

Table des matières

Table des matières	ii
Table des figures	iii
Introduction générale	1
1 Programmation Linéaire Stochastique	4
1.1 Intoduction	5
1.2 Eléments de la théorie des probabilités	5
1.2.1 Expérience aléatoire	5
1.2.2 Ensemble fondamental	5
1.2.3 Evénement	5
1.2.4 Tribu ou σ -algèbre	5
1.2.5 Espace probabilisable	6
1.2.6 Définition d'une probabilité sur un espace probabilisable	6
1.2.7 Variable aléatoire	6
1.2.8 Variable aléatoire continue	7
1.2.9 Variable aléatoire discrète	7
1.2.10 Loi d'une variable aléatoire	7
1.2.11 Fonction de répartition	7
1.2.12 Fonction de masse	8
1.2.13 Densité de probabilité	8
1.2.14 Moments	8
1.2.15 Propriétés	10
1.2.16 Lois de probabilité usuelles	10
1.3 Optimisation Linéaire Stochastique Mono-objectif	12
1.3.1 Les différentes approches	12
2 Programmation linéaire multi-objectifs en nombre entiers	24
2.1 Programmation linéaire en nombre entiers	25

2.2	Méthodes de résolution	25
2.2.1	Coupes de Gomory [20]	26
2.2.2	Méthodes par séparation et évaluation (S-E)(Branch and Bound)	26
2.3	Programmation Linéaire Multi-objectifs en nombre entiers	28
2.4	Relation de dominance et d'efficacité	29
2.5	Méthodes de résolution d'un problème multi-objectifs en nombres entiers (MOILP)	30
2.5.1	Méthode basée sur le concept d'ensembles dominants [33]	30
2.5.2	Méthode de Gupta et Malhotra [21]	32
2.5.3	Méthode de Abbas et Chaabane [1]	35
2.5.4	Méthode de Sylva et Crema [37]	37
3	Programmation linéaire stochastique multi-objectifs en nombre entiers	40
3.1	Introduction	41
3.2	Méthode STRANGE-MOMIX	41
3.3	Méthode des plans sécants [5]	46
3.3.1	Problème déterministe associé	46
3.3.2	Faisabilité	48
3.3.3	Optimalité	49
3.3.4	Exemple Numérique	51
4	Résolution des problèmes à contraintes probabilistes	62
4.1	Intoduction	63
4.2	Définitions et notations	63
4.3	Analyse paramétrique du problème (4.2)	64
4.4	Dualité en programmation linéaire en nombres entiers (MOILP)	66
4.5	Approche par fonction d'utilité du problème linéaire multi-objectifs en nombres entiers	68
4.6	Génération de fonctions duales optimales et de fonctions d'utilité	70
4.6.1	Génération de fonctions duales optimales à l'aide de plans de coupe	71
4.6.2	Exemple illustratif	72

Table des figures

2.1 Exemple de point inefficace et de point efficace	32
--	----

Introduction générale

Les problèmes d'optimisation rencontrés en pratique sont rarement mono-objectifs, et requièrent souvent la prise en compte de plusieurs critères conflictuels. La complexité de ces problèmes dits multiobjectifs augmente en fonction de la taille de l'espace de recherche mais aussi du nombre de fonctions objectifs à optimiser. En effet, contrairement au cas mono-objectif, il n'existe pas une solution optimale unique, mais un ensemble de solutions efficaces, dites Pareto optimales. Une solution est Pareto optimale si l'amélioration à l'égard d'une fonction objectif entraîne invariablement une détérioration relativement à une autre fonction objectif. Ces solutions représentent les compromis entre les différentes fonctions objectifs. L'union des solutions Pareto optimales (solutions efficaces) forme l'ensemble Pareto optimal (ensemble efficace). L'image de cet ensemble dans l'espace des objectifs représente le Front de Pareto. Ainsi, l'optimisation multiobjectif s'intéresse aux particularités liées à l'existence de ces solutions optimales multiples et aux méthodes de résolution dédiées à ce type de problèmes, bien souvent NP-difficiles.

D'autre part, la nature d'une application impose parfois l'intégration de données incertaines dans son modèle. Nous sommes donc amenés à considérer conjointement le caractère incertain et le caractère multiobjectif du problème traité. L'approche la plus classique est celle qui suppose l'incertitude de nature stochastique : les données sont considérées comme des variables aléatoires de distributions connues. Nous parlons dans ce cas de programmation linéaire stochastique multiobjectifs. Si ce point de vue permet de mieux cerner la réalité, il complique davantage les méthodes de

résolution en combinant les difficultés de la programmation linéaire multi-objectifs avec celles la programmation linéaire stochastique. Ces problèmes ont intéressé plusieurs auteurs dont Goicoechea, Leclercq [31], Teghem [39], Urli et Nadeau [45], Ben Abdelaziz [8],[9],[10], Caballero et al. [16] et Bellahcene [5],[6].

Introduire des variables entières dans un modèle stochastique multiobjectif ne fait qu'accroître les difficultés de développer des techniques de résolution. Le nombre de publications dans ce domaine témoigne de la difficulté du sujet. En effet, à ce jour, très peu de travaux ont été réalisés dans ce domaine. En 1990, Teghem [41] développe une méthode interactive appelée STRANGE-MOMIX qui est inspirée de la méthode branch and bound. En 2006, Bellahcene et Abbas [4] décrivent une méthode qui génère toutes les solutions efficaces d'un problème linéaire multiobjectifs stochastique en nombres entiers avec recours. Elle est basée sur les coupes de Gomory [20] et Dantzig [19] ainsi que la méthode de décomposition de Benders [11]. La méthode proposée en 2012 par Amrouche et Moulai [3] combine la technique de coupes d'efficacité développée par Abbas et Moulai [2], la méthode branch and bound et la méthode de Benders. En 2014, Chaabane and Mebrek [15] considèrent le problème d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème multiobjectifs stochastique discret. Dans ce travail, nous portons un intérêt pour le cas où le domaine de réalisabilité est discret et où les fonctions à optimiser ainsi que toutes les contraintes du problème multi-objectifs sont linéaires. Cet intérêt est dicté par l'aspect applicatif important de la programmation mathématique où dans bien des cas la présence des variables entières est inévitable. En effet, que l'on s'intéresse à l'optimisation d'un système de production, au design de réseaux de télécommunication, à la bio-informatique ou encore à l'extraction de connaissances, on sera confrontés à des problèmes d'optimisation discrète. On aura alors à faire à un problème de programmation linéaire multi-objectifs en nombres entiers.

Ce manuscrit est organisé en quatre chapitres : Le premier chapitre traite d'abord de quelques notions de base de la théorie des probabilités

puis les diverses techniques utilisées en programmation linéaire stochastique à objectif unique. Nous exposons les deux approches "Wait and See" et "Here and Now". Ce chapitre est fondamental pour bien saisir les divers sujets de la programmation stochastique multi-objectifs.

Nous consacrons le deuxième aux problèmes d'optimisation linéaire multi-objectifs en nombres entiers. Vu la variété des méthodes de résolution de ces problèmes, nous ne présentons que celles qui recherchent les solutions efficaces sur l'ensemble de décision.

Le troisième chapitre s'inscrit dans la continuité du premier et du second en s'intéressant cette fois-ci aux méthodes de résolution des problèmes d'optimisation multi-objectifs stochastiques en nombres entiers.

Dans le dernier chapitre, nous proposons une méthode exacte pour la recherche des solutions efficaces d'un programme linéaire multi-objectifs en nombres entiers ayant des contraintes probabilistes. Notre méthode utilise la méthode epsilon-contrainte pour ramener le problème multiobjectifs à un problème mono-objectif et utilise ensuite la notion de dualité en programmation linéaire pour l'étude de l'efficacité. Nous terminons ce chapitre par une évaluation numérique de l'algorithme proposé en l'implémentant sous l'environnement Matlab.

Enfin, une brève conclusion résume les principaux acquis de ce mémoire et ouvre des perspectives de recherche prolongeant le travail accompli.

Chapitre **1**

Programmation Linéaire Stochastique

1.1 Introduction

La programmation linéaire comporte plusieurs modèles qui permettent d'aborder un grand nombre de problèmes d'optimisation qui sont en apparence très différents, dans des contextes très divers, ses notions en fusion avec celles des probabilités qui sont tirées respectivement de (Lejeune[32], Hogg [23]) et de (Kall [25], Kall et Wallace [26], Brige [13], Wets [46]) ont donné naissance à la programmation linéaire stochastique. Ce chapitre sera dédié aux rappels de ces notions.

1.2 Eléments de la théorie des probabilités

1.2.1 Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une épreuve dont l'issue dépend du hasard. En principe, on admet que cette expérience peut être répétée indéfiniment. Son résultat peut donc varier d'une réalisation à l'autre, de plus, il est impossible de le prévoir à l'avance.

1.2.2 Ensemble fondamental

L'ensemble fondamental noté Ω est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. Il peut être :

- fini, infini dénombrable (pour le cas discret).
- infini non dénombrable (cas continu).

1.2.3 Evénement

On appelle événement, un résultat possible d'une expérience aléatoire. C'est un sous-ensemble de Ω qu'on notera par une lettre majuscule A, B, \dots

1.2.4 Tribu ou σ -algèbre

On appelle tribu ou σ -algèbre d'événements sur Ω , toute famille que l'on notera par \mathbf{E} telle que

- $\Omega \in \mathbf{E}$.

- Si $A \in \mathbf{E}$ alors $\bar{A} \in \mathbf{E}$ (\bar{A} est le complémentaire de A).
- $A_i \in \mathbf{E}$ alors $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbf{E}$,

1.2.5 Espace probabilisable

C'est le couple (Ω, \mathbf{E}) où Ω est l'ensemble fondamental et \mathbf{E} la σ -algèbre d'événements sur Ω .

1.2.6 Définition d'une probabilité sur un espace probabilisable

Définir une probabilité sur (Ω, \mathbf{E}) , c'est associer à chaque événement A un poids $P(A)$ représentant la chance qu'il a de se réaliser.

On appelle probabilité sur l'espace (Ω, \mathbf{E}) , toute application P définie de (Ω, \mathbf{E}) dans $[0, 1]$ telle que :

- $P(\Omega) = 1$
- Quelle que soit la suite (A_i) d'événements deux à deux disjoints

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Remarque 1.1 Si Ω est fini de cardinal n alors

$$P\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

L'espace (Ω, \mathbf{E}, P) est appelé espace probabilisé

1.2.7 Variable aléatoire

Soit (Ω, \mathbf{E}, P) un espace probabilisé et (Ω', \mathbf{E}') un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire une application mesurable X définie sur (Ω, \mathbf{E}) à valeur dans (Ω', \mathbf{E}') telle que :

$$\forall A' \in \mathbf{E}', X^{-1}(A') \in \mathbf{E}$$

$$\text{où } X^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\}$$

On distingue deux types de variables aléatoires : variable aléatoire continue et variable aléatoire discrète.

1.2.8 Variable aléatoire continue

Une variable aléatoire X est continue si $X(\Omega)$ est un intervalle de \mathbb{R} .

1.2.9 Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire X est dite discrète si $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou infini dénombrable.

1.2.10 Loi d'une variable aléatoire

Soient (Ω, \mathcal{e}, P) un espace de probabilité, (Ω_0, \mathbf{E}_0) un espace probabilisable et une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathbf{E}) à valeur dans (Ω_0, \mathbf{E}_0) . On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X , la probabilité image de P par X notée P_X

$$\forall A' \in \mathbf{E}_0 = P_X(A') = P(X^{-1}(A'))$$

- Si $(\Omega_0, \mathbf{E}_0) = (\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}})$, (respectivement $(\mathbb{R}^p, \mathbb{B}_{\mathbb{R}^p})$), alors X est une variable aléatoire réelle (respectivement vecteur aléatoire réel de dimension p).
- De même si X prend ses valeurs dans $(\mathbb{Z}; P(\mathbb{Z}))$, X est une variable aléatoire discrète.

1.2.11 Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire continue. On appelle fonction de répartition de X , la fonction notée F_X définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(]-\infty, x]) = P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\})$$

On la note par :

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Propriétés 1.1 *La fonction F_X est une fonction croissante et continue.*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$$

$$0 \leq F_X(x) \leq 1, \forall x$$

1.2.12 Fonction de masse

Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle fonction de masse, la fonction $P_x : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie pour chaque $x \in \mathbb{R}$ par $P_X(x) = P(X = x)$

1.2.13 Densité de probabilité

Soit f une fonction définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . f est dite densité de probabilité (fonction de densité) si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$

2. f est intégrable,

3. $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$

1.2.14 Moments

- **Moment non centré d'ordre k**

Le moment non centré d'ordre k d'une variable aléatoire réelle est la quantité :

$$m_k = \int_{\Omega} x^k dx$$

Pour $k = 1$, m_1 est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X . On la note par $E(X)$.

- Si X admet une densité de probabilité alors :

$$m_k = \int_{\Omega} x^k f(x) dx$$

- Si X est une variable aléatoire discrète alors :

$$m_k = \sum_{x \in \Omega} x^k P_X(x)$$

(P_X étant la loi de probabilité de X)

• **Moment centré d'ordre k**

Le moment centré d'ordre k de la variable aléatoire réelle X est la quantité :

$$\mu_k = \int_{\Omega} [X - E(X)]^k dP_X = \int_{\Omega} [X - m_1]^k dP_X$$

Pour $k = 2$, le moment μ_2 s'appelle variance de la variable aléatoire X . On la note par $V(X)$ et on a :

$$V(X) = E(X - E(X))^2$$

la racine carrée de la variance est l'écart type :

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Covariance

On appelle covariance de deux variables aléatoires X et Y , notée $Cov(X, Y)$, le nombre réel suivant :

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

La matrice de covariance

Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire. La matrice de **covariance** de X est une matrice carrée notée V dont le terme générique est donné par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} Cov(X_i, X_j) & \text{si } i \neq j \\ V(X_i) & \text{si } i = j \end{cases} \quad i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, p$$

V est définie comme suit :

$$V = \begin{pmatrix} V(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \dots & Cov(X_1, X_p) \\ Cov(X_2, X_1) & V(X_2) & \dots & Cov(X_2, X_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_p, X_1) & Cov(X_p, X_2) & \dots & V(X_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1 X_2} & \dots & \sigma_{X_1 X_p} \\ \sigma_{X_2 X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \dots & \sigma_{X_2 X_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X_p X_1} & \sigma_{X_p X_2} & \dots & \sigma_{X_p}^2 \end{pmatrix}$$

1.2.15 Propriétés

- **Propriétés de l'espérance**

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω et admettant chacune une espérance mathématique, alors :

- $E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$ si X et Y sont indépendants
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX) = aE(X) \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $E(b) = b \quad \forall b \in \mathbb{R}$
- Si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$

- **Propriétés de la variance et la covariance**

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω et admettant chacune une espérance mathématique, alors :

- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ si X et Y sont indépendantes
- $V(aX) = a^2V(X) \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $V(X + b) = V(X) \quad \forall b \in \mathbb{R}$
- $V(b) = 0 \quad \forall b \in \mathbb{R}$
- $Cov(X, Y) = 0$ si X et Y sont indépendantes
- $V(aX + bY) = a^2V(X) + 2abCov(X, Y) + b^2V(Y)$

1.2.16 Lois de probabilité usuelles

a) Cas discret

- **Loi de Bernoulli**

La loi de Bernoulli est la loi du résultat d'une expérience ne pouvant aboutir qu'à deux résultats possibles. Par exemple, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}$ alors, $p(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$. On note $X \rightsquigarrow \mathbf{B}(p)$.

La fonction de masse est donnée par la formule suivante :

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}$$

Ses moments sont : $E(X) = p$ et $V(X) = pq = p(1-p)$

• **Loi Binomiale**

C'est une loi de Bernoulli répétée n fois. La loi de X est appelée loi Binomiale de paramètres n et p . On note $X \rightsquigarrow \mathbf{B}(n, p)$.

Sa fonction de masse est :

$$P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{1-x}$$

Ses moments sont : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

b) Cas continu

• **Loi uniforme**

On dit qu'une variable aléatoire X est uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ si sa fonction de densité $f(x)$ s'écrit comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

• **Loi normale unidimensionnelle**

On dit que X suit la loi normale de paramètres m et σ ($\sigma > 0$), $X \rightsquigarrow N(m, \sigma)$, si sa densité de probabilité s'écrit :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} ; x \in \mathbb{R}$$

Ses moments d'ordre 1 et 2 sont : $E(X) = m$, $V(X) = \sigma^2$

• **Loi normale centrée réduite**

Soit $X \rightsquigarrow N(m, \sigma)$, la variable aléatoire $U = \frac{x-m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée et réduite (de moyenne nulle et de variance égale à 1). Sa fonction de densité est :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} ; x \in \mathbb{R}$$

1.3 Optimisation Linéaire Stochastique Mono-objectif

Introduction

Pour beaucoup de problèmes réels, les données d'un problème ne peuvent être connues exactement pour une variété de raisons. La première raison est due à l'erreur de mesure simple. La deuxième raison plus fondamentale est que quelques données représentent des informations sur le futur, et par conséquent elles ne peuvent être connues à l'avance avec certitude. Nous discutons quelques manières de tenir compte de cette incertitude et, spécifiquement, pour illustrer comment la programmation stochastique peut être employée pour prendre quelques décisions "optimales".

Le modèle général de programmation linéaire stochastique est le suivant :

$$\begin{aligned} \text{Opt } Z(x, \omega) &= C^t(\omega)x \\ \text{s.c } x &\in S(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(\omega)x \leq b(\omega), x \geq 0\} \end{aligned}$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de décision, $A(\omega)$ est une matrice ($m \times n$) de rang m , ($m \leq n$), $C(\omega)$ et $b(\omega)$ sont des vecteurs ayant n composantes. Les coefficients de $A(\omega)$ ainsi que les composantes de $C(\omega)$ et $b(\omega)$ sont des variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{E}, P)$ donné, de distributions connues.

1.3.1 Les différentes approches

Il existe deux approches de la programmation linéaire stochastique :

- L'approche Passive ou "Wait and See".
- L'approche Active ou "Here and Now".

1.3.1.1 Approche passive ou "Wait and See" :

Elle désigne la situation dans laquelle le décideur peut attendre la réalisation des variables aléatoires pour prendre une décision. Dans ce cas, on peut s'intéresser à la fonction de répartition de la valeur optimale.

$$\gamma(\omega) = \min C^t(\omega)x$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Pour $\omega \in \Omega$. Dans cette approche $C(\omega)$ est de la forme :

$$C(\omega) = (\alpha_1\omega_1 + \beta_1, \alpha_2\omega_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n\omega_n + \beta_n)$$

α_i et β_j sont des réels.

Cependant, puisqu'il n'est pas possible de trouver un vecteur

$x^o \in S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ qui soit optimal pour tout $\omega \in \Omega$, Tinter [46] a proposé de remplacer la notion classique d'optimalité utilisée en programmation linéaire déterministe par le concept "d'efficacité avec probabilité 1" donné la définition suivante :

Définition 1.1 $x^o \in S$ est efficace avec probabilité 1 s'il n'existe aucun $x^1 \in S$ tel que $P\{\omega \mid C^t(\omega)x^1 \leq C^t(\omega)x^o\} = 1$ et $P\{\omega \mid C^t(\omega)x^1 < C^t(\omega)x^o\} > 0$.

Autrement dit, un point $x^o \in S$ est efficace avec probabilité 1 s'il n'existe aucun autre point x^1 de S presque sûrement aussi bon que x^o et qui soit meilleur que x^o avec une probabilité positive.

Dans ce cas, si l'on désigne par $G = \{A_B^l, 1 \leq l \leq q\}$ l'ensemble des sous matrices carrées de A de rang m régulières, associées aux solutions de base réalisables $x_l, 1 \leq l \leq q$ de S , la définition 1.1 permet de caractériser les régions de décision

$$\begin{aligned} \Omega_l &= \{\omega \mid \gamma(\omega) = C^t(\omega)x_l = \min C^t(\omega)x, x \in S\} \\ &= \{\omega \mid C_B^l(\omega)(A_B^l)^{-1}A_N^l - C_N^l(\omega) \leq 0\} \end{aligned}$$

Où $C_B^l(\omega)$ et $C_N^l(\omega)$ sont respectivement, les composantes de base et hors base du vecteur $C(\omega)$ et A_N^l est la matrice hors base associée à x_l .

La fonction de répartition de la valeur optimale $\gamma(\omega)$ de $Z(x, \omega)$ est donnée par :

$$F_{\gamma(\omega)}(Z) = \sum_{l=1}^q \int_{\Omega_{lZ}} f(\omega) d\omega$$

avec

$$\Omega_{l_z} = \{\omega | \gamma_l(\omega) \leq z\}$$

Pour plus de détails sur cette approche, nous renvoyons le lecteur à la thèse de Hameg [22]

Remarque 1.2 *Même si cette définition est intéressante du point de vue théorique par le problème de répartition qu'elle permet de poser, elle l'est moins du point de vue pratique, car son application nécessite la détermination de toutes les bases et solutions de base réalisables de l'ensemble des décisions S , ce qui est fastidieux et irréaliste pour les problèmes de grande taille.*

1.3.1.2 Approche active ou 'Here and Now' :

C'est une approche basée sur le principe de prise de décision et le choix d'une stratégie x sans connaître au préalable la réalisation des variables aléatoires. Elle a été développée pour palier à la difficulté du calcul de la fonction de répartition de l'approche passive. L'idée de base de cette approche est la transformation systématique des problèmes stochastiques en programmes déterministes équivalents. La question posée est selon quel critère choisir une stratégie x de S , ou encore, comment devons nous interpréter l'objectif $Z(x, \omega)$ et les contraintes $A(\omega)x \leq b(\omega)$ pour obtenir le programme déterministe équivalent.

Cas des objectifs aléatoires

Plusieurs critères d'optimisation sont utilisés dans la littérature pour transformer le problème stochastique en programme déterministe équivalent. On distingue :

- a. **Le critère de l'espérance mathématique (E-modèle) :** Le E-modèle est le plus utilisé, introduit par Charnes et Cooper [17]. Il consiste à remplacer la variable aléatoire de l'objectif par son espérance mathématique.

matique pour obtenir le programme linéaire déterministe suivant :

$$\begin{cases} \min E(C^t(\omega))x \\ sc \\ x \in S = \{x / Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases}$$

- b. Le critère de la variance (V – modèle) :** Dans le cas où C est un vecteur aléatoire d'espérance \bar{C} et de matrice de covariance V . La variance de $C(\omega)x$ est x^tVx . De la minimisation de la variance résulte le V-modèle suivant :

$$\begin{cases} \min \sigma^2(Z(x,\omega)) = x^tVx \\ sc \\ x \in S = \{x / Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases}$$

- c. Le critère espérance-variance (E-V modèle) :** Ce modèle consiste à minimiser la variance de $Z(x,\omega)$ tout en réalisant un niveau de rendement minimum Z_o fixé préalablement par le décideur :

$$\begin{cases} \min \sigma^2(Z(x,\omega)) \\ sc \\ E(Z(\omega)) \geq Z_o \end{cases}$$

Le problème est de choisir Z_o convenable.

- d. Le critère de risque minimal (P-modèle) :** La maximisation de la probabilité que la valeur de l'objectif est au moins égale à un certain niveau μ choisi par le décideur est appelée P-modèle ou modèle de risque minimal donné par Bareanu [12]

$$\begin{cases} \max P(\omega / C^t(\omega)x \leq \mu) \\ sc \\ x \in S = \{x / Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases}$$

La solution de ce problème, dans le cas gaussien, est donnée par le

programme fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} \max & \frac{\bar{C}^t x - \mu}{\sqrt{x^t V x}} \\ \text{sc} & \\ x \in S & \end{cases}$$

où \bar{C} est l'espérance mathématique de $C(\omega)$, V sa matrice de covariance et $x^t V x$ la variance de $C^t(\omega)x$.

e. Le critère de Kataoka : [27] La maximisation de α -fractile de la fonction de distribution de l'objectif où α est choisi par le décideur :

$$\begin{cases} \min & \mu \\ P(\omega / C^t(\omega)x \leq \mu) = \alpha & 0 < \alpha < 1 \\ x \in S & \end{cases}$$

Dans le cas gaussien on a :

$$P(\omega / C^t(\omega)x \leq \mu) = P\left(\omega / \frac{C^t(\omega)x - \bar{C}^t x}{\sqrt{x^t V x}} \leq \frac{\bar{C}^t x - \mu}{\sqrt{x^t V x}}\right) = \Phi\left(\frac{\bar{C}^t x - \mu}{\sqrt{x^t V x}}\right)$$

pour $x \neq 0$

où ϕ :est la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite. Ainsi,

$$P(\omega / C^t(\omega)x \leq \mu) = \alpha \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\bar{C}^t x - \mu}{\sqrt{x^t V x}}\right) \Leftrightarrow \mu = \bar{C}^t x + \phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^t V x}$$

Par conséquent, résoudre le problème de Kataoka revient à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \min & \bar{C}^t x + \phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^t V x} \\ \text{sc} & \\ x \in S & \end{cases}$$

La fonction $\bar{C}^t x + \phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^t V x}$ est convexe si $\phi^{-1}(\alpha) \geq 0$ ce qui revient à dire, que $\alpha \geq \frac{1}{2}$ ou bien $P(\omega / C^t(\omega)x \leq \mu) = \alpha \geq \frac{1}{2}$, Ceci

nous garantit le minimum de l'objectif avec une probabilité supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$ (voir Ishhii [24]). Le terme $\phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^t V x}$ représente une pénalité pour l'acceptation d'un risque.

Cas des contraintes aléatoires

Dans ce paragraphe, nous supposons que l'objectif est déterministe ou qu'il a été rendu déterministe en appliquant l'un des critères précédents. Les contraintes stochastiques : $A(\omega)x \leq b(\omega)$ seront traitées suivant deux modèles différents : le modèle avec seuil de probabilité sur les contraintes "chance constrained programming" et le modèle avec recours.

Le modèle avec seuil de probabilité sur les contraintes

Ce modèle a été introduit en programmation stochastique depuis les années soixante par Charnes et Cooper [17].

L'idée de la modélisation consiste à imposer que la violation des contraintes ne se produise qu'avec une probabilité fixée.

- Soit on impose un seuil de probabilité individuel α_i , avec $0 < \alpha \leq 1$, pour chaque contrainte i ($i = 1, \dots, m$). Il représente la probabilité avec laquelle la contrainte i doit être vérifiée. Le problème déterministe équivalent est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min E(C^t(\omega))x \\ sc \\ P(A_i(\omega)x \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

- Soit l'on impose un seuil de probabilité global α , avec $0 < \alpha_i \leq 1$, pour l'ensemble des contraintes : il représente la probabilité avec laquelle les contraintes doivent être globalement vérifiées. Le problème déterministe équivalent est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min E(C^t(\omega))x \\ Sc \\ P(A(\omega)x \leq b(\omega)) \geq \alpha \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

Dans les deux cas, la question est de savoir si les ensembles

$$S(\alpha_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P(A_i(\omega)x \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i, i = 1, \dots, m, x \geq 0\} \text{ et}$$

$$S(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P(A(\omega)x \leq b(\omega)) \geq \alpha, x \geq 0\} \text{ sont convexes.}$$

La convexité des ensembles $S(\alpha)$ et $S(\alpha_i)$ dépend non seulement de la distribution de A et b mais aussi des seuils α et α_i . Le théorème suivant est le seul établissant la convexité de $S(\alpha)$ ou $S(\alpha_i)$ sans prendre en compte la distribution de probabilité des variables aléatoires.

Théorème 1.3.1 *Kall[25]*

$S(0)$ et $S(1)$ sont convexes.

Citons, à titre d'exemple, quelques conditions de convexité de $S(\alpha_i)$ ou $S(\alpha)$.

- *Cas où A est déterministe et b est aléatoire*

Pour ce cas spécial, la réponse à la question posée est très simple. Si F_i est la fonction de répartition de b_i , alors :

$$\begin{aligned} S(\alpha_i) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid P(A_i x \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid P(b_i(\omega) \leq A_i x) \leq 1 - \alpha_i\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_i x \leq F_i^{-1}(1 - \alpha_i)\} \end{aligned}$$

$S(\alpha_i)$ est un ensemble de contraintes linéaires en x , donc il est convexe.

- *Cas où A et b sont des variables aléatoires normales*

Cas 1 : A et b non indépendantes

Pour ce cas général, on suppose que (A_i, b_i) est un vecteur aléatoire normalement distribué de moyenne $\mu_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ et de matrice de covariance V_i . En vertu de la théorie des probabilités, la variable aléatoire $t_i(x) = A_i x - b_i$ a une distribution normale de moyenne $m_i(x) = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_j - \mu_{i,n+1}$ et de la variance

$$\sigma_i^2(x) = z^t V_i z \text{ avec } z = (x_1, x_2, \dots, x_n, -1)^t \text{ et}$$

$$\sigma_i(x) > 0, \forall x \text{ car } x_{n+1} = -1$$

$$\begin{aligned} S(\alpha_i) &= \{x \in \mathbb{R}^n | P(t_i(x) \leq 0) \geq \alpha_i\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n | P\left(\frac{t_i(x) - m_i(x)}{\sigma_i(x)} \leq \frac{-m_i(x)}{\sigma_i(x)}\right) \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n | \Phi\left(\frac{-m_i(x)}{\sigma_i(x)}\right) \geq \alpha_i \right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n | m_i(x) + \phi^{-1}(\alpha_i)\sigma_i(x) \leq 0\} \end{aligned}$$

Puisque $m_i(x)$ est affine en x et $\sigma_i(x)$ est convexe en x , la contrainte $(m_i(x) + \phi^{-1}(\alpha_i)\sigma_i(x) \leq 0)$ est convexe si et seulement si $\phi^{-1}(\alpha_i) \geq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha_i \geq \frac{1}{2}$.

Cas 2 : A et b indépendantes

$$a_{ij} \sim N(\mu_{ij}, v_{ij}^2), \quad b_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$$

Alors la variable $A_i x - b_i$ a pour distribution :

$$N\left(\sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_j - m_i, \sum_{j=1}^n v_{ij}^2 x_{ij}^2 + \sigma_i^2\right)$$

$$S(\alpha_i) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | \sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_j - m_i + \phi^{-1}(\alpha_i) \sqrt{\sum_{j=1}^n v_{ij}^2 x_{ij}^2 + \sigma_i^2} \leq 0 \right\}$$

Le modèle avec recours

Pour construire ce modèle, on procède en deux étapes. Une décision x est choisie, préalablement à toute réalisation de l'aléatoire. Une fois qu'une réalisation $\omega \in \Omega$ est observée, une décision corrective représentée par un vecteur $y(k+1)$ appelé recours est prise pour compenser la violation des contraintes qui y correspond. Cette compensation se fait par l'introduction d'une fonction de pénalité $q(\omega)y$ qui est en général linéaire. La minimisation de cette pénalité correspond au problème de recours ou de second niveau

suivant :

$$\begin{cases} Q(x, \omega) = \min q^t(\omega)y \\ sc \\ W(\omega)y = b(\omega) - A(\omega)x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

W ($m \times k$) étant la matrice de recours.

Considérées globalement, ces deux étapes fournissent le problème :

$$\begin{cases} \min_x E(C^t(\omega)x + \min q^t(\omega)y) \\ sc \\ A(\omega)x + W(\omega)y = b(\omega) \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Qui s'écrit de manière équivalente

$$\min_{x \in S} E(C^t(\omega))x + E(Q(\omega, x))$$

Où

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \omega \in \Omega, \exists y \geq 0 \mid A(\omega)x + W(\omega)y = b(\omega)\}$$

Pour que le problème avec recours ait un sens, il faut que l'ensemble S soit non vide, autrement dit, il faut qu'il existe toujours, quelque soit la réalisation de l'aléatoire, un recours y possible (*i.e.* $Q(x, \omega) < \infty, \forall \omega \in \Omega$)

Wets [46] a montré que S est un ensemble convexe.

Nous parlerons :

- De recours fixe, si la matrice de recours $W(\omega)$ est fixe *i.e.* $W(\omega) = W$.
- De recours (fixe) simple, si $W = (I, -I)$ ou I est la matrice identité d'ordre m .

Dans ce cas, le vecteur y est décomposé en deux parties :

- $y^+(m \times 1)$: variable d'écart par excès.
- $y^-(m \times 1)$: variable d'écart par défaut.

Parallèlement le vecteur de pénalisation se décompose en $q(\omega) = (q^+(\omega), q^-(\omega))$. Le programme avec recours se met alors sous la

forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_x E(C^t(\omega))x + E(\min_{q^+, q^-} q^+(\omega)y^+ + q^-(\omega)y^-) \\ sc \\ y^+ - y^- = b(\omega) - A(\omega)x \\ y^+ \geq 0, y^- \geq 0 \end{array} \right.$$

Exemple 1.1

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z(x) = 2x_1 + x_2 \\ sc \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 0.5x_1 + 0.3x_2 \geq b(\omega) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Où b suit une loi uniforme sur l'intervalle $[1.2, 1.6]$:

Ce problème correspond à la recherche du cout minimal pour une opération de fusion de deux types de minerai. La demande est aléatoire uniforme et un problème de capacité limite l'opération à 4 unités.

- Remplaçons en premier lieu la demande par son espérance

$$E(b(\omega)) = 1.4$$

Le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z(x) = 2x_1 + x_2 \\ sc \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 0.5x_1 + 0.3x_2 \geq 1.4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

a pour solution $x_1^* = 1, x_2^* = 3$ pour valeur optimale $Z^* = 5$

La probabilité pour que cette solution soit admissible est :

$$P(b|1 + 3 \leq 4; 0.5 \times 1 + 0.3 \times 3 \geq b(\omega)) = P(1.4 \geq b(\omega)) = \frac{1}{2}$$

- Pour l'interprétation avec seuils de probabilités sur les contraintes, choisissons $\alpha = 0.9$.

Cette interprétation peut être utilisée par la firme si elle n'a pas de capacité de stockage et souhaite maintenir le nombre de clients satisfaits. Elle doit être en mesure d'assurer les livraisons à 90%. Dans ce

cas, la contrainte devient :

$$P(0.5x_1 + 0.3x_2 \geq b(\omega)) \geq 0.9$$

Soit F la fonction de répartition de $b(\omega)$, alors :

$$F((0.5x_1 + 0.3x_2) \geq 0.9) \Leftrightarrow 0.5x_1 + 0.3x_2 \geq F^{-1}(0.9)$$

Or

$$F^{-1}(0.9) = 1.56$$

Le problème avec seuils de probabilités sur les contraintes stochastiques s'écrit :

$$\begin{cases} \min Z(x) = 2x_1 + x_2 \\ \text{sc} \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 0.5x_1 + 0.3x_2 \geq 1.56 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution est : $x_1^* = 1.8$, $x_2^* = 2.2$ pour valeur optimale $Z^* = 5.8$

- Considérons maintenant un problème avec recours. Supposons que la firme ait un contrat stipulant que la demande doit être satisfaite, et qu'elle doit commander le minerai à l'avance. Si elle produit trop, elle peut écouler l'excédent chez d'autres clients à 2 unités monétaires au dessous du taux fixé. Si elle produit trop peu, elle peut acheter sur le marché le complément à 4 unités monétaires au dessus du taux fixé. Les couts supplémentaires sont :

$$2(0.5x_1 + 0.3x_2 - b(\omega)) \quad \text{si } 0.5x_1 + 0.3x_2 - b(\omega) \geq 0$$

$$4(b(\omega) - 0.5x_1 - 0.3x_2) \quad \text{si } 0.5x_1 + 0.3x_2 - b(\omega) \leq 0$$

Soit $Q(x_1, x_2, \omega)$ ces couts supplémentaires, c'est aussi la pénalité que l'on doit ajouter à

la fonction économique d'origine.

Le problème avec recours revient à résoudre :

$$(P) \quad \begin{cases} \min Z'(x) = 2x_1 + x_2 + E(Q(x_1, x_2, \omega)) \\ \text{sc} \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

soit

$$Q(x_1, x_2) = E [Q(x_1, x_2, \omega)] = \frac{1}{0.4} \int_{1.2}^{0.5x_1+0.3x_2} 2(0.5x_1 + 0.3x_2 - t) dt \\ + \frac{1}{0.4} \int_{0.5x_1+0.3x_2}^{1.6} 4(t - 0.5x_1 - 0.3x_2) dt$$

$$Q(x_1, x_2) = \frac{15}{2}(0.5x_1 + 0.3x_2)^2 - 22(0.5(x_1 + 0.3x_2)) + \frac{82}{5}$$

(P) devient un problème quadratique :

$$(P) \quad \begin{cases} \min Z'(x) \frac{15}{2}(0.5x_1 + 0.3x_2)^2 - 22(0.5(x_1 + 0.3x_2)) + \frac{82}{5} \\ \text{sc} \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Sa solution est : $x_1^* = 0$, $x_2^* = 4$ pour valeur optimale $Z^* = 4.8$

Chapitre 2

Programmation linéaire multi-objectifs en nombre entiers

2.1 Programmation linéaire en nombre entiers

La programmation linéaire en nombres entiers est un domaine très riche de la programmation mathématique. Les recherches dans ce domaine sont nombreuses et ont vu leurs naissances en 1958. Un problème de programmation linéaire en nombres entiers (PLNE) est un programme mathématique dont la fonction objectif et les contraintes sont des fonctions linéaires et dans lequel il y a une contrainte supplémentaire qui est la contrainte d'intégrité. La forme générale d'un programme linéaire en nombres entiers se présente comme suit :

$$(PLNE) \quad \begin{cases} \max(\min) Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ s.c \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq, \geq \text{ou} = b_i, \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, n \\ x_j \text{ entier}, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

On appelle relaxation continue, le problème obtenu de (PLNE), en supprimant les contraintes d'intégrité .

Le programme relaxé du problème (PLNE) est donné comme suit :

$$(PR) \quad \begin{cases} \max(\min) Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ s.c \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq, \geq \text{ou} = b_i, \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, n \end{cases}$$

2.2 Méthodes de résolution

Ces méthodes sont capables de trouver une solution optimale d'un problème donné dans un intervalle de temps bien déterminé mais exponentiel car les problèmes PLNE sont NP-complets.

Parmi ces méthodes, on retrouve la méthode des coupes, la méthode de

séparation et d'évaluation (Branch and Bound), et la méthode qui combine ces deux dernières (Branch and Cut).

2.2.1 Coupes de Gomory [20]

L'algorithme utilisant les coupes de Gomory procède comme suit :

Soit \bar{x} une solution optimale du problème relaxé (PR) trouvée par la méthode du simplexe.

Si \bar{x} est une solution entière, elle est optimale pour (PLNE). Sinon, choisir une variable x_j telle que la valeur \bar{x}_j est fractionnaire et considérer la ligne correspondante du tableau simplexe, par exemple la ligne i :

$$\sum_{k \in J_H} a_{ik} x_k = \bar{x}_j$$

Où J_H est l'ensemble des indices des variables hors-base

La contrainte

$$\sum_{k \in J_H} f(a_{ik}) x_k \geq f(a_{ik})$$

est alors déduite de l'expression précédente. Ici $f(a_{ik})$ désigne la partie fractionnaire du nombre a_{ik} . Elle est donnée par $f(a_{ik}) = a_{ik} - [a_{ik}]$ où $[a_{ik}]$ est la partie entière de a_{ik}

Cette coupe, appelée coupe fractionnaire de Gomory, peut être rajoutée au dernier tableau simplexe.

L'application de l'algorithme dual du simplexe permet de trouver la solution optimale entière de PLNE.

2.2.2 Méthodes par séparation et évaluation (S-E)(Branch and Bound)

Le principe des procédures par séparation et évaluation est basé sur l'exploration d'un arbre de solution. Toutes les solutions possibles du problème sont séparées en deux sous ensembles ou plus, chacun d'eux est représenté par une branche de l'arbre de décision.

Par la suite, on associe à chaque sous-ensemble une évaluation qui est une borne inférieure de la fonction objectif pour un problème de minimisation (respectivement une borne supérieure de la fonction objectif pour un

problème de maximisation).

Si la plus petite évaluation (respectivement la plus grande) est associée à une solution réalisable, alors cette solution est optimale, sinon, l'ensemble auquel correspond l'évaluation est de nouveau séparé.

Algorithme Branch and Bound

1. **Initialisation** : On résout le problème relaxé (PR) : $\{Z_{max(min)}; x \in S\}$, où S est un ensemble de solution. Si la solution est entière alors **fin**, sinon il faut trouver un majorant ou un minorant Z_u de la fonction économique : soit en calculant Z sur un point intérieur entier du polyèdre, soit en prenant $Z_u = -\infty$ pour une maximisation (respectivement $Z_u = +\infty$ pour une minimisation
2. **Séparation** : On considère le sous-ensemble S_k de solutions, avec $S_1 = S$. On choisit une composante non entière (celle qui a la plus grande partie fractionnaire) de la solution optimale du sous-problème $\{Z_{max(min)}; x \in S\}$, et on partitionne S_k en S_k' et S_k'' , en ajoutant des contraintes qui excluent la partie fractionnaire de la composante choisie.
3. **évaluation** : Pour chaque sous-problème $\{Z_{max(min)}; x \in S_k'\}$, et $\{Z_{max(min)}; x \in S_k''\}$, on calcule la solution optimale $Z_{L'k}$ et $Z_{L''k}$.
4. **Stérilisation** : On examine chaque sous-ensemble susceptible de contenir la solution optimale. On stérilise un sous-ensemble si :
 - $Z_L \leq Z_u$, [respectivement $Z_L \geq Z_u$], avec Z_u la solution courante et Z_L la solution père.
 - Le sous-problème a un ensemble vide de solution.
 - Z_L est obtenue avec une solution entière (évaluation exacte) et $Z_L > Z_u$, [respectivement $Z_L < Z_u$].
5. **Test** : Si tous les sous-ensembles sont stériles, alors **FIN**, sinon on retourne à l'étape 2.
 - Z_u : la solution père.
 - Z_L : la solution courante.

2.3 Programmation Linéaire Multi-objectifs en nombre entiers

Nous définissons un problème linéaire multi-objectifs comme en nombre entiers un problème de décision qui consiste à optimiser (maximiser ou minimiser) simultanément p fonctions linéaires notées Z_k , $k = 1, \dots, p$ sur un ensemble d'action S' discret. Ce problème peut être formulé mathématiquement comme suit :

$$(P_1) \quad \begin{cases} \text{"Opt"} [Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_k(x)] \\ x \in S' \end{cases}$$

où $S' = \{x \in S \mid x \text{ entier}\}$

Le symbole " " signifie qu'il n'est généralement pas possible de trouver dans S' une action qui optimise simultanément les p objectifs. L'ensemble S est un sous ensemble de \mathbb{R}^n décrit implicitement par des inéquations et/ou des équations, représentant les contraintes.

$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$. A , x et b sont des matrices déterministes de dimensions respectives $(m \times n)$, $(n \times 1)$ et $(m \times 1)$, où n est le nombre de variables, m est le nombre de contraintes du système.

Puisque les objectifs Z_i sont linéaires, le programme peut être formulé de la façon suivante :

$$(P_2) \quad \begin{cases} \text{Opt } Z_k(x) = C_k x, & k = 1, \dots, p \\ sc \\ x \in S \\ x \text{ entier} \end{cases}$$

2.4 Relation de dominance et d'efficacité

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques définitions concernant un problème de minimisation de la forme

$$(P_3) \quad \begin{cases} \min Z_k(x) = C_k x, & k = 1, \dots, p \\ \text{sc} \\ x \in S' \end{cases}$$

Elles peuvent être adaptées à un problème de maximisation en changeant les inégalités

Dominance

Définition 2.1 Soient deux vecteurs critères $Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}^p$. On dit que Z_1 domine Z_2 si et seulement si $(Z_1)_k \leq (Z_2)_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$ et $(Z_1)_p < (Z_2)_p$ pour au moins un indice $k \in \{1, \dots, p\}$.

Autrement dit, Z_1 est au moins aussi bon que Z_2 sur tous les objectifs, et meilleur que lui sur au moins un des objectifs.

Dominance forte

Définition 2.2 Soient deux vecteurs critères $Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}^p$. On dit que Z_1 domine fortement Z_2 si et seulement si $(Z_1)_k < (Z_2)_k$ pour $k \in \{1, \dots, p\}$.

Si Z_1 domine fortement Z_2 , alors Z_1 est meilleur que Z_2 sur tous les objectifs.

Efficacité

Définition 2.3 Une solution $\hat{x} \in S'$ est une solution efficace-ou pareto optimale-pour (P_3) s'il n'existe pas de solution $x \in S'$ telle que $Cx \leq C\hat{x}$ et $Cx \neq C\hat{x}$.

Une solution $\hat{x} \in S'$ est efficace si son vecteur objectif n'est pas dominé par le vecteur objectif d'une autre solution de S' . Le terme efficacité est aussi connu sous d'autres appellations comme : optimum de Paréto ou solution de compromis.

Efficacité faible

Définition 2.4 Une solution $\hat{x} \in S'$ est une solution faiblement efficace pour (P_3) s'il n'existe pas $x \in S'$ tel que $Cx < C\hat{x}$.

Une solution est faiblement efficace si son vecteur objectif n'est pas fortement dominé

Efficacité forte

Définition 2.5 Une solution $\hat{x} \in S'$ est une solution fortement efficace pour (P_3) s'il n'existe pas de solution $x \in S'$ telle que $x \neq \hat{x}$ et $Cx \leq C\hat{x}$.

Une solution \hat{x} est fortement efficace s'il n'existe pas de solution x telle que le vecteur objectif, qui lui est associé, soit aussi bon que celui de \hat{x} .

Remarque 2.1 L'efficacité forte implique l'efficacité qui implique à son tour l'efficacité faible.

2.5 Méthodes de résolution d'un problème multi-objectifs en nombres entiers (MOILP)

2.5.1 Méthode basée sur le concept d'ensembles dominants [33]

Il s'agit dans ce paragraphe de reprendre dans le cas de variables discrètes un concept introduit par Steuer [36] utilisé pour détecter graphiquement l'ensemble des solutions efficaces d'un problème (MOILP) dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

Pour tester l'efficacité en un point $x \in S'$, Steuer a introduit le concept d'ensembles dominants au sens de la définition suivante :

Définition 2.6 Soit $\hat{x} \in S'$. Nous définissons C^{\geq} comme étant la région semi-positive du cône généré par les gradients des p fonctions objectifs où :

$$C^{\geq} = \{y \in \mathbb{Z}^n / Cy \geq 0, Cy \neq 0\} \cup \{0_{\mathbb{Z}^n}\}$$

.

Définition 2.7 L'ensemble dominant $D_{\hat{x}} = \{\hat{x}\} \oplus C^{\geq}$ est donné par la somme des ensembles $\{\hat{x}\}$ et C^{\geq} . Une autre façon de décrire l'ensemble dominant

est $D_{\hat{x}} = \{x \in \mathbb{Z}^n / x = \hat{x} + y, Cy \geq 0, Cy \neq 0\}$. L'ensemble dominant contient tous les points dont les vecteurs critères dominant le vecteur critère de $\hat{x} \in S'$

Le théorème suivant montre l'importance de l'ensemble dominant $D_{\hat{x}}$ dans la détection des points efficaces.

Théorème 2.5.1 [35] *Soit $D_{\hat{x}}$ l'ensemble dominant en $\hat{x} \in S'$. Alors, \hat{x} est efficace si et seulement si $D_{\hat{x}} \cap S' = \{\hat{x}\}$*

Le théorème 2.5.1 fournit un test permettant de détecter les points efficaces et pouvant être géométriquement visualisés : Si l'intersection de l'ensemble dominant avec la région réalisable contient seulement \hat{x} , alors \hat{x} est efficace. S'il existe d'autres points appartenant à l'intersection de ces deux ensembles, alors \hat{x} est inefficace.

Exemple 2.1 *En Figure 2.1, x^1 et x^3 sont inefficaces parce que $D_{x^1} \cap S' \neq \{x^1\}$ et $D_{x^3} \cap S' \neq \{x^3\}$, x^2 est efficace parce que $D_{x^2} \cap S' = \{x^2\}$.*

De la même manière, nous pouvons tester l'efficacité en un point $\hat{x} \in S'$ en introduisant le concepts d'ensembles dominés (voir Stuer [35])

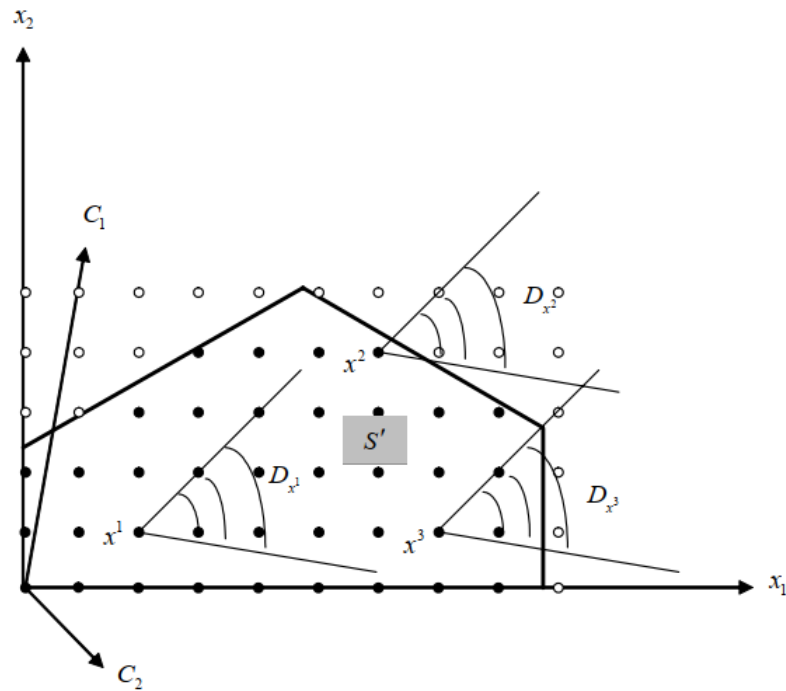


FIGURE 2.1 – Exemple de point inefficace et de point efficace

2.5.2 Méthode de Gupta et Malhotra [21]

C'est une technique de coupes qui a été proposée par les auteurs en 1992 dans le cadre de la recherche des solutions efficaces entières pour un problème MOILP. Les coupes utilisées dans cette méthode sont une généralisation de celles de Dantzig [19] chaque coupe tronque toute une arête au lieu d'un seul point.

Les auteurs considèrent le problème

$$(P_k) : \begin{cases} \max Z_k(x) = C_k x, & k = 1, \dots, p \\ s.c \\ x \in S' \end{cases}$$

La procédure démarre de la résolution de l'un des problèmes de programmation linéaire mono-objectif

Par défaut on choisit le premier objectif ($k = 1$).

On note \hat{x}^1 la solution optimale de (P_1) et \widehat{Z}^1 la valeur-objectif correspondante. On note aussi J_1 l'ensemble des indices hors-base associés aux

coûts réduits nuls pour cette solution :

$$J_1 = \left\{ j \in H_1 \mid (C_{H_1}^1 - C_{B_1}^1 B_1^{-1} H_1)_j = 0 \right\}$$

et Γ_1 l'ensemble des indices hors-base tels que les coûts réduits associés à \hat{x}^1 sont négatifs pour \widehat{Z}^1 mais positifs pour au moins un des autres objectifs :

$\Gamma_1 = \left\{ j \in H_1 \mid (C_{H_1}^1 - C_{B_1}^1 B_1^{-1} H_1)_j < 0 \text{ et } (C_{H_1}^1 - C_{B_1}^1 B_1^{-1} H_1)_j > 0 \right\}$ pour au moins un $k \in \{2, \dots, p\}$

Considérons, à présent, les deux théorèmes suivants qui constituent en fait, les deux piliers principaux de la méthode :

Théorème 2.5.2 (Verma [45]) *Toutes les solutions entières admissibles du problème (P_1) alternatives à \hat{x}^1 sur l'arête E_{j_1} de S' et émanant de \hat{x}^1 dans la direction de a_{1,j_1} ($j_1 \in \Gamma_1$ appartiennent au demi-espace défini par :*

$$\sum_{j \in H_1 \setminus \{j_1\}} x_j < 1$$

Théorème 2.5.3 *Toute solution admissible du problème (P_1) qui n'est pas sur l'arête E_{j_1} ($j_1 \in \Gamma_1$) émanant de \hat{x}^1 , appartient au demi-espace défini par :*

$$\sum_{j \in H_1 \setminus \{j_1\}} x_j \geq 1$$

Les étapes de l'algorithme

Étape 1. Résoudre le problème (P_1) .

- Si la solution optimale \hat{x}^1 de (P_1) est unique, on considère le vecteur-objectif correspondant $\widehat{Z}^1 = (\widehat{Z}_1^1, \widehat{Z}_2^1, \dots, \widehat{Z}_p^1)$.
- Si \hat{x}^1 possède des solutions alternatives (i.e. $\Gamma_1 \neq \emptyset$), on détermine tous les vecteurs-objectifs correspondants à ces solutions alternatives. Par comparaison deux à deux, on garde seulement le vecteur non-dominé. Puis, on considère le vecteur non-dominés le plus grand au sens lexicographique (i.e. celui qui a la plus grande valeur de Z^2 . En cas d'ex-aequo, on choisit celui qui a la plus grande valeur de Z^3 , ainsi de suite.)

On remplace \hat{x}^1 par la solution optimale correspondant au vecteur non-dominé retenu.

Étape 2. Choisir $j_1 \in \Gamma_1$ et effectuer le pivotage suivant :

Calculer :

$$\theta_{j_1} = \min_{i \in \mathcal{B}_1} \left\{ \frac{\hat{x}_i^1}{a_{ij_1}^1}, a_{ij_1}^1 > 0 \right\}$$

où $a_{ij_1}^1 = (B_1^{-1}a_j^1)_i$

l'arête E_{j_1} de S' émanant de \hat{x}^1 dans la direction de $a_{ij_1}^1$ est donc définie par :

$$E_{j_1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} x_i = \hat{x}_i^1 - \theta a_{ij_1}^1 \text{ pour tout } i \in \mathcal{B}_1 \\ x_{j_1} = \theta \\ x_l = 0 \text{ pour tout } l \in H_1 \setminus \{j_1\} \end{array} \right. \right\}$$

θ est une valeur entière comprise entre 0 et θ_{j_1} .

- Si $\theta_{j_1} < 1$, l'arête E_{j_1} ne contient aucune solution entière admissible. Alors, choisir un autre indice $j_1 \in \Gamma_1$ et pivoter encore une fois.
- Si $\theta_{j_1} \geq 1$, déterminer toutes les solutions entières admissibles sur E_{j_1} en faisant varier la valeur de θ de 1 à θ_{j_1} par valeurs entières. On note φ^1 l'ensemble de ces solutions.

Éliminer l'arête E_{j_1} du domaine admissible en utilisant la coupe

$\sum_{j \in H \setminus \{j_1\}} x_j \geq 1$, puis chercher une autre solution entière admissible \hat{x}^2 dans la région tronquée.

Étape 3. Choisir $j_2 \in \Gamma_2$ puis, explorer l'arête E_{j_2} et mettre à jour l'ensemble φ^1 en lui incluant l'ensemble des nouvelles solutions obtenues sur E_{j_2} .

L'ensemble ainsi obtenu sera noté φ^2 . Éliminer l'arête E_{j_2} du domaine admissible en utilisant la coupe $\sum_{j \in H_2 \setminus \{j_2\}} x_j \geq 1$ et chercher de nouveau une autre solution entière admissible \hat{x}^3 dans la région tronquée.

Ainsi de suite.

Une étape générale d'ordre t de l'algorithme consiste à faire les mêmes opérations que celles des **étapes 2 et 3** tout en remplaçant l'indice 1 (ou

l'indice 2) par l'indice courant $t - 1$.

Le processus de calcul prend fin à une étape finale K lorsque l'un des deux critères suivants est vérifié :

- $\Gamma_K = \emptyset$ et $(C_{H_K}^1 - C_{B_K}^1 B_K^{-1} H_K)_j < 0$, $\forall j \in H_K$
- $\Gamma_K \neq \emptyset$ mais pour tout $j_K \in \Gamma_K$ les solutions entières admissibles sur l'arête E_{j_K} ne sont pas efficaces.

2.5.3 Méthode de Abbas et Chaabane [1]

Une méthode de détermination des solutions efficaces dans l'espace des variables discrètes a été proposée par les auteurs en 2002 comme forme modifiée de la méthode de Guptha et Malhorta où le test d'arrêt a été modifié afin de pouvoir générer toutes les solutions efficaces d'un problème MOILP. L'algorithme est formellement décrit dans les étapes suivantes :

Étape 1. Résoudre un des problèmes (P_k) définis par :

$$(P_k) : \begin{cases} \max Z_k(x) = C_k x \\ s.c \\ x \in S' \end{cases} ; k \in \{1, \dots, p\}$$

Par défaut, on prend $k = 1$. Soit donc \hat{x}^1 la solution optimale entière trouvée et soit $\widehat{Z}^1 = (\widehat{Z}_1^1, \widehat{Z}_2^1, \dots, \widehat{Z}_p^1)$ son évaluation vectorielle sur les p objectifs.

- Si $\Gamma_1 = \emptyset$ alors \hat{x}^1 est l'unique solution optimale de (P_1) . Soit $\widehat{Z}^1 = (\widehat{Z}_1^1, \widehat{Z}_2^1, \dots, \widehat{Z}_p^1)$ le vecteur-objectif correspondant. Sauvgarder \widehat{z}^1 dans la liste initiale des solutions non dominées :

$E(P) = \{\widehat{Z}^1\}$. Aller à l'étape 2.

- Si $\Gamma_1 \neq \emptyset$ alors \hat{x}^1 peut ne pas être unique. Soit alors $\theta_j = \left[\min_{i \in \mathcal{B}_1} \left\{ \frac{\hat{x}_i^1}{a_{ij_1}^1} ; a_{ij_1}^1 > 0 \right\} \right]$ où $a_{ij}^1 = (B_1^{-1} a_j^1)_i$
Deux cas se présentent ici :

- (a) Si $\theta_j \geq 1$ explorer l'arête E_j de S' émanant de \hat{x}^1 dans la

direction de a_{ij}^1 :

$$E_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} x_i = \hat{x}_i^1 - \theta a_{ij}^1 \text{ pour tout } i \in \mathcal{B}_1 \\ x_j = \theta \\ x_l = 0 \text{ pour tout } l \in H_1 \setminus \{j\} \end{array} \right. \right\}$$

pour toute valeur entière θ comprise entre 0 et θ_j .

- Pour chaque solution entière trouvée, évaluer les vecteurs-objectifs correspondant et les ajouter à la liste $E(P)$ de ceux qui ne sont pas dominés (une comparaison deux à deux est nécessaire).
 - Choisir arbitrairement un indice $\Gamma_1 \in J_1$ et Aller à l'Étape 2.2.
- (b) Si, pour tout $j \in \Gamma_1$, $\theta_1 < 1$ alors il n'y a pas de solution alternative à \hat{x}^1 .

Aller à l'étape 2.

Étape 2. On pose $k = 1$

2.1 Construire l'ensemble Γ_α . S'il est vide, aller à l'Étape 2.2. Sinon, soit $\gamma = \Gamma_\alpha$.

i. Si $\Gamma \neq \emptyset$, choisir $j_\alpha \in \Gamma$ et calculer $\theta_{j_\alpha} = \left[\min_{i \in \mathcal{B}_\alpha} \left\{ \frac{\hat{x}_i^\alpha}{a_{ij_\alpha}^1}, a_{ij_\alpha}^1 > 0 \right\} \right]$.

- Si $\theta_{j_\alpha}^0 = 0$, il n'y a aucune solution admissible sur l'arête E_{j_α} . Alors, faire

$\Gamma := \Gamma \setminus \{j_\alpha\}$ et aller à l'étape i.

- Sinon, pour $\theta = \{1, 2, \dots, \theta_{j_\alpha}^0\}$, calculer tout les solutions admissibles entières sur l'arête E_{j_α} . Calculer les vecteurs-objectifs correspondant à ces solutions. Faire joindre les vecteurs potentiellement non-dominés à la liste $E(P)$. Choisir un autre indice $j_\alpha \in J_\alpha$ et aller à l'Étape 2.2.

ii Sinon, aller à l'étape 2.2.

2.2 Ajouter la contrainte $\sum_{j \in H_k \setminus \{j_\alpha\}} x_j \geq k$ et appliquer le dual du simplexe et les coupes de Gomory si nécessaire. Soit $\hat{x}^{\alpha+1}$ une solution

optimale du problème augmenté. Calculer le vecteur-objectif correspondant. S'il n'est pas dominé par aucune des solutions trouvées jusqu'à cette étape, le faire joindre à la liste $E(P)$. Sinon, il est ignoré. Poser $\alpha = \alpha + 1$ et aller à l'Étape 2.1.

Étape finale. La procédure prend fin quand il n'est plus possible de pivoter. À cette étape, la liste $E(P)$ représente l'ensemble de toutes les solutions non-dominées de (P) .

2.5.4 Méthode de Sylva et Crema [37]

Les auteurs s'intéressent à la résolution du problème

$$(P) : \begin{cases} \max C_k x, & k = \{1, \dots, p\} \\ s.c & ; k \in \{1, \dots, p\} \\ x \in D \end{cases}$$

Dans leur article publié en 2004, John Sylva et Alejandro Crema ont proposé une version améliorée de l'algorithme de Klein et Hannan [28]. Le but est de déterminer l'ensemble de toutes les solutions efficaces du problème (P) et l'algorithme consiste en la résolution d'une suite finie de programmes linéaires en nombres entiers PLNE optimisant chacun une combinaison positive des fonctions-objectifs. Chaque PLNE possède des contraintes supplémentaires à celles du PLNE résolu juste avant. Ces contraintes éliminent de l'ensemble de recherche précédent, un sous-ensemble de solutions non-efficaces et génèrent une nouvelle solution efficace. La convergence et la finitude de l'algorithme sont assurées par la proposition et le corollaire suivants :

Proposition 2.1 *Soient x^1, x^2, \dots, x^k des solutions efficaces du problème (P) et soit $D_j = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid Cx^j \geq Cx\}$ ($j \in \{1, 2, \dots, m\}$).*

Si une solution x^ est efficace pour le problème (P)*

$$(Q) : \begin{cases} \text{"max"} Z(x) = Cx \\ x \in D \setminus \bigcup_{j=1}^k D_j \end{cases}$$

alors elle est efficace pour le MOILP .

De plus, si le problème (Q_λ) est irréalisable, alors l'ensemble

$$\{z^j | z^j = Cx^j ; j = 1, 2, \dots, m\}$$

est celui de toutes les solutions non-dominées du problème (P).

Corollaire 2.1 Soient x^1, x^2, \dots, x^m des solutions efficaces du problème (P) et soit $D_j = \{x \in \mathbb{Z}^n | Cx^j \geq Cx\}$ ($j \in \{1, 2, \dots, m\}$).

Si une solution x^* est efficace pour le PL

$$(Q_\lambda) : \begin{cases} \text{"max"} S(x) = \lambda^t Cx \\ x \in D \setminus \bigcup_{j=1}^m D_j \end{cases}$$

pour un certain vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^p$, tel que $\lambda > 0$, alors elle est efficace pour le problème (P).

La méthode

- Étape 1.**
- Fixer les composantes du vecteur λ à des valeurs strictement positives,
 - Résoudre le PLNE

$$(Q_\lambda^1) : \begin{cases} \max S^1(x) = \lambda^t Cx \\ x \in D_1 \end{cases}$$

Où $D_1 = D$

Si Q_λ^1 est irréalisable, le problème (P) est également irréalisable.

Sinon, la solution fournie x^1 est efficace.

- Étape 2.** Écarter du domaine de recherche, toutes les solutions dominées par $Z^1 = Cx^1$ (i.e. celles appartenant à D_1) en rajoutant au programme Q_λ^1 la contrainte selon laquelle Cx n'est pas dominée par Cx^1 . Le nouveau programme à résoudre s'écrit comme :

$$(Q_\lambda^2) : \begin{cases} \max S^2(x) = \lambda^t Cx \\ x \in D_1 \\ (Cx)_k \geq ((Cx^1)_k + 1)y_k^1 - M_k(1 - y_k^1) ; k = 1, \dots, p \\ \sum_{k=1}^p y_k^1 \geq 1, y_k^1 \in \{0, 1\} \forall k = 1, \dots, p \end{cases}$$

Où $-M_k$ est une borne inférieure pour toute valeur réalisable de la $k^{\text{ème}}$ fonction-objectif.

Les contraintes du programme (Q_λ^2) définissent le nouveau domaine de recherche que l'on note D_2 .

Étape 1. générale

Résoudre le PL

$$(Q_\lambda^l) : \begin{cases} \max S^l(x) = \lambda^t Cx \\ x \in D_{l-1} \\ (Cx)_k \geq ((Cx^{l-1})_k + 1)y_k^{l-1} - M_k(1 - y_k^{l-1}) ; k = 1, \dots, p \\ \sum_{k=1}^p y_k^{l-1} \geq 1, y_k^{l-1} \in \{0, 1\} \forall k = 1, \dots, p \end{cases}$$

Où x^{l-1} est une solution efficace fournie à l'étape $l - 1$.

Le processus de recherche s'arrête lorsque le domaine de recherche devient vide.

Chapitre **3**

Programmation linéaire stochastique
multi-objectifs en nombre entiers

3.1 Introduction

Les méthodes de résolution des problèmes multiobjectifs stochastiques passent par deux transformations qui ne peuvent être considérées simultanément. La première, transforme le problème multiobjectif stochastique en un problème multiobjectif déterministe. La deuxième, ramène le problème multiobjectif stochastique à un problème stochastique mono-objectif. Ces deux transformations sont qualifiées d'approche multicritère et d'approche stochastique (voir, Ben Abdelaziz, [8] et (Ben Abdelaziz & Nadeau [9], [10])). Compte tenu des critères de transformation vus au 1^{er} chapitre et qui sont l'espérance, la variance, l'espérance-variance, le risque minimal et kataoka, un problème déterministe qui résulte du problème multiobjectif stochastique est soit multi objectifs linéaire ou non linéaire, s'il s'agit de l'approche multicritère soit mono-objectif linéaire ou non linéaire, s'il s'agit de l'approche stochastique. Ainsi, dans les deux cas, toutes les méthodes connues de l'optimisation mono-objectif ou multiobjectif peuvent être exploitées pour générer l'ensemble complet ou partiel des solutions efficaces.

Plutôt que de décrire ces deux approches, nous nous contenterons d'exposer, ci-dessous, quelques méthodes de résolution des problèmes multiobjectifs stochastiques.

3.2 Méthode STRANGE-MOMIX

STRANGE signifie (STRategy for Nuclear Generation of Electricity). Teghem, Dufrane, Thauvoye et Kunsch [3] l'ont développée pour résoudre deux applications concrètes de planification d'investissements soumises par la société Belge d'ingénierie dans le domaine énergétique (voir Teghem et Kunsch [40], Kunsch et Teghem [29], Kunsch [30], pour une description détaillée de ces applications). Par la suite STRANGE a été combinée avec une méthode de programmation linéaire en nombres entiers dite MOMIX pour résoudre les problèmes multi-objectifs stochastiques discrets

Dans ce contexte, le modèle multi-objectifs stochastique discret considéré

par Teghem est le suivant :

$$(P_{3.1}) \quad \begin{cases} \text{"min"} Z_k(x, \omega) = C_k^t(\omega)x & k = 1, \dots, p \\ x \in D(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n | A(\omega)x \leq b(\omega) x \geq 0 \text{ } x \text{ entier}\} \end{cases}$$

Où C_k , $k = 1, \dots, p$ et b sont des vecteurs à n (respectivement m composantes). A est une matrice $m \times n$.

Les composantes de $C_k(\omega)$ et $b(\omega)$ ainsi que les termes de la matrice ($A(\omega)$) sont fournis sous forme de variables aléatoires discrètes.

La méthode STRANGE-MOMIX comporte trois phases distinctes :

Phase 1 : Construction du Modèle déterministe équivalent au problème stochastique

L'auteur suppose que chaque objectif $Z_k(x)$ dépend d'un ensemble de scénarios $\{s_k | k = 1, \dots, p\}$ et qu'à chacun de ces scénarios est associé un niveau de plausibilité p_{ks_k} fixé par des experts. Notons par C_{ks_k} la réalisation du vecteur $C_k(\omega)$ sous le scénario s_k , de sorte que

$$P(C_k(\omega) = C_{ks_k}) = p_{ks_k} \quad \text{et} \quad \sum_{s_k=1}^{S_k} p_{ks_k} = 1$$

Chaque critère est donc démultiplié pour chaque scénario de façon à obtenir $\sum_{k=1}^p S_k = 1$ nouveaux objectifs, à savoir :

$$Z_{ks_k}(x) = C_{ks_k}^t x, \quad k = 1, \dots, p; \quad s_k = 1, \dots, S_k$$

De même, divers scénarios (A_r, b_r) , $r = 1, \dots, R$ sont envisagés pour les coefficients de $A(\omega)$ et $b(\omega)$. Soient q_r les probabilités subjectives correspondantes

$$P(A(\omega) = A_r, b(\omega) = b_r) = q_r, \quad \sum_{r=1}^R q_r = 1$$

La programmation stochastique avec recours permet d'introduire dans les contraintes, les vecteurs $(m \times 1)$ de variables $y^{(r)+}$ et $y^{(r)-}$ mesurant l'écart par excès et par défaut entre $T_r x$ et h_r dans le cas de la réalisation r : $A_r x + y^{(r)+} - y^{(r)-} = b_r$, $r = 1, \dots, R$. La violation glo-

bale des contraintes est mesurée par le critère supplémentaire défini par

$$Z_{p+1} = \sum_{r=1}^R q_r \beta^{(r)} y^{(r)-}$$

où $\beta^{(r)}$ est un vecteur $(1 \times m)$ de pénalités permettant, si nécessaire, de discriminer différemment les violations des contraintes. L'objectif Z_{p+1} ne dépend d'aucun scénario. Toutefois, pour unifier les notations, il est noté par

$$Z_{p+1} = Z_{p+1, s_{p+1}} \quad \text{avec} \quad s_{p+1} = 1$$

Ainsi le problème multiobjectif déterministe s'écrit :

$$\begin{cases} \min Z_{ks_k}(x) = C_{ks_k}^t x & k = 1, \dots, p+1 \text{ et } s_k = 1, \dots, S_k \\ (x, y^{(r)+}, y^{(r)-}) \in S^{(0)} \end{cases}$$

$$\text{Où } S^{(0)} = \left\{ \begin{array}{l} (x, y^{(r)+}, y^{(r)-}), r = 1, \dots, R \mid A_r x + y^{(r)+} - y^{(r)-} = b_r \\ x \geq 0, y^{(r)+} \geq 0, y^{(r)-} \geq 0 \end{array} \right\}$$

Phase 2 : Recherche du premier compromis

Table des gains

L'écriture de la table des gains nécessite la résolution du problème monocritère

$$\begin{cases} \min Z_{ks_k}(x) = C_{ks_k}^t x \\ (x, y^{(r)+}, y^{(r)-}) \in S^{(0)} \end{cases}$$

pour chaque objectif (ks_k) , $k = 1, \dots, p+1$, $s_k = 1, \dots, S_k$ et pour chaque scénario r , $r = 1, \dots, R$. Soient $x_{ks_k}^{(r)}$ les solutions optimales trouvées. On définit $\tilde{x}_{ks_k}^{(r)}$ comme la meilleure solution $x_{ks_k}^{(r)}$ du point de vue de l'objectif (ks_k) pour le scénario r . Ceci donne les composantes du point idéal dans l'espace des objectifs

$$M_{ks_k} = Z_{ks_k}(\tilde{x}_{ks_k}) = \min_{r \in \{1, \dots, R\}} Z_{ks_k}(x_{ks_k}^{(r)})$$

Remarque 3.1 Si la solution \tilde{x}_{ks_k} est unique, les autres coefficients de la colonne (ks_k) de la table des gains sont obtenus en évaluant les objectifs (l_{tl}) au point \tilde{x}_{ks_k} . Dans le cas contraire, nous passons par la

résolution des problèmes

$$\begin{cases} \min Z_{l_{t_i}}(x) = C_{l_{t_i}}^t x \\ (x, y^{(r)+}, y^{(r)-}) \in S^{(0)} \\ Z_{k s_k}(x) = M_{k s_k} \end{cases}$$

Calcul des poids associés aux objectifs

Le principe retenu est celui de la méthode STEM de Benayoun [7].

Connaissant les composantes $m_{k s_k}$ du point Nadir, un poids technique

$\pi_{k s_k}$ est associé à chaque objectif

$$\pi_{k s_k} = \frac{a_{k s_k}}{\sum_{k=1}^{p+1} \sum_{s_k} a_{k s_k}} \quad \text{avec} \quad a_{k s_k} = \frac{m_{k s_k} - M_{k s_k}}{m_{k s_k}} \frac{1}{\|C_{k s_k}\|}$$

Premier compromis

Le premier compromis $\tilde{x}^{(1)}$ est donné par le problème min-max suivant

$$\begin{cases} \min M\delta - \sum_{k=1}^{p+1} \varepsilon_k \\ \sum_{s_k=1}^{S_k} p_{k s_k} (C_{k s_k}^t x - M_{k s_k}) \pi_{k s_k} \leq \delta - \varepsilon_k \quad k = 1, \dots, p+1 \\ (x, y^{(r)+}, y^{(r)-}) \in S^{(0)}, \quad \varepsilon_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, p+1 \end{cases}$$

M est un nombre positif très grand.

Phase 3 : Phase interactive

(i) Soit $\tilde{x}^{(m)}$ le m -ième compromis déterminé, $Z_{k s_k}^m$ les valeurs des objectifs au point $\tilde{x}^{(m)}$, $[M_{k s_k}^m, m_{k s_k}^m]$ l'intervalle de variation de l'objectif $(k s_k)$ et $\pi_{k s_k}^m$ son poids. Le décideur doit spécifier l'objectif $l_m(l) \in \{k s_k, k = 1, \dots, p+1, s_k = 1, \dots, S_k\}$ qu'il désire améliorer en priorité. Le domaine de décision est reconstruit en introduisant une nouvelle contrainte :

$$D^{(m+1)} = D^{(m)} \cap \left\{ x \mid Z_{l_m}(l) < Z_{l_m}^{(m)}(l) \right\}$$

Par la suite les intervalles de variation $[M_{k s_k}^{m+1}, m_{k s_k}^{m+1}]$ et les poids

$\pi_{ks_k}^{(m+1)}$ sont adaptés au domaine de décision $D^{(m+1)}$.

Un nouveau compromis $\tilde{x}^{(m+1)}$ est obtenu en résolvant le problème

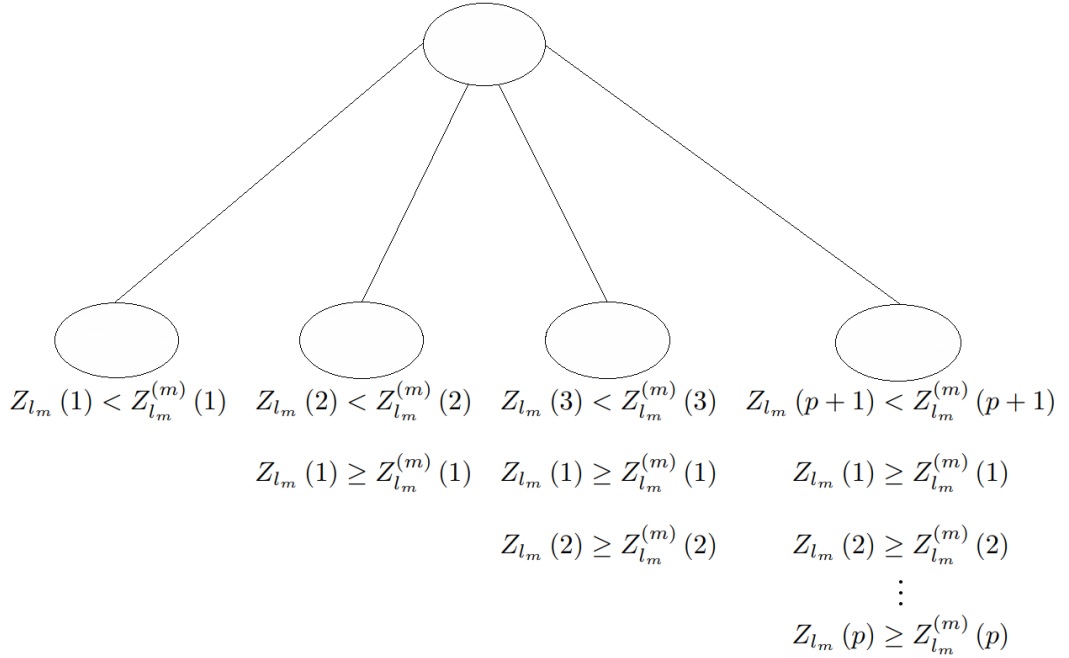
$$\left\{ \begin{array}{l} \min M\delta - \sum_{k=1}^{p+1} \varepsilon_k \\ s.c \sum_{s_k=1}^{S_k} p_{ks_k} (C_{ks_k}^t x - M_{ks_k}^{(m+1)}) \pi_{ks_k}^{(m+1)} \leq \delta - \varepsilon_k \quad k = 1, \dots, p+1 \\ (x, y^{(r)+}, y^{(r)-}) \in S^{(0)}, \varepsilon_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, p+1 \end{array} \right.$$

• **Tests de séparation :** le noeud $(m+1)$ est séparé si :

(a) $D^{(m+1)} = \emptyset$

(b) $m_{ks_k}^{(m+1)} - M_{ks_k}^{(m+1)} \leq \varepsilon_{ks_k} \quad \forall (ks_k) (\varepsilon_{ks_k} \text{ est fixé par le décideur}).$

(c) le vecteur des valeurs des fonctions objectifs fournies par le meilleur compromis trouvé est préférable au point idéal de composantes $M_{ks_k}^{(m+1)}$.



• **Tests d'arrêt :**

La première étape de la procédure s'arrête après q itérations où q est un paramètre fixé par le décideur.

(ii) Supposons qu'après un choix approprié de l'objectif $Z_{l_m}(1)$, un bon compromis est obtenu à la fin de la première étape. Pour confirmer la satisfaction du décideur, d'autres parties de l'arbre doivent être

examinées. A chaque niveau, $(p+1)$ nœuds sont introduits en ajoutant successivement les contraintes :

$$1^\circ) Z_{l_m}(1) < Z_{l_m}^{(m)}(1)$$

$$2^\circ) Z_{l_m}(2) < Z_{l_m}^{(m)}(2) ; \quad Z_{l_m}(l) \geq Z_{l_m}^{(m)}(l)$$

.....

$$3^\circ) Z_{l_m}(p+1) < Z_{l_m}^{(m)}(p+1) ; \quad Z_{l_m}(k) \geq Z_{l_m}^{(m)}(k) \quad k = 1, \dots, p$$

3.3 Méthode des plans sécants [5]

Le programme linéaire multi-objectifs stochastique discret considéré par les auteurs est le suivant :

$$(P_{3.2}) \quad \begin{cases} \min & Z_k = C_k(\omega)x \quad , \quad k = 1, \dots, p \\ Ax & = b \\ T(\omega)x & = h(\omega) \\ x & \geq 0, \quad x \text{ entier} \end{cases}$$

Où C_k, T, h sont des matrices aléatoire de dimensions respectives $(1 \times n)$, $(m_0 \times n)$ et $(m_0 \times 1)$ définies sur un espace de probabilité (Ω, E, P) , A et b sont des matrices déterministes de dimensions $(m \times n)$ et $(m \times 1)$, respectivement.

Cette méthode combine la technique de coupe de niveau développée par Abbas et Moulai dans [2] et la méthode de décomposition L-shaped décrite dans [26]. Notez que la méthode L-shaped est connue sous le nom de décomposition de Benders [11] dans d'autres domaines de la programmation mathématique et son objectif initial était de résoudre les problèmes de programmation en nombres entiers mixtes unicritères.

3.3.1 Problème déterministe associé

Supposons que nous ayons une distribution de probabilité discrète jointe finie (ω^r, p^r) , $r = 1, \dots, R$, des données aléatoires.

- **Etape 1 :**

Pour chaque réalisation ω^r de ω on associe un critère $Z_{kr} = C_k(\omega^r)x$, une matrice $T(\omega^r)$ et un vecteur $h(\omega^r)$ pour prendre en compte les

différents scénarios affectant les p objectifs et les contraintes stochastiques .

• **Etape 2 :**

Revenir exactement à l'idée de recours utilisée dans la programmation stochastique monocritère . Bien entendu, nous supposons que le décideur (DM) est en mesure de spécifier de manière satisfaisante les pénalités $q^r = q(\omega^r)$ de violation des contraintes $z^r, r = 1, \dots, R$ et que la taille du problème déterministe associé reste raisonnable. Alors, contrairement à la méthode STRANGE-MOMIX où un critère supplémentaire est créé pour pénaliser les violations des contraintes, une fonction de recours $Q(x, \omega^r)$ est ajoutée à chaque critère Z_{kr} . La pénalité est donnée par :

$$(P_{3.3}) \quad Q(x, \omega^r) = \min_{z^r} \left\{ (q^r)^t z^r \mid W(\omega^r) z^r = h(\omega^r) - T(\omega^r)x, z^r \geq 0 \right\}.$$

Ensuite, le décideur(DM) doit minimiser la valeur attendue des coûts totaux : $\tilde{Z}_k = E [Z_k(x) + Q(x, \xi^r)]$, $k = 1, \dots, p$. Il en résulte le problème déterministe suivant :

$$(P_{3.4}) \quad \begin{cases} \min & \tilde{Z}_k = Z'_k + Q(x) , \quad k = 1, \dots, p \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \quad x \text{ entier} \end{cases}$$

Où

$$Z'_k = E[Z_k(x)] = \sum_{r=1}^R p^r Z_{kr}(x) = \sum_{r=1}^R p^r C_k(\omega^r)x = E[C_k(\omega)x]$$

et

$$Q(x) = E[Q(x, \omega)] = \sum_{r=1}^R p^r Q(x, \omega^r) = \sum_{r=1}^R p^r (q^r)^t z^r.$$

sont respectivement les valeurs attendues de Z_k et la fonction de recours $Q(x, \omega)$.

Le programme $Q(x, \omega^r)$ doit être réalisable pour toutes les réalisations $\omega^r, r = 1, \dots, R$, de ω . Compte tenu de la matrice de recours $W(\omega^r)$ ($m_0 \times n_0$), cela ne doit pas être vrai pour toutes les décisions de première étape $x \in \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$.. Par conséquent, les décisions de première étape se limitent à $x \in \{x \mid Ax = b, x \geq 0\} \cap K$ où, $K = \{x \mid T(\omega^r) + w(\omega^r)z^r = h(\omega^r), z^r \geq 0, r = 1, \dots, R\}$ est l'ensemble de faisabilité induite de première

étape.

Dans le programme de deuxième étape ($P_{3.3}$), Chaque matrice de recours $W(\omega^r)$, pourrait être remplacée par une matrice de recours fixe W ou par une matrice identité I d'ordre m_0 , $W = (I, -I)$ sans rien changer à la présentation de l'algorithme proposé.

3.3.2 Faisabilité

Supposons que la matrice de recours W est fixe. Nous clarifierons la question de savoir comment décider si un $x = x^0$ donné produira des problèmes de deuxième étape réalisables pour toutes les réalisations possibles de ω . Pour répondre à cette question, il est beaucoup avantageux de travailler avec le dual

$$(P_{3.5}) \quad \max_y \left\{ y^t [h(\omega^r) - T(\omega^r)x] \mid y^t W \leq (q^r)^t \right\}$$

du programme de deuxième étape ($P_{3.3}$), L'ensemble de ses contraintes $P = \{y : y^t W \leq (q^r)^t\}$ est indépendant de x .

Soit $\{y^s \mid s \in I\}$ l'ensemble des points extrêmes de P et $\{\sigma_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ l'ensemble de ses rayons extrêmes. Il est signalé dans [21] que :

- (1) Si $P = \emptyset$, alors $Q(x^0, \omega^r)$ est soit non borné ($Q(x^0, \omega^r) = -\infty$) ou irréalisable ($Q(x^0, \omega^r) = +\infty$).
- (2) Si $P \neq \emptyset$, alors $Q(x^0, \omega^r)$ est soit irréalisable, on admet une solution optimale.

D'autre part, le lemme de Farkas énonce que

$$\{z \mid Wz = h(\omega^r) - T(\omega^r)x^0 \quad z \geq 0\} \neq \emptyset \text{ si et seulement si } \sigma^T W \leq 0$$

implique que $\sigma^T [h(\omega^r) - T(\omega^r)x^0] \leq 0$.

Nous concluons que $Q(x^0, \omega^r)$ est irréalisable si et seulement si P a un rayon extrême σ tel que $\sigma^T [h(\omega^r) - T(\omega^r)x^0] > 0$; sinon la valeur optimale de $Q(x^0, \omega^r)$ est donnée par $y^t [h(\omega^r) - T(\omega^r)x^0]$, où y est un point extrême de P .

Ensuite, pour vérifier la faisabilité des problèmes de deuxième étape, nous devons trouver un vecteur de direction σ en résolvant le programme

$$(P_{3.6}) \quad \max_{\sigma} \{ \sigma^t [h(\xi^r) - T(\xi^r)x^0] \mid \sigma^T W \leq 0, \|\sigma\|_1 \leq 1 \}$$

,

où la dernière contrainte est ajoutée pour borner σ ; sinon la valeur maximale sera $+\infty$ et ne nous intéressera pas. Si pour certains ω^r , $r \in 1, \dots, R$, $\sigma_r^t [h(\omega^r) - T(\omega^r)x^0] > 0$, où σ_r est la solution optimale de $(P_{3.6})$, nous avons trouvé un ω^r pour lequel x^0 ne donne pas un problème de deuxième étape réalisable. Dans ce cas, nous créons la coupe de faisabilité :

$$(*) \quad \sigma_r^t [h(\omega^r) - T(\omega^r)x] \leq 0$$

.

3.3.3 Optimalité

On suppose que toutes les coupes de faisabilité sont déterminées, on peut reformuler le problème $(P_{3.3})$ en introduisant une nouvelle variable θ

$$(P_{3.7}) \quad \begin{cases} \min & \tilde{Z}_k = Z'_k + \theta, \quad k = 1, \dots, p \\ & x \in S, \\ & \theta \geq Q(x), \\ & x \text{ entier,} \end{cases}$$

Où

$$\begin{aligned} S &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, \sigma_r^t T(\omega^r)x \geq \sigma_r^t h(\omega^r), r \in \{1, \dots, R\}, x \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{A}x = \tilde{b}, x \geq 0\}. \end{aligned}$$

est un polyèdre compact non vide dans \mathbb{R}^n .

Dans la suite nous traitons le problème de génération de l'ensemble *Eff* de toutes les solutions entières de $(P_{3.7})$ qui sont efficaces au sens de la définition suivante :

Définition 3.1 *Un point $x^0 \in S$ est dit efficace pour $(P_{3.7})$ si et seulement s'il n'existe pas d'autre point $x^1 \in S$ tel que $\tilde{Z}_k(x^1) \leq \tilde{Z}_k(x^0)$, $k \in \{1, \dots, p\}$ et $\tilde{Z}_k(x^1) < \tilde{Z}_k(x^0)$ pour au moins un $k \in \{1, \dots, p\}$ et pour tous les réali-*

sations ω^r , $r \in \{1, \dots, R\}$.

La première étape consiste à déterminer une solution réalisable entière du problème maître réduit à un seul objectif. Ici, nous choisissons arbitrairement \tilde{Z}_1 .

$$(P_{3.8}) \quad \begin{cases} \min & \tilde{Z}_1 = Z'_1 + \theta \\ x \in S, \\ \theta \geq Q(x), \\ x \text{ entier.} \end{cases}$$

Il est clair que nous ne pouvons pas utiliser $\theta \geq Q(x)$ comme une contrainte puisque $Q(x)$ est défini implicitement par un grand nombre de problèmes d'optimisation. On résout le problème $(P_{3.8})$ sans elle et on obtient une solution réalisable (x^0, θ^0) (pour la première fois on pose $\theta = -\infty$). Les solutions optimales y_r , $r = 1, \dots, R$ du dual $(P_{3.5})$ seront utilisées pour calculer la valeur attendue de la fonction de recours donnée par

$$Q(x^0) = \sum_{r=1}^R p^r Q(x^0, \omega^r) = \sum_{r=1}^R p^r (y_r^t) [h(\omega^r) - T(\omega^r)x^0].$$

Si $\theta^0 \geq Q(x^0)$, x^0 est optimal pour $(P_{3.8})$, sinon la coupe d'optimalité :

$$(**) \quad \theta^0 \geq \sum_{r=1}^R p^r (y_r^t) [h(\omega^r) - T(\omega^r)x^0], r = 1, \dots, R$$

est ajouté à $(P_{3.8})$ qui est réoptimisé.

Introduisons les notations et définitions suivantes :

$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^{n_1} \mid \tilde{A}_1 x = \tilde{b}_1, x \geq 0\}$, la région tronquée actuelle de S obtenue par les coupes successifs de Gomory,

$x^1 = (x_j^1)$ la solution entière optimale de $(P_{3.8})$,

\tilde{Z}_k^1 : valeur de \tilde{Z}_k , $k = 1, \dots, p$ qui correspond à x^1 ,

\tilde{B}^1 : Une base sur S_1 ,

\tilde{a}^1 : vecteur d'activité de (x_j^1)

$$(y_j^1) = (\tilde{B}^1)^{-1} \tilde{a}_j^1,$$

$$I_1 = \{i \mid \tilde{a}_i^1 \in \tilde{B}^1\},$$

$$N_1 = \{j \mid \tilde{a}_j^1 \notin \tilde{B}^1\},$$

$$\Gamma_1 = \{j \mid j \in N_1 \text{ et } \tilde{Z}_{1,j} - \tilde{C}_{1,j} = 0\}.$$

Pour $\alpha \geq 2$,

$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^{n_\alpha} \mid \tilde{A}_\alpha x = \tilde{b}_\alpha, x \geq 0\}$ est la région tronquée actuelle obtenue en appliquant la coupe $\sum_{j \in N_{\alpha-1} \setminus \{j_{\alpha-1}\}} x_j \geq 1$ où $j_{\alpha-1} \in \Gamma_{\alpha-1}$ et des coupes successives de Gomory, éventuellement, pour réoptimiser $(P_{3.8})$,
 $x^1 = (x_j^1)$ est la $\alpha^{\text{ème}}$ solution entière optimale de $(P_{3.8})$ obtenue sur S_α à l'étape α ,

$x_l^1 = (x_{l,j}^1)$, $l = 1, \dots, L_\alpha$ sont les solutions entières alternatives à x^α si elle existent,

\tilde{B}^α : Une base sur S_α ,

\tilde{a}_j^α : vecteur d'activité de (x_j^α) ,

$$(y_j^\alpha) = (\tilde{B}^\alpha)^{-1} \tilde{a}_j^\alpha,$$

$$I_\alpha = \{i \mid \tilde{a}_i^\alpha \in \tilde{B}^\alpha\},$$

$$N_\alpha = \{j \mid \tilde{a}_j^\alpha \notin \tilde{B}^\alpha\},$$

$$\Gamma_\alpha = \{j \mid j \in N_\alpha \text{ et } \tilde{Z}_{1,j} - \tilde{C}_{1,j} = 0\}$$

3.3.4 Exemple Numérique

Comme illustration de la méthode proposée, nous présentons un problème de programmation linéaire stochastique en nombres entiers multi-objectifs avec une structure semblable à celle du problème $(P_{3.2})$,

$$k = 3, n_0 = 4, m_0 = m = n = 2.$$

- Contraintes déterministes :

$$-4x_1 + 2x_2 \geq -8$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

- Deux scénarios ($R = 2$) affectent les trois objectifs et les contraintes stochastiques

$$C_1(\omega^1) = (-9, 4), C_2(\omega^1) = (3, -5), C_3(\omega^1) = (8, -11)$$

$$C_1(\omega^2) = (3, -2), C_2(\omega^2) = (7, 1), C_3(\omega^2) = (-4, 9)$$

$$T(\omega^1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, T(\omega^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, h(\omega^1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, h(\omega^2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$q(\omega^1) = (1, 0, 6, 2)^T, q(\omega^2) = (5, 3, 2, 1)^T, p(\omega^1) = \frac{1}{2}; p(\omega^2) = \frac{1}{2}$$

$$W(\omega) = W = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & -6 \end{pmatrix};$$

$$Z'_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -9 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Z'_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix},$$

$$Z'_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -11 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Etape 1 : Résolution du problème :

$$(P_0) \quad \begin{cases} \min & -3x_1 + x_2 \\ & s.c \\ & 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 8 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ & x_1, x_2, \text{ entiers} \end{cases}, \quad \text{le minimum est : } x = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour tester la réalisabilité du problème $(P_{3.3})$ du deuxième étage, nous résolvons le programme $(P_{3.6})$ avec

$$h(\omega^1) - T(\omega^1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$h(\omega^2) - T(\omega^2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -16 \end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \max & -4\sigma_1^1 + 9\sigma_1^2 \\ & -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0 \\ & -1\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0 \\ & 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0 \\ & \sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0 \\ & \sigma_1^1 + \sigma_1^2 \leq 1 \end{bmatrix}, \quad \text{le maximum est à } \sigma_1^t = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \max 3\sigma_2^1 - 16\sigma_2^2 \\ -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0 \\ -1\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0 \\ 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 + \sigma_2^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \sigma_1^t = (\sigma_2^1 \ \sigma_2^2) = (0 \ 0)$$

$$\sigma_1^t [h(\omega^1) - T(\xi^1)x] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3},$$

$$\sigma_2^t [h(\omega^2) - T(\xi^2)x] = (0 \ 0) \begin{pmatrix} 3 \\ -16 \end{pmatrix} = 0,$$

$\sigma_1^T [h(\omega^1) - T(\omega^1)x] > 0$, ceci signifie que le problème du second étage ($P_{3.3}$) n'est pas réalisable pour ω^1 . Alors nous créons une coupe de réalisabilité de la forme (*) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{11}{3} \text{ ou } -\frac{5}{3}x_2 + x_5 = -\frac{11}{3}$$

Nous ajoutons cette coupe et la coupe de Gomory $-\frac{3}{5}x_5 + x_6 = -\frac{4}{5}$ à la première contrainte, nous obtenons un autre point minimum et entier $x = (2 \ 3)$ qui est donné par le tableau 1

$$h(\xi^1) - T(\xi^1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$h(\xi^2) - T(\xi^2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -14 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{array}{l} \max -5\sigma_1^1 + 6\sigma_1^2 \\ -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0 \\ -1\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0 \\ 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 + \sigma_1^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \sigma_1^T = (\sigma_1^1 \ \sigma_1^2) = (0 \ 0)$$

\tilde{C}_1^B	B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-3	x_1	2	1	0	0	1	0	1
1	x_2	3	0	1	0	0	0	-1
0	x_3	6	0	0	1	-4	0	-6
0	x_5	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0	1	$-\frac{5}{3}$
			0	0	0	-3	0	-4

Tableau 1

$$\left[\begin{array}{l} \max 4\sigma_2^1 - 14\sigma_2^2 \\ -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0 \\ -1\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0 \\ 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 + \sigma_2^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \sigma_1^T = (\sigma_2^1 \ \sigma_2^2) = (0 \ 0)$$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, alors ceci implique que la solution $x = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ obtenue dans le tableau 1 est réalisable pour le problème du deuxième étage.
pour tester l'optimalité de $x = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$, le dual ($P_{3.5}$) est résolu avec ω^1 et ω^2 .

$$\left[\begin{array}{l} \max -5y_1^1 + 6y_1^2 \\ -2y_1^1 + 3y_1^2 \leq 1 \\ -y_1^1 + 2y_1^2 \leq 0 \\ 2y_1^1 - 5y_1^2 \leq 6 \\ y_1^1 - 6y_1^2 \leq 2 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } y_1^t = (y_1^1 \ y_1^2) = \left(-1 \ -\frac{1}{2}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \max 4y_2^1 - 17y_2^2 \\ -2y_2^1 + 3y_2^2 \leq 5 \\ -y_2^1 + 2y_2^2 \leq 3 \\ 2y_2^1 - 5y_2^2 \leq 2 \\ y_2^1 - 6y_2^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } y_2^t = (y_2^1 \ y_2^2) = (1 \ 0)$$

$$Q(x, \omega^1) = y_1^t [h(\omega^1) - T(\omega^1)x] = 2$$

$$Q(x, \omega^2) = y_1^t [h(\omega^2) - T(\omega^2)x] = 4$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}Q(x, \omega^1) + \frac{1}{2}Q(x, \omega^2) = 3$$

$\theta = -\infty < Q(x)$, nous introduisons la coupe d'optimalité de la forme (**):

$\theta \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2$ ou $-\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2 - \theta + s_1 = -\frac{1}{4}$ et nous réoptimisons le programme précédent (voir tableau 2)

$\theta = Q(x) = 3$. alors, $x^1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ est une solution du base optimale avec une pénalité $\theta^1 = 3$.

$$\left(\tilde{Z}_1^1 \ \tilde{Z}_2^1 \ \tilde{Z}_3^1 \right) = \left(0 \ 7 \ 4 \right)$$

$$Eff_0 = \left\{ \left(0 \ 7 \ 4 \right) \right\},$$

$$I_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$N_1 = \{4, 6\},$$

$$\Gamma_1 = \{j | j \in N_1 \text{ et } \tilde{Z}_1^j - \tilde{c}_1^j = 0\} = \emptyset.$$

Etape 2 : $\Gamma = \emptyset$ le point $x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est tronqué en utilisant la coupe $x_4 + x_6 \geq 1$ ou $-x_4 - x_6 + x_7 = -1$ en appliquant la méthode de dual simplexe, un nouveau point entier $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et une nouvelle valeur $\theta = \frac{7}{2}$ sont obtenus dans le tableau 3

\tilde{C}_3^B	\tilde{C}_2^B	\tilde{C}_1^B	B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ	S_1
2	5	-3	x_1	2	1	0	0	1	0	1	0	0
-1	-2	1	x_2	3	0	1	0	0	0	-1	0	0
0	0	0	x_3	6	0	0	1	-4	0	-6	0	0
1	1	1	θ	3	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{7}{2}$	1	-1
0	0	0	x_5	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0	1	$-\frac{5}{3}$	0	0
$\tilde{Z}_1 = 0$					0	0	0	$-\frac{7}{2}$	0	$-\frac{23}{4}$	0	-1
$\tilde{Z}_2 = 7$					0	0	0	$\frac{9}{2}$	0	$\frac{21}{4}$	0	-1
$\tilde{Z}_3 = 4$					0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{4}$	0	-1

Tableau 2

Testons à nouveau la réalisabilité du problème ($P_{3.3}$) de deuxième étage avec :

$$h(\omega^1) - T(\omega^1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$h(\omega^2) - T(\omega^2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{array}{l} \max -4\sigma_1^1 + 4\sigma_1^2 \\ -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0 \\ -1\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0 \\ 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 + \sigma_1^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \sigma_1^t = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \max 5\sigma_2^1 - 14\sigma_2^2 \\ -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0 \\ -1\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0 \\ 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 + \sigma_2^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \sigma_1^t = (\sigma_2^1 \ \sigma_2^2) = (0 \ 0)$$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, alors $Q(x, \omega^1)$ et $Q(x, \omega^2)$ sont tous deux réalisables

$$\left[\begin{array}{l} \max -4y_1^1 + 4y_1^2 \\ -2y_1^1 + 3y_1^2 \leq 1 \\ -y_1^1 + 2y_1^2 \leq 0 \\ 2y_1^1 - 5y_1^2 \leq 6 \\ y_1^1 - 6y_1^2 \leq 2 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } y_1^t = (y_1^1 \ y_1^2) = \left(-1 \ -\frac{1}{2}\right)$$

\tilde{C}_3^B	\tilde{C}_2^B	\tilde{C}_1^B	B	x_B	x_1	x_2	\dots	x_6	x_7	θ	S_1
2	5	-3	x_1	1	1	0	\dots	0	1	0	0
-1	-2	1	x_2	3	0	1	\dots	-1	0	0	0
0	0	0	x_3	10	0	0	\dots	-2	-4	0	0
1	1	1	θ	$\frac{7}{2}$	0	0	\dots	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1
0	0	0	x_5	$\frac{4}{3}$	0	0	\dots	$-\frac{5}{3}$	0	0	0
0	0	0	x_4	1	0	0	\dots	1	-1	0	0
$\tilde{Z}_1 = \frac{7}{2}$					0	0	\dots	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{7}{2}$	0	-1
$\tilde{Z}_2 = \frac{5}{2}$					0	0	\dots	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{2}$	0	-1
$\tilde{Z}_3 = \frac{5}{2}$					0	0	\dots	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	-1

Tableau 3

$$\left[\begin{array}{l} \max 5y_2^1 - 14y_1^2 \\ -2y_2^1 + 3y_1^2 \leq 5 \\ -y_2^1 + 2y_1^2 \leq 3 \\ 2y_2^1 - 5y_1^2 \leq 2 \\ y_2^1 - 6y_1^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } y_2^t = (y_2^1 \ y_2^2) = (1 \ 0)$$

$$Q(x, \omega^1) = y_1^t [h(\omega^1) - T(\omega^1)x] = 2$$

$$Q(x, \omega^2) = y_1^t [h(\omega^2) - T(\omega^2)x] = 5$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}Q(x, \omega^1) + \frac{1}{2}Q(x, \omega^2) = \frac{7}{2}$$

$\theta = Q(x)$, cela signifie que $x^1 = (2 \ 3)$ est la solution de base optimale

pour la région actuelle avec $\theta = \frac{7}{2}$. le 3-uplet correspondant $(\tilde{Z}_1^1 \ \tilde{Z}_2^1 \ \tilde{Z}_3^1) =$

$(\frac{7}{2} \ \frac{5}{2} \ \frac{5}{2})$ est non dominé par le premier 3-uplet, ainsi en ajoutant

$(\frac{7}{2} \ \frac{5}{2} \ \frac{5}{2})$ à $Eff_0 = \{(0 \ 7 \ 4)\}$ on obtient $Eff_0 = \{(0 \ 7 \ 4), (\frac{7}{2} \ \frac{5}{2} \ \frac{5}{2})\}$

$$I_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$N_2 = \{6, 7\},$$

$$\Gamma_2 = \{j | j \in N_2 \text{ et } \tilde{Z}_1^j - \tilde{c}_1^j = 0\} = \emptyset.$$

Etape 3 : $\Gamma_2 = \emptyset$ le point entier $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ est unique solution optimale entière réalisable. Le point est tronqué en utilisant la coupe $x_6 + x_7 \geq 1$ ou $-x_6 - x_6 - x_7 + x_8 = -1 = -1$ en appliquant la méthode de dual simplexe, un nouveau point entier $x = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ et une nouvelle valeur $\theta = \frac{19}{4}$ (voir tableau 4)

$$h(\omega^1) - T(\omega^1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h(\omega^2) - T(\omega^2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -18 \end{pmatrix},$$

\tilde{C}_3^B	\tilde{C}_2^B	\tilde{C}_1^B	B	x_B	x_1	x_2	\dots	x_6	x_7	x_8	θ	S_1
2	5	-3	x_1	1	1	0	\dots	0	1	1	0	0
-1	-2	1	x_2	4	0	1	\dots	0	1	-1	0	0
0	0	0	x_3	12	0	0	\dots	0	-2	-2	0	0
1	1	1	θ	$\frac{19}{4}$	0	0	\dots	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	1	-1
0	0	0	x_6	1	0	0	\dots	1	1	-1	0	0
$\tilde{Z}_1 = \frac{23}{4}$					0	0	\dots	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{9}{4}$	0	-1
$\tilde{Z}_2 = \frac{7}{4}$					0	0	\dots	0	$\frac{15}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	-1
$\tilde{Z}_3 = \frac{11}{4}$					0	0	\dots	0	$\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	-1

Tableau 4

$$\left[\begin{array}{l} \max -6\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \\ -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0 \\ -1\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0 \\ 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 + \sigma_1^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \sigma_1^t = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \max 5\sigma_2^1 - 18\sigma_2^2 \\ -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0 \\ -1\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0 \\ 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 + \sigma_2^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \sigma_2^t = \begin{pmatrix} \sigma_2^1 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, alors $Q(x, \omega^1)$ et $Q(x, \omega^2)$ sont tous deux réalisables.

$$\left[\begin{array}{l} \max -6y_1^1 + 3y_1^2 \\ -2y_1^1 + 3y_1^2 \leq 1 \\ -y_1^1 + 2y_1^2 \leq 0 \\ 2y_1^1 - 5y_1^2 \leq 6 \\ y_1^1 - 6y_1^2 \leq 2 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } y_1^t = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \max 5y_2^1 - 18y_2^2 \\ -2y_2^1 + 3y_2^2 \leq 5 \\ -y_2^1 + 2y_2^2 \leq 3 \\ 2y_2^1 - 5y_2^2 \leq 2 \\ y_2^1 - 6y_2^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } y_2^t = \begin{pmatrix} y_2^1 & y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q(x, \omega^1) = y_1^t [h(\omega^1) - T(\omega^1)x] = \frac{9}{2}$$

$$Q(x, \omega^2) = y_1^t [h(\omega^2) - T(\omega^2)x] = 5$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}Q(x, \omega^1) + \frac{1}{2}Q(x, \omega^2) = \frac{19}{4}$$

$\theta = Q(x)$, alors $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ est une solution optimale avec $\theta = \frac{19}{4}$. le 3-uplet correspondant $\begin{pmatrix} \tilde{Z}_1^1 & \tilde{Z}_2^1 & \tilde{Z}_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{4} & \frac{7}{4} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ est dominé par le premier 3-uplet, alors $Eff_2 = Eff_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

$$I_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$N_2 = \{7, 8\},$$

$$\Gamma_3 = \{j | j \in N_3 \text{ et } \tilde{Z}_1^j - \tilde{c}_1^j = 0\} = \emptyset.$$

Etape 4 : $\Gamma_3 = \emptyset$, la coupe $x_7 + x_8 \geq 1$ ou $-x_7 - x_8 + x_9 = -1$ est introduit pour tronqué $x^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$, un nouveau point entier $x = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$ est obtenu au tableau 5.

$$h(\omega^1) - T(\omega^1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h(\omega^2) - T(\omega^2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{array}{l} \max 3\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \\ -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0 \\ -1\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0 \\ 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 + \sigma_1^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \sigma_1^t = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\bar{C}_3^B	\bar{C}_2^B	\bar{C}_1^B	B	x_B	x_1	x_2	\dots	x_7	x_8	x_9	θ	S_1
2	5	-3	x_1	0	1	0	\dots	0	-1	1	0	0
-1	-2	1	x_2	3	0	1	\dots	0	-2	-1	0	0
0	0	0	x_3	14	0	0	\dots	0	0	-2	0	0
1	1	1	θ	4	0	0	\dots	0	-2	$\frac{3}{4}$	1	-1
0	0	0	x_7	1	0	0	\dots	1	1	-1	0	0
					0	0	\dots	0	-1	$-\frac{5}{4}$	0	-1

Tableau 5

$$\left[\begin{array}{l} \max 6\sigma_2^1 - 11\sigma_2^2 \\ -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0 \\ -1\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0 \\ 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 + \sigma_2^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \sigma_1^t = \begin{pmatrix} \sigma_2^1 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2^T [h(\omega^2) - T(\omega^2)x] = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix} = \frac{8}{7}$$

$\sigma_2^T [h(\omega^2) - T(\omega^2)x] > 0$, alors $Q(x, \omega^2)$ est non réalisable. Une coupe de faisabilité de la forme (*) est créée :

$-\frac{11}{7}x_1 - \frac{8}{7}x_2 + x_{10} = -\frac{32}{7}$. Le programme de la tableau 5 est réoptimisé avec cette coupe et trois coupes de Gomory qui sont : $-\frac{16}{27}x_9 - \frac{13}{27}x_{10} + x_{11} = -\frac{16}{27}$; $-\frac{3}{13}x_9 - \frac{12}{13}x_{11} + x_{12} = -\frac{3}{13}$ et $-\frac{3}{5}x_4 - \frac{7}{15}x_{12} + x_{13} = -\frac{3}{5}$. Le minimum est $x = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$ avec $\theta = \frac{21}{4}$ comme le montre le tableau 6

$$h(\omega^1) - T(\omega^1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h(\omega^2) - T(\omega^2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \max -5\sigma_1^1 + 1\sigma_1^2 \\ -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0 \\ -1\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0 \\ 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 + \sigma_1^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \sigma_1^t = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\tilde{C}_3^B	\tilde{C}_2^B	\tilde{C}_1^B	B	x_B	x_1	x_2	x_3	\dots	x_{12}	x_{13}	θ	S_1
2	5	-3	x_1	0	1	0	0	\dots	0	1	0	0
-1	-2	1	x_2	3	0	1	1	\dots	$-\frac{7}{9}$	$\frac{2}{3}$	0	0
0	0	0	x_3	16	0	0	0	\dots	$-\frac{14}{9}$	$-\frac{8}{3}$	0	0
1	1	1	θ	$\frac{21}{4}$	0	0	0	\dots	$-\frac{5}{36}$	$\frac{1}{3}$	1	-1
0	0	0	x_4	1	0	0	0	\dots	$\frac{7}{9}$	$-\frac{5}{3}$	0	0
$\tilde{Z}_1 = \frac{37}{4}$					0	0	0	\dots	$-\frac{7}{4}$	-2	0	-1
$\tilde{Z}_2 = -\frac{11}{4}$					0	0	0	\dots	$\frac{7}{12}$	4	0	-1
$\tilde{Z}_3 = \frac{57}{4}$					0	0	0	\dots	$-\frac{7}{36}$	$\frac{5}{3}$	0	-1

Tableau 6

$$\left[\begin{array}{l} \max 6\sigma_2^1 - 15\sigma_2^2 \\ -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0 \\ -1\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0 \\ 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 + \sigma_2^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \sigma_2^t = \begin{pmatrix} \sigma_2^1 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, alors $Q(x, \omega^1)$ et $Q(x, \omega^2)$ sont tous deux réalisables.

$$\left[\begin{array}{l} \max -5y_1^1 + 1y_1^2 \\ -2y_1^1 + 3y_1^2 \leq 1 \\ -y_1^1 + 2y_1^2 \leq 0 \\ 2y_1^1 - 5y_1^2 \leq 6 \\ y_1^1 - 6y_1^2 \leq 2 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } y_1^t = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \max 6y_2^1 - 15y_2^2 \\ -2y_2^1 + 3y_2^2 \leq 5 \\ -y_2^1 + 2y_2^2 \leq 3 \\ 2y_2^1 - 5y_2^2 \leq 2 \\ y_2^1 - 6y_2^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } y_2^t = \begin{pmatrix} y_2^1 & y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q(x, \omega^1) = y_1^t [h(\omega^1) - T(\omega^1)x] = \frac{9}{2}$$

$$Q(x, \omega^2) = y_1^t [h(\omega^2) - T(\omega^2)x] = 6$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}Q(x, \omega^1) + \frac{1}{2}Q(x, \omega^2) = \frac{2}{4}$$

$\theta = Q(x)$, nous concluons que $x^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ est une solution optimale avec $\theta = \frac{21}{4}$. le 3-uplet correspondant $\begin{pmatrix} \tilde{Z}_1^1 & \tilde{Z}_2^1 & \tilde{Z}_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{37}{4} & -\frac{11}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ est non dominé par les deux premier 3-uplet, donc augmenter $E f f_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{37}{4} & -\frac{11}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \right\}$

$$I_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\},$$

$$N_4 = \{12, 13\},$$

$$\Gamma_4 = \left\{ j \mid j \in N_4 \text{ et } \tilde{Z}_1^j - \tilde{c}_1^j = 0 \right\} = \emptyset.$$

Etape 5 : $\Gamma_4 = \emptyset$, nous ajoutons la coupe $x_{12} + x_{13} \geq 1$ ou $-x_{12} - x_{13} + x_{14} = -1$. après application de la méthode du dual simplexe et de la coupe de Gomory : $-\frac{4}{9}x_{13} - \frac{2}{9}x_{14} + x_{15} = -\frac{7}{9}$, une infaisabilité apparaît indiquant que la région courante ne contient aucun point entier réalisable. cette infaisabilité est donnée par le tableau 07

la variable x_4 est choisie pour sortir de la base B et A ou B est la variable qui doit entrer dans la base mais l'opération de pivoter est impossible. cette infaisabilité met fin à la procédure indiquant que toutes les solutions efficaces du problème sont obtenues

\tilde{C}_3^B	\tilde{C}_2^B	\tilde{C}_1^B	B	x_B	x_1	x_2	\dots	x_{14}	x_{15}	θ	S_1
2	0	0	x_{14}	$\frac{7}{2}$	-2	0	\dots	1	$-\frac{9}{2}$	0	0
-1	-2	1	x_2	$\frac{15}{2}$	-3	1	\dots	0	$-\frac{7}{2}$	0	0
0	0	0	x_3	23	-2	0	\dots	0	-7	0	0
1	1	1	θ	$\frac{707}{72}$	$-\frac{13}{4}$	0	\dots	0	$-\frac{35}{8}$	1	-1
0	0	0	x_4	$-\frac{5}{2}$	4	0	\dots	0	$\frac{7}{2}$	0	0
0	0	0	x_{12}	$\frac{9}{2}$	-3	0	\dots	0	$-\frac{9}{2}$	0	0
0	0	0	x_{13}	0	1	0	\dots	0	0	0	0
					$-\frac{25}{4}$	0	\dots	0	$-\frac{63}{8}$	0	-1

Tableau 7

Chapitre **4**

Résolution des problèmes à contraintes
probabilistes

4.1 Introduction

Dans cette partie principale de mon mémoire, je considère un problème multiobjectif linéaire stochastique en nombres entiers dans lequel seules les composantes du vecteur second membre des contraintes sont des variables aléatoires. Les contraintes présentent donc des seuils de probabilité. En utilisant le "chance constrained programming" vu au chapitre 1, le problème stochastique en question sera d'abord transformé en problème multiobjectif déterministe, puis l'application de la méthode epsilon contrainte le ramènera à un problème mono-objectif qui sera résolu par l'algorithme du simplexe ou du dual simplexe. Les variables duales optimales obtenues seront ensuite utilisées pour construire une fonction d'utilité et un problème auxiliaire à optimiser. La solution optimale entière de ce dernier sera considérée comme la solution efficace pour le problème multiobjectif étudié. Ce chapitre se termine par une évaluation numérique de l'algorithme proposé en l'implémentant sous l'environnement Matlab.

4.2 Définitions et notations

La forme générale d'un problème linéaire multi-objectifs en nombres entiers à contraintes probabilistes est la suivante :

$$(P_{4.1}) \quad \begin{cases} \max_x Z_k = C^k x, & k = 1, \dots, p \\ sc \\ \Pr[A_i x \leq d_i] \geq \alpha_i, & i = 1, \dots, m \\ x \geq 0, & x \text{ entier} \end{cases}$$

où A est une matrice déterministe de dimensions $(m \times n)$ et d est un $(m \times 1)$ vecteur aléatoire suivant une loi normale. Comme cité dans les chapitres précédents, nous ferons une transformation du problème probabiliste pour obtenir un problème déterministe jugé équivalent.

En utilisant la technique du "chance constrained programming" vue au chapitre 1, et la fonction de distribution $\Phi(\cdot)$ de la loi normale standard, les contraintes probabilistes seront transformées en contraintes déterministes.

$$\Pr [A_i x \leq d_i] \geq \alpha_i \iff A_i x \leq E(b_i) + K\alpha_i \sqrt{\text{var}(b_i)} \iff A_i x \leq b_i$$

où $\Phi(K\alpha_i) = 1 - \alpha_i$.

Ainsi, nous obtenons le problème multiobjectif en nombres entiers déterministe

$$(P_{4.2}) \quad \begin{cases} \max Z_k(x) = C^k x, & k = 1, \dots, p \\ \text{sc} \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ x \text{ entier.} \end{cases}$$

4.3 Analyse paramétrique du problème (4.2)

Pour les MOLP, nous pouvons trouver une relation étroite entre l'approche de la somme pondérée et la ε -approche par contraintes basée sur la dualité de programmation linéaire.

Considérons l' ε -contrainte problème associé à un MOLP avec p objectifs

$$(P_{4.3}) \quad \begin{cases} \max C^k x \\ \text{sc} \\ C^k x \geq e_j & \forall j \in J_k \\ Ax \leq b \\ x \geq 0, \end{cases}$$

où $k \in \{1, \dots, p\}$ et $J_k = \{1, \dots, p\} \setminus \{k\}$

On peut alors introduire des variables duales u_j , $j \in J_i$ et $y \in \mathbb{R}^m$ pour formuler le dual de $(P_{4.3})$ comme

$$(P_{4.4}) \quad \begin{cases} \min - \sum_{j \in J_k} e_j u_j + b^t y \\ \text{sc} \\ - \sum_{j \in J_i} C_l^j u_j + (A^t y)_l \geq C_l^j & \forall l = 1, \dots, n \\ u_j \geq 0 \forall j \in J_i, y \geq 0 \end{cases}$$

En utilisant uniquement ces variables duales optimales u_j^* , $j \in J_k$ de $(P_{4.4})$, qui correspondent à la ε -contrainte de $(P_{4.3})$, on peut définir un vecteur de pondération $\hat{u} \in \mathbb{R}^k$ comme

$$\hat{u}_j := \begin{cases} u_j^*, & j \in J_k \\ 1, & j = k \end{cases}$$

Après normalisation on obtient $\bar{\lambda} = \frac{\hat{u}}{\|\hat{u}\|}$ avec $\bar{\lambda} \in \bar{\Lambda}$ où

$\bar{\Lambda} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^p, \lambda > 0 \text{ et } \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \right\}$. Il sera montré ci-dessous qu'une solution optimale de $(P_{4.3})$ est également optimale pour programme de la somme pondérée qui dans le cas des MOLP est donné par

$$(P_{4.5}) \quad \begin{cases} \max \bar{\lambda}^t Cx \\ \text{sc} \\ Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

ou équivalent,

$$(P_{4.6}) \quad \begin{cases} \max \hat{u}^t Cx \\ \text{sc} \\ Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Théorème 4.3.1 *Soit $x^* \in S$ une solution optimale de $(P_{4.3})$. alors la solution optimale du dual peut être utilisée pour construire un vecteur de pondération $\bar{\lambda} \in \bar{\Lambda}$ tel que x^* est également optimale pour $(P_{4.5})$.*

Théorème 4.3.2 *Soit $x^* \in S$ une solution optimale de $(P_{4.5})$ pour un certain $\bar{\lambda} \in \bar{\Lambda}$. Alors il existe un indice $k \in \{1, \dots, p\}$ tel que x^* est également optimal pour $(P_{4.3})$, où les bornes inférieures sont définies comme $e_j = C^j x^*$, $j \in J_k$.*

4.4 Dualité en programmation linéaire en nombres entiers (MOILP)

La section précédente montre que la dualité est un outil puissant pour la génération de vecteurs de pondération et donc de fonctions d'utilité pour les MOLP. Étant donné que notre objectif ultime est de développer une approche similaire pour les MOILP, nous passerons en revue certains des concepts centraux de la dualité de programmation en nombres entiers dans cette section. Une discussion plus détaillée du sujet, y compris les preuves pour les théorèmes énoncés ci-dessous, peut être trouvés dans Wolsey [48] et Tind et Wolsey [42]

Soit \mathcal{F} l'ensemble de toutes les fonctions non décroissantes

$$F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \text{ i.e}$$

$$\mathcal{F} := \{(\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}) : F(a) \leq F(b) \forall a, b \in \mathbb{R}^m, a \leq b\}$$

et soit le problème de programmation linéaire en nombres entiers à objectif unique suivant

$$(P_{4.7}) \quad \begin{cases} \max C^t x \\ \text{sc} \\ Ax \leq b \\ x \geq 0, \quad x \text{ entier.} \end{cases}$$

avec $C \in \mathbb{Z}^n$. Alors le dual peut être écrit comme

$$(P_{4.8}) \quad \begin{cases} \min F(b) \\ \text{sc} \\ F(Ax) \geq C^t x \quad \forall x \geq 0 \text{ et entier} \\ F \in \mathcal{F} \end{cases}$$

Si l'ensemble réalisable \mathcal{F} est en outre limité à l'ensemble φ des fonctions super-additives non décroissantes, c'est-à-dire à l'ensemble

$$\mathcal{G} := \{F : (\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}) : F(0) = 0, (F(a) \leq F(b) \forall a, b \in \mathbb{R}^m, a \leq b) \\ \text{et } (F(a) + F(b) \leq F(a + b) \forall a, b \in \mathbb{R}^m)\}$$

on peut reformuler le dual de $(P_{4.7})$ comme

$$(P_{4.9}) \quad \begin{cases} \min F(b) \\ sc \\ F((a_{\bullet j})) \geq C_j \quad \forall j = 1, \dots, n \\ F \in \varphi \end{cases}$$

où $(a_{\bullet j})$ désigne le $j^{\text{ème}}$ colonne de A Notons que pour une fonction non décroissante, et super-additive $F \in \mathcal{G}$, la contrainte $F((a_{\bullet j})) \geq C_j$, $\forall j = 1, \dots, n$ est équivalente à $F(Ax) \geq C^t x \forall x \geq 0$, et entier.

Théorème 4.4.1 (Dualité faible)

$C^t x \leq F(b)$ pour toutes les solutions primales réalisables x de $(P_{4.7})$, et toutes les fonctions duales réalisables F de $(P_{4.8})$ (ou $(P_{4.9})$, respectivement)

Théorème 4.4.2 (Dualité forte)

Si $(P_{4.7})$ ou $(P_{4.8})$ ($(P_{4.9})$, respectivement) a une solution optimale finie, alors il existe une solution réalisable optimale x^* de $(P_{4.7})$ et une fonction duale optimale F^* de $(P_{4.8})$ ou $(P_{4.9})$, respectivement) de telle sorte que $C^t x^* = F^*(b)$. De plus, si $(P_{4.7})$ est irréalisable, alors $(P_{4.8})$ ou $(P_{4.9})$, respectivement) est soit irréalisable soit non borné, et si $(P_{4.8})$ ou $(P_{4.9})$ est irréalisable, alors $(P_{4.7})$ est soit irréalisable soit non borné

Corollaire 4.1 Soient x^* et F^* les solutions primale et duale optimale pour $(P_{4.7})$ et $(P_{4.8})$ ou $(P_{4.9})$, respectivement. Si le vecteur des contraintes b dans $(P_{4.7})$ est changé en $b' \neq b$ (par exemple, en raison de changements dans les données d'entrée d'un problème donné) la fonction duale F^* reste duale réalisable pour le problème modifié et satisfait $Z' \leq F^*(b')$, où Z' désigne la valeur optimale de la fonction objectif du problème modifié.

4.5 Approche par fonction d'utilité du problème linéaire multi-objectifs en nombres entiers

Considérons à nouveau le MOILP

$$(P_{4.10}) \quad \begin{cases} \max Cx \\ sc \\ Ax \leq b \\ x \geq 0, \text{entier} \end{cases}$$

Appliquer l'approche ε -contrainte pour chercher la solution de $(P_{4.10})$ implique que nous devons résoudre de manière répétée le problème $(P_{4.11})$ pour différents choix d'une fonction objectif individuelle $f_k(x) = C^k x$, $k \in \{1, \dots, p\}$ et vecteurs de bornes inférieures $e = (e_j)_{j \in J_k} \in \mathbb{R}^{p-1}$ des objectifs restants. Le problème $(P_{4.11})$ est donc donné par

$$(P_{4.11}) \quad \begin{cases} \max C^k x \\ sc \\ C_{J_k} x \geq e, Ax \leq b \\ x \geq 0, \text{entier} \end{cases}$$

et son dual peut s'écrire

$$(P_{4.13}) \quad \begin{cases} \min F(-e, b) \\ sc \\ F(-C_{J_k} x, Ax) \geq c^k x \quad \forall x \geq 0, \text{entier} \\ F\mathcal{F} \end{cases}$$

Soit F^* optimale pour $(P_{4.12})$, c'est-à-dire F^* est une fonction duale optimale pour $(P_{4.13})$

Nous allons maintenant utiliser les fonctions duales optimales de $(P_{4.12})$ pour définir une fonction d'utilité pour le MOIP $(P_{4.10})$ comme une fonction composée donnée par

$$g(x) = c^k x - F^*(-C_{J_k} x, b).$$

un problème de programmation linéaire en nombres entiers auxiliaire est ainsi formulé comme

$$(P_{4.13}) \quad \begin{cases} \max C^k x - F^*(-C_{J_k} x, b). \\ \text{sc} \\ Ax \leq b \\ x \geq 0, \text{entier} \end{cases}$$

Théorème 4.5.1 *Soit x^* la solution optimale de $(P_{4.13})$ et soit F^* la solution optimale de $(P_{4.12})$. alors x est également optimal pour $(P_{4.13})$*

Preuve :

soit F solution réalisable pour $(P_{4.12})$. D'après le théorème 7, on a $C^k x \leq F(-e, b)$ pour tout x réalisable pour $(P_{4.11})$ De plus, tout x qui est réalisable pour $(P_{4.13})$ est aussi réalisable pour $(P_{4.11})$ si $e = C_{j_k} x$, ce qui implique que

$$C^k x \leq F(-C_{j_k} x, b) \text{ pour tout } x \text{ réalisable pour } (P_{4.13}).$$

Ainsi, la valeur optimale z^* de l'objectif de $(P_{4.13})$ satisfait $z^* \leq 0$.

Puisque x^* est réalisable pour $(P_{4.11})$, il est aussi réalisable pour $(P_{4.13})$, et par le théorème $(P_{4.3})$ il satisfait $C^k x^* = F^*(-C_{J_k} x, b)$. Cela prouve l'optimalité de x^* pour $(P_{4.13})$.

Théorème 4.5.2 *x^* est une solution efficace de $(P_{4.4})$ si et seulement s'il existe un indice $k \in \{1, \dots, p\}$ et une fonction non décroissante $F^* \in \mathcal{F}$ tel que x^* est optimale pour le problème $(P_{4.13})$*

Preuve :

Supposons d'abord que x^* est une solution efficace de $(P_{4.10})$. D'après le théorème 4, il existe un indice $k \in \{1, \dots, p\}$ et des bornes inférieures $e_j \in \mathbb{R}, j \in J_k$ tel que x^* est une solution optimale de $(P_{4.11})$. Soit F^* une solution optimale du problème dual $(P_{4.12})$. Alors le théorème 9 implique que x^* est optimal pour $(P_{4.13})$.

Deuxièmement, soit x^* la solution optimale de $(P_{4.13})$ et supposons que x^* n'est pas efficace pour $(P_{4.4})$. Alors il existe $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $C\hat{x} \geq Cx^*$.

Soit $k \in \{1, \dots, p\}$ un indice pour lequel $C^k \hat{x} \geq C^k x^*$. Alors $C_{J_k} \hat{x} \geq C_{J_k} x^*$ et puisque F^* est non décroissante il s'en suit que

$$F^*(-C_{J_k} \hat{x}, b) \leq F^*(-C_{J_k} x^*, b). \text{ D'où}$$

$$c^k x - F^*(-C_{J_k} \hat{x}, b) > c^k x^* - F^*(-C_{J_k} x^*, b)$$

. ce qui contredit l'optimalité de x^*

Ainsi, une fois qu'une solution efficace x^* de $(P_{4.4})$ et une fonction duale optimale correspondante $F^* \in \mathcal{F}$ de $(P_{4.12})$ satisfaisant $C^k x^* = F^*(-C_{J_k} x^*, b)$ ont été déterminés, cela implique que $C^k x \leq F^*(-C_{J_k} x, b)$ pour tout $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0, \text{entier}\}$. Dans le contexte du problème $(P_{4.10})$, cela implique que la courbe de niveau zéro de la fonction objectif du problème $(P_{4.13})$ donne une borne supérieure sur l'ensemble des solutions non dominées de $(P_{4.10})$ dans l'espace des objectif.

Corollaire 4.2 *Soient x^* et F^* les solutions optimales pour $(P_{4.11})$ et $(P_{4.12})$, respectivement. alors l'ensemble $L_{F^*}(0) = \{z \in \mathbb{R}^p : Z_j = C^j x^* \forall j \in J_k, Z_k = F^*(-C_{J_k} x^*, b), Ax \leq b, x \geq 0\}$ est une borne supérieure sur l'ensemble N des solutions non dominées N de $(P_{4.10})$, c'est-à-dire, $\forall z^F \in L_{F^*}(0) \nexists Z^N \in N, Z^N \geq z^F$.*

4.6 Génération de fonctions duales optimales et de fonctions d'utilité

Les fonctions optimales duales pour les problèmes de programmation en nombres entiers à objectif unique peuvent être générées par diverses méthodes, dont la plupart sont inspirées d'une méthode de résolution du problème primal comme, par exemple, les méthodes de coupe ou de branchement. Dans ce mémoire nous nous intéresserons qu'à la méthode de génération des fonction duales par la méthode des coupes. Nous renvoyons le lecteur intéressé par la méthode de branchement à Wolsey [48]

4.6.1 Génération de fonctions duales optimales à l'aide de plans de coupe

Nous utiliserons l'algorithme de coupe fractionnaire de Gomory (Gomory [20]) comme exemple représentatif d'une méthode de coupe pour la solution exacte de problèmes de programmation en nombres entiers. La brève description suivante est donnée dans Wolsey [48]

Reprenons le programme en nombres entiers ($P_{4.7}$) où nous supposons, comme précédemment, que le problème est borné et que toutes les données sont des nombres entiers. A l'itération r de l'algorithme de coup, $r \geq 0$, un problème de programmation linéaire donné par

$$(P_{4.14}) \quad \begin{cases} \max C^t x. \\ \text{sc} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, \dots, m+r \\ x \geq 0 \end{cases}$$

est résolu, où les m premières contraintes sont définies par la matrice des contraintes d'origine A et vecteur seconde membre b . Les r contraintes restantes ont été ajoutées lors des itérations précédentes.

Si ($P_{4.14}$) est irréalisable ou si la solution optimale est un nombre entier, l'algorithme prend fin. Sinon, c'est-à-dire si l'optimum x^r de ($P_{4.14}$) a des composantes fractionnaires, il existe un vecteur contrainte

$a^{m+r+1} = (a_{m+r+1,1}, a_{m+r+1,2}, \dots, a_{m+r+1,n}) \in \mathbb{R}^n$ et une valeur $b_{m+r+1} \in \mathbb{R}$ de telle sorte que $a^{m+r+1}x = b_{m+r+1}$ est un hyperplan séparateur entre l'ensemble des solutions entières réalisables de ($P_{4.11}$) et la solution optimale x^r . En particulier, a_{m+r+1} et b_{m+r+1} peuvent être trouvées comme

$$\begin{aligned} a_{m+r+1,j} &= G^{r+1}(a \bullet j) & \text{où} & \quad G^{r+1}(d) = \left\lfloor \sum_{i=1}^m \lambda_i^r d_i + \sum_{i=1}^r \lambda_{m+i}^r G^i(d) \right\rfloor \\ b_{m+r+1} &= G^{r+1}(b) & \lambda^r &= (\lambda_1^r, \dots, \lambda_{m+r}^r) \geq 0 \end{aligned}$$

Dans cette formule, λ^r est obtenu comme la partie fractionnaire du vecteur des coefficients des variables d'écart de la coupe de Gomory dans sa forme originale. voir Chvatal [16]

Nous pouvons conclure que $a^{m+r+1}x \leq b_{m+r+1}$ pour tout $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m+r, x \text{ entier}\}$, et $a^{m+r+1}x^r > b_{m+r+1}$.

Ainsi, la contrainte $a^{m+r+1}x \leq b_{m+r+1}$ peut être ajoutée en tant que $m+r+1$ ^{ème} contrainte à $(P_{4.14})$, c'est-à-dire comme un plan de coupe qui coupe la solution fractionnaire x^r mais ne touche aucune solution réalisable du le problème d'origine. L'algorithme procède à l'itération suivante, en augmentant le compteur d'itérations à $r+1$.

Sur la base de cet algorithme, des fonctions duales optimales peuvent être construites comme décrit dans Wolsey [48], en utilisant les solutions duales réalisables du proproblèmes $(P_{4.14})$:

Lemme 4.1 *soit $u^r \in \mathbb{R}^{m+r}, u^r \geq 0$ une solution duale réalisable de $(P_{4.15})$. Alors les fonctions*

$$(P_{4.15}) \quad F^r(d) = \sum_{i=1}^m u_i^r d_i + \sum_{i=1}^r u_{m+i}^r G^i(d)$$

sont des fonctions duales réalisables superadditives pour $(P_{4.7})$. De plus, si x^r est optimal pour $(P_{4.14})$ et u^r optimal pour le dual de $(P_{4.14})$, alors $C^t x^r = F^r(b)$.

4.6.2 Exemple illustratif

Nous donnons ici un exemple numérique pour clarifier l'approche proposée. Nous considérons un problème de programmation linéaire en nombres entiers bi-objectifs impliquant des paramètres aléatoires dans le membre de droite des contraintes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{"max"} \quad Z_1(x) = x_1 + x_2, \\ \text{"max"} \quad Z_2(x) = x_1 \\ sc \\ Pr [5x_1 + 2x_2 \leq b_1] \geq 0.90 \\ Pr [x_2 \leq b_2] \geq 0.95 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ et entiers} \end{array} \right.$$

Les b_i ($i = 1, 2$) sont des variables aléatoires normales avec les épérances

et les variances suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(b_1) = 11.72 \\ \text{var}(b_1) = 64 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} E(b_2) = 2.71 \\ \text{var}(b_2) = 4 \end{array} \right.$$

A partir de la table de la loi normale, nous avons :

$$K_{\alpha_1} = K_{0.90} = 1.285 \quad \text{et} \quad K_{\alpha_2} = K_{0.95} = 1.645$$

Les contraintes déterministes s'écrivent donc comme suit :

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &\leq E(b_1) + K_{\alpha_1}\sqrt{\text{var}(b_1)} = 11.72 + 1.285 \times 8 = 22 \\ x_2 &\leq E(b_2) + K_{\alpha_2}\sqrt{\text{var}(b_2)} = 2.71 + 1.645 \times 2 = 6 \end{aligned}$$

De là, nous obtenons un problème de programmation linéaire en nombres entiers bi-objectifs déterministe donné par :

$$(P_0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max Z_1(x) = x_1 + x_2 \\ \max Z_2(x) = x_1 \\ sc \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{entiers} \end{array} \right.$$

En utilisant ε -contrainte pour (P_0) en fixant la borne inférieure du deuxième objectif à 3 (*i.e.*, $e = 3$) nous obtenons un programme linéaire mono objectif , puis en obtient le problème relaxé suivant apres avoir ecarté la contrainte d'intégrité :

$$(P_r) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max Z_1(x) = x_1 + x_2 \\ sc \\ -x_1 \leq -3 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

La solution du problème relaxé est $(x_1, x_2) = (3, \frac{7}{2})$ obtenue en utilisant la simplexe.

			1	1	0	$-M$	0	0
B			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
←	$-M$	x_4	3	1	0	-1	1	0
	0	x_5	22	5	2	0	0	1
	0	x_6	6	0	1	0	0	0
			$-M - 1 \uparrow$	-1	$-M$	0	0	0
	1	x_1	3	1	0	-1	/	0
←	0	x_5	7	0	2	5	/	1
	0	x_6	6	0	1	0	/	0
			0	$-1 \uparrow$	-1	/	0	0
	1	x_1	3	1	0	-1	/	0
	1	x_2	$\frac{7}{2}$	0	1	$\frac{5}{2}$	/	$\frac{1}{2}$
	0	x_6	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	/	$-\frac{1}{2}$
			0	0	$\frac{3}{2}$	/	$\frac{1}{2}$	0

Tableau 1

Cette solution contient une composante fractionnaire. Nous introduisons une coupe de Gomory dans le dernier tableau du simplexe puis on applique le dual du simplexe

$$\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5 \geq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 + x_7 \leq -\frac{1}{2}$$

			1	1	0	0	0	0
B			x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7
	1	x_1	3	1	0	-1	0	0
	1	x_2	$\frac{7}{2}$	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	0	x_6	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
←	0	x_7	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
			0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2} \uparrow$	0	0
	1	x_1	3	1	0	-1	0	0
	1	x_2	3	0	1	2	0	1
	0	x_6	3	0	0	-3	0	-1
	0	x_5	1	0	0	1	1	-2
			0	0	1	0	0	1

Tableau 2

La solution est $(x_1, x_2) = (3, 3)$ avec une valeur optimale $Z_1 = 6$, vecteurs des variables duales $U = (1, 0, 0, 1)$, et avec $\lambda^1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ on obtient une fonction duale optimale comme ($P_{4.15}$)

$$F_{CP}(d) = F^r(d) = d_1 + G(d) = d_1 + \left[\frac{1}{2}(d_1 + d_2)\right]$$

$$F^1(d) = F^1(-x_1, 22, 6) = -x_1 + \frac{1}{2}(-x_1 + 22)$$

Avec

$$d = (d_1, d_2, d_3) = (-x_1, 22, 6) \text{ et } G^1(d) = \frac{1}{2}d_1 + \frac{1}{2}d_2 = \frac{1}{2}(d_1 + d_2)$$

d'où la fonction duale

$$\begin{aligned} F^1(d) &= d_1 + \frac{1}{2}(d_1 + d_2) \\ &= -x_1 + \frac{1}{2}(-x_1 + 22) \end{aligned}$$

Le problème auxiliaire de programmation en nombres entiers est formulé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max h(x) = x_1 + x_2 - F^1(-x_1, 22, 6) = 2x_1 + x_2 - [-0.5x_1 + 11] \\ sc \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{ et entiers} \end{array} \right.$$

On résout le dernier problème avec le simplexe comme suit :

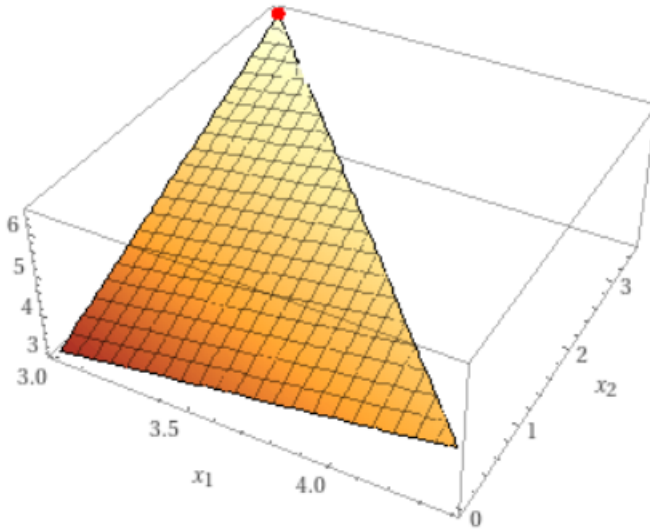
			$\frac{3}{2}$	1	0	0
C_B	B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4
← 0	x_3	22	5	2	1	0
0	x_4	6	0	1	0	1
$(Z_j - C_j)$			$-\frac{3}{2} \uparrow$	-1	0	0
$\frac{3}{2}$	x_1	$\frac{22}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0
← 0	x_4	6	0	1	0	1
$(Z_j - C_j)$			0	$-\frac{2}{5} \uparrow$	$\frac{3}{10}$	0
$\frac{3}{2}$	x_1	2	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$
1	x_2	6	0	1	0	1
$(Z_j - C_j)$			0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$

Tableau 3

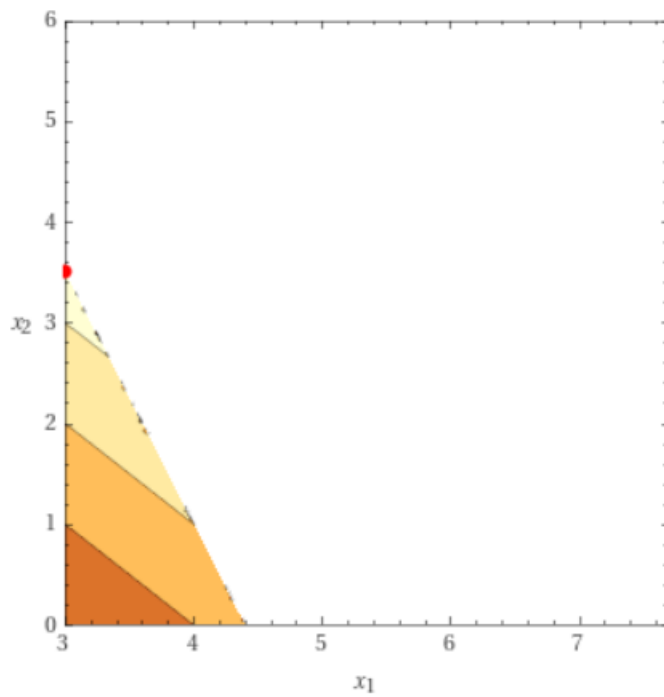
La solution optimale entière de ce dernier est la solution efficace du problème initial donné est $(x_1, x_2) = (2, 6)$.

$$\max\{x_1 + x_2 \mid x_1 \geq 3 \wedge 5x_1 + 2x_2 \leq 22 \wedge x_2 \leq 6 \wedge x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0\} = \frac{13}{2}$$
$$\text{at } (x_1, x_2) = \left(3, \frac{7}{2}\right)$$

3D plot:



Contour plot:



Code:

Epsilon scalization :

```
clear; clc
hold on

% Multi-Objective Optimization Example Problem - Messac 6.4 modification
% Epsilon-constraint method

x0 = [0 0]; % Starting point
UB = [6 6]; % Upper bound
LB = [0 0]; % Lower bound

options = optimset('LargeScale', 'off', 'MaxFunEvals', 1000, ...
    'TolFun', 1e-6, 'TolCon', 1e-6, 'disp', 'off');

% Create constraint bound vector:

n = 50;          % Number of Pareto points
eps_min = 0; eps_max = 6;
eps = eps_min:(eps_max - eps_min)/(n-1):eps_max;

% Solve scalarized problem for each epsilon value:

xopt = zeros(n,length(x0));

for i=1:n
    [xopt(i,:)] = fmincon('obj_eps', x0, [], [], [], [], LB, UB, ...
        'nonlcon_eps', options, eps(i));
end
```

```
% Plotting is easier in this case since the design variables are the
% objectives:
figure(2); clf
plot(xopt(:,1), xopt(:,2), 'rs'); hold on
xlabel('\mu_1')
ylabel('\mu_2')
title('Pareto Front - Epsilon Constraint')

% In this contrived example, the Pareto front is the same as the constraint
% boundary. Plot constraint boundary to compare with generated Pareto front:
x = 0:0.001:6;
C = 5.*exp(-1.*x) + 2.*exp(-0.5.*(x-2.1).^2);
plot(x,C,'k')

function f = obj_eps(x, ~)
% Objective function
% Epsilon Constraint method
mu1 = x(1);
f = mu1;
end

function [C,Ceq] = nonlcon_eps(x, eps)
% Constraint function
% Epsilon Constraint method
Ceq = [];
C(1) = 5*exp(-1*x(1)) + 2*exp(-0.5*(x(1)-2.1)^2) - x(2);
C(2) = x(2)-eps;
```

Solution dual complex :

```
%% Application du dual simplex sur le nouveau systeme mono-objectif
```

```
%% pour trouver la solution optimale
```

```
%Matrice de la fonction objectif
```

```
c=[-1 -1];
```

```
%Matrice des contraintes
```

```
A=[-1 0;5 2;0 1];
```

```
%Matrice b
```

```
b=[-3;22;6];
```

```
%Matrice des égalités
```

```
Aeq=[];
```

```
Beq=[];
```

```
%Point de départ de la solution
```

```
x0=0;
```

```
%Les intervals min et max des solutions
```

```
lb=[0,0];
```

```
ub=[inf,inf];
```

Elimination des solutions fractionnelles :

```
%% Pour les solutions contenant des fractions on utilisera
%% les coupes pour se restrainer aux solutions entieres, coupes de base:
% Coupes arrondies en nombres mixtes
% Coupes Gomory.
%% Les coupes basiques includs:
intcon = [1,2];
options2= optimoptions('intlinprog', 'CutGeneration','basic');
x_2 = intlinprog(c,intcon,A,b,Aeq,Beq,lb,ub,options2)
```

Conclusion générale

J'ai présenté dans ce mémoire ma modeste contribution sur les méthodes d'optimisation des problèmes multi-objectifs stochastiques. cette problématique est abordée par les scientifiques suivant deux approches : La première approche tente de ramener un problème multiobjectif à un simple objectif. la deuxième approche adopte un point de vue plus global en prenant en compte l'ensemble des objectifs et en utilisant la notion de dominance au sens de Pareto.

Dans ce mémoire, je me suis particulièrement intéressé aux problèmes multiobjectifs stochastiques en nombres entiers pour lesquels relativement peu de travaux ont été réalisés. Le travail réalisé s'articule autour de la résolution d'un problème multiobjectif stochastique en nombres entiers dans lequel les objectifs sont linéaires, les contraintes présentent des seuils de probabilité et les composantes du vecteur second membre des contraintes sont représentées par des variables aléatoires. Conformément à ce qui a été vu au premier chapitre de ce mémoire, le modèle étudié se ramène à un problème de programmation linéaire multiobjectif quelque soit la loi de probabilité considérée.

L'algorithmique de la méthode proposée pour résoudre le problème en question apparaît simple mais exige, non seulement, la connaissance des seuils de probabilité sur les contraintes mais surtout la connaissance des bornes inférieurs sur les objectifs. La qualité de la solution dépend totalement de ces paramètres. Par conséquent, si le décideur est trop gourmand, le problème peut ne être réalisable. Dans ce cas, il doit être capable d'ajuster au moins certaines bornes inférieurs des objectifs. Le point positif de cette méthode est donc sa flexibilité au changement de certains ou tous les paramètres.

Comme complément à ce travail, il serait intéressant de générer les fonctions duales à partir de la méthode branch and bound et faire une étude comparative des résultats obtenus par les deux méthodes (coupes et branch and bound). Aussi, il serait intéressant de considérer des objectifs non linéaires.

Bibliographie

- [1] Abbas M., Chaabane D., An algorithm for solving multiple objective integer linear programming problem, *RAIRO Operations Research* (36) (2002), 351–364.
- [2] Abbas M., Moulai M., Solving multiple objective integer linear programming, *Journal of the Italian Operations Research Society, Ricerca Operativa* 29(89) (1999), 15–39.
- [3] Amrouche S., Moulai M., Multi-objective stochastic integer linear programming with fixed recourse, *International Journal of Multicriteria Decision Making*, Vol.2 No.4 (2012), 355-378.
- [4] Bellahcene F., Abbas M., Cutting plane method for multiple objective stochastic integer linear programming, *European Journal of Operational Research* 168 (2006), 967–984.
- [5] Bellahcene F., Decision-makers preferences for modeling multiple objective stochastic linear programming problems, *Operatios Research and Decisions* 3, (2019). DOI : 10.5277/ord190301.
- [6] Bellahcene F., Marthon P., A compromise solution method for the multiobjective minimum risk problem, *Operational Research* (2021) 21 :1913–1926, doi.org/10.1007/s12351-019-00493-1.
- [7] Benayoun R., De Montgolfier J., Tergny J., Larichev O., Linear programming with multiple objective functions, Step method (STEM), *Mathematical Programming* 1 (2) (1971), 366-373.
- [8] Ben Abdelaziz F., L'efficacité en programmation multi-objectifs stochastique, Ph.D. Thesis, Université de Laval, Québec, (1992).

-
- [9] Ben Abdelaziz F., Land P., Nadeau R., Distributional unanimity multiobjective stochastic linear programming, in Climaco J. (Eds), *Multicriteria Analysis : Proceedings of the XIth international conference on MCDM*, Springer Verlag (1997), Berlin, 225-236.
- [10] Ben Abdelaziz F., Land P., Nadeau R., Dominance and efficiency in multicriteria decision under uncertainty, *Theory and Decision* 47 (1999), 191-211.
- [11] Benders J.F., Partitioning Procedures for solving mixed- variables programming problems, *Numer. Math.* 4 (1962), 238-252.
- [12] Bereanu B., Programme de risque minimal en programmation linéaire stochastique, *C.R Acad. SCI. Paris* 259, (1964), 1383-1386.
- [13] Birge J.R., Louveaux F.V., *Introduction to Stochastic Programming*, Springer Verlag (1997), New York.
- [14] Chaabane D., Contribution à l'optimisation multicritère en variables discrètes, PhD thesis, Faculté Polytechnique de Mons, (2006).
- [15] Chaabane D., Mebrek F., Optimization of a linear function over the set of stochastic efficient solutions, *Computational Management Science* 11(1) (2014), 157-178.
- [16] Caballero R., Cerdá E., Munoz M.M., Rey L., Relations among every several efficiency concepts in stochastic multiple objective programming. In : *Research and Practice in Multiple Criteria Decision Making* Haimes, Y.Y., Steuer, R. (Eds.), *Lectures notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer- Verlag (2000), Berlin, Germany, 57-68.
- [17] Charnes A., Cooper W.W., Chance constrained programming, *Management Science* 6 (1959), pp.73-79.
- [18] Chvatal, V., Edmonds polytopes and a hierarchy of combinatorial problems. *Discrete Mathematics*, 4, (1973), 305–337.
- [19] Dantzig G.B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton, University Press (1963), Princeton.

-
- [20] Gomory R. E., An algorithm for integer solutions to linear programs, In : Graves R. L., Wolfe P. (Eds), *Recent Advances in Mathematical Programming*, McGraw-Hill, New York, (1963), 263-302.
- [21] Gupta R., Malhotra R., Multi-criteria integer linear programming problem, *Cahiers de CERO* 34 (1992), 51–68.
- [22] Hameg A., Distribution de l'optimum d'un programme linéaire stochastique, Thèse de doctorat d'état en sciences mathématique, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, (1988).
- [23] Hogg R.V., Graig A.T., *Introduction to mathematical Statistics*, MacMillan Publishing Co., New York, (1989).
- [24] Ishii H., Nishida T., Nanbu Y., A generalized chance constrained programming problem. *Journal of Operations Research Society of Japan* 21(1)(1978).
- [25] Kall P., *Stochastic Linear Programming*, Springer Verlag, Berlin, (1976).
- [26] Kall P., Wallace S.W., *Stochastic Programming*, Willey Interscience Series in Systems and Optimization, (1994).
- [27] Kataoka S., A stochastic programming model, *Econometrics* 31 (1963), 181-196
- [28] Klein D, Hannan E, An algorithm for the multiple objective integer linear programming problem, *European Journal of Operational Research* 9 (1982), 378–385.
- [29] Kunsch P.L., Teghem J., Nuclear fuel cycle optimization, *European Journal of Operational Research* 31 (1987), 240-249
- [30] Kunsch P.L., Application of STRANGE to energy studies, in *Stochastic versus fuzzy approaches to multiobjective mathematical programming under uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, (1990), 117-130.
- [31] Leclercq J.P., *Stochastic Programming : an interactive multicriteria approach*, *European Journal of Operational Research*, 10 (1) (1982), 33-41.

-
- [32] Leujeune M., Statistique : La théorie et ses applications, Springer-Verlag, (2004).
- [33] Nemhauser G.L., Wolsey, Integer and combinatorial optimization, Willey Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimisation, (1988).
- [34] Sakarovitch M., Optimisation combinatoire, méthodes mathématiques algorithmiques, programmation discrète tomes 1 et 2, edition Hermann (1984).
- [35] Steuer R.E., Multiple Criteria Optimization :Theory, Computation and Application, John Wiley, New York (1986).
- [36] Steuer R.E, Random problem generation and the computation of efficient extreme points in multiple objective linear programming, *Comput Optim Appl* 3 (199), 333-347
- [37] Sylva J., Crema A., A method for finding the set of nondominated vectors for multiple objective integer linear programs, *European Journal of Operational Research* 158 (1)(2004), 46-55.
- [38] Teghem J., Strange-Momix : an Interactive method for mixed integer linear programming. In R. Slowinski and J. Teghem (eds), *Stochastic Versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming Under Uncertainty*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers (1990), 101-115.
- [39] Teghem J., Dufrane D., Thauvoye M., Kunsch P. L., STRANGE : Interactive method for multiobjective linear programming under uncertainty, *European Journal of Operational Research*, 26(1) (1986), 65-82.
- [40] Teghem J., Kunsch P. L., Multi-objective decision making under uncertainty : an example for power systems, in Haimes Y.Y. and Chankong V. (Eds), *Decision Making with Multiple Objective*, Springer (1985), 443-456.

- [41] Teghem J., Kunsh P.L., A survey of techniques to determine the efficient solutions to multi-objective integer linear programming, *Asia-Pacific Journal of Operations Research* 3 (1986), 95-108.
- [42] Tind, J. and Wolsey, L. A., An elementary survey of general duality theory in mathematical programming. *Mathematical Programming*,(1981), 21, 241–261.
- [43] Tinter G., A note on stochastic linear programming, *Econometrica*, 28 (1960), 490-495.
- [44] Urli B., Nadeau R., PROMISE / scenarios : An interactive method for multiobjective stochastic linear programming under partial uncertainty, *European Journal of operational research*, 155 (2), 361-372.
- [45] Verma V., Constrained integer linear fractional programming problem, *Optimization* 21 (1990), 749–757.
- [46] Wets R., Stochastic programming : Solution techniques and approximation schemes, in Berchem, Gr.tschel, Korte (Eds), *Mathematical Programming, the state of the art*, Springer Verlag (1983), 566-603.
- [47] White D.J., *Optimality and efficiency*, John Wiley and Sons (1982), Chichester.
- [48] Wolsey L. A., *Integer programming duality : Price functions and sensitivity analysis*. *Mathematical Programming* 20 (1981), 173–195.