

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou



FACULTÉ DES SCIENCES

*Département de Mathématiques*

Mémoire de Master

*Recherche Opérationnelle*

*Résolution d'un programme linéaire en  
présence de variables aléatoires floues  
de type L-R dans les contraintes*

Réalisé par:

STITI Melissa & CHALLAL Cylia

*Devant le jury d'examen composé de :*

Mr. CHEBBAH.M;	MCB ;	U.M.M.T.O;	president
Mme ACHEMINE.F ;	MCA ;	U.M.M.T.O;	examinatrice
Mr AICHE. F;	MCB ;	U.M.M.T.O;	promoteur

2020/2021

## Remerciements

*En premier lieu, nous remercions Dieu de nous avoir donné du courage, de la volonté et d'avoir guidé nos pas vers les portes du savoir.*

*En deuxième lieu, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à notre promoteur Monsieur AICHE Farid, de nous avoir encadré, pour la confiance qu'il nous a toujours témoigné. Son expérience dans la recherche qu'il a partagé avec nous, ses inestimables conseils et encouragement, sa disponibilité et sa ponctualité nous ont été très précieux et nous ont permis de mener à bien ce travail.*

*Ensuite, nous exprimons nos sincères remerciements à Monsieur CHEBBAH Mohammed et Madame ACHEMINE Farida, de nous avoir fait honneur d'être les membres de notre jury, afin d'évaluer notre travail.*

*Nous ne saurons oublier le grand mérite des enseignants qui ont contribué à notre cursus particulièrement ceux du département "mathématiques" et qu'ils trouvent ici le témoignage de notre profonde reconnaissance.*

*Finalement, nous remercions toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.*

# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à :*

*Mes parents, qui se sont sacrifiés pour nous, avec toute mon affection, mon amour, ma reconnaissance et tout mon respect.*

*" Que Dieu vous garde "*

*Mon frère, ma sœur que j'adore.*

*Mes grands parents qui m'ont toujours encouragé.*

*Mes tantes qui ont toujours été un exemple de réussite pour moi, et tous les autres membres de ma grande famille.*

*Sans oublier, mon fiancé et ma belle-famille, pour leurs encouragements.*

*Mes amies et amis.*

*Mon binôme et toute sa famille.*

*Et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.*

MELISSA

# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à :*

*Mes très chers parents que nulle dédicace ne puisse exprimer ce que je leurs dois, pour leur bienveillance, leur amour...*

*" Que Dieu vous garde "*.

*Mes chers frères et sœurs et leurs familles que je remercie pour leurs encouragements,*

*Mes grands parents et à toute ma grande famille.*

*Mes amies et amis.*

*Mon binôme et toute sa famille.*

*Et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.*

CYLIA

# Table des matières

Table des matières	4
Introduction	
<b>1 Préliminaires</b>	<b>2</b>
1.1 Programmation linéaire . . . . .	3
1.1.1 Notion de programme linéaire . . . . .	3
1.1.2 Forme Canonique et forme Standard d'un programme linéaire . . . . .	4
1.1.2.1 Domaine de solutions réalisables et solution optimale . . . . .	5
1.1.3 Méthodes de résolution de problèmes linéaires . . . . .	5
1.1.3.1 Méthode graphique . . . . .	5
1.1.3.2 Méthode du Simplexe . . . . .	6
1.1.3.3 Initialisation de l'algorithme du simplexe . . . . .	12
1.2 Théorie des ensembles flous . . . . .	24
1.2.1 Notion d'ensemble flou . . . . .	25
1.2.2 Caractéristiques d'un sous ensemble flou . . . . .	26
1.2.2.1 Noyau . . . . .	26
1.2.2.2 Support . . . . .	26
1.2.2.3 Hauteur . . . . .	27
1.2.2.4 Cardinalité . . . . .	27
1.2.3 $\alpha$ - coupe . . . . .	28
1.2.4 Le théorème de décomposition . . . . .	29
1.2.5 Principe d'extension . . . . .	29
1.2.6 Opérations sur les sous-ensembles flous . . . . .	30
1.2.6.1 Égalité . . . . .	31
1.2.6.2 Inclusion . . . . .	31
1.2.6.3 Intersection . . . . .	31
1.2.6.4 Union . . . . .	32
1.2.6.5 Complémentaire . . . . .	32
1.2.6.6 Produit cartésien d'ensembles flous . . . . .	33
1.2.7 Intervalles flous . . . . .	33
1.2.8 Intervalles flous de type $L - R$ . . . . .	33
1.2.9 Opérations sur les intervalles flous de type $L - R$ . . . . .	34
1.2.10 $\alpha$ - coupe d'un intervalle flou de type $L - R$ . . . . .	35
1.2.11 Comparaison d'intervalle flou . . . . .	35
1.2.11.1 Comparaison des intervalles de nombres réels . . . . .	35
1.2.11.2 Possibilité, Nécessité . . . . .	36
1.2.11.3 Comparaison d'intervalles flous de type $L - R$ . . . . .	36
1.2.12 Nombre flou . . . . .	37

1.2.13	Nombre flou de type $L - R$ . . . . .	37
1.2.14	Types de nombre flou . . . . .	38
1.2.14.1	Nombres flous de type triangulaire . . . . .	38
1.2.14.2	Nombre flou de type trapézoïdal : . . . . .	39
1.3	Élément de la théorie des probabilités . . . . .	41
1.3.1	Notions d'espace mesurable . . . . .	41
1.3.2	Tribus d'évènements . . . . .	41
1.3.3	Espace probabilisable . . . . .	41
1.3.4	Espace probabilisé . . . . .	41
1.3.5	Tribu borélienne sur $R$ . . . . .	41
1.3.6	Applications mesurables . . . . .	41
1.3.7	Variables aléatoires réelles . . . . .	42
1.3.8	Fonction de répartition . . . . .	42
1.3.9	Densité de probabilité . . . . .	44
1.3.10	Espérance mathématique . . . . .	44
1.3.11	Variance . . . . .	44
1.3.12	Écart-type . . . . .	45
1.3.13	Covariance . . . . .	45
1.3.14	Variables aléatoires normales . . . . .	45
1.3.15	Variable aléatoire normale centrée réduite . . . . .	45
1.3.16	Fractiles d'une variable aléatoire normale centrée réduite . . . . .	46
1.4	Combinaison du flou de l'aléa . . . . .	47
1.4.1	Variables aléatoire floues . . . . .	47
1.4.2	Variables aléatoires floues discrètes . . . . .	47
1.4.3	Variables aléatoires floues normales . . . . .	48
1.4.4	Variables aléatoires floues de type $L - R$ . . . . .	49
1.4.4.1	Variables aléatoires floues normales de type $L - R$ . . . . .	49
1.4.4.2	Variables aléatoires floues discrètes de type $L - R$ . . . . .	49
1.4.4.3	$\alpha - coupe$ d'une variable aléatoire floue de type $L - R$ . . . . .	50
<b>2</b>	<b>Programmation linéaire stochastique</b> . . . . .	<b>51</b>
2.1	La forme d'un problème linéaire stochastique . . . . .	52
2.2	L'approche passive ou "wait and see" . . . . .	52
2.3	L'approche active ou "here and now" . . . . .	52
2.3.1	Objectif du programme équivalent : . . . . .	53
2.3.2	Cas des contraintes aléatoires . . . . .	55
2.3.2.1	Méthode Chance-Constrained Programming . . . . .	55
2.3.2.2	Modèle avec recours . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Programmation linéaire floue</b> . . . . .	<b>66</b>
3.1	Forme d'un problème linéaire flou : . . . . .	67
3.2	Résolution d'un problème linéaire flou . . . . .	67
3.2.1	Déffuzzification en utilisant possibilité . . . . .	68
3.2.2	Déffuzzification en utilisant nécessité . . . . .	69
<b>4</b>	<b>La programmation linéaire floue stochastique</b> . . . . .	<b>79</b>
4.1	La forme d'un problème linéaire floue stochastique . . . . .	80
4.2	Programmation linéaire en présence des variables aléatoires floues dans les contraintes . . . . .	80

---

4.3	Chance-constrained programming en programmation linéaire floue stochastique . . . . .	89
4.4	Différentes versions de Chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients . . . . .	90
4.4.1	Combinaison de probabilité et possibilité . . . . .	90
4.4.2	Combinaison de probabilité et nécessité . . . . .	91
4.4.3	Combinaison de chance-constrained programming et comparaison d'intervalles aléatoires . . . . .	92
4.5	Convexité des ensembles de solutions admissibles . . . . .	93
4.5.1	Cas où $A$ est déterministe ou flou . . . . .	94
4.5.2	Cas où $A$ est stochastique ou flou stochastique . . . . .	94
4.5.2.1	Les composantes de $A$ et $b$ sont des variables aléatoires floues . . . . .	95
4.5.2.2	Les composantes de $A$ et $b$ sont des variables aléatoires floues de type $L - R$ . . . . .	95

## Conclusion

## Bibliographie

**112**

---

# Introduction

L'une des principales missions de la recherche opérationnelle est d'aider à prendre des décisions en vue d'une gestion efficace, rationnelle et logique.

Lors de la modélisation mathématique d'une expérience ou d'un problème d'optimisation, on a tendance à supposer que les données sont déterministes. Mais dans la vie réelle on peut se retrouver face à des situations où les données sont imprécises avec une imprécision de nature floue ou aléatoire. C'est ce qui a donné naissance à la programmation linéaire floue et la programmation linéaire stochastique.

Pendant des années, seule la programmation linéaire stochastique est considérée comme meilleure outil pour traiter des études de prise de décision dans un environnement incertain. Beaucoup de travaux ont été réalisés en programmation stochastique [25] [21] [26] [27]

Quant à la programmation linéaire floue, elle est née après l'introduction des ensemble flous par Lotfi Zadah en 1965 [5]. Depuis, Beaucoup de travaux ont été réalisés en programmation floue [25] [21] [26] [27].

Dans pas mal de situations, des données aléatoires et des données floues pouvant se trouver combinées dans un contexte optimisationnel [28] [29] [30]. Les variables aléatoires floues donnent un meilleur formalisme de cette combinaison [18] [31] [32] ce qui a motivé l'introduction à la programmation linéaire floue stochastique [29] [30] [8] [33].

Ce travail consiste à résoudre un programme linéaire dont l'objectif est déterministe en présence de variables aléatoire floues de type  $L - R$  dans les contraintes, en appliquant la méthode de chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients. Et il est organisé en 4 chapitres :

Au chapitre 1 : ce chapitre est partagé en 4 sections, nous avons défini et rappelé quelques notions nécessaires pour réaliser l'objectif à savoir : l'essentiel de la programmation linéaire, les notions de base de la théorie des ensembles flous, la théorie des probabilités et la combinaison du flou et de l'aléa. Au chapitre 2 : nous nous sommes basés sur la résolution d'un problème linéaire stochastique dont l'objectif est déterministe en présence des variables aléatoires dans les contraintes et nous avons cité deux approches "passive et active" et la résolution de ce dernier en plus de quelques critères d'optimisation du problème équivalent lorsque l'objectif est aléatoire à savoir : "E-modèle, V-modèle, EV-modèle et katoka". Au chapitres 3 : nous avons étudié le cas d'un problème linéaire flou avec un objectif déterministe en présence de données floues dans les contraintes et la déffuzzification de ces dernières en utilisant la possibilité d'un côté et la nécessité d'un autre côté. Au dernier chapitre, chapitre 4 : nous avons repris la méthode de chance-constrained programming pour la résolution d'un programme linéaire en présence de variables aléatoires floues de type  $L - R$  dans les contraintes en combinant entre probabilité et possibilité d'une part et entre probabilité et nécessité d'une autre part et enfin entre chance-constrained programming et la comparaison d'intervalles aléatoires. sans oublier la convexité qui est une condition nécessaire à tout problème de recherche opérationnelle et d'aide à la décision.

Ce travail se termine par une conclusion où nous avons représenté les principaux résultats obtenus et sans oublier les principales références bibliographiques.

# Chapitre 1

## Préliminaires

## 1.1 Programmation linéaire

Pour résoudre des problèmes d'optimisation, on a tendance à utiliser des logiciels de programmation linéaire déjà tout prêts sans s'intéresser à la théorie qui se cache derrière leur élaboration.

La programmation linéaire a été développée et utilisée en 1947 par George Bernard Danzig, Marshall Wood et leurs collaborateurs aux U.S, department of the Air Force. C'est un cadre mathématique général permettant de modéliser et de résoudre certains problèmes d'optimisation. Mathématiquement le problème consiste à optimiser une fonction linéaire sous des contraintes linéaires liant les variables.

Dans cette section, nous allons expliquer ce qu'est un programme linéaire en général et quelles sont ses principales formes d'écriture. Les problèmes linéaires à  $n = \{1; 2; 3\}$  peuvent être résolus géométriquement (graphiquement). Les programmes linéaire à  $n > 3$  doivent être résolus analytiquement soit par la Méthode du Simplexe, si une solution de base réalisable existe. Sinon d'autres dérivées de cette méthode seront utilisées à savoir : Méthode de Deux Phases ; M-Méthode et la Méthode Duale du Simplexe.

### 1.1.1 Notion de programme linéaire

#### Définition 1 : [1][2]

Un problème linéaire est un problème d'optimisation mathématique (minimisation ou maximisation) d'une fonction linéaire à plusieurs variables dite fonction objectif, en présence de contraintes. Ces dernières doivent être également linéaires.

Tout programme linéaire prend la forme suivante :

Soit  $Z$  une fonction définie de  $D$  dans  $\mathbb{R}^n$  ( $D \subseteq \mathbb{R}^n$ )

$$(P) \begin{cases} Z(X) \longrightarrow \text{min ou max} \\ X \in D; X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Il s'agit donc de trouver un point  $X^*$  de  $D$  (si un tel point existe) pour lequel on a :

1.  $Z(X) \geq Z(X^*); \forall X \in D \subseteq \mathbb{R}^n$  pour un problème de minimisation.
2.  $Z(X) \leq Z(X^*); \forall X \in D \subseteq \mathbb{R}^n$  pour un problème de maximisation.

Où

- $D$  est appelé ensemble admissible ou réalisable.
- si  $X \in D$  alors la solution est réalisable (admissible).
- si  $X^* \in D$  réalise l'optimum alors il est appelé : Solution Optimale.
- La valeur de  $Z$  en  $X^*$  est appelée : Valeur Optimale et est notée  $Z^* = Z(X^*)$ .

Une forme plus détaillée du problème  $(P)$  est la suivante [2] :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} Z(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n \longrightarrow \min \text{ ou } \max \quad (1) \\ \text{sous les contraintes (sc)} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \leq (=, \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n \leq (=, \geq) b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \leq (=, \geq) b_i \quad (2) \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \leq (=, \geq) b_m \\ x_j \geq 0; j = 1, \dots, n \quad (3) \end{array} \right.$$

(1) : représente la fonction objectif.

(2) : représente les contraintes principales.

(3) : représente les contraintes directes.

### 1.1.2 Forme Canonique et forme Standard d'un programme linéaire

#### Définition 2 : [1]

On dit qu'un programme linéaire est sous forme canonique si  $D$  est défini par un système d'inéquations linéaires.

Si par contre, toutes les contraintes sont des égalités on dira que le programme linéaire est mit sous forme standard.

#### Remarque 1 :

On peut transformer un problème linéaire quelconque sous forme standard en ajoutant des variables supplémentaires appelées "variables d'écart".

#### Exemple 1 : [1]

Soit le problème linéaire  $(P)$  suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} Z(X) = x_1 + x_2 \longrightarrow \max \\ \text{sc} \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

En introduisant des variables d'écart  $x_3$  et  $x_4$  dans les contraintes, on aura :

$$(P)' \begin{cases} Z(X) = x_1 + x_2 \longrightarrow \max \\ \text{sc} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Le problème  $(P)'$  est la forme standard du problème  $(P)$ .

### Remarque 2 :

Il y a équivalence entre un problème de minimisation et un problème de maximisation. En effet ;

$$\min Z(X) = -\max(-Z(X))$$

#### 1.1.2.1 Domaine de solutions réalisables et solution optimale

##### Définitions 3 : [3]

- Solution réalisable : tout vecteur  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  qui satisfait les contraintes fonctionnelles (principales) et les contraintes de non négativité (directes) est appelé solution réalisable au modèle de programmation linéaire.
- Domaine des solutions réalisables : c'est l'ensemble des solutions réalisables du programme linéaire, autrement dit, c'est l'ensemble des solutions qui satisfont simultanément les contraintes fonctionnelles et les contraintes de non négativité.
- Solution non réalisable : tout vecteur  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  non situé dans le domaine des solutions réalisables, il ne respecte pas une ou plusieurs contraintes.
- Solution optimale : toute solution réalisable qui optimise la fonction objectif.

#### 1.1.3 Méthodes de résolution de problèmes linéaires

Il existe des méthodes pour la résolution des problèmes de programmation linéaire, parmi elles :

##### 1.1.3.1 Méthode graphique

On utilise cette méthode uniquement dans le cas où  $n = \{1; 2; 3\}$ .

La procédure à suivre est la suivante :

1. On trace sur un graphique chacune des contraintes du programme et on détermine la région commune à l'ensemble de ces contraintes, elle constitue si elle existe, le domaine des solutions réalisables. Ce dernier délimite les valeurs possibles des variables de décision  $x_j$ ;  $j = 1, \dots, n$  satisfaisant toutes les contraintes.
2. On détermine ensuite les coordonnées des points extrêmes ou sommets de la région des solutions réalisables. On obtient les coordonnées des points extrêmes en les localisant directement sur le graphique ou plus exactement en résolvant les équations de droites qui coupent chacun des points extrêmes.

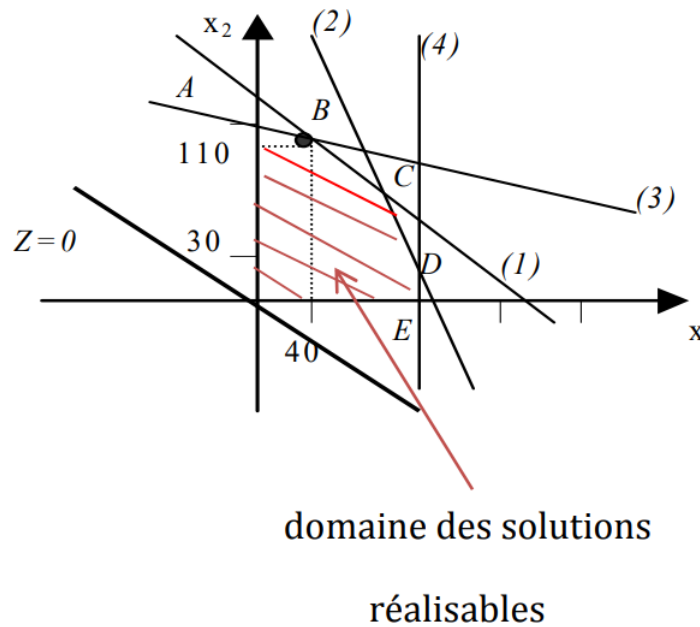
3. On substitue ensuite les coordonnées de chaque point extrême dans l'expression de la fonction objectif. Le point extrême (dans le cas d'une solution unique) qui optimise la fonction objectif correspond à la solution réalisable optimale.
4. On s'assurera que la solution obtenue en 3 est bien une solution réalisable en substituant les coordonnées du point extrême correspondant dans les contraintes du programme.

### Exemple 2 :

Soit le problème linéaire ( $P$ ) suivant :

$$(P) \begin{cases} Z(X) = 100x_1 + 200x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ x_1 + x_2 \leq 150 & (1) \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 440 & (2) \\ x_1 + 4x_2 \leq 480 & (3) \\ x_1 \leq 90 & (4) \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Après application de la méthode graphique nous avons obtenu le graphe suivant :



La solution optimale est :  $B(40, 110)$

#### 1.1.3.2 Méthode du Simplexe

En 1947, G.B DANTZIG a développé une méthode efficace pour résoudre les problèmes linéaires, dénommée méthode du simplexe qui est une méthode itérative. Elle démarre d'un point extrême (point de départ) et passe au sommet voisin, et ceci constitue une itération de l'algorithme du simplexe. Pour cela, on doit définir le point extrême de départ et le test d'arrêt par rapport au critère d'optimalité.

Soit  $(P)$  le problème standard de programmation linéaire à optimiser,  $(P)$  peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$(P) \begin{cases} Z(X) = \sum_{j=1}^n C_j x_j \longrightarrow opt \\ sc \\ AX = b \\ x_j \geq 0; j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Où

- $opt$  : min ou max.
- $C \in \mathbb{R}^n$  : le vecteur coût.
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  : la matrice des contraintes tel que :  $n$  désigne le nombre des variables et  $m$  désigne le nombre des contraintes.
- $b \in \mathbb{R}^m$  : le second membre.
- $I = \{1, 2, \dots, m\}$  : l'ensemble des indices de lignes de  $A$ .
- $J = \{1, 2, \dots, n\}$  : l'ensemble des indices de colonnes de  $A$ .
- $X = X(J) = \{x_j/j \in J\}$  : le vecteur des variables .

#### Définition 4 : [1]

On appelle base du programme linéaire  $(P)$ , toute sous matrice carrée régulière  $(m \times m)$  extraite de  $A$  notée  $A_B$ .

#### Algorithme de la méthode du simplexe

Pour pouvoir appliquer l'algorithme du simplexe [4] il est nécessaire d'avoir une base réalisable et les  $b_i \geq 0; i = 1, \dots, m$ . Si il existe des  $b_i < 0$ , il faut multiplier les contraintes correspondantes par  $(-1)$ .

- *Étape 0* : Écrire le problème sous la forme standard et dessiner le tableau du simplexe.
- *Étape 1* : Choix de la variable entrante :  
Cas de maximisation :  
 On choisi la variable entrante telle que :

$$Z_k - C_k = \min_{Z_j - C_j < 0} (Z_j - C_j); \quad 1 < k < n$$

Cas de minimisation :

On choisi la variable entrante telle que :

$$Z_k - C_k = \max_{Z_j - C_j > 0} (Z_j - C_j); \quad 1 < k < n$$

- *Étape 2* : Choix de la variable sortante :

$$\frac{b_r}{a_{rk}} = \min_{a_{rk} > 0} \frac{b_i}{a_{ik}}$$

(le pivot  $a_{rk}$  est toujours positif;  $a_{rk} > 0$ )  $1 \leq r \leq m$  et  $1 \leq k \leq n$

- *Étape 3* : Critère d'optimalité :

Cas de maximisation :

Si  $Z_j - C_j \geq 0$  stop, la solution  $X^*$  est optimale sinon on revient à l'étape 1 pour l'itération suivante.

Si  $\exists k : Z_k - C_k < 0$  et  $a_{rk} \leq 0$  donc le problème tend vers  $\infty$ ; ( $Z \rightarrow \infty$ ).

Cas de minimisation :

Si  $Z_j - C_j \leq 0$  stop, la solution  $X^*$  est optimale sinon on revient à l'étape 1 pour l'itération suivante.

Si  $\exists k : Z_k - C_k > 0$  et  $a_{rk} \leq 0$  donc le problème tend vers  $\infty$ ; ( $Z \rightarrow \infty$ ).

**Tableau du Simplexe :**

Les différents calculs qu'on aura à effectuer et les différentes étapes de résolution seront disposés dans le tableau suivant **[2]** :

$c$			$c_1$	$c_2$	...	$c_m$	$c_{m+1}$	...	$c_k$	...	$c_j$	...	$c_n$	
$c_B$	Base	$b$	$x_1$	$x_2$	...	$x_m$	$x_{m+1}$	...	$x_k$	...	$x_j$	...	$x_n$	Pivot
$c_1$	$a_1$	$b_1 = x_1$	1	0	...	0	$a_{1,m+1}$	...	$a_{1k}$	...	$a_{1j}$	...	$a_{1n}$	$a_{1k}$
$c_2$	$a_2$	$b_2 = x_2$	0	1	...	0	$a_{2,m+1}$	...	$a_{2k}$	...	$a_{2j}$	...	$a_{2n}$	$a_{2k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_r$	$a_r$	$b_r = x_r$	0	1	...	0	$a_{r,m+1}$	...	$a_{rk}$	...	$a_{rj}$	...	$a_{rn}$	$a_{rk}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_m$	$a_m$	$b_m = x_m$	0	0	...	1	$a_{m,m+1}$	...	$a_{mk}$	...	$a_{mj}$	...	$a_{mn}$	$a_{mk}$
	$Z$	$\Delta_k = Z_k - C_k$ $1 \leq k \leq n$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	...	$\Delta_m$	$\Delta_{m+1}$	...	$\Delta_k$	...	$\Delta_j$	...	$\Delta_n$	

TABLE 1.1 – Tableau du Simplexe

**Exemple 3 :**

Soit le problème linéaire (P) suivant :

$$(P) \begin{cases} Z(X) = x_1 + 3x_2 \longrightarrow max \\ s.c \\ x_1 + x_2 \leq 14 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La forme standard : ajout des variables d'écart (la forme standard associée à (P)).

$$(P) \begin{cases} Z(X) = x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \longrightarrow max \\ s.c \\ x_1 + x_2 + x_3 = 14 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 12 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0 \end{cases}$$

On trace le 1<sup>er</sup> tableau du simplexe :

			1	3	0	0	0
$C_B$	base	b	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
0	$x_3$	14	1	1	1	0	0
← 0	$x_4$	12	-2	3	0	1	0
0	$x_5$	12	2	1	0	0	1
$Z = 0$			-1	-3	0	0	0

↑

$\exists k; k = \{1, 2\}; \quad Z_k - C_k < 0 \implies$  le maximum n'est pas atteint.

Choix de variable entrante :

$$Z_k - C_k = \min_{Z_j - C_j < 0} (Z_j - C_j) = \min \{-1, -3\} = -3; \quad (k = 2)$$

Choix de variable sortante :

$$\frac{b_r}{a_{r2}} = \min_{a_{r2} > 0} \frac{b_i}{a_{i2}} = \min \left\{ \frac{14}{1}, \frac{12}{3}, \frac{12}{1} \right\} = \frac{12}{3} = 4; \quad (r = 2)$$

Donc la variable  $x_2$  va rejoindre la base en remplaçant  $x_4$  dans l'itération suivante.

Le 2<sup>ème</sup> tableau de simplexe :

			1	3	0	0	0
$C_B$	base	b	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
← 0	$x_3$	10	$5/3$	0	1	$-1/3$	0
3	$x_2$	4	$-2/3$	1	0	$1/3$	0
0	$x_4$	16	$4/3$	0	0	$1/3$	1
$Z = 12$			-3	0	0	1	0

↑

$\exists k; k = \{1\}; \quad Z_k - C_k < 0 \implies$  le maximum n'est pas atteint

Choix de variable entrante :

$$Z_k - C_k = \min_{Z_j - C_j < 0} (Z_j - C_j) = -3; \quad (k = 1)$$

Choix de variable sortante :

$$\frac{b_r}{a_{r1}} = \min_{a_{r1} > 0} \frac{b_i}{a_{i1}} = \min \left\{ \frac{10}{5}, \frac{16}{4} \right\} = \frac{30}{5} = 6; \quad (r = 1)$$

Donc la variable  $x_1$  va rejoindre la base en remplaçant  $x_3$  dans l'itération suivante.

Le 3<sup>ème</sup> tableau de simplexe :

			1	3	0	0	0
$C_B$	base	b	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	$x_1$	6	1	0	$3/5$	$-1/5$	0
3	$x_2$	8	0	1	$2/5$	$1/5$	0
0	$x_4$	8	0	0	$-4/5$	$3/5$	1
$Z = 30$			0	0	$9/5$	$2/5$	0

$Z_k - C_k > 0; \quad \forall k$  donc le maximum est atteint

La solution optimale est :  $X^* = (6; 8; 0; 0; 8)$

La valeur optimale est :  $Z(X^*) = 30$

### Application de l'exemple sur Lingo :

#### Programmation sur Lingo

Lingo est un logiciel utilisé pour résoudre les modèles d'optimisation linéaire, entier et quadratique, il est aussi utilisé pour résoudre les modèles d'optimisation globale non linéaire. Une des caractéristique de Lingo c'est qu'il offre des outils qui peuvent aider à l'analyse des modèles en utilisant la méthode du simplexe.

Installation du logiciel :

Pour utiliser cette version de Lingo il est conseillé d'avoir au moins un processeur 486 et 8Mo de mémoire RAM.

Il faut aussi prévoir un espace disque dur de 2 Mo pour pouvoir l'installer.

Les étapes de l'installation sont :

- 1 . Démarrer Windows
- 2 . Insérer CD-ROM
- 3 . Cliquer sur l'icone setup (Install) dans votre explorateur de Windows
- 4 . Suivre les instructions de l'écran. Pour plus d'information sur ce logiciel visiter l'adresse web [www.lingo.com](http://www.lingo.com).

The screenshot shows the Lingo 18.0 Solution Report window. The left pane displays the model equations:

```

max=x1+3*x2;
x1+x2<=14;
(-2)*x1+3*x2<=12;
2*x1-x2<=12;
end

```

The right pane shows the solution report:

```

Global optimal solution found.
Objective value:                30.00000
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:        2
Elapsed runtime seconds:        0.06

Model Class:                    LP

Total variables:                2
Nonlinear variables:            0
Integer variables:              0

Total constraints:              4
Nonlinear constraints:          0

Total nonzeros:                 8
Nonlinear nonzeros:             0

```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	6.000000	0.000000
X2	8.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	30.00000	1.000000
2	0.000000	1.800000
3	0.000000	0.4000000
4	8.000000	0.000000

The status bar at the bottom indicates 'For Help, press F1', 'NUM', 'Ln 29, Col 77', and '10:25 pm'.

### Exemple 4 :

Soit le problème linéaire ( $P$ ) suivant :

$$(P) \begin{cases} Z(X) = -x_1 + x_2 \longrightarrow \min \\ sc \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La forme standard : ajout des variables d'écart (la forme standard associée à (P)).

$$(P) \begin{cases} Z(X) = -x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \longrightarrow \min \\ sc \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0 \end{cases}$$

On trace le 1<sup>er</sup> tableau du simplexe :

			-1	1	0	0	
	$C_B$	<i>base</i>	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
	0	$x_3$	2	-2	1	1	0
←	0	$x_4$	5	1	-2	0	1
	$Z = 0$			1	-1	0	0
				↑			

$\exists k; k = \{1\}; Z_k - C_k > 0 \implies$  le minimum n'est pas atteint.

Choix de variable entrante :

$$Z_k - C_k = \max_{Z_j - C_j < 0} (Z_j - C_j) = 1; \quad (k = 1)$$

Choix de variable sortante :

$$\frac{b_r}{a_{r1}} = \min_{a_{r2} > 0} \frac{b_i}{a_{i1}} = 1; \quad (r = 1)$$

Donc la variable  $x_1$  va rejoindre la base en remplaçant  $x_3$  dans l'itération suivante.

On trace le 2<sup>ème</sup> tableau du simplexe :

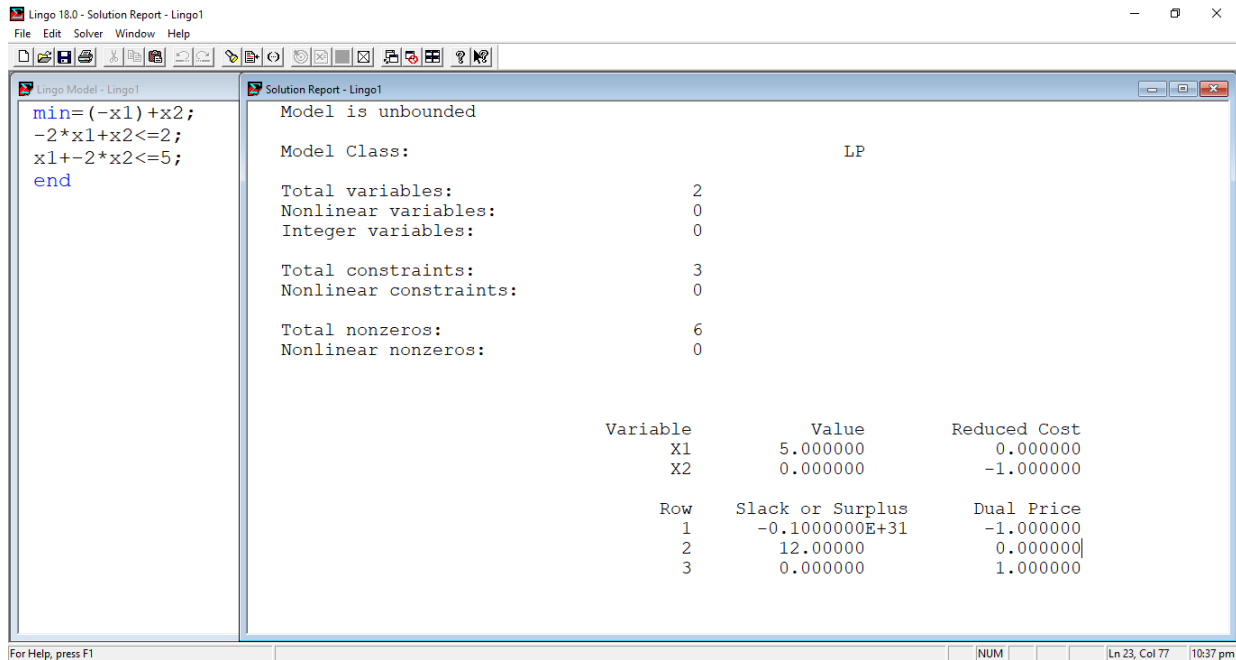
			-1	1	0	0	
	$C_B$	<i>base</i>	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
	0	$x_3$	12	0	-3	1	2
	-1	$x_1$	5	1	-2	0	1
	$Z \longrightarrow \infty$			0	1	0	-1
				↑			

$\exists k = 2 : Z_2 - C_2 > 0$  mais les  $a_{r2} < 0; \forall r$

Donc

Le problème admet une infinité de solutions  $Z \longrightarrow \infty$

## Application de l'exemple sur Lingo :



### 1.1.3.3 Initialisation de l'algorithme du simplexe

Si toutefois on n'arrive pas à obtenir une solution de base réalisable, la méthode du simplexe ne peut être utilisée. Dans ce cas, d'autres dérivées de cette méthode seront appelées. On ne traitera que celles dont on aura besoin dans les chapitres suivants à savoir : Méthode de Deux Phases ; M-Méthode et la Méthode Duale du Simplexe.

#### Méthode de deux Phases [4] :

- *Étape 0* : Écrire le problème sous la forme standard, rendre les  $b_i$  positifs  $i = 1, \dots, m$  (si  $\exists b_i < 0$  on multiplie les contraintes correspondantes par  $(-1)$ ) et introduire des variables artificielles  $V_i$ ;  $i = 1 \dots m$ .
- *Étape 1* : Réalisation de la Phase I : dans cette phase, on ignore la vraie fonction objectif ( $C_j = 0$ ;  $j = 1, \dots, n$ ) et on cherche à optimiser la somme des variables artificielles qu'on a dû introduire. on résout le programme linéaire résultant avec la méthode du simplexe.

c'est-à-dire :

$$\max Z_1 = - \sum_{i=1}^m V_i \text{ dans le cas de maximisation et } \max Z_1 = \sum_{i=1}^m V_i \text{ dans le cas de}$$

minimisation

Si les  $V_i \neq 0$  stop (pas de solution de base réalisable);

Sinon on passe à la Phase II.

- *Étape 2* : Réalisation de la Phase II : elle consiste à récupérer le dernier tableau de la Phase I en remettant la vraie fonction objectif à sa place.

C'est-à-dire : Résoudre  $\max Z(X) = \sum_{j=1}^n C_j x_j$  sous les contraintes  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ ;  $i = 1 \dots m$  en prenant comme solution de départ la solution obtenue à la Phase I avec la méthode du simplexe.

**Exemple 5 :**

Soit le problème linéaire ( $P$ ) suivant :

$$(P) \begin{cases} Z(X) = 5x_1 + 7x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ x_1 - x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard :

$$(P) \begin{cases} Z(X) = 5x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \longrightarrow \max \\ sc \\ x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - x_4 = 4 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0 \end{cases}$$

On n'a pas de base réalisable ; donc on ajoute des variables artificielles dans la 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> contraintes comme suit :

$$(P) \begin{cases} Z(X) = 5x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - x_6 - x_7 \longrightarrow \max \\ sc \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = 6 \\ x_1 - x_4 + x_7 = 4 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; x_6 \geq 0; x_7 \geq 0 \end{cases}$$

On applique la méthode du simplexe pour la suite de la résolution :

Phase I/

Elle consiste à résoudre le problème suivant :

$$(P_1) \begin{cases} Z(X) = -x_6 - x_7 \longrightarrow \max \\ sc \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = 6 \\ x_1 - x_4 + x_7 = 4 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; x_6 \geq 0; x_7 \geq 0 \end{cases}$$

Avec la méthode du simplexe :

Le 1<sup>er</sup> tableau du simplexe :

			0	0	0	0	0	-1	-1	
←	$C_B$	<i>base</i>	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
	-1	$x_6$	6	1	-1	-1	0	0	1	0
	-1	$x_7$	4	1	0	0	-1	0	0	1
	0	$x_5$	3	0	1	0	0	1	0	0
				-2	1	1	1	0	0	0
				↑						

Choix de variable entrante :

$$Z_k - C_k = \min_{Z_j - C_j < 0} (Z_j - C_j) = -2; \quad (k = 1)$$

Choix de variable sortante :

$$\frac{b_r}{a_{r1}} = \min_{a_{r2} > 0} \frac{b_i}{a_{i1}} = \min \left\{ \frac{6}{1}, \frac{4}{1} \right\} = 4; \quad (r = 2)$$

Donc la variable  $x_1$  va rejoindre la base en remplaçant  $x_2$  dans l'itération suivante.

Le 2<sup>ème</sup> tableau du simplexe :

			0	0	0	0	0	-1	-1	
←	$C_B$	<i>base</i>	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
	-1	$x_6$	2	0	1	-1	1	0	1	/
	0	$x_1$	4	1	0	0	-1	0	0	/
	0	$x_5$	3	0	1	0	0	1	0	/
				0	-1	1	-1	0	0	/
				↑						

Choix de variable entrante :

$$Z_k - C_k = \min_{Z_j - C_j < 0} (Z_j - C_j) = -1; \quad (k = 2)$$

Choix de variable sortante :

$$\frac{b_r}{a_{r2}} = \min_{a_{r2} > 0} \frac{b_i}{a_{i2}} = \min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{3}{1} \right\} = 2; \quad (r = 2)$$

Donc la variable  $x_2$  va rejoindre la base en remplaçant  $x_1$  dans l'itération suivante.

Le 3<sup>ème</sup> tableau du simplexe :

			0	0	0	0	0	-1	-1	
	$C_B$	<i>base</i>	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
	0	$x_2$	2	0	1	-1	1	0	/	/
	0	$x_1$	4	1	0	0	-1	0	/	/
	0	$x_5$	1	0	0	1	-1	1	/	/
				0	0	0	0	0	/	/

$\forall k; Z_k - C_k = 0$  on passe à la Phase II.

Phase II :

— Elle consiste à récupérer le dernier tableau de la Phase I en remettant la vraie fonction objectif à sa place.

C'est-à-dire : Résoudre

$$(P) \begin{cases} Z(X) = 5x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - x_6 - x_7 \longrightarrow \max \\ sc \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = 6 \\ x_1 - x_4 + x_7 = 4 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; x_6 \geq 0; x_7 \geq 0 \end{cases}$$

En prenant comme solution de départ la solution obtenue à la Phase I avec la méthode du simplexe

Le 1<sup>er</sup> tableau du simplexe :

			5	7	0	0	0	
	$C_B$	base	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
	7	$x_2$	2	0	1	-1	1	0
	5	$x_1$	4	1	0	0	-1	0
←	0	$x_5$	1	0	0	1	-1	1
				0	0	-7	2	0

↑

$\exists k; k = \{1\}; Z_k - C_k < 0 \implies$  le maximum n'est pas atteint

Choix de variable entrante :

$$Z_k - C_k = \min_{Z_j - C_j < 0} (Z_j - C_j) = -7; \quad (k = 3)$$

Choix de variable sortante :

$$\frac{b_r}{a_{r3}} = \min_{a_{r2} > 0} \frac{b_i}{a_{i3}} = 1; \quad (r = 3)$$

Donc la variable  $x_3$  va rejoindre la base en remplaçant  $x_5$  dans l'itération suivante

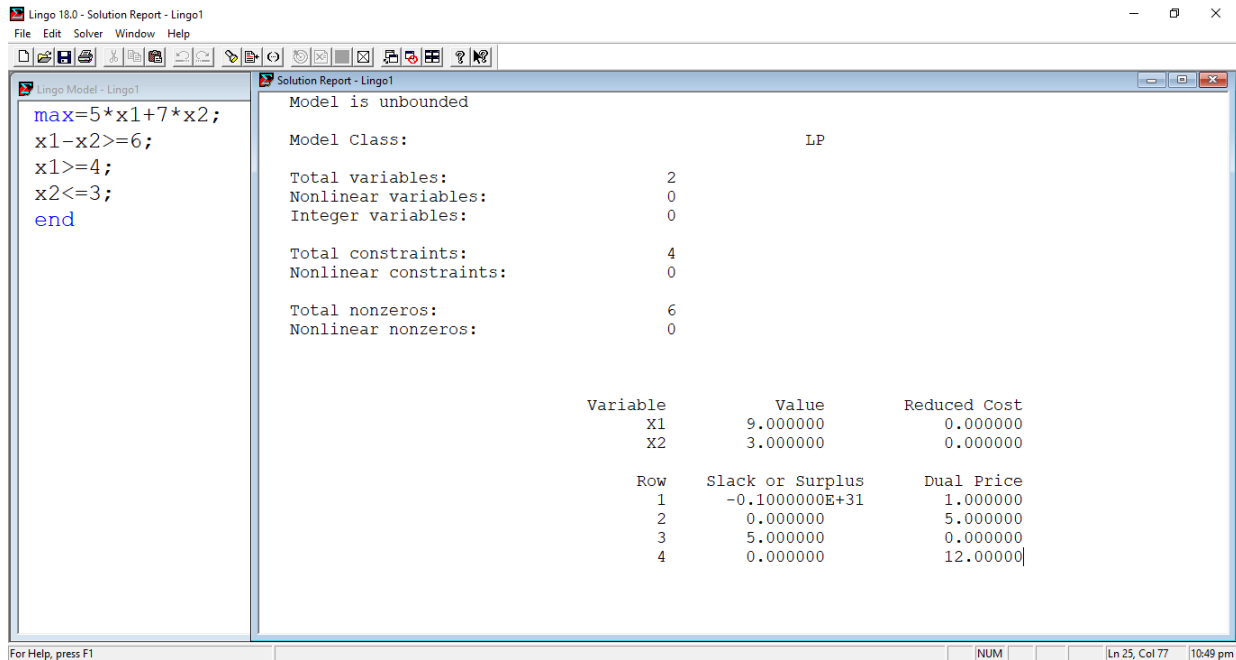
Le 2<sup>ème</sup> tableau du simplexe :

			5	7	0	0	0	
	$C_B$	base	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
	7	$x_2$	3	0	1	0	0	1
	5	$x_1$	4	1	0	0	-1	0
	0	$x_5$	1	0	0	1	-1	1
				0	0	0	-5	0

↑

On remarque que  $\forall r; a_{r4} \leq 0 \implies$  la solution est infinie ( $Z \longrightarrow \infty$ )

## Application de l'exemple sur Lingo :



### M–Méthode [4] :

- *Étape 0* : Écrire le problème sous la forme standard, rendre les  $b_i$  positifs  $i = 1 \dots m$  (si  $\exists b_i < 0$  on multiplie les contraintes correspondantes par  $(-1)$ ) et introduire des variables artificielles dans les contraintes  $\sum_{j=1 \dots n} a_{ij}x_j + V_i = b_i; i = 1 \dots m$
- *Étape 1* : Résolution du problème

#### Cas de maximisation :

$$\max Z = \sum_{j=1}^n C_j x_j - \sum_{i=1}^m M_i V_i; \quad M > 0$$

#### Cas de minimisation :

$$\min Z = \sum_{j=1}^n C_j x_j + \sum_{i=1}^m M_i V_i; \quad M > 0$$

Sous les contraintes précédentes avec la méthode du simplexe. Si  $V_i \neq 0; i = 1 \dots m$  stop (pas de solution réalisable);

Sinon la solution obtenue est optimale.

### Remarque 3 :

Si les variables artificielles sont restées dans la base alors que l'optimum est atteint donc il n'existe pas de solution réalisable.

**Exemple 6 :**

Soit le problème linéaire ( $P$ ) suivant :

$$(P) \begin{cases} Z(X) = 5x_1 + 7x_2 \longrightarrow max \\ sc \\ x_1 - x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard :

$$(P) \begin{cases} Z(X) = 5x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \longrightarrow max \\ sc \\ x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - x_4 = 4 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0 \end{cases}$$

On a pas de base réalisable ; donc on ajoute des variables artificielles dans la 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> contrainte comme suit :

$$(P) \begin{cases} Z(X) = 5x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 \longrightarrow max \\ sc \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = 6 \\ x_1 - x_4 + x_7 = 4 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; x_6 \geq 0; x_7 \geq 0 \end{cases}$$

On applique la méthode du simplexe pour la suite de la résolution :

Le 1<sup>er</sup> tableau du simplexe :

			5	7	0	0	0	-M	-M	
	$C_B$	base	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
	-M	$x_6$	6	1	-1	-1	0	0	1	0
←	-M	$x_7$	4	1	0	0	-1	0	0	1
	0	$x_5$	3	0	1	0	0	1	0	0
				-2M - 5	M - 7	M	M	0	0	0
				↑						

$\exists k; k = \{1\}; Z_k - C_k < 0 \implies$  le maximum n'est pas atteint.

Choix de variable entrante :

$$Z_k - C_k = \min_{Z_j - C_j < 0} (Z_j - C_j) = -2M - 5; \quad (k = 1)$$

Choix de variable sortante :

$$\frac{b_r}{a_{r1}} = \min_{a_{r2} > 0} \frac{b_i}{a_{i1}} = \min \left\{ \frac{6}{1}, \frac{4}{1} \right\} = 4; \quad (r = 2)$$

Donc la variable  $x_1$  va rejoindre la base en remplaçant  $x_2$  dans l'itération suivante.

Le 2<sup>ème</sup> tableau du simplexe :

			5	7	0	0	0	$-M$	$-M$	
←	$C_B$	base	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
	$-M$	$x_6$	2	0	-1	-1	1	0	1	/
	5	$x_1$	4	1	0	0	-1	0	0	/
	0	$x_5$	3	0	1	0	0	1	0	/
			0	$M - 7$	$M$	$-M - 5$	0	0	0	/
										↑

$\exists k; k = \{1\}; \quad Z_k - C_k < 0 \implies$  le maximum n'est pas atteint

Choix de variable entrante :

$$Z_k - C_k = \min_{Z_j - C_j < 0} (Z_j - C_j) = -M - 5; \quad (k = 4)$$

Choix de variable sortante :

$$\frac{b_r}{a_{r4}} = \min_{a_{r2} > 0} \frac{b_i}{a_{i4}} = 2; \quad (r = 2)$$

Donc la variable  $x_4$  va rejoindre la base en remplaçant  $x_1$  dans l'itération suivante

Le 3<sup>ème</sup> tableau du simplexe :

			5	7	0	0	0	$-M$	$-M$	
←	$C_B$	base	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
	0	$x_4$	2	0	-1	-1	1	0	/	/
	5	$x_1$	6	1	-1	-1	0	0	/	/
	0	$x_5$	3	0	1	0	0	1	/	/
			0	-12	-5	0	0			
										↑

$\exists k; k = \{1\}; \quad Z_k - C_k < 0 \implies$  le maximum n'est pas atteint.

Choix de variable entrante :

$$Z_k - C_k = \min_{Z_j - C_j < 0} (Z_j - C_j) = \min \{-12, -5\}; \quad (k = 2)$$

Choix de variable sortante :

$$\frac{b_r}{a_{r2}} = \min_{a_{r2} > 0} \frac{b_i}{a_{i2}} = 3; \quad (r = 3)$$

Donc la variable  $x_1$  va rejoindre la base en remplaçant  $x_5$  dans l'itération suivante.

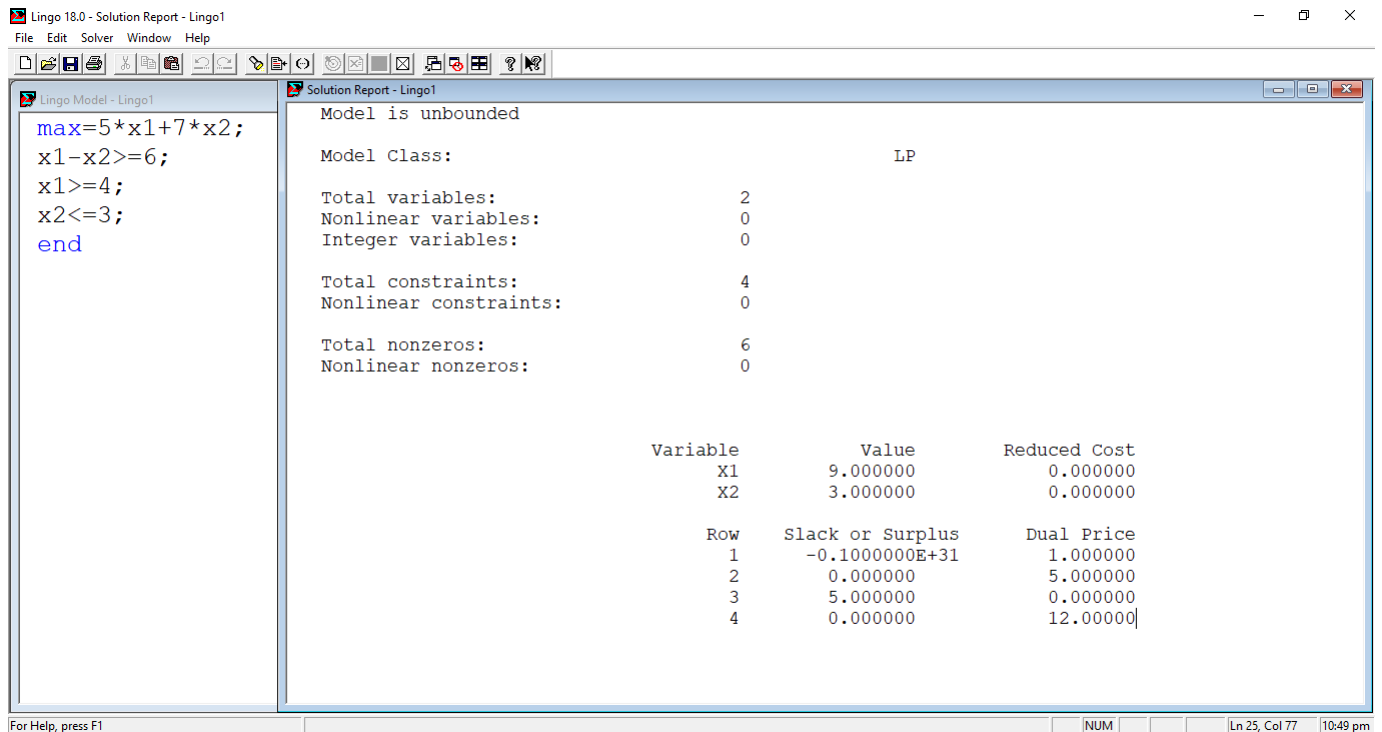
Le 4<sup>ème</sup> tableau du simplexe :

			5	7	0	0	0	$-M$	$-M$
$C_B$	base	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
0	$x_4$	5	0	0	-1	1	1	/	/
5	$x_1$	3	1	0	-1	0	1	/	/
7	$x_2$	3	0	1	0	0	1	/	/
			0	0	-5	0	12	/	/

↑

On remarque que  $\forall r; a_{r3} \leq 0 \implies$  la solution est infinie ( $Z \rightarrow \infty$ )

**Application de l'exemple sur Lingo :**



**Méthode Duale du simplexe [4] :**

Cette méthode est applicable sur les programmes linéaires avec  $b_i \geq 0; b_i \leq 0$ , contrairement aux méthodes précédentes

**Cas de maximisation :**

- *Étape 0* : Écrire le problème sous la forme standard.
- *Étape 1* : Rendre négatifs les  $C_j$  qui sont positifs  $j = 1, \dots, n$
- *Étape 2* : Choisir l'indice sortant

$$b_r = \min_{b_i \leq 0} b_i; \quad i = 1, \dots, m$$

- *Étape 3* : Choisir l'indice entrant  $k$  tel que :
- $$\frac{Z_k - C_k}{a_{rk}} = \max_{a_{rj} < 0} \frac{Z_j - C_j}{a_{rj}}$$

Le pivot  $a_{rk}$  doit être négatif

**Cas de minimisation :**

- *Étape 0* : Écrire le problème sous la forme standard.
- *Étape 1* : Rendre positifs les  $C_j$  qui sont négatifs  $j = 1 \dots n$
- *Étape 2* : Choisir l'indice sortant

$$b_r = \min_{b_i \leq 0} b_i; \quad i = 1 \dots m$$

- *Étape 3* : Choisir l'indice entrant  $k$  tel que :

$$\frac{Z_k - C_k}{a_{rk}} = \max_{a_{rj} < 0} \frac{Z_j - C_j}{a_{rj}}$$

Le pivot  $a_{rk}$  doit être négatif

**Remarque 4 :**

Dans les deux cas :

- Si  $b_r \geq 0, \forall r$  alors l'optimum est atteint.
- Si  $a_{rk} \geq 0; \forall j$  alors l'optimum est non borné (les contraintes du dual sont contradictoires).

**Exemple 7 :**

Soit le problème linéaire ( $P$ ) suivant :

$$(P) \begin{cases} Z(X) = -2x_1 - 3x_2 + x_3 \longrightarrow \min \\ sc \\ -4x_1 - 5x_2 - 2x_3 \geq 5 \\ -x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 10 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard :

$$(P) \begin{cases} Z(X) = -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \longrightarrow \min \\ sc \\ -4x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 5 \\ -x_1 + 6x_2 + x_3 - x_5 = 10 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Rendre les  $b_i$  négatifs : (On multiplie les contraintes par  $(-1)$  :

$$(P) \begin{cases} Z(X) = -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \longrightarrow \min \\ sc \\ +4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \\ +x_1 - 6x_2 - x_3 + x_5 = -10 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Ajout d'une contrainte artificielle :

On a

$$\begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = -3 \end{cases}$$

avec

$$C_2 \leq C_1$$

On pose

$$x_1 + x_2 \leq M$$

$$x_1 + x_2 + x_6 = M \implies x_2 = M - x_1 - x_6$$

Substituer  $x_2$  dans  $Z$  et les contraintes :

On aura :

$$(P) \begin{cases} Z(X) = x_1 + x_3 + 3x_6 - 3M \longrightarrow \min \\ sc \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 - 5x_6 = -5 - 5M \\ 7x_1 - x_3 + x_5 + 6x_6 = -10 + 6M \\ x_1 + x_2 + x_6 = M \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Initialisation de la méthode :

			1	0	1	0	0	3
←	$C_B$	$base$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
	0	$x_4$	-5	0	2	1	0	-5
	0	$x_5$	7	0	-1	0	1	6
	0	$x_2$	1	1	0	0	0	1
			-1	0	-1	0	0	-3
								↑

$$\forall j, C_j > 0$$

Choix de variable sortante :

$$b_r = \min_{b_i \leq 0} b_i = \min \{-5 - 5M, -10 + 6M, M\} = -5 - 5M; \quad (r = 1)$$

Choix de variable entrante :

$$\frac{Z_k - C_k}{a_{rk}} = \max_{a_{rj} < 0} \frac{Z_j - C_j}{a_{rj}} = \max \left\{ \frac{-1}{1}, \frac{-3}{1} \right\} = -3; \quad (k = 6)$$

1<sup>ère</sup> itération :

			1	0	1	0	0	3
←	$C_B$	$base$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
	3	$x_6$	1/5	0	-2/5	-1/5	0	1
	0	$x_5$	29/5	0	7/5	6/5	1	0
	0	$x_2$	4/5	1	2/5	1/5	0	0
			-2/5	0	-1/5	-3/5	0	0

les  $a_{2k} \geq 0; \forall k = 1, \dots, 6$ . Alors :

Il n'existe pas de pivot négatif, donc le problème n'admet pas de solutions.

## Application de l'exemple sur Lingo :

The screenshot shows the Lingo 18.0 interface. The left pane displays the model code:

```

min=-2*x1-3*x2+x3;
-4*x1-5*x2-2*x3>=5;
-x1+6*x2+x3>=10;
end

```

The right pane shows the Solution Report:

```

No feasible solution found.
Infeasibilities: 16.00000
Total solver iterations: 1
Elapsed runtime seconds: 5.20

Model Class: LP

Total variables: 3
Nonlinear variables: 0
Integer variables: 0

Total constraints: 3
Nonlinear constraints: 0

Total nonzeros: 9
Nonlinear nonzeros: 0

Variable      Value      Reduced Cost
X1            0.000000    0.4000000
X2            1.000000    0.0000000
X3            0.000000    2.2000000

Row  Slack or Surplus  Dual Price
1      10.00000           -1.000000
2      0.000000           -0.6000000
3     -16.00000            0.0000000

```

The status bar at the bottom indicates: For Help, press F1 | NUM | Ln 28, Col 77 | 11:02 pm

## Dualité :

A tout programme linéaire appelé par convention programme linéaire primal, on peut associer par construction un autre programme linéaire appelé son dual. Cette relation conduit au développement d'un ensemble d'interprétations économiques de la solution optimale.

<i>primal</i>	<i>dual</i>
$\max Z = c'x$	$\min W = b'y$
$[Ax]_i = b_i, i = 1, \dots, m_1$	$[A'y]_j \geq c_j, j = 1, \dots, n_1$
$(Ax)_i \leq b_i, i = m_1 + 1, \dots, m_2$	$(A'y)_j \leq c_j, j = n_1 + 1, \dots, n_2$
$(Ax)_i \geq b_i, i = m_2 + 1, \dots, m$	$(A'y)_j = c_j, j = n_2 + 2, \dots, n$
$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n_1$	$y_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m_1$
$x_j \leq 0, j = n_1 + 1, \dots, n_2$	$y_i \geq 0, i = m_1 + 1, \dots, m_2$
$x_j \in \mathbb{R}, j = n_2 + 1, \dots, n$	$y_i \geq 0, i = m_2 + 2, \dots, m$

TABLE 1.2 – Méthode de construction du programme dual

## Exemple 8 :

Soit le problème linéaire ( $P$ ) suivant :

$$(P) \begin{cases} Z(X) = 20x_1 + 15x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 70 \\ 15x_1 + 12x_2 \leq 24 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Après application de la méthode de construction du programme dual (TABLE 1.2) on obtient le programme dual ( $D$ ) du programme primal ( $P$ ) suivant :

$$(D) \begin{cases} W(Y) = 70y_1 + 24y_2 \longrightarrow \min \\ sc \\ 5y_1 + 15y_2 \geq 20 \\ 10y_1 + 12y_2 \geq 15 \\ y_1 \geq 0; y_2 \geq 0 \end{cases}$$

La résolution sera faite par la méthode du simplexe.

### Application de l'exemple sur Lingo :

The screenshot shows the Lingo 18.0 interface with a Solution Report. The left pane displays the primal problem model, and the right pane displays the solution report.

**Primal Problem Model (Left Pane):**

```

min=70*y1+24*y2;
5*y1+15*y2>=20;
10*y1+12*y2>=15;
end

```

**Solution Report (Right Pane):**

```

Global optimal solution found.
Objective value:                32.00000
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:        1
Elapsed runtime seconds:        0.07

Model Class:                    LP

Total variables:                2
Nonlinear variables:            0
Integer variables:              0

Total constraints:              3
Nonlinear constraints:          0

Total nonzeros:                6
Nonlinear nonzeros:            0

```

Variable	Value	Reduced Cost
Y1	0.000000	62.00000
Y2	1.333333	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	32.00000	-1.000000
2	0.000000	-1.600000
3	1.000000	0.000000

La solution optimale est  $Y^* = (0, \frac{4}{3})$   
 La valeur optimale est  $Z(Y^*) = 32$

## 1.2 Théorie des ensembles flous

Il est beaucoup plus facile de classer des individus selon leurs sexes, leurs niveaux d'étude mais il est difficile de les classer par degré d'intelligence (on ne peut pas mesurer le degré d'intelligence exact d'un individu), c'est là où intervient la théorie des ensembles flous qui est une généralisation de la théorie des ensembles classiques, en introduisant la notion de degré dans la vérification d'une condition, autrement dit, nous permettons à cette dernière d'être dans un autre état que vrai ou faux.

La théorie des sous-ensembles flous est assez récente, elle a débuté en 1965 avec la publication de l'article "Fuzzy sets" [5] (ensembles flou) par Lotfi Aliasker Zadeh, qui a proposé pour la première fois le concept des sous-ensembles flous pallier à la modélisation de l'incertitude des modèles classiques. Et aussi Didier Dubois et Heny Prade [6]. Depuis lors, plusieurs auteurs ont étudié les propriétés et des applications proposés des ensembles flous [7].

La logique floue confère ainsi la flexibilité très appréciable aux raisonnements qui l'utilisent ce qui rend possible la prise en compte des imprécisions et des incertitudes.

Dans cette section nous allons expliquer les fondements mathématiques de la théorie des sous-ensembles flous ainsi que les concepts de base de cette dernière.

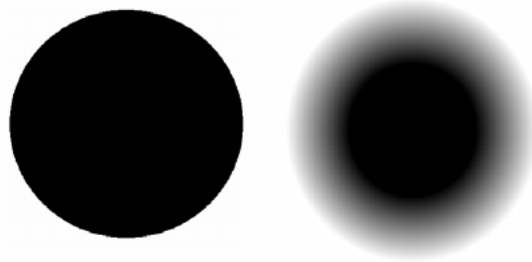
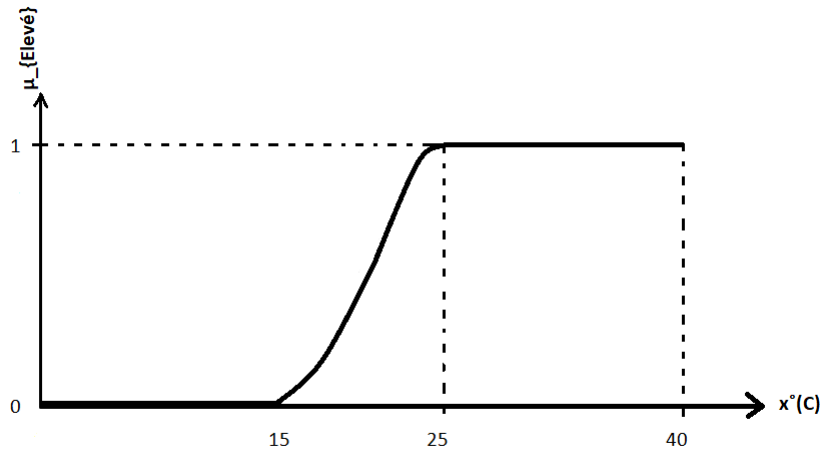


FIGURE 1.1 – Représentation graphique d'un ensemble classique et d'un ensemble flou

### Exemple 9 :

Considérons une personne chargée d'évaluer la température d'une pièce. Plutôt que d'exprimer la température de façon précise, elle peut être tentée de fournir l'information sous une forme naturelle comme "la température est élevée". Pour pouvoir manipuler cette information par la suite, il est nécessaire d'explicitier sur l'échelle des températures ce que représente l'ensemble des températures de niveau élevé. On définit donc sur le référentiel des températures possibles, par exemple  $\tilde{A} = [0, 40]$ , le sous-ensemble flou des "températures élevées". Pour construire la fonction d'appartenance  $\mu_{\text{Élevé}}$ , on a considéré ici qu'en dessous de  $15^\circ\text{C}$ , la température n'est certainement pas élevée, d'où un degré d'appartenance nul, et que les températures au dessus de  $25^\circ\text{C}$  sont assurément élevées, d'où un degré d'appartenance maximum. Entre ces deux zones de températures, l'appartenance passe graduellement de 0 à 1.

On illustre ceci dans le graphe suivant :



### 1.2.1 Notion d'ensemble flou

Dans la théorie ensembliste classique, on peut indiquer les éléments  $\{x\}$  qui appartiennent à une certaine classe  $A$  de l'ensemble  $X$  et ceux qui n'y appartiennent pas par une fonction caractéristique  $\mu_A$  prenant respectivement deux valeurs 1 ou 0

$$\mu_A : X \rightarrow \{0, 1\}$$

si l'appartenance de certains éléments  $A$  de  $X$  n'est pas absolue ( $\{x\}$  appartient un peu au sous-ensemble), on peut remplacer la fonction caractéristique par une fonction d'appartenance, qui prend ses valeurs dans l'intervalle  $[0, 1]$ , cette classe est appelée sous-ensemble flou de  $X$  noté  $\tilde{A}$ .

#### Exemple 10 : [8]

On se propose de mesurer l'acuité visuelle (moyenne des deux yeux) des individus d'une certaine localité  $X$ .

Soit  $A$  l'ensemble des individus en cette localité ayant une bonne acuité visuelle. Cet ensemble a un contour mal défini. En effet, il y a des individus dont l'acuité visuelle est égale à 1 ; 0.8 ; 0.6 ou toutes autre valeur comprise entre 0 et 1.

Dans ce cas on dit que  $A$  est un sous-ensemble flou on le note par  $\tilde{A}$ .

#### Exemple 11 :

Soient  $X = \mathbb{R}$  l'ensemble de référence et  $A$  l'ensemble des nombres compris entre 4 et 10 ; ( $A = \{x/x \in [4; 10]\}$ ) ;  $A$  est caractérisé par la fonction caractéristique suivante :

$$\mu_A : \mathbb{R} \longrightarrow \{0; 1\}$$

$$\mu_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

**Définition 5 : [9]**

Un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  dans un univers du discours  $X$  est caractérisé par sa fonction d'appartenance  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  qui associe à chaque élément  $\{x\}$  de  $X$  une valeur dans l'intervalle des nombres réels  $[0, 1]$ .

$$\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$$

Ainsi un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$ , dans  $X$  peut être représenté par un ensemble de couples ordonnés

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) / x \in X\}$$

Le sous-ensemble classique n'est en fait qu'un cas particulier de sous-ensemble flou dont la fonction d'appartenance ne prend que les valeurs 0 ou 1.

Un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  de  $X$  est aussi souvent représenté par la notation suivante qui indique que pour tout élément  $\{x\}$  de  $X$  son degré  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  d'appartenance à  $\tilde{A}$  :

$$\tilde{A} = \int_x \mu_{\tilde{A}}(x) / x \quad \text{si } X \text{ est continu}$$

et

$$\tilde{A} = \sum_{x_i \in X} \mu_{\tilde{A}}(x_i) / x_i \quad \text{si } X \text{ est discret}$$

Comme les valeurs  $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$  représentent les degrés d'appartenance avec lesquels les  $x_i$  appartiennent à  $\tilde{A}$ , si  $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$  prend la valeur 1 pour tous les éléments de  $X$ , cela signifie que  $\tilde{A}$  est identique à  $X$ . Au contraire,  $\tilde{A}$  est vide si  $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$  prend la valeur 0 sur tout  $X$ .

**1.2.2 Caractéristiques d'un sous ensemble flou**

Un sous-ensemble flou est complètement défini par la donnée de sa fonction d'appartenance. À partir d'une telle fonction, un certain nombre de caractéristiques [10] du sous-ensemble flou peuvent être étudiées, on cite :

**1.2.2.1 Noyau**

Le noyau d'un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  de  $X$ , noté  $Noy(\tilde{A})$ , est l'ensemble de tous les éléments qui lui appartiennent totalement. Formellement :

$$Noy(\tilde{A}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

**1.2.2.2 Support**

Le support d'un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  de  $X$ , noté  $Supp(\tilde{A})$ , est l'ensemble de tous les éléments qui lui appartiennent au moins un petit peu. Formellement :

$$Supp(\tilde{A}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

### 1.2.2.3 Hauteur

La hauteur d'un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  de  $X$ , notée  $h(\tilde{A})$ , est la valeur maximale atteinte sur le support de  $\tilde{A}$ . Formellement :

$$h(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

#### Remarque 5 :

On dira alors qu'un sous-ensemble flou est normalisé si sa hauteur  $h(\tilde{A})$  est égale à 1.

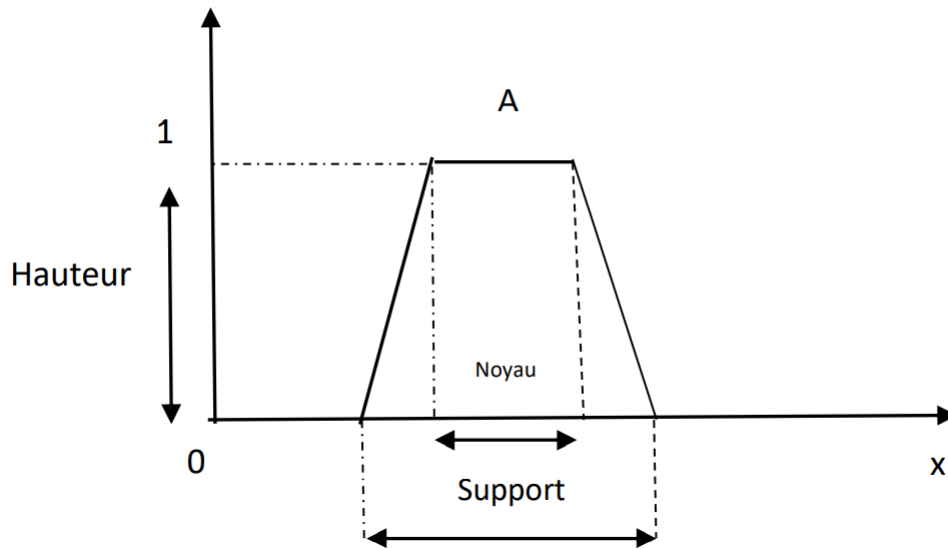


FIGURE 1.2 – Caractéristiques d'un sous-ensemble flou

### 1.2.2.4 Cardinalité

La cardinalité d'un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  de  $X$ , notée  $|\tilde{A}|$ , est le nombre d'éléments appartenant à  $\tilde{A}$  pondéré par leurs degrés d'appartenance. Formellement, pour  $\tilde{A}$  fini :

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

#### Exemple 12 :

Soit  $\tilde{A}$  un sous-ensemble flou tel que :

$$\tilde{A} = (x_1 | 0.9); (x_2 | 1); (x_3 | 0.5); (x_4 | 0.1); (x_5 | 0.3); (x_6 | 0.7); (x_7 | 0)$$

D'après les définitions les caractéristiques de  $\tilde{A}$  sont :

$$\text{Noy}(\tilde{A}) = x_2$$

$$\text{Supp}(\tilde{A}) = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6\}$$

$$h(\tilde{A}) = 1 \implies \tilde{A} \text{ normalisé } (\exists x_2 \in \tilde{A} \text{ tel que } \mu_{\tilde{A}}(x_2) = 1)$$

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) = 0.9 + 1 + 0.5 + 0.1 + 0.3 + 0.7 + 0 = 3.5$$

**Exemple 13 :**

Soit  $X = [0, 35]$  (l'ensemble des âges) tel que  $\gamma \in [0, 1]$ , et soit  $\tilde{A}$  sous-ensemble de  $X$  des âges jeunes défini par :

$$\mu_{\tilde{A}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [20, 30] \\ 0 & \text{si } x \geq 35 \text{ et } x \leq 15 \\ \gamma & \text{si } x \in ]15, 20[ \text{ et } x \in ]30, 35[ \end{cases}$$

D'après les définitions les caractéristiques de  $\tilde{A}$  sont :

$$\text{Noy}(\tilde{A}) = [20, 30]$$

$$\text{Supp}(\tilde{A}) = ]15, 35[$$

$$h(\tilde{A}) = 1 \implies \tilde{A} \text{ normalisé}$$

**1.2.3  $\alpha$  – coupe**

Il peut être utile de décrire un sous-ensemble flou en référant à des sous-ensembles ordinaires. Une façon de réaliser une approximation d'un sous-ensemble flou consiste à fixer un seuil inférieur sur les degrés d'appartenance. Le sous-ensemble ordinaire  $\tilde{A}^\alpha$  de  $X$  associé à  $\tilde{A}$  pour le seuil  $\alpha$  est l'ensemble des éléments  $\{x\}$  qui appartiennent à  $\tilde{A}$  avec un degré au moins égale à  $\alpha$ .

**Définition 6 : [7]**

Pour un seuil donné  $\alpha$  de  $[0, 1]$  on définit l' $\alpha$  – coupe du sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  (ou sous-ensemble de niveau associé à  $A$ ) comme le sous-ensemble :

$$\tilde{A}^\alpha = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

et  $\tilde{A}^\alpha$  est un sous-ensemble ordinaire de fonction caractéristique :

$$\mathcal{X}_{\tilde{A}^\alpha} = 1 \text{ si et seulement si } \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha$$

**Remarque 6 :**

On peut définir l'ensemble  $\alpha$  – coupe stricte de  $\tilde{A}$  en considérant une inégalité stricte dans la définition précédente.

**Exemple 14 :**

Soit  $\tilde{A}$  un sous-ensemble flou tel que :

$$\tilde{A} = \{(x_1 | 0); (x_2 | 0.5); (x_3 | 0.6); (x_4 | 0.7); (x_5 | 0.9); (x_6 | 0.2); (x_7 | 0.7)\}$$

La coupe de niveau  $\alpha = 0.6$  est l'ensemble :  $\tilde{A}^{0.6} = \{x_3; x_4; x_5; x_7\}$

— La coupe de niveau stricte  $\alpha = 0.6$  est l'ensemble  $\tilde{A}^{0.6} = \{x_4; x_5; x_7\}$

**Propriétés des  $\alpha$  – coupes :**

En choisissant un niveau  $\alpha$ , on indique le seuil à partir duquel l'appartenance est considérée comme satisfaite. Plus on est exigeant sur la notion d'appartenance de  $\{x\}$ , plus on augmente le seuil  $\alpha$ , et moins il existe d'éléments  $\{x\}$  de  $X$  satisfaisant cette notion d'appartenance.

Les  $\alpha$  – coupes des sous-ensembles flous jouissent des propriétés suivantes :

Soient  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  deux sous-ensembles flous alors on a :

- $(\tilde{A} \cap \tilde{B})^\alpha = \tilde{A}^\alpha \cap \tilde{B}^\alpha$
- $(\tilde{A} \cup \tilde{B})^\alpha = \tilde{A}^\alpha \cup \tilde{B}^\alpha$
- Si  $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$  alors  $\tilde{A}^\alpha \subseteq \tilde{B}^\alpha$
- $(\tilde{A} + \tilde{B})^\alpha = \tilde{A}^\alpha + \tilde{B}^\alpha$
- $(\lambda \tilde{A})^\alpha = \lambda \tilde{A}^\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$

### 1.2.4 Le théorème de décomposition

Le théorème de décomposition permet de décrire un sous-ensemble flou quelconque à partie de ses  $\alpha$  - coupes

Soit  $\tilde{A}$  un sous-ensemble flou d'un univers  $X$ , de fonction d'appartenance  $\mu_{\tilde{A}}$ . On a :

$$\forall x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) = \sup_{\alpha \in ]0,1]} \mu_{\mathcal{X}_{\tilde{A}^\alpha}}(x)$$

### 1.2.5 Principe d'extension

Le principe d'extension [8][5] est l'un des plus importants de la théorie des ensembles flous parce qu'il permet d'exploiter nos connaissances classiques dans le cas des données floues. On suppose qu'on dispose d'une application  $f$  d'un premier ensemble de référence  $X$  vers un second ensemble de référence  $Y$ . À tout élément  $\{x\}$  de  $X$ , l'application  $f$  fait correspondre un élément  $\{y\}$  de  $Y$ . Soit  $\tilde{A}$  un sous-ensemble flou de  $X$  auquel  $\{x\}$  appartient fortement, on se propose de lui associer un sous-ensemble  $\tilde{B}$  de  $Y$  auquel  $\{y\}$  appartient fortement. On définit ainsi l'image d'un sous-ensemble flou par une application.

Ce qui est illustré dans la figure 1.3 [10]

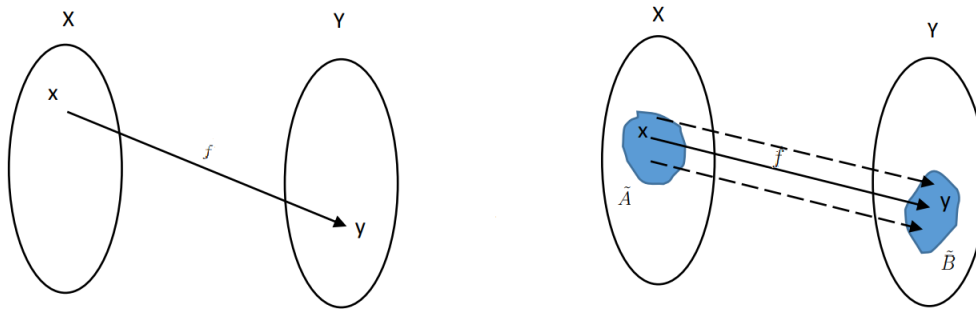


FIGURE 1.3 – Extension d'une fonction  $f$  (fonction classique, fonction étendue)

#### Définition 7 : [11]

Étant donné un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  de  $X$  et  $f$  une application de  $X$  vers  $Y$ . Le principe d'extension permet de définir un sous-ensemble flou  $\tilde{B}$  de  $Y$  associé à  $\tilde{A}$  (image directe), par l'intermédiaire de  $f$ , par :

$$\forall y \in Y, \mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{\{x \in X / f(x)=y\}} \mu_{\tilde{A}}(x) & \text{si } f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \end{cases}$$

Cas particulier

Considérons le cas où  $X$  est lui-même le produit cartésien de plusieurs ensemble de référence  $X_1, X_2, \dots, X_r$ . Le produit d'extension et la définition du produit cartésien de sous-ensembles flous permettent d'associer, à leurs sous-ensembles flous respectifs  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_r$ , un sous-ensemble flou  $\tilde{B}$  de  $Y$  défini par la fonction d'appartenance suivante :

$$\forall y \in Y, \mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{\{x=\{x_1, x_2, \dots, x_r\} \in X / f(x)=y\}} \mu_{\tilde{A}}(x) & \text{si } f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \end{cases}$$

### Exemple 15 : [10]

Soit  $X = \{\text{Camion}, \text{Caravane}, \text{Voiture}, \text{Moto}\}$ , l'univers de moyens transports terrestres existants et soit  $Y = \{\text{Rapide}, \text{Lente}, \text{Normale}\}$ , un univers des vitesses. On sait associer une vitesse à un moyen de transport en caractérisant la vitesse d'un camion comme étant lente, celle d'une caravane (c'est-à-dire caravane+voiture) comme lente, celle d'une voiture comme normale et celle d'une moto comme rapide.

Ceci se formalise par le biais d'une fonction  $\phi : X \rightarrow Y$  telle que :  $f(\text{camion}) = \text{lente}$ ,  $f(\text{caravane}) = \text{lente}$ ,  $f(\text{voiture}) = \text{normale}$  et  $f(\text{moto}) = \text{rapide}$ .

Souhaitant maintenant déterminer la vitesse correspondante au véhicule "side-car avec remorque", nous lui associons d'abord la caractérisation floue suivante :

side-car avec remorque = 0.5 | moto + 0.4 | voiture + 0.1 | caravane.

Pour déterminer sa mesure de vitesse, on étend  $\phi$  en appliquant le principe d'extension :

$$\mu_{\tilde{B}}(\text{lente}) = \max(\mu_{\tilde{A}}(\text{camion}), \mu_{\tilde{A}}(\text{caravane})) = \max(0; 0.1) = 0.1$$

$$\mu_{\tilde{B}}(\text{normale}) = \mu_{\tilde{A}}(\text{voiture}) = 0.4$$

$$\mu_{\tilde{B}}(\text{rapide}) = \mu_{\tilde{A}}(\text{moto}) = 0.5$$

Donc sa vitesse est plutôt rapide.

### Exemple 16 :

Soit  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction qui satisfait  $f(x) = x_1 + x_2$

Considérer les ensembles flous finis de  $\mathbb{R}$

$$\tilde{A}_1 = (3 | 0.4), (4 | 0.5), (5 | 1), (6 | 0.5), (7 | 0.2)$$

$$\tilde{A}_2 = (6 | 0.2), (7 | 0.5), (8 | 1), (9 | 0.5), (10 | 0.2)$$

Alors, le degré d'appartenance de  $y = 10$  dans  $\tilde{B}$  donnée par

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{B}}(10) &= \sup_{\{x_1+x_2\}} \min(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2)) \\ &= \max\{\min(\mu_{\tilde{A}_1}(3), \mu_{\tilde{A}_2}(7)), \min(\mu_{\tilde{A}_1}(4), \mu_{\tilde{A}_2}(6))\} \\ &= \max\{0.4, 0.2\} = 0.4 \end{aligned}$$

## 1.2.6 Opérations sur les sous-ensembles flous

Les opérations sur les ensembles flous [9] sont généralement des extensions des opérations connues sur les ensembles classiques.

Supposons que  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont deux sous-ensembles flous définis dans un univers du discours  $X$  dont les fonctions d'appartenance respectives sont  $\mu_{\tilde{A}}$  et  $\mu_{\tilde{B}}$ . On peut définir des opérations ensemblistes telles que l'égalité, l'inclusion, l'intersection, l'union et le complémentaire grâce à des opérations sur les fonctions d'appartenance.

### 1.2.6.1 Égalité

$\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont dits égaux, on note  $\tilde{A} = \tilde{B}$ , si leurs fonctions d'appartenance prennent la même valeur en tout points de  $X$  :

$$\forall x \in X \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$$

### 1.2.6.2 Inclusion

$\tilde{A}$  est dit inclus dans  $\tilde{B}$ , on note  $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ , si :

$$\forall x \in X; \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$$

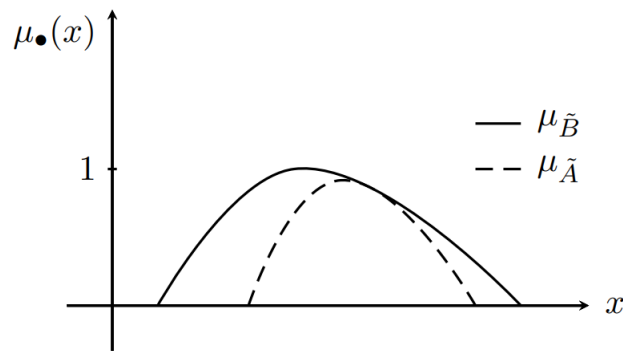


FIGURE 1.4 – Inclusion de deux sous-ensembles flous

### 1.2.6.3 Intersection

L'intersection de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$ , que l'on note  $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ , est le sous-ensemble flou constitué des éléments  $\{x\}$  de  $X$  affectés du plus petit des deux degrés d'appartenance  $\mu_{\tilde{A}}$  et  $\mu_{\tilde{B}}$

$$\forall x \in X; \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)$$

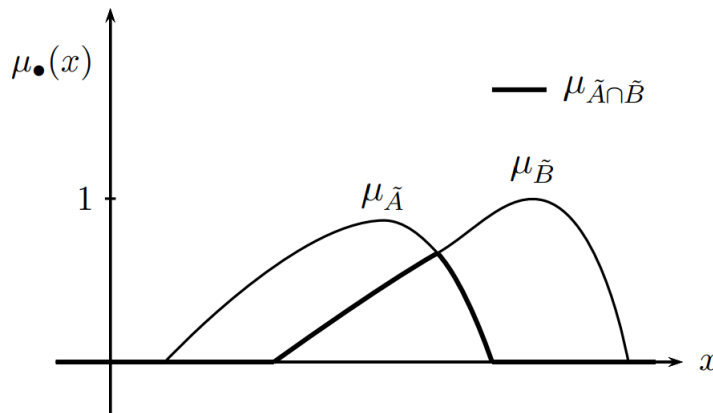


FIGURE 1.5 – Intersection de deux sous-ensembles flous avec l'opération min

### 1.2.6.4 Union

L'union de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$ , que l'on note  $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ , est le sous-ensemble flou constitué des éléments  $\{x\}$  de  $X$  affectés du plus grand des deux degrés l'appartenance  $\mu_{\tilde{A}}$  et  $\mu_{\tilde{B}}$

$$\forall x \in X \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)$$

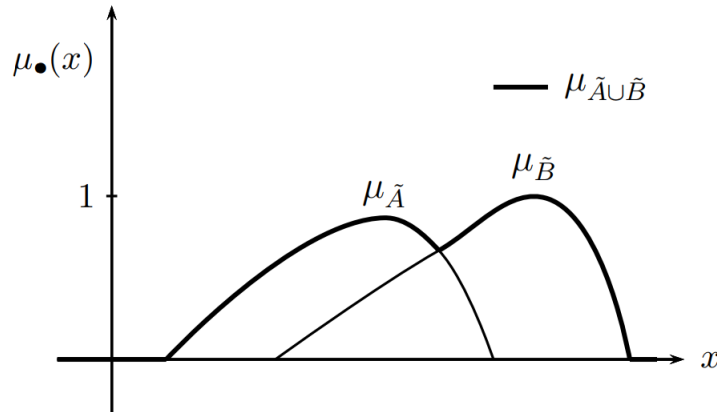


FIGURE 1.6 – Union de deux ensembles flous avec l'opération max

### 1.2.6.5 Complémentaire

Le complémentaire de  $\tilde{A}$ , que l'on note  $\tilde{\bar{A}}$ , est le sous-ensemble flou de  $X$  dont la fonction d'appartenance  $\mu_{\tilde{\bar{A}}}$

$$\forall x \in X \mu_{\tilde{\bar{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$$

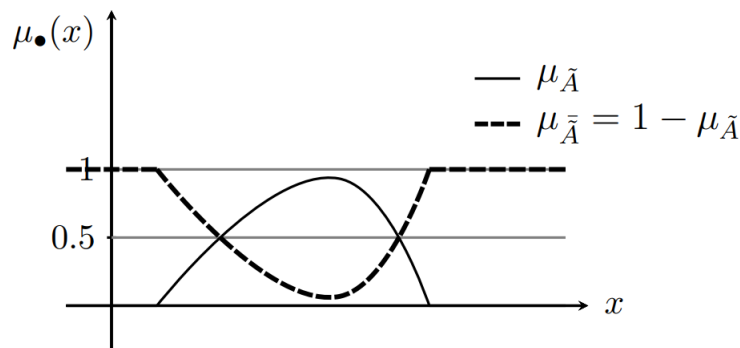


FIGURE 1.7 – Complémentaire d'un ensemble flou

### Exemple 17 :

Soient  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  deux sous-ensembles flous tel que :

$$\tilde{A} = \{(x_1 | 0.5); (x_2 | 0.2); (x_3 | 0.3); (x_4 | 0.1); (x_5 | 1); (x_6 | 0.3); (x_7 | 0.6)\}$$

$$\tilde{B} = \{(x_1 | 0.4); (x_2 | 0.4); (x_3 | 0.8); (x_4 | 0.1); (x_5 | 0); (x_6 | 0.8); (x_7 | 0.5)\}$$

égalité :

$$\tilde{A} \neq \tilde{B}$$

**inclusion :**

$\tilde{A}$  non inclus dans  $\tilde{B}$

**intersection :**

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(x_1 | 0.4); (x_2 | 0.2); (x_3 | 0.3); (x_4 | 0.1); (x_5 | 0); (x_6 | 0.3); (x_7 | 0.5)\}$$

**union :**

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(x_1 | 0.5); (x_2 | 0.4); (x_3 | 0.8); (x_4 | 0.1); (x_5 | 1); (x_6 | 0.8); (x_7 | 0.6)\}$$

**complémentaire :**

$$\overline{\tilde{A}} = \{(x_1 | 0.5); (x_2 | 0.8); (x_3 | 0.7); (x_4 | 0.9); (x_5 | 0); (x_6 | 0.7); (x_7 | 0.4)\}$$

$$\overline{\tilde{B}} = \{(x_1 | 0.6); (x_2 | 0.6); (x_3 | 0.2); (x_4 | 0.9); (x_5 | 1); (x_6 | 0.2); (x_7 | 0.5)\}$$

### 1.2.6.6 Produit cartésien d'ensembles flous

Soient  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$  des ensembles flous de référentiel respectifs  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . On définit le produit cartésien [11] flou  $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n$  par la fonction d'appartenance

$$\mu_{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n))$$

**Exemple 18 :**

Soient  $X_1 = \{jaune, bleu\}$  et  $X_2 = \{rond, long\}$ . On pose les ensembles flous  $\tilde{A}_1 = \{(j/0.8), (b/0.2)\}$  et  $\tilde{A}_2 = \{(r/0.4), (l/0.6)\}$  alors,

$$\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 = \{((j, r)/0.4), ((j, l)/0.6), ((b, r)/0.2), ((b, l)/0.2)\}$$

Dans cet ensemble, « jaune » et « long » sont les attributs les plus liés.

### 1.2.7 Intervalles flous

Un intervalle flou  $\tilde{A}$  est une quantité floue dont la fonction d'appartenance est quasi-concave; on parle alors de l'ensemble flou convexe qui obéit à la contrainte [12][13] :

$$\forall a, b, \forall c \in [a, b], \mu_{\tilde{A}}(c) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{A}}(b))$$

Les  $\alpha$ -coupes de  $\tilde{A}^\alpha = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$  sont donc des intervalles fermés  $[\underline{a}^\alpha, \bar{a}^\alpha]$  et ces intervalles sont emboîtés  $\tilde{A}^\alpha \subseteq \tilde{A}^\beta$  si  $\alpha \geq \beta$ .

### 1.2.8 Intervalles flous de type $L - R$

Soient quatre paramètres réels  $(\underline{a}, \bar{a}, \delta_a, \gamma_a)$ ,  $\delta_a$  et  $\gamma_a$  étant strictement positifs, et deux fonctions, notées  $L$  et  $R$ , définies sur l'ensemble des réels positifs, à valeurs dans  $[0, 1]$ , semi-continues supérieurement [11], telles que

$$L(0) = R(0) = 1;$$

$$L(1) = 0 \text{ ou } L(x) > 0, \text{ avec } \lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = 0 / \forall x;$$

$$R(1) = 0 \text{ ou } R(x) > 0, \text{ avec } \lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0 / \forall x.$$

Un intervalle flou  $\tilde{A}$  est de type  $L - R$  si sa fonction d'appartenance  $\mu_{\tilde{A}}$  est défini par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [\underline{a}, \bar{a}] \\ L\left(\frac{\underline{a}-x}{\delta_a}\right) & \text{pour } x \leq \underline{a} \\ R\left(\frac{x-\bar{a}}{\gamma_a}\right) & \text{pour } x \geq \bar{a} \end{cases}$$

- $L$  et  $R$  : des fonctions de référence
- $\delta_a$  et  $\gamma_a$  : deux nombres réels strictement positifs représentent respectivement l'écart à gauche et l'écart à droite.
- On note  $\tilde{A} = (\underline{a}, \bar{a}, \delta_a, \gamma_a)_{L-R}$

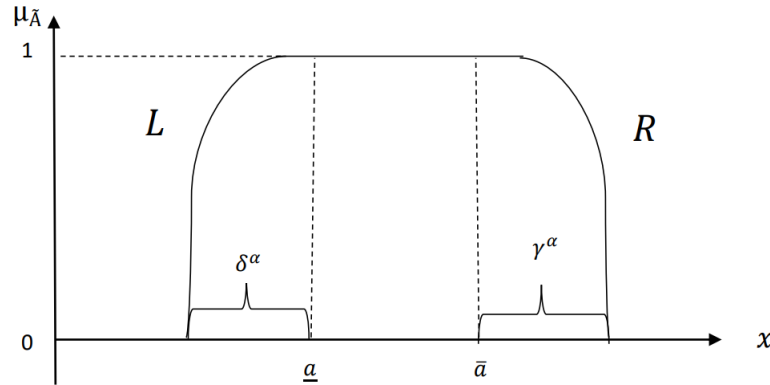


FIGURE 1.8 – La forme géométrique d'une fonction d'appartenance

### Remarque 7 :

Dans le cas particulier correspondant à  $\underline{a} = \bar{a}$ ,  
 $\tilde{A}$  est identique au nombre flou  $\tilde{A} = (a, \delta_a, \gamma_a)_{L-R}$  de type  $L - R$ .

### Exemple 19 :

On peut utiliser les exemples de fonctions  $L$  et  $R$  indiqués pour les nombres flous de type  $L - R$ . En particulier, l'intervalle flou a une fonction d'appartenance de forme trapézoïdale si  $L(x) = R(x) = \max(0, 1 - x)$ . Les intervalles flous généralisent les intervalles classiques de  $\mathbb{R}$ ,

par exemple

- Si  $\underline{a}$  et  $\delta_a$  sont infinis,  $\tilde{A} = \text{“au plus égal à environ } \bar{a}\text{”}$  ;
- Si  $\bar{a}$  et  $\gamma_a$  sont infinis,  $\tilde{A} = \text{“au moins égal à environ } \underline{a}\text{”}$  ;
- Si tout les paramètres sont finis,  $\tilde{A} = \text{“environ compris entre } \underline{a} \text{ et } \bar{a}\text{”}$  ;
- Si  $\underline{a} = \bar{a}$  ;  $\tilde{A}$  est identique au nombre  $\tilde{A} = (a, \delta_a, \gamma_a)_{L-R}$  de type  $L - R$ .

### Remarque 8 :

Si de plus  $L(1) = R(1) = 0$  alors  $\sup(\tilde{A})$  est borné.

Soit  $FN(L, R)$  l'ensemble d'intervalles flous de type  $L - R$ .

## 1.2.9 Opérations sur les intervalles flous de type $L - R$

Soient  $\tilde{A} = (\underline{a}, \bar{a}, \delta_a, \gamma_a)_{L-R}$  et  $\tilde{B} = (\underline{b}, \bar{b}, \delta_b, \gamma_b)_{L-R}$  les opérations entre  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont comme suit [12][13] :

— Addition :

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}, \delta_a + \delta_b, \gamma_a + \gamma_b)_{L-R}$$

— Multiplication :

de deux ensembles

$$\tilde{A} \odot \tilde{B} = (\underline{ab}; \overline{a\bar{b}}; \underline{a\delta_b} + \underline{b\delta_a}; \underline{a\gamma_b} + \underline{b\gamma_a})$$

par un scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \odot (\underline{a}, \overline{a}, \delta_a, \gamma_a)_{L-R} = \begin{cases} (\lambda \underline{a}, \lambda \overline{a}, \lambda \delta_a, \lambda \gamma_a)_{L-R} & \text{si } \lambda > 0 \\ (\lambda \underline{a}, \lambda \overline{a}, -\lambda \delta_a, -\lambda \gamma_a)_{L-R} & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

— Soustraction :

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = \tilde{A} \oplus (-\tilde{B}) = (\underline{a}, \overline{a}, \delta_a, \gamma_a)_{L-R} \oplus (-\underline{b}, -\overline{b}, \gamma_b, \delta_b)_{L-R} = (\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}, \delta_a + \gamma_b, \gamma_a + \delta_b)$$

### Exemple 20 :

Soit  $\tilde{A}$  = “environ compris entre 200 et 250” et  $\tilde{B}$  = “environ compris entre 80 et 100”,  
 $\tilde{A} = (200, 250, 10, 10)_{L-R}$  et  $\tilde{B} = (80, 100, 4, 4)_{L-R}$  avec  $L(x) = R(x) = \max(0, 1 - x)$   
 donnant des intervalles flous trapézoïdaux. Alors :

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (280; 350; 14; 14)_{L-R}; \text{ avec } \tilde{A} \oplus \tilde{B} = \text{“environ compris entre 280 et 350”};$$

$\tilde{A} \odot \tilde{B} = (16000; 25000; 1600; 1600)_{L-R};$  avec  $\tilde{A} \odot \tilde{B} = \text{“environ compris entre 16000 et 25000”};$

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (100; 170; 14; 14)_{L-R}; \text{ avec } \tilde{A} \ominus \tilde{B} = \text{“environ compris entre 100 et 170.”}$$

### 1.2.10 $\alpha$ – coupe d’un intervalle flou de type $L - R$

Soit l’intervalle flou  $\tilde{A} = (\underline{a}, \overline{a}, \delta^a, \gamma^a)_{L-R}$  de type  $L-R$  [12]; nous considérons les deux variables aléatoires  $\xi$  et  $\zeta$  uniformes sur  $[0, 1]$ , de telle sorte que la réalisation obtenue pour chaque  $\xi = \zeta = \alpha$ , est l’ $\alpha$ –coupe  $\tilde{A}^\alpha = [\underline{a} - L^{-1}(\alpha) \delta^a, \overline{a} + R^{-1}(\alpha) \gamma^a]$ , où  $L^{-1}$  et  $R^{-1}$  sont les fonctions réciproques de  $L$  et  $R$  respectivement. les fonctions  $L$  et  $R$  étant continues. Dans ce cas,  $\tilde{A}$  est vu comme un intervalle aléatoire :  $[\underline{a} - L^{-1}(\xi) \delta^a, \overline{a} + R^{-1}(\zeta) \gamma^a]$

### 1.2.11 Comparaison d’intervalle flou

Le problème de comparaison des intervalles flous [12][13] est important en pratique ; quand on utilise des intervalle flous pour évaluer des situation, ils doivent ensuite être comparés afin de faire un choix et de prendre une décision. Ce problème n’est pas facile. En effet, étant donné l’imprécision des intervalles flous, il est quelquefois difficile de prétendre dans l’absolu qu’une quantité floue est plus grande ou plus petite qu’une autre

#### 1.2.11.1 Comparaison des intervalles de nombres réels

Soient  $\tilde{A} = [\underline{a}, \overline{a}]$  et  $\tilde{B} = [\underline{b}, \overline{b}]$  deux intervalles de nombres réels. Donc  $\overline{a}$ ,  $\underline{a}$ ,  $\overline{b}$  et  $\underline{b}$  sont des nombres réels tels que  $\overline{a} > \underline{a}$  et  $\overline{b} > \underline{b}$ . Pour ordonner  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$ , nous avons quatre relations  $>_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  définies dans comme suit [12][13] :

1.  $[\underline{a}, \overline{a}] >_1 [\underline{b}, \overline{b}] \Leftrightarrow \underline{a} > \overline{b} (i.e. \forall x \in A, \forall y \in B, x > y)$
2.  $[\underline{a}, \overline{a}] >_2 [\underline{b}, \overline{b}] \Leftrightarrow \underline{a} \geq \underline{b} (i.e. \forall x \in A, \exists y \in B, xy)$
3.  $[\underline{a}, \overline{a}] >_3 [\underline{b}, \overline{b}] \Leftrightarrow \overline{a} > \overline{b} (i.e. \exists x \in A, \forall y \in B, x > y)$
4.  $[\underline{a}, \overline{a}] >_4 [\underline{b}, \overline{b}] \Leftrightarrow \overline{a} \geq \underline{b} (i.e. \exists (x, y) \in A \times B, x \geq y)$

La relation  $>_1$  est la plus forte,  $>_4$  est la plus faible,  $>_2$  et  $>_3$  sont les intermédiaires.

### 1.2.11.2 Possibilité, Nécessité

Considérons deux intervalles flous  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  dont les fonctions d'appartenance respectives sont  $\mu_{\tilde{A}}$  et  $\mu_{\tilde{B}}$ .

*pos* et *nec* : représentent respectivement possibilité et nécessité.

On définit la possibilité de  $\tilde{A} \leq \tilde{B}$  et la nécessité de  $\mu_{\tilde{A}} \leq \mu_{\tilde{B}}$  comme suit :

1.  $pos(\tilde{A} \leq \tilde{B}) = sup(min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)))$ .  $x$  et  $y$  sont des nombres réels tels que  $x \leq y$ .

2.  $nec(\tilde{A} \leq \tilde{B}) = 1 - pos(\tilde{A} > \tilde{B}) = 1 - sup(min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)))$ .  $x$  et  $y$  sont des nombres réels tels que  $x > y$ .

3.  $nec_2(\tilde{A} \leq \tilde{B}) = inf\{sup[max(1 - \mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(v))/u \geq v]\}$

4.  $pos_3(\tilde{A} \leq \tilde{B}) = sup\{inf[min(\mu_{\tilde{A}}(u), 1 - \mu_{\tilde{B}}(v))/u \leq v]\}$

### 1.2.11.3 Comparaison d'intervalles flous de type $L - R$

L'objectif est la comparaison d'intervalles flous de type  $L - R$  au sens de Chanas

Soient  $A$  et  $B$  deux intervalles de nombres réel,  $>_i, i = 1, 2, 3, 4$  les quatre relations d'ordre des intervalles et  $\mathcal{X}_i, i = 1, 2, 3, 4$  leurs respectives fonctions indicatrices définies comme suit [12][13] :

$$\mathcal{X}_i(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A >_i B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Chanas et col [14] ont proposé une généralisation des relations  $>_i, i = 1, 2, 3, 4$  aux intervalles flous de type  $L - R$ , vus comme des intervalles aléatoires, par les relations floues suivantes ( $>_k$ ),  $k = 1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I$  établies dans [14] et dont leurs fonctions d'appartenance  $\mu_k$  sont définies dans [14] comme suit :

Soient  $\tilde{A} = (\underline{a}, \bar{a}, \delta_a, \gamma_a) \in FN(L, R)$  et  $\tilde{B} = (\underline{b}, \bar{b}, \delta_b, \gamma_b) \in FN(L, R)$  deux intervalles flous de type  $L - R$

$\mu_k : (FN(L, R))^2 \longrightarrow [0, 1], k = 1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I :$

Les relations floues pour des intervalles aléatoires peuvent se présenter dans le cas d'indépendance comme suit :

1.  $\mu_{1D}(\tilde{A}, \tilde{B}) = P(\underline{a} - L^{-1}(\xi)\delta_a > \bar{b} + R^{-1}(\xi)\gamma_b)$

2.  $\mu_{2D}(\tilde{A}, \tilde{B}) = P(\underline{a} - L^{-1}(\xi)\delta_a > \bar{b} + R^{-1}(\xi)\gamma_b)$

3.  $\mu_{3D}(\tilde{A}, \tilde{B}) = P(\bar{a} + R^{-1}(\xi)\gamma_a > \bar{b} + R^{-1}(\xi)\gamma_b)$

4.  $\mu_{4D}(\tilde{A}, \tilde{B}) = P(\bar{a} + R^{-1}(\xi)\gamma_a > \bar{b} + R^{-1}(\xi)\gamma_b)$

Chanas et al. considèrent deux autres cas où  $\xi$  et  $\zeta$  sont des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur l'intervalle  $[0, 1]$  :

1.  $\mu_{1I}(\tilde{A}, \tilde{B}) = P(\underline{a} - L^{-1}(\xi)\delta_a > \bar{b} + R^{-1}(\zeta)\gamma_b)$

2.  $\mu_{4I}(\tilde{A}, \tilde{B}) = P(\bar{a} + R^{-1}(\zeta)\gamma_a > \underline{b} - L^{-1}(\xi)\delta_a)$ .

#### lemme 1 :

Pour deux intervalles flous quelconques de type  $L - R$ ,

nous avons les conditions suivantes [12][13] :

$\mu_{1D}(\tilde{A}, \tilde{B}) > 0 \implies \underline{a} > \bar{b}$

et pour  $k \in \{4D, 4I\}$

$\mu_k(\tilde{A}, \tilde{B}) < 1 \iff \underline{b} > \bar{a}$  (ou par équivalence  $\mu_k(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 \iff \underline{b} \leq \bar{a}$ ).

**Proposition 1 :**

Soient  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  deux intervalles flous de type  $L - R$  [12][13] :

1.  $\mu_{1D}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \mu_{4D}(\tilde{A}, \tilde{B})$
2.  $\mu_{1D}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_i(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{4D}(\tilde{A}, \tilde{B}), \forall i \in \{2, 3\}$
3.  $\mu_{1D}(\tilde{A}, \tilde{B}) > 0 \implies \mu_{4D}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$

Les fonctions d'appartenance  $\mu_{2D}, \mu_{3D}$  et  $\mu_k, k = 4D, 4I$  vérifient les propriétés suivantes :

**Lemme 2 :**

Soient  $\tilde{A} = (a, \bar{a}, \delta_a, \gamma_a) \in FN(L, R)$  et  $\tilde{B} = (b, \bar{b}, \delta_b, \gamma_b) \in FN(L, R)$  deux intervalles flous de type  $L - R$ , les conditions suivantes sont satisfaites [12][13] :

- $\underline{a} - \underline{b} - L^{-1}(\frac{1}{2})(\delta_a - \delta_b) \geq 0 \iff \mu_{2D}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \frac{1}{2}$ ,
- $\bar{a} - \bar{b} + R^{-1}(\frac{1}{2})(\gamma_a - \gamma_b) \geq 0 \iff \mu_{3D}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \frac{1}{2}$ ,
- Pour  $k \in \{4D, 4I\}$   $\mu_k(\tilde{A}, \tilde{B}) < 1 \iff \underline{b} > \bar{a}$  (ou équivalent  $\mu_k(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 \iff \underline{b} \leq \bar{a}$ ).

**1.2.12 Nombre flou**

Un nombre flou  $\tilde{A}$  est un intervalle flou convexe qui a un support borné de l'ensemble des nombres réels ( $X = \mathbb{R}$ )

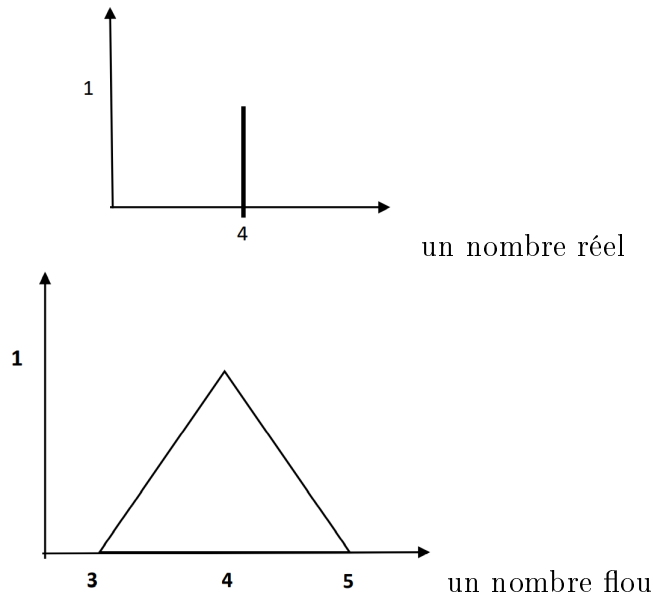
**Exemple 21 :**

FIGURE 1.9 – Comparaison entre un nombre flou et un nombre réel

**1.2.13 Nombre flou de type  $L - R$** 

Il existe plusieurs types de nombres flous de type  $L - R$ , lorsque les fonctions de référence sont linéaires, on parle alors de nombres flous de type triangulaire et de type trapézoïdal.

## 1.2.14 Types de nombre flou

### 1.2.14.1 Nombres flous de type triangulaire

Un nombre flou  $\tilde{A}$  est dit de type triangulaire [12] noté  $(a, \alpha, \beta)$  si sa fonction d'appartenance est définie par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a+\alpha}{\alpha} & \text{si } a-\alpha \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } x = a \\ \frac{a+\beta-x}{\beta} & \text{si } a \leq x \leq a+\beta \end{cases}$$

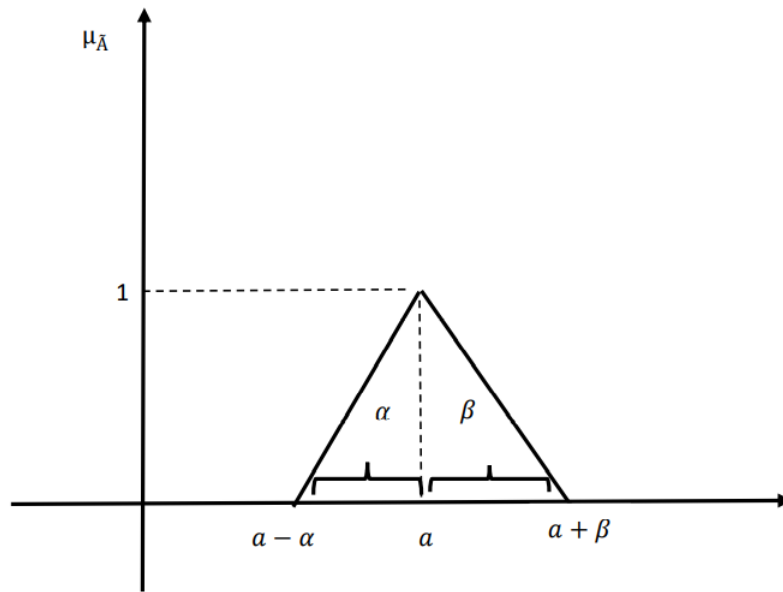


FIGURE 1.10 – Représentation d'un nombre flou triangulaire

### Comparaison de deux nombres flous triangulaire

Soient  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  deux nombres flous triangulaires tels que :

$$\tilde{A} = (a, \alpha_1, \beta_1) \text{ et } \tilde{B} = (b, \alpha_2, \beta_2)$$

1.  $\tilde{A} = \tilde{B} \iff a = b, \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2.$
2.  $\tilde{A} \leq \tilde{B} \iff a \leq b, a - \alpha_1 \leq b - \alpha_2, a + \beta_1 \leq b + \beta_2.$

### Exemple 22 :

L'expression vers quatre heures peut être modélisée mathématiquement par le nombre flou triangulaire symétrique  $\tilde{A}$ , dont la fonction d'appartenance est donnée par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-4|}{0.2} & \text{si } x \in [3.8, 4.2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les  $\alpha$ -coupes d'un ensemble flou triangulaire sont les intervalles  $[\tilde{a}_1^\alpha, \tilde{a}_2^\alpha]$  où  $\tilde{a}_1^\alpha = 0.2\alpha + 3.8$  et  $\tilde{a}_2^\alpha = 0.2\alpha + 4.2$

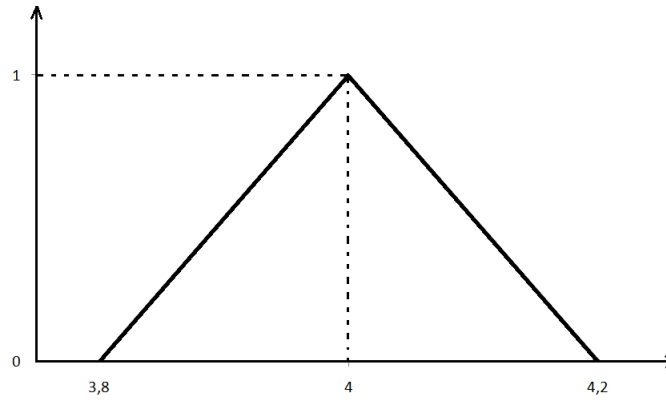


FIGURE 1.11 – Exemple d'un nombre flou triangulaire

### 1.2.14.2 Nombre flou de type trapézoïdal :

Un nombre flou  $\tilde{A}$  est dit de type trapézoïdal [12] noté  $(a^L, a^U, \alpha, \beta)$  si sa fonction d'appartenance est donnée par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a^L+\alpha}{\alpha} & \text{Si } a^L - \alpha \leq x \leq a^L, \\ 1 & \text{Si } a^L \leq x \leq a^U, \\ \frac{a^U+\beta-x}{\beta} & \text{Si } a^U \leq x \leq a^U + \beta \end{cases}$$

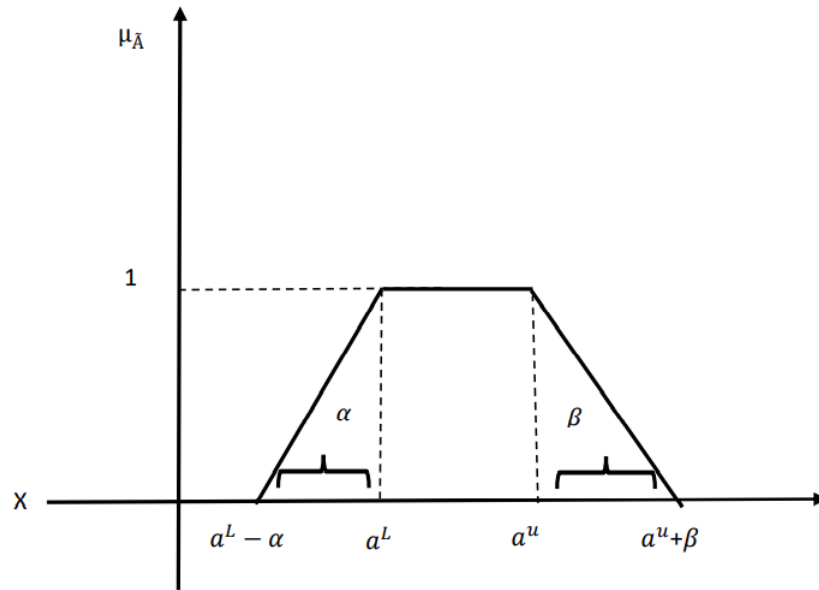


FIGURE 1.12 – Présentation d'un nombre flou trapézoïdal

#### Exemple 23 :

L'ensemble flou des adolescents peut être représenté par le nombre flou trapézoïdal avec la fonction d'appartenance :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-11}{3} & \text{si } x \in [11, 14[ \\ 1 & \text{si } x \in [14, 17] \\ \frac{20-x}{3} & \text{si } x \in ]17, 20] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les  $\alpha$ -coupes d'un ensemble flou trapézoïdal sont les intervalles  $[3\alpha + 11, -3\alpha + 20]$  ; avec  $\alpha \in [0, 1]$

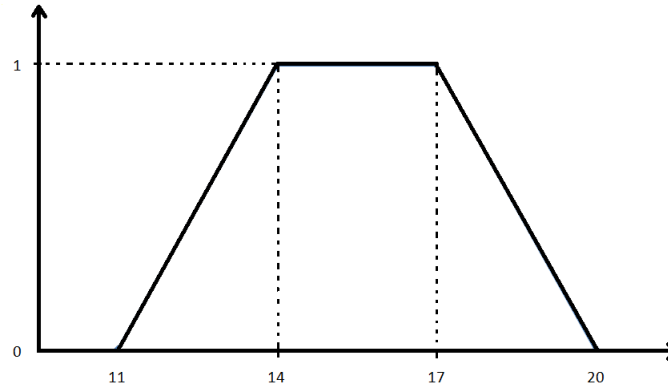


FIGURE 1.13 – Exemple d'un nombre flou trapézoïdal

## 1.3 Élément de la théorie des probabilités

La théorie des probabilités constitue un cadre mathématique pour la description du hasard et de la variabilité, ainsi que pour le raisonnement en univers incertain. Quand on réalise une expérience dont le résultat est déterminé par le hasard, si on peut citer tous les résultats possibles sans pour autant savoir celui qui va se réaliser, on dit que l'expérience est aléatoire.

On parle alors de la probabilité que des évènements se réalisent, qui est un nombre réel compris entre 0 et 1. plus ce nombre est grand, plus le risque ou la chance que cet évènement se produise est grand.

Dans cette section nous allons rappeler les notions nécessaires et les propriétés principales de cette théorie, qui vont nous aider dans la suite de ce travail.

### 1.3.1 Notions d'espace mesurable

Soit  $\Omega$  l'espace fondamental, il peut être fini, infini, dénombrable ou non.

### 1.3.2 Tribus d'évènements

Une famille  $F$  de sous ensembles de  $\Omega$  s'appelle tribu si :

- $\Omega \in F$ ,
- $\forall A \in F \implies A^c \in F$ , où  $A^c$  désigne le complémentaire de  $A$ ,
- $\forall A \in F, \forall B \in F \implies A \cup B \in F$ ,
- quelque soit la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $F$ , on a  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in F$ .

### 1.3.3 Espace probabilisable

Le couple  $(\Omega, F)$  où ensemble fondamental et  $F$  tribu s'appelle espace mesurable ou probabilisable.

Tout élément de  $F$  s'appelle évènement

### 1.3.4 Espace probabilisé

Soit  $(\Omega, F)$  un espace probabilisable,

une probabilité  $P$  est une application de  $F \rightarrow [0, 1]$  telle que :

- $P(\Omega) = 1$ ,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ,
- $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$  où les  $(A_i)_{i \in I}$  sont deux à deux disjoints et  $I$  dénombrable.
- $(\Omega, F, P)$  s'appelle espace probabilisé.

### 1.3.5 Tribu borélienne sur $R$

La Tribu borélienne  $B_R$  est engendrée par les intervalles  $]a, b[$ ,  $a, b \in R$

### 1.3.6 Applications mesurables

**Définition 8 :**

Soient  $(\Omega, F)$  et  $(E, T)$  deux espaces probabilisables,

toute application  $X : \Omega \longrightarrow E$  est dite mesurable si

$$\forall A \in T \implies X^{-1}(A) \in F.$$

**Proposition 2 :**

Si  $f$  et  $g$  sont des applications mesurables ; Alors les applications suivantes sont mesurables :

- $f + g$
- $fg$
- $\inf(f, g)$
- $\sup(f, g)$
- $cf$  avec  $c$  constante réelle.

### 1.3.7 Variables aléatoires réelles

**Définition 9 :**

Une variable aléatoire réelle est une application mesurable  $X$  d'un espace probabilisé  $(\Omega, F, P)$  dans  $(R, B_R)$ , c'est à dire :

$$\forall B \in B_R \implies X^{-1}(B) \in F.$$

On peut associer à l'évènement  $B$  une probabilité par l'intermédiaire de  $X$  telle que  $P(X^{-1}(B)) = P_X(B)$ .

La probabilité  $P_X$  ainsi définie sur  $(R, B_R)$  s'appelle loi de probabilité ou distribution de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .

**Remarque 9 :**

En pratique, une variable aléatoire réelle est une application

$$X : \Omega \longrightarrow R$$

$$\omega \longrightarrow X(\omega)$$

Dans le cas où :

- $X$  prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs ,  $X$  est dite variable aléatoire discrète.
- $X$  prend n'importe quelle valeur sur un intervalle de  $R$  ,  $X$  est dite variable aléatoire continue

### 1.3.8 Fonction de répartition

On appelle fonction de répartition  $F$  de la variable aléatoire  $X$ , la fonction définie de  $\Omega \longrightarrow [0, 1]$  par

$$F_X = P(X \leq x)$$

**Propriétés principales :**

- La fonction de répartition caractérise la loi.
- En particulier,  $\forall a, b \in \mathbb{R}; P[X \in ]a, b] = F_X(b) - F_X(a)$ .
- $F_X$  est une fonction croissante, continue à droite avec une limite à gauche en tout point
  - $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

**Lois discrètes :** La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est une fonction en escalier. Si la variable aléatoire prend les valeurs  $x_k, k = 1, 2, \dots$ , supposées rangées par ordre croissant, alors la fonction de répartition  $F_X$  prend les valeurs :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < x_1 \\ P[X = x_1] & \text{pour } x \in [x_1, x_2[ \\ \vdots & \vdots \\ P[X = x_1] + P[X = x_2] + \dots + P[X = x_k] & \text{pour } x \in [x_k, x_{k+1}[ \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

**Exemple 24 :**

Voici par exemple la loi et les valeurs différentes de la fonction de répartition pour le nombre de bons numéros pour 4 numéros cochés sur une grille de Kéno.

$k$	0	1	2	3	4
$P[X = k]$	0.2512	0.4275	0.2538	0.0622	0.0053
$P[X \leq k]$	0.2512	0.6787	0.9325	0.9947	1

Si  $X$  suit la loi géométrique  $G(p)$ , sa fonction de répartition est définie comme suit :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 1 \\ p + p(1-p) + \dots + p(1-p)^{k-1} = 1 - (1-p)^k & [k, k+1]; \text{ pour tout } k \geq 1 \end{cases}$$

À part les lois géométriques, les fonctions de répartition des lois discrètes classiques n'ont pas d'expression analytique simple.

**Lois continues :** La fonction de répartition d'une variable aléatoire continue est la primitive de la densité qui s'annule en  $-\infty$

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$$

C'est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . En tout point  $x$  où  $f_X$  est continue,  $F_X$  est dérivable et :

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x).$$

**Exemple 25 :**

repreons les trois exemples de base :

loi  $u(a, b)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{b-a} (t)_{[a,b]} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

loi  $\varepsilon(\lambda)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \lambda e^{-\lambda t} (t)_{\mathbb{R}^+} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

loi  $\mathcal{N}(u, \sigma^2)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-u)^2}{2\sigma^2}} dt$$

**1.3.9 Densité de probabilité**

Soit  $F$  une fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$ .

Si  $F$  admet une dérivée  $f$  sauf peut être en un nombre fini de points,  $f$  s'appelle la densité de la variable aléatoire  $X$ .

**1.3.10 Espérance mathématique**

On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$ , le nombre suivant s'il existe :

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) \text{ où } \int_{\Omega} \text{ désigne l'intégrale de Lebesgues-Stieljeis.}$$

**Propriétés de l'espérance**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même  $\Omega$  admettant une espérance, alors :

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX) = aE(X); \forall a \in \mathbb{R}$
- $E(b) = b; \forall b \in \mathbb{R}$
- si  $X \geq 0$  alors  $E(X) \geq 0$

**1.3.11 Variance**

On appelle variance de la variable aléatoire  $X$ , le nombre réel suivant :

$$\sigma^2(X) = \int_{\Omega} (X(\omega) - E(X))^2 dP(\omega) = E(X - E(X))^2$$

**Propriétés de la variance :**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même  $\Omega$  admettant une espérance mathématique, alors :

- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$  si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes
- $V(aX) = a^2V(X)$ ;  $\forall a \in \mathbb{R}$
- $V(X + b) = V(X)$ ;  $\forall b \in \mathbb{R}$
- $V(b) = 0$ ;  $\forall b \in \mathbb{R}$
- si  $V(X) = 0 \iff X = E(X)$

**1.3.12 Écart-type**

Soit une variable aléatoire  $X$  admettant une variance  $V(X)$ , on appelle écart-type de  $X$ , le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

**1.3.13 Covariance**

On appelle covariance de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , notée  $Cov(X, Y)$ , le nombre réel suivant :

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

**Propriétés de la covariance :**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même  $\Omega$  admettant une espérance, alors :

- $Cov(X, Y) = 0$  si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes
- $V(aX + bY) = a^2V(X) + 2abCov(X, Y) + b^2V(Y)$

**1.3.14 Variables aléatoires normales**

On dit qu'une variable aléatoire réelle  $X$  suit une loi normale d'espérance  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$  strictement positif si elle admet pour densité de probabilité la fonction

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Une telle variable aléatoire est alors dite gaussienne.

On note  $X \longrightarrow N(\mu, \sigma^2)$ .

**1.3.15 Variable aléatoire normale centrée réduite**

Fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée réduite

Soit  $X$  une variable aléatoire normale centrée réduite, i.e.  $X \longrightarrow N(0, 1)$ , sa fonction de répartition est dénie par

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

**Propriétés de la fonction  $\varphi$  :**

$\varphi$  est indéfiniment dérivable, et  $\varphi' = \phi$

Elle est strictement croissante et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(-x) = 1 - \varphi(x)$

**Remarque 10 :**

Si  $X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$  alors la variable aléatoire  $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \rightarrow N(0, 1)$ .

**1.3.16 Fractiles d'une variable aléatoire normale centrée réduite**

Soit  $X$  une variable aléatoire normale centrée réduite, *i.e.*  $X \rightarrow N(0, 1)$ .

On cherche en fonction d'une valeur  $\alpha$  donnée, à déterminer le nombre  $u_\alpha$ , appelé fractile, tel que  $P(\omega/X(\omega) \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$

## 1.4 Combinaison du flou de l'aléa

L'étude des phénomènes de la vie ne nous garantit pas des résultats exactes. Ces derniers peuvent être flous si leur réalisation est partielle, qui peuvent dépendre de la probabilité de leur réalisation aussi. Certains chercheurs se sont intéressés à la résolution de ce type de problèmes tels que Jun Li et col [15], E.E. Ammar [16] et Iskander [17] et bien d'autres. Les variables aléatoires floues donnent un meilleur formalisme de la combinaison du flou et de l'aléa. Elles sont définies par Kwakernaak [18] comme suit :

### 1.4.1 Variables aléatoire floues

#### Définition 10 : [18]

Soit  $(\Omega, F, P)$  un espace de probabilité . Une variable aléatoire floue  $\tilde{X}$  est une application de  $(\Omega, F, P)$  à valeurs dans l'ensemble des intervalles flous  $F(\mathbb{R})$  comme suit :

$$\tilde{X} : \Omega \rightarrow F(\mathbb{R})$$

$$\omega \rightarrow \tilde{X}(\omega)$$

On note l' $\alpha$ -coupe de  $\tilde{X}$  par  $\tilde{X}^\alpha(\omega) = [\underline{X}^\alpha(\omega), \overline{X}^\alpha(\omega)]$  où

$$\underline{X}^\alpha(\omega) = \inf \{x / X(\omega)(x) \geq \alpha\},$$

$$\overline{X}^\alpha(\omega) = \sup \{x / X(\omega)(x) \geq \alpha\} \text{ et } X(\omega) \text{ est la fonction d'appartenance de } X.$$

#### Exemple 26 :

On interroge des individus sur la caractérisation de l'été en Europe. [18]

La réponse est : "chaud", "très chaud". Elle est :

1. aléatoire car tout dépend du lieu (pays) et des étés précédents.
2. floue car c'est vague.

La réponse peut être représentée par une variable aléatoire dont les valeurs sont des intervalles flous, donc par une variable aléatoire floue.

### 1.4.2 Variables aléatoires floues discrètes

Soit  $(\Omega, F, P)$  un espace de probabilité avec  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_r\}$  et  $p(\omega_k) = p_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$  et  $\sum_{k=1}^r p_k = 1$ , une distribution de probabilité discrète.

Une variable aléatoire floue  $\tilde{X}$  est dite discrète si à chaque réalisation aléatoire  $\omega_k \in \Omega$ , la valeur  $\tilde{X}(\omega_k)$  est un intervalle flou comme suit :

$$P(\tilde{X}(\omega_k) = \tilde{a}_k) = p_k, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad \text{où } \tilde{a}_k, \quad k = 1, 2, \dots, r \text{ sont des intervalles flous. [12]}$$

#### Exemple 27 : [12]

Soit  $(\Omega, F, P)$  un espace probabilisé où :

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$  un espace discret fini,  $P_\omega$  la distribution de probabilité suivante :

$$P_\omega(\omega_1) = 0.25; \quad P_\omega(\omega_2) = 0.75;$$

On considère la variable aléatoire floue discrète  $\tilde{X}$  dans le cas où  $\tilde{X}(\omega_1)$  et  $\tilde{X}(\omega_2)$  sont des intervalles flous dont les fonctions d'appartenance peuvent être discrètes ou continues comme suit :

$Im\tilde{X}(\omega) = \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\}$  où  $\tilde{a}_1$  et  $\tilde{a}_2$  sont des nombres flous dont les fonctions d'appartenance respectives  $\mu_{\tilde{a}_1}$  et  $\mu_{\tilde{a}_2}$  sont discrètes telles que :

$$\mu_{\tilde{a}_1}(1) = \mu_{\tilde{a}_2}(2) = 0.2, \mu_{\tilde{a}_1}(3) = \mu_{\tilde{a}_2}(4) = 0.9, \mu_{\tilde{a}_1}(5) = \mu_{\tilde{a}_2}(6) = 0.6.$$

$$\text{et } P(\tilde{X}(\omega_1) = \tilde{a}_1) = 0.25 \text{ et } P(\tilde{X}(\omega_2) = \tilde{a}_2) = 0.75.$$

On obtient les variables aléatoires réelles discrètes  $X_1, X_2, X_3$  dont les distributions de probabilité ainsi que leurs degrés de compatibilité avec  $\tilde{X}$  sont comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} P\{X_1(\omega_1) = 1\} = 0.25 \quad P\{X_1(\omega_2) = 2\} = 0.75 \quad X(\omega)(X_1) = 0.2 \\ P\{X_2(\omega_1) = 3\} = 0.25 \quad P\{X_2(\omega_2) = 4\} = 0.75 \quad X(\omega)(X_2) = 0.9 \\ P\{X_3(\omega_1) = 5\} = 0.25 \quad P\{X_3(\omega_2) = 6\} = 0.75 \quad X(\omega)(X_3) = 0.6 \end{array} \right\}$$

$Im\tilde{X}(\omega) = \{\tilde{4}, \tilde{5}\}$  où  $\tilde{4}, \tilde{5}$  sont des intervalles flous dont les fonctions d'appartenance respectives sont continues et définies comme suit :

$$\mu_{\tilde{4}} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } x \leq 3 \\ x - 3 \quad \text{si } x \in ]3, 4] \\ 1 \quad \text{si } x \in ]4, 5] \\ -x + 6 \quad \text{si } x \in ]5, 6] \\ 0 \quad \text{si } x > 6 \end{array} \right\}$$

$$\mu_{\tilde{5}} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } x \leq 4 \\ x - 4 \quad \text{si } x \in ]4, 5] \\ 1 \quad \text{si } x \in ]5, 6] \\ -x + 7 \quad \text{si } x \in ]6, 7] \\ 0 \quad \text{si } x > 7 \end{array} \right\}$$

$$\text{et on a } P(\tilde{X}(\omega_1) = \tilde{4}) = 0.25 \text{ et } P(\tilde{X}(\omega_1) = \tilde{5}) = 0.75$$

Il existe une infinité de variables aléatoires réelles  $X_k$  telles que  $X(\omega)(X_k) = a_k \in (0, 1]$ .

On peut extraire certaines parmi elles en considérant par exemple  $\alpha_1 = 0.4, \alpha_2 = 0.8$ . On obtient les variables aléatoires réelles suivantes avec leurs distributions de probabilité :

$$\left\{ \begin{array}{l} P\{\underline{X}_1(\omega_1) = 3.4\} = 0.25 \quad P\{\underline{X}_1(\omega_2) = 4.4\} = 0.75 \quad X(\omega)(\underline{X}_1) = 0.4 \\ P\{\overline{X}_1(\omega_1) = 5.6\} = 0.25 \quad P\{\overline{X}_1(\omega_2) = 6.6\} = 0.75 \quad X(\omega)(\overline{X}_1) = 0.4 \\ P\{\underline{X}_2(\omega_1) = 3.8\} = 0.25 \quad P\{\underline{X}_2(\omega_2) = 4.8\} = 0.75 \quad X(\omega)(\underline{X}_2) = 0.8 \\ P\{\overline{X}_2(\omega_1) = 5.2\} = 0.25 \quad P\{\overline{X}_2(\omega_2) = 6.2\} = 0.75 \quad X(\omega)(\overline{X}_2) = 0.8 \end{array} \right\}$$

### 1.4.3 Variables aléatoires floues normales

Une variable aléatoire floue est une vague perception d'une variable aléatoire réelle, nous considérons une variable aléatoire [8], originale, réelle  $X$  normalement distribuée d'espérance  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ . En pratique, l'espérance  $\mu$  de  $X$  est mal connue, c'est à peu près  $\mu$ , donc représentée par l'intervalle flou  $\mu$ , alors nous avons une variable aléatoire floue  $\tilde{X}$  normalement distribuée d'espérance floue  $\tilde{\mu}$  et de variance réelle  $\sigma^2$  et telle que considérée dans Shapiro [19]  $\forall \alpha \in [0, 1], \underline{\mu}^\alpha \leq \mu \leq \overline{\mu}^\alpha$ , où  $\underline{\mu}^\alpha$  et  $\overline{\mu}^\alpha$  sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de  $\tilde{\mu}^\alpha = [\underline{\mu}^\alpha, \overline{\mu}^\alpha]$ .

Nous déduisons que  $\underline{X}^\alpha$  et  $\overline{X}^\alpha$  sont des variables aléatoires normales réelles d'espérances respectives  $\underline{\mu}^\alpha$  et  $\overline{\mu}^\alpha$  et de même variance  $\sigma^2$ , où  $\underline{X}^\alpha$  et  $\overline{X}^\alpha$  sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de  $\tilde{X}^\alpha(\omega) = [\underline{X}^\alpha(\omega), \overline{X}^\alpha(\omega)]$

Puisque  $\underline{\mu}^\alpha \leq \mu \leq \bar{\mu}^\alpha$ , donc  $\forall t \in R$ ,  $F_{\underline{X}^\alpha}(t) \leq F_X(t) \leq F_{\bar{X}^\alpha}(t)$ , où  $F_{\underline{X}^\alpha}$ ,  $F_X$  et  $F_{\bar{X}^\alpha}$  sont les fonctions de répartition de  $\underline{X}^\alpha$ ,  $X$  et  $\bar{X}^\alpha$  respectivement.

### 1.4.4 Variables aléatoires floues de type $L - R$

Soit  $FN(L, R)$  un ensemble d'intervalles flous de type  $L - R$  vus comme des intervalles aléatoires [12]

$$\text{i.e. } \tilde{A} = (\underline{a}, \bar{a}, \delta_a, \gamma_a) \in FN(L, R) \iff \tilde{A} = [\underline{a} - L^{-1}(Y)\delta_a, \bar{a} + R^{-1}(Z)\gamma_a],$$

$Y$  et  $Z$  sont des variables aléatoires uniformément distribuées sur l'intervalle  $[0, 1]$ ,

Les fonctions de références  $L$  et  $R$  sont non-négatives, définies sur  $[0, \infty)$  non-décroissantes telles que  $L(0) = R(0) = 1$ ,

$\delta_a, \gamma_a$  sont des nombres réels positifs et représentent respectivement l'écart à gauche et l'écart à droite.

#### 1.4.4.1 Variables aléatoires floues normales de type $L - R$

$\tilde{X}(\omega) = (\underline{x}(\omega), \bar{x}(\omega), \delta_x, \gamma_x)$  est une variable aléatoire floue normale de type  $L - R$  d'espérance mathématique floue  $\tilde{\mu} = (\underline{\mu}, \bar{\mu}, \delta_\mu, \gamma_\mu)$  qui est un intervalle flou de type  $L - R$  et de variance réelle  $\sigma^2$ , si  $\underline{x}(\omega)$  et  $\bar{x}(\omega)$  (avec  $\underline{x} \leq \bar{x}$ ) sont des variables aléatoires normales d'espérances mathématiques respectives  $\underline{\mu}, \bar{\mu}$  et de même variance  $\sigma^2$  et  $\delta_x, \gamma_x$  sont des nombres réels positifs et représentent respectivement l'écart à gauche et l'écart à droite.

#### 1.4.4.2 Variables aléatoires floues discrètes de type $L - R$

$\tilde{X}(\omega) = (\underline{x}(\omega), \bar{x}(\omega), \delta_x, \gamma_x)$  est une variable aléatoire floue discrète de type  $L - R$  si  $\underline{x}(\omega)$  et  $\bar{x}(\omega)$  (avec  $\underline{x} \leq \bar{x}$ ) sont des variables aléatoires discrètes et  $\delta_x, \gamma_x$  sont des nombres réels positifs et représentent respectivement l'écart à gauche et l'écart à droite.

#### Exemple 28 : [12]

Soient  $(\Omega, F, P)$  un espace de probabilité où :

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$  un espace discret fini,  $P_\omega$  la distribution de probabilité suivante :

$$P_\omega(\omega_1) = 0.25; P_\omega(\omega_2) = 0.75;$$

Et une variable aléatoire floue discrète de type  $L - R$ ,  $\tilde{X}(\omega) = (\underline{x}(\omega), \bar{x}(\omega), \delta_x, \gamma_x)$  telle que :

$$P(\tilde{X}(\omega_1) = \tilde{A}) = 0.25 \text{ et } P(\tilde{X}(\omega_2) = \tilde{B}) = 0.75$$

où  $\tilde{A} = (\underline{a}, \bar{a}, \delta_a, \gamma_a)_{L-R}$  et  $\tilde{B} = (\underline{b}, \bar{b}, \delta_b, \gamma_b)_{L-R}$

(avec  $\delta_x = \delta_a = \delta_b = \delta$  et  $\gamma_x = \gamma_a = \gamma_b = \gamma$ )

sont des intervalles flous du type  $L - R$  dont les fonctions d'appartenance respectives  $\mu_{\tilde{A}}$  et  $\mu_{\tilde{B}}$  sont définies par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{pour } x \in [\underline{a}, \bar{a}] \\ L\left(\frac{\underline{a}-x}{\delta}\right) & \text{pour } x \leq \underline{a} \\ R\left(\frac{x-\bar{a}}{\gamma}\right) & \text{pour } x \geq \bar{a} \end{array} \right\}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{pour } x \in [\underline{b}, \bar{b}] \\ L \left( \frac{\underline{b}-x}{\delta} \right) & \text{pour } x \leq \underline{b} \\ R \left( \frac{x-\bar{b}}{\gamma} \right) & \text{pour } x \geq \bar{b} \end{array} \right\}$$

#### 1.4.4.3 $\alpha$ – coupe d'une variable aléatoire floue de type $L - R$

Sur  $FL(L, R)$ , soit  $\tilde{X}$  une variable aléatoire floue de type  $L - R$  et notée  $\tilde{X}(\omega) = (\underline{x}(\omega), \bar{x}(\omega), \delta_x, \gamma_x)$  [12], où  $\underline{x}$  et  $\bar{x}$  sont des variables aléatoires réelles et  $\delta_x, \gamma_x$  sont des nombres réels positifs et représentent respectivement l'écart à gauche et l'écart à droite.

Autrement dit,  $\tilde{X}(\omega) = [\underline{x}(\omega) - L^{-1}(Y)\delta_x, \bar{x}(\omega) + R^{-1}(Z)\gamma_x]$ .

$Y$  et  $Z$  sont des variables aléatoires uniformément distribuées sur l'intervalle  $[0, 1]$ ,

Les fonctions de références  $L$  et  $R$  sont non-négatives, définies sur  $[0, \infty)$  non-décroissantes telles que  $L(0) = R(0) = 1$ ,

$\delta_x, \gamma_x$  sont des nombres réels positifs et représentent respectivement l'écart à gauche et l'écart à droite

L' $\alpha$  – coupe de  $\tilde{X}(\omega)$  est :  $\tilde{X}^\alpha(\omega) = [\underline{x}(\omega) - L^{-1}(\alpha)\delta_x, \bar{x}(\omega) + R^{-1}(\alpha)\gamma_x]$ .

## Chapitre 2

# Programmation linéaire stochastique

Dans un problème linéaire déterministe, les valeurs de tous les paramètres sont supposées connues. Comment résoudre un problème linéaire dans lequel les données sont incertaines (par exemple, les prix des énergies)? Et quand certaines valeurs des données seront révélées au cours des étapes de décision (par exemple, les demandes en énergie)? la programmation linéaire stochastique est un cadre pour répondre à de telles questions et pour résoudre des problèmes perplexes.

La programmation linéaire stochastique concerne la prise de décision en présence d'incertitude, où le facteur hasard joue un rôle éminent. On peut voir la programmation linéaire stochastique comme de la programmation mathématique avec des paramètres aléatoires.

Dans ce chapitre, on va se focaliser sur l'étude de ce type de problèmes et on va tenter de répondre aux questions précédentes.

## 2.1 La forme d'un problème linéaire stochastique

Soit  $(P_S)$  un problème linéaire stochastique [20] :

$$(P_S) \begin{cases} \text{opt } C(\omega) x \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j (\leq, \geq, =) b_i(\omega); & i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0; & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Avec :

$$C(\omega) = (c_1(\omega), c_2(\omega), \dots, c_n(\omega));$$

$a_{ij}(\omega)$  et  $b_i(\omega)$  pour  $1 \leq i \leq m$ ;  $1 \leq j \leq n$  sont des variables aléatoires de distribution connue sur l'espace des probabilités  $(\Omega, F, P)$ .

$$x_j \geq 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Il y a essentiellement deux différents types d'approches en programmation linéaire stochastique qui sont :

1. L'approche passive ou "wait and see"
2. L'approche active ou "here and now"

## 2.2 L'approche passive ou "wait and see"

Dans cette approche le décideur peut attendre la réalisation des variables aléatoires et résoudre le programme déterministe résultant. Dans ce cas on s'intéresse généralement à la distribution de probabilité de la valeur optimale ou son espérance mathématique (et/ou) sa variance.

Cette approche est intéressante du point de vue théorique, mais elle l'est moins du point de vue pratique; c'est pour cela qu'on va s'intéresser dans notre travail au concept de « here and now » [13].

## 2.3 L'approche active ou "here and now"

C'est une approche basée sur le principe de prise de décision et le choix d'une stratégie  $x$  sans connaître au préalable la réalisation des variables aléatoires. Elle a été développée pour palier à la difficulté du calcul de la fonction de répartition de l'approche passive.

L'idée de base de cette approche est la transformation systématique des problèmes stochastiques en programmes déterministes équivalents. La question posée est selon quel critère choisir une stratégie  $x$ , ou encore, comment devons nous interpréter l'objectif  $Z(x, \omega)$  et les contraintes  $A(\omega)x \leq b(\omega)$  pour obtenir le programme déterministe équivalent.

### 2.3.1 Objectif du programme équivalent :

Considérons le programme linéaire stochastique  $(P_s)_1$  sous la forme suivante :

$$(P_s)_1 \begin{cases} C(\omega)x \longrightarrow \max \\ x \in S = \{x/Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases}$$

Où :  $C$  est un vecteur aléatoire et  $A = (a_{ij})$  et  $b = (b_i)$  sont déterministes.

Il existe plusieurs méthodes pour établir la fonction objectif du problème équivalent, on cite [13] :

**Le critère espérance ( $E$ ) :** le  $E$ -modèle est le plus utilisé, il consiste à remplacer la variable aléatoire de l'objectif par son espérance mathématique pour obtenir le programme linéaire déterministe suivant :

$$(P_{d_1}) \begin{cases} E(C(\omega))x \longrightarrow \max \\ x \in S = \{x/Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases}$$

**Le critère variance ( $V$ -Modèle) :** Dans le cas où  $C$  est un vecteur aléatoire d'espérance  $\bar{c}$ , de matrice de covariance  $V$ .

La variance de  $C(\omega)x$  est  $x^t V x$ .

De la minimisation de la variance résulte le  $V$ -modèle suivant :

$$(P_{d_2}) \begin{cases} x^t V x \longrightarrow \min \\ sc \\ x \in S = \{x/Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases}$$

**Le critère espérance— variance ( $E - V$  modèle) :**

ce modèle consiste à minimiser la variance de  $Z(x, \omega)$  tout en réalisant un niveau de rendement minimum  $Z_0$  fixé préalablement par le décideur :

$$(P_{d_3}) \begin{cases} x^t V x \longrightarrow \min \\ sc \\ \bar{c}x \geq Z_0, x \in S \end{cases}$$

Où  $\bar{c}$  est l'espérance mathématique de  $C(x)$  tel que :  $\bar{c} = E[C(\omega)]$

**Le critère variance de risque minimal ( $P$ -modèle) :**

La maximisation de la probabilité que la valeur de l'objectif est au moins égale à un certain niveau  $u$  choisi par le décideur est appelée  $P$ -modèle ou méthode à risque minimum :

$$(P_{d_4}) \begin{cases} \max \{P_u(C(\omega)x) = P(\omega/C(\omega))x \geq u\} \\ sc \\ x \in S = \{x/Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases}$$

La solution de ce problème, dans le cas gaussien, est donnée par le programme fractionnaire suivant :

$$(P_{d_4})' \begin{cases} \max \frac{\bar{c}x - u}{\sqrt{x^t V x}} \\ sc \\ x \in S \end{cases}$$

Où :

$\bar{c}$  est l'espérance mathématique de  $C(\omega)$ ,  $V$  sa matrice de covariance et  $x^t V x$  la variance de l'objectif  $C(\omega)x$ .

### Le critère de type K (Katoka) :

La minimisation de  $\alpha$  - fractile de la fonction de distribution de l'objectif où  $\alpha$  est choisi par le décideur

$$(P_{d_5}) \begin{cases} \max u \\ P(\omega/C(\omega)x \geq u) = \alpha; \quad 0 < \alpha < 1 \\ x \in S \end{cases}$$

Dans le cas gaussien on a :

$$P(\omega/C(\omega)x \geq u) = \alpha \iff P(\omega/C(\omega)x < u) = 1 - \alpha$$

et

$P(\omega/C(\omega)x < u) = P\left(\omega/\frac{C(\omega)x - \bar{c}x}{\sqrt{x^t V x}} \leq \frac{u - \bar{c}x}{\sqrt{x^t V x}}\right) = \phi\left(\frac{u - \bar{c}x}{\sqrt{x^t V x}}\right)$ ; pour  $x \neq 0$  où  $\phi$  est la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite.

Donc :

$$P(\omega/C(\omega)x \geq u) = \alpha \iff \phi\left(\frac{\bar{c}x - u}{\sqrt{x^t V x}}\right) = \alpha \iff u = \bar{c}x - \phi^{-1}(\alpha) \sqrt{x^t V x}$$

par conséquent résoudre le problème  $(P_{d_5})$  revient, dans ce cas gaussien, à résoudre le problème suivant :

$$(P_{d_5})' \begin{cases} \max \bar{c}x - \phi^{-1}(\alpha) \sqrt{x^t V x} \\ x \in S \end{cases}$$

Il s'en suit que  $\bar{c}x - \phi^{-1}(\alpha) \sqrt{x^t V x}$  est concave si  $\phi^{-1}(\alpha) \geq 0 \iff \alpha \geq \frac{1}{2}$

donc : si on revient au problème  $(P_{d_5})$  : si  $P(\omega/C(\omega)x \geq u) = \alpha \geq \frac{1}{2}$ , avoir le maximum de gain avec une probabilité supérieure ou égale à  $\frac{1}{2}$ .

### Remarque 11 :

Si  $\alpha = 1$ , on revient au E-modèle.

### 2.3.2 Cas des contraintes aléatoires

Soit  $(P_S)$  un problème linéaire stochastique. sachant que la méthode chance-constrained programming se focalise sur les contraintes, donc pour faciliter le travail nous allons considérer l'objectif déterministe comme suit :

$$(P_S) \begin{cases} \text{opt } Cx \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j (\leq, \geq, =) b_i(\omega); & i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0; & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Avec :

$$C \in \mathbb{R}^n;$$

$a_{ij}(\omega)$  et  $b_i(\omega)$  pour  $1 \leq i \leq m$ ;  $1 \leq j \leq n$  sont des variables aléatoires de distribution connue sur l'espace de probabilité  $(\Omega, F, P)$ .

$$x_j \geq 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

#### 2.3.2.1 Méthode Chance-Constrained Programming

Cette méthode a été introduite par Charnes et Cooper (1959); elle consiste à remplacer des contraintes stochastique par des probabilités de réalisation de ces dernières .

Il y a essentiellement deux versions différentes de "Chance-constrained programming " qui consistent à remplacer [12] :

- Version 1 : L'ensemble des contraintes par la probabilité (jointe) de leurs réalisations simultanées au moins égale à un seuil convenablement choisi par le décideur, comme suit :

$$(P_S)_1 \begin{cases} \max cx \\ P \left\{ w / \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j \leq b_i(\omega), i = 1, 2, \dots, m \right\} \geq \alpha \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

- Version 2 : Chaque contrainte par la probabilité de sa réalisation au moins égale à un seuil choisi par le décideur, comme suit :

$$(P_S)_2 \begin{cases} \max Cx \\ P \left\{ w / \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j \leq b_i(\omega), i = 1, 2, \dots, m \right\} \geq \alpha_i \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

La deuxième version est plus avantageuse que la première car le décideur peut choisir pour chaque contrainte  $A_i(\omega)x \leq b_i(\omega)$  suivant les données du problème, le seuil  $\alpha_i$  tel que

$$P(\omega : A_i(\omega)x \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i$$

Soient :

- $X(\alpha) = \{x \geq 0 / P(\omega / a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega), i = 1, \dots, m) \geq \alpha\}$ , l'ensemble des solutions admissibles pour  $(P_S)_1$ .
- $X(\alpha_i) = \{x \geq 0 / P(\omega) : a_{ij}(\omega) x_j \leq b_i(\omega), i = 1, \dots, m) \geq \alpha_i\}$ , l'ensemble des solutions admissibles pour  $(P_S)_2$ .

→  $X(\alpha)$  et  $X(\alpha_i)$  sont-ils toujours convexes ?

Ce n'est pas toujours le cas. voici un exemple qui illustre ceci :

**Exemple 29 : [21]**

Soit  $X(\omega) = (x_1(\omega), x_2(\omega))$  un vecteur aléatoire tel que :

$$P\{\omega : (x_1(\omega_1), x_2(\omega_1)) = (3, 1)\} = \frac{1}{3} \text{ et } P\{\omega : (x_1(\omega_2), x_2(\omega_2)) = (-3, -2)\} = \frac{2}{3}$$

Nous obtenons :

donc

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{3} & \text{pour } 3x \leq 1 & -3x \leq -2 \\ \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} & \text{pour } 3x \not\leq 1 & -3x \not\leq -2 \\ x \geq \frac{2}{3} & \text{pour } 3x \not\leq 1 & -3x \leq -2 \end{cases}$$

d'où :

$$P\{\omega : A(\omega)x \leq b(\omega)\} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } x \leq \frac{1}{3} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \text{si } x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

alors :

$$X(\alpha) \text{ est } \begin{cases} \text{disjoint donc non convexe} & \text{pour } 0 < \alpha \leq \frac{1}{3} \\ \text{convexe} & \text{pour } \frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{2}{3} \\ \text{vide} & \text{pour } \alpha > \frac{2}{3} \end{cases}$$

Nous allons voir par la suite que  $X(\alpha)$  (resp.  $X_i(\alpha_i)$ ) peut être convexe si les variables aléatoires sont normales ou discrètes et sous certaines conditions concernant les valeurs de  $\alpha$  (resp.  $\alpha_i$ ). Seul le cas où  $\alpha$  (resp.  $\alpha_i$ ) est égal à 0 ou 1 ou le cas où  $A$  (resp.  $A_i$ ) est déterministe et  $b$  (resp.  $b_i$ ) est aléatoire nous assure la convexité de  $X(\alpha)$  (resp.  $X_i(\alpha_i)$ ) quelque soit la distribution de probabilité des variables aléatoires  $b$  (resp.  $b_i$ ). comme le stipule le théorème suivant :

**Théorème 1 : [21]**

$X(0)$  et  $X(1)$  sont convexes  
 $X_i(0)$  et  $X_i(1)$  sont convexes

**Théorème 2 : [21]**

Si les  $a_{ij}$  sont déterministes et les  $b_i$  stochastiques ; alors :

- $X(\alpha)$  est convexe pour toute distribution de probabilité de  $b_i$ ,
- $X_i(\alpha_i)$  est convexe pour toute distribution de probabilité de  $b_i$

**Preuve :**

$$P(\omega / \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i \iff 1 - P(\omega / \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j > b_i(\omega)) \geq \alpha_i \iff 1 - F_{bt}(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j) \geq \alpha_i, i = 1, \dots, m.$$

$$1 - F_{bt}(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j) \geq \alpha_i \iff F_{bt}(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j) \leq 1 - \alpha_i \iff \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq F_{bi}^{-1}(1 - \alpha_i).$$

$$X(\alpha_i) = \left\{ x \geq 0 / \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq F_{b_i}^{-1}(1 - \alpha_i) \right\}, i = 1, 2, \dots, m$$

**Théorème 3 : [21]**

Soit  $(\Omega, F, P)$  un espace de probabilité avec  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$ , et la distribution de probabilité discrète et finie  $p(\omega_k) = p_k, k = 1, 2, \dots, r$  et  $\sum_{k=1}^r p_k = 1$ .

Alors :

pour  $\alpha > 1 - \min_{k \in \{1, 2, \dots, r\}} p_k$  l'ensemble  $X(\alpha)$  est convexe

pour  $\alpha_i > 1 - \min_{k \in \{1, 2, \dots, r\}} p_k$  l'ensemble  $X_i(\alpha_i)$  est convexe

**Théorème 4 : [21]**

Soient  $(\Omega, F, P)$  un espace de probabilité,  $a_{ij}(\omega)$  et  $b_i(\omega)$  les composantes de la matrice  $A(m \times n)$  et du vecteur  $b(m \times 1)$  respectivement.

Si  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, b_i$  sont  $(n + 1)$  variables aléatoires normales d'espérances mathématiques  $\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{in}, \lambda_i$  et de variances  $\sigma_{i1}^2, \sigma_{i2}^2, \dots, \sigma_{in}^2, \delta_i$  respectivement.

Alors :

pour  $\alpha > \frac{1}{2}$ , l'ensemble  $X(\alpha)$  est convexe pour  $\alpha_i > \frac{1}{2}$ , l'ensemble  $X_i(\alpha_i)$  est convexe

**Preuve :**

Montrons que  $X_i(\alpha_i)$  est convexe.

Posons  $y_i(x, \omega) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i(\omega)$ ,  $i = 1, \dots, m$  c'est une combinaison linéaire de  $n + 1$  variables aléatoires normales. Donc  $y_i(x, \omega)$  est une variable aléatoire normale de moyenne  $E(y_i(x, \omega)) = \sum_{j=1}^n \mu_{ij}x_j - \lambda_j$  et de variance  $V(y_i(x, \omega)) = z^t S_i z$  où  $z = (x_1, x_2, \dots, x_n, -1)^t$  et  $S_i((n + 1) \times (n + 1))$  est la matrice de covariance suivante :

$$S_i = \begin{pmatrix} V(a_{i1}) & Cov(a_{i1}, a_{i2}) & \dots & Cov(a_{i1}, a_{in}) & Cov(a_{i1}, b_i) \\ Cov(a_{i2}, a_{i1}) & V(a_{i2}) & Cov(a_{i2}, a_{i3}) & \dots & Cov(a_{i2}, b_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(a_{in}, a_{i1}) & Cov(a_{in}, a_{i2}) & \dots & V(a_{in}) & Cov(a_{in}, b_i) \\ Cov(b_i, a_{i1}) & Cov(b_i, a_{i2}) & \dots & Cov(b_i, a_{in}) & V(b_i) \end{pmatrix}$$

où  $V$  et  $Cov$  représentent respectivement variance et Covariance.

Posons :

$$m_{y_i}(x) = E(y_i(x, \omega)), \sigma_{y_i}^2(x) = V(y_i(x, \omega)) \text{ et } \sigma_{y_i}(x) = \sqrt{V(y_i(x, \omega))}.$$

Nous avons :

$$P(\omega / \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) = P(\omega / \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega) \leq 0) = P(\omega / \frac{y_i(x, \omega) - m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)} \leq \frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)}).$$

Donc :

$$P(\omega / \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i \iff P(\omega / \frac{y_i(x, \omega) - m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)} \leq \frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)}) \geq \alpha_i .$$

$\frac{y_i(x,\omega) - m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)}$  est une variable aléatoire normale centrée réduite et soit  $\psi$  sa fonction de distribution qui est strictement croissante et bijective de l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  dans  $]0, 1[$ .

Donc  $P(\omega / \frac{y_i(x,\omega) - m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)} \leq \frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)}) = \psi(\frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)})$ . Par conséquent :

$$P(\omega / \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i \iff \psi(\frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)}) \geq \alpha_i \iff \frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)} \geq \psi^{-1}(\alpha_i) \iff \psi^{-1}(\alpha_i)\sigma_{y_i}(x) + m_{y_i}(x) \leq 0$$

$$X_i(\alpha_i) = \{x / \psi^{-1}(\alpha_i)\sigma_{y_i}(x) + m_{y_i}(x) \leq 0\}.$$

La matrice  $S_i$  est définie positive donc  $\sigma_{y_i}^2(x) = V(y_i(x,\omega))$  et  $\sigma_{y_i}(x) = \sqrt{V(y_i(x,\omega))}$  sont convexes en  $x$  et  $m_{y_i}(x) = E(y_i(x,\omega))$  est linéaire affine en  $x$ . Alors  $X_i(\alpha_i)$  est convexe si  $\psi^{-1}(\alpha_i) \geq 0$ , i.e.  $\alpha_i \geq \frac{1}{2}$  car  $\psi^{-1}(\alpha_i) \geq 0 \iff \alpha_i \geq \psi(0) = \frac{1}{2}$

### Remarque 12 :

A partir de la preuve du théorème 4, on voit qu'on peut représenter aisément

$$X_i(\alpha_i) = \left\{ x / P(\omega / \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i \right\} \text{ par :}$$

$$X_i(\alpha_i) = x / \psi^{-1}(\alpha_i)\sigma_{y_i}(x) + m_{y_i}(x) \leq 0$$

où  $\psi^{-1}$  est la fonction réciproque de la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite.

Pour cela, il suffit de poser  $y_i(x,\omega) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega) \leq 0$ , et calculer :

$m_{y_i}(x) = E(y_i(x,\omega))$ ,  $\sigma_{y_i}^2(x) = \sqrt{V(y_i(x,\omega))}$  et  $\sigma_{y_i}(x) = \sqrt{V(y_i(x,\omega))}$ , avec  $V(y_i(x,\omega)) = Z^t S_i Z$  où  $z = (x_1, x_2, \dots, x_n, -1)^t$  et  $S_i((n+1) \times (n+1))$  est la matrice de covariance de  $y_i(x,\omega)$ .

$X_i(\alpha_i) = \left\{ x / \psi^{-1}(\alpha_i)\sqrt{\sigma_{ij}^2 x_j^2 + \delta_i^2} + m_{y_i}(x) \leq 0 \right\}$  si  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, b_i$  sont indépendantes. Car dans ce cas  $Cov(a_{ij}, a_{ik}) = 0, \forall j \neq k, 1 \leq j, 1 \leq k \leq n$  et  $Cov(a_{ij}, b_i) = 0, \forall j = 1, \dots, n$ ; donc  $\sigma_{y_i}^2(x) = \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \delta_i^2$  et  $\sigma_{y_i}(x) = \sqrt{\sigma_{ij}^2 x_j^2 + \delta_i^2}$ .

### Exemple 30 :

Soit le problème linéaire stochastique ( $P_S$ ) suivant :

$$(P_S) \begin{cases} Z(X) = x_1 + x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ 5x_1 + x_2 \geq b_1(\omega) \\ 3x_1 + 2x_2 \leq b_2(\omega) \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Où  $b = (b_1, b_2)$  est une loi discrète tels que  $b_1$  et  $b_2$  admettent les distributions de probabilité suivante :

$$b_1(\omega) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad | \quad b_2(\omega) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0.1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 0.6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

posons les seuils  $\alpha_1 = 0.3$  et  $\alpha_2 = 0.4$ .

on a :

$$\begin{aligned}
P(5x_1 + x_2 \geq b_1(\omega)) &\geq 0.3 \\
F_{b_1}(5x_1 + x_2) &\geq 0.3 \\
F_{b_1}^{-1}F_{b_1}(5x_1 + x_2) &\geq F_{b_1}^{-1}(0.3) \\
F_{b_1}^{-1}(0.3) &= \{x/F_{b_1}(x) = 0.3\} \\
\text{et } F_{b_1}(1) = 0.3 &\implies F_{b_1}^{-1}(0.3) = 1 \\
\text{alors :}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5x_1 + x_2 &\geq 1 \dots \dots (\theta) \\
P(3x_1 + 2x_2 \leq b_2(\omega)) &\geq 0.4 \\
1 - P(3x_1 + 2x_2 > b_2(\omega)) &\geq 0.4 \\
-P(3x_1 + 2x_2 > b_2(\omega)) &\geq 0.4 - 1 \\
P(3x_1 + 2x_2 > b_2(\omega)) &\leq 0.6 \\
F_{b_2}(3x_1 + 2x_2) &\leq 0.6 \\
F_{b_2}^{-1}F_{b_2}(3x_1 + 2x_2) &\leq F_{b_2}^{-1}(0.6) \\
F_{b_2}^{-1}(0.6) &= \{x/F_{b_2}(x) = 0.6\} \\
\text{et } F_{b_2}(5) = 0.6 &\implies F_{b_2}^{-1}(0.6) = 5 \\
\text{alors :}
\end{aligned}$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 5 \dots \dots (\delta)$$

Le problème à résoudre sera donc le problème linéaire déterministe ( $P$ ) suivant :

$$(P) \begin{cases} Z(X) = x_1 + x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ 5x_1 + x_2 \geq 1 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

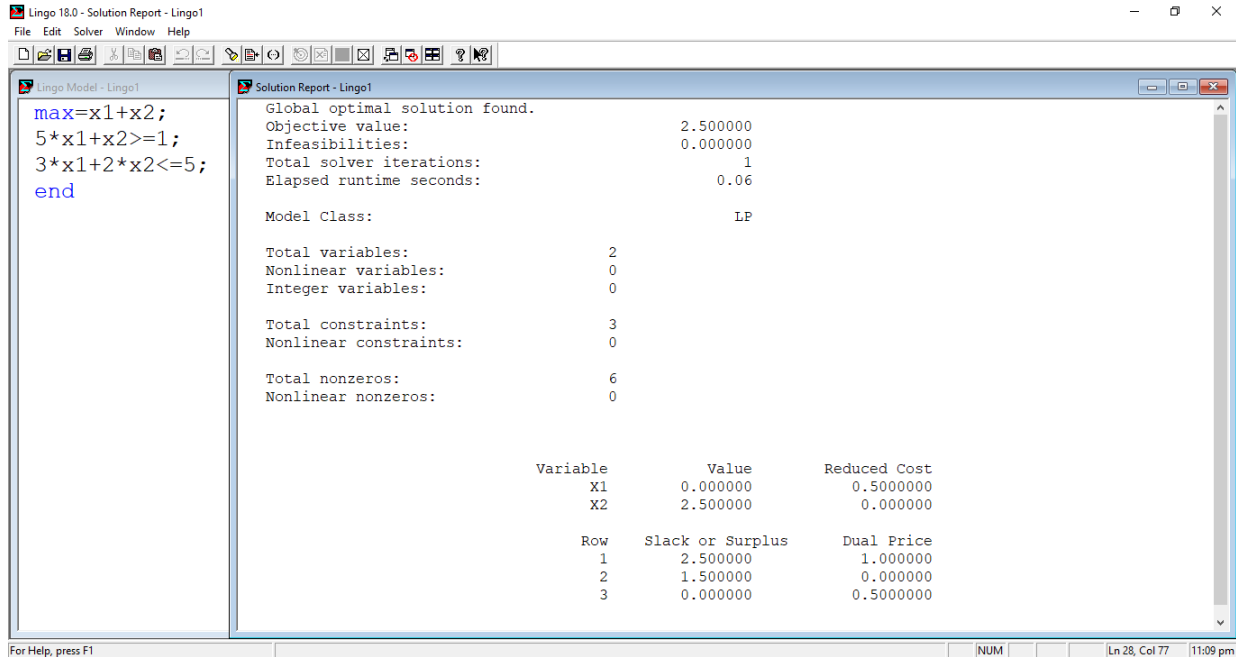
Forme standard :

$$(P) \begin{cases} Z(X) = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \longrightarrow \max \\ sc \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Ajout d'une variable artificielle :

$$(P) \begin{cases} Z(X) = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5 \longrightarrow \max \\ sc \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0 \end{cases}$$

On résout avec la M-Méthode :



La solution optimale est  $X^* = (0, 2.5)$

La valeur optimale est  $Z(X^*) = 2.5$

### 2.3.2.2 Modèle avec recours

#### a-Le recours général :

Pour présenter cette approche, on procède en deux étapes :

choisissons  $\bar{x}$ , préalablement à toute réalisation de l'aléatoire Here and Now.

Étant donnée une réalisation observée  $\omega \in \Omega$ , une décision corrective représentée par un vecteur  $y(k \times 1)$  appelé recours est prise pour compenser la violation des contraintes qui correspond.

Cette compensation se fait par l'introduction d'une pénalité  $q'(\omega)y$  qui est généralement linéaire.

La minimisation de cette pénalité correspond au problème de recours où de deuxième niveau de la forme suivante :

$$\begin{cases} Q(\bar{\omega}, \bar{x}) = \min q'(\bar{\omega})y \\ W(\bar{\omega})y = b(\bar{\omega}) - A(\bar{\omega})x \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (2.a_1)$$

$$\text{où } \begin{cases} q(\omega) \text{ est un vecteur } (1 \times k) \text{ de pénalisation;} \\ W(\omega) \text{ est une matrice } (m \times k) \text{ de recours} \end{cases}$$

ces deux étapes fournissent le problème :

$$\begin{cases} \min_x E \left( c'(\omega) x + \min_y q'(\omega) y \right) \\ A(\omega) x + W(\omega) y = b(\omega) \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (2.a_2)$$

Qui s'écrit de manière équivalente

$$\begin{cases} \min_{x \in T} (E(c'(\omega) x) + E(Q(x, \omega))) \\ T = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall \omega \in \Omega, \exists y \geq 0 / A(\omega) x + W(\omega) y = b(\omega)\} \end{cases} \quad (2.a_3)$$

Pour que le problème (2.a<sub>3</sub>) ait un sens il faut que l'ensemble  $T$  soit non vide, autrement dit, il faut qu'il existe toujours, quelle que soit la réalisation aléatoire, un recours  $y$  possible (c'est-à-dire  $Q(x, \omega) < \infty, \forall \omega \in \Omega$ ).

Le problème (2.a<sub>3</sub>) est convexe (c'est-à-dire  $E(Q(x, \omega))$  et  $T$  sont convexes).

**b-Recours fixe (W et q sont déterministes) :** Dans ce cas, le problème (2.a<sub>3</sub>) est toujours convexe.

on a :

La matrice  $A$  est déterministe ;

Le vecteur  $b$  est une variable aléatoire discrète,

$$P(b = b^{(i)}) = p^{(i)} \quad i = 1 \dots m$$

le problème (2.a<sub>3</sub>) devient linéaire tel que :

$$\begin{cases} \min E(c'(\omega) x + \sum_{i=1}^m p^{(i)} q^{(i)} y^{(i)}) \\ Ax + W y^{(i)} = b^{(i)} \\ x \in T \\ y \geq 0 \end{cases} \quad i = 1 \dots m \quad (2.b)$$

où :

$y^{(i)}$  est le vecteur recours correspondant à la réalisation

$q^{(i)}$  le vecteur recours correspondant à la réalisation

**c-Le recours fixe simple ( $W = (I, -I)$ ) :** Dans ce cas, la matrice de recours de dimension  $m \times 2m$  est égale à  $(I, -I)$ . c'est à dire que  $(W = (I, -I))$

Où :

$I$  est la matrice identité.

Dans ce cas, le vecteur  $y$  est décomposé en deux parties :

—  $y^+(m \times 1)$  : variable d'écart par défaut ;

—  $y^-(m \times 1)$  : variable d'écart par excès.

Parallèlement, le vecteur de pénalisation s'écrit  $q(\omega) = (q^+(\omega), q^-(\omega))$ ,

avec :

—  $q^+(\omega)[b(\omega) - Ax]$  si  $b(\omega) - Ax \geq 0$

—  $q^-(\omega)[Ax - b(\omega)]$  si  $b(\omega) - Ax \leq 0$

Le problème (2.a<sub>3</sub>) s'écrit :

$$\begin{cases} \min E(c'(\omega))x + E\left(\min_{y^+, y^-} q^+(\omega)y^+ + q^-(\omega)y^-\right) \\ Ax + y^+ - y^- = b(\omega) \\ y^+ \geq 0, y^- \geq 0 \end{cases} \quad (2.b_1)$$

**Théorème 5 : [22]**

$Q(x, \omega)$  est fini, si et seulement si,  $q^+(\omega) + q^-(\omega) \geq 0$  avec une probabilité égale à 1.

**Exemple 31 :**

$$\begin{cases} \min Z(x) = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 0.5x_1 + 0.3x_2 \geq b(\omega) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

où  $b$  est uniforme sur l'intervalle  $[1.3, 1.7]$

Ce problème correspond à la recherche du coût minimal pour une opération de fusion de deux types de minerai. La demande est aléatoire uniforme et un problème de capacité limité l'opération à 4 unités.

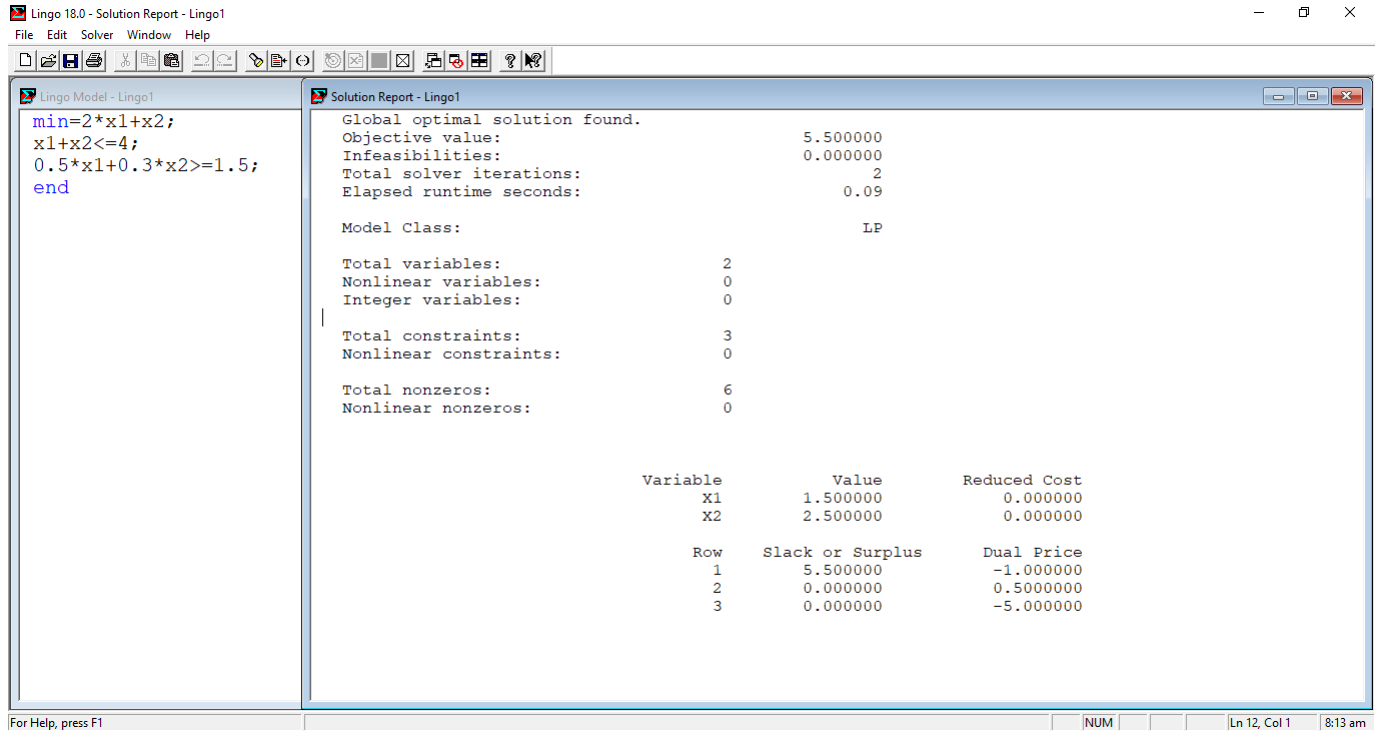
• Remplaçons en premier lieu la demande par son espérance :

$$E(b(\omega)) = \frac{1.3 + 1.7}{2} = 1.5$$

Le problème déterministe équivalent est :

$$\begin{cases} \min Z(x) = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 0.5x_1 + 0.3x_2 \geq 1.5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

## Application sur Lingo :



La solution optimale est  $X^* = (1.5, 2.5)$

la valeur optimale est  $Z(X^*) = 5.5$ .

Cherchons la probabilité que cette solution soit réalisable

$$P(0.5x_1^* + 0.3x_2^* \geq b(\omega)) = P(b(\omega) \leq 1.5) = F_b(1.5) = \frac{1}{2}$$

la probabilité que cette solution soit réalisable est  $\frac{1}{2}$

$F_b$  est la fonction de répartition de  $b(\omega)$

Pour l'interprétation avec seuil sur les contraintes, posons  $\alpha = 0.9$

Cette interprétation peut être utilisée par la firme si elle n'a pas de capacité de stockage et souhaite maintenir le nombre de clients satisfaits. Elle doit être en mesure d'assurer les livraisons à 90%. Dans ce cas, la contrainte devient :

$$P(0.5x_1 + 0.3x_2 \geq b(\omega)) \geq 0.9$$

on a :

$$F_b(0.5x_1 + 0.3x_2 \geq b(\omega)) \geq 0.9 \iff 0.5x_1 + 0.3x_2 \geq b(\omega) \geq F_b^{-1}(0.9)$$

et

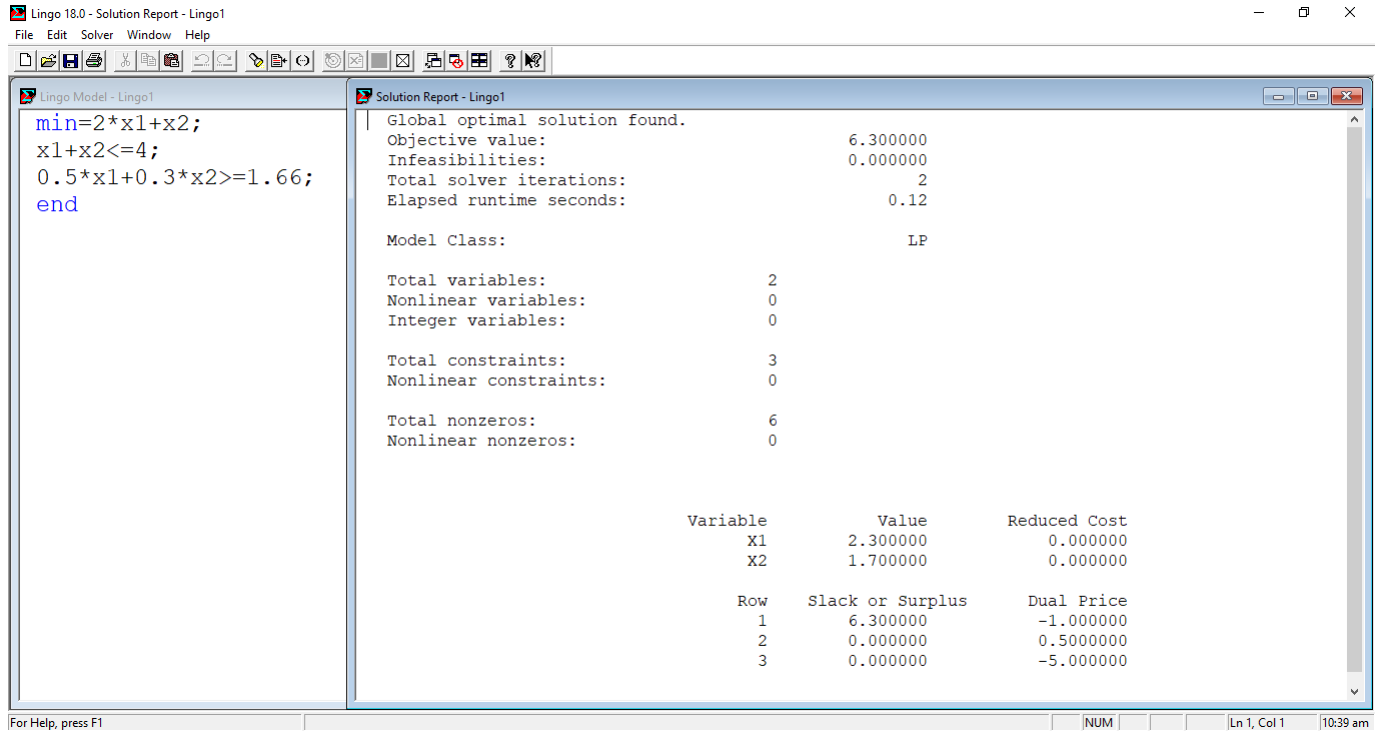
$$F_b^{-1}(0.9) = 1.66$$

Donc le problème équivalent est :

$$\begin{cases} \min Z(x) = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 0.5x_1 + 0.3x_2 \geq 1.66 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution optimale est :  $x_1^* = 2.3$ ,  $x_2^* = 1.7$ , la valeur optimale est :  $Z^* = 6.3$ .

## Application de l'exemple sur Lingo :



- Considérons maintenant un problème avec recours.

Supposons que la firme ait un contrat stipulant que la demande doit être satisfaite, et qu'elle commande le minerai à l'avance.

Si elle produit trop, elle écoule l'excédent chez d'autres clients à 2 unités monétaires au dessous du taux fixé.

Si elle produit trop peu, elle peut acheter sur le marché le complément à 4 unités monétaires au dessus du taux fixé.

Les coûts supplémentaires sont :

$$2(0.5x_1 + 0.3x_2 - b(\omega)) \text{ si } 0.5x_1 + 0.3x_2 - b(\omega) \geq 0$$

$$4(b(\omega) - 0.5x_1 + 0.3x_2) \text{ si } 0.5x_1 + 0.3x_2 - b(\omega) \leq 0$$

Notons  $Q(x_1, x_2, \omega)$  ces coûts supplémentaires, c'est aussi la pénalité que l'on doit ajouter à la fonction économique d'origine.

Le problème avec recours revient à résoudre :

$$\begin{cases} \min 2x_1 + x_2 + E(Q(x_1, x_2, \omega)) \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

L'espérance mathématique de  $Q(x_1, x_2, \omega)$  est :

$$E(Q(x_1, x_2, \omega)) = Q(x_1, x_2)$$

Donc on a :

$$Q(x_1, x_2) = \frac{1}{0.4} \int_{1.3}^{0.5x_1+0.3x_2} 2(0.5x_1 + 0.3x_2 - t)dt + \frac{1}{0.4} \int_{0.5x_1+0.3x_2}^{1.7} 4(t - 0.5x_1 - 0.3x_2)dt$$

$$= \frac{15}{2}(0.5x_1 + 0.3x_2)^2 - 17(0.5x_1 + 0.3x_2) + 18.675$$

Le problème à résoudre devient :

$$\begin{cases} \min \frac{15}{2}(0.5x_1 + 0.3x_2)^2 - 6.5x_1 - 4.1x_2 + 18.675 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution optimale est :  $x_1^* = 1.16 \times 10^{-8}$ ;  $x_2^* = 3.03$ . La valeur optimale est :  $Z^* = 12.44$

## Application de l'exemple sur Lingo

Lingo 18.0 - Solution Report - Lingo1

File Edit Solver Window Help

Lingo Model - Lingo1

```
min=(15/2)*(0.5*x1+0.3*x2)^2-6.5*x1-4.1*x2+18.675;
x1+x2<=4;
end
```

Solution Report - Lingo1

Global optimal solution found.

Objective value:	12.44907
Infeasibilities:	0.000000
Total solver iterations:	5
Elapsed runtime seconds:	0.13
Model is convex quadratic	

Model Class: QP

Total variables:	2
Nonlinear variables:	2
Integer variables:	0
Total constraints:	2
Nonlinear constraints:	1
Total nonzeros:	4
Nonlinear nonzeros:	3

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.1615873E-08	0.3333333
X2	3.037037	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	12.44907	-1.000000
2	0.9629630	0.1407810E-08

For Help, press F1

NUM | Ln 3, Col 57 | 10:43 a

# Chapitre 3

## Programmation linéaire floue

On peut se trouver dans la réalité face à des problèmes linéaires dont les données sont imprécises et difficiles à appréhender de nature floue. On avait tendance à les ignorer jusqu'en 1965, lorsque Zadeh, professeur à l'université de Californie de Berkeley, a introduit la notion de sous-ensemble flou, à partir de l'idée d'appartenance partielle à une classe de catégorie aux limites mal définies, ce qui est un outil adéquat pour modéliser cette imprécision. Ce qui a donné naissance aux programmes linéaires flous, qui ont surgit de la nécessité d'obtenir des données suffisantes afin de pouvoir les manier.

Plusieurs mathématiciens se sont intéressés à ce phénomène, parmi eux Didier Dubois, qui a proposé une approche dite déffuzzification, qu'on va expliquer dans ce chapitre.

### 3.1 Forme d'un problème linéaire flou :

$$\begin{cases} \tilde{C}x \longrightarrow opt \\ \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}x_j (\leq, \geq, =) \tilde{b}_i, & i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Où :

$opt$  : min ou max

$\tilde{C}$  ;  $\tilde{a}_{ij}$  et  $\tilde{b}_i$  sont des intervalles flous.

Dans ce qui suit nous considérons uniquement le cas où les coefficients des contraintes sont flous, les coefficients de l'objectif étant déterministes.

### 3.2 Résolution d'un problème linéaire flou

Soit  $(P_F)$  est un problème linéaire flou à objectif déterministe et les  $\tilde{a}_{ij}$  et  $\tilde{b}_i$  pour  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n$  sont des intervalles flous.

$$(P_F) \begin{cases} Cx \longrightarrow max \\ sc \\ \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}x_j \leq b_i, & i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

La résolution de ce programme linéaire flou, consiste à transformer les contraintes floues en des contraintes déterministes.

Nous avons vu dans le deuxième chapitre la méthode de Charnes et Cooper qui consiste à transformer les contraintes stochastiques en les remplaçant par les probabilités de leur réalisations égale à au moins un seuil convenablement choisi. Dubois propose de remplacer probabilité par possibilité et nécessité dans le but de transformer les contraintes floues en des contraintes déterministes. On appelle ceci : la déffuzzification.

Pour faciliter le travail nous allons étudier cette notion avec un programme linéaire flou à  $n = 3$  et  $m = 3$ .

$$(P_{f_1}) \begin{cases} Cx \rightarrow \max \\ sc \\ \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 \leq \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 \leq \tilde{b}_2 \\ \tilde{a}_{31}x_1 + \tilde{a}_{32}x_2 + \tilde{a}_{33}x_3 \leq \tilde{b}_3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

### 3.2.1 Déffuzzification en utilisant possibilité

La Déffuzzification en utilisant la possibilité revient à déterminer :

$$\text{pos} \left( \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 \leq \tilde{b}_1 \right) \geq \alpha_1$$

$$\text{pos} \left( \tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 \leq \tilde{b}_2 \right) \geq \alpha_2$$

$$\text{pos} \left( \tilde{a}_{31}x_1 + \tilde{a}_{32}x_2 + \tilde{a}_{33}x_3 \leq \tilde{b}_3 \right) \geq \alpha_3$$

Où  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3 \in [0; 1]$  sont des seuils.

Alors : en vertu de la proposition on a :

$$\text{pos} \left( \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 \leq \tilde{b}_1 \right) \geq \alpha_1 \iff \left( \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 \right)^{\alpha_1} \leq \bar{b}_1^{\alpha_1}$$

Où  $\left( \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 \right)^{\alpha_1}$  est la borne inférieure de l'intervalle réel  $\left( \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 \right)^{\alpha_1}$  (c'est un sous ensemble de niveau  $\alpha_1$  ou une  $\alpha_1$ -coupe) et  $\bar{b}_1^{\alpha_1}$  est la borne supérieure de l'intervalle réel  $\tilde{b}_1^{\alpha_1}$

En effet :

— En utilisant les propriétés des  $\alpha$ -coupes intervalles réels on aura :

$$\left( \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 \right)^{\alpha_1} = \left( \tilde{a}_{11}^{\alpha_1}x_1 + \tilde{a}_{12}^{\alpha_1}x_2 + \tilde{a}_{13}^{\alpha_1}x_3 \right) = \left[ \underline{\tilde{a}}_{11}^{\alpha_1}, \bar{\tilde{a}}_{11}^{\alpha_1} \right] x_1 + \left[ \underline{\tilde{a}}_{12}^{\alpha_1}, \bar{\tilde{a}}_{12}^{\alpha_1} \right] x_2 + \left[ \underline{\tilde{a}}_{13}^{\alpha_1}, \bar{\tilde{a}}_{13}^{\alpha_1} \right] x_3$$

— En utilisant la multiplication d'un intervalle par un scalaire on aura :

$$\left[ \underline{\tilde{a}}_{11}^{\alpha_1}x_1, \bar{\tilde{a}}_{11}^{\alpha_1}x_1 \right] + \left[ \underline{\tilde{a}}_{12}^{\alpha_1}x_2, \bar{\tilde{a}}_{12}^{\alpha_1}x_2 \right] + \left[ \underline{\tilde{a}}_{13}^{\alpha_1}x_3, \bar{\tilde{a}}_{13}^{\alpha_1}x_3 \right]$$

— En utilisant l'addition des intervalles réels, on aura :

$$\left[ \underline{\tilde{a}}_{11}^{\alpha_1}x_1 + \underline{\tilde{a}}_{12}^{\alpha_1}x_2 + \underline{\tilde{a}}_{13}^{\alpha_1}x_3, \bar{\tilde{a}}_{11}^{\alpha_1}x_1 + \bar{\tilde{a}}_{12}^{\alpha_1}x_2 + \bar{\tilde{a}}_{13}^{\alpha_1}x_3 \right]$$

Il en résulte que :

$$\text{pos} \left( \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 \leq \tilde{b}_1 \right) \geq \alpha_1 \iff \tilde{a}_{11}^{\alpha_1}x_1 + \tilde{a}_{12}^{\alpha_1}x_2 + \tilde{a}_{13}^{\alpha_1}x_3 \leq \bar{b}_1^{\alpha_1}$$

Par analogie on aura aussi :

$$\text{pos} \left( \tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 \leq \tilde{b}_2 \right) \geq \alpha_2 \iff \tilde{a}_{21}^{\alpha_2}x_1 + \tilde{a}_{22}^{\alpha_2}x_2 + \tilde{a}_{23}^{\alpha_2}x_3 \leq \bar{b}_2^{\alpha_2}$$

Et

$$pos \left( \tilde{a}_{31}x_1 + \tilde{a}_{32}x_2 + \tilde{a}_{33}x_3 \leq \tilde{b}_3 \right) \geq \alpha_3 \iff \underline{\tilde{a}}_{31}^{\alpha_3}x_1 + \underline{\tilde{a}}_{32}^{\alpha_3}x_2 + \underline{\tilde{a}}_{33}^{\alpha_3}x_3 \leq \overline{\tilde{b}}_3^{\alpha_3}$$

Donc ;

Le programme linéaire à résoudre est déterministe tel que :

$$(PD) \begin{cases} Z(X) = CX \longrightarrow max \\ \underline{\tilde{a}}_{11}^{\alpha_1}x_1 + \underline{\tilde{a}}_{12}^{\alpha_1}x_2 + \underline{\tilde{a}}_{13}^{\alpha_1}x_3 \leq \overline{\tilde{b}}_1^{\alpha_1} \\ \underline{\tilde{a}}_{21}^{\alpha_2}x_1 + \underline{\tilde{a}}_{22}^{\alpha_2}x_2 + \underline{\tilde{a}}_{23}^{\alpha_2}x_3 \leq \overline{\tilde{b}}_2^{\alpha_2} \\ \underline{\tilde{a}}_{31}^{\alpha_3}x_1 + \underline{\tilde{a}}_{32}^{\alpha_3}x_2 + \underline{\tilde{a}}_{33}^{\alpha_3}x_3 \leq \overline{\tilde{b}}_3^{\alpha_3} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Où :

$\underline{\tilde{a}}_{ij}^{\alpha_k}$  ;  $\overline{\tilde{b}}_i^{\alpha_k}$  ;  $x_j$  ( $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n$ ) sont des nombres réels.  
 $\alpha_k \in [0; 1]$  ;  $k = 1, 2, 3$  sont des seuils.

### 3.2.2 Déffuzification en utilisant nécessité

La déffuzification en utilisant la nécessité revient à déterminer :

$$nec \left( \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 \leq \tilde{b}_1 \right) \geq \alpha_1$$

$$nec \left( \tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 \leq \tilde{b}_2 \right) \geq \alpha_2$$

$$nec \left( \tilde{a}_{31}x_1 + \tilde{a}_{32}x_2 + \tilde{a}_{33}x_3 \leq \tilde{b}_3 \right) \geq \alpha_3$$

où :  $\alpha_1; \alpha_2$  et  $\alpha_3 \in [0; 1]$  sont des seuils.

Alors ;

$$nec \left( \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 \leq \tilde{b}_1 \right) \geq \alpha_1 \iff \overline{(\tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3)}^{1-\alpha_1} \leq \underline{\tilde{b}}_1^{1-\alpha_1}$$

Où  $\overline{(\tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3)}^{1-\alpha_1}$  est la borne supérieure de l'intervalle réel  $(\tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3)^{1-\alpha_1}$   
 et  $\underline{\tilde{b}}_1^{1-\alpha_1}$  est la borne inférieure de l'intervalle réel  $\tilde{b}_1^{1-\alpha_1}$

En effet :

— En utilisant les propriétés des  $\alpha$  - coupes intervalles réels on aura :

$$(\tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3)^{1-\alpha_1} = (\underline{\tilde{a}}_{11}^{1-\alpha_1}x_1 + \underline{\tilde{a}}_{12}^{1-\alpha_1}x_2 + \underline{\tilde{a}}_{13}^{1-\alpha_1}x_3) = \left[ \underline{\tilde{a}}_{11}^{1-\alpha_1}, \overline{\tilde{a}}_{11}^{1-\alpha_1} \right] x_1 + \left[ \underline{\tilde{a}}_{12}^{1-\alpha_1}, \overline{\tilde{a}}_{12}^{1-\alpha_1} \right] x_2 + \left[ \underline{\tilde{a}}_{13}^{1-\alpha_1}, \overline{\tilde{a}}_{13}^{1-\alpha_1} \right] x_3$$

— En utilisant la multiplication d'un intervalle par un scalaire on aura :

$$\left[ \underline{\tilde{a}}_{11}^{1-\alpha_1}x_1, \overline{\tilde{a}}_{11}^{1-\alpha_1}x_1 \right] + \left[ \underline{\tilde{a}}_{12}^{1-\alpha_1}x_2, \overline{\tilde{a}}_{12}^{1-\alpha_1}x_2 \right] + \left[ \underline{\tilde{a}}_{13}^{1-\alpha_1}x_3, \overline{\tilde{a}}_{13}^{1-\alpha_1}x_3 \right]$$

— En utilisant l'addition des intervalles flous, on aura :

$$\left[ \underline{\tilde{a}}_{11}^{1-\alpha_1}x_1 + \underline{\tilde{a}}_{12}^{1-\alpha_1}x_2 + \underline{\tilde{a}}_{13}^{1-\alpha_1}x_3 ; \overline{\tilde{a}}_{11}^{1-\alpha_1}x_1 + \overline{\tilde{a}}_{12}^{1-\alpha_1}x_2 + \overline{\tilde{a}}_{13}^{1-\alpha_1}x_3 \right]$$

Il en résulte que :

$$nec \left( \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 \leq \tilde{b}_1 \right) \geq \alpha_1 \iff \overline{\tilde{a}}_{11}^{1-\alpha_1}x_1 + \overline{\tilde{a}}_{12}^{1-\alpha_1}x_2 + \overline{\tilde{a}}_{13}^{1-\alpha_1}x_3 \leq \underline{\tilde{b}}_1^{1-\alpha_1}$$

Par analogie on aura aussi :

$$nec \left( \tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 \leq \tilde{b}_2 \right) \geq \alpha_2 \iff \bar{a}_{21}^{1-\alpha_2}x_1 + \bar{a}_{22}^{1-\alpha_2}x_2 + \bar{a}_{23}^{1-\alpha_2}x_3 \leq \tilde{b}_2^{1-\alpha_2}$$

Et

$$nec \left( \tilde{a}_{31}x_1 + \tilde{a}_{32}x_2 + \tilde{a}_{33}x_3 \leq \tilde{b}_3 \right) \geq \alpha_3 \iff \bar{a}_{31}^{1-\alpha_3}x_1 + \bar{a}_{32}^{1-\alpha_3}x_2 + \bar{a}_{33}^{1-\alpha_3}x_3 \leq \tilde{b}_3^{1-\alpha_3}$$

Donc ;

le programme linéaire à résoudre est déterministe tel que :

$$(P_D) \begin{cases} Z(X) = CX \longrightarrow max \\ \bar{a}_{11}^{1-\alpha_1}x_1 + \bar{a}_{12}^{1-\alpha_1}x_2 + \bar{a}_{13}^{1-\alpha_1}x_3 \leq \tilde{b}_1^{1-\alpha_1} \\ \bar{a}_{21}^{1-\alpha_2}x_1 + \bar{a}_{22}^{1-\alpha_2}x_2 + \bar{a}_{23}^{1-\alpha_2}x_3 \leq \tilde{b}_2^{1-\alpha_2} \\ \bar{a}_{31}^{1-\alpha_3}x_1 + \bar{a}_{32}^{1-\alpha_3}x_2 + \bar{a}_{33}^{1-\alpha_3}x_3 \leq \tilde{b}_3^{1-\alpha_3} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Où :

$\bar{a}_{ij}^{\alpha_k}; \tilde{b}_i^{\alpha_k}; x_j$  ( $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n$ ) sont des nombres réels.  
 $\alpha_k \in [0; 1]$ ;  $k = 1, 2, 3$  sont des seuils.

### Exemple 32 :

Soit le problème linéaire flou ( $P_F$ ) suivant :

$$(P_F) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow max \\ sc \\ \tilde{1}x_1 + \tilde{2}x_2 \leq \tilde{4} \\ \tilde{2}x_1 + \tilde{1}x_2 \leq \tilde{5} \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\tilde{m}, m = 1, 2, 4, 5$  sont des intervalles flous dont leur fonction d'appartenance sont définie comme suit :

$$\mu_{\tilde{m}} = \begin{cases} 0 & si \ x < m - 1 \\ x - m + 1 & si \ m - 1 \leq x < m \\ -x + m + 1 & si \ m \leq x \leq m + 1 \\ 0 & si \ x > m + 1 \end{cases}$$

Par analogie, on obtient :

$$\mu_{\tilde{1}} = \begin{cases} 0 & si \ x < 0 \\ x & si \ 0 \leq x < 1 \\ -x + 2 & si \ 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & si \ x > 2 \end{cases} \quad \mu_{\tilde{2}} = \begin{cases} 0 & si \ x < 1 \\ x - 1 & si \ 1 \leq x < 2 \\ -x + 3 & si \ 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & si \ x > 3 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{4}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ -x + 5 & \text{si } 4 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{si } x > 5 \end{cases} \quad \mu_{\tilde{5}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 4 \\ x - 4 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ -x + 6 & \text{si } 5 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

on obtient

$$\underline{\tilde{1}}^{0.8} = 0.8; \quad \overline{\tilde{1}}^{0.8} = 1.2; \quad \tilde{1}^{0.8} = [0.8, 1.2] \quad | \quad \underline{\tilde{2}}^{0.8} = 1.8; \quad \overline{\tilde{2}}^{0.8} = 2.2; \quad \tilde{2}^{0.8} = [1.8, 2.2]$$

$$\underline{\tilde{4}}^{0.8} = 3.8; \quad \overline{\tilde{4}}^{0.8} = 4.2; \quad \tilde{4}^{0.8} = [3.8, 4.2] \quad | \quad \underline{\tilde{5}}^{0.8} = 4.8; \quad \overline{\tilde{5}}^{0.8} = 5.2; \quad \tilde{5}^{0.8} = [4.8, 5.2]$$

— a/ En appliquant possibilité, on aura le programme suivant :

$$(P_P) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ pos(\tilde{1}x_1 + \tilde{2}x_2 \leq \tilde{4}) \geq 0.8 \\ pos(\tilde{2}x_1 + \tilde{1}x_2 \leq \tilde{5}) \geq 0.8 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

En utilisant les propriétés de possibilité, on aura :

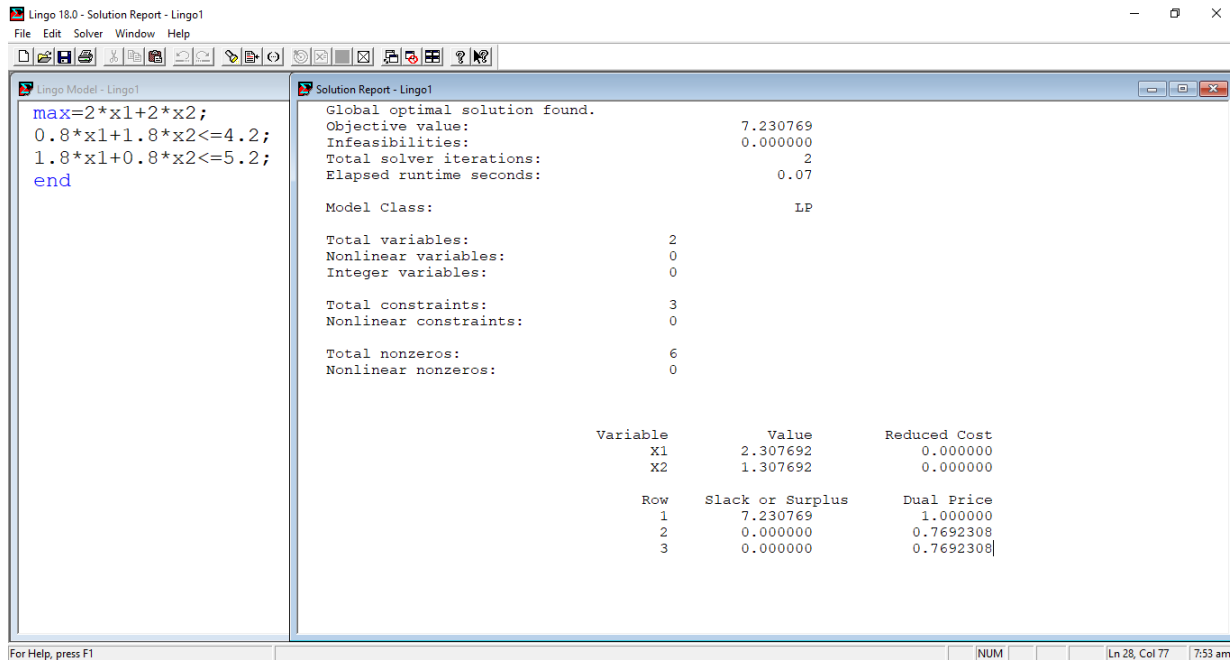
$$(P_P) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ (\tilde{1}x_1 + \tilde{2}x_2)^{0.8} \leq \overline{\tilde{4}}^{0.8} \\ (\tilde{2}x_1 + \tilde{1}x_2)^{0.8} \leq \overline{\tilde{5}}^{0.8} \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (P_P) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ \underline{\tilde{1}}^{0.8} x_1 + \underline{\tilde{2}}^{0.8} x_2 \leq \overline{\tilde{4}}^{0.8} \\ \underline{\tilde{2}}^{0.8} x_1 + \underline{\tilde{1}}^{0.8} x_2 \leq \overline{\tilde{5}}^{0.8} \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

En remplaçant les bornes  $\underline{\tilde{1}}^{0.8}$ ,  $\underline{\tilde{2}}^{0.8}$ ,  $\overline{\tilde{4}}^{0.8}$ ,  $\overline{\tilde{5}}^{0.8}$  par leurs valeurs, on obtient le programme déterministe suivant :

$$(P_d) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ 0.8x_1 + 1.8x_2 \leq 4.2 \\ 1.8x_1 + 0.8x_2 \leq 5.2 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

## Application de l'exemple sur Lingo :



La solution optimale est  $X^* = (2.3, 1.3)$

La valeur optimale est  $Z(X^*) = 7.23$

— En utilisant la nécessité :

$$(P_P) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ nec(\tilde{1}x_1 + \tilde{2}x_2 \leq \tilde{4}) \geq 0.8 \\ nec(\tilde{2}x_1 + \tilde{1}x_2 \leq \tilde{5}) \geq 0.8 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

En utilisant les propriétés de nécessité, on aura :

$$(P_P) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ \frac{(\tilde{1}x_1 + \tilde{2}x_2)^{1-0.8}}{\tilde{4}^{1-0.8}} \leq \tilde{4}^{1-0.8} \\ \frac{(\tilde{2}x_1 + \tilde{1}x_2)^{1-0.8}}{\tilde{5}^{1-0.8}} \leq \tilde{5}^{1-0.8} \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (P_P) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ \tilde{1}^{1-0.8} x_1 + \tilde{2}^{1-0.8} x_2 \leq \tilde{4}^{1-0.8} \\ \tilde{2}^{1-0.8} x_1 + \tilde{1}^{1-0.8} x_2 \leq \tilde{5}^{1-0.8} \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (P_P) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ \underline{\tilde{1}}^{0.2} x_1 + \underline{\tilde{2}}^{0.2} x_2 \leq \underline{\tilde{4}}^{0.2} \\ \overline{\tilde{2}}^{0.2} x_1 + \overline{\tilde{1}}^{0.2} x_2 \leq \overline{\tilde{5}}^{0.2} \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Calculer les bornes des intervalles  $\underline{\tilde{1}}^{0.8}, \underline{\tilde{2}}^{0.8}, \overline{\tilde{4}}^{0.8}, \overline{\tilde{5}}^{0.8}$

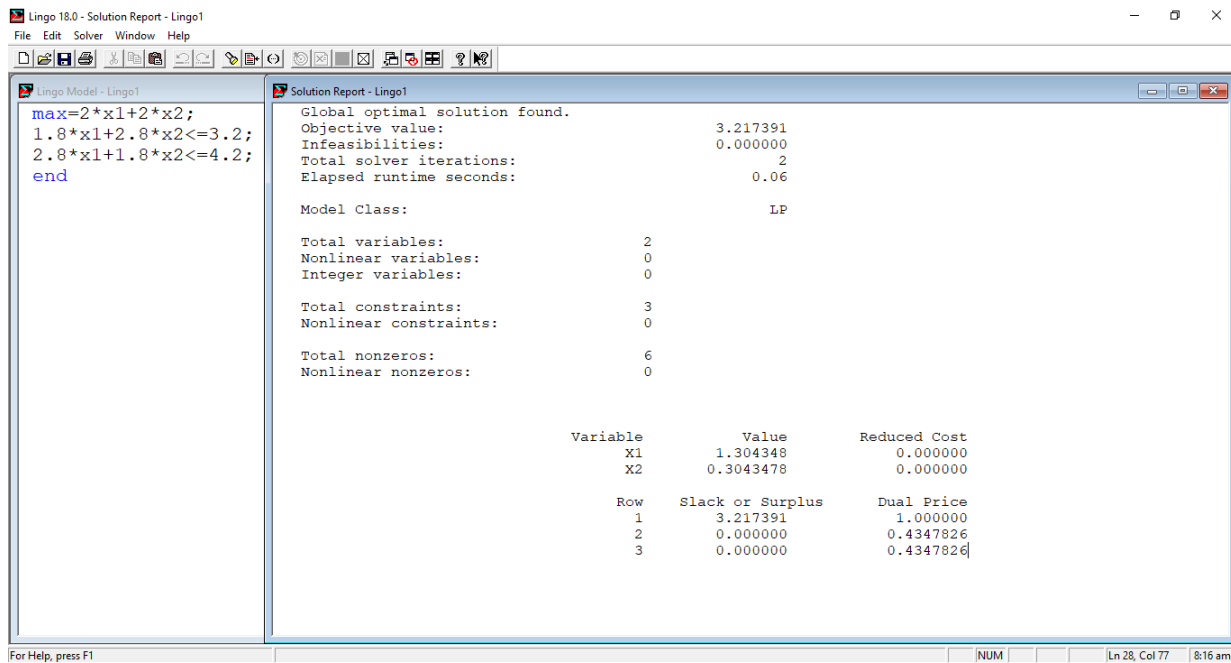
$$\underline{\tilde{1}}^{0.2} = 0.2; \quad \overline{\tilde{1}}^{0.2} = 1.8; \quad \tilde{1}^{0.2} = [0.2, 1.8] \quad | \quad \underline{\tilde{2}}^{0.2} = 1.2; \quad \overline{\tilde{2}}^{0.2} = 2.8; \quad \tilde{2}^{0.2} = [1.2, 2.8]$$

$$\underline{\tilde{4}}^{0.2} = 3.2; \quad \overline{\tilde{4}}^{0.2} = 4.8; \quad \tilde{4}^{0.2} = [3.2, 4.8] \quad | \quad \underline{\tilde{5}}^{0.2} = 4.2; \quad \overline{\tilde{5}}^{0.2} = 5.8; \quad \tilde{5}^{0.2} = [4.2, 5.8]$$

En remplaçant les bornes  $\underline{\tilde{1}}^{0.8}, \underline{\tilde{2}}^{0.8}, \overline{\tilde{4}}^{0.8}, \overline{\tilde{5}}^{0.8}$  par leurs valeurs, on obtient le programme déterministe suivant :

$$(P_d) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ 1.8x_1 + 2.8x_2 \leq 3.2 \\ 2.8x_1 + 1.8x_2 \leq 4.2 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

### Application de l'exemple sur Lingo :



La solution optimale est  $X^* = (1.3, 0.3)$

La valeur optimale est  $Z(X^*) = 3.21$

**Exemple 33 :**

On reprend l'exemple 32, mais cette fois-ci, les variables floues présentes dans les contraintes sont de type  $L - R$

Soit alors le programme flou en présence d'intervalles flous de type  $L - R$  dans les contraintes  $(P_F)_{L-R}$  suivant :

$$(P_F)_{L-R} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow max \\ sc \\ \tilde{1}x_1 + \tilde{2}x_2 \leq \tilde{4} \\ \tilde{2}x_1 + \tilde{1}x_2 \leq \tilde{5} \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\tilde{A}$ ,  $A = 1, 2, 4$  et  $5$  sont des intervalles flous de type  $L - R$ , définis comme suit  $\tilde{A} = (\underline{a}, \bar{a}, \delta_a, \gamma_a)$ , tel que  $\delta_a$  et  $\gamma_a$  sont des valeurs réelles strictement positives, on pose  $\delta_a = \gamma_a = 1$

c'est-à-dire  $\tilde{1} = (1, 1.5, 1, 1)$ ,  $\tilde{2} = (2, 2.5, 1, 1)$ ,  $\tilde{4} = (4, 4.5, 1, 1)$  et  $\tilde{5} = (5, 5.5, 1, 1)$ , dont leurs fonctions d'appartenances sont définies sous la forme suivante :

$$\mu_{\tilde{A}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [\underline{a}, \bar{a}] \\ L\left(\frac{\underline{a}-x}{\delta_a}\right) & \text{si } x \leq \underline{a} \\ R\left(\frac{x-\bar{a}}{\gamma_a}\right) & \text{si } x \geq \bar{a} \end{cases}$$

Par analogie on aura :

$$\mu_{\tilde{1}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]1, 1.5[ \\ L\left(\frac{1-x}{1}\right) & \text{si } x \leq 1 \\ R\left(\frac{x-1.5}{1}\right) & \text{si } x \geq 1.5 \end{cases} \quad | \quad \mu_{\tilde{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]2, 2.5[ \\ L\left(\frac{2-x}{1}\right) & \text{si } x \leq 2 \\ R\left(\frac{x-2.5}{1}\right) & \text{si } x \geq 2.5 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{4}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]4, 4.5[ \\ L\left(\frac{4-x}{1}\right) & \text{si } x \leq 4 \\ R\left(\frac{x-4.5}{1}\right) & \text{si } x \geq 4.5 \end{cases} \quad | \quad \mu_{\tilde{5}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]5, 5.5[ \\ L\left(\frac{5-x}{1}\right) & \text{si } x \leq 5 \\ R\left(\frac{x-5.5}{1}\right) & \text{si } x \geq 5.5 \end{cases}$$

Soit  $\alpha = 0.5$  un seuil et  $\delta_a = \gamma_a = 1$  ;

On obtient alors, en appliquant l' $\alpha$ -coupe d'un intervalle flou de type  $L - R$  :

$$\tilde{1}^{0.5} = \left[ \underline{\tilde{1}}^{0.5}, \bar{\tilde{1}}^{0.5} \right] = [1 - L^{-1}(0.5), 1.5 + R^{-1}(0.5)]$$

En effet :

$$L\left(\frac{1-x}{1}\right) = 0.5 \implies \frac{1-x}{1} = L^{-1}(0.5) \implies x = \underline{\tilde{1}}^{0.5} = 1 - L^{-1}(0.5)$$

$$R\left(\frac{x-1.5}{1}\right) = 0.5 \implies \frac{x-1.5}{1} = R^{-1}(0.5) \implies x = \bar{\tilde{1}}^{0.5} = 1.5 + R^{-1}(0.5)$$

de la même manière on aura :

$$\tilde{2}^{0.5} = \left[ \underline{\tilde{2}}^{0.5}, \bar{\tilde{2}}^{0.5} \right] = [2 - L^{-1}(0.5), 2.5 + R^{-1}(0.5)]$$

$$\tilde{4}^{0.5} = \left[ \underline{\tilde{4}}^{0.5}, \bar{\tilde{4}}^{0.5} \right] = [4 - L^{-1}(0.5), 4.5 + R^{-1}(0.5)]$$

$$\tilde{5}^{0.5} = \left[ \underline{\tilde{5}}^{0.5}, \bar{\tilde{5}}^{0.5} \right] = [5 - L^{-1}(0.5), 5.5 + R^{-1}(0.5)]$$

a\)- En appliquant possibilité, on aura le programme suivant :

$$(P_F)_{L-R} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ pos(\tilde{1}x_1 + \tilde{2}x_2 \leq \tilde{4}) \geq 0.5 \\ pos(\tilde{2}x_1 + \tilde{1}x_2 \leq \tilde{5}) \geq 0.5 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

En utilisant les propriétés de possibilité, on aura :

$$(P_F)_{L-R} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ (\tilde{1}x_1 + \tilde{2}x_2)^{0.5} \leq \bar{4}^{0.5} \\ (\tilde{2}x_1 + \tilde{1}x_2)^{0.5} \leq \bar{5}^{0.5} \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(P_F)_{L-R} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ \underline{1}^{0.5} x_1 + \underline{2}^{0.5} x_2 \leq \bar{4}^{0.5} \\ \underline{2}^{0.5} x_1 + \underline{1}^{0.5} x_2 \leq \bar{5}^{0.5} \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Nous avons calculé :

$$\underline{1}^{0.5} = 1 - L^{-1}(0.5) \quad | \quad \bar{4}^{0.5} = 4.5 + R^{-1}(0.5)$$

$$\underline{2}^{0.5} = 2 - L^{-1}(0.5) \quad | \quad \bar{5}^{0.5} = 5.5 + R^{-1}(0.5)$$

En remplaçant dans  $(P_F)_{L-R}$ , on aura le programme  $(P_D)$  déterministe suivant :

$$(P_D) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ (1 - L^{-1}(0.5))x_1 + (2 - L^{-1}(0.5))x_2 \leq 4.5 + R^{-1}(0.5) \\ (2 - L^{-1}(0.5))x_1 + (1 - L^{-1}(0.5))x_2 \leq 5.5 + R^{-1}(0.5) \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Trouver  $L^{-1}(x)$  et  $R^{-1}(x)$  :

On pose  $L(x) = R(x) = \max(0, 1 - x) \implies L^{-1}(x) = R^{-1}(x) = 1 - x$  si  $x < 1$

On calcule

$$\underline{1} - L^{-1}(0.5) = 1 - (1 - 0.5) = 0.5$$

$$\underline{2} - L^{-1}(0.5) = 1.5$$

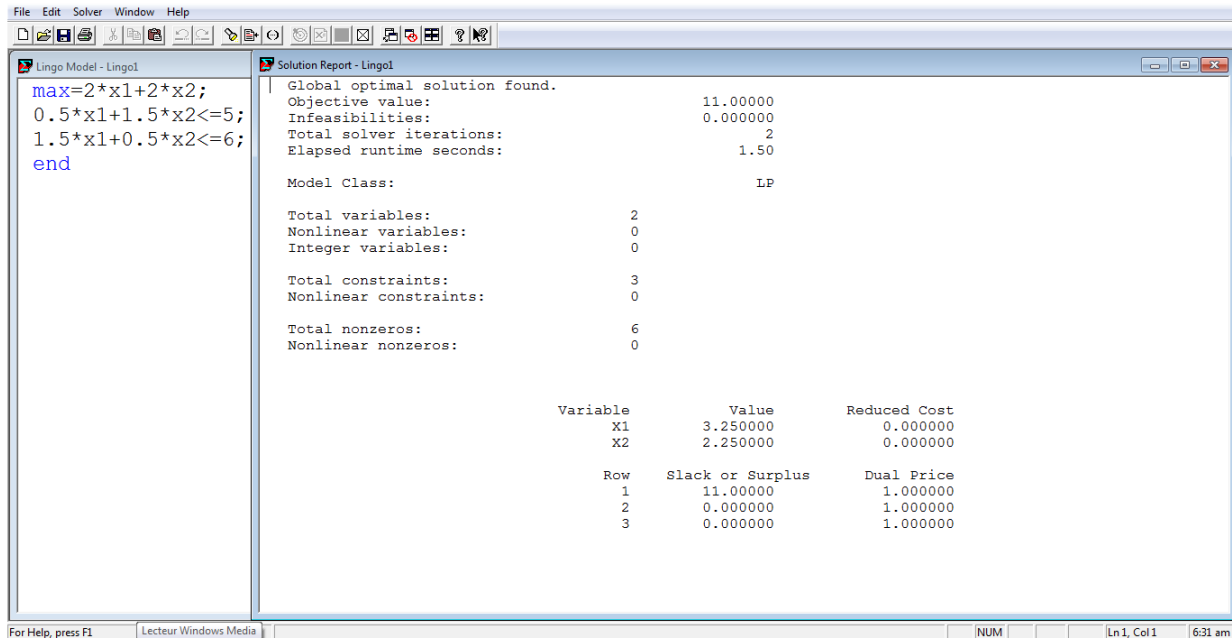
$$\bar{4} + R^{-1}(0.5) = 4.5 + (1 - 0.5) = 5$$

$$\bar{5} + R^{-1}(0.5) = 6$$

En remplaçant ces valeurs dans  $(P_D)$ , on obtient :

$$(P_D) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ 0.5x_1 + 1.5x_2 \leq 5 \\ 1.5x_1 + 0.5x_2 \leq 6 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Application de l'exemple sur Lingo :



La solution optimale est  $X^* = (3.25, 2.25)$

La valeur optimale est  $Z(X^*) = 11$

b\)- En appliquant nécessité :

$$(P_F)_{L-R} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ nec(\tilde{1}x_1 + \tilde{2}x_2 \leq \tilde{4}) \geq 0.5 \\ nec(\tilde{2}x_1 + \tilde{1}x_2 \leq \tilde{5}) \geq 0.5 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

En utilisant les propriétés de nécessité, on aura :

$$(P_F)_{L-R} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ \left(\tilde{1}x_1 + \tilde{2}x_2\right)^{1-0.5} \leq \tilde{4}^{1-0.5} \\ \left(\tilde{2}x_1 + \tilde{1}x_2\right)^{1-0.5} \leq \tilde{5}^{1-0.5} \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(P_F)_{L-R} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ \bar{1}^{1-0.5} x_1 + \bar{2}^{1-0.5} x_2 \leq \tilde{4}^{1-0.5} \\ \bar{2}^{1-0.5} x_1 + \bar{1}^{1-0.5} x_2 \leq \tilde{5}^{1-0.5} \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(P_F)_{L-R} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ \bar{1}^{0.5} x_1 + \bar{2}^{0.5} x_2 \leq \tilde{4}^{0.5} \\ \bar{2}^{0.5} x_1 + \bar{1}^{0.5} x_2 \leq \tilde{5}^{0.5} \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Nous avons calculé :

$$\bar{1}^{0.5} = 1.5 + R^{-1}(0.5) \quad | \quad \tilde{4}^{0.5} = 4 - L^{-1}(0.5)$$

$$\bar{2}^{0.5} = 2.5 + R^{-1}(0.5) \quad | \quad \tilde{5}^{0.5} = 5 - L^{-1}(0.5)$$

En remplaçant dans  $(P_F)_{L-R}$ , on aura le programme  $(P_D)$  déterministe suivant :

$$(P_D) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ (1.5 + R^{-1}(0.5)) x_1 + (2.5 + R^{-1}(0.5)) x_2 \leq 4 - L^{-1}(0.5) \\ (2.5 + R^{-1}(0.5)) x_1 + (1.5 + R^{-1}(0.5)) x_2 \leq 5 - L^{-1}(0.5) \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

De la même manière on calcule :

$$1.5 + R^{-1}(0.5) = 2$$

$$2.5 + R^{-1}(0.5) = 3$$

$$4 - L^{-1}(0.5) = 3.5$$

$$5 - L^{-1}(0.5) = 4.5$$

En remplaçant ces valeurs dans  $(P_D)$ , on obtient :

$$(P_D) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 3.5 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 4.5 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

## Application de l'exemple sur Lingo :

The screenshot shows the Lingo software interface. On the left, the 'Lingo Model - Lingo1' window contains the following code:

```

max=2*x1+2*x2;
2*x1+3*x2<=3.5;
3*x1+2*x2<=4.5;
end

```

On the right, the 'Solution Report - Lingo1' window displays the following information:

Global optimal solution found.  
Objective value: 3.200000  
Infeasibilities: 0.000000  
Total solver iterations: 2  
Elapsed runtime seconds: 0.06

Model Class: LP

Total variables: 2  
Nonlinear variables: 0  
Integer variables: 0

Total constraints: 3  
Nonlinear constraints: 0

Total nonzeros: 6  
Nonlinear nonzeros: 0

Variable	Value	Reduced Cost
X1	1.300000	0.000000
X2	0.300000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	3.200000	1.000000
2	0.000000	0.400000
3	0.000000	0.400000

At the bottom of the window, the status bar shows: For Help, press F1 | NUM | Ln 1, Col 1 | 6:34 am

La solution optimale est  $X^* = (1.3, 0.3)$

La valeur optimale est  $Z(X^*) = 3.2$

# Chapitre 4

## La programmation linéaire floue stochastique

Il peut arriver dans la réalité, d'être face à des problèmes linéaires où le flou et l'aléa se trouvent combinés [8][12][13], les variables aléatoires floues donnent un meilleur formalisme de cette combinaison. Dans des situations pareilles, nous sommes obligés de prendre en considération la co-existence du flou et de l'aléa. Ce qui a donné naissance à la programmation linéaire floue stochastique

Nous avons vu dans les chapitres 2 et 3, respectivement, la programmation linéaire stochastique et la programmation linéaire floue.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à la programmation linéaire en présence de variables aléatoires floues de type  $L - R$  dans les contraintes.

## 4.1 La forme d'un problème linéaire floue stochastique

Un programme linéaire flou stochastique est un programme linéaire où le flou et l'aléa se trouvent combinés.

Nous pouvons nous retrouver face à des situations où les coefficients des contraintes et de l'objectif sont des variables aléatoires floues.

Considérons le programme linéaire flou stochastique suivant [8][12][13] :

$$(P_{FS}) \left\{ \begin{array}{l} CX \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) x_j \leq \tilde{b}_i(\omega), \quad i = 1 \dots m \\ X \in B = \{X \in \mathbb{R}^n / X \geq 0\} \end{array} \right\}$$

où  $CX$  est un objectif avec  $C = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n)$  des variables aléatoires floues

et  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\tilde{a}_{ij}$  et  $\tilde{b}_i$  sont des variables aléatoires floues

$\sum_{j=1}^n, \leq$  représentent la généralisation au moyen du principe d'extension de l'addition, la multiplication et l'inégalité de nombres réels aux intervalles flous

## 4.2 Programmation linéaire en présence des variables aléatoires floues dans les contraintes

Considérons le programme linéaire flou stochastique suivant [12][13] :

$$(P_{FS}) \left\{ \begin{array}{l} CX \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) x_j \leq \tilde{b}_i(\omega), \quad i = 1 \dots m \\ X \in B = \{X \in \mathbb{R}^n / X \geq 0\} \end{array} \right\}$$

où  $CX$  est un objectif déterministe avec  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  des nombres réels

et  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\tilde{a}_{ij}$  et  $\tilde{b}_i$  sont des variables aléatoires floues

$\sum_{j=1}^n, \leq$  représentent la généralisation au moyen du principe d'extension de l'addition, la multiplication et l'inégalité de nombres réels aux intervalles flous.

$(P_{FS})$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(P_{PS})' \left\{ \begin{array}{l} CX \rightarrow \max \\ \tilde{A}(\omega) X \leq \tilde{b}(\omega) \\ X \in B = \{X \in \mathbb{R}^n / X \geq 0\} \end{array} \right\}$$

où  $\tilde{a}_{ij}(\omega)$  et  $\tilde{b}_i(\omega)$  sont les composantes de la matrice  $\tilde{A}(\omega)$  ( $m \times n$ ) du vecteur  $\tilde{b}(\omega)$  ( $m \times 1$ ) respectivement.

On a par définition,  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\tilde{a}_{ij}(\omega)$  et  $\tilde{b}_i(\omega)$  sont des des intervalles flous. Soient  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\pi_{\tilde{a}_{ij}(\omega)}$  et  $\pi_{\tilde{b}_i(\omega)}$  les distributions de possibilités de  $\tilde{a}_{ij}(\omega)$  et  $\tilde{b}_i(\omega)$  respectivement. (Par définition  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\pi_{\tilde{a}_{ij}(\omega)} = \mu_{\tilde{a}_{ij}(\omega)}$  et  $\pi_{\tilde{b}_i(\omega)} = \mu_{\tilde{b}_i(\omega)}$  [23])

Soient  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\mu_{\tilde{A}(\omega)}$  et  $\mu_{\tilde{b}(\omega)}$  les fonctions d'appartenance communes de  $\tilde{A}(\omega)$  et  $\tilde{b}(\omega)$  respectivement.

Posons  $T^1(\omega) = \sup \tilde{A}(\omega)$ ,  $T^2(\omega) = \sup \tilde{b}(\omega)$  et  $T(\omega) = T^1(\omega) \times T^2(\omega)$  (produit cartésien de  $T^1(\omega)$  et  $T^2(\omega)$ ) et  $S^{\alpha_i}(\omega) = \tilde{A}^{\alpha_i}(\omega) \times \tilde{b}^{\alpha_i}(\omega)$ .

On définit pour  $t(\omega) = (t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in T(\omega) = T_1(\omega) \times T_2(\omega)$ , l'application  $\mu$  par :  $\mu(t(\omega)) = \min(\mu_{\tilde{A}(\omega)}(A(t_1(\omega))), \mu_{\tilde{b}(\omega)}(b(t_2(\omega))))$ , c'est le degré de compatibilité de  $t_1(\omega)$  et  $t_2(\omega)$  avec  $\tilde{A}(\omega)$  et  $\tilde{b}(\omega)$  respectivement.

Soient  $(T^{\alpha_i}(\omega))_i$  une subdivision de  $T(\omega)$  définie de la manière suivante :

$$T^{\alpha_i}(\omega) = \{t = (t_1(\omega), (t_2(\omega)) / \alpha_{i-1} < \mu(t(\omega)) \leq \alpha_i\}, i = 1, \dots, l+1$$

où  $\{\alpha_i\}_{i=0, \dots, l+1}$  sont des nombres réels tels que  $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_l < \alpha_{l+1} = 1$ .

On a donc pour  $i \neq j$ ;  $T^{\alpha_i}(\omega) \cap T^{\alpha_j}(\omega) = \emptyset$  et  $\bigcup_{i=1}^{p+1} T^{\alpha_i}(\omega) = T(\omega)$ .

On a donc  $T^{\alpha_i}(\omega) = \{t = (t_1(\omega), (t_2(\omega)) / \alpha_{i-1} < \mu(t(\omega)) \leq \alpha_i\}$ , autrement dit :

$$(t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in T^{\alpha_i}(\omega) \iff \alpha_{i-1} < \min(\mu_{\tilde{A}(\omega)}(A(t_1(\omega))), \mu_{\tilde{b}(\omega)}(b(t_2(\omega))))$$

et

$$\min(\mu_{\tilde{A}(\omega)}(A(t_1(\omega))), \mu_{\tilde{b}(\omega)}(b(t_2(\omega)))) \leq \alpha_i,$$

i.e.

$$T^{\alpha_i}(\omega) = \left\{ (t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in (\tilde{A}^{\alpha_{i-1}}(\omega) \times \tilde{b}^{\alpha_{i-1}}(\omega)) - (\tilde{A}^{\alpha_i}(\omega) \times \tilde{b}^{\alpha_i}(\omega)) \right\} = \\ (t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in S^{\alpha_{i-1}}(\omega) - S^{\alpha_i}(\omega)$$

Soit une suite de nombres réels  $\{\tau_i\}_{i=1, \dots, l+1}$  telle que  $0 = \tau_{l+1} < \tau_l < \dots < \tau_2 < \tau_1 < 1$  choisis pour pénaliser  $t \in T(\omega)$  tels que  $\mu(t)$  est au bas niveau .

Le programme  $(P_{PS})'$  peut être approché par le programme stochastique suivant :

$$(P_S) \left\{ \begin{array}{l} CX \longrightarrow \max \\ t_1(\omega)x - t_2(\omega) \leq \tau_{l+1}^m \quad (t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in T^{\alpha_{l+1}}(\omega) \\ t_1(\omega)x - t_2(\omega) \leq \tau_l^m \quad (t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in T^{\alpha_l}(\omega) \\ \vdots \\ t_1(\omega)x - t_2(\omega) \leq \tau_1^m \quad (t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in T^{\alpha_1}(\omega) \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

où  $\tau_j^m$  est un  $m$ -vecteur dont les composantes sont égales à  $\tau_j$  .

Si  $\forall \omega$  les fonctions d'appartenance  $\mu_{\tilde{A}(\omega)}$  et  $\mu_{\tilde{b}(\omega)}$  sont continues,  $(P_S)$  sera un programme semi-infini.

**Théorème 6 : [8]**

$(P_S)$  est équivalent au programme linéaire stochastique suivant :

$$(P_S) \left\{ \begin{array}{l} CX \longrightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n \bar{t}_{1ij}^{\alpha_{l+1}}(\omega) x_j - \tau_{l+1} \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_{l+1}}(\omega) \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n \bar{t}_{1ij}^{\alpha_l}(\omega) x_j - \tau_l \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_l}(\omega) \quad i = 1, \dots, m \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \bar{t}_{1ij}^{\alpha_1}(\omega) x_j - \tau_1 \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_1}(\omega) \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

où  $\bar{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega)$  est la borne supérieure de l'intervalle aléatoire  $\tilde{a}_{ij}^{\alpha_{k-1}}(\omega)$  et  $\underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega)$  est la borne inférieure de l'intervalle aléatoire  $\tilde{b}_i^{\alpha_{k-1}}(\omega)$ ,  $k = 1, \dots, l+1$

Preuve :

Il suffit de montrer que les contraintes des programmes  $(P_S)$  et  $(P_{LS})$  sont équivalentes.

Soient  $\{t_1(\omega)x - t_2(\omega) \leq \delta_k^m; (t_1(\omega), t_2(\omega)) \in T^{\alpha_k}(\omega), k = 1, \dots, p+1\}$  les contraintes de  $(P_S)$ .

On a  $(t_1(\omega), t_2(\omega)) \in S^{\overline{\alpha_{k-1}}}(\omega) - S^{\overline{\alpha_k}}(\omega)$ , donc les composantes  $t_{1ij}(\omega)$  de la matrice  $t_1(\omega)$  et  $t_{2i}(\omega)$  du vecteur  $t_2(\omega)$  sont telles que :  $(t_{1ij}(\omega), t_{2i}(\omega)) \in S_i^{\overline{\alpha_{k-1}}}(\omega) - S_i^{\overline{\alpha_k}}(\omega)$  où  $S_i^{\overline{\alpha_k}}(\omega) = a_{ij}^{\overline{\alpha_k}}(\omega) \times b_i^{\overline{\alpha_k}}(\omega)$ .

On peut donc représenter les contraintes sous la forme suivante :

$$\left\{ \sum_{j=1}^n t_{1ij}(\omega)x_j - \tau_k \leq t_{2i}(\omega), (t_{1ij}(\omega), t_{2i}(\omega)) \in S_i^{\overline{\alpha_{k-1}}}(\omega) - S_i^{\overline{\alpha_k}}(\omega), k = 1, \dots, p+1, i = 1, \dots, m \right\}$$

On sait que  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\tilde{a}_{ij}(\omega)$  et  $\tilde{b}_i(\omega)$  sont des intervalles flous, donc pour  $\alpha_{k-1} < \alpha_k$

on a :

$$a_{ij}^{\overline{\alpha_k}}(\omega) \subset a_{ij}^{\overline{\alpha_{k-1}}}(\omega) \text{ et } b_i^{\overline{\alpha_k}}(\omega) \subset b_i^{\overline{\alpha_{k-1}}}(\omega).$$

D'où

$$\sup \left\{ t_{1ij}(\omega) / (t_{1ij}(\omega), t_{2i}(\omega)) \in S_i^{\overline{\alpha_{k-1}}}(\omega) - S_i^{\overline{\alpha_k}}(\omega) \right\} = \sup \left\{ t_{1ij}(\omega) / t_{1ij}(\omega) \in \tilde{a}_{ij}^{\alpha_{k-1}}(\omega) \right\} = \bar{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega).$$

D'autre part on a :

$$\inf \left\{ t_{2i}(\omega) / (t_{1ij}(\omega), t_{2i}(\omega)) \in S_i^{\overline{\alpha_{k-1}}}(\omega) - S_i^{\overline{\alpha_k}}(\omega) \right\} = \inf \left\{ t_{2i}(\omega) / t_{2i}(\omega) \in \tilde{b}_i^{\alpha_{k-1}}(\omega) \right\} = \underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega).$$

Puisque on a :

$$\sum_{j=1}^n t_{1ij}(\omega)x_j \leq t_{2i}(\omega) + \tau_k \text{ pour } (t_{1ij}(\omega), t_{2i}(\omega)) \in S_i^{\overline{\alpha_{k-1}}}(\omega) - S_i^{\overline{\alpha_k}}(\omega), \text{ donc } t_{2i}(\omega) + \delta_k$$

est un majorant de l'ensemble :

$$E = \left\{ \sum_{j=1}^n t_{1ij}(\omega)x_j, (t_{1ij}(\omega), t_{2i}(\omega)) \in S_i^{\overline{\alpha_{k-1}}}(\omega) - S_i^{\overline{\alpha_k}}(\omega) \right\} \text{ et } \sum_{j=1}^n \bar{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega) x_j \text{ est le plus}$$

petit des majorants de  $E$ ,

par conséquent

$$\sum_{j=1}^n \bar{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega) x_j \leq t_{2i}(\omega) + \tau_k.$$

Par ailleurs :

$$\sum_{j=1}^n \bar{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega)x_j - \tau_k \text{ est un minorant de l'ensemble :}$$

$F = \{t_{2i}(\omega), (t_{1ij}(\omega), t_{2i}(\omega)) \in S_i^{\overline{\alpha^{k-1}}}(\omega) - S_i^{\overline{\alpha^k}}(\omega)\}$  et  $\underline{t}_{2i}^{\alpha^k}(\omega)$  est le plus grand des minorants de  $F$

$$\text{donc } \sum_{j=1}^n \bar{t}_{1ij}(\omega)x_j - \tau_k \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha^k}(\omega).$$

On obtient donc les contraintes de  $(P_{LS})$ .

La réciproque est évidente.

$$\sum_{j=1}^n \bar{t}_{1ij}^{\alpha^k}(\omega)x_j - \tau_k \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha^k}(\omega) \implies \sum_{j=1}^n t_{1ij}^{\alpha^k}(\omega)x_j - \tau_k \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha^k}(\omega) \iff t_1(\omega)x - t_2(\omega) \leq \delta_k^m; (t_1(\omega), t_2(\omega)) \in T^{\alpha^k}(\omega).$$

$$X_s^i(p_i^s, \alpha_s) = \left\{ x \in X/P(\omega : \sum_{j=1}^n \bar{t}_{1ij}^{\alpha_s}(\omega)x_j - \tau_s \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_s}(\omega)) \geq p_i^s \right\};$$

$$i = 1, \dots, m; s = 1, \dots, l+1$$

Puisque  $\bar{t}_{1ij}^{\alpha^k}(\omega)$  est la borne supérieure de l'intervalle aléatoire  $\tilde{a}_{ij}^{\alpha^{k-1}}$  et  $\underline{t}_{2i}^{\alpha^k}(\omega)$  est la borne inférieure de l'intervalle aléatoire  $\tilde{b}_i^{\alpha^{k-1}}(\omega)$ ,  $k = 1, \dots, l+1$ , donc  $\bar{t}_{1ij}^{\alpha^k}(\omega) = \bar{a}_{ij}^{\alpha^{k-1}}$  et  $\underline{t}_{2i}^{\alpha^k}(\omega) = \underline{b}_i^{\alpha^{k-1}}$ ,  $k = 1, \dots, l+1$ , par conséquent

$$X_s^i(p_i^s, \alpha_s) = \left\{ x \in X/P(\omega : \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij}^{\alpha_s-1}(\omega)x_j - \tau_s \leq \underline{b}_i^{\alpha_s-1}(\omega)) \geq p_i^s \right\};$$

$$i = 1, \dots, m; s = 1, \dots, l+1$$

Nous allons établir dans la prochaine section les conditions de convexité de  $X_s^i(p_i^s, \alpha_s)$

### Exemple 34 : [8]

soit le problème linéaire flou stochastique suivant

$$(P_{FS}) \begin{cases} x_1 + 3x_2 \longrightarrow \min \\ sc \\ \tilde{A}(\omega) X < \tilde{b}(\omega) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \omega \in \Omega \end{cases}$$

$$\text{où } \tilde{A}(\omega) = \tilde{a}_{ij}(\omega) ; i = 1, 2; j = 1, 2 \quad ; \quad \tilde{b}(\omega) = \tilde{b}_i(\omega) ; i = 1, 2$$

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} \text{ et } \text{Im}\mu_{\tilde{a}_{ij}(\omega)} = \{0.2, 0.4\}$$

et  $P_\omega$  la distribution de probabilité suivante :

$$P_\omega(\omega_1) = p_1 = 0.25 \quad | \quad P_\omega(\omega_2) = p_2 = 0.75$$

$$\tilde{a}_{11}(\omega_1) : (0.5/0.4), (3.0/0.4), (0.2/0.2), (6.0/0.2) \quad | \quad \tilde{a}_{21}(\omega_1) : (1.4/0.4), (8.0/0.4), (1.0/0.2), (9.0/0.2)$$

$$\tilde{a}_{11}(\omega_2) : (2.0/0.4), (8.0/0.4), (2.2/0.2), (9.0/0.2) \quad | \quad \tilde{a}_{21}(\omega_2) : (3.2/0.4), (8.4/0.4), (3.0/0.2), (11/0.2)$$

$$\tilde{a}_{12}(\omega_1) : (0.5/0.4), (3.0/0.4), (0.2/0.2), (6.0/0.2) \quad | \quad \tilde{a}_{22}(\omega_1) : (1.4/0.4), (8.0/0.4), (1.0/0.2), (9.0/0.2)$$

$$\tilde{a}_{12}(\omega_2) : (2.0/0.4), (8.0/0.4), (2.2/0.2), (9.0/0.2) \quad | \quad \tilde{a}_{22}(\omega_2) : (3.2/0.4), (8.4/0.4), (3.0/0.2), (11/0.2)$$

$$\tilde{b}(\omega_1) = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1(\omega_1) \\ \tilde{b}_2(\omega_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{1} \\ \tilde{2} \end{pmatrix} \quad | \quad \tilde{b}(\omega_2) = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1(\omega_2) \\ \tilde{b}_2(\omega_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{3} \\ \tilde{4} \end{pmatrix}$$

Les nombres flous  $\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}$  et  $\tilde{4}$  sont caractérisés par leurs fonctions d'appartenance  $\mu_{\tilde{m}}$ ,  $m = 1, 2, 3, 4$  définies de la manière suivante :

$$\mu_{\tilde{m}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < m - 1 \\ x - m + 1 & \text{si } m - 1 \leq x < m \\ \frac{-x+m+4}{4} & \text{si } m \leq x < m + 4 \\ 0 & \text{si } x \geq m + 4 \end{cases}$$

pour résoudre le programme ( $P_{FS}$ ) on applique la méthode

$$(P_S) \begin{cases} x_1 + 3x_2 \longrightarrow \min \\ sc \\ \tilde{a}_{11}^{0.4}(\omega) x_1 + \tilde{a}_{12}^{0.4}(\omega) x_2 \geq \tilde{b}_1^{0.4}(\omega) \\ \bar{a}_{11}^{0.4}(\omega) x_1 + \bar{a}_{12}^{0.4}(\omega) x_2 \leq \bar{b}_1^{0.4}(\omega) \\ \tilde{a}_{21}^{0.4}(\omega) x_1 + \tilde{a}_{22}^{0.4}(\omega) x_2 \geq \tilde{b}_2^{0.4}(\omega) \\ \bar{a}_{21}^{0.4}(\omega) x_1 + \bar{a}_{22}^{0.4}(\omega) x_2 \leq \bar{b}_2^{0.4}(\omega) \\ \bar{a}_{11}^{0.2}(\omega) x_1 + \bar{a}_{12}^{0.2}(\omega) x_2 \geq \bar{b}_1^{0.2}(\omega) \\ \tilde{a}_{11}^{0.2}(\omega) x_1 + \tilde{a}_{12}^{0.2}(\omega) x_2 \leq \tilde{b}_1^{0.2}(\omega) \\ \bar{a}_{21}^{0.2}(\omega) x_1 + \bar{a}_{22}^{0.2}(\omega) x_2 \leq \bar{b}_2^{0.2}(\omega) \\ \tilde{a}_{21}^{0.2}(\omega) x_1 + \tilde{a}_{22}^{0.2}(\omega) x_2 \geq \tilde{b}_2^{0.2}(\omega) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \omega \in \Omega \end{cases}$$

Qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$(P_S)' \begin{cases} x_1 + 3x_2 \longrightarrow \min \\ sc \\ C(\omega) X < D(\omega) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \omega \in \Omega \end{cases}$$

Où  $X = (x_1, x_2)$

$$C(\omega) = \begin{bmatrix} -\tilde{A}^{0.4}(\omega) & (2 \times 2) \\ \bar{A}^{0.4}(\omega) & (2 \times 2) \\ -\tilde{A}^{0.2}(\omega) & (2 \times 2) \\ \bar{A}^{0.2}(\omega) & (2 \times 2) \end{bmatrix}, \quad D(\omega) = \begin{bmatrix} -\tilde{b}^{0.4}(\omega) & (2 \times 1) \\ \bar{b}^{0.4}(\omega) & (2 \times 1) \\ -\tilde{b}^{0.2}(\omega) & (2 \times 1) \\ \bar{b}^{0.2}(\omega) & (2 \times 1) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^\alpha(\omega) = (\tilde{a}_{ij}^\alpha(\omega)), \quad i = 1, 2; j = 1, 2, \quad \bar{A}^\alpha(\omega) = (\bar{a}_{ij}^\alpha(\omega)), \quad i = 1, 2; j = 1, 2$$

$$\tilde{b}^\alpha(\omega) = (\tilde{b}_{ij}^\alpha(\omega)), \quad i = 1, \quad \bar{b}^\alpha(\omega) = (\bar{b}_{ij}^\alpha(\omega)), \quad i = 1, 2$$

Soit  $c_{ij}(\omega)$  et  $d_j(\omega)$  les composantes des matrices  $C(\omega)$  et  $D(\omega)$  respectivement.

Alors  $(P_S)'$  s'écrit sous la forme suivante

$$(P_S)'' \begin{cases} x_1 + 3x_2 \rightarrow \min \\ sc \\ \sum_{j=1}^2 c_{ij}(\omega) X < d_i(\omega) \quad i = 1 \dots 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \omega \in \Omega \end{cases}$$

Pour résoudre  $(P_S)$  on applique la méthode avec recours soit que

$$q_1^\alpha(\omega_i) \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad q_2^\alpha(\omega_i) \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Choisis par le décideur pour pénaliser les contraintes violés.

$$\text{On pose } q(\omega_i) = \begin{bmatrix} q^{0.2}(\omega_i) \\ q^{0.4}(\omega_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

et

$$y_j^i = y_j(\omega_i) = \begin{cases} \sum_{l=1}^r c_{jl}(\omega_i) x_l - d_j & \text{si } \sum_{l=1}^r c_{jl}(\omega_i) x_l - d_j \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit  $y^i$  ( $8 \times 1$ ) le vecteur dont les composantes sont  $(y_j^i)$ ,  $j = 1 \dots 8$

En appliquant la méthode avec recours, on obtient le problème déterministe suivant :

$$(P) \begin{cases} (x_1 + 3x_2 + \sum_{i=1}^2 p_i q(\omega_i) y^i) \rightarrow \min \\ sc \\ y^i = C(\omega_i) X - D(\omega_i) \\ y^i \geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad i = 1, 2$$

en remplaçant  $p_i, q(\omega_i)$  et  $D(\omega_i)$  par leurs valeurs numériques on obtient le programme suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + \frac{1}{2}y_1^1 + \frac{1}{2}y_2^1 + \frac{1}{2}y_3^1 + \frac{1}{2}y_4^1 + y_5^1 + y_6^1 + y_7^1 + y_8^1 \\ + \frac{3}{2}y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2 + \frac{3}{2}y_3^2 + \frac{3}{2}y_4^2 + 3y_5^2 + 3y_6^2 + 3y_7^2 + 3y_8^2 \longrightarrow \min \\ \text{sous les contraintes} \\ y_1^1 = 0.4 - 0.5x_1 - 0.5x_2 \\ y_2^1 = 1.4 - 1.4x_1 - 1.4x_2 \\ y_3^1 = 3.4 + 3x_1 + 3x_2 \\ y_4^1 = -4.4 + 4x_1 + 4x_2 \\ y_5^1 = 0.2 - 0.2x_1 - 0.2x_2 \\ y_6^1 = 1.2 - x_1 - x_2 \\ y_7^1 = -4.2 + 6x_1 + 6x_2 \\ y_8^1 = -5.2 + 9x_1 + 9x_2 \\ y_1^2 = 2.4 - 2x_1 - 2x_2 \\ y_2^2 = 3.4 - 3.2x_1 - 3.2x_2 \\ y_3^2 = -5.4 + 8x_1 + 8x_2 \\ y_4^2 = -6.4 + 9.4x_1 + 9.4x_2 \\ y_5^2 = 3.2 - 2.2x_1 - 2.2x_2 \\ y_6^2 = 4.7 - 3x_1 - 3x_2 \\ y_7^2 = -6.2 + 9.2x_1 + 9.5x_2 \\ y_8^2 = -7.2 + 11x_1 + 11x_2 \\ y_j^i \geq 0 \quad i = 1, 2; j = 1, 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

La solution est  $x_1 = 0.7, x_2 = 0$

### Exemple 35 : [8]

Soit le programme linéaire flou stochastique suivant :

$$(P_{FS}) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \longrightarrow \min \\ sc \\ \tilde{A}(\omega) X < \tilde{b}(\omega) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \omega \in \Omega \end{array} \right.$$

où  $\tilde{A}(\omega) = \tilde{a}_{ij}(\omega)$  ;  $i = 1, 2; j = 1, 2$  ;  $\tilde{b}(\omega) = \tilde{b}_i(\omega)$  ;  $i = 1, 2$

$Im\mu_{\tilde{a}_{ij}(\omega)} = \{0.3, 0.9\}$

et  $P_\omega$  la distribution de probabilité suivante :

$$P_\omega(\omega_1) = p_1 = 0.25 \quad | \quad P_\omega(\omega_2) = p_2 = 0.75$$

$$\tilde{a}_{11} : (1.0/0.3), (1.1/0.3), (2.0/0.9), (2.1/0.9) \quad | \quad \tilde{a}_{21} : (0.5/0.3), (0.6/0.3), (1.0/0.2), (2.0/0.2)$$

$$\tilde{a}_{12} : (0.5/0.3), (0.6/0.3), (3.0/0.9), (3.2/0.9) \quad | \quad \tilde{a}_{22} : (0.25/0.4), (0.3/0.4), (1.0/0.2), (2/0.2)$$

$$\begin{array}{l}
\tilde{b}_1^{0.3}(\omega) \begin{pmatrix} 2 \\ 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.75 \end{pmatrix} \quad | \quad \tilde{b}_2^{0.3}(\omega) \begin{pmatrix} 2 \\ 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.75 \end{pmatrix} \\
\bar{b}_1^{0.3}(\omega) \begin{pmatrix} 3 \\ 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0.75 \end{pmatrix} \quad | \quad \bar{b}_2^{0.3}(\omega) \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0.75 \end{pmatrix} \\
\tilde{b}_1^{0.9}(\omega) \begin{pmatrix} 3.5 \\ 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0.75 \end{pmatrix} \quad | \quad \tilde{b}_2^{0.9}(\omega) \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.75 \end{pmatrix} \\
\bar{b}_1^{0.9}(\omega) \begin{pmatrix} 16 \\ 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 0.75 \end{pmatrix} \quad | \quad \bar{b}_2^{0.9}(\omega) \begin{pmatrix} 10 \\ 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 0.75 \end{pmatrix}
\end{array}$$

En appliquant la méthode développée

$$(P_S^1) \left\{ \begin{array}{l}
x_1 + 2x_2 \longrightarrow \min \\
sc \\
[1.0, 1.1]x_1 + [0.5, 0.6]x_2 < \left[ \tilde{b}_1^{0.3}(\omega), \bar{b}_1^{0.3}(\omega) \right] \\
[0.5, 0.6]x_1 + [0.25, 0.3]x_2 < \left[ \tilde{b}_2^{0.3}(\omega), \bar{b}_2^{0.3}(\omega) \right] \\
[2.0, 2.1]x_1 + [3.0, 3.2]x_2 < \left[ \tilde{b}_1^{0.9}(\omega), \bar{b}_1^{0.9}(\omega) \right] \\
[1.0, 2.0]x_1 + [1.0, 2.0]x_2 < \left[ \tilde{b}_2^{0.9}(\omega), \bar{b}_2^{0.9}(\omega) \right] \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array} \right.$$

Qu'on peut écrire sous la forme :

$$(P_S^1)' \left\{ \begin{array}{l}
x_1 + 2x_2 \longrightarrow \min \\
sc \\
x_1 + 0.5x_2 \geq \tilde{b}_1^{0.3}(\omega) \\
1.1x_1 + 0.6x_2 \leq \bar{b}_1^{0.3}(\omega) \\
0.5x_1 + 0.25x_2 \geq \tilde{b}_2^{0.3}(\omega) \\
0.6x_1 + 0.3x_2 \leq \bar{b}_2^{0.3}(\omega) \\
2x_1 + 3x_2 \geq \tilde{b}_1^{0.9}(\omega) \\
2.1x_1 + 3.2x_2 \leq \bar{b}_1^{0.9}(\omega) \\
x_1 + x_2 \geq \tilde{b}_2^{0.9}(\omega) \\
2x_1 + 2x_2 \leq \bar{b}_2^{0.9}(\omega) \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array} \right.$$

Pour la résolution de  $(P_S^1)'$ , on applique la méthode chance constrained et on obtient le programme déterministe suivant :

$$(P^1)' \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \longrightarrow \min \\ sc \\ P_\omega \left( x_1 + 0.5x_2 \geq \tilde{b}_1^{0.3}(\omega) \right) \geq 0.75 \\ P_\omega \left( 1.1x_1 + 0.6x_2 \leq \bar{b}_1^{0.3}(\omega) \right) \geq 0.75 \\ P_\omega \left( 0.5x_1 + 0.25x_2 \geq \tilde{b}_2^{0.3}(\omega) \right) \geq 0.75 \\ P_\omega \left( 0.6x_1 + 0.3x_2 \leq \bar{b}_2^{0.3}(\omega) \right) \geq 0.75 \\ P_\omega \left( 2x_1 + 3x_2 \geq \tilde{b}_1^{0.9}(\omega) \right) \geq 0.75 \\ P_\omega \left( 2.1x_1 + 3.2x_2 \leq \bar{b}_1^{0.9}(\omega) \right) \geq 0.75 \\ P_\omega \left( x_1 + x_2 \geq \tilde{b}_2^{0.9}(\omega) \right) \geq 0.75 \\ P_\omega \left( 2x_1 + 2x_2 \leq \bar{b}_2^{0.9}(\omega) \right) \geq 0.75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \omega \in \Omega \end{array} \right.$$

qui s'écrit aussi sous la forme :

$$(P_S^1)' \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \longrightarrow \min \\ sc \\ x_1 + 0.5x_2 \geq 2 \\ 1.1x_1 + 0.6x_2 \leq 3 \\ 0.5x_1 + 0.25x_2 \geq 1 \\ 0.6x_1 + 0.3x_2 \leq 1.5 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 3.5 \\ 2.1x_1 + 3.2x_2 \leq 16 \\ x_1 + x_2 \geq 1.5 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Car

$$1/. P_\omega \left( \alpha x_1 + \beta x_2 \geq \tilde{b}_i^\alpha(\omega) \right) = F_{\tilde{b}_i^\alpha}(\alpha x_1 + \beta x_2) \geq 0.75$$

(où  $F_{\tilde{b}_i^\alpha(\omega)}$  est la fonction distribution de  $\tilde{b}_i^\alpha(\omega)$ )

ce qui implique  $\alpha x_1 + \beta x_2 \geq F_{\tilde{b}_i^\alpha}^{-1}(0.75)$  car  $F_{\tilde{b}_i^\alpha}$  est croissante  $\implies F_{\tilde{b}_i^\alpha}^{-1}$  est croissante

$$2/. P_\omega \left( \gamma x_1 + \delta x_2 \leq \bar{b}_i^\alpha(\omega) \right) = 1 - P_\omega \left( \gamma x_1 + \delta x_2 > \bar{b}_i^\alpha(\omega) \right) = F_{\bar{b}_i^\alpha}(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq 1 - 0.75 = 0.25$$

$\gamma x_1 + \delta x_2 \leq F_{\bar{b}_i^\alpha}^{-1}(0.25)$  car  $F_{\bar{b}_i^\alpha}$  est croissante  $\implies F_{\bar{b}_i^\alpha}^{-1}$  est croissante

La solution de  $(P^1)$  donc de  $(P_{FS}^1)$  est  $(x_1 = 2, x_2 = 0)$ .

### 4.3 Chance-constrained programming en programmation linéaire floue stochastique

Considérons le programme linéaire flou stochastique suivant [8][12][13] :

$$(P_{FS}) \left\{ \begin{array}{l} CX \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) x_j \leq \tilde{b}_i(\omega), \quad i = 1 \dots m \\ X \in B = \{X \in \mathbb{R}^n / X \geq 0\} \end{array} \right\}$$

où  $CX$  est un objectif déterministe avec  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  des nombres réels

et  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\tilde{a}_{ij}$  et  $\tilde{b}_i$  sont des variables aléatoires floues

$\sum_{j=1}^n, \leq$  représentent la généralisation au moyen du principe d'extension de l'addition, la multiplication et l'inégalité de nombres réels aux intervalles flous

$(P_{FS})$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(P_{FS})' \left\{ \begin{array}{l} CX \rightarrow \max \\ \tilde{A}(\omega) \odot X \leq \tilde{b}(\omega) \\ X \in B = \{X \in \mathbb{R}^n / X \geq 0\} \end{array} \right\}$$

où  $\tilde{a}_{ij}$  et  $\tilde{b}_i$  sont les composantes de la matrice  $\tilde{A}(\omega) (m \times n)$  et du vecteur  $\tilde{b}(\omega) (m \times 1)$  respectivement.

On a par définition,  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\tilde{a}_{ij}(\omega)$  et  $\tilde{b}_i(\omega)$  sont des intervalles flous.

Soient  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\pi_{\tilde{a}_{ij}(\omega)}$  et  $\pi_{\tilde{b}_i(\omega)}$  les distributions de possibilité de  $\tilde{a}_{ij}(\omega)$  et  $\tilde{b}_i(\omega)$  respectivement. (Par définition  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\pi_{\tilde{a}_{ij}(\omega)} = \mu_{\tilde{a}_{ij}(\omega)}$  et  $\pi_{\tilde{b}_i(\omega)} = \mu_{\tilde{b}_i(\omega)}$  [23])

Les contraintes du problème flou stochastique  $(P_{FS})$  peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$(P_{FS}) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \leq \tilde{b}_i(\omega), \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

$\sum_{j=1}^n$  et  $\odot$  représentent respectivement, pour  $\omega \in \Omega$  donné, l'addition des intervalles flous de type  $L - R$  et leur multiplication par un nombre réel (voir chapitre 1)

Si  $\tilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \bar{a}_{ij}(\omega), \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$  et  $\tilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \bar{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$  sont des variables aléatoires floues de type  $L - R$ , alors

$$\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j = \left( \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}(\omega) x_j, \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij}(\omega) x_j, \sum_{j=1}^n \delta_{ij}^a x_j, \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}^a x_j \right)$$

Pour simplifier, nous considérons la matrice  $A(m \times n)$  et le vecteur  $b(m \times 1)$  dont les composantes sont respectivement  $a_{ij}$  et  $b_i$

Chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients prend la forme suivante :

$$P(\rho(\tilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i) \geq p_i$$

où  $\rho(\tilde{a}, \tilde{b})$  évalue le degré de confiance pour lequel le coefficient restreint par  $\tilde{a}$  est plus grand que le coefficient restreint par  $\tilde{b}$ .

## 4.4 Différentes versions de Chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients

Nous avons trois versions, selon le choix de  $\rho$  qui peut représenter [8][12][13] :

1. les degrés de préférence possibiliste ou nécessaire (combinaison de probabilité et possibilité ou combinaison de probabilité et nécessité)
2. les indices de dominance stochastique des intervalles aléatoires dus à Chanas et col. [r] (combinaison de probabilité et indices de comparaison d'intervalles aléatoires)
3. les indices scalaires de comparaison d'intervalles flous (combinaison de probabilité et indices scalaires de comparaison de quantités floues).

Dans ce chapitre on a choisi de mettre en avant la première version en combinant probabilité et possibilité, ou probabilité et nécessité

### 4.4.1 Combinaison de probabilité et possibilité

$$(P_p) \left\{ \begin{array}{l} CX \rightarrow \max \\ P \left\{ \omega : \text{pos} \left( \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \leq \tilde{b}_i(\omega) \right) \geq \beta_i \right\} \geq p_i, i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

où  $P$  et  $\text{pos}$  représentent respectivement probabilité et possibilité. Une solution admissible  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \geq 0$  de  $(P_p)$  est appelée *pro - pos* admissible. L'ensemble des solutions *pro - pos* admissibles de  $(P_p)$  est noté  $X_p^i(p_i, \beta_i)$ .

**Proposition 3 :**

$X_p^i(p_i, \beta_i)$  peut s'écrire comme suit :

1. Si  $\tilde{a}_{ij}(\omega)$  et  $\tilde{b}_i(\omega)$  sont des variables aléatoires floues, alors :

$$X_p^i(p_i, \beta_i) = \left\{ x \geq 0 / P \left( \omega : \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}^{\beta_i}(\omega) \odot x_j \leq \bar{b}_i^{\beta_i}(\omega) \right) \geq p_i \right\}, i = 1, \dots, m$$

où  $\underline{a}_{ij}^{\beta_i}(\omega)$  est la borne inférieure de  $\tilde{a}_{ij}^{\beta_i}(\omega)$  et  $\bar{b}_i^{\beta_i}(\omega)$  est la borne supérieure de  $\tilde{b}_i^{\beta_i}(\omega)$ .

2. Si  $\tilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \bar{a}_{ij}(\omega), \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$  et  $\tilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \bar{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$  sont des variables aléatoires floues de type  $L - R$ , alors :

$$X_p^i(p_i, \beta_i) = \left\{ x \geq 0 / P \left( \omega : \sum_{j=1}^n (\underline{a}_{ij}(\omega) - L^{-1}(\beta_i) \delta_{ij}^a) x_j \leq \bar{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i) \gamma_i^b \right) \geq p_i \right\}$$

et  $i = 1, \dots, m$

La preuve est triviale, Il suffit d'utiliser les propriétés de possibilité données dans [24] et la proposition 12 du chapitre 3 dans [12]

**Remarque 12 :**

Si les coefficients  $\tilde{a}_{ij}(\omega)$  et  $\tilde{b}_i(\omega)$  des contraintes sont respectivement remplacés par :

— des variables aléatoires réelles  $a_{ij}(\omega)$  et  $b_i(\omega)$ , alors

$$P \left\{ \omega : \text{pos} \left( \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \leq \tilde{b}_i(\omega) \right) \geq \beta_i \right\} \geq p_i$$

$$\text{se réduit à } P \left\{ \omega : \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j \leq b_i(\omega) \right\} \geq p_i .$$

— des intervalles flous  $\tilde{a}_{ij}(\omega)$  et  $\tilde{b}_i(\omega)$ , alors

$$P \left\{ \omega : \text{pos} \left( \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \leq \tilde{b}_i(\omega) \right) \geq \beta_i \right\} \geq p_i$$

$$\text{se réduit à } \text{pos} \left( \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \odot x_j \leq \tilde{b}_i \right) \geq \beta_i .$$

**4.4.2 Combinaison de probabilité et nécessité**

$$(P_p) \left\{ \begin{array}{l} CX \longrightarrow \max \\ P \left\{ \omega : \text{nec} \left( \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \leq \tilde{b}_i(\omega) \right) \geq \beta_i \right\} \geq p_i, i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

où  $P$  et  $\text{nec}$  représentent respectivement probabilité et nécessité. Une solution admissible  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \geq 0$  de  $(P_p)$  est appelée *pro – nec* admissible. L'ensemble des solutions *pro – nec* admissibles de  $(P_p)$  est noté  $X_p^i(p_i, \beta_i)$ .

**Proposition 4 :**

$X_p^i(p_i, \beta_i)$  peut s'écrire comme suit :

1. Si  $\tilde{a}_{ij}(\omega)$  et  $\tilde{b}_i(\omega)$  sont des variables aléatoires floues, alors :

$$X_n^i(p_i, \beta_i) = \left\{ x \geq 0 : P \left( \omega : \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij}^{1-\beta_i}(\omega) \odot x_j \leq \underline{b}_i^{1-\beta_i}(\omega) \right) \geq p_i \right\}, i = 1, \dots, m$$

où  $\bar{a}_{ij}^{1-\beta_i}(\omega)$  est la borne supérieure de  $\tilde{a}_{ij}^{1-\beta_i}(\omega)$  et  $\underline{b}_i^{1-\beta_i}(\omega)$  est la borne inférieure de  $\tilde{b}_i^{1-\beta_i}(\omega)$ .

2. Si  $\tilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \bar{a}_{ij}(\omega), \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$  et  $\tilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \bar{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$  sont des variables aléatoires floues de type  $L - R$ , alors :

$$X_n^i(p_i, \beta_i) = \left\{ x \geq 0 : P \left( \omega : \sum_{j=1}^n (\bar{a}_{ij}(\omega) + R^{-1}(1 - \beta_i) \gamma_{ij}^a) x_j \leq \underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(\beta_i) \delta_i^b \right) \geq p_i \right\}, \text{et}$$

$i = 1, \dots, m$

La preuve est triviale, Il suffit d'utiliser les propriétés de nécessité données dans [24] et la proposition 12 du chapitre 3 dans [12].

**Remarque 13 :**

Si les coefficients  $\tilde{a}_{ij}(\omega)$  et  $\tilde{b}_i(\omega)$  des contraintes sont respectivement remplacés par :

— des variables aléatoires réelles  $a_{ij}(\omega)$  et  $b_i(\omega)$ , alors

$$P \left\{ \omega : nec \left( \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \leq \tilde{b}_i(\omega) \right) \geq \beta_i \right\} \geq p_i$$

$$\text{se réduit à } P \left\{ \omega : \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j \leq b_i(\omega) \right\} \geq p_i .$$

— des intervalles flous  $\tilde{a}_{ij}$  et  $\tilde{b}_i$ , alors

$$P \left\{ \omega : nec \left( \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \leq \tilde{b}_i(\omega) \right) \geq \beta_i \right\} \geq p_i$$

$$\text{se réduit à } nec \left( \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \odot x_j \leq \tilde{b}_i \right) \geq \beta_i$$

### 4.4.3 Combinaison de chance-constrained programming et comparaison d'intervalles aléatoires

$$(P_{\mu_k}) \left\{ \begin{array}{l} CX \longrightarrow max \\ P \left\{ \omega : \left( \mu_k \tilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \right) \geq \beta_i \right\} \geq p_i, i = 1, \dots, m; k = 1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

Une solution admissible  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \geq 0_{\mathbb{R}^n}$  du problème  $(P_{\mu_k})$  est appelée *pro* –  $\mu_k$  admissible.

On note  $X_{\mu_k}^i(p_i, \beta_i)$ , l'ensemble des solutions *pro* –  $\mu_k$  admissibles du problème  $(P_{\mu_k})$ .

En tenant compte de la définition de  $X_{\mu_k}^i(p_i, \beta_i)$ , les ensembles de solutions admissibles  $X_{\mu_k}^i(p_i, \beta_i)$ ,  $k = 2D, 3D$  peuvent s'écrire comme suit :

**Proposition 5 :**

Soient  $\tilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \bar{a}_{ij}(\omega), \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$  et  $\tilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \bar{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$  des variables aléatoires floues de type  $L - R$ . Nous avons alors :

$$1. X_{\mu_{2D}}^i(p_i, \beta_i) = \left\{ x \geq 0 : P \left( \omega : \sum_{j=1}^n (\underline{a}_{ij}(\omega) - L^{-1}(1 - \beta_i) \delta_{ij}^a) x_j \leq \underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(1 - \beta_i) \delta_i^b \right) \geq p_i \right\}.$$

$$2. X_{\mu_{3D}}^i(p_i, \beta_i) = \left\{ x \geq 0 : P \left( \omega : \sum_{j=1}^n (\bar{a}_{ij}(\omega) + R^{-1}(\beta_i) \gamma_{ij}^a) x_j \leq \bar{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i) \gamma_i^b \right) \geq p_i \right\}$$

Preuve :

Nous avons par définition :

$$X_{\mu_{2D}}^i(p_i, \beta_i) = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 / P(\omega : \mu_{2D}(\tilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i) \geq p_i \right\}$$

$$X_{\mu_{3D}}^i(p_i, \beta_i) = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 / P(\omega : \mu_{3D}(\tilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i) \geq p_i \right\}$$

Pour  $\omega \in \Omega$  donné  $\tilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \bar{a}_{ij}(\omega), \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$  et  $\tilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \bar{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$  sont des intervalles flous de type  $L - R$ .

Il en est de même pour

$\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j = (\sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}(\omega) x_j, \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij}(\omega) x_j, \sum_{j=1}^n \delta_{ij}^a x_j, \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}^a x_j)$ . Alors, nous avons :

$$\mu_{2D}(\tilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n (\underline{a}_{ij}(\omega) - L^{-1}(1 - \beta_i) \delta_{ij}^a) x_j \leq \underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(1 - \beta_i) \delta_i^b$$

$$\mu_{3D}(\tilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n (\bar{a}_{ij}(\omega) + R^{-1}(\beta_i) \gamma_{ij}^a) x_j \leq \bar{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i) \gamma_i^b$$

D'où :

$$\begin{aligned} & P \left\{ \omega : \mu_{2D}(\tilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i \right\} \\ &= P \left\{ \omega : \sum_{j=1}^n (\underline{a}_{ij}(\omega) - L^{-1}(1 - \beta_i) \delta_{ij}^a) x_j \leq \underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(1 - \beta_i) \delta_i^b \right\} \\ & P \left\{ \omega : \mu_{3D}(\tilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i \right\} \\ &= P \left\{ \omega : \sum_{j=1}^n (\bar{a}_{ij}(\omega) + R^{-1}(\beta_i) \gamma_{ij}^a) x_j \leq \bar{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i) \gamma_i^b \right\} \end{aligned}$$

#### Remarque 14 :

Si les coefficients  $\tilde{a}_{ij}(\omega)$  et  $\tilde{b}_i(\omega)$  des contraintes sont respectivement remplacés par :

— des variables aléatoires réelles  $a_{ij}(\omega)$  et  $b_i(\omega)$ , alors

$$P \left\{ \omega : \mu_k(\tilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i \right\} \geq p_i \text{ se réduit à } P \left\{ \omega : \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j \leq b_i \right\} \geq p_i.$$

— des intervalles flous  $\tilde{a}_{ij}$  et  $\tilde{b}_i$ , alors

$$P \left\{ \omega : \mu_k(\tilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i \right\} \geq p_i \text{ se réduit à } P \left\{ \mu_k(\tilde{b}_i, \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \odot x_j) \geq \beta_i \right\} \geq p_i$$

## 4.5 Convexité des ensembles de solutions admissibles

Sous certaines conditions, les ensembles de solutions admissibles peuvent être convexes pour toutes distributions de probabilité des variables aléatoires floues comme suit [12][13] :

#### Théorème 7 :

on a :

Si  $p_i = 0$  ou  $p_i = 1$  alors :

- $X_F^i(p_i)$  est convexe.
- $X_p^i(p_i, \beta_i)$ ,  $X_n^i(p_i, \beta_i)$  sont convexes  $\forall \beta_i \in (0, 1]$ .
- $X_{\mu_{2D}}^i(p_i, \beta_i)$  et  $X_{\mu_{3D}}^i(p_i, \beta_i)$  sont convexes.

**Preuve**

Il suffit d'appliquer le théorème 1.

En tenant compte des conditions de convexité des ensembles de solutions admissibles résultant de l'application de chance-constrained programming en programmation [21] linéaire stochastique et en nous basant sur les propositions 3,4 et 5, nous distinguons le cas où  $A$  est déterministe ou flou et les autres où  $A$  est stochastique ou flou stochastique comme suit :

**4.5.1 Cas où  $A$  est déterministe ou flou**

Nous considérons le cas le plus général :  $A$  est flou et  $b$  est flou stochastique dont les composantes sont des variables aléatoires floues en général ou des variables aléatoires floues particulières, de type  $L - R$ .

En nous basant sur les propositions 3,4 et 5, les expressions des ensembles de solutions admissibles résultant de l'application de "chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients" et le théorème 2, nous établissons le résultat suivant :

**Théorème 8 :**

Soient  $(\Omega, F, P)$  un espace de probabilité,  $\tilde{a}_{ij}$  et  $\tilde{b}_i(\omega)$  les composantes de la matrice  $\tilde{A}(m \times n)$  et du vecteur  $b(\omega)(m \times 1)$  respectivement.

1. Si  $\tilde{a}_{ij}$  sont des intervalles flous et  $\tilde{b}_i(\omega)$  sont des variables aléatoires floues.

Alors pour toute distribution de probabilité de  $\tilde{b}_i(\omega)$ , on a :

$-\forall \beta_i \in (0, 1]$  et  $\forall p_i \in [0, 1]$ ,  $X_p^i(p_i, \beta_i)$  et  $X_n^i(p_i, \beta_i)$  sont convexes.

2. Si  $\tilde{a}_{ij}$  sont des intervalles flous de type  $L - R$  et  $\tilde{b}_i(\omega)$  sont des variables aléatoires floues de type  $L - R$ .

Alors pour toute distribution de probabilité de  $\tilde{b}_i(\omega)$  on a :

$-\forall \beta_i \in (0, 1]; \forall p_i \in [0, 1]; X_p^i(p_i, \beta_i)$  et  $X_n^i(p_i, \beta_i)$  sont convexes

$-X_{\mu_{2D}}^i(p_i, \beta_i)$  et  $X_{\mu_{3D}}^i(p_i, \beta_i)$  sont convexes  $\forall \beta_i \geq \frac{1}{2}$ .

Preuve :[12]

**4.5.2 Cas où  $A$  est stochastique ou flou stochastique**

Nous considérons le cas le plus général :  $A$  et  $b$  sont flous stochastiques dont les composantes sont des variables aléatoires floues, en général, ou particulières, de type  $L - R$ .

En nous basant sur les propositions 3,4 et 5, les expressions des ensembles de solutions admissibles résultant de l'application de "chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients" et les théorème 3 et 4, nous distinguons le cas général (au sens de Shapiro) de variables aléatoires floues normales (respectivement le cas particulier, de type  $L - R$ ) et le cas général de variables aléatoires floues discrètes (respectivement le cas particulier, de type L-R) et nous établissons les résultats suivants :

### 4.5.2.1 Les composantes de $A$ et $b$ sont des variables aléatoires floues

#### 1. Cas des variables aléatoires floues normales au sens de Shapiro

##### Théorème 9 :

Soient  $(\Omega, F, P)$  un espace de probabilité,  $\tilde{a}_{ij}(\omega)$  et  $\tilde{b}_i(\omega)$  les composantes de la matrice  $\tilde{A}(m \times n)$  et du vecteur  $\tilde{b}(m \times 1)$  respectivement.

Si  $\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, \dots, \tilde{a}_{in}; \tilde{b}_i$  sont  $(n+1)$  variables aléatoires floues normales d'espérances mathématiques respectives  $\tilde{\mu}_{i1}, \tilde{\mu}_{i2}, \dots, \tilde{\mu}_{in}; \tilde{\lambda}_i$  qui sont des intervalles flous et de variances respectives  $\sigma_{i1}^2, \sigma_{i2}^2, \dots, \sigma_{in}^2; \nu_i^2$ . Alors  $\forall \beta_i \in (0, 1]$  et pour  $p_i > \frac{1}{2}$ ,  $X_p^i(p_i, \beta_i)$  et  $X_n^i(p_i, \beta_i)$  sont convexes.

Preuve :[12]

#### 2. Cas des variables aléatoires floues discrètes

##### Théorème 10 :

Soit  $(\Omega, F, P)$  un espace de probabilité avec  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$ , muni d'une distribution de probabilité discrète finie suivante :  $P(\omega_k) = q_k, k = 1, 2, \dots, r$  et  $\sum_{k=1}^r q_k = 1$ .

Alors pour  $p_i > 1 - \min_{k \in \{1, 2, \dots, r\}} q_k$  on a :

- $X_p^i(p_i)$  est convexe.
- $X_p^i(p_i, \beta_i), X_n^i(p_i, \beta_i)$  sont convexes  $\forall \beta_i \in [0, 1]$ .

Preuve :[12]

### 4.5.2.2 Les composantes de $A$ et $b$ sont des variables aléatoires floues de type $L - R$

#### 1. Cas des variables aléatoires floues normales de type $L - R$ :

##### Corollaire 1 :

Soient  $(\Omega, F, P)$  un espace de probabilité et  $\tilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}, \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$

et  $\tilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \bar{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$  des variables aléatoires floues normales de type  $L - R$  telles que :

$\underline{a}_{i1}, \underline{a}_{i2}, \dots, \underline{a}_{in}; \underline{b}_i$  sont des variables aléatoires réelles normales d'espérances mathématiques respectives  $\underline{\mu}_{i1}, \underline{\mu}_{i2}, \dots, \underline{\mu}_{in}; \underline{\lambda}_i$  et de variances respectives  $\sigma_{i1}^2, \sigma_{i2}^2, \dots, \sigma_{in}^2; \delta_i^2$ .

$\bar{a}_{i1}, \bar{a}_{i2}, \dots, \bar{a}_{in}; \bar{b}_i$  sont des variables aléatoires réelles normales d'espérances mathématiques respectives  $\bar{\mu}_{i1}, \bar{\mu}_{i2}, \dots, \bar{\mu}_{in}; \bar{\lambda}_i$  et de variances respectives  $\sigma_{i1}^2, \sigma_{i2}^2, \dots, \sigma_{in}^2; \delta_i^2$

Alors pour  $p_i \geq \frac{1}{2}$ , on a :

- $X_p^i(p_i, \beta_i)$  et  $X_n^i(p_i, \beta_i)$  sont convexes  $\forall \beta_i \in (0, 1]$
- $X_{\mu_{2D}}^i(p_i, \beta_i)$  et  $X_{\mu_{3D}}^i(p_i, \beta_i)$  sont convexes  $\forall \beta_i \geq \frac{1}{2}$ .

Preuve :[12]

## 2. Cas des variables aléatoires floues discrètes de type $L - R$

**Corollaire 2 :**

Soit  $(\Omega, F, P)$  un espace de probabilité avec  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$ , muni d'une distribution de probabilité discrète finie suivante :  $P(\omega_k) = q_k, k = 1, 2, \dots, r$  et  $\sum_{k=1}^r q_k = 1$ .

et soient  $\tilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}, \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$  et  $\tilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \bar{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$  des variables aléatoires floues discrètes de type  $L - R$

Alors pour  $p_i > 1 - \min_{k \in (1, 2, \dots, r)} q_k$  on a :

- $X_p^i(p_i, \beta_i)$  et  $X_n^i(p_i, \beta_i)$  sont convexes  $\forall \beta_i \in (0, 1]$
- $X_{\mu_{2D}}^i(p_i, \beta_i)$  et  $X_{\mu_{3D}}^i(p_i, \beta_i)$  sont convexes  $\forall \beta_i \geq \frac{1}{2}$ .

Preuve :[12]

**Exemple 36 :**

Soit le problème linéaire flou stochastique  $(P_{FS})$  suivant :

$$(P_{FS}) \begin{cases} x_1 + 3x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ \tilde{3}x_1 + \tilde{1}x_2 \leq \tilde{b}_1(\omega) \\ \tilde{2}x_1 + \tilde{4}x_2 \leq \tilde{b}_2(\omega) \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Où  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ , muni de la distribution de probabilité suivante :  $P(\omega_1) = 0.4$  et  $P(\omega_2) = 0.6$

On a

$$P(\bar{b}_1(\omega_1) = \tilde{3}) = P(\bar{b}_2(\omega_1) = \tilde{2}) = 0.4$$

$$P(\bar{b}_1(\omega_2) = \tilde{1}) = P(\bar{b}_2(\omega_2) = \tilde{4}) = 0.6$$

$\tilde{m}, m = 1, 2, 3, 4$  sont des intervalles flous dont leur fonctions d'appartenance  $\mu_{\tilde{m}}$  sont définies comme suit :

$$\mu_{\tilde{m}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < m - 1 \\ x - m + 1 & \text{si } m - 1 \leq x < m \\ 1 & \text{si } m \leq x < m + 1 \\ -x + m + 2 & \text{si } m + 1 \leq x \leq m + 2 \\ 0 & \text{si } x > m + 2 \end{cases}$$

Par analogie, on obtient :

$$\mu_{\bar{1}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ -x + 3 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad \mu_{\bar{2}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ -x + 4 & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$\mu_{\bar{3}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ -x + 5 & \text{si } 4 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{si } x > 5 \end{cases} \quad \mu_{\bar{4}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ -x + 6 & \text{si } 5 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

on obtient

$$\underline{\bar{1}}^{0.4} = 0.4; \quad \bar{\bar{1}}^{0.4} = 2.6; \quad \tilde{1}^{0.4} = [0.4, 2.6] \quad | \quad \underline{\bar{1}}^{0.6} = 0.6; \quad \bar{\bar{1}}^{0.6} = 2.4; \quad \tilde{1}^{0.6} = [0.6, 2.4]$$

$$\underline{\bar{2}}^{0.4} = 1.4; \quad \bar{\bar{2}}^{0.4} = 3.6; \quad \tilde{2}^{0.4} = [1.4, 3.6] \quad | \quad \underline{\bar{2}}^{0.6} = 1.6; \quad \bar{\bar{2}}^{0.6} = 3.4; \quad \tilde{2}^{0.6} = [1.6, 3.4]$$

$$\underline{\bar{3}}^{0.4} = 2.4; \quad \bar{\bar{3}}^{0.4} = 4.6; \quad \tilde{3}^{0.4} = [2.4, 4.6] \quad | \quad \underline{\bar{3}}^{0.6} = 2.6; \quad \bar{\bar{3}}^{0.6} = 4.4; \quad \tilde{3}^{0.6} = [2.6, 4.4]$$

$$\underline{\bar{4}}^{0.4} = 3.4; \quad \bar{\bar{4}}^{0.4} = 5.6; \quad \tilde{4}^{0.4} = [3.4, 5.6] \quad | \quad \underline{\bar{4}}^{0.6} = 3.6; \quad \bar{\bar{4}}^{0.6} = 5.4; \quad \tilde{4}^{0.6} = [3.6, 5.4]$$

— a/ En combinant probabilité et possibilité avec  $p_1 = p_2 = 0.6$ ;  $\beta_1 = \beta_2 = 0.6$ ; on a :

$$\bar{b}_1^{0.6} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{3}}^{0.6} \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\bar{1}}^{0.6} \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.4 \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} \quad | \quad \bar{b}_2^{0.6} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{2}}^{0.6} \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\bar{4}}^{0.6} \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.4 \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

$$P(\tilde{b}_1(\omega_1) = 4.4) = P(\tilde{b}_2(\omega_1) = 3.4) = 0.4$$

$$P(\tilde{b}_1(\omega_2) = 2.4) = P(\tilde{b}_2(\omega_2) = 5.4) = 0.6$$

Les contraintes deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} P \left\{ \omega / \text{pos} \left( \tilde{3}x_1 + \tilde{1}x_2 \leq \tilde{b}_1(\omega) \right) \geq 0.6 \right\} \geq 0.6 \\ P \left\{ \omega / \text{pos} \left( \tilde{2}x_1 + \tilde{4}x_2 \leq \tilde{b}_2(\omega) \right) \geq 0.6 \right\} \geq 0.6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P \left\{ \omega / \tilde{\bar{3}}^{0.6} x_1 + \tilde{\bar{1}}^{0.6} x_2 \leq \bar{b}_1^{0.6}(\omega) \right\} \geq 0.6 \\ P \left\{ \omega / \tilde{\bar{2}}^{0.6} x_1 + \tilde{\bar{4}}^{0.6} x_2 \leq \bar{b}_2^{0.6}(\omega) \right\} \geq 0.6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 - P \left\{ \omega / \tilde{\bar{3}}^{0.6} x_1 + \tilde{\bar{1}}^{0.6} x_2 > \bar{b}_1^{0.6}(\omega) \right\} \geq 0.6 \\ 1 - P \left\{ \omega / \tilde{\bar{2}}^{0.6} x_1 + \tilde{\bar{4}}^{0.6} x_2 > \bar{b}_2^{0.6}(\omega) \right\} \geq 0.6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P \left\{ \omega/\underline{\tilde{3}}^{0.6} x_1 + \underline{\tilde{1}}^{0.6} x_2 > \overline{b}_1^{0.6}(\omega) \right\} \leq 0.4 \\ P \left\{ \omega/\underline{\tilde{2}}^{0.6} x_1 + \underline{\tilde{4}}^{0.6} x_2 > \overline{b}_2^{0.6}(\omega) \right\} \leq 0.4 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_{\overline{b}_1^{0.6}(\omega)}^{-0.6} \left( \underline{\tilde{3}}^{0.6} x_1 + \underline{\tilde{1}}^{0.6} x_2 \right) \leq 0.4 \\ F_{\overline{b}_2^{0.6}(\omega)}^{-0.6} \left( \underline{\tilde{2}}^{0.6} x_1 + \underline{\tilde{4}}^{0.6} x_2 \right) \leq 0.4 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{\tilde{3}}^{0.6} x_1 + \underline{\tilde{1}}^{0.6} x_2 \leq F_{\overline{b}_1^{0.6}(\omega)}^{-1}(0.4) \\ \underline{\tilde{2}}^{0.6} x_1 + \underline{\tilde{4}}^{0.6} x_2 \leq F_{\overline{b}_2^{0.6}(\omega)}^{-1}(0.4) \end{array} \right\}$$

$$F_{\overline{b}_1^{0.6}(\omega)}^{-1}(0.4) = \left\{ x / F_{\overline{b}_1^{0.6}(\omega)}^{-0.6}(x) = 0.4 \right\} = 4.4 \quad | \quad F_{\overline{b}_2^{0.6}(\omega)}^{-1}(0.4) = \left\{ x / F_{\overline{b}_2^{0.6}(\omega)}^{-0.6}(x) = 0.4 \right\} = 3.4$$

Et on a calculé :

$$\underline{\tilde{3}}^{0.6} = 2.6$$

$$\underline{\tilde{1}}^{0.6} = 0.6$$

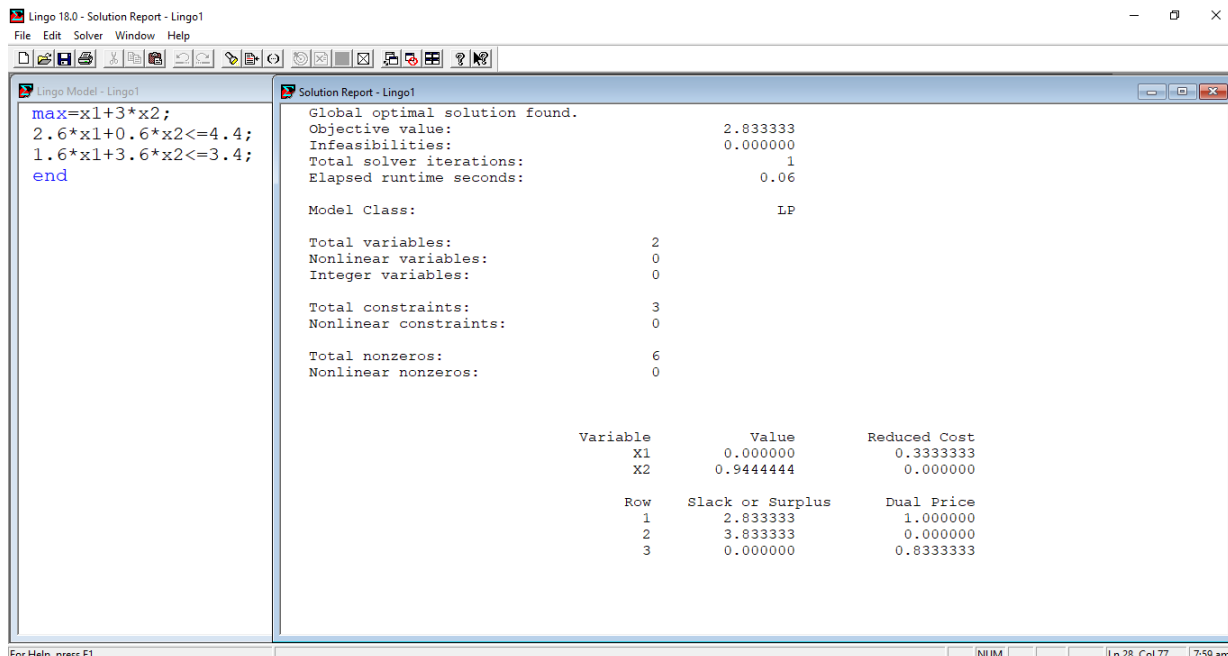
$$\underline{\tilde{2}}^{0.6} = 1.6$$

$$\underline{\tilde{4}}^{0.6} = 3.6$$

On obtient le programme linéaire déterministe suivant :

$$(P_d) \begin{cases} x_1 + 3x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ 2.6x_1 + 0.6x_2 \leq 4.4 \\ 1.6x_1 + 3.6x_2 \leq 3.4 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

### Application de l'exemple sur Lingo :



La solution optimale est  $X^* = (0, 0.94)$

et la valeur optimale est  $Z(X^*) = 2.83$

— b/ En combinant probabilité et nécessité avec  $p_1 = p_2 = 0.6$ ;  $\beta_1 = \beta_2 = 0.6$ ; on a :

$$\tilde{b}_1^{0.4} = \begin{pmatrix} \tilde{3}^{0.4} \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{1}^{0.4} \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} \quad | \quad \tilde{b}_2^{0.4} = \begin{pmatrix} \tilde{2}^{0.4} \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{4}^{0.4} \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

$$P(\underline{b}_1^{0.4}(\omega_1) = 2.4) = P(\underline{b}_2^{0.4}(\omega_1) = 1.4) = 0.4$$

$$P(\underline{b}_1^{0.4}(\omega_1) = 0.4) = P(\underline{b}_2^{0.4}(\omega_1) = 3.4) = 0.6$$

Les contraintes deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} P \left\{ \omega / nec \left( \tilde{3}x_1 + \tilde{1}x_2 \leq \tilde{b}_1(\omega) \right) \geq 0.6 \right\} \geq 0.6 \\ P \left\{ \omega / nec \left( \tilde{2}x_1 + \tilde{4}x_2 \leq \tilde{b}_2(\omega) \right) \geq 0.6 \right\} \geq 0.6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P \left\{ \omega / \bar{3}^{1-0.6} x_1 + \bar{1}^{1-0.6} x_2 \leq \bar{b}_1^{1-0.6}(\omega) \right\} \geq 0.6 \\ P \left\{ \omega / \bar{2}^{1-0.6} x_1 + \bar{4}^{1-0.6} x_2 \leq \bar{b}_2^{1-0.6}(\omega) \right\} \geq 0.6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 - P \left\{ \omega / \bar{3}^{0.4} x_1 + \bar{1}^{0.4} x_2 > \bar{b}_1^{0.4}(\omega) \right\} \geq 0.6 \\ 1 - P \left\{ \omega / \bar{2}^{0.4} x_1 + \bar{4}^{0.4} x_2 > \bar{b}_2^{0.4}(\omega) \right\} \geq 0.6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P \left\{ \omega / \bar{3}^{0.4} x_1 + \bar{1}^{0.4} x_2 > \bar{b}_1^{0.4}(\omega) \right\} \leq 0.4 \\ P \left\{ \omega / \bar{2}^{0.4} x_1 + \bar{4}^{0.4} x_2 > \bar{b}_2^{0.4}(\omega) \right\} \leq 0.4 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_{\bar{b}_1^{0.4}(\omega)}^{-0.4} \left( \bar{3}^{0.4} x_1 + \bar{1}^{0.4} x_2 \right) \leq 0.4 \\ F_{\bar{b}_2^{0.4}(\omega)}^{-0.4} \left( \bar{2}^{0.4} x_1 + \bar{4}^{0.4} x_2 \right) \leq 0.4 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{3}^{0.4} x_1 + \bar{1}^{0.4} x_2 \leq F_{\bar{b}_1^{0.4}(\omega)}^{-1}(0.4) \\ \bar{2}^{0.4} x_1 + \bar{4}^{0.4} x_2 \leq F_{\bar{b}_2^{0.4}(\omega)}^{-1}(0.4) \end{array} \right\}$$

$$F_{\bar{b}_1^{0.4}(\omega)}^{-1}(0.4) = \left\{ x / F_{\bar{b}_1^{0.4}(\omega)}(x) = 0.4 \right\} = 2.4 \quad | \quad F_{\bar{b}_2^{0.4}(\omega)}^{-1}(0.4) = \left\{ x / F_{\bar{b}_2^{0.4}(\omega)}(x) = 0.4 \right\} = 1.4$$

Et on a calculé :

$$\bar{3}^{0.4} = 4.6$$

$$\bar{1}^{0.4} = 2.6$$

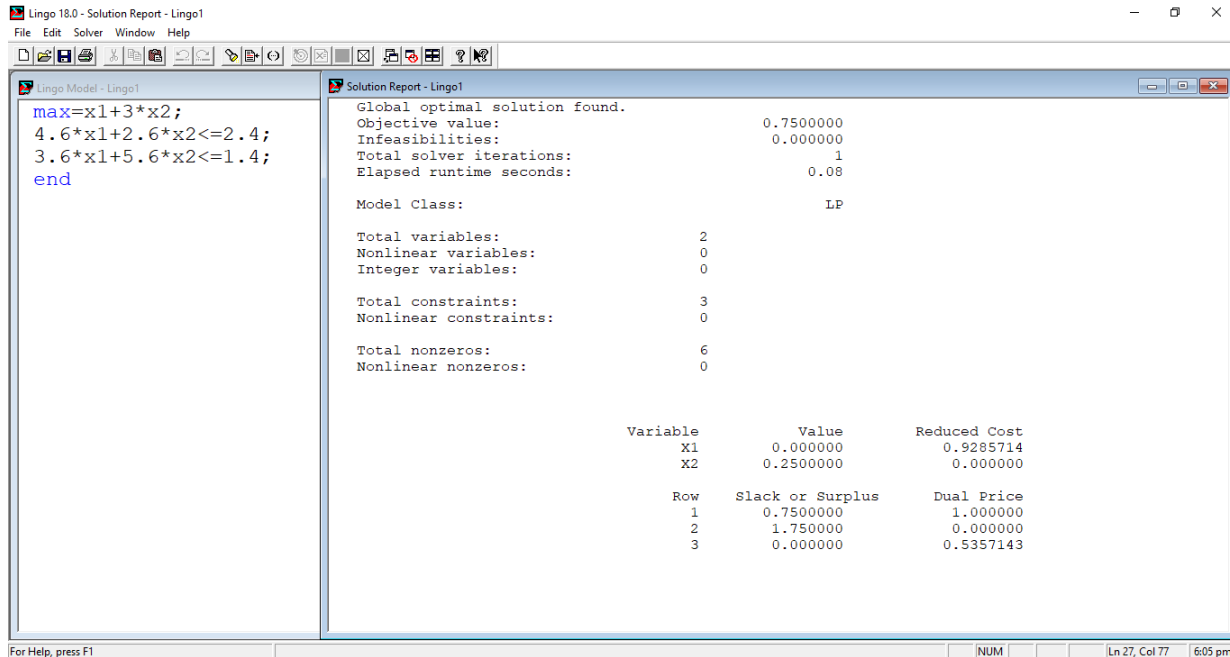
$$\bar{2}^{0.4} = 3.6$$

$$\bar{4}^{0.4} = 5.6$$

On obtient le programme linéaire déterministe suivant :

$$(P_d) \begin{cases} x_1 + 3x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ 4.6x_1 + 2.6x_2 \leq 2.4 \\ 3.6x_1 + 5.6x_2 \leq 1.4 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Application de l'exemple sur Lingo :



La solution optimale est  $X^* = (0, 0.25)$

La valeur optimale est  $Z(X^*) = 0.75$

**Exemple 37 :**

On reprend le problème linéaire flou stochastique  $(P_{FS})_{L-R}$  de l'exemple 36, tel que :

$$(P_{FS})_{L-R} \begin{cases} x_1 + 3x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ \tilde{3}x_1 + \tilde{1}x_2 \leq \tilde{b}_1(\omega) \\ \tilde{2}x_1 + \tilde{4}x_2 \leq \tilde{b}_2(\omega) \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Où  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ , muni de la distribution de probabilité suivante :  $P(\omega_1) = 0.4$  et  $P(\omega_2) = 0.6$

On a

$$P(\bar{b}_1(\omega_1) = \tilde{3}) = P(\bar{b}_2(\omega_1) = \tilde{2}) = 0.4$$

$$P(\bar{b}_1(\omega_2) = \tilde{1}) = P(\bar{b}_2(\omega_2) = \tilde{4}) = 0.6$$

Dans ce cas,  $\tilde{A}$ ,  $A = 1, 2, 3, 4$  sont des intervalles flous de type  $L - R$  et sont de la forme :  $\tilde{A} = (\underline{a}, \bar{a}, \delta_a, \gamma_a)$  et on pose  $\delta_a = \gamma_a = 2$  pour tout l'exercice et un seuil  $\alpha = 0.6$ , tel que  $\tilde{1} = (1, 1.5, 2, 2)$ ,  $\tilde{2} = (2, 2.5, 2, 2)$ ,  $\tilde{3} = (3, 3.5, 2, 2)$  et  $\tilde{4} = (4, 4.5, 2, 2)$  dont leurs fonctions d'appartenance  $\mu_{\tilde{m}}$  sont définies comme suit :

$$\mu_{\tilde{A}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]\underline{a}, \bar{a}[ \\ L\left(\frac{\underline{a}-x}{\delta_a}\right) & \text{si } x \leq \underline{a} \\ R\left(\frac{x-\bar{a}}{\gamma_a}\right) & \text{si } x \geq \bar{a} \end{cases}$$

par analogie on obtient :

$$\mu_{\tilde{1}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]1, 1.5[ \\ L\left(\frac{1-x}{2}\right) & \text{si } x \leq 1 \\ R\left(\frac{x-1.5}{2}\right) & \text{si } x \geq 1.5 \end{cases} \quad | \quad \mu_{\tilde{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]2, 2.5[ \\ L\left(\frac{2-x}{2}\right) & \text{si } x \leq 2 \\ R\left(\frac{x-2.5}{2}\right) & \text{si } x \geq 2.5 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{3}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]3, 3.5[ \\ L\left(\frac{3-x}{2}\right) & \text{si } x \leq 3 \\ R\left(\frac{x-3.5}{2}\right) & \text{si } x \geq 3.5 \end{cases} \quad | \quad \mu_{\tilde{4}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]4, 4.5[ \\ L\left(\frac{4-x}{2}\right) & \text{si } x \leq 4 \\ R\left(\frac{x-4.5}{2}\right) & \text{si } x \geq 4.5 \end{cases}$$

On obtient en utilisant l' $\alpha$ -coupe d'un intervalle flou de type  $L - R$  :

$$\tilde{1}^{0.6} = [\underline{\tilde{1}}^{0.6}, \bar{\tilde{1}}^{0.6}] = [1 - 2L^{-1}(0.6), 1.5 + 2R^{-1}(0.6)]$$

En effet :

$$L\left(\frac{1-x}{2}\right) = 0.6 \implies \frac{1-x}{2} = L^{-1}(0.6) \implies x = \underline{\tilde{1}}^{0.6} = 1 - 2L^{-1}(0.6)$$

$$R\left(\frac{x-1.5}{2}\right) = 0.6 \implies \frac{x-1.5}{2} = R^{-1}(0.6) \implies x = \bar{\tilde{1}}^{0.6} = 1.5 + 2R^{-1}(0.6)$$

De la même manière :

$$\tilde{2}^{0.6} = [\underline{\tilde{2}}^{0.6}, \bar{\tilde{2}}^{0.6}] = [2 - 2L^{-1}(0.6), 2.5 + 2R^{-1}(0.6)]$$

$$\tilde{3}^{0.6} = [\underline{\tilde{3}}^{0.6}, \bar{\tilde{3}}^{0.6}] = [3 - 2L^{-1}(0.6), 3.5 + 2R^{-1}(0.6)]$$

$$\tilde{4}^{0.6} = [\underline{\tilde{4}}^{0.6}, \bar{\tilde{4}}^{0.6}] = [4 - 2L^{-1}(0.6), 4.5 + 2R^{-1}(0.6)]$$

— a/ En combinant probabilité et possibilité avec  $p_1 = p_2 = 0.6$ ;  $\beta_1 = \beta_2 = 0.6$ ; on a :

$$\bar{b}_1^{0.6} = \begin{pmatrix} \bar{\tilde{3}}^{0.6} \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\tilde{1}}^{0.6} \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 + 2R^{-1}(0.6) \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5 + 2R^{-1}(0.6) \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b}_2^{0.6} = \begin{pmatrix} \bar{\tilde{2}}^{0.6} \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\tilde{4}}^{0.6} \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 + 2R^{-1}(0.6) \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.5 + 2R^{-1}(0.6) \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

$$P(\tilde{b}_1(\omega_1) = 3.5 + 2R^{-1}(0.6)) = P(\tilde{b}_2(\omega_1) = 2.5 + 2R^{-1}(0.6)) = 0.4$$

$$P(\tilde{b}_1(\omega_2) = 1.5 + 2R^{-1}(0.6)) = P(\tilde{b}_2(\omega_2) = 4.5 + 2R^{-1}(0.6)) = 0.6$$

Les contraintes deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} P\left\{\omega/pos\left(\tilde{3}x_1 + \tilde{1}x_2 \leq \tilde{b}_1(\omega)\right) \geq 0.6\right\} \geq 0.6 \\ P\left\{\omega/pos\left(\tilde{2}x_1 + \tilde{4}x_2 \leq \tilde{b}_2(\omega)\right) \geq 0.6\right\} \geq 0.6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P \left\{ \omega/\tilde{\underline{3}}^{0.6} x_1 + \tilde{\underline{1}}^{0.6} x_2 \leq \bar{b}_1^{0.6}(\omega) \right\} \geq 0.6 \\ P \left\{ \omega/\tilde{\underline{2}}^{0.6} x_1 + \tilde{\underline{4}}^{0.6} x_2 \leq \bar{b}_2^{0.6}(\omega) \right\} \geq 0.6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 - P \left\{ \omega/\tilde{\underline{3}}^{0.6} x_1 + \tilde{\underline{1}}^{0.6} x_2 > \bar{b}_1^{0.6}(\omega) \right\} \geq 0.6 \\ 1 - P \left\{ \omega/\tilde{\underline{2}}^{0.6} x_1 + \tilde{\underline{4}}^{0.6} x_2 > \bar{b}_2^{0.6}(\omega) \right\} \geq 0.6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P \left\{ \omega/\tilde{\underline{3}}^{0.6} x_1 + \tilde{\underline{1}}^{0.6} x_2 > \bar{b}_1^{0.6}(\omega) \right\} \leq 0.4 \\ P \left\{ \omega/\tilde{\underline{2}}^{0.6} x_1 + \tilde{\underline{4}}^{0.6} x_2 > \bar{b}_2^{0.6}(\omega) \right\} \leq 0.4 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_{\bar{b}_1^{0.6}(\omega)}^{-1} \left( \tilde{\underline{3}}^{0.6} x_1 + \tilde{\underline{1}}^{0.6} x_2 \right) \leq 0.4 \\ F_{\bar{b}_2^{0.6}(\omega)}^{-1} \left( \tilde{\underline{2}}^{0.6} x_1 + \tilde{\underline{4}}^{0.6} x_2 \right) \leq 0.4 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\underline{3}}^{0.6} x_1 + \tilde{\underline{1}}^{0.6} x_2 \leq F_{\bar{b}_1^{0.6}(\omega)}^{-1}(0.4) \\ \tilde{\underline{2}}^{0.6} x_1 + \tilde{\underline{4}}^{0.6} x_2 \leq F_{\bar{b}_2^{0.6}(\omega)}^{-1}(0.4) \end{array} \right\}$$

$$F_{\bar{b}_1^{0.6}(\omega)}^{-1}(0.4) = \left\{ x / F_{\bar{b}_1^{0.6}(\omega)}(x) = 0.4 \right\} = 3.5 + 2R^{-1}(0.6)$$

$$F_{\bar{b}_2^{0.6}(\omega)}^{-1}(0.4) = \left\{ x / F_{\bar{b}_2^{0.6}(\omega)}(x) = 0.4 \right\} = 2.5 + 2R^{-1}(0.6)$$

Et on a calculé :

$$\tilde{\underline{3}}^{0.6} = 3 - 2L^{-1}(0.6)$$

$$\tilde{\underline{1}}^{0.6} = 1 - 2L^{-1}(0.6)$$

$$\tilde{\underline{2}}^{0.6} = 2 - 2L^{-1}(0.6)$$

$$\tilde{\underline{4}}^{0.6} = 4 - 2L^{-1}(0.6)$$

On obtient le programme linéaire déterministe suivant :

$$(P_D) \begin{cases} x_1 + 3x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ (3 - 2L^{-1}(0.6))x_1 + (1 - 2L^{-1}(0.6))x_2 \leq 3.5 + 2R^{-1}(0.6) \\ (2 - 2L^{-1}(0.6))x_1 + (4 - 2L^{-1}(0.6))x_2 \leq 2.5 + 2R^{-1}(0.6) \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

De la même manière que l'exemple 33 on calcule :

$$3 - 2L^{-1}(0.6) = 2.2$$

$$1 - 2L^{-1}(0.6) = 0.2$$

$$2 - 2L^{-1}(0.6) = 1.2$$

$$4 - 2L^{-1}(0.6) = 3.2$$

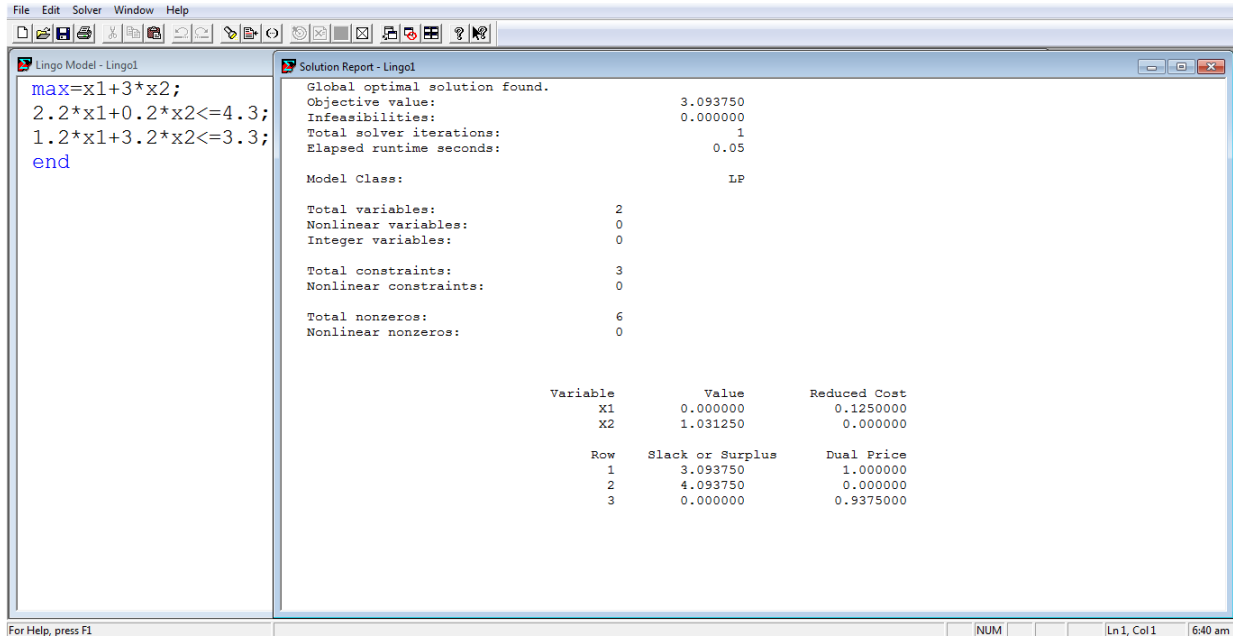
$$3.5 + 2R^{-1}(0.6) = 4.3$$

$$2.5 + 2R^{-1}(0.6) = 3.3$$

En remplaçant ces valeurs dans  $(P_D)$ , on obtient :

$$(P_D) \begin{cases} x_1 + 3x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ 2.2x_1 + 0.2x_2 \leq 4.3 \\ 1.2x_1 + 3.2x_2 \leq 3.3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Application de l'exemple sur Lingo :



La solution optimale est  $X^* = (0, 1.03)$

La valeur optimale est  $Z(X^*) = 3.09$

— b/ En combinant probabilité et nécessité avec  $p_1 = p_2 = 0.6$ ;  $\beta_1 = \beta_2 = 0.6$ ; on a :

$$[1 - 2L^{-1}(0.6), 1.5 + 2R^{-1}(0.6)]$$

$$\tilde{b}_1^{0.4} = \begin{pmatrix} \tilde{3}^{0.4} \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{1}^{0.4} \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2L^{-1}(0.6) \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 2L^{-1}(0.6) \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_2^{0.4} = \begin{pmatrix} \tilde{2}^{0.4} \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{4}^{0.4} \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2L^{-1}(0.6) \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 - 2L^{-1}(0.6) \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

$$P(\underline{b}_1^{0.4}(\omega_1) = 3 - 2L^{-1}(0.6)) = P(\underline{b}_2^{0.4}(\omega_1) = 1 - 2L^{-1}(0.6)) = 0.4$$

$$P(\underline{b}_1^{0.4}(\omega_1) = 2 - 2L^{-1}(0.6)) = P(\underline{b}_2^{0.4}(\omega_1) = 4 - 2L^{-1}(0.6)) = 0.6$$

Les contraintes deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} P \left\{ \omega / nec \left( \tilde{3}x_1 + \tilde{1}x_2 \leq \tilde{b}_1(\omega) \right) \geq 0.6 \right\} \geq 0.6 \\ P \left\{ \omega / nec \left( \tilde{2}x_1 + \tilde{4}x_2 \leq \tilde{b}_2(\omega) \right) \geq 0.6 \right\} \geq 0.6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P \left\{ \omega/\bar{3}^{1-0.6} x_1 + \bar{1}^{1-0.6} x_2 \leq \tilde{b}_1^{1-0.6}(\omega) \right\} \geq 0.6 \\ P \left\{ \omega/\bar{2}^{1-0.6} x_1 + \bar{4}^{1-0.6} x_2 \leq \tilde{b}_2^{1-0.6}(\omega) \right\} \geq 0.6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 - P \left\{ \omega/\bar{3}^{0.4} x_1 + \bar{1}^{0.4} x_2 > \tilde{b}_1^{0.4}(\omega) \right\} \geq 0.6 \\ 1 - P \left\{ \omega/\bar{2}^{0.4} x_1 + \bar{4}^{0.4} x_2 > \tilde{b}_2^{0.4}(\omega) \right\} \geq 0.6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P \left\{ \omega/\bar{3}^{0.4} x_1 + \bar{1}^{0.4} x_2 > \bar{b}_1^{0.4}(\omega) \right\} \leq 0.4 \\ P \left\{ \omega/\bar{2}^{0.4} x_1 + \bar{4}^{0.4} x_2 > \bar{b}_2^{0.4}(\omega) \right\} \leq 0.4 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_{\bar{b}_1^{0.4}(\omega)}^{-1} \left( \bar{3}^{0.4} x_1 + \bar{1}^{0.4} x_2 \right) \leq 0.4 \\ F_{\bar{b}_2^{0.4}(\omega)}^{-1} \left( \bar{2}^{0.4} x_1 + \bar{4}^{0.4} x_2 \right) \leq 0.4 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{3}^{0.4} x_1 + \bar{1}^{0.4} x_2 \leq F_{\bar{b}_1^{0.4}(\omega)}^{-1}(0.4) \\ \bar{2}^{0.4} x_1 + \bar{4}^{0.4} x_2 \leq F_{\bar{b}_2^{0.4}(\omega)}^{-1}(0.4) \end{array} \right\}$$

$$F_{\bar{b}_1^{0.4}}^{-1}(0.4) = \left\{ x/F_{\bar{b}_1^{0.4}}(x) = 0.4 \right\} = 3 - 2L^{-1}(0.6)$$

$$F_{\bar{b}_2^{0.4}}^{-1}(0.4) = \left\{ x/F_{\bar{b}_2^{0.4}}(x) = 0.4 \right\} = 2 - 2L^{-1}(0.6)$$

En utilisant l' $\alpha$ -coupe d'un intervalle flou de type  $L - R$ , on obtient :

$$\tilde{1}^{0.4} = \left[ \underline{\tilde{1}}^{0.4}, \bar{1}^{0.4} \right] = [1 - 2L^{-1}(0.4), 1.5 + 2R^{-1}(0.4)]$$

$$\tilde{2}^{0.4} = \left[ \underline{\tilde{2}}^{0.4}, \bar{2}^{0.4} \right] = [2 - 2L^{-1}(0.4), 2.5 + 2R^{-1}(0.4)]$$

$$\tilde{3}^{0.4} = \left[ \underline{\tilde{3}}^{0.4}, \bar{3}^{0.4} \right] = [3 - 2L^{-1}(0.4), 3.5 + 2R^{-1}(0.4)]$$

$$\tilde{4}^{0.4} = \left[ \underline{\tilde{4}}^{0.4}, \bar{4}^{0.4} \right] = [4 - 2L^{-1}(0.4), 4.5 + 2R^{-1}(0.4)]$$

donc

$$\bar{3}^{0.4} = 3.5 + 2R^{-1}(0.4)$$

$$\bar{1}^{0.4} = 1.5 + 2R^{-1}(0.4)$$

$$\bar{2}^{0.4} = 2.5 + 2R^{-1}(0.4)$$

$$\bar{4}^{0.4} = 4.5 + 2R^{-1}(0.4)$$

On obtient le programme linéaire déterministe suivant :

$$(P_D) \begin{cases} x_1 + 3x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ (3.5 + 2R^{-1}(0.4))x_1 + (1.5 + 2R^{-1}(0.4))x_2 \leq 3 - 2L^{-1}(0.4) \\ (2.5 + 2R^{-1}(0.4))x_1 + (4.5 + 2R^{-1}(0.4))x_2 \leq 2 - 2L^{-1}(0.4) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

De la même manière que l'exemple 33 on calcule :

$$3.5 + 2R^{-1}(0.4) = 4.7$$

$$2.5 + 2R^{-1}(0.4) = 3.7$$

$$1.5 + 2R^{-1}(0.4) = 2.7$$

$$4.5 + 2R^{-1}(0.4) = 5.7$$

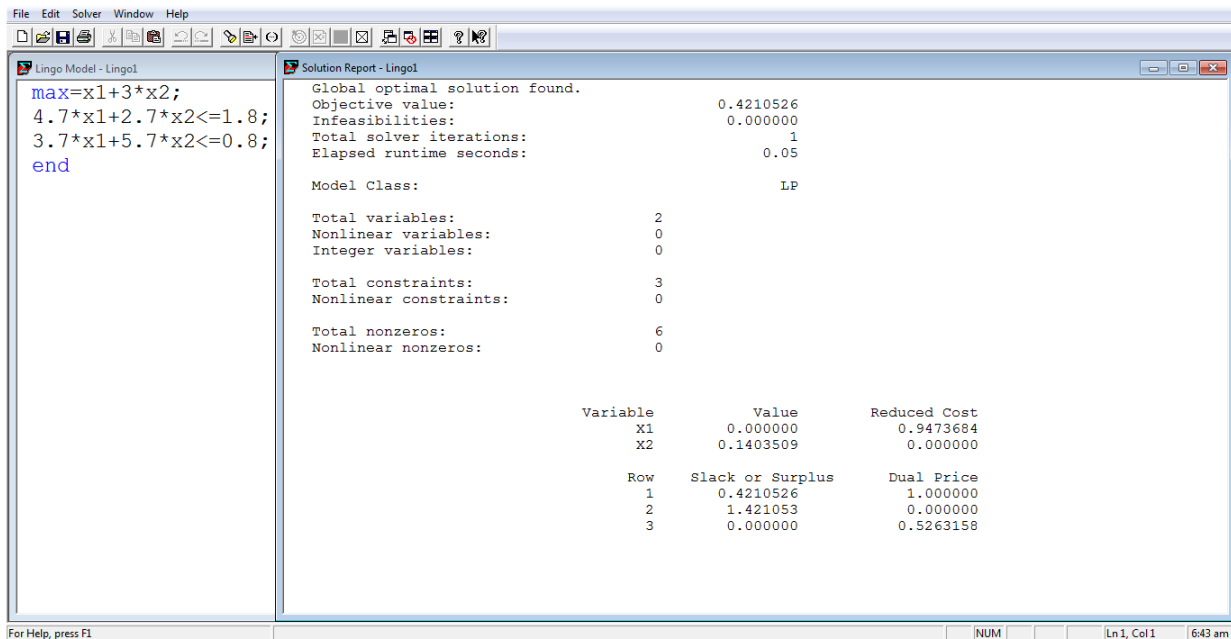
$$3 - 2L^{-1}(0.4) = 1.8$$

$$2 - 2L^{-1}(0.4) = 0.8$$

En remplaçant ces valeurs dans  $(P_D)$ , on obtient :

$$(P_D) \begin{cases} x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ sc \\ 4.7x_1 + 2.7x_2 \leq 1.8 \\ 3.7x_1 + 5.7x_2 \leq 0.8 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Application de l'exemple sur Lingo :



La solution optimale est  $X^* = (0, 0.14)$

La valeur optimale est  $Z(X^*) = 0.421$

### Exemple 38 : [33]

On considère le problème flou stochastique suivant :

$$(P_{FS}) \begin{cases} x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ sc \\ \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 \leq \tilde{b}_1(\omega) \\ \tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 \leq \tilde{b}_2(\omega) \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Où  $(\tilde{a}_{ij})_{i,j=1,2}$  sont des intervalles flous et  $(\tilde{b}_i(\omega))_{i=1,2}$  sont des variables aléatoires floues muni de la distribution de probabilité suivante :

$$P(\omega_1) = 0.25, P(\omega_2) = 0.75; \text{ avec } \Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$$

1. cas où  $(\tilde{a}_{ij})_{i,j=1,2}$  sont des intervalles flous triangulaires

et  $(\tilde{b}_i(\omega))_{i=1,2}$  sont des variables aléatoires floues discrètes tels que :

$$\tilde{a}_{11} = \tilde{1}; \tilde{a}_{12} = \tilde{3}$$

$$\tilde{a}_{21} = \tilde{2}; \tilde{a}_{22} = \tilde{4}$$

$$P(\tilde{b}_1(\omega_1) = \tilde{1}) = P(\tilde{b}_2(\omega_1) = \tilde{2}) = 0.25$$

$$P(\tilde{b}_1(\omega_2) = \tilde{3}) = P(\tilde{b}_2(\omega_2) = \tilde{4}) = 0.75$$

Où, pour  $m = 1, 2, 3, 4$ ,  $\tilde{m}$  est un intervalle flou dont la fonction d'appartenance  $\mu_{\tilde{m}}$  définie par :

$$\mu_{\tilde{m}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < m - 1 \\ x - m + 1 & \text{si } m - 1 \leq x < m \\ 1 & \text{si } m \leq x < m + 1 \\ -x + m + 2 & \text{si } m + 1 \leq x \leq m + 2 \\ 0 & \text{si } x > m + 2 \end{cases}$$

Pour résoudre le problème linéaire flou stochastique ( $P_{FS}$ ), on applique la méthode de chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients comme suit :

a/- En combinant probabilité et possibilité avec  $p_1 = p_2 = 0.75$  et  $\beta_1 = \beta_2 = 0.8$ , on a :

$$P(\bar{b}_1^{0.8}(\omega_1) = 2.2) = P(\bar{b}_2^{0.8}(\omega_1) = 3.2) = 0.25$$

$$P(\bar{b}_1^{0.8}(\omega_2) = 4.2) = P(\bar{b}_2^{0.8}(\omega_2) = 5.2) = 0.75$$

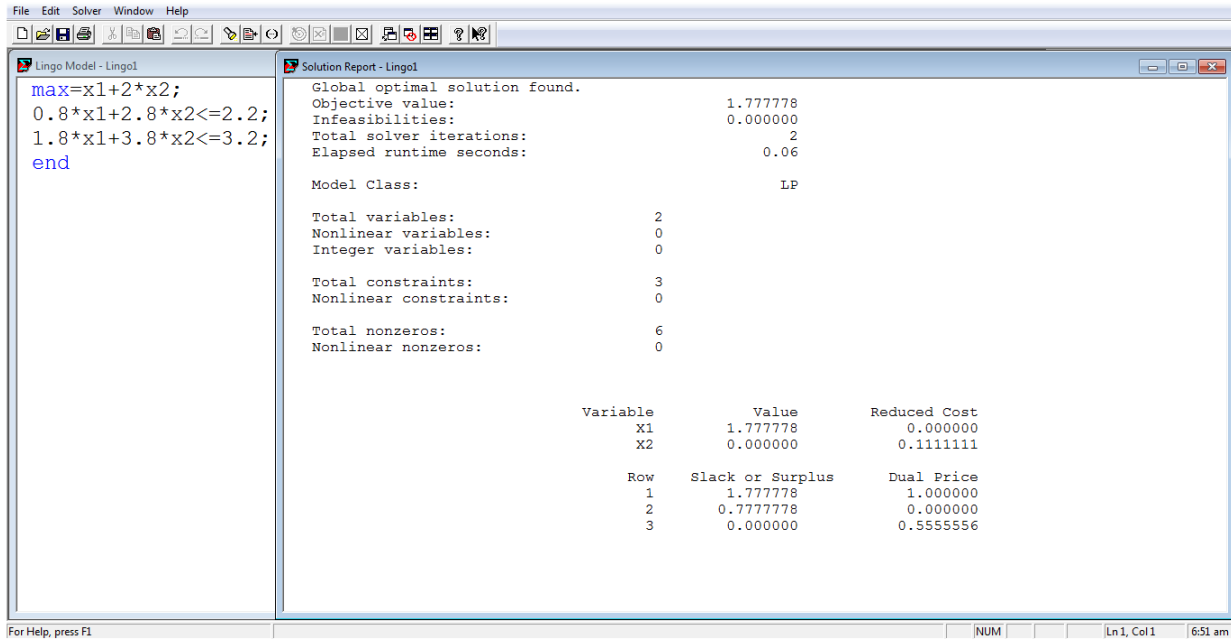
On aura :

$$\underline{a}_{11}^{0.8} = 0.8, \underline{a}_{12}^{0.8} = 2.8, \underline{a}_{21}^{0.8} = 1.8, \underline{a}_{22}^{0.8} = 3.8$$

On obtient :

$$(P_{FS}) \begin{cases} x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ 0.8x_1 + 2.8x_2 \leq 2.2 \\ 1.8x_1 + 3.8x_2 \leq 3.2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

## Application de l'exemple sur Lingo :



La solution optimale est  $X^* = (1.77, 0)$

La valeur optimale est  $Z(X^*) = 1.77$

b/- En combinant probabilité et nécessité avec  $p_1 = p_2 = 0.75$  et  $\beta_1 = \beta_2 = 0.8$ , on a :

$$P(b_1^{0.2}(\omega_1) = 0.2) = P(b_2^{0.2}(\omega_1) = 1.2) = 0.25$$

$$P(b_1^{0.2}(\omega_2) = 2.2) = P(b_2^{0.2}(\omega_2) = 3.2) = 0.75$$

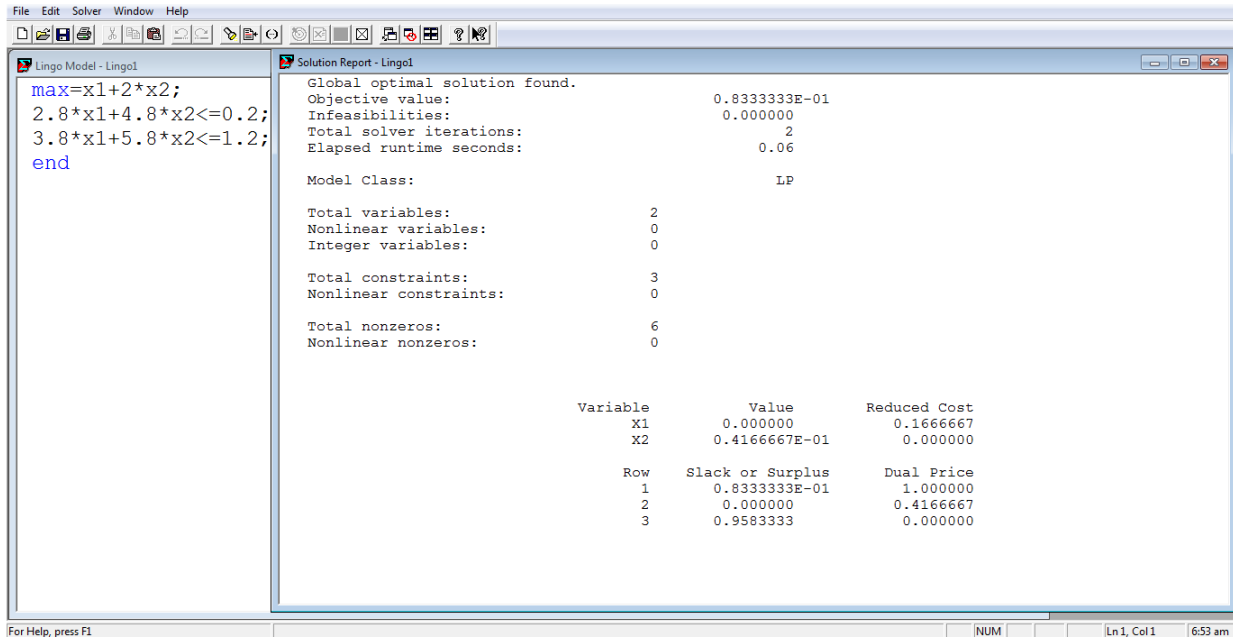
On aura :

$$\underline{a}_{11}^{0.2} = 2.8, \underline{a}_{12}^{0.2} = 4.8, \underline{a}_{21}^{0.2} = 3.8, \underline{a}_{22}^{0.2} = 5.8$$

On obtient :

$$(P_{FS}) \begin{cases} x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ 2.8x_1 + 4.8x_2 \leq 0.2 \\ 3.8x_1 + 5.8x_2 \leq 1.2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Application de l'exemple sur Lingo :



La solution optimale est  $X^* = (0, 0.041)$

La valeur optimale est  $Z(X^*) = 0.0833$

2.cas où  $(\tilde{a}_{ij})_{i,j=1,2}$  sont des intervalles flous trapézoïdal et  $(\tilde{b}_i(\omega))_{i=1,2}$  sont des variables aléatoires floues discrètes tels que :

$\tilde{a}_{11} = (1, 2, 1, 1)_{L-R}, \tilde{a}_{12} = (3, 4, 1, 1)_{L-R}, \tilde{a}_{21} = (2, 3, 1, 1)_{L-R}, \tilde{a}_{22} = (4, 5, 1, 1)_{L-R}$   
 et  $\tilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \bar{b}_i(\omega), 1, 1)$  tel que :

$$P(\tilde{b}_1(\omega_1) = \tilde{\gamma}_1^1) = P(\tilde{b}_2(\omega_1) = \tilde{\gamma}_2^1) = 0.25$$

$$P(\tilde{b}_1(\omega_2) = \tilde{\gamma}_1^2) = P(\tilde{b}_2(\omega_2) = \tilde{\gamma}_2^2) = 0.75$$

Avec  $\tilde{\gamma}_1^1 = (1, 2, 1, 1)_{L-R}, \tilde{\gamma}_2^1 = (3, 4, 1, 1)_{L-R}, \tilde{\gamma}_1^2 = (2, 3, 1, 1)_{L-R}, \tilde{\gamma}_2^2 = (4, 5, 1, 1)_{L-R}$ ,  
 Où  $L(x) = R(x) = \max(0, 1 - x)$

Pour résoudre le programme linéaire flou stochastique ( $P_{FS}$ ), on applique chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients en combinant chance constrained programming et comparaison d'intervalle flou avec  $p_1 = p_2 = 0.75$  et  $\beta_1 = \beta_2 = 0.8$ , on obtient :

a/- En combinant probabilité et  $\mu_{2D}$  :

$$(P_{\mu_{2D}}) \begin{cases} x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ 0.2x_1 + 2.2x_2 \leq 0.2 \\ 1.2x_1 + 3.2x_2 \leq 1.2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

## Application de l'exemple sur Lingo :

The screenshot shows the Lingo software interface. The left pane displays the model code:

```

max=x1+2*x2;
0.2*x1+2.2*x2<=0.2;
1.2*x1+3.2*x2<=1.2;
end

```

The right pane displays the Solution Report:

```

Global optimal solution found.
Objective value:                1.000000
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:        1
Elapsed runtime seconds:        0.06

Model Class:                    LP

Total variables:                2
Nonlinear variables:            0
Integer variables:              0

Total constraints:              3
Nonlinear constraints:          0

Total nonzeros:                6
Nonlinear nonzeros:            0

```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	1.000000	0.000000
X2	0.000000	0.6666667

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	1.000000	1.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	0.8333333

For Help, press F1

La solution optimale est  $X^* = (1, 0)$

La valeur optimale est  $Z(X^*) = 1$

b/- En combinant probabilité et  $\mu_{3D}$

$$(P_{\mu_{3D}}) \begin{cases} x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max \\ sc \\ 2.2x_1 + 4.2x_2 \leq 2.2 \\ 3.2x_1 + 5.2x_2 \leq 3.2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

## Application de l'exemple sur Lingo :

The screenshot shows the Lingo software interface with two windows: 'Lingo Model - Lingo1' and 'Solution Report - Lingo1'.

**Lingo Model - Lingo1:**

```

max=x1+2*x2;
2.2*x1+4.2*x2<=2.2;
3.2*x1+5.2*x2<=3.2;
end

```

**Solution Report - Lingo1:**

```

Global optimal solution found.
Objective value:                1.047619
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:        2
Elapsed runtime seconds:        0.08

Model Class:                    LP

Total variables:                2
Nonlinear variables:            0
Integer variables:              0

Total constraints:              3
Nonlinear constraints:          0

Total nonzeros:                6
Nonlinear nonzeros:            0

```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	0.4761905E-01
X2	0.5238095	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	1.047619	1.000000
2	0.000000	0.4761905
3	0.4761905	0.000000

For Help, press F1

NUM | Ln1, Col1 | 6:58 am

La solution optimale est  $X^* = (0, 0.523)$

La valeur optimale est  $Z(X^*) = 1.047$

---

## Conclusion

Dans pas mal de situations concrètes, le flou et l'aléa se trouvent combinés dans un contexte optimisationnel. Beaucoup de travaux ont été réalisés dans la programmation linéaire floue stochastique.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la résolution des problèmes linéaires en présence des variables aléatoires floues de type  $L-R$  dans les contraintes en gardant un objectif déterministe.

Nous avons, en premier lieu, introduit l'essentiel de la programmation linéaire, les notions de base de la théorie des ensembles flous, les notions de la probabilité, et la combinaison du flou et de l'aléa. En second lieu, nous avons étudié les problèmes linéaires stochastiques en citant les deux approches essentielles et les méthodes de résolution telles que *chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients*. En troisième lieu, nous avons traité les problèmes linéaires flous et la défuzzification de ces derniers en utilisant la probabilité ou la nécessité.

Et en dernier lieu, nous avons traité la résolution de programmes linéaires en présence de variables aléatoires floues de type  $L - R$  dans les contraintes en utilisant *chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients*. Et enfin, nous avons achevé ce travail par une liste de références bibliographiques qui énumère tout ce que nous avons utilisé dans ce modeste travail.

Ce travail nous a permis d'approfondir nos connaissances dans la programmation linéaire en élargissant notre horizon de travail vers un environnement incertain et imprécis, en nous focalisant sur un type particulier de variables qui est la variable aléatoire floue de type  $L - R$ .

Un thème très intéressant et enrichissant qui, toutefois, pourrait être repris dans le cadre de la programmation linéaire multi-objective.

# Bibliographie

- [1] Abdelaziz HAMEURLAIN, une nouvelle approche simplicial en programmation linéaire, thèse de magister, université de constantine, 2006
- [2] M.AIDEN .B.OUKACHA, les manuels de l'étudiant Recherche Opérationnelle Programmation linéaire . édition Pages Bleues internationales, 2005
- [3] Gerald Baillargeon, Outils de la recherche opérationnelle, programmation linéaire appliquée, outils d'optimisation et d'aide à la décision, les éditions SMG.
- [4] Rabia Fatima, cours de programmation linéaire  $L_3$ , 2018/2019.
- [5] Lotfi Aliasker Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control, 8(1965), 338-353.
- [6] Dedier Dubois, H.prade, Operation on fuzzy Numbers, International Journal of systems science, 9(6)(1978), 613-626
- [7] R.R. YAGER, On the lack of inverses in Fuzzy arithmetic, Fuzzy Sets and systems (1980)
- [8] F. aiche, sur l'optimisation floue stochastique, thèse de magistère, Université de Tizi-Ouzou (1995).
- [9] Mokeddem Diab, thèse Doctorat en science en électronique sur Contruitiôle Flou des Processus Biotechnologique à Base d'Algorithmes Génétiques, Université FERHET ABBAS de Setif, 2010
- [10] Bernadette Bouchon-Meunier, Christophe Marsala, "Logique floue, principes, aide à la décision" 2003
- [11] Bernadette Bouchon-Meunier, La logique floue et ses applications, Addison Wesley, France, (1995).
- [12] Aiche Farid, thèse de doctorat sur la Comparaison d'intervalles flous pour a programmation multi-objectifs dans l'incertain, Université de Toulouse . 2013
- [13] Aiche Farid, thèse de doctorat sur la programmation linéaire multi-objectifs floue stochastique. , Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou. 2013
- [14] S. Chanas and M. Nowakowski, Single value simulation of fuzzy variable. Fuzzy Sets and Systems 25 (1999) 43-57.
- [15] J.Li, J.Xu, M.Gen, A class of multiobjective linear programming model with fuzzy random coefficients, Mathematical and Computer Modelling 10(1) (1982) 33-41
- [16] E.E.Ammar, On fuzzy random multiobjective quadratic programming, Euro pean Journal of Operational research 193 (2009) 329-341.

- [17] M.G.Iskander, A suggested approach for possibility and necessity dominance indices in stochastic fuzzy linear programming, *Applied Mathematic Letters* 18 (2005) 395-399.
- [18] H.Kwakernaak, fuzzy random variables, *Information sciences* (1979).
- [19] Shapiro, A.F, Fuzzy random variables, *Insurance : Mathematics and Economics* 2008, doi : 10.1060 : j.insmatheco. 2008.05.008.
- [20] Jacques Teghem, *Programmation linéaire*. 2003.
- [21] D. Kall, *Stochastic linear programming*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, New York (1978) 79-92.
- [22] Bellahcene Fatima, thèse de doctorat sur la programmation linéaire multi objectif stochastique en nombre entier ; Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou, 2006.
- [23] L. Zadeh, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility *Fuzzy Sets and Systems* 1 (1978) 3-28
- [24] D. Dubois, Linear programming with fuzzy data, in J.C. Bezdek, Ed. *Analysis of fuzzy information volume III, Application in Engineering and Sciences*, (C.R.C Press) 241-263.
- [25] R.Kaplan and J.Soden, on the objective function for the sequetiel P-model of Chance-constrained programming, *oper.Res.* 19(1),(1971) 106-114.
- [26] Katoka, S. On stochastic programming A. preliminary study of stochastic programming model, *Hitotsubashi J.Arts.Sci.*2(1962) 36-44. Using possibility and necessity measures, *European Journal of Operational Research* 152 88-95.
- [27] Leclercq, J.P, Stochastic programming and interactive multicriteria approach, *European Journal of operational research* 188(2008) 330-339
- [28] Qiao, Z, & Wang, W. (1993) On solution and distribution problem of the linear programming with fuzzy rando variable coefficients, *Fuzzy Sets and Systems* 58, 155-170
- [29] Qiao, Z, & Zhang, Y. & Wang, W. (1994) on fuzzy random linear programming, *fuzzy sets and systems* 65, 31649
- [30] Qiao, Z, & Wang, W, Linear programming with fuzzy random variables coefficients, *Fuzzy Sets and Systems* 57 (1993) 295-311.
- [31] Puri and Ralescu, Fuzzy random variables. *J. Math.and Appl.* 1114 (1986) 409-420
- [32] H.Kurse and Meyer, *statistics with vague data* , D.Riedel Publishing Company, 1987
- [33] F. Aiche, M abbas and D.Dubois ,chance contrained programming with fuzzy stochastic coefficients, *fuzzy optimization and decision making*, Springer 2012.