir le chemin de la réussite. Je t'aime, papa, et j'implore le Tout-Puissant de t'accorder une bonne santé,
une vie longue et heureuse.

À mes frères Aghiles et Amine, à mes sœurs Fatma, Kamelia et yasmine, à tous les moments d'enfance passés avec vous, en gage de ma profonde estime pour l'aide que vous m'avez apportée. Votre précieux soutien, votre encouragement tout au long de mes années d'étude, votre amour et votre affection ont été pour moi l'exemple de la persévérance. À la mémoire de mon grand-père paternel, puisse Dieu vous accueillir en sa sainte miséricorde, et que ce travail soit une prière pour votre âme.

À ma meilleure amie et binôme, Mélissa , je te dédie ce travail en reconnaissance de l'impact incroyable que tu as eu dans ma vie. Ta présence constante, ton soutien indéfectible et ta capacité à m'encourager dans les moments difficiles ont fait de toi une alliée précieuse. Tu as enrichi mon parcours de ta sagesse et de ta bonne humeur. Merci d'être toujours là pour moi. Que la vie t'apporte tout le bonheur, la santé et la réussite que tu mérites.

À mes amis, vous avez tous été une source de joie et de motivation. Votre amitié, vos encouragements et votre soutien inconditionnel ont été d'une grande importance pour moi. Je vous souhaite à tous bonheur, santé et réussite dans vos projets.

Céline Yassa

Remerciement

En premier lieu, nous remercions notre créateur le dieu le tout puissant pour la force, la patience et surtout le savoir qu'il nous a donné pour en arriver là.

Nous adressons nos remerciements les plus chaleureux à notre directeur de mémoire le professeur Aidene Mohamed pour son encouragement, son suivi rigoureux et le grand intérêt qu'il nous a porté tout au long de ce travail, c'est avec un très grand honneur d'avoir travaillé ce mémoire sous son expertise mondialement reconnu.

On ne peut aussi qu'à remercier au fond de nos cœurs le président de jury professeur Merakeb Abdelkader qui nous a fait l'honneur de juger notre travail.

Pour sa patience et son bienveillance durant toutes ces années, on accorde un très grand merci pour docteur Harrache Fazia dont ses cours ont enrichi nos connaissances et qui a accepté d'être un membre important de jury.

Nous exprimons notre plus sincère et entière gratitude à notre Co-encadrant le directeur de la banque d'agriculture et de développement rural monsieur Zaidi Tarik qui nous a encadré lors de notre stage pratique, son orientation a permis de progresser et de parfaitement mener notre étude. Moi Bennouar Melissa je te suis reconnaissante mon cher oncle pour ta gentillesse, ta bienveillance, pour cette opportunité que tu m'as donné et l'importance que tu as accordés à ce travail, merci au fond du cœur.

Nos plus sincères remerciements vont à tous les professeurs, les docteurs, les enseignants pour toutes les connaissances et les richesses mathématiques qu'ils nous ont attribué tout au long de cette petite aventure. Ainsi nos remerciements s'adressent à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Voici une excellente occasion de remercier nos précieux amis d'avoir cru en nous, de nous avoir encouragé pour aller de l'avant, merci d'être une source d'inspiration et de motivation, et surtout merci de nous accompagner dans nos rêves les plus fous.

En dernier lieu, on tient à remercier nos familles, nos chers parents pour leur soutien émotionnel, leur sagesse et leurs conseils qui ont fait de nous les personnes que nous sommes aujourd'hui. Nous sommes éternellement reconnaissantes de votre présence continue dans nos vies, nous sommes inspirées par vos qualités qu'on espère imiter dans notre propre voyage, nous sommes bénies de vous avoir comme pilier de force et de réconfort.

Les mathématiques pures, sont à
leur manière la poésie des idées logiques.

-Albert Einstein-

Merci pour les mathématiques.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Introduction à la gestion financière de l'agence d'accueil BADR	4
Introduction	4
SECTION1 :Présentation général de la BADR	4
1.1 Présentation de la BADR	5
1.2 Évolution de la BADR	5
1.3 Les missions de la BADR	8
1.4 Les objectifs de la BADR	8
1.5 Les services de la BADR	9
SECTION2 :Organisation et organigramme de la BADR	12
1.6 Organisation de la BADR	13
1.6.1 Organisation et Définition des tâches	13
1.7 Organigramme générale de la BADR	16
SECTION3 :crédits d'investissement	16
1.8 Présentation	17
1.8.1 Définition	17
1.8.2 Éligibilité	17
1.8.3 Délai de traitement du dossier de crédit et montant du crédit	17
1.8.4 Durée du crédit	17
1.9 Différents types de crédit	18
1.9.1 Crédit à moyen terme (CMT)	18
1.9.2 Crédit à long terme (CLT)	18
1.9.3 Crédit-bail	18
1.10 Conditions d'octrois de crédit	19
1.11 Garanties proposées à la banque dans le cadre d'un crédit d'investissement	19
2 Les équations différentielles ordinaires	21
Introduction	21
2.1 Définitions	21
2.2 Équation différentielle du premier ordre	22
2.2.1 Équation différentielle à variables séparables	22
2.2.2 Équation différentielle homogène	22
2.2.3 Équations différentielles linéaires du premier ordre	24
2.2.4 Équation de Bernoulli	25
2.3 Équation différentielle du second ordre	27
2.3.1 Définition	27
2.3.2 Résolution de l'équation homogène E_h	27

2.3.3	Résolution d'une équation du second ordre a coefficients constants (E)	28
2.4	Équations différentielles et problème de Cauchy	34
2.4.1	Théorème de Cauchy Lipchitz	34
	Conclusion	34
3	<i>Théorie du contrôle optimale</i>	36
3.1	Quelques notions d'algèbre linéaire	36
3.2	Quelques définitions en contrôle optimal	40
3.2.1	Définition (système dynamique)	40
3.2.2	Définition (système de contrôle)	40
3.3	Formulation mathématique d'un problème de contrôle optimal	41
3.4	Problème de contrôle optimal	43
3.4.1	Classes de problèmes de contrôle optimal	44
3.5	Contrôlabilité des systèmes dynamiques	45
3.5.1	Définition de contrôlabilité	46
3.5.2	L'ensemble accessible	46
3.5.3	Contrôlabilité des systèmes linéaires	47
3.5.4	Contrôlabilité des systèmes non linéaires	49
3.6	Contrôle optimal des systèmes linéaires	52
3.7	Contrôle optimal des systèmes non linéaires	57
3.7.1	Principe du maximum de Pontryagin (PMP) : la version faible	57
3.7.2	Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) : la version forte	59
3.7.3	Conditions de transversalité	61
	Conclusion	63
4	<i>Application du contrôle optimal pour une politique d'investissement financier</i>	65
	Introduction	65
4.1	Position du problème	65
4.1.1	Modélisation de ce problème	66
4.1.2	La résolution analytique du problème	68
4.2	Application Numérique	71
4.3	Résolution à l'aide du logiciel MATLAB	80
	Conclusion générale	82

Table des figures

1.1	Organigramme générale de la BADR	16
1.2	Organigramme de la BADR AZAZGA 571	16
3.1	Schéma de représentation d'un système de contrôle	40
3.2	Ensemble accessible	46
4.1	Résolution avec MATLAB	80
4.2	L'évolution de la quantité d'argent disponible et titres financiers dans une période d'investissement (1 ans).	81

Introduction générale

La recherche opérationnelle est un domaine essentiel qui combine mathématiques, informatique et théorie de la décision pour résoudre des problèmes complexes dans divers secteurs. Son utilisation croissante dans l'industrie et les services publics souligne son importance pour l'optimisation des ressources et l'amélioration des processus décisionnels.

La recherche opérationnelle peut être définie comme un ensemble de techniques visant à identifier le meilleur choix parmi plusieurs alternatives, en tenant compte des contraintes et des objectifs spécifiques. Elle s'inscrit dans le cadre de l'aide à la décision, permettant aux décideurs de mieux comprendre et évaluer les enjeux associés à leurs choix. [1]

Ses principaux objectifs incluent

Optimisation sous contraintes : Trouver des solutions qui maximisent ou minimisent une fonction objective tout en respectant des contraintes imposées.

Modélisation des processus : Utiliser des modèles mathématiques pour représenter des systèmes complexes, facilitant ainsi l'analyse et la prise de décision.

Analyse des données : Appliquer des techniques statistiques pour interpréter des données et en tirer des conclusions pertinentes. [2]

Elle englobe diverses méthodes, notamment

Programmation linéaire : Utilisée pour optimiser des problèmes où la fonction objective et les contraintes sont linéaires.

Programmation en nombres entiers : Appliquée lorsque les variables de décision doivent être des entiers.

Optimisation non-linéaire : Traite des problèmes où la fonction objective ou les contraintes sont non linéaires.

Théorie des graphes : Utilisée pour résoudre des problèmes de réseau, tels que le problème du voyageur de commerce ou l'ordonnancement de tâches. [3] [4] [5]

La recherche opérationnelle trouve des applications dans divers secteurs, tels que Logistique et transport (optimisation des tournées de véhicules et gestion des chaînes d'approvisionnement), santé (amélioration de la gestion des ressources hospitalières et des processus de soins), énergie (optimisation de la production et de la distribution d'énergie), finance (aide à la gestion des portefeuilles d'investissement et à l'évaluation des risques). [1] [2] [6]

Ce qui nous intéresse dans notre étude c'est bien la finance spécifiquement le secteur bancaire dont la RO joue un rôle fondamental en fournissant des outils et des méthodes pour optimiser les opérations, gérer les risques et améliorer la prise de décision.

Et pour bien approfondir notre étude, on a fait appel à une des principales branches de la RO qui n'est autre que la théorie du contrôle optimal qui se concentre sur la manipulation des systèmes dynamiques pour atteindre un objectif donné, tout en minimisant un coût associé.

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est à dire des systèmes dynamique sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un état final, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard. . . Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie. . . L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal).

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques, etc. pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes.

Un système de contrôle est dit contrôlable si on peut l'amener (en temps fini) d'un état initial arbitraire vers un état final prescrit. Pour les systèmes de contrôle linéaires en dimension finie, il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité, due à Kalman. Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile.

Une fois le problème de contrôlabilité est résolu, on peut de plus vouloir passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère ; on parle alors d'un problème de contrôle optimal. En mathématiques, la théorie du contrôle optimal s'inscrit dans la continuité du calcul des variations. Elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique du vol. Historiquement, la théorie du contrôle optimal est très liée à la mécanique classique, en particulier aux principes variationnels de la mécanique (principe de Fermat, de Huygens, équations d'Euler-Lagrange). Le point clé de cette théorie est le principe du maximum de Pontryagin, formulé par L.S.Pontryagin en 1956, qui donne une condition nécessaire d'optimalité et permet ainsi de calculer les trajectoires optimales. Les points forts de la théorie ont été la découverte de la méthode de programmation dynamique, l'introduction de l'analyse fonctionnelle dans la théorie des jeux, le contrôle d'équations aux dérivées partielles.

On considère que la théorie moderne du contrôle optimal a commencé dans les années 50, avec la formulation du principe du maximum de Pontryagin, qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations. Dès lors, la théorie a connu un essor spectaculaire, ainsi que de nombreuses applications. De nos jours, les systèmes automatisés font complètement partie de notre quotidien (nous en sommes souvent inconscients), ayant pour but d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certaines tâches : système de freinage ABS, assistance à la conduite, contrôle des flux routiers, photographie nu-

mérique, filtrage et reconstruction d'images, lecteurs CD et DVD, circuits électriques, électroniques, contrôle des procédés chimiques, raffinage pétrolier, opérations au laser, robotique, satellites, guidages aérospatiaux, . . . La liste est infinie, les applications concernant tout système sur lequel on peut avoir une action, avec une notion de rendement optimal. [7]

L'objectif de ce mémoire est de rappeler toutes les notions nécessaires de la théorie du contrôle optimal, afin de faire une application pour résoudre une politique d'investissement financier d'une banque précisément la BADR AZAZGA.

Outre une introduction générale, ce mémoire est composé de quatre chapitres

Chapitre 1

Ce chapitre est consacré pour la présentation générale de l'agence d'accueil AZAZGA, son organisation ainsi que son organigramme, et enfin l'étude des crédits d'investissement.

Chapitre 2

Ce chapitre est un rappel sur les équations différentielles ordinaires (EDO) qui sont la base fondamentale du contrôle optimale.

Chapitre 3

Dans ce chapitre, nous présentons les aspects théoriques de la théorie du contrôle optimal. D'abord, nous allons donner une formulation mathématique d'un problème de contrôle optimal, ensuite nous présentons la notion de contrôlabilité pour les deux systèmes linéaires et non linéaires, puis nous fournissons un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour un problème de contrôle optimal linéaire sans et avec contraintes. Enfin, nous exposons le principe du maximum de Pontryagin dans ses différentes versions (faible et forte).

Chapitre 4

Ici, on va faire une application pour résoudre un problème de contrôle optimal bancaire en utilisant le principe du maximum de Pontryagin, et nous allons présenter les résultats obtenus sur le logiciel MATLAB.

Finalement, ce mémoire s'achève par une conclusion générale et une bibliographie.

Chapitre 1

Introduction à la gestion financière de l'agence d'accueil BADR

Introduction

La banque de développement rural plus connu sous le nom de BADR est une institution financière algérienne spécialisée dans le financement du secteur agricole et rural. Elle a été créée en 1982 et vise à soutenir le développement économique et social en fournissant des services bancaires adaptés aux besoins des agriculteurs, des éleveurs et des populations rurales en générale.

Elle dispose actuellement de plusieurs filiales qui activent dans différents domaines à savoir : la formation bancaire, la garantie du crédit immobilier, l'automatisation des transactions interbancaires, des instruments et techniques d'accompagnement du programme du développement et de modernisation des banques, et le financement des prêts aux logements consentis par les intermédiaires financiers agréés notamment El Djazair Istithmar, société de placement des valeurs mobilières (SPDM), société de Crédit-bail El Djazair Idjar, Banque Al Baraka, Algérie Clearing...etc.

Dans ce chapitre on va procéder à la présentation générale de la BADR plus précisément l'agence d'accueil 571 d'AZAZGA, son évolution, ses missions, objectifs et ses différents services.

Ensuite on va présenter l'organigramme de cette agence ainsi que son organisation.

Et enfin on va consacrer une petite partie à l'étude des crédits d'investissements qui est le secteur le plus important dans cette agence. [8] [9]

SECTION1 : Présentation générale de la BADR

1.1 Présentation de la BADR

Une agence est une cellule polyvalente de base de l'exploitation de la banque, elle est conçue de sorte à satisfaire la clientèle à travers des structures d'accueil et de traitement efficient, elle se trouve en contact directe avec ses clients.

Constituée initialement de 140 agences cédées par la banque nationale d'Algérie (BNA), près de 7000 cadres et employés activent au niveau des structures régionales. Véritable instrument de développement de l'agriculture et du monde rural, la BADR entame depuis sa création un vaste programme d'action, visant à répondre aux besoins de sa clientèle. D'ailleurs, elle est la première banque à concrétiser le concept de « Banque Assise ».

Parmi ses structures de base, existe l'Agence d'AZAZGA, le lieu du déroulement de notre stage pratique. [8] [9]

1.2 Évolution de la BADR

En vertu de la loi 90/10 du 14 avril 1990, relative à la monnaie et au crédit, la BADR est devenue une personne morale effectuant des opérations de réception de fonds du public, des opérations d'octroi des crédits, ainsi que la mise à leur disposition, et ce, dans le respect du secret bancaire.

Depuis 1999, le capital social de la BADR a augmenté et atteint le seuil de 54000000000 Dinars.

De par la densité de son réseau et l'importance de son effectif, la BADR est classée par le « BANKERS ALMANACH » (édition 2001) première banque au niveau national, 13^{ème} au niveau africain et 668^{ème} au niveau mondial sur environ 4100 banques classées.

Les trois grandes étapes de l'évolution de la BADR sont

Étape 1 : (1982-1990)

Au cours de ces dernières années, la BADR a eu pour objectif, d'asseoir sa présence dans le monde rural en ouvrant de nombreuses agences dans des zones à vocation agricole. Elle a acquis une ambitieuse expérience dans le financement de l'agro-alimentaire et de l'industrie mécanique agricole.

Étape 2 : (1991-1999)

La BADR a élargi son champ d'intervention vers les autres secteurs d'activités, notamment, vers les PME/PMI, tout en restant un partenaire privilégié du secteur agricole. Sur le plan technique, cette étape a été celle de l'introduction des technologies informatiques

1991

Mise en place du système « SWIFT » pour l'exécution des opérations de commerce international.

1992

- Mise en place du logiciel « SYBU », avec ses différents modules de traitement des opérations bancaires ;
- Informatisation de l'ensemble des opérations du commerce extérieur :les ouvertures de crédits documentaires sont aujourd'hui traitées en 24 heures maximum ;
- Introduction du nouveau plan des comptes au niveau des agences.

1993

Achèvement de l'informatisation de l'ensemble des opérations bancaires au niveau du réseau.

1994

Mise en service de la carte de paiement et de retrait BADR.

1996

Introduction du télétraitement (traitement et réalisation d'opération bancaires à distance et en temps réel).

1998

Mise en service de la carte de retrait interbancaire.

Étape 3 : (2000-2002)

L'étape actuelle se caractérise par la nécessaire implication des banques publiques dans la relance des investissements productifs et la mise en adéquation de leurs activités .la BADR a augmente le volume des crédits consentis aux PME/PMI du secteur prive tout en accroissant son aide au monde agricole et para-agricole. Pour répondre aux attentes de la clientèle, la BADR a mis en place un programme d'action axé notamment sur sa modernisation et l'amélioration de ses prestations. Ce programme est presente comme suit

2000

- Établissement d'un diagnostic exhaustif des forces et faiblesses de la BADR et

élaboration d'un plan de mise à niveau de l'institution par rapport aux normes internationales ;

· Généralisation du système réseau local avec réorganisation du progiciel SYBU en client-service.

2001

- Assainissement comptable et financier ;
- Refonte et raccourcissement des procédures de traitement, d'acheminement et de sanction des dossiers de crédits.les délais varient, aujourd'hui entre 20 et 90 jours, qu'il s'agisse d'un dossier d'exploitation, d'investissement, ou encore de son niveau de sanction (agence, succursale, direction générale) ;
- Concrétisation du concept de « banque assise» avec services personnalisables (Agence Amirouche, Chéraga...);
- Introduction du nouveau plan des comptes au niveau de la comptabilité centrale ;
- Généralisation du réseau MEGA PAC à travers nos agences et structures centrales ;
- Mise en place d'une application relative à la détermination des moyens de paiement et au transport d'images d'appoints.

2002

Généralisation de la norme «banque assise» avec service personnalisé aux agences principales du territoire national.

2003

L'organisation commerciale agence (OCA) a eu pour but :

- Améliorer la connaissance de la clientèle à travers la spécialisation des commerciaux ;
- Optimiser la vente des produits et services bancaires et rechercher les opportunités de vente ;
- Mettre à niveau la qualité de service à l'adresse de la clientèle ;
- Répondre au souci de rentabilité des points de vente.

2017

Installation du logiciel FLEX CUB.

[8] [10]

1.3 Les missions de la BADR

La BADR a été créée pour répondre à une nécessité économique, née d'une volonté politique afin de restructurer le système agricole, assurer l'indépendance économique du pays et relever le niveau de vie des populations rurales.

Ses principales missions sont

- Le traitement de toutes les opérations de crédit, de change et de trésorerie ;
- L'ouverture de comptes à toute personne faisant la demande ;
- La contribution au développement du secteur agricole ;
- L'assurance de la promotion des activités agricoles, agro alimentaires, agro industrielles et artisanales ;
- Le contrôle avec les autorités de tutelle de la conformité des mouvements financiers des entreprises domiciliées. [8]

1.4 Les objectifs de la BADR

- L'augmentation des ressources aux meilleurs coûts et rentabilisation de celles-ci par des crédits productifs et diversifiés dans le respect des règles ;
- La gestion rigoureuse de la trésorerie de la banque tant en dinars qu'en devises ;
- L'assurance d'un développement harmonieux de la banque dans les domaines d'activités la concernant ;
- La satisfaction de ses clients en leur offrant des produits et services susceptibles de répondre à leurs besoins ;
- Le développement commercial par l'introduction de nouvelles techniques managériales telles que le marketing, et l'insertion d'une nouvelle gamme de produits. [8]

1.5 Les services de la BADR

• **Compte courant en dinars**

Compte chèque dinars de la BADR peut s'ouvrir d'une manière très facile et souple, loin de toutes formalités compliquées ou excès de paperasse. Avec le compte chèques dinars BADR, le client peut

- Déposer / retirer de l'argent à tout moment (compte à vue);
- Domicilier les revenus et envoyer / recevoir de l'argent de ses proches (opérations fluides);
- Équiper le client de plusieurs moyens de paiement : chéquier, carte bancaire...etc.
- Régler les factures par virements permanents ou prélèvements automatiques;
- Suivre les mouvements et le solde de compte à distance : e-banking, mobile banking.

• **Compte courant en devise**

Avoir un compte pour recevoir de l'argent de l'étranger ou de disposer de moyens de paiement lors d'un voyage à l'étranger ou de profiter des facilités internationales

- Avoir une base pour toutes les relations bancaires en international;
- Domicilier les revenus provenant de l'étranger;
- Équiper le client d'une carte internationale VISA ou MASTER CARD;
- Effectuer l'achat / retraits à l'étranger via les cartes internationales;
- Avoir la possibilité de payer des achats internationaux sur internet;
- Suivre les mouvements et le solde de compte à distance.

• **Compte à épargne (LEB)**

Le compte épargne (LEB) avec intérêts est un compte sur livret, qui est

- Un compte rémunéré et apporte des intérêts trimestriellement;
- Un compte à vue qui ne bloque pas les avoirs et les laisse disponible à tout moment;
- Facile à alimenter grâce soit aux virements permanents ou ponctuels, soit aux virements à distance à l'aide de la carte TAWFIR, ou par simple versement;
- Facile à suivre à domicile via internet BADRnet.

Le compte épargne sans intérêts est également un compte sur livret, qui vous permet

- Préserver les économies en sécurité sans engendrer des intérêts ;
- Garder la possibilité de les retirer à tout moment par la carte TAWFIR ou par retrait au guichet ;
- Avoir beaucoup de solution pour l'alimenter, soit par versement, virement périodique ou occasionnel, virement par carte TAWFIR ;
- Suivre les mouvements et le solde à travers le service e-banking BADRnet.

● **Compte à épargne junior (LEJ)**

Le compte épargne junior sans intérêts est un compte sur livret

- Un compte non rémunéré afin de répondre à un besoin particulier de la clientèle ;
- Un compte à vue qui ne bloque pas les avoirs et les laisse disponibles à tout moment ;
- Un compte LEJ sans intérêts peut être alimenté par des virements ordonnés par le tuteur légal ou toute personne souhaitant alimenter ce compte à partir de leur compte chèque ou compte courant ;
- Facile à alimenter grâce aux virements permanents ou ponctuels, soit au virement à distance à l'aide de la carte TAWFIR, ou par simple virement ;
- Facile à suivre à domicile via le portail internet BADRnet.

● **Dépôt à terme**

C'est un compte de dépôt non matérialisé par des titres bancaires, destiné aux personnes physiques ou morales formes de placements à taux variable

- Montant minimum 10.000 DA ;
- Durée minimale 3 mois ;
- Les intérêts sont payables à terme, soit en espèces, soit par crédit du compte.

● **Bon de caisse**

C'est un dépôt à terme matérialisé par un titre par lequel le client sollicite la banque pour souscrire une somme déterminée à une durée de son choix

- A l'échéance, la banque verse une majoration du capital ;
- Le bon de caisse est destiné aux personnes physiques et morales ;
- Il peut être nominatif, au porteur ou anonyme, et les intérêts sont discomptés

au taux de référence de la période, conformément aux conditions générales de la banque ;

- Minimum de placement est d'une durée allant de trois mois à cinq ans.

● **Crédit d'exploitation**

Crédit d'investissement «ETTAHADI»

Le crédit d'investissement est un crédit à moyen terme et à long terme. Il est partiellement bonifié par l'État et accordé aux entreprises de production de biens ou de services dans le cadre de la création ou d'extension de leurs activités. Il s'agit d'un crédit d'investissement partiellement bonifié destiné aux nouvelles exploitations agricoles et d'élevage ou aux projets implantés sur des terres agricoles non exploitées, relevant de la propriété privée ou du domaine privé de l'État. Les projets validés et remplissant les conditions d'admissibilité auprès des structures habilitées du Ministre de l'Agriculture et du Développement Rural (MADR) doivent répondre aux exigences suivantes

- La viabilité du projet et sa durabilité ;

- La rentabilité financière du projet ;

- La capacité de remboursement.

Les intérêts sont pris en charge par le MADR (Ministre de l'Agriculture et du Développement Rural) sur le FNDIA (Fonds Nationale de Développement d'Investissement Agricole) comme suit

- Prise en charge de la totalité des intérêts par le MADR quand la durée de remboursement du crédit ne dépasse pas trois ans ;

- Le bénéficiaire du crédit aura à payer 1% intérêt quand le remboursement est effectué entre trois et cinq ans ;

- Au-delà de cette période, le bénéficiaire aura à rembourser l'intégralité du taux intérêt du crédit.

● **Le crédit-bail «leasing»**

C'est un contact entre la banque (crédit bailleur) et le promoteur (crédit-preneur) pour la location de biens, de fabrication locale, rentrant directement dans la réalisation de projets d'investissements.

- Montant : le crédit peut atteindre 100% du coût des équipements à acquérir ;

- Plus généralement, une participation du promoteur, à hauteur de 20 à 30% du coût globale, est requise ;

- Durée de la location : dix ans pour les moissonneuses-batteuses et cinq ans pour

les autres équipements ;

- Taux intérêt : le taux appliqué est de 9% (5% plus 4% de bonification).

La BADR dans une première phase a lancé le leasing financier afin de diversifier ses produits de soutien à l'économie nationale, et en application des résolutions de l'assemblée générale de l'activité leasing, la BADR a mis en place le financement par le leasing financier en interne.

● **Virements internationaux**

Pour effectuer un virement de l'étranger vers son compte devise BADR, le client doit fournir à sa banque les codes BIC (Bank Identifier Code) et IBAN (International Bank Account Number).

Le code BIC est un identifiant unique de la banque dans le réseau SWIFT (Society for Worldwide Interbank Financial Telecommunication).

- Il est constitué de 8 ou 11 caractères ;
- Le code BIC (ou SWIFT) de la BADR est : BADRDZAL ;
- Le code IBAN se compose de cinq caractères (code banque) suivis du code RIB (Relevé d'identité Bancaire).

● **BADRnet e-banking**

C'est le portail e-banking pour bénéficier des prestations bancaires à domicile, via internet, entre autres

- La consultation de soldes et de mouvement du(es) compte(s)
- Le téléchargement du(es) relevé(s) de comptes
- La passation d'ordre(s) de virement de masse (pour les entreprises)
- Être titulaire d'un compte bancaire
- Souscrire un abonnement auprès de votre agence domiciliaire
- Récupérer l'identifiant et le mot de passe qu'il faut changer à la première connexion
- Pouvoir effectuer le premier accès BADRnet, une fois votre inscription confirmée, en suivant les orientations du guide utilisateur, disponible sur la page d'accueil du portail BADRnet. [9]

SECTION2 : organisation et organigramme de la BADR

1.6 Organisation de la BADR

1.6.1 Organisation et Définition des tâches

À la différence des services du siège de l'agence, elle est un lieu ouvert au public permettant aux clients de procéder à des opérations bancaires qui sont assurées auprès des guichetiers et des arrières guichetiers et selon l'activité, on peut présenter l'agence comme suit

Le guichet

L'office ou la partie qui est responsable des activités commerciales, est en contact direct avec les clients.

L'arrière guichet

L'ensemble du personnel et des moyens informatiques qui gèrent les comptes, les transactions administratives et logiques, ce service collabore avec le front office, il est reparti comme suit

- Le directeur/responsable d'agence ;
- Le directeur adjoint ;
- Le service commerce extérieur COMEX ;
- Le service clientèle commerciale CLI ;
- Le service portefeuille.

Organisation du département commercial (front office)

Dirigé par un chef de département, il est composé de trois employés de guichet, chargés d'effectuer les opérations suivantes

- **l'ouverture de la journée comptable**

L'ouverture informatique de l'agence et des caisses principales et secondaires, l'ouverture des coffres.

- **Les versements**

Le client remplit un bordereau de versement et doit le remettre au guichetier qui doit l'accuser et l'enregistrer.

- **Les retraits**

Par des chèques normalisés, chèques de guichet, ou les retraits en devise, dont on peut citer un moyen de transfert de l'étranger WESTERN UNION. C'est un moyen récent pour recevoir de l'argent de l'étranger en monnaie locales. Cependant, en Algérie le client peut recevoir des transferts mais ne peut envoyer. Alors, pour recevoir son argent, le client doit seulement remplir un formulaire remis par la banque.

- **L'émission de chèque de banque**

C'est un chèque bancaire particulier, tiré sur compte de la banque, dont le principal avantage est d'assurer au créancier, sous certaines réserves, le paiement de la somme due. Le client doit se présenter à la banque afin de remplir et signer une demande de chèque de banque.

- **Le change manuel**

C'est l'opération qui consiste à l'achat et vente de devises en respectant la réglementation en vigueur émise par les autorités monétaires (conditions de la banque centrale, taux de change. . .). L'achat et vente de devises concerne soit un client de société générale soit un client de passage, l'opération s'effectue par crédit en compte ou par remise.

- **La mise à disposition**

C'est un ordre écrit donné par le titulaire du compte à sa banque de mettre à sa disposition ou à celle d'une tierce personne une somme déterminée auprès d'une autre agence du même réseau. La mise à disposition n'est valable que si le bénéficiaire n'a pas de compte auprès de l'organisme payeur sinon elle sera considérée comme un virement et c'est le détail qui fait la différence entre les deux opérations.

Organisation du département administratif (back office)

- **le directeur/responsable de l'agence**

Prend part à définir les objectifs, dans le but d'accroître le volume, la qualité, la rentabilité de l'ensemble, en veillant constamment à la maîtrise des risques.

Il doit appliquer les politiques définies par la direction et superviser l'activité commerciale des charges de la clientèle.

- **L'adjoint**

Veille à la transmission de toutes les informations entre le responsable et les différents services d'agence ainsi que le règlement des opérations importation /exportation d'où on a : la domiciliation bancaire, la gestion des devises (sortir ou entrée), l'ouverture des lettres de crédits (accréditif) et l'ouverture des crédits

documentaires CREDOC.

Le service clientèle commerciale CLICOM

Ces conseillers de clientèle viellent à assurer le suivi de toutes les opérations avec les entreprises, surtout les PME comme suit :

- **crédits d'exploitation**

Crédit de caisse, découvert, crédit à signature, et les crédits documentaires (transaction internationales).

- **Leasing**

C'est une opération par laquelle un crédit-bailleur (la banque) achète un bien d'équipement en vue de le louer à son client (le locataire), celui-ci bénéficie contractuellement de la possibilité de devenir propriétaire de ce bien à échéance du contrat, moyennant un prix convenu d'avance. Les matériels financés en leasing sont : matériel roulant, engin de travaux publics, matériel de lavage, équipement industriel, matériel médical.

- **Clôture des comptes**

Dans les cas suivant : décès, demande du client ou par la banque (un compte sans mouvement ou le non respect des conditions).

[8]

1.7 Organigramme générale de la BADR

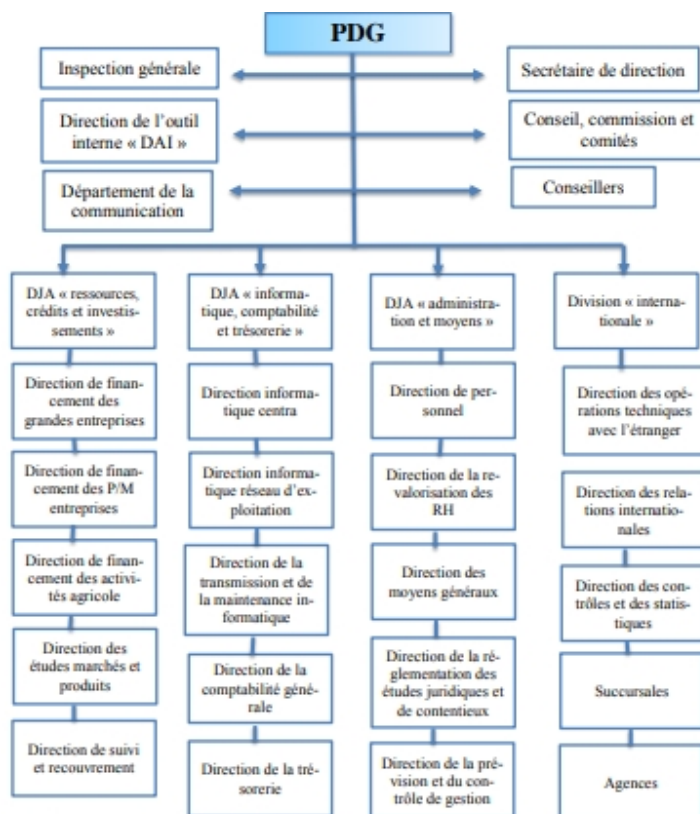


FIGURE 1.1 – Organigramme générale de la BADR

Organigramme de la BADR AZAZGA 571

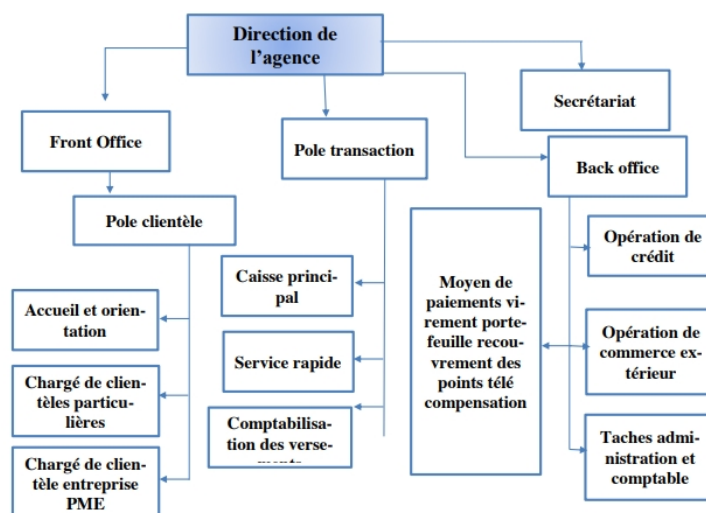


FIGURE 1.2 – Organigramme de la BADR AZAZGA 571

SECTION3 : crédits d'investissement

1.8 Présentation

1.8.1 Définition

Les crédits d'investissement peuvent être définis comme des prêts ou des lignes de crédit accordés aux entreprises pour la création, l'extension ou le renouvellement et la modélisation des moyens de production, ainsi que pour financer des projets d'investissement, tels que l'achat d'équipement, l'expansion des installations, la recherche et le développement...etc. ces crédits sont généralement à long terme et sont remboursés avec des intérêts sur une période spécifiée.

1.8.2 Éligibilité

Toute personne morale justifiant des documents nécessaires, notamment l'étude techno économique. Une étude préalable est réalisée par les chargés d'étude de la BNA, traitant la faisabilité, la fiabilité ainsi que la rentabilité d'un projet, et donne un financement jusqu'à 80 % du montant du projet. La BNA accorde au client une période de différé jusqu'à la montée en cadence de son activité, pour les projets éligibles dans le cadre des dispositifs des pouvoirs publics. [12]

1.8.3 Délai de traitement du dossier de crédit et montant du crédit

Après complétude de l'ensemble des documents exigés et à compter de l'introduction de la demande, la banque assurera une réponse aux clients dans un délai de 30 jours maximum. Le montant du crédit est déterminé en fonction des capacités de remboursement du projet et du cash-flow dégagé par l'entreprise. [12]

1.8.4 Durée du crédit

Le remboursement des crédits à moyen terme (CMT) se fait sur une période pouvant aller de trois à sept ans, une période de différé de remboursement de 6 mois à 3 ans peut être accordée. Quand au crédit à long terme (CLT), le remboursement se fait sur plus de sept ans. [12]

1.9 Différents types de crédit

1.9.1 Crédit à moyen terme (CMT)

Un crédit à moyen terme est un type de prêt accordé par une institution financière pour une durée qui varie généralement entre un et cinq ans. Ce type de crédit est souvent utilisé pour financer des investissements ou des besoins financiers qui ont un horizon de rentabilité relativement court à moyen terme. Les caractéristiques d'un crédit à moyen terme peuvent inclure des paiements mensuels ou trimestriels réguliers, un taux d'intérêt fixe ou variable, et des garanties requises en fonction du montant du prêt et de la politique de la banque. Les formes de crédit à moyen terme pour le financement de l'investissement sont : CMT réescomptable, CMT mobilisable, CMT directe.

1.9.2 Crédit à long terme (CLT)

Les crédits à long terme sont des formes de financement qui s'étendent sur une période de remboursement étendue, généralement supérieure à cinq ans. Ces crédits sont souvent utilisés pour des investissements importants tels que l'achat de biens immobiliers, l'acquisition d'entreprises, ou le financement de projets d'infrastructure. Ils sont généralement accordés par des banques ou des institutions financières et peuvent nécessiter des garanties. Les modalités de remboursement peuvent être variables, avec des paiements échelonnés sur la durée du prêt ou un remboursement en une seule fois à l'échéance.

1.9.3 Crédit-bail

Le crédit-bail également connu sous le nom de leasing, est une forme de financement où une entreprise loue un actif, comme un équipement ou un véhicule, pour une période déterminée, moyennant des paiements réguliers. À la fin du contrat de crédit-bail, l'entreprise peut avoir l'option d'acheter l'actif à un prix prédéterminé ou de renouveler le contrat de location. On peut citer deux types de ce crédit

Crédit-bail mobilier

Lorsque le bien loué est un bien mobilier (équipement, matériel ou outillage), ce bien sera loué avec option d'achat pour une période déterminée et irrévocable, le contrat ne peut prendre fin à l'initiative d'une des deux parties. [8]

Crédit-bail immobilier

Lorsque le bien loué est un bien immeuble de production, sa durée est de quinze à vingt ans et son coût est plus élevé que celui du crédit-bail mobilier. [8]

1.10 Conditions d'octrois de crédit

Le crédit investissement est assorti de conditions, dont les plus importantes sont

- Versement de la part d'autofinancement ;
- Concrétisation des garanties ;
- Paiement direct au fournisseur ;
- Surtout le respect des rubriques d'investissement indiquées dans l'étude technico-économique présentée par le promoteur.

La banque peut exiger toutes autres conditions de nature à garantir la réalisation du projet et son entrée en exploitation (qualité des intervenants dans la réalisation des projets et dans la fourniture des équipements).

[12]

1.11 Garanties proposées à la banque dans le cadre d'un crédit d'investissement

Les garanties relatives aux crédits d'investissements qu'on peut présenter à la banque sont

- L'hypothèque d'un bien immobilier, le nantissement de bons de caisse ou de dépôt à terme ;
- Le nantissement matériel (si l'objet du financement est matériel) ;
- Le gage véhicule (si l'objet du financement est un matériel roulant) ;
- La caution solidaire des associés ;
- La caution d'une tierce personne solvable ;
- L'adhésion au fond de garantie institutionnelle (CGCI-FGAR) ;
- Les assurances.

[12]

CONCLUSION

À la fin de ce chapitre, nous pouvons constater que, les opérations d'investissements jouent un rôle crucial dans le développement économique et sociale de l'Algérie, en soutenant l'agriculture, l'entrepreneuriat, l'emploi, l'inclusion financière et le développement des infrastructures tels que la construction des routes, d'écoles ou de centre de santé dans les zones rurales.

Ces investissements contribuent à créer des opportunités économiques, à réduire les inégalités et à améliorer la qualité de vie des populations locales.

Chapitre 2

Les équations différentielles ordinaires

Introduction

Les équations différentielles ordinaires (EDO) sont des équations impliquant une fonction inconnue d'une seule variable, généralement représentée par $y(x)$ ou simplement y , et ses dérivées par rapport à cette variable. Notamment utilisées pour modéliser des phénomènes changeant en fonction du temps, de l'espace ou d'autres variables indépendantes, elles jouent un rôle crucial dans de nombreux domaines, tels que la physique, l'ingénierie, l'économie et la biologie, fournissant des outils pour comprendre et prédire le comportement des systèmes dynamiques en contrôle optimal.

2.1 Définitions

- On appelle **équation différentielle d'ordre n** , une relation de la forme $f(x, y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}) = 0$ entre une variable réelle x , une fonction inconnue y de la variable x , et les dérivées successives $\dot{y}, \dots, y^{(n)}$ de cette fonction.

Toute fonction $y(x)$ vérifiant $F(x, y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}) = 0$ est appelée solution de l'équation différentielle. [13]

- Une équation différentielle d'ordre n est linéaire si elle est de la forme :

$$a_0(x)y + a_1(x)\dot{y} + a_2(x)\ddot{y} + \dots + a_n(x)y^{(n)} = g(x).$$

où les a_i pour $i = 0, \dots, n$ et g sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

- Une équation différentielle linéaire d'ordre n est dite homogène ; ou sans second membre si la fonction g est nulle

$$a_0(x)y + a_1(x)\dot{y} + a_2(x)\ddot{y} + \dots + a_n(x)y^{(n)} = 0.$$

- Une équation différentielle linéaire est à coefficients constants si

$$a_0y + a_1\dot{y} + a_2\ddot{y} + \dots + a_ny^{(n)} = g(x).$$

où les a_i , pour $i = 0, \dots, n$ sont des constantes et g est une fonction réelle continue.

2.2 Équation différentielle du premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre est de la forme

$$\dot{y} = f(x, y),$$

où f est une fonction continue par rapport à x sur un intervalle I de \mathbb{R} .

2.2.1 Équation différentielle à variables séparables

On appelle équation différentielle à variables séparables une équation de la forme

$$\dot{y}f(y) = g(x), \quad (1.1)$$

où f, g sont des fonctions continues sur I .

Méthode de résolution [13]

On commence par remplacer \dot{y} par $\frac{dy}{dx}$, l'équation différentielle s'écrit alors

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x),$$

en intégrant séparément chaque membre, on obtient $\int f(y) dy = \int g(x) dx$.

Exemples

1. $\dot{y} = e^{-y} \implies e^y dy = dx \implies e^y = x + c, c \in \mathbb{R}$. Donc la solution est $y = \ln|x + c|$.
2. $(x^2 + 1) dy = 2x(y^2 + 1) dx \implies \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int \frac{2x dx}{x^2 + 1} \implies \arctan(y) = \ln(x^2 + 1) + c \implies y = \tan(\ln(x^2 + 1) + c), c \in \mathbb{R}$.

2.2.2 Équation différentielle homogène

Premier cas

Une équation différentielle homogène est une équation de la forme

$$\dot{y} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Méthode de résolution

On effectue le changement de fonction $t = \frac{y}{x}$ (ou $y = tx$) pour se ramener à une équation à variable séparable. On obtient ainsi $\dot{y} = t + x\dot{t}$ et en égalant cette expression avec $f(\frac{y}{x}) = f(t)$, on aboutit à l'équation suivante : $t + x\dot{t} = f(t)$. On peut alors séparer les variables $x \frac{dt}{dx} = f(t) - t$ ou $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t)-t}$, si $f(t) \neq t$ Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation différentielle à variables séparables.

Exemple

- Soit $x\dot{y} = y + x$, en posant $t = \frac{y}{x}$ alors $y = tx \implies \dot{y} = t + \dot{t}x$, on retrouve

$$x(t + \dot{t}x) = tx + x \implies t + \dot{t}x = t + 1 \implies \dot{t}x = 1 \implies x \frac{dt}{dx} = 1 \implies dt = \frac{dx}{x}.$$

Ainsi, $t = \ln|x| + c, c \in \mathbb{R}$. d'où la solution est $y(x) = x \ln|x| + cx$.

Second cas

Une équation différentielle homogène de la forme

$$\dot{y} + a(x)y = 0. \quad (E_h)$$

où a est une fonction continue sur I .

Méthode de résolution

(E_h) Est une équation à variable séparables en effet

$$\dot{y} = -a(x)y \implies \frac{dy}{y} = -a(x) dx.$$

En intégrant chaque membre $\int \frac{dy}{y} = \int -a(x) dx \implies \ln|y| = \int -a(x) dx + c, c \in \mathbb{R}$.
D'où la solution générale de E_h est donnée par $y_h = Ke^{-\int a(x) dx}, K = \pm e^c \in \mathbb{R}$.

Exemple

— $\dot{y} - y \cos(x) = 0 \implies \frac{dy}{y} = y \cos(x) \implies \frac{dy}{y} = \cos(x) dx,$

en intégrant chaque membre, on obtient

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cos(x) dx \implies \ln|y| = \sin(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

D'où la solution générale de E_h est

$$y = ke^{\sin(x)}, \quad k = \pm e^c.$$

2.2.3 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition

Soient a et b deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de \mathbb{R} . On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation de la forme

$$\dot{y} + a(x)y = b(x). \quad (E)$$

où $b(x)$ est le second membre. On associe à l'équation (E) l'équation sans second membre

$$\dot{y} + a(x)y = 0. \quad (E_h)$$

[13]

Méthode de résolution

La solution générale de (E) est donnée par $y_g = y_h + y_p$ avec y_h est la solution de l'équation homogène (E_h) (sans second membre), et y_p la solution particulière de l'équation complète (E).

Méthode des variations de la constante

On associe à l'équation complète (E) une équation sans second membre

$$\dot{y} + a(x)y = 0. \quad (E_h)$$

Cette équation est à variables séparables $\frac{dy}{y} = -a(x) dx$ d'où $y_h = kf(x)$ où $f(x) = e^{-\int a(x) dx}$, la méthode consiste à faire varier la constante k c'est à dire la constante k devient la fonction à trouver $k(x)$ avec $y_p = kf(x)$.

Dérivons y_p et reportons dans l'équation différentielle (E)

$$\dot{k}(x)f(x) + \dot{f}(x)k(x) + a(x)k(x)f(x) = b(x) \Rightarrow \dot{k}(x)f(x) + k(x) \left[\dot{f}(x) + a(x)f(x) \right] = b(x) \Rightarrow \dot{k}(x)f(x) = b(x)$$

On retrouve

$$y_p = \left(\int \frac{b(x)}{f(x)} dx \right) f(x).$$

Exemple [13]

— Soit (E) : $xy - 2y = x^3$.

L'équation homogène associée est

$$xy - 2y = 0. \quad (E_h)$$

On sépare les variables

$$\frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x}.$$

En intégrant des deux côtés

$$\int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x},$$

d'où

$$\ln |y| = 2 \ln |x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

En exponentiant, on trouve

$$|y| = e^c x^2 \implies y = kx^2, \quad k = \pm e^c.$$

Pour déterminer la solution particulière, on suppose $y(x) = k(x)x^2$ et on calcule la dérivée

$$\dot{y} = \dot{k}(x)x^2 + 2k(x)x.$$

En substituant dans (E), on obtient

$$\dot{k}(x)x^3 + 2k(x)x^2 - 2k(x)x^2 = x^3 \implies \dot{k}(x)x^3 = x^3 \implies \dot{k}(x) = 1.$$

En intégrant cette expression, on trouve

$$k(x) = x + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, la solution particulière est

$$y_p(x) = (x + \alpha)x^2.$$

La solution générale de l'équation avec second membre est donc :

$$y(x) = (x + \alpha)x^2 + kx^2.$$

2.2.4 Équation de Bernoulli

On appelle une équation de Bernoulli une équation de la forme

$$E_b : \dot{y} + a(x)y = b(x)y^n,$$

où a et b sont des fonctions de x , n une constante réelle quelconque différente de 0 et de 1 (Valeurs pour lesquelles l'équation est linéaire). [13]

Méthode de résolution [13]

On se ramène à une équation linéaire. Pour cela divisons les deux membres de l'équation par y^n , on aura

$$\frac{\dot{y}}{y^n} + a(x)\frac{1}{y^{n-1}} = b(x),$$

faisons le changement de fonction inconnue défini par $z = \frac{1}{y^{n-1}}$. Puisque y est fonction de x .

Donc $\dot{z} = (1 - n)y\frac{1}{y^n}$

On obtient une équation différentielle du premier ordre (E) en z sous la forme

$$\frac{\dot{z}}{1 - n} + a(x)z = b(x).$$

Exemple [13]

— Soit l'équation différentielle suivante :

$$x \dot{y} + 3y = x^2 y^2.$$

Cette équation est de Bernoulli avec $n = 2$, divisons les deux membres par y^2 , on obtient

$$\frac{x \dot{y}}{y^2} + \frac{3}{y} = x^2.$$

Posons $z = \frac{1}{y}$, d'où la dérivée de z est $\dot{z} = -\frac{\dot{y}}{y^2}$. On obtient une équation différentielle du premier ordre (E) en z sous la forme

$$-x\dot{z} + 3z = x^2. \quad (E)$$

On commence par résoudre l'équation homogène

$$-x\dot{z} + 3z = 0. \quad (E_h)$$

Ensuite, on cherche une solutions particulière en utilisant la méthode de variation de la constante.

D'où la solution générale de l'équation avec seconde membre est donnée par

$$z = (1 + \alpha x) x^2.$$

Et l'intégrale générale de l'équation différentielle est

$$y = \frac{1}{(1 + \alpha x) x^2}.$$

2.3 Équation différentielle du second ordre

2.3.1 Définition

Soit a , b et f trois fonctions continues sur I , On appelle équation différentielle du second ordre une équation de la forme

$$\ddot{y} + a(x)\dot{y} + b(x)y = f(x). \quad (E)$$

- On dit que E est une équation différentielle du second a coefficients constants si elle est de la forme

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = f(x),$$

où a , b sont des constantes données et f est une fonction quelconque .

- On associer à l'équation (E) l'équation sans second membre a coefficients constants

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0. \quad (E_h)$$

- On appelle équation caractéristique associer à E_h l'équation définie par

$$r^2 + ar + b = 0, \quad (E_r)$$

où $r \in \mathbb{C}$. [13]

2.3.2 Résolution de l'équation homogène E_h

Théorème 1

Soit y_1 , y_2 deux solutions particulières de E_h linéairement indépendantes, alors la solutions générale de E_h est donnée par $y = c_1y_1 + c_2y_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Théorème 2

Soit (E_r) l'équation caractéristique associer à (E_h) et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (E_r)

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation (E_r) admet deux solutions (racines) réelles

ainsi, la solution de E_h est donnée par

$$y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E_r) admet une solution (racine) réelle double $r_1 = r_2 = r$

ainsi, la solution de (E_h) est donnée par

$$y_h = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation E_r admet deux solutions complexes $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, (α partie réelle et β partie imaginaire des racines).

Ainsi, la solution de E_h est donnée par

$$y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2.3.3 Résolution d'une équation du second ordre à coefficients constants (E)

Pour avoir la solution de l'équation complète (E), il faut ajouter à la solution de l'équation Sans second membre une solution particulière de l'équation complète (E).

Cas où le second membre est un polynôme de degré n

L'équation s'écrit : $ay'' + by' + cy = P_n(x)$.

- Si $c \neq 0$, on cherche une intégrale particulière sous la forme d'un polynôme de degré n .
- Si $c = 0$ et $b \neq 0$, on cherche une intégrale particulière sous la forme d'un polynôme de degré $(n + 1)$.
- Si $c = 0$ et $b = 0$, l'équation se réduit à $ay'' = P_n(x)$ et l'on intègre deux fois Successivement.

Exemple

- Soit l'équation différentielle

$$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = 2x^2 - 3x + 1. \quad (E)$$

L'équation homogène associée est

$$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = 0.$$

Son équation caractéristique est

$$r^2 + r - 2 = 0,$$

qui admet les racines réelles $r = 1$ et $r = 2$. L'intégrale générale de l'équation homogène est donc

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

Le second membre est un polynôme de degré 2, et comme la constante c n'est pas nulle, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2 à coefficients indéterminés

$$y_p = ax^2 + bx + c.$$

En remplaçant y_p dans l'équation (E), on obtient

$$\ddot{y}_p + \dot{y}_p - 2y_p = -2ax^2 + (-2b + 2a)x - 2c + b + 2a.$$

En égalant les termes à ceux du second membre de l'équation complète, nous avons

$$-2ax^2 + (-2b + 2a)x - 2c + b + 2a = 2x^2 - 3x + 1.$$

En identifiant les coefficients des termes de même degré, nous obtenons les équations suivantes

$$\begin{aligned} -2a &= 2, \\ -2b + 2a &= -3, \\ -2c + b + 2a &= 1. \end{aligned}$$

En résolvant ces équations, on trouve

$$a = -1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{5}{4}.$$

Ainsi, la solution particulière de E est

$$y_p = -x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}.$$

La solution générale de l'équation complète est

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}.$$

Cas où le second membre est de la forme $e^{mx} P_n(x)$, où $m \in \mathbb{R}$ et $P_n(x)$ est un polynôme de degré n .

L'équation s'écrit : $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = e^{mx} P_n(x)$.

En effectuant le changement de fonction inconnue : $y = e^{mx} z$.

Exemple

— Soit E : $\ddot{y} - \dot{y} - 2y = x^2 e^{-3x}$.

La solution de l'équation sans second membre est

$$c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}.$$

posons $y = e^{-3x} z$ et remplaçons dans E , on obtient

$$e^{-3x}(\ddot{z} - 7\dot{z} + 10z) = x^2 e^{-3x},$$

où en divisant par e^{-3x} qui est différent de zéro pour tout x

$$\ddot{z} - 7\dot{z} + 10z = x^2.$$

Équation à second membre polynomial qui admet pour solution particulière

$$z_0 = \frac{1}{10}x^2 + \frac{14}{100}x + \frac{78}{1000}.$$

L'équation proposée admet donc pour solution particulière $z_0 e^{-3x}$ et en ajoutant la solution de l'équation sans second membre, on obtient

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{14}{100}x + \frac{78}{1000} \right) e^{-3x}.$$

Remarque

Dans le cas où le polynôme P_n se réduit à une constante, le second membre est de la forme Ae^{mx} , Si m n'est pas une racine de l'équation caractéristique, on obtient très simplement une solution particulière en cherchant y_0 sous la forme λe^{mx} par contre, si m est racine de l'équation caractéristique, il faut utiliser le changement de fonction inconnue $y = e^{mx} z$. pour trouver une solution particulière.

Cas où le second membre est de la forme $A_1 \cos(\omega x) + B_1 \sin(\omega x)$, A_1 et B_1 sont des constantes réelles donnée

l'équation s'écrit :

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = A_1 \cos(\omega x) + B_1 \sin(\omega x).$$

où A_1 et B_1 sont des constantes réelles et ω est une constante.

— si $i\omega$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique associée à l'équation homogène, on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x),$$

où A et B sont des constantes réelles à déterminer. Cette forme est choisie en raison de la présence de termes trigonométriques dans le second membre de l'équation différentielle.

- Si $i\omega$ est une racine de l'équation caractéristique de l'équation homogène, les fonctions $\cos(\omega x)$ et $\sin(\omega x)$ sont des solutions de l'équation homogène. Ainsi, elles ne peuvent pas être utilisées directement pour trouver une solution particulière de l'équation complète. Dans ce cas, on cherche des solutions particulières sous la forme

$$y_p = x (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)),$$

où A et B sont des constantes réelles à déterminer. Cette forme est choisie pour s'assurer que la solution particulière n'est pas une solution de l'équation homogène.

A et B constantes réelles à déterminer.

Exemple

- soit (E) : $\ddot{y} + 4y = \cos(2x)$.

L'équation homogène associée est : $\ddot{y} + 4y = 0$.

L'équation caractéristique associée est : $r^2 + 4 = 0$.

Les racines complexes conjuguées sont : $r = \pm 2i$.

Par conséquent, la solution générale de l'équation homogène est

$$y_h = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x),$$

où c_1 et c_2 sont des constantes réelles.

Le second membre de l'équation différentielle est de la forme $A_1 \cos(\omega x) + B_1 \sin(\omega x)$ avec $\omega = 2$. Comme $2i$ est une racine de l'équation caractéristique, nous cherchons une solution particulière sous la forme

$$y_p = x (A \cos(2x) + B \sin(2x)),$$

où A et B sont des constantes à déterminer. En remplaçant y_p dans l'équation différentielle, nous obtenons

$$\ddot{y}_p + 4y_p = 4B \cos(2x) - 4A \sin(2x).$$

Pour que cela soit égal à $\cos(2x)$, il faut que : $B = \frac{1}{4}$ et $A = 0$.

La solution particulière est donc

$$y_p = \frac{x}{4} \sin(2x).$$

La solution générale de l'équation différentielle est donc

$$y = c_1 \cos(2x) + \left(\frac{x}{4} + c_2\right) \sin(2x),$$

Remarque

De la même manière, on peut considérer des équations du type

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = A_1x^n \cos(\omega x) + B_1x^n \sin(\omega x), n \in \mathbb{Z}.$$

Si $i\omega$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique associée à l'équation homogène, on cherche une particulière de la forme $y_p = P_n(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)$, où P_n et Q_n sont des polynômes de degré n .

Si $i\omega$ est une racine de l'équation caractéristique, il faut chercher une solution particulière de la forme $y_p = P_{n+1}(x) \cos(\omega x) + Q_{n+1}(x) \sin(\omega x)$, où P_{n+1} et Q_{n+1} sont des polynômes de degré $n + 1$.

Cas où le second membre est de la forme $e^{mx}(A_1 \cos(\omega x) + B_1 \sin(\omega x))$

L'équation s'écrit : $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = e^{mx}(A_1 \cos(\omega x) + B_1 \sin(\omega x))$.

En effectuant le changement de fonction inconnue : $y = e^{mx}z$.

Exemple

— Soit (E) : $2\ddot{y} - \dot{y} - 3y = 29 e^{-x} \cos(x)$.

On effectue directement le changement de fonction : $y = e^{-x}z$,

alors : $\dot{y} = e^{-x}(-z + \dot{z})$ et $\ddot{y} = e^{-x}(z - 2\dot{z} + \ddot{z})$.

Après substitution et simplification, on obtient l'équation suivante pour z

$$2\ddot{z} - 5\dot{z} = 29 \cos(x).$$

Et comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche alors une solution particulière de la forme

$$z = A \cos(x) + B \sin(x).$$

Les dérivées de z sont

$$\dot{z} = B \cos(x) - A \sin(x), \quad \ddot{z} = -A \cos(x) - B \sin(x).$$

En substituant ces dérivées dans l'équation simplifiée et en identifiant les coefficients, nous résolvons le système pour déterminer A et B. nous trouvons

$$A = -2 \text{ et } B = -5.$$

D'où la solution particulière de E est donnée par

$$y_p = -(2 \cos(x) + 5 \sin(x))e^{-x}.$$

Et la solution générale de E est

$$y = c_1 e^{\frac{3x}{2}} + c_2 e^{-x} - (2 \cos(x) + 5 \sin(x))e^{-x}.$$

Remarque

Plus généralement, chaque fois que le second membre se présente sous la forme $e^{2x} f(x)$, f fonction quelconque, on peut effectuer le changement de fonction inconnue

$$y = e^{mx} z(x).$$

Cas où le second membre est la somme de plusieurs fonctions

L'équation s'écrit

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x).$$

Si $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ sont des solutions particulières des équations ayant respectivement pour second membre $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ la somme $y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_n(x)$ est une solution particulière de l'équation proposée. En effet, il suffit d'ajouter membre à membre les relations

$$a\ddot{y}_i + b\dot{y}_i + cy_i = f_i(x),$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$, afin de voir que la somme $y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_n(x)$ est une intégrale de l'équation proposée.

Exemple

— Soit l'équation différentielle suivante

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = e^t + 5 \sin(t). \quad (E)$$

La solution de l'équation homogène associée, sans second membre, est

$$(c_1 t + c_2) e^{2t}.$$

Les solutions particulières des équations correspondant aux second membre e^t et $5 \sin(t)$ sont respectivement

$$e^t \quad \text{et} \quad \frac{4}{5} \cos(t) + \frac{3}{5} \sin(t).$$

Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle proposée est

$$y = (c_1 t + c_2) e^{2t} + e^t + \frac{4}{5} \cos(t) + \frac{3}{5} \sin(t).$$

[13]

2.4 Équations différentielles et problème de Cauchy

On s'intéresse aux équations différentielles du premier ordre sous la forme

$$\dot{y}(x) = f(x, y(x)),$$

où $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue si $n > 1$ il s'agit en pratique d'un système différentielle.

Le problème avec condition initiale est appelé problème de Cauchy définie comme suit

$$\begin{cases} \dot{y}(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in \mathbb{I}, y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y(x)$ de l'équation (2.1) vérifiant la condition appelée : « condition initiale $y(x_0) = y_0$ ». [14] [15]

2.4.1 Théorème de Cauchy Lipchitz

Le théorème de Cauchy-Lipschitz est un résultat fondamental dans l'analyse des équations différentielles ordinaires. Ce théorème garantit l'existence d'une solution locale pour les équations différentielles sous certaines conditions.

Considérons les problèmes dits de Cauchy, ayant de la forme

$$\begin{cases} \dot{y}(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

où f est une fonction définie sur un intervalle $I \times \mathbb{R}^n$. Si f est continue sur $I \times \mathbb{R}^n$ vérifiant une condition Lipchitz (fonction lipchitzienne) par rapport à la seconde variable, c'est-à-dire,

$$\exists L \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Alors la solution $y = y(x)$ existe et unique. [16]

Conclusion

En conclusion, les concepts et méthodes abordés dans ce chapitre fournissent une base solide pour la modélisation des systèmes dynamiques. Cette compréhension est essentielle

pour le développement et l'implémentation de stratégies de contrôle optimal, qui seront traitées en détail dans les sections suivantes de ce mémoire. Les équations différentielles offrent un cadre pour formuler et résoudre des problèmes de contrôle, en fournissant les outils nécessaires pour analyser et optimiser les performances des systèmes dynamiques.

Chapitre 3

Théorie du contrôle optimale

Introduction

La théorie du contrôle optimal est une branche des mathématiques appliquées qui étudie la possibilité d'agir sur un système dynamique dépendant du temps de façon à conduire son état initial à un état final souhaité, tout en optimisant un critère de performance [7]. Cette théorie généralise le calcul des variations et fait partie intégrante de la théorie d'optimisation continue.

La théorie du contrôle optimal trouve de nombreuses applications dans des domaines variés

L'aéronautique et l'astronautique (trajectoires optimales de missiles ou de satellites) ;

L'économie (contrôle optimal de la production, de l'investissement, de la consommation) ;

La biologie (contrôle optimal de modèles de croissance de populations) ;

L'ingénierie (commande optimale de processus industriels) ;

Les télécommunications (allocation optimale de ressources).

Avant de nous introduire profondément dans cette théorie permettons-nous d'abord de faire quelques rappels d'algèbre linéaires.

3.1 Quelques notions d'algèbre linéaire

Soit n , m et p des nombres entiers non nuls, T un nombre réel positif, et soit $\omega \in \mathbb{R}^n$.

Définition 3.1.1

On note que $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n avec des coefficients réels.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On appelle polynôme caractéristique de la matrice A , et on le note $p_A(\lambda)$, le déterminant de la matrice $A - \lambda I$. En d'autres termes, le polynôme caractéristique est défini par

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Théorème 3.1.1 (théorème de Hamilton-Cayley)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Si

$$p(X) = \det(XI_n - A) = X^n + p_{n-1}X^{n-1} + \dots + p_1X + p_0,$$

est son polynôme caractéristique (polynôme indéterminée X), alors en remplaçant formellement X par la matrice A dans le polynôme, le résultat est la matrice nulle

$$p(A) = A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \dots + p_1A + p_0I_n = 0_n.$$

où 0_n est la matrice nulle de taille $n \times n$.

Proposition 3.1.1

Le rang d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

Proposition 3.1.2

Un nombre complexe λ est une valeur propre de la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée

1. Le rang de la matrice $A - \lambda I$ est strictement inférieur à n .
2. Le déterminant de la matrice $A - \lambda I$ est nul : $|A - \lambda I| = 0$.

Définition 3.1.2

On dit que V est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre λ si V est un vecteur non nul et

$$AV = \lambda V \iff (A - \lambda I)V = 0.$$

Définition 3.1.3 (matrice diagonale)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. La matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est diagonale si tous ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls.

$$\forall i, j \text{ tels que } i \neq j, \quad a_{i,j} = 0.$$

Définition 3.1.4 (matrice inversible)

Soit A une matrice carrée d'ordre n . on dit que la matrice A est inversible s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que

$$A.B = I_n.$$

Dans ce cas, la matrice B est unique. Elle est appelée l'inverse de la matrice A et on écrit

$$B = A^{-1}.$$

Définition 3.1.5 (matrice symétrique)

Une matrice A est dite symétrique si

$$A^T = A.$$

où A^T désigne la transposée de la matrice A .

Définition 3.1.6 (matrice diagonalisable)

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $D = \text{diag}([\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n])$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$.

$$P^{-1}AP = D \quad \iff \quad A = PDP^{-1}.$$

Définition 3.1.7 (matrice nilpotente)

Soit A une matrice carrée d'ordre n . on dit que la matrice A est nilpotente si Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $A^m = 0$, alors $A^k = 0$, pour tout $k \geq m$.

Définition 3.1.8 (exponentielle d'une matrice)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n . l'exponentielle de la matrice A , notée e^A , est définie par le développement en série entière

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Remarque 3.1.1

- Si la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, son exponentielle e^A se calcule directement à partir de son développement en série entière, puisque celui-ci ne comporte alors qu'un nombre fini de termes.
- Si la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, pour calculer son exponentielle e^A on utilise le résultat suivant

Proposition 3.1.3

On note que $GL_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées inversibles.

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a

- $e^A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$, telle que l'application exponentielle est de classe C^∞ sur \mathbb{K}
- Pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ qui commutent, i.e. $AB = BA$, on a

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$
- Si la matrice A est diagonalisable, alors il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale D telle que

$$P^{-1}AP = D \iff A = PDP^{-1}.$$

Pour calculer l'exponentielle e^A pour une matrice quelconque $A \in M_n(\mathbb{K})$, on utilise le résultat suivant

Proposition 3.1.4 (Décomposition de Dunford)

Si A a un polynôme caractéristique scindé sur \mathbb{K} alors il existe un couple unique (D, N) de matrices tel que

1. $A = D + N$
2. D est diagonalisable, N nilpotente
3. $N D = D N$

Remarque 3.1.2

$$e^A = e^D e^N = e^N e^D.$$

Définition 3.1.9 (fonction convexe)

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . On dit qu'une fonction $f : E \Rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Définition 3.1.10 (ensemble convexe)

On dit qu'un ensemble A d'un espace vectoriel E est convexe si

$$\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda(x + (1 - \lambda)y) \in A.$$

[17]

3.2 Quelques définitions en contrôle optimal

3.2.1 Définition (système dynamique)

- Un système est un ensemble d'objets qui réalisent une opération spécifique.
- Un système dynamique est la donnée d'un système et d'une loi décrivant l'évolution de ce système, cette loi peut être représentée par des équations.

3.2.2 Définition (système de contrôle)

Un système de contrôle est un système dynamique dont on peut modifier le comportement au cours du temps. On agit sur un tel système au moyen d'un contrôle (ou commande). Le système de contrôle peut être un système mécanique (moteur, satellite), un processus chimique (réacteur, colonne de distillation), un circuit électrique ou électronique, un phénomène physique, etc.

L'objectif de la théorie du contrôle peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), d'étudier la contrôlabilité du système et enfin de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal) et c'est l'objectif principal de cette section.

D'un tel système résulte une relation entrée sortie où l'entrée $u(t)$ représente la commande, c'est-à-dire le moyen d'action sur le système, et la sortie $x(t)$ représente ce que l'on observe du système, généralement sous la forme de mesure. Il est représenté par le diagramme suivant

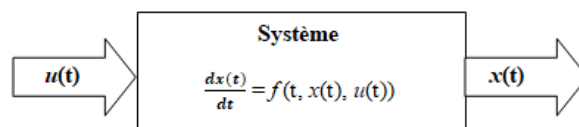


FIGURE 3.1 – Schéma de représentation d'un système de contrôle

[18]

3.3 Formulation mathématique d'un problème de contrôle optimal

La partie la plus importante dans la résolution de tout problème pratique est le processus de modélisation qui exige une description mathématique suffisamment réalisable, simple et la plus fidèle possible à la situation réelle, qu'elle soit physique, économique ou autre.

La formulation d'un problème de contrôle optimal exige une description mathématique du processus à contrôler, avec des contraintes physiques à imposer au système et la détermination du critère de performance à optimiser (objectif du contrôle).

La théorie du contrôle s'intéresse à prédire la réponse du système à une entrée donnée et à expliquer l'influence du contrôle sur la dynamique du système.

Système de contrôle

Considérons un système différentiel explicite de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), t), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où le vecteur $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ est dit variable d'état, x_0 étant l'état initial. Cette variable d'état dépend de la variable réelle $t \in [0, T]$ et vérifie des relations (souvent différentielles) appelées équations d'états, f étant une fonction vectorielle de n composantes f_i , $\prod_{i=1}^n$ pouvant être linéaire ou non linéaire.

Généralement, on souhaite agir sur le système (3.1) de façon à atteindre une cible ou un objectif donné. C'est pour cela que nous modifions le système (3.1) en introduisant une fonction (paramètre) $u(\cdot) \in U$ Qu'on appelle contrôle (commande), qui est une fonction localement intégrable, définie sur $[0, t_f]$.

Ainsi, nous obtenons le système de contrôle explicite qui peut être caractérisé par un ensemble d'équations différentielles ordinaires suivantes

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in U$$

Nous supposons que $f : \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie les conditions du théorème de Cauchy de sorte qu'on puisse assurer l'existence et l'unicité de la solution $x(x_0, u, t)$.

Un problème de contrôle optimal comporte trois (3) éléments

- Une fonction objective (coût) J donnée

$$J(u(t)) = S(x(T)) + \int_0^T g(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \text{opt}$$

- Une contrainte qui prend la forme d'une équation différentielle du 1^{er} ordre décrivant l'évaluation de la variable d'état

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [0, T].$$

- Des conditions spécifiant les valeurs limites des trajectoires des variables d'état

$$x(t_0) = x_0 \in M_0, \quad x(T) = x_1 \in M_1.$$

t : indice de temps ;

t_0 ($t = 0$) : le temps initial ;

T : le temps final ;

$x(t)$: le vecteur des variables d'état ;

$x(0)$: les valeurs représentant la position initiale ;

$x(T)$: les valeurs représentant la position finale ;

$u(t)$: le vecteur des variables de contrôle (commande) ;

Nous supposons que chaque composante de ce vecteur est une fonction continue par partie du temps t , mesurable et bornée ;

U : l'ensemble des contrôles admissibles ($U \in \mathbb{R}^m$) ;

S : une application de classe C^1 par rapport à x et aussi est une fonction algébrique scalaire appelée le dividende terminal ;

g : la fonction coût intermédiaire ;

M : variété différentielle \mathbb{R}_+^n ;

n et m sont les cardinalités des vecteurs d'état et de contrôle respectivement ;

f : une fonction suffisamment régulière dérivable.

Dans tout ce qui se suit on note

$$\begin{aligned} x &= x(t), & u &= u(t). \\ x_0 &= x(0), & x_1 &= x(T). \end{aligned}$$

Le problème général du contrôle optimal est de la forme

$$\begin{aligned} J(u(t)) = S(x(T)) + \int_0^T g(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \text{opt} \\ \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t), \\ x(0) = x_0 \in M_0, \\ x(T) = x_1 \in M_1, \\ u \in U \end{cases} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Remarque

Dans le cas linéaire le système différentiel du problème (3.2) s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(0) = x_0, \\ t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.3)$$

$A(n * n)$: la matrice d'état ;

$B(n * m)$: la matrice de contrôle ;

$R(t)$: une fonction scalaire quelconque.

[15]

Classe des contrôles admissibles [19]

Généralement, les commandes admissibles peuvent être non bornées, bornées ou de type bang-bang.

- **Commande bornée**

Dans beaucoup de problème de contrôle, on peut minorer et majorer les paramètres $1 \leq j \leq r$ par des constantes. Considérons pour ce type de problème la contrainte $a_j \leq u_j \leq b_j$. Lorsque u est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et 1 . Notons que l'on peut remplacer u_j par v_j en posant $u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$ et ainsi v_j est aussi intégrable et l'on a $-1 \leq v_j \leq 1$, $j = 1, \dots, r$

- **Commande bang-bang**

Dans la théorie du contrôle, un contrôle bang-bang est un feedback qui bascule brusquement entre deux valeurs, il est souvent utilisé pour contrôler un système qui accepte une entrée binaire. En d'autres termes, un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle bang-bang, si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, \dots, r$ on a $|u_j(t)| = 1$. Une commande bang-bang est une commande qui possède au moins un instant de commutation.

3.4 Problème de contrôle optimal

Considérons le système dynamique suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), & x(0) = x_0, & t \in [0, T] \\ u \in U. \end{cases} \quad (3.4)$$

Où U est un compact de \mathbb{R}^n .

Lors de la formulation d'un problème de contrôle, l'objectif est de fournir une motivation physique pour la sélection d'une mesure de qualité pour le système. Le problème revient à

définir une expression mathématique qui, lorsqu'elle est optimisée, indique que le système a atteint l'état souhaité. Donc, choisir une mesure de qualité est une traduction en termes mathématiques des exigences physiques du système au fil du temps. En d'autres termes, le problème de contrôle optimal a pour but d'amener le système d'un état initial $x(0) = x_0$ donné à un certain état final $x(T) = x_1$, tout en optimisant un certain critère

$$J(u(t)) = S(x(T)) + \int_0^T g(x(t), u(t), t) dt \rightarrow opt$$

où $g : \mathbb{R}^n \times U \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $x(T)$ et T peuvent être libres ou fixés. On peut classer les fonctions objectives en deux critères physiques de performance.

Temps optimal

On parle d'un problème en temps minimal lorsque $g(x(t), u(t), t) = 1$, $S(x(T)) = 0$ et le temps final T est libre dans l'expression $\min \int_0^T 1 dt$.

Coût optimal

On parle d'un problème en coût minimal lorsque le temps final T est fixé dans l'expression

$$\min_{u \in U} J(u) = S(x(T)) + \int_0^T g(x(t), u(t), t) dt$$

Il existe évidemment des problèmes qui combinent les deux critères physiques de qualité, et on parlera dans ce cas d'un problème de contrôle en temps et en coût minimal.

[19]

3.4.1 Classes de problèmes de contrôle optimal

Selon la forme du critère de qualité, on distingue généralement trois types de problèmes de contrôle optimal

(a) Problème de Lagrange

Un problème de contrôle optimal est dit de Lagrange si le système dynamique est

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0.$$

Où les contrôles $u(\cdot)$ sont des fonctions définies de $[0, T]$ dans $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$, et la fonction coût est comme suit

$$\min_{T, u \in U} J(u) = \int_0^T g(x(t), u(t), t) dt \quad (3.5)$$

où $g : \mathbb{R}^n \times U \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et $x(0) = x_0$ est un état initial donné.

(b) Problème de Mayer

Dans ce cas, le critère à optimiser dépend uniquement de la valeur terminale de l'état. Alors le problème de Mayer peut être défini comme suit

$$\begin{cases} \min_{T, u \in U} J(u) = S(x(T), T) \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.6)$$

(c) Problème de Bolza

L'avantage du problème de Bolza est qu'il regroupe les deux précédentes formulations (Lagrange et Mayer). Le problème de Bolza est défini par

$$\begin{cases} \min_{T, u \in U} J(u) = S(x(T), T) + \int_0^T g(x(t), u(t), t) dt \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Remarque

Les trois formulations sont équivalentes, c'est-à-dire qu'on peut passer de l'une à l'autre. Le problème de Lagrange a été discuté pour la première fois en 1762, Mayer a considéré son problème en 1878, et le problème de Bolza a été formulé en 1913.

[19]

3.5 Contrôlabilité des systèmes dynamiques

Ici on va s'intéresser à la contrôlabilité des systèmes linéaires de dimension finie, c'est à dire des systèmes définies sur un espace d'état de dimension finie (\mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n) et donnés par des équations linéaires.

La contrôlabilité est la propriété de pouvoir trouver au moins un contrôle (dit entrée) tel que la solution du système contrôlé peut atteindre n'importe quel état final en temps fini prédéfini.

L'objectif est de déterminer la notion de contrôlabilité en détails dans le cas des systèmes linéaires autonomes (stationnaires), c'est à dire des systèmes linéaires décrits par des matrices constantes. Quand ces matrices dépendent du temps t , les systèmes sont dits non autonomes (non stationnaires), ce cas sera également étudié. Comme le cas des systèmes non linéaires est plus compliqué que celui des systèmes linéaires, on se limite à linéariser ces systèmes autour de ses points d'équilibre et étudier localement leurs contrôlabilité. [20]

3.5.1 Définition de contrôlabilité

Un système est dit contrôlable si on peut le ramener d'un état initial x_0 à un état final x_1 en un temps fini. Autrement dit le système $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), x(t_0) = x_0$ est dit contrôlable si pour tout points $x_0 \in M_0$ et $x_1 \in M_1$, il existe un contrôle $u(\cdot)$ tel que la trajectoire associée à u relie x_0 à x_1 en un temps fini. [14] [21]

3.5.2 L'ensemble accessible

Considérons le système de contrôle suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) & t \in [0, T] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Définition

Soit le système (3.8) et soit $T > 0$ un temps final donné. On appelle ensemble accessible (ou ensemble atteignable) et on note $Acc(x_0, T)$ l'ensemble de tout les états finaux $x(T, x_0, u) \in \mathbb{R}^n$ atteignable depuis $x_0 \in \mathbb{R}^n$ à l'instant T en fonction des contrôles $u(\cdot) \in U$. donc, pour tout T et tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$Acc(x_0, T) = x_u(T)/u \in U.$$

Où $x_u(\cdot)$ est la solution de système (3.8) associée au contrôle u .

Autrement dit $Acc(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités terminales des solutions de (3.8) au temps T , lorsqu'on fait varier le contrôle u . On peut dire aussi, c'est l'image de l'application entrée-sortie en temps T .

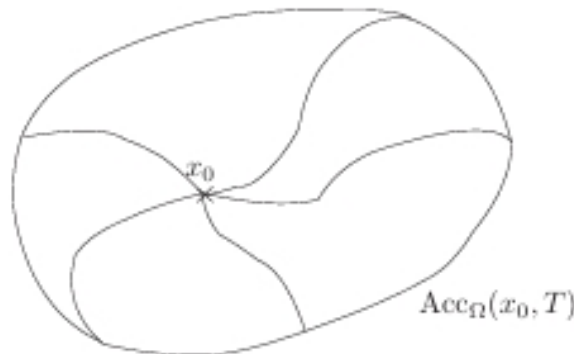


FIGURE 3.2 – Ensemble accessible

Les problèmes linéaires de contrôle ont été étudiés dans la littérature d'une manière très détaillée, mais l'analyse des systèmes non linéaires n'est pas assez développée comme dans le cas linéaire. Pour cela, on se concentre beaucoup plus dans cette section sur la contrôlabilité des systèmes linéaires définis par une équation différentielle linéaire suivante

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0, x(t) \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T].$$

[7] [20] [19]

3.5.3 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Contrôlabilité des systèmes linéaires non-autonomes (instationnaires)

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0, x(t) \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T]. \quad (3.9)$$

La solution de ce système en temps t est

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_{t_0}^t M(t)M^{-1}(s)B(s)u(s) ds, \quad t \in [0, T], x(0) = x_0.$$

Où $M(\cdot)$ est la résolvante, solution du système

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = A(t)M(t), \\ M(0) = I_d \end{cases}$$

Où I_d est la matrice identité. [21]

Théorème [7]

Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en temps t (depuis un point initial quelconque) si et seulement si la matrice

$$D = \int_{t_0}^t M(t)^{-1}B(t)B(t)^\top M(t)^{-1\top} dt,$$

Dite matrice de contrôlabilité ou matrice Gramienne, est inversible

Exemple [17]

— Soit le système définit par la forme matricielle

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} u(t)$$

On pose

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

La résolvante du système $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ est donnée par la formule $M(t) = e^{tA}$. On a le polynôme caractéristique associé à la matrice A est

$$P_\lambda(A) = \lambda^2 + 1 = 0$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. On cherche une matrice inversible P formée par les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

D'où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice A est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale D telle que

$$P^{-1}AP = D \iff A = PDP^{-1}$$

Ainsi, la matrice diagonale D est

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

D'où

$$e^{tA} = e^{tPDP^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1}.$$

Un calcul simple permet d'obtenir

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ti} & 0 \\ 0 & e^{-ti} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$M(t)^{-1}B(t)B(t)^\top(M(t)^{-1})^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de contrôlabilité en temps T^* est alors

$$D(T^*) = \int_0^{T^*} e^{-sA}B(s)B(s)^\top e^{-sA^\top} ds = \int_0^{T^*} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} T^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice $D(T^*)$ est $\det(D) = 0$, donc la matrice $D(T^*)$ n'est pas inversible, par conséquent le système étudié n'est pas contrôlable.

Remarque [7]

Cette condition dépend de t mais ne dépend pas du point initial x_0 . Autrement dit, si un système linéaire instationnaire est contrôlable en temps t depuis x_0 , alors il est contrôlable en temps t depuis tout point.

Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes (stationnaires) [14]

Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$, est dit autonome lorsque les matrices A et B ne dépendent pas de t . Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas autonome.

théorème [7]

Le système stationnaire $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$, est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice suivante

$$C = (B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

est de rang égal à n .

Où C est une matrice d'ordre $(n \times m)$ appelée matrice de contrôlabilité de Kalman, et la condition $\text{rang } C = n$ est appelée condition de Kalman.

Exemple [22]

— Considérons le système suivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système est-il contrôlable ?

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (B, AB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et on a : $\text{rang}(B, AB) = 1 \neq n$ ($n = 2$), donc ce système n'est pas contrôlable.

Remarque [7]

La condition de Kalman ne dépend ni de T ni de x_0 . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

3.5.4 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Contrairement aux systèmes linéaires, les systèmes non linéaires sont plus compliqués et l'étude globale de leur contrôlabilité est plus difficile. Cependant, on peut toujours commencer par linéariser le système considéré autour de son (ses) point(s) d'équilibre

(s'il(s) existe(nt)) puis étudier la contrôlabilité de(s) nouveau(x) système(s) qui est(sont) linéaire(s). De cette façon la contrôlabilité des systèmes non linéaires est localement étudiée. [20]

Considérons un système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) & t \in [t_0, T]. \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Étant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, trouver un temps T et un contrôle u sur $[t_0, T]$ tel que la trajectoire x_u associée à u , vérifie

$$x_u(0) = x_0, \quad x_u(T) = x_1.$$

Application entrée-sortie

Définition : Soit $T > 0$, l'application entrée-sortie en temps T du système (3.10) initialisé à x_0 est l'application

$$\mathbb{E}_{(x_0, T)} : \begin{array}{l} U \rightarrow \mathbb{R}^m \\ u \rightarrow x_u(T) \end{array}$$

Où U l'ensemble des contrôles admissibles, i.e. L'ensemble des contrôles u tel que la trajectoire associée est bien définie sur $[t_0, T]$. Autrement dit, l'application entrée-sortie en temps T associe à un contrôle u le point final de la trajectoire associée à u . [15]

Définition [7]

Le système (3.10) est dit contrôlable (en temps quelconque) depuis x_0 si

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{T \geq 0} \text{Acc}(x_0, T)$$

Il est dit contrôlable en temps T si

$$R^n = \text{Acc}(x_0, T).$$

Proposition [7]

Considérons le système (3.10) où $f(x_0, u_0) = 0$. Notons

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0) \quad \text{et} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0).$$

On suppose que

$$\text{rg} (B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B) = n.$$

Alors le système est localement contrôlable en x_0 .

Exemple [20]

- Soit un pendule inversé dont la masse est vers le haut et la tige vers le bas. Dans le but de stabiliser le pendule autour de son équilibre instable, on contrôle l'accélération du point inférieur de la tige. Supposons que ce point inférieur de la tige se déplace le long d'une droite qui a pour abscisse $X(t)$. Le mouvement du pendule est alors donné par l'équation suivante

$$m l \ddot{\theta}(t) = m g \sin(\theta(t)) - u m \cos(\theta(t)), \quad \forall t \geq 0,$$

où l est la longueur du pendule, et m est la masse fixée en position $(X(t) + l \sin(\theta(t)), l \cos(\theta(t)))$, avec $\theta(t)$ est l'angle que fait le pendule avec la verticale, u est la force de contrôle appliquée pour déplacer le point inférieur de la tige.

1. Réécrire l'équation précédente sous la forme d'un système du premier ordre.
2. Linéariser le système obtenu autour du point d'équilibre $(\theta, \dot{\theta}, u) = (0, 0, 0)$.

Le système linéarisé est-il contrôlable ?

Solution

1. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \end{pmatrix}$. Donc

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g}{l} \sin(x_2) - \frac{u}{l} \cos(x_2) \\ x_1 \end{pmatrix} = h(x, u)$$

2. Pour obtenir un système linéaire de la forme

$$\dot{z}(t) = A z(t) + B u(t),$$

il suffit de prendre

$$A = \frac{\partial h}{\partial x}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{g}{l} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$B = \frac{\partial h}{\partial u}(0, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{l} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par la suite la matrice de contrôlabilité est donnée par

$$C = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} \end{pmatrix}.$$

Clairement, le rang de C est 2, donc le système linéarisé est contrôlable. Par conséquent, le système de contrôle non linéaire est localement contrôlable.

3.6 Contrôle optimal des systèmes linéaires

Temps d'optimalité

Considérons le système

$$\forall t \in [0, T], \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0. \quad (3.11)$$

Où les contrôles sont à valeurs dans un compact d'intérieur non vide $\Omega \in \mathbb{R}^m$. Soit x_0 et x_1 deux points de \mathbb{R}^n . Supposons que x_1 soit accessible depuis x_0 . C'est-à-dire : il existe au moins une trajectoire reliant x_0 à x_1 . Parmi toutes les trajectoires reliant x_0 à x_1 , on veut caractériser celles qui le font en temps minimal t^* .

On a le théorème d'existence suivant

Théorème 3.6.1

Si le point x_1 est accessible depuis x_0 , alors il existe une trajectoire temps minimal reliant x_0 à x_1 .

Définition 3.6.1

Le contrôle u est dit extrémal sur $[0, T]$ si la trajectoire du système (3.11) associée à u vérifie

$$x(t) = \partial \text{Acc}(x_0, t), \quad t \in [0, T].$$

En particulier, tout contrôle temps-minimal est extrémal. La réciproque est évidemment fautive car l'extrémalité ne fait pas la différence entre la minimalité et maximalité.

Définition 3.6.2

Un contrôle $u^0(t)$, $t \in [0, T]$ est dit optimal si $u^0(\cdot)$ est extrémal et $J(u^0(t)) < J(u(t))$, pour tout contrôle extrémal $u(t)$, $t \in [0, T]$.

[18]

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un contrôle soit extrémal.

Théorème 3.6.2 [7]

Soit $T > 0$. Considérons le système de contrôle linéaire

$$\forall t \in [0, T], \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0. \quad (3.12)$$

où le domaine de contraintes $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sur le contrôle est compact. Le contrôle u est extrémal sur $[0, T]$ si, et seulement si, il existe une solution non triviale $p(t)$ de l'équation

$$\dot{p}(t) = -p(t)A(t), \quad t \in [0, T],$$

telle que

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)B(t)v.$$

Pour presque tout $t \in [0, T]$, le vecteur ligne $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint.

Remarque 3.6.1 [7]

- Si $\Omega = [-\alpha, \alpha]$ où $\alpha > 0$, la condition signifie que

$$u(t) = \alpha \operatorname{sign} p(t)B(t).$$

La fonction $\phi(t) = p(t)B(t)$ appelée fonction de commutation, et un temps t_c auquel le contrôle extrémal $u(t)$ change de signe est appelé un temps de commutation.

- Si u est extrémal sur $[0, T]$ alors $u(t)$ est aussi extrémal sur $[0, t]$ pour tout $t \in [0, T]$.

Proposition 3.6.1 [7]

Considérons dans \mathbb{R}^n le système linéaire autonome avec contraintes sur le contrôle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ |u(t)| \leq 1. \end{cases} \quad (3.13)$$

où la paire de matrices (A, B) vérifie la condition de Kalman.

- Si toute valeur propre de A est réelle, alors tout contrôle extrémal a au plus $n - 1$ commutations sur \mathbb{R}^+ .
- Si toute valeur propre de A a une partie imaginaire non nulle, alors tout contrôle extrémal a un nombre infini de commutations sur \mathbb{R}^+ .

Exemples d'application du principe du maximum dans le cas des systèmes linéaires [18]

Exemple 3.6.1 (Cas de problèmes sans contraintes sur le contrôle)

On considère le problème linéaire sans contrainte sur le contrôle défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_u J(T, u) = -x(1) - y(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt, \\ \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = u(t), \\ x(0) = 1, \\ y(0) = 3, \\ u(t) \in U, \quad t \in [0, 1]. \end{array} \right.$$

Le système est de type $\dot{X} = AX + Bu$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Étude de la contrôlabilité du système

La matrice de Kalman est

$$C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le rang de C est 2, d'où la contrôlabilité du système.

- Le Hamiltonien associé au système est

$$H(x, u, p_x, p_y, t) = p_x y + p_y u + \frac{p^0}{2} u^2,$$

où $p^0 \leq 0$ et $p = (p_x, p_y)$ est le vecteur adjoint. Les composantes p_x et p_y sont les solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_x = -\frac{\partial H(x, p, u)}{\partial x} = 0, \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H(x, p, u)}{\partial y} = -p_x. \end{array} \right.$$

D'où, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} p_x = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \\ p_y = -c_1 t + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Posons $p^0 = -1$, alors le Hamiltonien s'écrit sous la forme

$$H(x, u, p_x, p_y, t) = p_x y + p_y u - \frac{1}{2} u^2.$$

- Les conditions de transversalité sont

$$\begin{cases} p_x(1) = 1, \\ p_y(1) = 1. \end{cases}$$

Alors $c_1 = 1$ et $c_2 = 2$. Ainsi,

$$\begin{cases} p_x(1) = 1, \\ p_y(1) = -1 + 2. \end{cases}$$

- La Condition de maximisation

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, u, p_x, p_y, t) = 0.$$

D'où

$$p_y(t) - u(t) = 0 \implies p_y(t) = u(t).$$

Donc le contrôle optimal est

$$u^*(t) = -t + 2.$$

- Il reste à déterminer les trajectoires $x^*(t)$ associées au contrôle $u^*(t)$. On a

$$\dot{y}(t) = u(t) = -t + 2 \implies y(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t + c_3,$$

et

$$\dot{x}(t) = y(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t + c_3 \implies x(t) = -\frac{t^3}{6} + t^2 + c_3t + c_4.$$

En utilisant les conditions initiales $x(0) = 1$ et $y(0) = 3$, on obtient

$$c_3 = 3, \quad c_4 = 1.$$

Donc, la solution du problème de contrôle étudié est

$$\begin{cases} u^*(t) = -t + 2, \\ x^*(t) = -\frac{t^3}{6} + t^2 + 3t + 1, \\ y^*(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t + 3. \end{cases}$$

Exemple 3.6.2 (Cas avec contraintes sur le contrôle)

Considérons le système dans \mathbb{R}^2 défini par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = 2y(t) + u(t), \\ |u(t)| \leq 1. \end{cases}$$

Le système est de type $\dot{X} = AX + Bu$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Étude de la contrôlabilité du système

La matrice de Kalman est

$$C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le rang de C est 2, ce qui est égal à $\dim(\mathbb{R}^2)$. Donc, le système est contrôlable.

On se pose le problème de relier en temps minimal le point origine $(0, 0)$ à tout point $(\alpha, 0)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\alpha > 0$.

- Application du Principe du Maximum

Le Hamiltonien s'écrit sous la forme

$$H(x, p, u) = p_1 y + p_2 (2y + u).$$

Par ailleurs, le système adjoint s'écrit

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H(x, p, u)}{\partial x} = 0, \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H(x, p, u)}{\partial y} = -p_1 - 2p_2. \end{cases}$$

Notons que, puisque le vecteur adjoint (p_1, p_2) doit être non trivial, $2p_2$ ne peut s'annuler sur un intervalle (sinon on aurait également $p_1 = p_2 = 0$).

D'autre part, la condition de maximisation nous donne

$$p_2 u = \max_{|v| \leq 1} p_2 (v).$$

Comme p_2 ne s'annule sur aucun intervalle, on en déduit que, presque partout, le contrôle extrémal est $u = \text{signe}(p_2)$.

On a

$$p_1 = \text{constante}, \quad p_2(t) = -\frac{1}{2}p_1 + ce^{-2t}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

En particulier, $p_2(t)$ est strictement monotone, donc le contrôle a au plus une commutation.

En posant $u = \epsilon = \pm 1$, puis en intégrant, on obtient

$$x(t) = -\epsilon/2(t - t_0) + \frac{1}{2}(y(t_0) + \epsilon/2)(e^{2(t-t_0)} - 1) + x(t_0),$$

$$y(t) = -\epsilon/2 + (y(t_0) + \epsilon/2)e^{2(t-t_0)}.$$

3.7 Contrôle optimal des systèmes non linéaires

3.7.1 Principe du maximum de Pontryagin (PMP) : la version faible

D'abord, nous allons présenter la version faible du principe du maximum de Pontryagin, elle concerne le contrôle optimal des systèmes différentiels sans contraintes sur le contrôle.

Le problème de Lagrange

Ce problème simplifié est le suivant. On cherche des conditions nécessaires d'optimalité pour le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Où les contrôles $u(\cdot) \in U$ sont définis sur $[0, T]$ et les trajectoires associées doivent vérifier les conditions $x(0) = x_0$ et $x(T) = x_1$.

Le problème est de minimiser un coût de la forme

$$C(u) = \int_0^T g(x(t), u(t), t) dt.$$

Où T est fixé. On a le résultat suivant

Théorème (Principe du maximum faible, cas de Lagrange) [7]

Si le contrôle u associé au système de contrôle (3.14) est optimal pour le coût C , alors il existe une application $p(\cdot)$ absolument continue sur $[0, T]$, à valeur dans \mathbb{R}^n , appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, et les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout $t \in [0, T]$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \\ \frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) &= 0. \end{aligned}$$

Où H est le Hamiltonien associé au système et au coût $C(u)$, défini par

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 g(t, x, u).$$

Le problème de Mayer-Lagrange

On modifie le problème précédent en introduisant le coût

$$C(T, u) = S(T, x(T)) + \int_0^T g(x(t), u(t), t) dt.$$

Où le temps final T n'est pas fixé. Soit M_1 une variété de \mathbb{R}^n . Le problème de contrôle optimal est de déterminer une trajectoire solution du problème de contrôle où les contrôles $u(\cdot)$ sont dans l'ensemble U des contrôles admissibles tel que $x(T) \in M_1$, et de plus $x(\cdot)$ minimise sur $[0, T]$ le coût C . On a le résultat suivant

Théorème (Principe du maximum faible, cas de Mayer-Lagrange) [7]

Si le contrôle u est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ absolument continue, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, et

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)),$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)),$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = 0,$$

où

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 g(t, x, u).$$

Si de plus la cible M_1 est une sous-variété de \mathbb{R}^n , alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que l'on ait au point final $(T, x(T))$

$$p(T) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla F_i + p^0 \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Si de plus le temps final n'est pas fixé dans le problème de contrôle optimal, et si u est continu au temps T , alors on a au temps final T

$$H(T, x(T), p(T), p^0, u) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)).$$

3.7.2 Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) : la version forte

Nous présentons ici, la version forte du principe du maximum de Pontryagin (PMP), qui est très générale, puisqu'elle est valide pour des systèmes différentiels généraux et quelle prend en compte des contraintes sur le contrôle. Il s'agit d'un ensemble de conditions nécessaires pour l'optimalité d'une solution d'un problème de contrôle optimal.

Théorème (Énoncé général du principe du maximum de Pontryagin) [7]

On considère le système de contrôle dans \mathbb{R}^n

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0.$$

où $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et les contrôles u sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle $[0, t_e(u)]$ de \mathbb{R}^+ et à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n . On note U l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps $t(u) < t_e(u)$.

Par ailleurs, le coût d'un contrôle u sur $[0, T]$ est défini par

$$J(T, u) = S(T, x(T)) + \int_0^T g(s, x(s), u(s)) ds,$$

où $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et $S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont C^1 . Et $x(\cdot)$ est la trajectoire associée au contrôle $u(\cdot)$.

On considère le problème optimal suivant : Déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 en minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non. Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint, et un nombre réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, et tels que pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)),$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)),$$

où

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 g(t, x, u),$$

est le Hamiltonien associé au système de contrôle, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v). \quad (3.15)$$

Si de plus, le temps final pour rejoindre la cible M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final T

$$\max_{v \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)). \quad (3.16)$$

Si de plus, M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) \in M_0$ et $x(T) \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0. \quad (3.17)$$

Et

$$p(T) - p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)) \perp T_{x(T)}M_1. \quad (3.18)$$

Remarque 3.7.2.1 [7]

Si le contrôle u est continu au temps T , la condition (3.16) peut s'écrire

$$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)). \quad (3.19)$$

Remarque 3.7.2.2 [7]

Si la variété M_1 s'écrit sous la forme

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n / F_1(x) = \dots = F_p(x) = 0\},$$

où F_i sont des fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R}^n (indépendantes puisque M_1 est une variété), alors la condition (3.18) se met sous la forme

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \text{ telle que } p(T) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla F_i(x(T)) + p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)). \quad (3.20)$$

Remarque 3.7.2.3 [7]

Si le système considéré est autonome, c'est-à-dire si f et g ne dépendent pas de t , alors H ne dépend pas de t et on a

$$\forall t \in [0, T], \quad \max_{v \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = \text{cste.} \quad (3.21)$$

Remarque 3.7.2.4 [7]

- la convention $p^0 \leq 0$, conduit au principe du maximum.
- La convention $p^0 \geq 0$, conduit au principe du minimum.

Remarque 3.7.2.5 [7]

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^m$, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle, la condition de maximisation (3.15) devient

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (3.22)$$

Dans ce cas, on retrouve le principe du maximum faible.

Définition [7]

Les conditions (3.17) et (3.18) sont appelées conditions de transversalité sur le vecteur adjoint. La condition (3.16) est appelée condition de transversalité sur le Hamiltonien.

Remarque 3.7.2.6 [7]

Le problème important du temps minimal correspond à $g = 1$ et $S = 0$, ou bien à $g=0$ et $S(T, x(T)) = T$. dans les deux cas les conditions de transversalité obtenues sont bien les mêmes.

3.7.3 Conditions de transversalité**Condition de transversalité sur le vecteur adjoint [7]**

Dans ce paragraphe le temps final pour atteindre la cible peut être fixé ou non. Réécrivons les conditions (3.17) et (3.18) dans les deux cas importants suivants

- **Problème de Lagrange**

Dans ce cas, le coût s'écrit

$$C(t, u) = \int_0^t g(x(s), u(s), s) ds,$$

c'est-à-dire que $g = 0$. Les conditions de transversalité (3.17) et (3.18) sur le vecteur adjoint s'écrivent alors

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0, \quad (3.23)$$

$$p(T) \perp T_{x(T)}M_1. \quad (3.24)$$

Remarque [7]

Si par exemple $M_0 = x_0$, la condition (3.17) devient vide. Si au contraire $M_0 = \mathbb{R}^n$, i.e. si le pont initial n'est pas fixé, on obtient $p(0) = 0$.

De même, si $M_1 = \mathbb{R}^n$, on obtient $p(T) = 0$. Autrement dit, si le point final est libre alors le vecteur adjoint au temps final est nul.

- **Problème de Mayer**

Dans ce cas, le coût s'écrit

$$C(t, u) = S(T, x(T)),$$

c'est-à-dire que $g = 1$. Les conditions de transversalité (3.17) et (3.18) (ou (3.20)) ne se simplifient pas a priori. Mais dans le cas particulier important où $M_1 = \mathbb{R}^n$, autrement dit le point final $x(T)$ est libre, la condition (3.18) devient

$$p(T) = p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)), \quad (3.25)$$

et alors forcément $p^0 \neq 0$ (on prend alors $p^0 = -1$). Si de plus S ne dépend pas du temps, on a coutume d'écrire

$$p(T) = -\nabla g(x(T)). \quad (3.26)$$

Conditions de transversalité sur le Hamiltonien [7]

La condition (3.16) n'est valable que si le temps final pour atteindre la cible n'est pas fixé. Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans ce cas. La seule simplification notable de cette condition est le cas où la fonction S ne dépend pas du temps t (ce qui est vrai, par exemple, pour un problème de Lagrange), et la condition de transversalité (3.16) sur le Hamiltonien devient alors

$$\max_{v \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = 0, \quad (3.27)$$

ou encore, si u est continu au temps T ,

$$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = 0. \quad (3.28)$$

Autrement dit, le Hamiltonien s'annule au temps final.

Remarque [7]

Si le système augmenté est de plus autonome, c'est-à-dire si f et g ne dépendent pas de t , alors d'après la remarque 3.7.2.3, on a le long d'une extrémale

$$\forall t \in [0, T], \quad \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v) = 0.$$

Généralisation des conditions de transversalité [7]

Pour écrire les conditions de transversalité associées à un problème de contrôle plus général, il faut écrire les relations adéquates en termes de multiplicateurs de Lagrange. Par exemple, considérons un problème de Lagrange avec des conditions aux limites mélangées, c'est-à-dire qu'on cherche une trajectoire solution de

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

minimisant le coût

$$C(T, u) = \int_0^T g(x(t), u(t), t) dt,$$

et vérifiant les conditions aux limites

$$(x(0), x(T)) \in M,$$

où M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On peut alors montrer que dans ce cas les conditions de transversalité (3.17) et (3.18) sur le vecteur adjoint s'écrivent

$$(-p(0), p(T)) \perp T_{(x(0), x(T))}M.$$

Un cas important de conditions mélangées est le cas des trajectoires périodiques, c'est-à-dire $x(0) = x(T)$ non fixé. Dans ce cas, on a

$$M = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}^n\},$$

et la condition de transversalité donne

$$p(0) = p(T).$$

Autrement dit, non seulement la trajectoire est périodique, mais aussi son relèvement extrémal.

Conclusion

En résumé, la théorie du contrôle optimal est un outil puissant pour l'optimisation des systèmes dynamiques. Elle repose sur des principes mathématiques solides et offre des méthodes variées pour résoudre des problèmes complexes. Les développements récents dans ce domaine continuent d'élargir ses applications, rendant cette théorie essentielle dans le cadre de l'automatique et des mathématiques appliquées.

Chapitre 4

Application du contrôle optimal pour une politique d'investissement financier

Introduction

La gestion financière d'une banque implique un équilibre délicat entre la disponibilité de liquidités et l'investissement dans des titres financiers. Cette tâche devient particulièrement complexe lorsqu'on prend en compte les coûts associés aux transactions et les variations des taux d'intérêt. Pour optimiser ce compromis, le contrôle optimal offre une approche systématique permettant de maximiser le rendement tout en respectant les contraintes imposées.

Ce chapitre explore cette approche en détail, fournissant une méthode pour déterminer la politique financière optimale de la banque. En examinant les contrôles extrêmes et en utilisant des outils d'optimisation, nous visons à offrir des solutions concrètes pour maximiser le gain global tout en respectant les contraintes opérationnelles.

4.1 Position du problème

Considérons une banque, qui gère une certaine quantité d'argent, et doit répondre aux besoins éventuels de ses clients en leur accordant un emprunt d'argent. Pour cela, la banque doit disposer d'argent immédiatement disponible, qui lui rapporte moins d'intérêts que l'argent investi dans des titres financiers. La banque investit donc une partie du capital dans l'achat de titres. D'autre part, si la réserve d'argent est trop faible, la banque doit vendre des titres et pour cela doit payer une commission à un agent de change.

Le problème est de déterminer une politique financière qui réalise un compromis entre quantité d'argent disponible et argent investi, tout en maximisant le gain.

Notations

$x(t)$: quantité d'argent disponible au temps t .

$y(t)$: quantité de titres financiers investis au temps t .

$d(t)$: taux instantané de demande d'emprunts par des clients.

$u(t)$: taux de vente de titres ($u(t) > 0$ signifie que la banque vend des titres, et $u(t) < 0$ signifie que la banque achète des titres).

$r_1(t)$: taux d'intérêt gagné sur l'argent disponible.

$r_2(t)$: taux d'intérêt gagné sur l'argent investi en titres (on suppose que $r_2(t) > r_1(t)$, pour tout temps t).

α : taux de commission prélevé par l'agent de change lors de la vente et de l'achat de titres (on suppose que $0 < \alpha < 1$).

4.1.1 Modélisation de ce problème

Les équations modélisant le système sont

$$\dot{x}(t) = r_1(t)x(t) - d(t) + u(t) - \alpha|u(t)|, \quad (4.1)$$

$$\dot{y}(t) = r_2(t)y(t) - u(t). \quad (4.2)$$

avec $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$. Le contrôle $u(t)$ vérifie la contrainte

$$-U_2 \leq u(t) \leq U_1,$$

où $U_1, U_2 \geq 0$. On fixe un temps final T , et on veut maximiser la quantité

$$x(T) + y(T).$$

Autrement dit, on minimise $-x(T) - y(T)$.

Dans l'étude qui suit, on ne tient pas compte du fait qu'il faut de plus imposer $x(t) \geq 0$ et $y(t) \geq 0$, cette contrainte devant être vérifiée à posteriori.

Reformulation du Problème avec les Variables u_1 et u_2

Le principe du maximum classique ne peut pas s'appliquer directement en raison du terme $|u(t)|$ dans les équations du système. Pour simplifier le problème et pouvoir appliquer le principe du maximum de Pontryagin, nous décomposons le contrôle $u(t)$ en deux contrôles $u_1(t)$ et $u_2(t)$. Cette décomposition est définie comme suit

$$u_1(t) = \max(u(t), 0) = \frac{u(t) + |u(t)|}{2},$$

$$u_2(t) = -\min(u(t), 0) = \frac{-u(t) + |u(t)|}{2}.$$

Avec ces nouvelles variables de contrôle $u_1(t)$ et $u_2(t)$, le contrôle $u(t)$ peut être exprimé comme

$$u(t) = u_1(t) - u_2(t) \quad \text{et} \quad |u(t)| = u_1(t) + u_2(t).$$

- Vérification des contraintes

soit $-U_2 \leq u(t) \leq U_1$

— Si $u \geq 0$, alors $u_1 = u$ et $u_2 = 0$. La contrainte sur u devient : $-U_2 \leq u_1 \leq U_1$.
Puisque $u_2 = 0$, cette contrainte est vérifiée si

$$0 \leq u_1 \leq U_1.$$

— Si $u \leq 0$, alors $u_1 = 0$ et $u_2 = -u$

La contrainte sur u devient

$$-U_2 \leq -u_2 \leq U_1 \implies -U_1 \leq u_2 \leq U_2 \quad \text{ou} \quad 0 \leq u_2 \leq U_2.$$

En combinant ces cas, les contraintes sur u_1 et u_2 deviennent

$$u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0,$$

$u_1 u_2 = 0$ (car soit u_1 est nul, soit u_2 est nul mais pas les deux simultanément et on a dans le cas $u \geq 0$, $u_1 = u$ et $u_2 = 0 \implies u_1 u_2 = u \cdot 0 = 0$ et si $u \leq 0$, $u_1 = 0$ et $u_2 = -u$ ce qui donne $u_1 u_2 = 0$),

$-U_2 \leq u_1 - u_2 \leq U_1$ (Nous avons $u = u_1 - u_2$ En substituant cette expression dans la contrainte sur u).

- Nouveau Problème de Contrôle Optimal

On reformule les équations d'état initiales en termes des nouvelles variables u_1 et u_2 . Les équations d'état initiales sont données par

$$\dot{x}(t) = r_1(t)x(t) - d(t) + u - \alpha|u|,$$

$$\dot{y}(t) = r_2(t)y(t) - u.$$

On sait que $u = u_1 - u_2$ et $|u| = u_1 + u_2$.

En substituant u par $u_1 - u_2$ et $|u|$ par $u_1 + u_2$, nous obtenons

pour l'équation de $\dot{x}(t)$

$$\dot{x}(t) = r_1(t)x(t) - d(t) + (u_1 - u_2) - \alpha(u_1 + u_2),$$

$$\dot{x}(t) = r_1(t)x(t) - d(t) + (1 - \alpha)u_1 - (1 + \alpha)u_2.$$

pour l'équation de $\dot{y}(t)$

$$\dot{y}(t) = r_2(t)y(t) - (u_1 - u_2),$$

$$\dot{y}(t) = r_2(t)y(t) - u_1 + u_2.$$

Donc le nouveau problème de contrôle optimal en utilisant les variables u_1 et u_2 est

$$\begin{aligned} & \text{Minimiser } J = -x(T) - y(T). \\ \text{Sous les contraintes : } & \begin{cases} \dot{x}(t) = r_1(t)x(t) - d(t) + (1 - \alpha)u_1(t) - (1 + \alpha)u_2(t), \\ \dot{y}(t) = r_2(t)y(t) - u_1(t) + u_2(t). \end{cases} \\ & \text{avec : } \begin{cases} 0 \leq u_1 \leq U_1, \\ 0 \leq u_2 \leq U_2, \\ u_1 u_2 = 0, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.3}$$

4.1.2 La résolution analytique du problème

- La fonction Hamiltonienne associée au système est

$$\begin{aligned} H = p_x [r_1(t)x(t) - d(t) + u_1(t) - u_2(t) - \alpha(u_1(t) + u_2(t))] \\ + p_y [r_2(t)y(t) - (u_1(t) - u_2(t))]. \end{aligned}$$

- Système Différentiel Extrémal

Les équations du système différentiel extrémal sont les suivantes

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_x} = r_1(t)x(t) - d(t) + u_1(t) - u_2(t) - \alpha(u_1(t) + u_2(t)).$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_y} = r_2(t)y(t) - u_1(t) + u_2(t).$$

Les équations pour les variables adjointes $p_x(t)$ et $p_y(t)$ sont

$$\dot{p}_x(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -p_x(t)r_1(t).$$

$$\dot{p}_y(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_y(t)r_2(t).$$

- Conditions de Transversalité

$$p_x(T) = -\frac{\partial(-x(T))}{\partial x(T)} = 1.$$

$$p_y(T) = -\frac{\partial(-y(T))}{\partial y(T)} = 1.$$

- Montrons que $p_x(t) > 0$ et $p_y(t) > 0$ pour $t \in [0, T]$

on résout les équations adjointes

— Résolution pour $p_x(t)$

L'équation pour $p_x(t)$ est

$$\frac{dp_x(t)}{dt} = -p_x(t)r_1(t).$$

En séparant les variables, nous obtenons

$$\frac{dp_x(t)}{p_x(t)} = -r_1(t)dt.$$

En intégrant cette équation, on trouve

$$\ln |p_x(t)| = -\int r_1(t)dt + c_1.$$

En exponentiant les deux côtés, on a

$$p_x(t) = C_x e^{-\int r_1(t)dt}, \quad C_x = e^{c_1}.$$

— Résolution pour $p_y(t)$

De la même manière, on résout l'équation pour $p_y(t)$

$$\frac{dp_y(t)}{dt} = -p_y(t)r_2(t).$$

En séparant les variables et en intégrant

$$\ln |p_y(t)| = -\int r_2(t)dt + c_2.$$

En exponentiant, on obtient

$$p_y(t) = C_y e^{-\int r_2(t) dt}, C_y = e^{c_2}.$$

Les solutions obtenues pour $p_x(t)$ et $p_y(t)$ sont donc

$$p_x(t) = C_x e^{-\int r_1(t) dt}. \quad (4.4)$$

$$p_y(t) = C_y e^{-\int r_2(t) dt}. \quad (4.5)$$

Les conditions de transversalité imposent souvent que $p_x(T)$ et $p_y(T)$ soient strictement positifs, ce qui implique que les constantes $C_x > 0$ et $C_y > 0$. Ainsi, on a

$$p_x(t) > 0 \quad \text{et} \quad p_y(t) > 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

- Calcul des contrôles extrémaux

Pour démontrer les conditions des contrôles extrémaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$, nous nous appliquons le principe du pontryagin

— Le Hamiltonien associé au système est donné par

$$H = p_x [r_1(t) x(t) - d(t) + u_1(t) - u_2(t) - \alpha(u_1(t) - u_2(t))] + p_y [r_2(t) y(t) - (u_1(t) - u_2(t))].$$

— Hamiltonien partiel pour u_1 et u_2

$$H(u_1, u_2) = u_1(t) ((1 - \alpha)p_x(t) - p_y(t)) + u_2(t) (p_y(t) - (1 + \alpha)p_x(t)).$$

Le but est de maximiser H par rapport à u_1 et u_2

$$\max_{U_1 \leq u \leq U_2} H(u_1, u_2) = \max_{U_1 \leq u \leq U_2} (u_1(t) ((1 - \alpha)p_x(t) - p_y(t)) + u_2(t) (p_y(t) - (1 + \alpha)p_x(t))).$$

pour maximiser H_u nous devons choisir u_1 et u_2 en fonction des signes des expressions $(1 - \alpha)p_x(t) - p_y(t)$ et $(1 + \alpha)p_x(t) - p_y(t)$

- Si $(1 - \alpha)p_x(t) - p_y(t) > 0$

l'expression $u_1(t) ((1 - \alpha)p_x(t) - p_y(t))$ est positive, donc pour maximiser H_u nous devons choisir $u_1(t) = U_1$, de plus $u_2(t) = 0$ (D'après la condition $u_1 u_2 = 0$, qui implique que $u_2 = 0$ si $u_1 \neq 0$)

$$u_1(t) = U_1 \quad \text{et} \quad u_2(t) = 0.$$

- Si $(1 + \alpha)p_x(t) - p_y(t) < 0$

l'expression $u_2(t) (p_y(t) - (1 + \alpha)p_x(t)) > 0$. donc pour maximiser le Hamiltonien, nous devons choisir $u_2(t) = U_2$ et $u_1(t) = 0$, car $u_2(t)$ maximise le terme associé.

$$u_1(t) = 0 \quad \text{et} \quad u_2(t) = U_2.$$

- Si $(1 - \alpha)p_x(t) - p_y(t) < 0$ et $(1 + \alpha)p_x(t) - p_y(t) > 0$

Dans ce cas, les deux contrôles doivent être nuls pour maximiser H , car les termes associés sont négatifs.

$$u_1(t) = 0 \quad \text{et} \quad u_2(t) = 0.$$

Les contrôles extrémaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$ suivent une structure *bang-bang*, dépendant du signe des expressions $(1 - \alpha)p_x(t) - p_y(t)$ et $(1 + \alpha)p_x(t) - p_y(t)$. Ainsi, les contrôles extrémaux sont définis comme suit

- Si $(1 - \alpha)p_x(t) - p_y(t) > 0$, alors $u_1(t) = U_1$ et $u_2(t) = 0$.

- Si $(1 + \alpha)p_x(t) - p_y(t) < 0$, alors $u_1(t) = 0$ et $u_2(t) = U_2$.

- Si $(1 - \alpha)p_x(t) - p_y(t) < 0$ et $(1 + \alpha)p_x(t) - p_y(t) > 0$, alors $u_1(t) = u_2(t) = 0$.

4.2 Application Numérique

On pose $T = 1$, $\alpha = 0.01$, $d(t) = 0.02$ et $U_1 = U_2 = 1$

Cas (1) : Pour $r_1(t) = \frac{1}{3}$, $r_2(t) = \frac{1}{2}$. (Ces valeurs ne sont pas réalistes)

- Les équations différentielles adjointes deviennent

$$\dot{p}_x(t) = -\frac{1}{3}p_x(t).$$

$$\dot{p}_y(t) = -\frac{1}{2}p_y(t).$$

- Résolution pour $p_x(t)$

$$\dot{p}_x(t) = -\frac{1}{3}p_x(t).$$

Pour résoudre cette équation, nous séparons les variables

$$\frac{dp_x(t)}{p_x(t)} = -\frac{1}{3} dt.$$

En intégrant les deux côtés, on obtient

$$\ln |p_x(t)| = -\frac{1}{3}t + C.$$

En exponentiant des deux côtés

$$p_x(t) = e^C \cdot e^{-\frac{1}{3}t}.$$

Notons que e^C est une constante que nous appelons C_x . Donc

$$p_x(t) = C_x e^{-\frac{1}{3}t}.$$

En utilisant la condition de transversalité $p_x(T) = 1$, nous avons

$$p_x(1) = C_x e^{-\frac{1}{3}} = 1 \implies C_x = e^{\frac{1}{3}}.$$

D'où

$$p_x(t) = e^{\frac{1}{3}(1-t)}.$$

- Résolution pour $p_y(t)$

De manière similaire, l'équation différentielle pour $p_y(t)$ est

$$\dot{p}_y(t) = -\frac{1}{2}p_y(t).$$

En utilisant la même méthode que pour $p_x(t)$, nous résolvons cette équation et trouvons directement

$$p_y(t) = e^{\frac{1}{2}(1-t)}.$$

- Calcul des contrôles extrémaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$

On pose $f(t) = (1 - \alpha)p_x(t) - p_y(t)$ et $g(t) = (1 + \alpha)p_x(t) - p_y(t)$.

Étudiant le signe de ces expressions

Pour $f(t)$

$$f(t) = (1 - \alpha)p_x(t) - p_y(t) = (1 - 0.01)e^{\frac{1-t}{3}} - e^{\frac{1-t}{2}} = 0.99e^{\frac{1}{3}(1-t)} - e^{\frac{1}{2}(1-t)}.$$

la dérivée de $f(t)$ est

$$f'(t) = -0.33e^{\frac{1}{3}(1-t)} + 0.5e^{\frac{1}{2}(1-t)}.$$

qui s'annule au point $t = 1 + 6 \ln(\frac{50}{33})$, puisque ce point n'appartient pas à l'intervalle $[0; 1]$, nous concluons que $f'(t)$ ne change pas de signe dans cet intervalle.

$$f'(1) = -0.33e^0 + 0.5e^0 = 0.17 > 0.$$

$\implies f'(t) > 0$, donc $f(t)$ est croissante sur $[0, 1]$.

puisque $f(t)$ est strictement croissante sur $[0; 1]$ et $f(1) = -0.01 < 0$ donc la fonction $f(t)$ est négative sur $[0; 1]$.

l'expression $(1 - \alpha) p_x(t) - p_y(t) < 0$, alors $u_1(t) = 0$.

Pour $g(t)$

$$g(t) = (1 + \alpha) p_x(t) - p_y(t) = (1 + 0.01) e^{\frac{1-t}{3}} - e^{\frac{1-t}{2}} = 1.01 e^{\frac{1}{3}(1-t)} - e^{\frac{1}{2}(1-t)}.$$

La dérivée de $g(t)$ est

$$g'(t) = -\frac{101}{300} e^{\frac{1}{3}(1-t)} + 0.5 \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}(1-t)}.$$

qui est positive sur l'intervalle $[0; 1]$, donc la fonction $f(t)$ est strictement croissante sur cet intervalle.

$$g(0) = 1.01 e^{\frac{1}{3}} - e^{\frac{1}{2}} \approx -0.0239 < 0.$$

$$g(1) = 1.01 e^0 - e^0 = 0.01 > 0.$$

$g(t)$ est une fonction continue et strictement croissante sur $[0; 1]$ et on a $g(0) * g(1) \leq 0$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaire $\exists t_c \in]0; 1[$ tel que $g(t_c) = 0$.

on résoudre l'équation $g(t_c) = 0$ on obtient

$$t_c = 1 - 6 \ln\left(\frac{101}{100}\right).$$

d'où $g(t)$ est positive sur l'intervalle $[0; t_c]$ et elle est négative sur $[t_c; 1]$.

Ainsi, pour tout $t \in [0; t_c]$, nous avons $g(t) < 0$

$$\implies u_1 = 0 \quad \text{et} \quad u_2 = U_2.$$

pour tout $t \in [t_c; 1]$, $g(t) > 0$ et $f(t) < 0$

$$\implies u_1(t) = 0 \quad u_2(t) = 0.$$

- La résolution des équations $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$

Sur l'intervalle $[0; t_c]$

$$g(t) < 0 \implies u_1 = 0 \quad \text{et} \quad u_2 = U_2.$$

Les équations de système deviennent

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_1(t) x(t) - d(t) - (1 + \alpha) U_2, \\ \dot{y}(t) = r_2(t) y(t) + U_2. \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{3} x(t) - 1.03, \\ \dot{y}(t) = \frac{1}{2} y(t) + 1. \end{cases}$$

La résolution pour $x(t)$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{3} x(t) - 1.03. \tag{4.6}$$

L'équation homogène associée est

$$\dot{x}(t) - \frac{1}{3}x(t) = 0.$$

Sa solution générale est : $x_h(t) = C_1 e^{\frac{1}{3}t}$.

pour déterminer la solution particulière, on utilise la méthode de la variation de la constante. On pose $x(t) = C_1(t) e^{\frac{1}{3}t}$ et l'on calcule la dérivée

$$\dot{x}(t) = \dot{C}_1(t) e^{\frac{1}{3}t} + C_1(t) \frac{1}{3} e^{\frac{1}{3}t}.$$

En remplaçant dans l'équation (4.6) on obtient

$$\dot{C}_1(t) = -1.03 e^{-\frac{1}{3}t}.$$

En intégrant cette expression, on trouve

$$C_1(t) = 3.09 e^{-\frac{1}{3}t}.$$

Ainsi, la solution particulière est

$$x_p(t) = 3.09 e^{-\frac{1}{3}t} e^{\frac{1}{3}t} = 3.09,$$

et la solution générale de (4, 6) est

$$x(t) = C_1 e^{\frac{1}{3}t} + 3.09.$$

Pour déterminer C_1 , nous utilisons la condition initiale $x(0) = x_0$

$$x(0) = C_1 e^{\frac{1}{3} \cdot 0} + 3.09 = x_0 \implies C_1 = x_0 - 3.09.$$

Ainsi, la solution complète pour $x(t)$ devient

$$x(t) = (x_0 - 3.09) e^{\frac{1}{3}t} + 3.09.$$

La résolution pour $y(t)$

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{2}y(t) + 1. \tag{4.7}$$

Pour trouver $y(t)$, nous utilisons la même méthode que pour $x(t)$

La solution homogène associée est

$$y_h(t) = C_2 e^{\frac{1}{2}t}.$$

La solution particulière est

$$y_p(t) = -2e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{1}{2}t} = -2.$$

Ainsi, la solution générale est

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_2 e^{\frac{1}{2}t} - 2,$$

avec $y(0) = y_0$ la solution générale devient

$$y(t) = (y_0 + 2) e^{\frac{1}{2}t} - 2.$$

Sur l'intervalle $[t_c; 1]$

$$g(t) > 0 \text{ et } f(t) < 0 \implies u_1(t) = 0 \quad u_2(t) = 0.$$

Les équations de système deviennent

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_1(t)x(t) - d(t), \\ \dot{y}(t) = r_2(t)y(t). \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{3}x(t) - 0.02, \\ \dot{y}(t) = \frac{1}{2}y(t). \end{cases}$$

La résolution pour $x(t)$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{3}x(t) - 0.02. \tag{4.8}$$

La solution homogène associée est

$$x(t) = C_3 e^{\frac{1}{3}t}.$$

Par la méthode des variations de la constante, la solution particulière est donnée par : $x(t) = 0.06$.

Donc la solution générale pour $x(t)$ est

$$x(t) = C_3 e^{\frac{1}{3}t} + 0.06.$$

En appliquant la condition initiale $x(0) = x_0$, nous obtenons

$$x(0) = C_3 e^0 + 0.06 = x_0 \implies C_3 = x_0 - 0.06.$$

Ainsi, la solution complète pour $x(t)$ devient

$$x(t) = (x_0 - 0.06) e^{\frac{1}{3}t} + 0.06.$$

La résolution pour $y(t)$

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{2}y(t),$$

cette équation est à variables séparables

$$\frac{dy(t)}{y(t)} = \frac{1}{2} dt,$$

en intégrant chaque membre, on obtient

$$y(t) = C_4 e^{\frac{1}{2}t},$$

$y(0) = y_0 \implies y_0 = C_4$ donc, la solution complète pour $y(t)$ devient

$$y(t) = y_0 e^{\frac{1}{2}t}.$$

En conclusion, sur $[0; t_c]$

$$\begin{cases} p_x(t) = e^{\frac{1}{3}(1-t)}, \\ p_y(t) = e^{\frac{1}{2}(1-t)}, \\ x(t) = (x_0 - 3.09) e^{\frac{1}{3}t} + 3.09, \\ y(t) = (y_0 + 2) e^{\frac{1}{2}t} - 2. \end{cases}$$

Sur $[t_c; 1]$

$$\begin{cases} p_x(t) = e^{\frac{1}{3}(1-t)}, \\ p_y(t) = e^{\frac{1}{2}(1-t)}, \\ x(t) = (x_0 - 0.06) e^{\frac{1}{3}t} + 0.06, \\ y(t) = y_0 e^{\frac{1}{2}t}. \end{cases}$$

Cas (2) : pour $r_1(t) = \frac{1}{5}$ et $r_2(t) = \frac{1}{3}$ (Ces valeurs ne sont pas réalistes)

- Les équations différentielles adjointes deviennent

$$\begin{aligned} \dot{p}_x(t) &= -\frac{1}{5}p_x(t), \\ \dot{p}_y(t) &= -\frac{1}{3}p_y(t). \end{aligned}$$

- Résolution pour $p_x(t)$

$$\frac{dp_x}{p_x} = -\frac{1}{5}dt \implies \ln |p_x| = -\frac{1}{5}t + C \implies p_x(t) = C_x e^{-\frac{1}{5}t}.$$

Avec $p_x(1) = 1$, on trouve $C_x = e^{\frac{1}{5}}$. Donc

$$p_x(t) = e^{\frac{1}{5}(1-t)}.$$

- Pour $p_y(t)$

$$\frac{dp_y}{p_y} = -\frac{1}{3}dt \implies \ln |p_y| = -\frac{1}{3}t + C' \implies p_y(t) = C_y e^{-\frac{1}{3}t}.$$

Avec $p_y(1) = 1$, on trouve $C_y = e^{\frac{1}{3}}$. Donc

$$p_y(t) = e^{\frac{1}{3}(1-t)}.$$

- Calcul des contrôles extrémaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$

Nous définissons $f(t)$ et $g(t)$ comme suit

$$\begin{aligned} f(t) &= (1 - \alpha)p_x(t) - p_y(t), \\ g(t) &= (1 + \alpha)p_x(t) - p_y(t). \end{aligned}$$

Pour $f(t)$

$$f(t) = 0.99 e^{\frac{1}{5}(1-t)} - e^{\frac{1}{3}(1-t)}.$$

La dérivée est

$$f'(t) = -\frac{99}{500}e^{\frac{1}{5}(1-t)} + \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}(1-t)}.$$

$f'(t)$ s'annule au point $t = \frac{15}{2} \ln\left(\frac{500}{297}\right) + 1$.

Puisque $f'(1) \approx 0.135 > 0$, $f(t)$ est croissante et $f(1) < 0$, donc $f(t) < 0$ sur $[0, 1]$ et $u_1 = 0$.

Pour $g(t)$

$$g(t) = 1.01e^{\frac{1}{5}(1-t)} - e^{\frac{1}{3}(1-t)}.$$

La dérivée est

$$g'(t) = -0.202e^{\frac{1}{5}(1-t)} + \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}(1-t)}.$$

qui est positive sur $[0; 1]$

Puisque $g(0) < 0$ et $g(1) > 0$ et $g(t)$ est une fonction continue et croissante sur $[0 : 1]$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_c \in [0, 1]$ tel que $g(t_c) = 0$.

$$g(t_c) = 0 \implies t_c = \frac{15}{2} \ln\left(\frac{100}{101}\right) + 1.$$

En conclusion

- Pour $t \in [0, t_c]$, $u_1(t) = 0$ et $u_2(t) = U_2$.

- Pour $t \in [t_c, 1]$, $u_1(t) = 0$ et $u_2(t) = 0$.

- La résolution des équations $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$

Sur l'intervalle $[0, t_c]$

$$g(t) < 0 \implies u_1 = 0 \quad \text{et} \quad u_2 = U_2.$$

Les équations de système deviennent

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{5}x(t) - 1.03, \\ \dot{y}(t) = \frac{1}{3}y(t) + 1. \end{cases}$$

La résolution pour $x(t)$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{5}x(t) - 1.03.$$

L'équation homogène associée est

$$\dot{x}_h(t) = \frac{1}{5}x_h(t),$$

dont la solution générale est

$$x_h(t) = C_1 e^{\frac{1}{5}t}.$$

La solution particulière est

$$x_p(t) = 5.15.$$

La solution complète pour $x(t)$ est donc donnée par

$$x(t) = C_1 e^{\frac{1}{5}t} + 5.15.$$

En appliquant la condition initiale $x(0) = x_0$ à la solution générale, on obtient

$$x(t) = (x_0 - 5.15) e^{\frac{1}{5}t} + 5.15.$$

La résolution pour $y(t)$

$$\dot{y}(t) - \frac{1}{3}y(t) = 1.$$

La solution homogène associée est :

$$y_h(t) = C_2 e^{\frac{1}{3}t}.$$

La solution particulière est

$$y_p(t) = -3,$$

ainsi, la solution générale pour $y(t)$ est

$$y(t) = C_2 e^{\frac{1}{3}t} - 3.$$

Avec la condition initiale $y(0) = y_0$, la solution complète devient

$$y(t) = (y_0 + 3) e^{\frac{1}{3}t} - 3.$$

Sur l'intervalle $[t_c : 1]$

$$g(t) > 0 \text{ et } f(t) < 0 \implies u_1(t) = 0 \text{ et } u_2(t) = 0.$$

Les équations de système deviennent

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{5}x(t) - 0.02, \\ \dot{y}(t) = \frac{1}{3}y(t). \end{cases}$$

La résolution pour $x(t)$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{5}x(t) - 0.02.$$

La solution homogène associée est

$$x_h(t) = C_3 e^{\frac{1}{5}t}.$$

La solution particulière est

$$x_p(t) = 0.1.$$

La solution générale pour $x(t)$ est

$$x(t) = C_3 e^{\frac{1}{5}t} + 0.1.$$

En appliquant la condition initiale $x(0) = x_0$, la solution pour $x(t)$ devient

$$x(t) = (x_0 - 0.1) e^{\frac{1}{5}t} + 0.1.$$

La résolution pour $y(t)$

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{3} y(t).$$

Cette équation est à variables séparables

$$\frac{dy(t)}{y(t)} = \frac{1}{3} dt,$$

en intégrant chaque membre, on obtient

$$y(t) = C_4 e^{\frac{1}{3}t},$$

avec la condition initial $x(0) = x_0$, la solution générale pour $y(t)$ devient

$$y(t) = y_0 e^{\frac{1}{3}t}.$$

En conclusion, sur $[0; t_c]$

$$\begin{cases} p_x(t) = e^{\frac{1}{5}(1-t)}, \\ p_y(t) = e^{\frac{1}{3}(1-t)}, \\ x(t) = (x_0 - 5.15) e^{\frac{1}{5}t} + 5.15, \\ y(t) = (y_0 + 3) e^{\frac{1}{3}t} - 3. \end{cases}$$

Sur $[t_c; 1]$

$$\begin{cases} p_x(t) = e^{\frac{1}{5}(1-t)}, \\ p_y(t) = e^{\frac{1}{3}(1-t)}, \\ x(t) = (x_0 - 0.1) e^{\frac{1}{5}t} + 0.1, \\ y(t) = y_0 e^{\frac{1}{3}t}. \end{cases}$$

4.3 Résolution à l'aide du logiciel MATLAB

```

controle_optimal_banque.m
1 function controle_optimal_banque()
2 % Paramètres du problème
3 T = 1; % Temps final
4 alpha = 0.01; % Taux de commission
5 U1 = 1; % Limite supérieure sur u(t)
6 U2 = 1; % Limite inférieure sur u(t)
7
8 % Taux d'intérêt
9 r1 = @(t) 1/3; % Taux sur l'argent disponible
10 r2 = @(t) 1/2; % Taux sur l'argent investi
11
12 % Conditions initiales
13 x0 = 1; % Argent disponible initial
14 y0 = 1; % Titres financiers initial
15 px0 = -1; % Co-variable adjointe initiale pour x(t)
16 py0 = -1; % Co-variable adjointe initiale pour y(t)
17
18 % Résolution des équations différentielles
19 [t, Z] = ode45(@(t, Z) system_dynamics(t, Z, alpha, U1, U2, r1, r2), [0, T], [x0; y0; px0; py0]);
20
21 % Extraction des solutions
22 x_sol = Z(:, 1);
23 y_sol = Z(:, 2);
24 px_sol = Z(:, 3);
25 py_sol = Z(:, 4);
26
27 % Affichage des résultats
28 figure;
29 subplot(2, 1, 1);
30 plot(t, x_sol, 'r', 'DisplayName', 'x(t) - Argent disponible');
31 hold on;
32 plot(t, y_sol, 'b', 'DisplayName', 'y(t) - Titres financiers');
33 xlabel('Temps');
34 ylabel('Quantité');
35 legend show;
36
37 subplot(2, 1, 2);
38 plot(t, px_sol, 'r', 'DisplayName', 'p_x(t)');
39 hold on;
40 plot(t, py_sol, 'b', 'DisplayName', 'p_y(t)');
41 xlabel('Temps');
42 ylabel('Co-variables adjointes');
43 legend show;
44 end
45
46 % Fonction définissant le système dynamique (équations d'état + adjointes)
47 function dZdt = system_dynamics(t, Z, alpha, U1, U2, r1, r2)
48
49
50
51
52
53
54 % Contrôle bang-bang
55 if (1 - alpha) * px - py > 0
56     u = U1; % La banque vend des titres
57 elseif (1 + alpha) * px - py < 0
58     u = U2; % La banque achète des titres
59 else
60     u = 0; % Aucun échange
61 end
62
63 % Équations d'état
64 dxdt = r1(t) * x - u;
65 dydt = r2(t) * y + u;
66
67 % Équations des co-variables adjointes (formule du Hamiltonien)
68 dpxdt = -r1(t) * px;
69 dpydt = -r2(t) * py;
70
71 % Regroupement dans un vecteur
72 dZdt = [dxdt; dydt; dpxdt; dpydt];
73
74

```

Après l'exécution, on obtient les résultats suivants

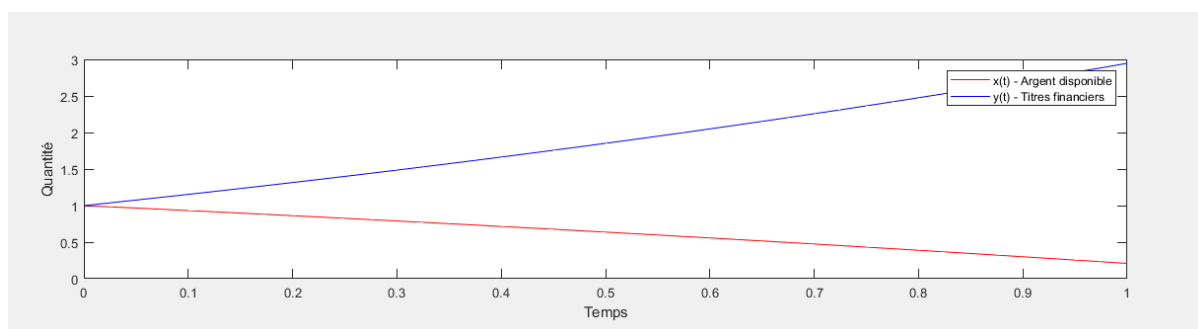


FIGURE 4.2 – L'évolution de la quantité d'argent disponible et titres financiers dans une période d'investissement (1 ans).

Les graphiques montrent une évolution dynamique, où les variables d'états fluctuent en fonction des conditions de marché et des taux d'intérêt appliqués. ce qui nous permet de visualiser les moments de commutation entre achat et vente de titres, optimisant ainsi la politique de la banque.

Conclusion générale

Ce mémoire a exploré l'application de la théorie du contrôle optimal dans une banque d'investissement, dans le but de trouver une stratégie optimale pendant une période de temps fixée.

On a d'abord fait une petite présentation sur notre lieu de déroulement de stage pratique au sein de la Banque de l'agriculture et du développement rural (BADR) domiciliée à AZAZGA. Notre stage a porté principalement sur les opérations bancaires spécialement les crédits d'investissement. On a eu l'opportunité de traiter quelques dossiers qui nous permit d'avoir plus de détails concernant notre étude.

Ensuite, on a introduit quelques généralités essentielles des équations différentielles ordinaires pour bien les comprendre et les utiliser ensuite dans notre application.

Puis, on a fait un petit rappel sur les notions de base d'algèbre linéaires avant de faire appel à la théorie du contrôle optimal, on a présenté ses aspects théoriques et on a établi la notion du principe du maximum de Pontryagin qui est la base fondamentale de notre application.

Enfin, nous avons traité notre problème sous forme d'une application numérique et on a pu déterminé la politique optimale de la banque qui réalise un compromis entre quantité d'argent disponible et argent investi, tout en maximisant le gain. La contribution majeure de notre étude réside dans la capacité de choisir un portefeuille d'investissement qui maximise la valeur de la banque tout en tenant compte des contraintes de budget et de risque.

La théorie du contrôle optimal permet non seulement de mieux aligner les stratégies d'investissement avec les objectifs de rentabilité à long terme, mais aussi d'adapter les décisions en fonction des conditions de marché changeantes. Cependant, cette recherche présente certaines limites, notamment la dépendance à des hypothèses simplificatrices sur le comportement des marchés financiers et les contraintes de calcul associées à des modèles de contrôle complexe.

Pratiquement, les résultats de cette étude suggèrent que les banques d'investissement pourraient bénéficier d'une adoption plus large des techniques de contrôle optimal pour améliorer la gestion de leurs portefeuilles et optimiser leurs stratégies d'investissement. Théoriquement, cette recherche renforce l'idée que les modèles dynamiques peuvent offrir des solutions plus robustes et adaptatives que les approches traditionnelles.

Des recherches futures pourraient se concentrer sur l'intégration de modèles de contrôle optimal avec des approches d'intelligence artificielle et d'apprentissage automatique pour améliorer encore la précision des prévisions et la réactivité aux conditions de marché. Il serait également pertinent d'explorer l'application de ces modèles à d'autres aspects de la gestion des risques, tels que les gestions des risques de crédit ou de liquidité. On suggère aussi de faire une recherche sur l'application de la théorie du contrôle optimal au problème de sélection de portefeuille moyenne-variance en finance, l'objectif est de trouver la répartition optimale des actifs qui offre le meilleurs compromis entre rendement attendu et risque.

Pour conclure, cette étude a non seulement enrichi la compréhension de l'application de la théorie du contrôle optimal dans un contexte financier, mais elle a également ouvert de nouvelles perspectives pour des développements futurs dans ce domaine.

Bibliographie

- [1] IVADO. Introduction à la recherche opérationnelle et à l'optimisation : Découverte. <https://catalogue.edulib.org/fr/IVADO-ROD1FR/>, 2024. Consulté le 8 septembre 2024.
- [2] Djamel Bellala. Introduction à la recherche opérationnelle et problème d'optimisation. https://staff.univ-batna2.dz/sites/default/files/bellala_djamel/files/1._introduction_a_la_recherche_operationnelle_et_probleme_doptimisation.pdf, 2024. Consulté le 8 septembre 2024.
- [3] Applications de la recherche opérationnelle. <https://cours-info.iut-bm.univ-fcomte.fr/upload/supports/S4/TechniquesOptimisation/ApplicationsRO.pdf>, 2024. Consulté le 8 septembre 2024.
- [4] Cours de recherche opérationnelle. <https://educnet.enpc.fr/file.php/297/CoursROPonts.pdf>, 2024. Consulté le 8 septembre 2024.
- [5] Polycopie du cours. https://moodle.utc.fr/file.php/141/Cours_SC_PDF/Polycopie.pdf, 2024. Consulté le 8 septembre 2024.
- [6] Comment utiliser la recherche opérationnelle pour l'optimisation logistique. <https://www.supplychaininfo.eu/dossier-optimisation-logistique/comment-utiliser-recherche-operationnelle-optimisation-logistique/>, 2024. Consulté le 8 septembre 2024.
- [7] Emmanuel Trella. *Contrôle optimal : théorie et applications*. première édition :2005, Vuibert, Collection "Mathématiques Concrètes", 246 pages. ISBN 2 7117 7175 X, 2005.
- [8] Makhlouf Aoudia and Smail Amazouz. Conditions d'octroi de crédits bancaire, cas de la badr. Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme de licence en Sciences Économiques, option : Monnaie-Finance-Banque, 2013. Promotion : 2012-2013.
- [9] Safia Ait Maamar and Fatima Rahal. Étude de la satisfaction des clients, cas de l'agence badr azazga. Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme de master en Sciences de Gestion, spécialité : Management Bancaire, 2019. Promotion : 2018-2019.
- [10] Fazia Zerourou and Kahina Sebih. Financement bancaire des entreprises, cas : Badr-agence 571-azazga. Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme de licence en Sciences de Gestion, option : Comptabilité, 2010. Promotion : 2009-2010.
- [11] Aghiles Sebergoud and Kenza Sadmi. Le crédit à la consommation : cas de l'agence badr azazga tizi-ouzou. Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme de master en Sciences de Gestion, option : Management Bancaire, 2024.

-
- [12] Banque Nationale d'Algérie. Crédit d'investissement. <https://www.bna.dz/fr/credit-dinvestissement/>, 2024. Consulté le 20 mars 2024.
- [13] C. Gilormini and G. Hirsch. *Équations différentielles, cours, exercices, tests*. Masson, Paris, 2e édition, 1980.
- [14] A. Aourchid and A. Bouchareb. Résolution d'un problème de contrôle optimal avec la méthode des itérations vibrationnelles. Mémoire de master, 2023. Promotion : 2022/2023.
- [15] Henia Guenoun and Dalila Issaoun. Contrôle optimal dans une banque d'investissement. Mémoire de master en Mathématiques, spécialité : Recherche Opérationnelle - Aide à la Décision, 2017. Promotion : 2017.
- [16] Auteur inconnu. Théorème de cauchy-lipchitz global. <http://www.docsity.com/fr/theoreme-de-cauchy-lipschitz-global/8114359/>, 2024. Consulté le 25 mai 2024.
- [17] Karima Khaldi. Contrôle optimal des systèmes dynamiques. Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de master académique, spécialité : Recherche Opérationnelle, 2020. Promotion : 2019/2020.
- [18] Hassiba Mahtar and Leyla Bourahla. Étude analytique et numérique de quelques problèmes de contrôle optimal. Mémoire de master en Mathématiques, option : Recherche Opérationnelle, 2022. Promotion : 2021/2022.
- [19] Mourad Azi. *Optimisation des systèmes dynamiques et application en économie financière*. Thèse de doctorat en sciences, Université A.MIRA-BEJAIA, 2021. Filière : Mathématiques Appliquées, option : Modélisation Mathématiques et Techniques de Décisions, Année universitaire : 2020/2021.
- [20] Fatima Zahra Mokkedem. Notes de cours : Introduction à la théorie du contrôle. Faculté des sciences, Département de Mathématiques, 2019. Année universitaire : 2018/2019.
- [21] Sarah Grib and Lydia Dehbi. Contrôle optimal d'une épidémie. Mémoire de master, spécialité : Mathématiques, option : Recherche Opérationnelle, 2017. Promotion : 2016/2017.
- [22] Arnaud Münch. Introduction à la théorie du contrôle. Cours dans le cadre de l'école doctorale, 2016. Hiver 2016.

Résumé

L'objectif assigné pour ce mémoire est d'étudier une politique d'investissement financier dans une banque avec la théorie du contrôle optimal afin de trouver une solution optimale qui réalise un compromis entre quantité d'argents disponible et argents investis, tout en maximisant le gain.

On d'abord présenté la banque de l'agriculture et de développement rural (BADR) située à AZAZGA, où on a mis au point notre étude sur les crédits d'investissement. Puis on a introduit les équations différentielles qui modélisent les systèmes de contrôle optimal, et pour bien élargir notre connaissance sur ce dernière, on a fait appel a ses différents aspect théoriques, surtout on a étudié la contrôlabilité, contrôle optimal des systèmes linéaires et non linéaire, et le principe du maximum de Pontryagin. A la fin, on a fait une application numérique pour résoudre notre problématique, et on a présenté les résultats sur MATLAB.

Mots clés : crédits d'investissement, équations différentielles, contrôle optimal, contrôlabilité, principe de maximum de Pontryagin.

Summary

The objective of this dissertation is to study a financial investment policy in a bank using optimal control theory, in order to find an optimal solution that achieves a compromise between the quantity of money available and the money invested, while maximizing profit.

We first presented the Bank of Agriculture and Rural Development (BADR) located in AZAZGA, where we developed our study on investment credits. We then introduced the differential equations that model optimal control systems, and to broaden our knowledge of the latter, we looked at its various theoretical aspects, especially controllability, optimal control of linear and non-linear systems, and Pontryagin's maximum principle. At the end, we made a numerical application to solve our problem, and presented the results on MATLAB.

Keywords : investment credits, differential equations, optimal control, controllability, Pontryagin's maximum principle