

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERI, Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Automatique

Mémoire de Fin d'Etudes

En vue de l'obtention du diplôme

De Master en Automatique

Thème

**Linéarisation approximative par
bouclage et commande par mode
glissant d'un pendule inversé**

Proposé et dirigé par : **Mr.Said. DJENNOUNE**

Présenté par :

TITOUCHE Kahina
YAHMI Lamia

Soutenu le : 27 / 09 /2010

Promotion 2011

Remerciements :

En premier lieu, nous tenons à remercier notre bon Dieu de nous avoir donné le courage d'accomplir un tel travail.

Nous exprimons notre sincère remerciement et profonde gratitude à notre promoteur Monsieur DJENNOUNE Saïd, professeur à l'UMMTO, qui a accepté de nous encadrer et de nous guider tout au long de la réalisation de ce projet.

Nos vifs remerciements vont également à Monsieur SI-AMMOUR Amar, Docteur d'état à l'UMMTO, qui nous a aidé pour la réalisation de ce projet.

Nous remercions tous les membres de Jury d'avoir acceptés de porter un avis sur ce mémoire.

C'est le moment aussi pour dire merci à tous les professeurs qui nous ont suivi du primaire jusqu'à ce jour.

Un très grand merci à nos parents qui ont toujours été à nos côtés.

Enfin, un grand merci à tous ceux qui nous ont soutenus.

Dédicace :

Je dédie ce modeste travail à:

- ✚ Mes parents que j'aime beaucoup.*
- ✚ Ma chère sœur Malika.*
- ✚ Mes chers frères Moh, smail, Hakim et le petit Nacer.*
- ✚ Mes très chers grands parents.*
- ✚ Mes oncles, tantes et leurs enfants.*
- ✚ Ma chère binôme et copine Lamia et sa famille.*
- ✚ Tous mes amis (es) « que notre amitiés ne cesse jamais ».*
- ✚ Mes copines Nabila, Ghenima, Zehoura, Dalila, hassina, hayet, lila, farroudja et Karima.*
- ✚ Tous ceux qui m'aiment.*

Kahina TITOUCHE

Dédicace :

Je dédie ce travail à :

- ✚ Mes très chers parents.*
- ✚ Mes chers frères Yahia, Mouloud et Momoh.*
- ✚ Mes chères sœurs Rachida, Yasmîna et Malika.*
- ✚ Mes beaux frères Nasser et Farid.*
- ✚ Ma très chère copine et binôme Kahina et sa famille.*
- ✚ Celui qui m'a soutenu beaucoup Mohammed et sa famille.*
- ✚ Ma chère famille.*
- ✚ Tous mes amis (es).*
- ✚ Tous ceux que je connais.*

YAHMI LAMIA

| | |
|--|----|
| Introduction générale | 01 |
| | |
| Chapitre 1 : Commande non linéaire | |
| I.I. Introduction | 03 |
| I.II. Système non linéaire | 03 |
| I.III. Commande des systèmes non linéaires | 03 |
| I.III.1. Linéarisation numérique : | 04 |
| I.III.1.1. Linéarisation autour d'un point de fonctionnement | 04 |
| I.III.1.2. Modèle linéaire tangent | 05 |
| I.III.2. Linéarisation exacte par retour d'état (feedback) | 05 |
| I.III.2.1. Cas des systèmes monovariables | 06 |
| I.III.2.1.1. Linéarisation entrée / sortie | 08 |
| I.III.2.1.2. Linéarisation entrée/état | 12 |
| I.IV. Commande par mode glissant | 15 |
| I.IV.2. Différentes structures de contrôle par mode de glissement | 16 |
| I.IV.3. Théorie de la commande d'un système à structure variable | 17 |
| I.IV.4. Conception de la commande par mode de glissement | 18 |
| I.IV.4. 1. Choix de la surface de glissement | 18 |
| I.IV.4. 2. Condition de convergence et d'existence | 19 |
| I.IV.4. 2.1. Fonction discrète de commutation | 19 |
| I.IV.4. 2.2. La fonction de <i>Lyapunov</i> | 19 |
| I.IV.4. 3. Calcul de la commande | 20 |
| I.IV.5. Solution pour la suppression du phénomène de réticence | 22 |
| I.IV.5.1. Solution de couche limite | 23 |
| I.IV.5.2. Solution basée sur un observateur | 24 |
| I.IV.6. Avantages et inconvénients de la commande par mode glissant | 24 |
| I.V. Conclusion | 25 |

Chapitre II : Méthodes de linéarisation approximative

| | |
|---|----|
| II.I. Introduction. | 26 |
| II.II. linéarisation approximée d'Arthur KRENER. | 26 |
| II.II.1. Approximation linéaire du premier ordre. | 27 |
| II.II.2. Approximation linéaire d'ordre élevé. | 28 |
| II.II.3. Conditions nécessaires et suffisantes. | 30 |
| II.III. Approximation linéaire basée sur l'algorithme de HUNT. | 33 |
| II.III.1. L'algorithme de HUNT | 35 |
| II.III.2. Exemple illustratif. | 36 |
| II.IV. Linéarisation approximée basée sur la maximisation du degré relatif | 38 |
| II.IV.1. Notion du degré relatif maximum. | 39 |
| II.V. Conclusion. | 40 |

Chapitre III : Commande du pendule inversé

| | |
|--|----|
| III.I. Introduction. | 41 |
| III.II. Description du pendule inversé | 41 |
| III.III. Modèle simplifié du pendule inversé | 43 |
| III.III.1. Energie cinétique du système en mouvement. | 43 |
| III.III.2. Energie potentielle du système. | 44 |
| III.III.3. Equation de Lagrange. | 44 |
| III.III.3.1. L'équation de Lagrange pour le premier degré de liberté $x(t)$ | 45 |
| III.III.3.2. L'équation de Lagrange pour le deuxième degré de liberté $\theta(t)$ | 45 |
| III.IV. Commande du système | 47 |
| III.IV.1. Commande basée sur la linéarisation numérique autour du point d'équilibre | 47 |
| III.IV.2. Commande par placement de pôles. | 48 |

| | |
|--|--------|
| III.IV.3. Commande par mode glissant. | 48 |
| III.IV.4. Simulation et résultats | 49 |
| III.IV.5. Interprétation et comparaison des résultats. | 55 |
| III.V. Linéarisation approximée du modèle en utilisant la méthode basée sur la maximisation du degré relatif. | 56 |
| III.V.1. Calcul du degré relatif maximum pour le pendule inversé. | 57 |
| III.V.2 La fonction de sortie | 58 |
| III.V.3. Linéarisation approximative entrée-sortie | 59 |
| III.V.4. Commande par mode glissant. | 61 |
| III.V.5. Simulation et résultats. | 62 |
| III.V.6. Interprétation des résultats. | 69 |
| III.VI. Linéarisation par l'algorithme de Hunt. | 70 |
| III.VI.1. Commande par mode glissant | 72 |
| III.VI.2. Simulation et résultats | 73 |
| III.VI.3. Interprétation des résultats. | 80 |
| III.VII. Conclusion. | 81 |
| IV. Conclusion générale. | 82 |
| Bibliographie. | 84 |
| Annexe. | 86 |

La commande des processus constitue un objectif fondamental dans le domaine des sciences de l'ingénieur et particulièrement en automatique.

Commander un processus c'est déterminer les commandes à appliquer à celui-ci afin de lui assurer un comportement désiré.

Les procédés physiques de part leurs natures ont un comportement non linéaire, qu'il est nécessaire de représenter par des modèles aussi non linéaires. La recherche de lois de commande pour les systèmes non linéaires est très complexe. Pour pouvoir appliquer les lois de commande linéaire, les techniques de linéarisation deviennent importantes. Parmi ces techniques, on trouve la linéarisation numérique qui permet l'utilisation de toute la théorie de commande des systèmes linéaires bien maîtrisée. Cependant, la commande calculée à base de cette approximation s'avère insuffisante d'où la nécessité des techniques de commande plus appropriées: Commande linéarisante par retour d'état et la commande par mode de glissement.

La méthode de linéarisation par retour d'état permet d'imposer un comportement linéaire (entrée/état) ou (entrée/sortie) au système non linéaire. Toutefois, l'existence de cette méthode linéarisante est liée à la vérification des deux conditions de commandabilité et d'involativité autour d'un point de fonctionnement. Ces conditions sont parfois non satisfaites pour certains systèmes non linéaires. Afin de palier à cet inconvénient, des méthodes de linéarisation approximative par retour d'état ont été développées.

Notre travail consiste à étudier deux méthodes de linéarisation approximatives par retour d'état utilisant l'approche de mode de glissement.

La première méthode est basée sur la maximisation du degré relatif pour les systèmes dont le calcul du degré relatif est complexe. Quant à la deuxième méthode, elle consiste à utiliser l'algorithme de Hunt pour linéariser approximativement le système.

Cette étude est illustrée par une application sur un système non linéaire qui est le pendule inversé.

Ainsi, notre mémoire est organisé comme suit:

Le premier chapitre est consacré à des notions de base concernant la commande des systèmes non linéaires. Dans un premier lieu, nous introduisons la notion générale d'un système non linéaire ainsi que la commande de ce type de système, puis nous abordons les différentes méthodes de linéarisation (linéarisation numérique, linéarisation exacte par retour d'état). Enfin, nous élaborons la commande par mode de glissement.

Le second chapitre illustre les méthodes de linéarisation approximative par feedback. Nous débutons par la méthode approximative de Krener. Ensuite, nous passons à la méthode

basée sur l'algorithme de Hunt et nous terminons par la méthode basée sur la maximisation du degré relatif.

Le troisième et dernier chapitre est consacré à l'étude d'un système non linéaire constitué d'un pendule inversé et d'un chariot. Nous effectuons d'abord une modélisation au système, puis nous le linéarisons en utilisant les méthodes approximatives citées précédemment. Le système sera commandé par la commande par mode glissant. Ensuite, nous développons par Matlab les algorithmes des différentes méthodes linéarisantes afin d'interpréter et de comparer les différents résultats obtenus après simulation.

Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion générale sur l'étude menée et nous donnons quelques perspectives.

I.I. Introduction:

La plupart des processus physiques présentent des non linéarités sévères, la mise en équation de ce type de processus conduit souvent, lorsque la modélisation est possible, à des équations différentielles non linéaires. L'ensemble s'avère inexploitable pour la synthèse d'une loi de commande. Une des stratégies possible consiste dès lors à approximer le modèle non linéaire, néanmoins, la commande calculée à base de cette approximation n'est pas toujours adéquate. Pour contourner ce problème, l'utilisation d'autres techniques de commande est recommandé, parmi ces techniques on trouve la linéarisation par retour d'état et la commande par mode de glissement.

Dans ce présent chapitre, nous introduisons la notion générale d'un système non linéaire. Dans un premier lieu, nous abordons la commande non linéaire par l'illustration des différentes méthodes de linéarisation en mettant l'accent sur la linéarisation par retour d'état. Enfin, nous exposons le principe de fonctionnement de la commande par mode glissant.

I.II. Système non linéaire : [6];[7];[8];[10];[11]

De manière générale, un système non linéaire est un ensemble d'équations différentielles non linéaires.

Le modèle d'état d'un système non linéaire est donné par la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u) \\ y(t) = h(x, u) \end{cases}, x \in \mathfrak{R}^n, u \in \mathfrak{R}^m, y \in \mathfrak{R}^p \quad (1.1)$$

Où x est le vecteur d'état de dimension n , u l'entrée du système et y la sortie commandée. En fait, en génie des procédés, la majorité des systèmes rencontrés sont des systèmes affines par rapport à l'entrée qui ont la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + g(x)u \\ y(t) = h(x) \end{cases} \quad (1.2)$$

$f(x)$ et $g(x)$ sont appelés respectivement champ de vecteurs de la dynamique et champ de vecteurs de la commande.

I.III. Commande des systèmes non linéaires : [9]

L'élaboration d'un modèle mathématique peut se faire par l'approche de modélisation qui consiste à mettre en équation les différents phénomènes du procédé en leur appliquant les lois de la physique.

Cependant, la complexité des phénomènes fait que cette approche conduit souvent à un modèle non linéaire. Pour en déduire une représentation d'état linéaire, il faut procéder à une linéarisation du modèle non linéaire en utilisant des méthodes de linéarisation, parmi ces méthodes on trouve :

- Linéarisation numérique.
- Linéarisation par retour d'état.

I.III.1. Linéarisation numérique :

I.III.1.1. Linéarisation autour d'un point de fonctionnement : [3]

Soit le système non linéaire donné par l'équation (1.1) :

Soit (x_0, u_0) le point d'équilibre pour ce système, afin de linéariser ce système, on introduit les variables d'écarts suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x - x_0 \\ \tilde{u} &= u - u_0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

On effectue la linéarisation en développant f en série de Taylor du premier ordre :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{\tilde{x}}(t) + \dot{x}_0(t) \\ &= f(\tilde{x}(t) + x_0(t), \tilde{u}(t) + u_0(t)) \\ &= f(x_0(t), u_0(t)) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \tilde{x} + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \tilde{u} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Si on choisit $u = \tilde{u}$ c'est-à-dire $u_0 = 0$ et en développant de la même manière l'équation de sortie, on trouve le système linéarisé autour du point d'équilibre suivant:

$$\begin{cases} \tilde{\dot{x}} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \tilde{x} + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \tilde{u} \\ \tilde{y} = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \tilde{x} + \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \tilde{u} \end{cases} \quad \text{si } f(x_0, u_0) = 0 \tag{1.5}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \tilde{x} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} = C\tilde{x} + D\tilde{u} \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\text{Avec } A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} ; B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} ; C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} ; D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} . \quad (1.7)$$

A et B représente respectivement les matrices jacobiennes de f suivant x et u .

C et D représente respectivement les matrices jacobiennes de h suivant x et u .

Le modèle linéaire obtenu n'est valable que localement, c'est uniquement autour de point de fonctionnement choisit. Néanmoins, si le système possède plusieurs points d'équilibre, il est possible de changer ce point afin de constituer un nouveau système linéaire local.

I.III.1.2. Modèle linéaire tangent: [2]

Dans ce cas, on suppose disposer d'un modèle mathématique de processus physique qu'on linéarise autour de différents points de fonctionnement judicieusement choisis. Considérant le système non linéaire donné par : $\dot{x} = f(x, u)$

La linéarisation du système autour du point d'équilibre (x_0, u_0) donne :

$$\dot{x} = A.(x(t) - x_0) + B.(u(t) - u_0) + f(x_0, u_0) \quad (1.8)$$

Que l'on peut écrire sous forme :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + d_0(t) \quad (1.9)$$

$$\text{Avec : } A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} ; B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \quad (1.10)$$

$$d_0 = f(x_0, u_0) - Ax_0 - Bu_0 \quad (1.11)$$

I.III.2. Linéarisation par retour d'état (feedback) : [1]; [4] ; [5] ;[10];[11] ;[6]

L'idée principale de la linéarisation par feedback est de transformer les dynamiques d'un système non linéaire en dynamique linéaire à l'aide d'un changement de coordonnées sur l'état de système et d'une commande par retour d'état, de sorte que les techniques de contrôle linéaires peuvent être appliquées.

Cette méthode est limitée ; elle s'applique pour la classe des systèmes non linéaires affines par rapport à l'entrée (système linéaire analytique) possédant la forme donnée par l'équation (1.2).

Trois étapes sont nécessaires pour la linéarisation :

- Calcul du degré relatif du système.
- Changement de coordonnées.
- La linéarisation exacte par retour d'état.

I.III.2.1. Cas des systèmes monovariabiles : [1] ; [4] ; [5] ; [6] ; [10];[11]

a. Degré relatif :

Considérons le système non linéaire monovariabiles suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + g(x)u \\ y(t) = h(x) \end{cases} \quad \begin{array}{l} u(t) \in \mathfrak{R} \\ y(t) \in \mathfrak{R} \end{array} \quad (1.12)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

✚ Définition:

On appelle r le degré relatif du système donné par l'équation (1.12) au point $x_0 \in D \subset \mathfrak{R}^n$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

$$L_g L_f^k h(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \text{ voisinage de } x_0 \text{ et } 0 \leq k \leq r-1 \quad (1.14)$$

$$L_g L_f^{r-1} h(x_0) \neq 0 \quad \text{au point } x_0 \quad (1.15)$$

Où :

$L_f h$ désigne la dérivée de Lie de la fonction h suivant la direction de f .

$L_f^k h$ désigne la $k^{\text{ème}}$ dérivée de Lie de la fonction h suivant la direction de f . (voir annexe)

Remarque (1.1):

- D'une manière générale, le degré relatif égal à l'ordre de dérivation qui doit être appliquée à la sortie afin d'avoir une dépendance explicite de l'entrée.
- Pour les systèmes linéaires, le degré relatif représente la différence entre le degré du dénominateur et le degré de numérateur de la fonction de transfert.

b. Transformation des coordonnées :

Soit les fonctions $\phi_i, i=1\dots r$ définies par :

$$\begin{cases} z_1 = \phi_1(x) = h(x) \\ z_2 = \phi_2(x) = L_f h(x) \\ \vdots \\ z_r = \phi_r(x) = L_f^{r-1} h(x) \end{cases} \quad (1.16)$$

Si r est inférieur strictement à l'ordre du système n ($r < n$), il est toujours possible de trouver $(n-r)$ autres fonctions $(\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x))$ telle que la matrice $\phi(x)$ est un difféomorphisme au voisinage de x_0 . (voir annexe)

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{r+1}(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Les valeurs de $(n-r)$ fonctions sont choisit telle que leurs dérivées de Lie suivant la direction de g soient égal à zéro i.e. $L_g \phi_i(x) = 0; i = r+1, \dots, n$.

Dans les nouvelles coordonnées, le système s'écrit sous la forme nominale suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{r-1} = z_r \\ \dot{z}_r = a(z) + b(z)u \\ \dot{z}_{r+1} = q_{r+1}(z) \\ \vdots \\ \dot{z}_n = q_n(z) \end{cases} \quad (1.18)$$

$$y = z_1$$

Où

$$\begin{aligned} a(z) &= L_f^r h(x) \\ b(z) &= L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0 \quad \forall x \in D \\ q_i(z) &= L_f \phi_i(x) \end{aligned} \quad (1.19)$$

c. Linéarisation par retour d'état :

On suppose que les états du système sont mesurables et que la commande dépend de l'entrée de référence extérieure v et de l'état du système. Soit $u(x)$ la commande linéarisante:

$$u(x) = \frac{1}{b(x)}(-a(x) + v) \quad (1.20)$$

$$\text{On pose } \alpha(x) = \frac{-a(x)}{b(x)} \quad \text{et} \quad \beta(x) = \frac{1}{b(x)} \quad (1.21)$$

Le système représenté par l'équation (1.12) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.22)$$

Selon la sortie du système (définie ou pas) on distingue deux cas de linéarisation :

- Linéarisation entrée /sortie.
- Linéarisation entrée/état.

I.III.2.1.1. Linéarisation entrée / sortie : [1];[4];[5];[10];[11]

La linéarisation exacte des systèmes non linéaires constitue une méthode naturelle et prometteuse; elle permet d'obtenir un comportement entrée-sortie linéaire par la mise en œuvre d'un bouclage, par la suite, toute la théorie linéaire peut être appliquée.

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.23)$$

Ayant un degré relatif r , selon la valeur de degré relatif deux cas existent :

✓ **Premier cas : $r = n$**

a. Changement de coordonnées:

Dans ce cas la transformation de coordonnées nous donne :

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) = h(x) = z_1 \\ \phi_2(x) = L_f h(x) = z_2 \\ \vdots \\ \phi_n(x) = L_f^{n-1} h(x) = z_n \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

Dans les nouvelles coordonnées, le système s'écrit sous la forme normale suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_n = \dot{z}_r = a(\phi^{-1}(z)) + b(\phi^{-1}(z))u \\ y = z_1 \end{cases} \quad (1.25)$$

Où

$$a(\phi^{-1}(z)) = L_f^n h(\phi^{-1}(z)) \quad \text{Et} \quad b(\phi^{-1}(z)) = L_g L_f^{n-1} h(\phi^{-1}(z)) \quad (1.26)$$

$$\phi(z) \text{ est un difféomorphisme donc } \phi^{-1}(z) \text{ existe, tel que: } \phi^{-1}(z) = x. \quad (1.27)$$

b. Bouclage linéarisant :

$$u(x) = \frac{1}{b(x)}(-a(x) + v), v \text{ est l'entrée auxiliaire du système.} \quad (1.28)$$

En boucle fermée le système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n \\ \dot{z}_n = v \\ y = z_1 \end{cases} \Rightarrow \dot{z} = Az + Bv \quad (1.29)$$

Le système obtenu est un système linéaire commandable exprimé sous la forme canonique de Brunovsky :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (1.30)$$

Remarque (I.2):

Les valeurs propres de la matrice d'état sont toutes nulles, d'où l'instabilité du système.

c. Transfert entre l'entrée auxiliaire et la sortie du système:

$$\begin{aligned}
 y(s) &= z_1(s) \\
 sz_1(s) &= z_2(s) \\
 &\vdots \\
 sz_n(s) &= v(s) \\
 z_1(s) &= \frac{1}{s^{n-1}} z_n(s) = \frac{1}{s^n} v(s)
 \end{aligned}
 \tag{1.31}$$

d'où la fonction de transfert : $G(s) = \frac{y(s)}{v(s)} = \frac{1}{s^n}$

Avec ce retour d'état le système aura la structure suivante :

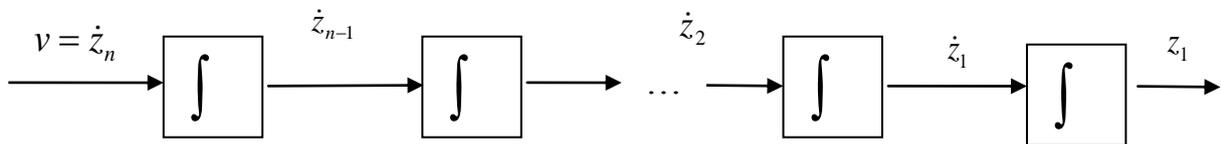


Figure (1.1): Chaîne d'intégrateurs.

✓ **Deuxième cas :** $r < n$

a. Changement de coordonnées:

Soit la transformation de coordonnées suivantes :

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) = h(x) = z_1 \\ \phi_2(x) = L_f h(x) = z_2 \\ \vdots \\ \phi_r(x) = L_f^{r-1} h(x) = z_r \\ \phi_{r+1}(x) = z_{r+1} \\ \vdots \\ \phi_n(x) = z_n \end{bmatrix}
 \tag{1.32}$$

Les $\phi_i(x); i = r + 1, \dots, n$ sont solutions des équations différentielles partielles :

$$L_g \phi_i(x) = 0; i = r+1, \dots, n \quad (1.33)$$

Le fait de chercher les $\phi_i(x); i = r+1, \dots, n$ solutions de ces équations différentielles a un double sens:

1. La distribution $\Delta = \text{span}\{g\}$ est involutive.
2. Dans les dérivées $\dot{z}_{r+1}, \dot{z}_{r+2}, \dots, \dot{z}_n$, la commande u n'apparaît pas.

Après l'application de la transformation de coordonnées donnée par l'équation (1.32), on aboutit au système d'équations suivant :

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_r &= a(\phi^{-1}(z)) + b(\phi^{-1}(z))u \\ \dot{z}_{r+1} &= L_f \phi_{r+1}(\phi^{-1}(z)) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= L_f \phi_n(\phi^{-1}(z)) \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

$$y = z_1$$

b. Bouclage linéarisant:

$$u(x) = \frac{1}{b(x)} [-a(x) + v] \quad (1.35)$$

En boucle fermée, on aura:

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_r &= v \end{aligned} \right\} \text{Partie linéaire} \quad (1.36)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_{r+1} &= L_f \phi_{r+1}(\phi^{-1}(z)) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= L_f \phi_n(\phi^{-1}(z)) \end{aligned} \right\} \text{Dynamique non linéaire cachée}$$

$$y = z_1$$

Avec ce retour d'état le système aura la structure suivante :

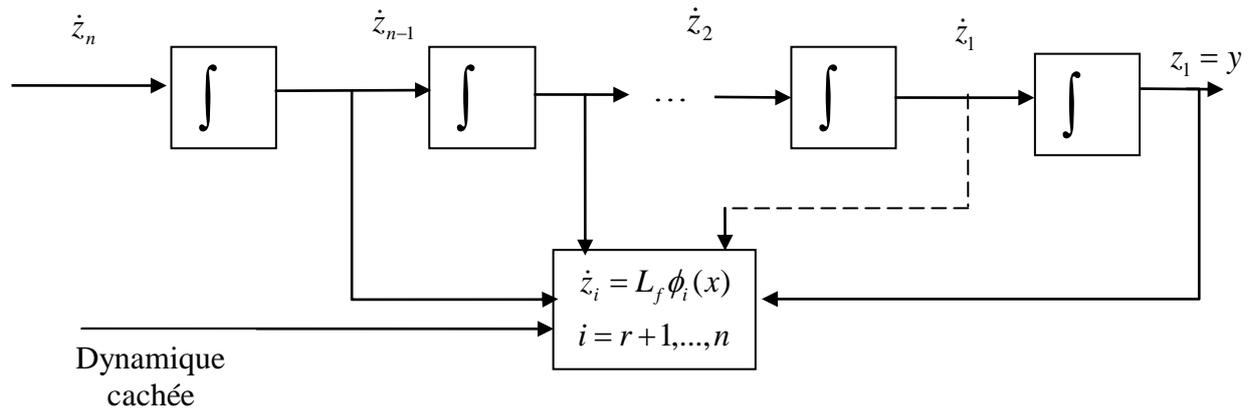


Figure (1.2): description du système après linéarisation ($r < n$)

c. Transfert entre l'entrée auxiliaire et la sortie du système:

Dans ce cas, la fonction de transfert:

$$G(s) = \frac{y(s)}{v(s)} = \frac{1}{s^r} \tag{1.37}$$

I.III.2.1.2. Linéarisation entrée/état:[1];[4];[5];[10];[11]

Dans ce cas, la sortie n'est pas imposée, le système non linéaire est donc donné par l'équation:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{1.38}$$

L'objectif est de réaliser une linéarisation complète entrée /état, pour ceci il suffit de trouver une sortie fictive $y(x) = \lambda(x)$ tel que le degré relatif du système donné par l'équation ci-dessous soit égale à n .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y(x) &= \lambda(x) \end{aligned} \tag{1.39}$$

$\lambda(x)$ doit donc satisfaire les relations suivantes:

$$L_g L_f^k \lambda(x) = 0, k = 0, \dots, n-2 \quad \forall x \in \text{voisinage de } x_0 \tag{1.40}$$

$$L_g L_f^{r-1} \lambda(x_0) \neq 0 \text{ en } x_0 \quad (1.41)$$

Le système (1.39) est linéarisable exactement dans l'espace d'état (linéarisation entrée/état dans un voisinage de x_0), si et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites :

- Les champs de vecteurs $\{g(x_0), ad_f g(x_0), \dots, ad_f^{n-1} g(x_0)\}$ sont linéairement indépendants.
- La distribution $\text{span}\{g(x), ad_f g(x), \dots, ad_f^{n-2} g(x)\}$ est involutive au voisinage de x_0 .

Remarque (I.3):

- La première condition exprime la condition de commandabilité du système, quant à la deuxième assure l'existence d'une fonction $\lambda(x)$ tel que le degré relatif égale à n .
- Le bouclage linéarisant s'obtient, comme dans le cas de la linéarisation entrée-sortie, en considérant que la sortie est $\lambda(x)$, et en la dérivant n fois jusqu'à ce que l'entrée apparaisse.

➤ Exemple illustratif:

Soit un système non linéaire mono variable affine par rapport à l'entrée défini par :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (1.42)$$

$$y = h(x) = x_3$$

Calcul du degré relatif :

$$L_g h(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (1.43)$$

$$L_f h(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = x_1 - x_2 \quad (1.44)$$

$$L_g L_f h(x) = [1 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (1.45)$$

$$L_f^2 h(x) = [1 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = -(x_1 + x_2^2) \quad (1.46)$$

$$L_g L_f^2 h(x) = [-1 \quad -2x_2 \quad 0] \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} = -e^{x_2} (1 + 2x_2) \neq 0 \quad \text{si } x_2 \neq \frac{-1}{2} \quad (1.47)$$

$r - 1 = 2 \Rightarrow r = 3$; Le degré relatif du système est égal à n (dimension du système).

Effectuant, maintenant le changement de variable :

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} z_1 = h(x) = x_3 \\ z_2 = L_f h(x) = x_1 - x_2 \\ z_3 = L_f^2 h(x) = x_1 - x_2^2 \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

Afin de vérifier si la matrice de la transformation de coordonnées est un difféomorphisme, nous calculons sa matrice Jacobienne :

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2x_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

Cette matrice est difféomorphisme si et seulement si $x_2 \neq \frac{-1}{2}$

Le système dans les nouvelles coordonnées s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= L_f h(x) + L_g h(x)u = z_2 \\ \dot{z}_2 &= L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u = z_3 \\ \dot{z}_3 &= L_f^3 h(x) + L_g L_f^2 h(x)u = -2(x_1 + x_2^2) - (1 + 2x_2)e^{x_2}u \end{aligned} \quad (1.50)$$

Bouclage linéarisant :

$$u(x) = \frac{1}{b(x)} (-a(x) + v) \quad (1.51)$$

Avec :

$$\begin{aligned} a(x) &= -2(x_1 + x_2^2) \\ b(x) &= -(1 + 2x_2)e^{-x_2} \end{aligned} \quad (1.52)$$

En boucle fermée le système s'écrit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (1.53)$$

Qui représente un système linéaire et commandable.

I.IV. Commande par mode glissant: ([12];[17];[18])

La commande par mode glissant s'inscrit dans le cadre plus large de la théorie des systèmes à structure variable qui a été révélé dans le milieu du 20^{ème} siècle en Union Soviétique, dont les premiers travaux sont ceux d'Anosov, de Tzypkin et d'Emelyanov, Puis ceux d'Hamel en France sur la commande à relais. Ces recherches ont connu un nouvel essor, soit pour compléter l'étude théorique, soit pour étudier quelques applications possibles. En effet, à la fin des années soixante-dix Utkin a formalisé la théorie *des modes glissants*.

Par définition, un système à structure variable est un système dont les paramètres du régulateur varient d'une manière discontinue. Ainsi, ils peuvent prendre deux valeurs, où la commutation d'une valeur à l'autre nécessite l'évolution de la trajectoire du système sur la surface de glissement $s(x)$.

La commande par mode glissant est une technique de commande non linéaire, elle consiste à ramener la trajectoire d'un état de système vers une surface donnée dite surface de *commutation* ou surface de *glissement*.

Actuellement, cette technique de commande connaît une large gamme d'applications dans des domaines très variés tels que la robotique, la mécanique et l'électrotechnique.

Le principe de fonctionnement par mode glissant est de contraindre le système à atteindre une surface donnée et ensuite, l'obliger à rester sur cette surface.

La forme de la surface de glissement est souvent une combinaison linéaire des variables d'état de système.

I.IV.2. Différentes structures de contrôle par mode de glissement:[12];[13]

On peut distinguer deux configurations de base pour les systèmes à structure variable, une configuration permettant un changement de la structure par commutation entre deux retours d'état différents figure (1.3).

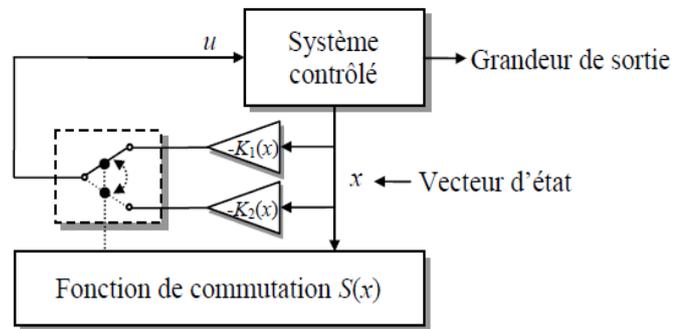


Figure (1.3): Configuration par changement de retour d'état.

Suivant signe de $s(x)$, la grandeur de contrôle u est donnée par:

$$u(x,t) = \begin{cases} -K_1(x) & \text{si } s(x) > 0 \\ -K_2(x) & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (1.54)$$

Une autre permet la variation de la structure du système par simple commutation d'interrupteurs figure (1.4).

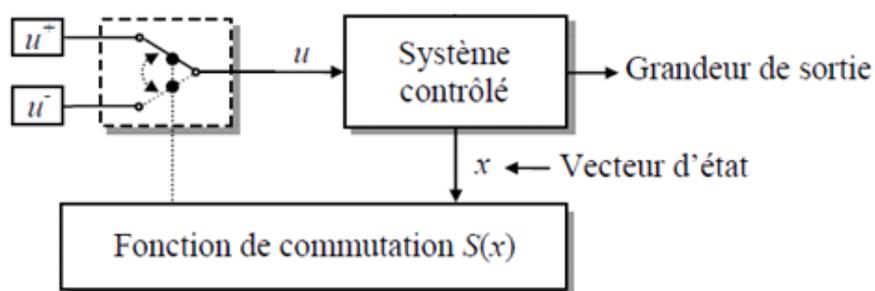


Figure (1.4): Configuration par changement de la structure par commutation de l'organe de commande

Dans ce cas la logique de commande est donnée par:

$$u(x,t) = \begin{cases} u^+ & \text{si } s(x) > 0 \\ u^- & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (1.55)$$

Elle correspond au fonctionnement tout ou rien des interrupteurs de puissance, associées dans une grande majorité d'applications aux variateurs de vitesse.

I.IV.3. Théorie de la commande d'un système à structure variable:[12]

Dans la commande à structure variable, la trajectoire d'état est amenée vers une surface. Puis elle est forcée à rester au voisinage de celle-ci à l'aide de la loi de commutation.

Cette surface est appelée surface de glissement et le mouvement le long de laquelle se produit est appelé mouvement de glissement.

La trajectoire dans le plan de phase illustrée pour un système planaire ($x \in \mathbb{R}^2$) par la figure (1.5) est constituée de trois parties distinctes:[16]

Le mode de convergence(MC): C'est le mode durant lequel la variable à régler se déplace à partir de n'importe quel point initial dans le plan de phase et tend vers la surface de glissement.

Le mode de glissement (MG): C'est le mode durant lequel la variable d'état a atteint la surface de glissement et tend vers l'origine du plan de phase. La dynamique de ce mode est caractérisée par le choix de la surface de glissement $s(x_1, x_2) = 0$.

Le mode du régime permanent (MRP): Ce mode interprète la réponse du système autour de son point d'équilibre (origine du plan de phase), il est caractérisé par la qualité et les performances de la commande.

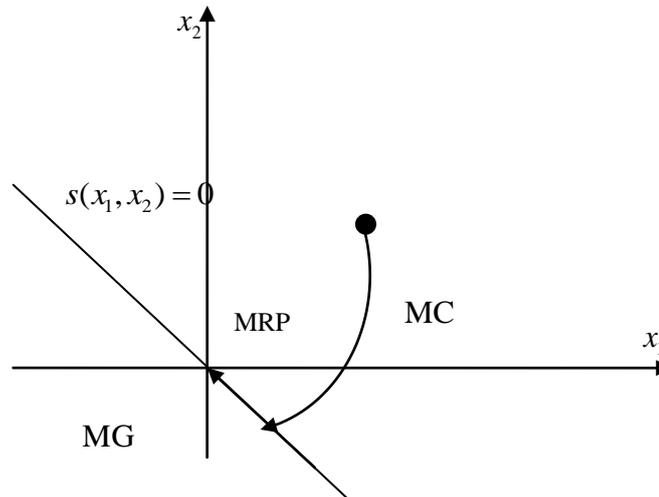


Figure (1.5): Différents modes pour la trajectoire dans le plan de phase.

I.IV.4. Conception de la commande par mode de glissement:[14];[12]

La conception de la commande peut être effectuée en trois étapes principales très dépendantes l'une de l'autre:

- Choix de la surface.
- L'établissement des conditions d'existence.
- Détermination de la loi de commande.

I.IV.4. 1. Choix de la surface de glissement:

Le choix de la surface de glissement concerne le nombre et la forme des fonctions nécessaires. Ces deux facteurs dépendent de l'application et de l'objet visé.

La surface de glissement dépend de l'objectif de la commande fixé (stabilisation, poursuite,...). Pour les systèmes linéaires cette surface est une combinaison linéaire des états du système.

Slotine propose une forme d'équation générale pour déterminer la surface du glissement. [19].

$$s(x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right)^{r-1} e(x) \quad (1.56)$$

Avec:

$e(t) = y(t) - y_d(t)$: L'écart entre la variable à régler et sa référence.

λ : Une constante positive.

r : Le degré relatif, il représente le nombre de fois qu'il faut dériver la surface pour faire apparaître la commande.

I.IV.4. 2. Condition de convergence et d'existence:

Les deux conditions (convergence et existence) sont les deux critères qui permettent aux différentes dynamiques du système de converger vers la surface de glissement et d'y rester indépendamment de la perturbation. Il existe deux considérations pour assurer le mode de convergence:

I.IV.4. 2.1. Fonction discrète de commutation:

Emelyanov et Utkin ont proposé et étudié la première condition de convergence. Elle consiste à donner une dynamique à la surface convergente vers zéro. Elle est donnée par:

$$s(x).\dot{s}(x) < 0 \quad (1.57)$$

I.IV.4. 2.2. La fonction de Lyapunov:

La fonction de *Lyapunov* est une fonction scalaire positive ($v(x) > 0$). La loi de commande doit faire décroître cette fonction. L'idée est de choisir une fonction scalaire pour garantir l'attraction de la variable à contrôler vers sa valeur de référence et de concevoir une commande u telle que le carré de la surface correspond à une fonction de Lyapunov.

On peut définir la fonction de Lyapunov comme suit:

$$v(x) = \frac{1}{2} s^T(x).s(x) \quad (1.58)$$

La dérivée de cette fonction peut être donnée comme suit:

$$\dot{v}(x) = s(x).\dot{s}(x) \quad (1.59)$$

Il est clair que pour vérifier la décroissance de $v(x)$, il suffit de vérifier l'inégalité $\dot{v}(x) < 0$. D'où la vérification de la relation.

I.IV.4. 3. Calcul de la commande:[14]; [15]; [16];

Lorsque le régime glissant est atteint, la dynamique du système est indépendante de la loi de commande qui a pour but de maintenir les conditions de glissement (l'attractivité de la surface), c'est pour cette raison que la surface est déterminée indépendamment de la commande.

Maintenant, il reste à déterminer la commande nécessaire pour attirer la trajectoire d'état vers la surface, et ensuite vers son point d'équilibre, en maintenant les conditions d'existence du mode de glissement. L'obtention d'un régime de glissement nécessite une attractivité de la surface de glissement des deux cotés. De ce fait, une commande discontinue est indispensable, il n'empêche nullement qu'une partie continue lui soit ajoutée.

En présence d'une perturbation, la partie discontinue a essentiellement pour but de vérifier les conditions d'attractivité. Dans ce cas, la structure d'un contrôleur par mode glissant est constituée de deux parties, l'une est la commande équivalente u_{eq} et l'autre stabilisante u_n

$$u = u_{eq} + u_n \quad (1.60)$$

u_{eq} est proposée par Utkin, elle sert à maintenir la variable à contrôler sur la surface de glissement $s(x) = 0$. Elle est introduite en considérant que $s(x) = 0 \Rightarrow \dot{s}(x) = 0$.

u_n est introduite pour vérifier la condition de convergence $s(x) \cdot \dot{s}(x) < 0$.

Considérons le système suivant:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1.61)$$

On suppose que la trajectoire d'état atteint la surface de glissement à l'instant t_0 et qu'un mode glissant existe pour $t > t_0$. Cela implique que durant le mode de glissement et le régime permanent, la surface est nulle, et par conséquent sa dérivée est aussi nulle:

$$s(x) = 0 \text{ et } \dot{s}(x) = 0 \quad (1.62)$$

$$\dot{s}(x) = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial x} \dot{x} \quad (1.63)$$

En substituant la valeur \dot{x} donnée par l'équation (1.62) dans l'équation (1.64) on obtient:

$$\dot{s}(x) = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial x} [f(x) + g(x)u_{eq}] \quad (1.64)$$

D'où on déduit l'expression de la commande équivalente écrite comme suit:

$$u_{\acute{e}q} = - \left[\frac{\partial s}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} f(x) \quad (1.65)$$

Où $u_{\acute{e}q}(t)$ est la commande équivalente. Cette dernière est définie si et seulement si $\frac{\partial s}{\partial x} g(x)$ est inversible.

D'après l'équation de la commande équivalente, il s'ensuit que le mouvement sur la surface gouverné par l'équation $\dot{x} = f(x) + g(x)u_{\acute{e}q}$ ou encore:

$$\begin{cases} \dot{x} = \left[I - g(x) \left[\frac{\partial s}{\partial x_{\acute{e}q}} g(x) \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial x_{\acute{e}q}} \right] f(x) \\ s(x) = 0 \end{cases} \quad (1.66)$$

La commande équivalente peut être interprétée comme étant la valeur moyenne u lors des commutations rapides entre $u^+(u_{\max})$ et $u^-(u_{\min})$ comme la montre la figure suivante:

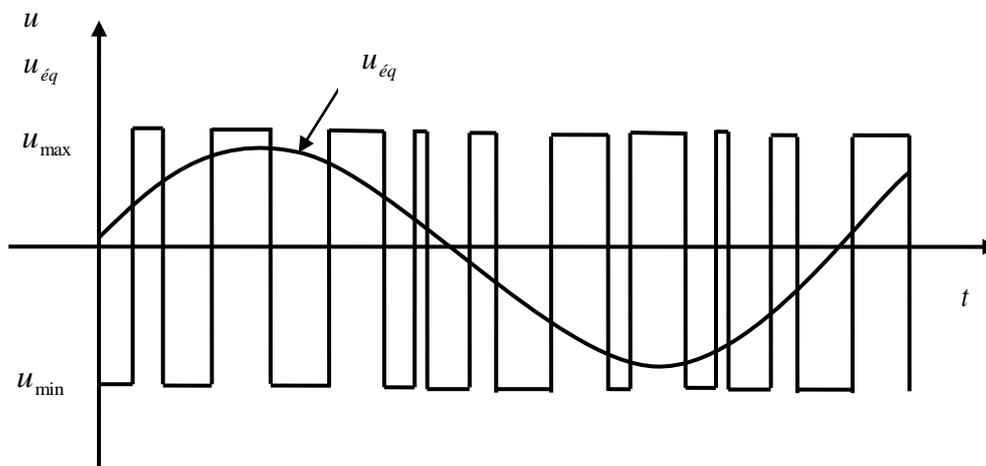


Figure (1.6): Commande équivalente et commande réelle.

✚ Cas linéaire :

Dans ce cas la surface de glissement est choisie comme une combinaison linéaire des états du système. Le modèle du système est alors :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad x \in \mathfrak{R}^n, u \in \mathfrak{R}^m \quad (1.67)$$

La surface de glissement est :

$$s(x) = Cx(t) \quad C \in \mathfrak{R}^{m \times n} \quad (1.68)$$

Si le système est en régime glissant alors :

$$s(x) = Cx(t) = 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad (1.69)$$

Où t_0 est le temps pour lequel le mode de glissement est atteint. En dérivant la surface par rapport au temps et on utilisant la même démarche que précédemment, on obtient :

$$\dot{s}(x) = CAx(t) + CBu_{\dot{e}q}(t) = 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad (1.70)$$

Si la matrice CB est inversible, on obtient la commande équivalente suivante :

$$u_{\dot{e}q}(t) = -(CB)^{-1} CAx(t) \quad (1.71)$$

Le choix de $u_n = K_s \text{sign}(s)$ donne la commande résultante :

$$u = u_{\dot{e}q} + u_n \quad (1.72)$$

I.IV.5. Solution pour la suppression du phénomène de réticence:[17]; [15];[12];[19]

Le phénomène de réticence constitue un inconvénient majeur non négligeable, car même s'il est possible de le filtrer à la sortie du processus, il est susceptible d'exciter les modes de hautes fréquences qui n'ont pas été pris en compte lors de la modélisation du système. Ceci peut dégrader les performances et même conduire au problème d'instabilité. La réticence implique également d'importantes oscillations mécaniques au niveau des actionneurs, pouvant provoquer leurs usures rapide, ainsi que des pertes énergétiques non négligeables au niveau des circuits de puissance électrique. Dans le but de réduire ou d'éliminer ce phénomène, de nombreuses solutions ont été proposées.

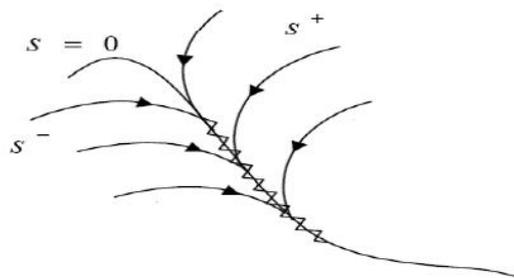


Figure (1.7): *phénomène de réticence.*

I.IV.5.1. Solution de couche limite:[14]

Elle est aussi connue par le nom "boundary layer solution", elle a été proposée par Slotine1984, elle consiste à effectuer une approximation continue des discontinuités présentes dans la loi de commande au voisinage de la surface de glissement.

Supposons que la commande discontinue qui provoque le phénomène de réticence s'écrit sous la forme:

$$u(t) = -K_s \text{sign}(s(t)) \quad (1.73)$$

La fonction signe ($s(t)$) est remplacée par une fonction plus lisse dans la couche limite de ($s(t) = 0$). Parmi ces fonctions utilisées nous citerons la fonction de saturation:

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} \frac{s}{\varepsilon} & \text{si } \left| \frac{s}{\varepsilon} \right| \leq 1 \\ \text{sign}(s) & \text{si } \left| \frac{s}{\varepsilon} \right| > 1 \end{cases} \quad (1.74)$$

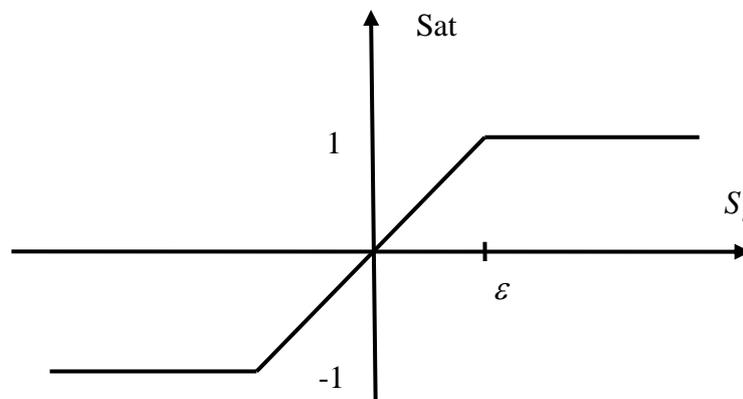


Figure (1.8): Fonction saturation avec un seuil

Le système ne converge plus vers la valeur désirée, mais vers un voisinage de cette dernière. Ainsi, la mise en place d'une commande continue dans une bande de la surface nécessite un compromis entre la robustesse et les performances. D'autres fonctions d'adoucissement

existent telles que les fonctions d'adoucissement: $\frac{2}{\pi} \arctan \frac{s}{\varepsilon}$, $\frac{s}{|s| + \varepsilon}$, $\tanh\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$...etc

I.IV.5.2. Solution basée sur un observateur: [14]

La solution de la couche limite nécessite l'approximation continue du terme de discontinuité. Cependant, dans plusieurs applications les discontinuités de commande sont inhérentes au système.

D'autre part, ce terme de discontinuité de commande permet de réaliser une convergence asymptotique de l'équation décrivant la surface de glissement vers zéro, ce qui n'est pas garanti en effectuant cette approximation continue.

En conséquence, Lors de l'application d'une commande discontinue, le placement d'un observateur asymptotique par mode de glissement peut éliminer la réticence due à cette discontinuité de la loi de commande. L'idée de base consiste à générer les modes glissants idéaux dans une boucle auxiliaire d'observation, telle que cette boucle d'observateur n'intègre aucune dynamique non modélisée. La boucle principale est poursuivie de la boucle d'observateur. Sous les dynamiques de cet observateur, aucun problème de réticence n'apparaît et le système évolue comme si la commande équivalente continue est appliquée.

I.IV.6. Avantages et inconvénients de la commande par mode glissant:[20]

Il est reconnu que la robustesse vis-à-vis des perturbations et des incertitudes du modèle présente le point fort d'une commande par mode glissant. Contrairement à une loi de commande classique, les performances dynamiques sont maintenues quelles que soient les variations des paramètres et quelles que soient les amplitudes des perturbations appliquées au système.

De plus, la réduction de l'ordre du système constitue un autre point fort de ce type de commande, car elle permet de simplifier la complexité du système.

Cependant, ces performances sont obtenues au prix de certains inconvénients:

Un phénomène de chattering ou broutement provoqué par la partie discontinue de cette commande et qui peut avoir un effet néfaste sur les actionneurs.

Le système est soumis à chaque instant à une commande élevée afin d'assurer sa convergence vers l'état désiré et ceci n'est pas souhaitable.

Parmi les solutions proposées à ces problèmes on peut citer la commande par mode glissant à bande limite qui consiste à remplacer la fonction de commutation dans la commande par une fonction de saturation (hystérésis, arc tangente, etc.).

I.V. Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons vu la notion générale de la commande non linéaire. Nous avons ensuite exposé les différentes méthodes de linéarisation existantes tout en s'accentuant sur la méthode de commande par retour d'état. Par la suite, nous avons étudié la commande par mode de glissement qui est très utilisée dans la commande non linéaire dans l'étude de stabilité des systèmes. L'intérêt majeur de ces approches réside dans la simplicité de la mise en œuvre de ces lois de commande.

Dans le prochain chapitre, nous allons exposer les différentes méthodes de linéarisation approximatives.

II.I. Introduction :

La linéarisation exacte par changement de coordonnées et bouclage des systèmes non linéaires est une approche attractive car elle permet d'attribuer au système non linéaire un comportement linéaire dont les caractéristiques en terme de régime transitoire (temps de réponse, dépassements, oscillations, ...) et de régime statique (écart statique, et gain statique) sont plus indiqués pour qualifier les performances du système.

Cependant, la linéarisation par bouclage n'est pas toujours possible. En effet, le système doit satisfaire certaines conditions. Plus précisément, dans le cas d'une linéarisation entrée-état, on doit rechercher la sortie fictive de telle manière que le degré relatif soit égal à la dimension du système. L'existence de cette sortie est liée à deux conditions fondamentales qui sont celle de la commandabilité et de l'involativité.

Pour pallier à cet inconvénient, on a été amené à concevoir des bouclages réalisant une linéarisation approximée. Les premiers travaux dans ce sens ont été introduits par Arthur KRENER [21], BANAZUK, [23] et HUNT [22]. L'approximation est quantifiée par le reste du développement de Taylor de la distribution engendrant l'espace commandable. Dans [22], un algorithme permettant de construire d'une manière systématique la transformation de coordonnées et ensuite le bouclage, réalisant une linéarisation approximée à un ordre choisi au préalable, est élaboré. Il faut remarquer que cette méthode a été utilisée même dans le cas où le système remplit les conditions de linéarisabilité par changement de coordonnées et par bouclage. En effet même dans ce cas, la construction de la transformation de coordonnées reste une tâche complexe. Cette méthode offre donc une procédure pour construire la transformation de coordonnées.

D'autre part, une autre approche complètement différente de linéarisation approximée est proposée par César AGUILAR [24]. Cette approche consiste à trouver la sortie fictive donnant le maximum de degrés relatif.

Dans ce chapitre, nous présentons, d'une part, la méthode formulée par A. KRENER ainsi que l'algorithme associé développé par HUNT et, d'autre part, la méthode proposée par César AGUILAR. Ces deux dernières méthodes seront appliquées sur un exemple de système benchmark qui est le pendule inversé au chapitre suivant.

II.II. Linéarisation approximée d'Arthur KRENER [21] :

La méthode proposée par A. KRENER a été initialement utilisée pour construire le changement de coordonnées pour les systèmes non linéaires qui satisfont les deux conditions de commandabilité et d'involativité. En effet, la construction d'une telle transformation n'est pas toujours évidente. Pour cette raison, on peut, grâce à cette méthode construire une transformation approximée. Ensuite, cette méthode a trouvé son succès pour construire la transformation approximée pour les systèmes qui ne satisfont pas les deux conditions. Le principe de cette méthode est d'abord décrit pour l'approximation du premier ordre ensuite, nous exposons sa généralisation à un ordre supérieur.

II.II.1. Approximation linéaire du premier ordre:

Rappelons que l'objectif de linéarisation par bouclage du système non linéaire décrit par l'équation d'état;

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.1)$$

Consiste une approximation au voisinage de (x_0, u_0) tel que $f(x_0, u_0) = 0$, (le point (x_0, u_0) peut donc représenter le point d'équilibre ou le point nominal), en un système linéaire donné sous la forme:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \quad (2.2)$$

Cette approximation est du premier ordre dans l'état :

$$\tilde{x} = (x - x_0) + O(x - x_0)^2 \quad (2.3a)$$

Cependant elle est exacte dans la commande :

$$\tilde{u} = u - u_0 \quad (2.3b)$$

Les matrices A et B sont respectivement les Jacobiennes de $f(x, u)$ par rapport à l'état x et à l'entrée u évalués au point d'équilibre:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0) \quad ; \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0) \quad (2.4)$$

La validité de cette approximation dépend de l'importance du terme du second ordre qui, à son tour, dépend de la stabilité de la matrice A . Si le spectre de la matrice A se situe suffisamment très à gauche du demi-plan complexe et si la commande $u(t)$ reste suffisamment proche de u_0 , $x(t)$ très proche de x_0 , alors, le terme du second ordre dans (2.3a) peut être négligé. D'un autre côté si A est instable, il est impératif de concevoir des retours d'état stabilisant de la forme :

$$\tilde{u} = F\tilde{x} + v \quad (2.5)$$

Où v est une entrée de commande auxiliaire ; le système (2.2) s'écrit alors :

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + Bv \quad (2.6)$$

Où:

$$\tilde{A} = A + BF \quad (2.7)$$

L'assignement du spectre de \tilde{A} de manière arbitraire est possible si le couple (A, B) est commandable. Dans ce cas, on peut donc toujours trouver un gain du retour d'état F qui place les valeurs propres de \tilde{A} à des positions arbitraires désirées. La commande injectée au système non linéaire s'écrit

$$u = u(x, v) = F(x - x_0) + v \quad (2.8)$$

Où v est la commande non linéaire en boucle ouverte, et sa valeur initiale $v_0 = u_0$. Le système non linéaire résultant est :

$$\dot{x} = \tilde{f}(x, v) \quad (2.9)$$

$$\tilde{f}(x, v) = f(x, u(x, v)) \quad (2.10)$$

On peut remarquer que l'approximation linéaire de (2.10) au point (x_0, v_0) est bien (2.6). Les commandes linéaires et non linéaires satisfont la relation suivante :

$$\tilde{v} = v - v_0 + O(x - x_0)^2 \quad (2.11)$$

La stabilité de \tilde{A} tend à rendre $O(x - x_0)^2$ négligeable. Du fait que le système linéaire (2.6) est une « bonne » approximation du système non linéaire (2.9), on peut donc concevoir un bouclage additionnel déterminé sur la base du modèle linéaire (2.6) et qui peut assurer un comportement désiré au système non linéaire (2.9). Si $v(x, w)$ est le bouclage linéaire conçu pour assurer des performances désirées au système linéaire (2.6), w étant la nouvelle entrée auxiliaire, alors le bouclage non linéaire $v(x, w)$ assurera approximativement les mêmes performances au système non linéaire (2.9).

II.II.2. Approximation linéaire d'ordre élevé:

Il existe plusieurs systèmes présentant des non linéarités sévères que la méthode décrite précédemment n'y peut résoudre. Le terme second ordre $O(x - x_0)^2$ ne peut pas être négligé sur toute la gamme du système. Les transformations de la méthode linéarisante peuvent surmonter ces difficultés.

Arthur KRENER a décrit une approximation de cette approche, elle possède des calculs faciles. [21]

Soit le système non linéaire multivariable affine par rapport à l'entrée ;

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(t) = f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j \quad \text{avec } x(0) = x_0 \quad (2.12)$$

$$x \in \mathfrak{R}^n \quad u \in \mathfrak{R}^m$$

Le point nominal $(x_0, u_0 = 0)$ est supposé être le point critique ou point d'équilibre ($f(x_0) = 0$).

La première étape consiste à calculer le modèle linéaire du système (2.12) en x_0 , i.e.:

$$\tilde{\dot{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \quad (2.13)$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \quad B = g(x_0)$$

On cherche un changement de coordonnées $\tilde{x} = \tilde{x}(x)$ et $\tilde{u} = \tilde{u}(x, u)$ qui transforme (2.13) en (2.12) avec une erreur d'ordre $O(x - x_0)^3$.

Ainsi on suppose:

$$\tilde{x}_i = x_i - x_{0i} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{x}_i}{\partial x_k \partial x_l}(x_0)(x_k - x_{0k})(x_l - x_{0l}) + O(x - x_0)^3 \quad (2.14)$$

$$\tilde{u}_j = u_j + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial x_k \partial x_l}(x_0, 0)(x_k - x_{0k})(x_l - x_{0l}) + \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^m \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial x_k \partial u_h}(x_0, 0)(x_k - x_{0k})u_h + O(x - x_0, u)^3$$

On peut exprimer x_i comme une fonction de x et u avec un terme d'erreur d'ordre $O(x - x_0, u)^3$ par deux méthodes différentes. La première est de substituer (2.14) directement dans (2.13). L'autre est de fixer (2.14) à l'aide de (2.12). Si on compare le terme second ordre dans ces expressions, on obtient un système d' $n^2(n+1)/2 + n^2m$ équations linéaires en $n^2(n+1)/2 + mn(n+1)/2 + m^2n$ dérivées partielles secondes trouvées dans (2.14), i.e.:

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l}(x_0) + 2 \sum_{p=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{x}_i}{\partial x_k \partial x_p}(x_0) \frac{\partial f_p}{\partial x_k}(x_0) = \sum_{p=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_p} \frac{\partial^2 \tilde{x}_p}{\partial x_k \partial x_l}(x_0) + \sum_{j=1}^m g_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial x_k \partial x_l}$$

Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq l \leq n$;

(2.15)

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{x}_i}{\partial x_k \partial x_l}(x_0) g_{ij}(x_0) = \sum_{h=1}^m g_{ih}(x_0) \frac{\partial^2 \tilde{u}_h}{\partial x_k \partial u_j}(x_0, 0)$$

Pour $1 \leq i, k \leq n$ et $1 \leq j \leq m$

Pour la résolution de cette dernière (2.15), il faudra respecter des conditions nécessaires et suffisantes qu'on décrira prochainement.

Supposons que ce système est résoluble, alors la solution peut ne pas être unique. Notons que (2.14) correspond aux transformations du 1^{er} ordre, par conséquent on peut les transformer en ordre élevé;

$$x_i - x_{0i} = x_i - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_k \partial x_l}(x_0) x_k x_l + O(x)^3 \quad (2.16)$$

$$u_j = u_j - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l}(x_0, 0) x_k x_l - \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^m \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial u_h}(x_0, 0) x_k u_h + O(x, u)^3$$

En ignorant le terme 3^{ème} ordre dans (2.14) et (2.16), on peut passer du système non linéaire (2.12) en son approximation linéaire (2.13).

Un retour d'état stabilisant (2.17) qui établie pour le système linéaire (2.13) les performances désirées peut être transformé en retour d'état non linéaire par la substitution de (2.14) en (2.17), Puis remplacer le résultat dans (2.16). Avec espoir que ce feedback assure les performances désirées du système non linéaire (2.12).

$$\tilde{u} = F\tilde{x} + v \quad (2.17)$$

Si ce n'est pas le cas, la méthode suivante peut être généralisée pour trouver les transformations qu'on pourra effectuer entre (2.12) et (2.13) avec un terme d'erreur d'ordre quatre. La troisième partie de ces transformations doit satisfaire un ensemble d'équations trouvées comme on vient de le faire, en calculant \dot{x} comme une fonction de x et u par deux étapes.

On peut répéter cette procédure afin de trouver une approximation avec un certain degré d'exactitude. A chaque étape, la solution précédente va être prise comme des termes d'ordre réduits de ces transformations, d'où il ne restera que les termes d'ordre élevé à calculer.

Le résultat des transformations et leurs approximations sont polynômiaux, d'où ils peuvent être évalués en temps réel. Le calcul de ces transformations a besoin seulement d'être fait une fois et hors ligne. Comme les transformations d'ordre élevées correspondent à celles du premier ordre, on peut continuer de répéter cette procédure jusqu'à la satisfaction des performances désirées du système en boucle fermée.

II.II.3. Conditions nécessaires et suffisantes:

L'existence de ces transformations nécessite la satisfaction de certaines conditions.
Les transformations ;

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \tilde{x}(x) \\ \tilde{u} &= \tilde{u}(x, u) = \alpha(x) + \beta(x)u\end{aligned}\tag{2.18}$$

Transforment le système non linéaire (2.12) en un système presque linéaire:

$$\tilde{\dot{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} + O(x, u)^{\rho+1}\tag{2.19}$$

Les transformations (2.18) existent et peuvent être transformées de certains domaines ouverts dans l'espace (\tilde{x}, \tilde{u}) sur un domaine ouvert (x, u) dans l'espace. En particulier $(\tilde{x}, \tilde{u}) = (0, 0)$ est tracé en $(x, u) = (x_0, u_0)$.

Il existe deux choix possible pour l'obtention d'un système linéaire (2.19), l'un est l'approximation linéaire (2.13) du premier ordre, l'autre est la forme de Brunovsky pour ce système linéaire. Plusieurs auteurs ont met le point sur cette dernière, cependant le premier choix est plus approprié dans les applications depuis lors les coordonnées linéaires et non linéaires peuvent convenir.

Mais ce qui concerne l'existence d'une transformation, le choix de la forme linéaire est peu important. Toute linéarisation approximée évoluée de (2.12) doit avoir les mêmes indices de commandabilité en tant que son opposé du premier ordre (2.13). S'il existe des transformations (2.18) qui amènent (2.12) en son approximation linéaire (2.13) avec une erreur $O(x, u)^{\rho+1}$, ainsi ceci peut être montré par l'approximation linéaire afin d'obtenir la forme de Brunovsky de (2.13).

En d'autre terme, si (2.18) transforme (2.12) en n'importe quelle forme linéaire avec une erreur $O(x, u)^{\rho+1}$, avec:

$$\bar{x} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}(x_0)^{-1} x(x)\tag{2.20}$$

$$\bar{u} = \beta^{-1}(x_0) \left(\alpha(x) - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x_0)(x - x_0) + \beta(x)u \right)$$

Puis elle transforme (2.13) en son approximation linéaire (2.19) avec le même ordre d'erreur. Par conséquent:

$$\bar{x} = x - x_0 + O(x - x_0)^2\tag{2.21}$$

$$\bar{u} = u + O(x - x_0, u)^2$$

Quelques notions doivent être connues pour énoncer les conditions suffisantes et nécessaires: Les crochets de Lie d'un champ de vecteur est un autre champ de vecteur défini par:

$$ad_f g = \frac{\partial g_j(x)}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} g_j(x) \quad (2.22)$$

$$ad_f^k g = [g_j \quad ad_f^{k-1} g_j] \quad (2.23)$$

Une distribution D de classe C^∞ dans R^n . D a une base locale d'ordre ρ autour de x_0 s'il existe un champs de vecteur $X^1 \dots X^d$ qui sont linéairement indépendants en x_0 et tel que pour tout $Y \in D$, il existe des fonctions C_k tel que:

$$Y = \sum_{k=1}^d C_k X^k + O(x - x_0)^{\rho+1} \quad (2.24)$$

d est un entier de dimension d'ordre ρ de D en x_0 .

Une telle distribution est dite involutive d'ordre ρ en x_0 s'il existe une fonction C_k^{ij} tel que:

$$[X^i \quad X^j] = \sum_{k=1}^d C_k^{ij} X^k + O(x - x_0)^\rho \quad (2.25)$$

Une telle distribution est dite ρ intégrable en x_0 s'il existe $n - d$ fonctions indépendantes h_{d+1}, \dots, h_n tel que:

$$\langle dh_k, X^j \rangle = O(x)^{\rho+1} \quad (2.26)$$

Arthur KRENER a généralisé Le théorème classique de Frobenius, en effet, soit D est une distribution d'ordre ρ de base $\{X^1 \dots X^d\}$ en x_0 . D est d'ordre ρ intégrable en x_0 si D est d'ordre ρ involutive en x_0 . [21]

Théorème :

Le système non linéaire (2.12) peut être transformé en un système linéaire d'ordre ρ (2.19) où (A, B) est commandable avec les indices $k_1 \geq \dots \geq k_n$ si et seulement si :

i) D^k a une base local d'ordre ρ en x_0 se composant de :

$$\{ad_f^k g^j : 0 \leq l \leq \min(k_j, k); j = 1, \dots, m\} \quad (2.27)$$

ii) $D^{k..l}$ est d'ordre ρ involutive en x_0 pour $j = 1, \dots, m$

II.III. Approximation linéaire basée sur l'algorithme de HUNT: [21] [22]

La méthode de linéarisation par retour d'état est de plus en plus utile pour l'étude des systèmes non linéaires. Cependant, même si le système est linéarisable, il peut être difficile, voir impossible, de construire une linéarisation exacte par retour d'état. Pour cela HUNT s'est intéressé à l'étude de la méthode basée sur l'approximation linéaire.

En effet, HUNT a fourni un nouvel algorithme qui sert dans un premier lieu à :

- 1) Construire une transformation approximée d'un système linéarisable par retour d'état.
- 2) Construire une transformation approximée d'un système non linéarisable par retour d'état.

Au lieu d'approximer un système non linéaire donné, on va approximer une transformation dans un sens « approprié ».

On considère le système non linéaire suivant :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \quad (2.28)$$

Où f, g_1, \dots, g_m sont des champs de vecteur dans \mathcal{R}^n , $f(0) = 0$.

Généralement, il est difficile de construire une transformation linéarisante par retour d'état, pour cela, plusieurs recherches ont été développées.

KRENER a introduit l'ordre de linéarité ρ , il a aussi introduit un algorithme qui donne une transformation approximative. Cet algorithme sert à trouver une transformation de coordonnées pour quelque degré de précision tout en assurant certaines conditions. Cette méthode préserve la partie linéaire du système à linéariser. [21] [25]

Inspiré par les travaux de KRENER, HUNT propose une autre approche, sous ses propres conditions, des transformations par retour d'état ont été construites en se basant sur la géométrie de Lie.

Soit :

$$\dot{z} = Az + Bv \quad (2.29)$$

n est l'ordre du système, m est le nombre d'entrées pour la forme canonique de Brunovsky avec les mêmes indices de commandabilité.

La transformation du système (2.28) en système (2.29) possède la forme suivante:

$$(z, v) = (z_1, \dots, z_m, v_1, \dots, v_m) \quad (2.30)$$

La transformation par retour d'état linéarisant le système (2.28) en système (2.29) s'effectue si et seulement si:

$$\langle dL_f^i z_j, g_k \rangle = 0 \quad i = 0, \dots, k_j - 2 \quad j = 1, k_1 + 1, \dots, n - k_m + 1, k = 1, \dots, m \quad (2.31)$$

$$L_f^i z_j = z_{i+j} \quad i = 0, \dots, k_j - 1 \quad j = 1, k_1 + 1, \dots, n - k_m + 1, k = 1, \dots, m \quad (2.32)$$

$$L_f z_{k_1+\dots+k_j} + \sum_{k=1}^m u_k L_{g_k} z_{k_1+\dots+k_j} = v_j \quad j = 1, \dots, m$$

Avec:

$L_f^i z_j$: La $i^{\text{ème}}$ dérivée de Lie de z_j suivant f .

dz_j : Le gradient.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: Le produit interne dans \mathfrak{R}^n (on peut utiliser cette notation $L_{g_k} L_f^i z_j$ pour $\langle dL_f^i z_j, g_k \rangle$).

Les équations (2.31) et (2.32) indiquent qu'on a seulement besoin de résoudre (2.31) pour linéariser le système par un retour d'état.

Supposons qu'on remplace (2.29) par :

$$\dot{z} = Az + Bv + O(x, u)^\rho \quad (2.33)$$

Qui est un système linéaire d'ordre $\rho - 1$. On suppose ici que les matrices A, B sont des matrices commandables. Aussi, on remplace (2.31) par :

$$\langle dL_f^i z_j, g_k \rangle = O(x)^\rho \quad i = 0, \dots, k_j - 2 \quad j = 1, k_1 + 1, \dots, n - k_m + 1, k = 1, \dots, m \quad (2.34)$$

On garde (2.32) telle qu'elle est.

Il est clair maintenant que le système (2.28) est transformé en système linéaire d'ordre $\rho - 1$ donné sous la forme:

$$\dot{z} = Az + Bv + O(x)^\rho u \quad (2.35)$$

Avec A, B sont sous la forme de Brunovsky comme dans (2.29), si et seulement si (2.32) et (2.34) sont conservées. En répétant la procédure de la formule de Leibnitz $L_{[f, g_k]} z_j = L_f L_{g_k} z_j - L_{g_k} L_f z_j$, il est aussi vrai que (2.35) est résoluble si et seulement si la distribution appropriée de Krener est involutive au point 0 à l'ordre $\rho - 1$. [21] [22]

II.III.1. L'algorithme de HUNT : [22] ; [25]

Si le système (2.28) a un degré relatif égal à n dans le cas où la sortie est définie, ou s'il vérifie les deux conditions de commandabilité et d'involutivité cités dans le chapitre précédent, alors ce système peut être transformé en un système linéaire écrit sous la forme canonique de commandabilité suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (2.36)$$

Dans le cas contraire, où $r < n$, le système peut être transformé approximativement en un système linéaire donné par l'équation suivante :

$$\dot{z} = Az + Bv + O(x, u)^\rho \quad (2.37)$$

Où la partie linéaire est toujours écrite sous la forme de commandabilité, le système précédent est dit d'ordre $\rho - 1$ d'après KRENER.

Le but de cet algorithme est de trouver la variable principale z_1 en suivant certaines étapes et en respectant quelques conditions, une fois la variable principale est déterminée, le reste des variables se détermine par la dérivée successive de la variable z_1 .

L'algorithme se déroule comme suit :

➤ **Première étape :**

Dans cette étape, on écrit la variable principale z_1 sous forme d'un polynôme homogène d'ordre 1, on suppose que le système $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ est linéarisable en premier ordre, donc la variable z_j :

$$z_j = \sum_{p=1}^n c_p^j x_p \quad j = 1, k_1 + 1, \dots, n - k_m + 1 \quad (2.38)$$

Les constantes $c_p, p = 1, \dots, n$ sont déterminées à partir de l'équation suivante :

$$\langle dL_f^i z, g \rangle = O(x)^\rho, i = 0, \dots, n - 2 \quad (2.39)$$

En substituant la valeur de z_1 dans l'équation précédente et avec $\rho = 1$, il vient :

$$\langle dL_f^i z_1, g \rangle = O(x), i = 0, \dots, n-2 \quad (2.40)$$

➤ **Deuxième étape :**

Cette étape consiste à linéariser le système non linéaire à l'ordre 2, dans ce cas la variable principale s'écrit sous la forme :

$$z_j = \sum_{p=1}^n c_p^j x_p + \sum_{p,q=1}^n c_{pq}^j x_p x_q \quad j = 1, k_1 + 1, \dots, n - k_m + 1 \quad (2.41)$$

Les constantes $c_p, p = 1, \dots, n$ sont celles déterminés précédemment dans la première étape, et les autres constantes $c_{pq}, p \geq q$ sont choisies de telle manière que le système d'équations

$$\langle dL_f^i z_1, g \rangle = O(x)^\rho, i = 0, \dots, n-2 \text{ soit vérifié en remplaçant } z_1 \text{ par son expression avec } \rho = 2 \text{ i.e. } \langle dL_f^i z_1, g \rangle = O(x)^2, i = 0, \dots, n-2.$$

On répète la procédure jusqu'à l'ordre ρ ;

ρ ième étape :

Dans cette étape la variable z_1 s'écrit sous la forme suivante :

$$z_j = \sum_{p=1}^n c_p^j x_p + \sum_{p,q=1}^n c_{pq}^j x_p x_q + \dots + \sum_{|l|=1}^n c_l^j x_{l_1} \dots x_{l_n} \text{ où } l = (l_1, \dots, l_n) \text{ désigne le multi indice d'ordre } |l| = \sum_{i=1}^n l_i \text{ et } x = x_{l_1} x_{l_2} \dots x_{l_n} \quad (2.42)$$

Dans ce qui suit nous allons appliquer cet algorithme sur un système non linéaire donné dans l'exemple suivant:

II.III.2. Exemple illustratif:

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \sin(x_1 - x_3^2) + 2x_3 u \\ \dot{x}_2 &= x_3 + (x_1 - x_3^2)^3 \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned} \quad \text{avec } f = \begin{pmatrix} x_2 + \sin(x_1 - x_3^2) \\ x_3 + (x_1 - x_3^2)^3 \\ 0 \end{pmatrix}; g = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

➤ **Première étape :**

$$\text{On pose } z_1 = \sum_{p=1}^3 c_p^1 x_p = c_1^1 x_1 + c_2^1 x_2 + c_3^1 x_3 \quad (2.44)$$

Calculons maintenant,

$$\langle dz_1, g \rangle = O(x) \quad (2.45)$$

$$\langle dL_f z_1, g \rangle = O(x) \quad (2.46)$$

Et on trouve:

$$\langle dz_1, g \rangle = 2c_1 x_3 + c_3 \quad (2.47)$$

$$\langle dL_f z_1, g \rangle = c_2 \quad (2.48)$$

Ce qui donne $c_2 = c_3 = 0$, on choisit $c_1 = 1$ (la valeur de c_1 n'est pas unique).

➤ **Deuxième étape :**

Dans cette étape

$$z_1 = x_1 + \sum_{p,q=1}^n c_{pq}^1 x_p x_q, p \geq q \quad (2.49)$$

Calculons maintenant,

$$\langle dz_1, g \rangle = O^2(x) \quad (2.50)$$

$$\langle dL_f z_1, g \rangle = O^2(x) \quad (2.51)$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \langle dz_1, g \rangle &= 2x_3(1 + 2c_{11}^1 x_1 + c_{21}^1 x_2 + c_{31}^1 x_3) + c_{31}^1 x_1 + c_{32}^1 x_2 + 2c_{33}^1 x_3 \\ &= (2 + 2c_{33}^1)x_3 + 2x_3(2c_{11}^1 x_1 + c_{21}^1 x_2 + c_{31}^1 x_3) + c_{31}^1 x_1 + c_{32}^1 x_2 \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \langle dL_f z_1, g \rangle &= c_{32}^1(x_3 + (x_1 - x_3^2)^3) - (6x_3(x_1 - x_3^2)^2 - 1)(c_{21}^1 x_1 + 2c_{22}^1 x_2 + c_{32}^1 x_3) + \\ &2x_3(c_{21}^1(x_3 + (x_1 - x_3^2)^3) + 2c_{11}^1(x_2 + \sin(x_1 - x_3^2))) + 3((x_1 - x_3^2)^2(c_{21}^1 x_1 + 2c_{22}^1 x_2 + c_{32}^1 x_3) \\ &+ \cos(x_1 - x_3^2)(2c_{11}^1 x_1 + c_{21}^1 x_2 + c_{31}^1 x_3 + 1) + c_{31}^1(x_2 + \sin(x_1 - x_3^2)) - 2x_3 \cos(x_1 - x_3^2) \\ &(2c_{11}^1 x_1 + 2c_{21}^1 x_2 + c_{31}^1 x_3 + 1) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Donc on trouve $c_{33}^1 = -1$ et les autres coefficients, on va les choisir toutes nuls

D'où la variable principale est donné par :

$$z_1 = x_1 - x_3^2 \quad (2.54)$$

Qui résout le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned} \langle dz_1, g \rangle &= 0 \\ \langle dL_f z_1, g \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

Ce qui signifie que ce système est complètement linéarisable.

II.IV. Linéarisation approximé basée sur la maximisation du degré relatif : [24]

La détermination du degré relatif d'un système non linéaire est souvent difficile voire impossible, et dans la plupart des cas la valeur de ce dernier est différente de l'ordre du système, c'est dans ce contexte, que plusieurs auteurs ont développé des méthodes de linéarisation approximative, on cite dans cette partie les travaux de César AGUILAR basé sur la maximisation du degré relatif du système à étudier.

Si le système n'est pas linéarisable exactement c.à.d. une des conditions suffisantes pour que ce dernier soit linéarisable n'est pas satisfaite ou les deux ne sont pas satisfaites, alors le degré relatif du système dans ce cas est fortement différent de l'ordre n . Donc, d'après César AGUILAR le problème revient à déterminer une fonction (sortie) $h(x)$ qui maximise le degré relatif du système.

Pour illustrer cette approche, on se limite à présenter dans ce qui suit cette méthode pour un système d'ordre 4 seulement :

Pour qu'un système non linéaire soit linéarisable exactement par feedback, il doit vérifier les deux conditions de commandabilité et d'involutivité :

- 1) Les champs de vecteurs $\{g(x_0), ad_f g(x_0), ad_f^2 g(x_0), \dots, ad_f^{n-1} g(x_0)\}$ sont linéairement indépendants.
- 2) La distribution $\Delta = \text{span}\{g(x), ad_f g(x), \dots, ad_f^{n-2} g(x)\}$ est involutive au voisinage de x_0 .

Remarque : une distribution $\Delta = \text{span}\{f_1, f_2, \dots, f_d\}$ est dite involutive si tout crochet de Lie $[f_i, f_j] \forall i, j = 1, \dots, d$ appartient à la distribution Δ .

II.IV.1. Notion du degré relatif maximum :

Puisque le système non linéaire n'est pas exactement linéarisable, alors calculons maintenant la sortie $h(x)$ qui rend son degré maximal.

La détermination de la sortie passe par plusieurs étapes:

a. Etape 1:

On considère la distribution $\Delta_1 = \text{span} \{g(x), ad_f g(x)\} = \{f_1, f_2\}$, on calcule le crochet de Lie $[f_1, f_2]$, si ce dernier appartient à la distribution Δ_1 , donc cette distribution est involutive, ce que signifie que le degré relatif r peut être égale à 2.

b. Etape 2:

Considérons ensuite la distribution:

$$\Delta_2 = \text{span} \{g(x), ad_f g(x), [g(x), ad_f g(x)]\} = \{f_1, f_2, f_3\} \quad (2.56)$$

Si Δ_2 est involutive au voisinage de x_0 , alors le degré relatif du système égale à 3, et ainsi de suite pour les systèmes d'ordre élevé.

De ce fait, il existe au voisinage de x_0 une fonction $h(x)$ telle que cette dernière représente une des solutions des équations différentielles partielles données par :

$$\begin{aligned} \langle dh(x), f_1(x) \rangle &= 0 \\ \langle dh(x), f_2(x) \rangle &= 0 \\ \langle dh(x), f_3(x) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Une fois on a trouvé la sortie, on fait le changement de variables $z = \phi(x)$ où :

$$\begin{aligned} z_1 &= \phi_1(x) = h(x) \\ z_2 &= \phi_2(x) = L_f z_1 \\ z_3 &= \phi_3(x) = L_f^2 z_1 \\ z_4 &= \phi_4(x) = L_f^3 z_1 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Afin de vérifier la validité de la sortie choisie, on vérifie si la matrice $\phi(x)$ définie un difféomorphisme.

Le système dans ses nouvelles coordonnées est donné par :

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= y^{(1)} \\ \dot{z}_2 &= y^{(2)} \\ \dot{z}_3 &= y^{(3)} \\ \dot{z}_4 &= y^{(4)} = f(z(x)) + g(z(x))u\end{aligned}\tag{2.59}$$

S'il apparaît un terme de u dans l'une des équations on le néglige afin de compléter la représentation du système dans ses nouvelles coordonnées.

II.V. Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons introduit quelques méthodes de linéarisation approximative d'un système non linéaire. Dans un premier lieu, nous avons exposé la méthode approximative de KRENER qui a introduit l'ordre de linéarité ρ , comme il a aussi introduit un algorithme qui donne une transformation approximative. En outre, HUNT a inspiré des travaux de KRENER pour construire un nouvel algorithme en respectant des conditions bien déterminées. Enfin, nous avons représenté la méthode proposée par César AGUILAR basée sur la maximisation du degré relatif.

Dans le chapitre prochain, nous allons appliquer ces méthodes approximatives pour linéariser un système non linéaire très utilisé en automatique, il s'agit du pendule inversé.

III.I. Introduction

Les méthodes de commande étudiées précédemment seront illustrées, dans ce présent chapitre, sur le cas de la commande d'un pendule inversé.

Le pendule inversé constitue un benchmark de choix pour la commande des systèmes non linéaire. Il est utilisé dans la plupart des laboratoires d'automatique afin de tester l'efficacité des méthodes de commande des systèmes non linéaires. Les problèmes de commande posés dans le cas d'un pendule inversé sont sensiblement les mêmes à ceux rencontrés, à une échelle plus grande, par les grues et autre systèmes de transportation industriels (segway, B2). C'est un système instable, complexe et fortement non linéaire dont le modèle mathématique ne satisfait pas les conditions de linéarisabilité par retour d'état. Le choix de cette application est motivé pour ces raisons d'une part, et d'autre part, par le fait que le laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP) où nous avons effectué le stage de recherche dispose d'un banc d'expérimentation de la commande d'un pendule inversé. Les résultats que nous présentons dans ce chapitre se limitent à ceux de la simulation. Le temps imparti à ce stage reste insuffisant pour envisager une implémentation réelle des méthodes de commande traitées.

La commande d'un pendule inversé consiste d'une manière générale à ramener la tige du pendule à une position de référence (souvent la position verticale) et de la maintenir sur cette position quelque soit le déplacement du chariot sur lequel est fixé la tige et quelque soit les perturbations éventuelles.

III.II. Description du pendule inversé : [26]; [24]; [27]

Le pendule inversé sur chariot (également appelé système chariot pendule ; en anglais cart-pendulum system) est un système instable, multi variable de type SIMO (Single Input Multiple Output) et possède des non-linéarités non négligeables dues à sa structure dynamique complexe et aux forces de friction. Le pendule inversé est un cas d'application très intéressant et largement étudié aussi bien sur le plan didactique que sur le plan recherche du fait qu'il possède en soit toutes les difficultés permettant de soumettre à rude épreuve les lois de commande les plus élaborés des systèmes non linéaires (modes glissant, commande optimale, commande neuro-floue, commande basée sur la passivité, commande robuste, ...).

Le système est composé de deux éléments (Figure 3.1) :

- un chariot mobile en translation le long d'un rail de guidage
- un pendule libre et fixé sur le chariot

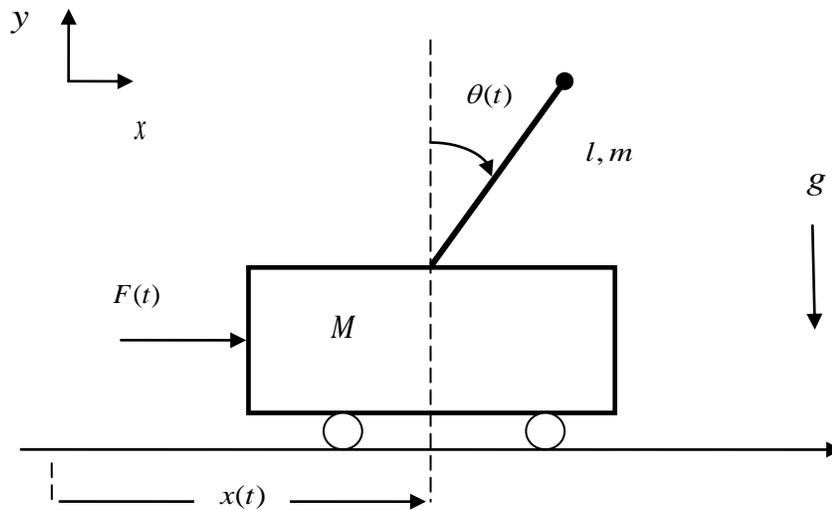


Figure 3.1 : schéma de l'ensemble chariot-pendule inversé

Avec :

m : Masse du pendule.

$x(t)$: Position du chariot.

M : Masse du chariot.

$\theta(t)$: La position angulaire de la tige du pendule.

l : La longueur de pendule.

g : Intensité de la pesanteur.

$F(t)$: Force exercée sur le chariot.

Les valeurs numériques des différents paramètres qui sont utilisées dans les simulations sont données dans la tableau ci-dessous :

| Variables | Valeurs |
|-----------|--------------------------|
| M | 0.671(Kg) |
| m | 0.151(Kg) |
| l | 0.117(m) |
| g | 9.81 (m/s ²) |

Tableau (3.1): Valeurs numériques du système pendule-chariot

III.III. Modèle simplifié du pendule inversé : [26]; [27]; [15]

Pour simplifier la modélisation, on suppose tout au long de notre étude que la masse du pendule est concentrée au bout de la tige. Afin de pouvoir écrire les équations dynamiques régissant le mouvement du pendule inversé, on considère les coordonnées généralisées $q_1 = x$ et $q_2 = \theta$ qui représentent aussi les deux degrés de libertés du pendule. On prend comme direction positive de x le sens de gauche à droite et celui de l'angle est le sens des aiguilles d'une montre. Le formalisme de Lagrange est utilisé pour l'obtention du modèle. Ce formalisme nécessite la détermination des énergies potentielles et cinétiques du système en termes de coordonnées généralisées. Pour cela, considérons l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = Q_i \quad (3.1)$$

Avec :

L : Le lagrangien ($L = T - V$).

T : L'énergie cinétique.

V : L'énergie potentielle.

∂q_i : La $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur de coordonnées généralisées.

$\partial \dot{q}_i$: La $i^{\text{ème}}$ composante de la vitesse généralisée.

Q_i : La force généralisée associée à q_i .

III.III.1. Energie cinétique du système en mouvement:

L'énergie cinétique du chariot est donnée par l'équation:

$$T_C = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (3.2)$$

L'énergie cinétique du pendule est exprimée par l'équation:

$$T_P = \frac{1}{2} m \vec{v}_c \cdot \vec{v}_c \quad (3.3)$$

\vec{v}_c : représente la vitesse du centre de gravité du pendule.

La position du centre de gravité du pendule à partir de ces coordonnées:

$$\vec{\mathbf{r}}_c = (x + l \sin \theta) \vec{i} + l \cos \theta \vec{j} \quad (3.4)$$

D'où la vitesse du centre de gravité du pendule est :

$$\vec{\mathbf{v}}_c = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_c}{dt} = (\dot{x} + l \cos \theta \dot{\theta}) \vec{i} - l \sin \theta \dot{\theta} \vec{j} \quad (3.5)$$

En substituant les équations (3.4) et (3.5) dans l'équation (3.3) on trouve :

$$T_p = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2 \dot{x} l \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2) \quad (3.6)$$

Avec simplification, l'équation (3.6) de l'énergie cinétique du pendule prend alors la forme:

$$T_p = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2 \dot{x} l \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2) \quad (3.7)$$

L'énergie cinétique de l'ensemble chariot (3.2) et pendule (3.7) est exprimée par :

$$T = T_c + T_p = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2 \dot{x} l \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2) \quad (3.8)$$

III.III.2. Energie potentielle du système:

L'énergie potentielle du centre de gravité du pendule est :

$$V = m g l \cos \theta \quad (3.9)$$

III.III.3. Equation de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (3.10)$$

Le lagrangien du système est la différence entre son énergie cinétique et son énergie potentielle

$$L = T - V \quad (3.11)$$

En utilisant l'expression (3.8) et (3.9) le lagrangien peut être écrit:

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2 \dot{x} l \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2) - mgl \cos \theta \quad (3.12)$$

III.III.3.1. L'équation de Lagrange pour le premier degré de liberté $q(t) = x(t)$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F \quad (3.13)$$

La dérivée partielle du lagrangien suivant \dot{x} et t s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (M \dot{x} + m \dot{x} + ml \cos \theta \dot{\theta}) = F \quad (3.14)$$

D'où la première équation de Lagrange :

$$(M + m) \ddot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = F \quad (3.15)$$

III.III.3.2. L'équation de Lagrange pour le deuxième degré de liberté $q(t) = \theta(t)$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (3.16)$$

La dérivée partielle du lagrangien suivant $\dot{\theta}$ et t s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (ml \dot{x} \cos \theta + ml^2 \dot{\theta}) - (-ml \dot{x} \sin \theta \dot{\theta} + mgl \sin \theta) \quad (3.17)$$

D'où la deuxième équation de Lagrange :

$$ml^2\ddot{\theta} + m\dot{x}\cos\theta - m\dot{x}\sin\theta\dot{\theta} + m\dot{x}\sin\theta\dot{\theta} - mgl\sin\theta = 0 \quad (3.18)$$

Après simplification, on obtient :

$$ml^2\ddot{\theta} + m\dot{x}\cos\theta - mgl\sin\theta = 0 \quad (3.19)$$

Finalement, le modèle de connaissance du système chariot pendule est donné par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\cos\theta\ddot{\theta} - ml\sin\theta\dot{\theta}^2 = F \\ m\dot{x}\cos\theta + ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin\theta = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Ce modèle peut être écrit sous la forme de Cauchy (modèle d'état non linéaire). Pour cela, on définit les variables d'état comme suit :

$x_1 = x$ (Position rectiligne du chariot) ; $x_2 = \dot{x}$ (vitesse du chariot) ; $x_3 = \theta$ (position angulaire de la tige) et $x_4 = \dot{\theta}$ (vitesse angulaire de la tige). Le modèle d'état non linéaire s'écrit sous la forme affine suivante :

$$\dot{X}(t) = f(X(t)) + g(X(t))F(t) \quad (3.21)$$

Où $X(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$ est le vecteur d'état, $F(t)$ est l'entrée appliquée au pendule.

L'expression du modèle sera sous la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{-mg\cos(x_3)\sin(x_3) + mlx_4^2\sin(x_3)}{M + m\sin^2(x_3)} \\ x_4 \\ \frac{(M+m)g\sin(x_3) - mlx_4^2\cos(x_3)\sin(x_3)}{(M + m\sin^2(x_3))l} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M + m\sin^2(x_3)} \\ 0 \\ -\frac{\cos(x_3)}{(M + m\sin^2(x_3))l} \end{pmatrix} F \quad (3.22)$$

On pose :

$$F = (M + m\sin^2(x_3))u - (ml\sin(x_3)x_4^2 - mg\sin(x_3)\cos(x_3)) \quad (3.23)$$

Avec u une commande auxiliaire.

On obtient les expressions des champs de vecteur $f^*(X(t))$ et $g^*(X(t))$ simplifiées suivantes:

$$f^*(X(t)) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ \frac{g \sin(x_3)}{l} \end{pmatrix}; \quad g^*(X(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\cos(x_3)}{l} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

III.IV. Commande du système :

Le pendule inversé libre (aucune force appliquée) possède deux points d'équilibre. Le premier point ($\theta = 0$) qui correspond à la position verticale de la tige est un point d'équilibre instable et le second point ($\theta = \pi$) point d'équilibre stable. L'objectif de commande est de stabiliser la tige du pendule sur la position verticale ($\theta = 0$).

III.IV.1. Commande basée sur la linéarisation numérique autour du point d'équilibre :

Une des approches de commande des systèmes non linéaires consiste à élaborer les lois de commande sur la base du modèle linéaire obtenu par linéarisation numérique autour du point d'équilibre considéré. Cette approche reste valable uniquement au voisinage du point d'équilibre (commande locale). La linéarisation numérique est basée sur le développement de Taylor des champs de vecteur $f(X(t))$ et $g(X(t))$ autour du point d'équilibre. Les termes d'ordre supérieur à deux de ce développement sont négligés. La linéarisation numérique du système non linéaire (3.24) autour du point d'équilibre $X_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ donne lieu au modèle d'état linéaire:

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B u(t) \quad (3.25)$$

Où $X(t)$ représente les petites variations de $X(t)$ autour de 0. La matrice d'état (d'évolution) A est la jacobienne de $f(X(t))$ par rapport à X évaluée au point d'équilibre et le vecteur de commande B et la valeur prise par $g(X(t))$ au point d'équilibre. Les expressions de A et B sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{l} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Si on choisit comme sorties la position du chariot et la position angulaire de la tige, alors l'équation de sortie du modèle d'état s'écrit:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X(t) \quad (3.27)$$

En remplaçons les paramètres par leur valeur numériques, nous aurons:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 83.84 & 0 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -8.547 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Les valeurs propres de A sont : (9.15, -9.15, 0, 0), Le modèle linéaire est donc instable. D'après le théorème de Lyapunov (première méthode indirect, [10]), le point d'équilibre du système non linéaire est instable. On peut remarquer que le couple (A, B) est commandable donc le modèle linéaire est stabilisable par retour d'état. Le système non linéaire sera aussi commandable du moins localement au voisinage du point d'équilibre. Une commande qui stabilisera le modèle linéaire, stabilisera aussi localement le point d'équilibre du système non linéaire. L'objectif est d'élaborer deux types de commande sur la base du modèle linéaire. Ces commandes seront ensuite appliquées au système non linéaire.

III.IV.2. Commande par placement de pôles:

La première commande est une commande par placement de pôles par retour d'état. Cette commande est quasi linéaire. Soient les pôles désirés en boucle fermée (0, -1, -3, -4).

Alors la commande par placement de pôles est $u(t) = -KX(t)$ avec $K = [0 \ -0.14 \ -12 \ -0.95]$.

III.IV.3. Commande par mode glissant:

La seconde commande qui est en elle-même non linéaire est la commande par mode glissant. La surface de glissement choisie afin de répondre à l'objectif de commande est :

$$s(X(t)) = C X(t) \quad \text{avec} \quad C = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4] ; \quad (3.29)$$

Les termes c_i ; $i=1, 4$ sont les coefficients de la surface qui sont déterminés de telle manière que le système linéarisé soit stable en régime glissant avec une dynamique désirée. Dans notre cas, nous avons choisi C de telle manière que les pôles en boucle fermée et en régime glissant soient les mêmes que ceux obtenus avec la commande par placement de pôles. Nous obtenons ainsi : $C = [0.99 \quad 1.57 \quad 6.63 \quad 1]$

Dérivons $s(X(t))$ par rapport au temps,

$$\dot{s}(X(t)) = \frac{ds(X(t))}{dt} = \frac{\partial s(X(t))}{\partial X} \dot{X}(t) = CAX(t) + CBu(t) \quad (3.30)$$

La commande résultante est:

$$u = u_{eq} + K_s \text{sign}(s); \quad K_s : \text{réel positif } (K_s = 20) \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} u_{eq} &= -(CB)^{-1} CAX \\ &= -KX \end{aligned}$$

$$\text{Avec } K = (CB)^{-1} CA \quad (3.32)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{C_1 l}{lC_2 - C_4} & \frac{C_4 g}{lC_2 - C_4} & \frac{C_3 l}{lC_2 - C_4} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$u_{eq} = -\frac{C_1 l}{lC_2 - C_4} x_2(t) - \frac{C_4 g}{lC_2 - C_4} x_3(t) - \frac{C_3 l}{lC_2 - C_4} x_4(t) \quad (3.33)$$

III.IV.4. Simulation et résultats :

Les simulations ont été effectuées sous l'environnement MATLAB. Pour les deux types de commande, nous avons effectué des simulations pour plusieurs angles initiaux. Deux essais de simulation ont été effectués dans chaque cas, le premier essai correspond au modèle linéarisé bouclé par la commande linéaire, le second correspond au système original contrôlé par la commande linéaire. Les résultats de simulations sont rapportés par les figures ci-après, où sont visualisées les réponses du système non linéaire commandé par les commandes par placement de pôles et par mode glissant.

- **Commande du pendule par placement de pôles:**

a. Simulation (1): Angle initial égal à 5 degrés :

Pour un angle initial 5 degrés, la figure (3.2) illustre la réponse temporelle de la position du chariot du système linéarisé et du système non linéaire. La figure (3.3) montre l'angle du pendule inversé des deux systèmes (modèle linéaire et modèle non linéaire). La commande par placement de pôles des deux systèmes est représentée par la figure (3.4), ainsi la figure (3.5) donne la force appliquée au pendule.

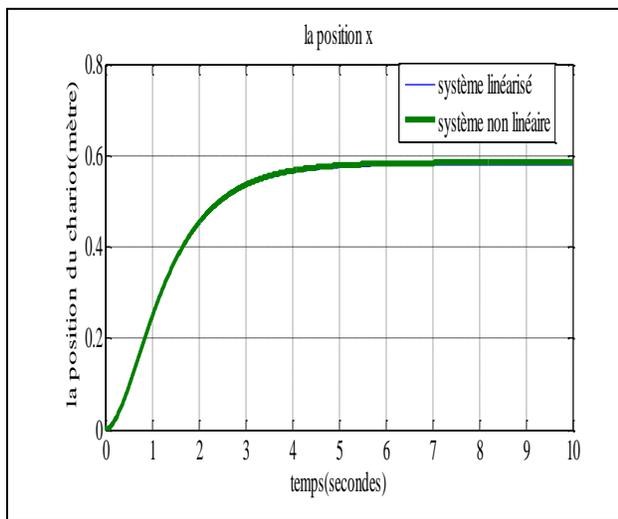


Figure 3.2: La position du chariot pour les deux systèmes linéarisé et non linéaire

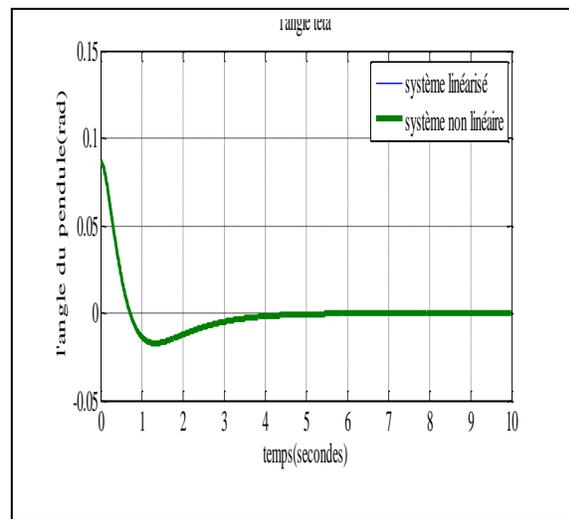


Figure 3.3: L'angle du pendule pour les deux systèmes linéarisé et non linéaire

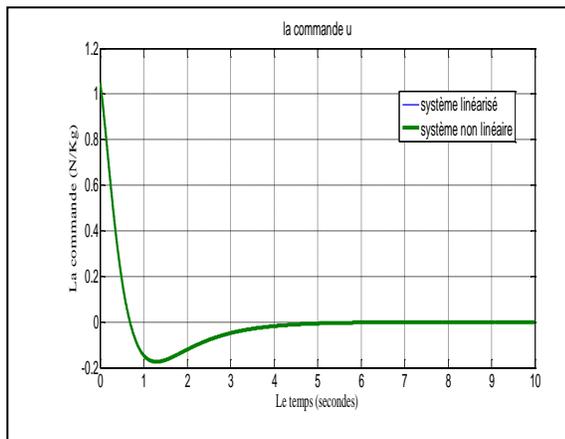


Figure 3.4: La commande appliquée pour les deux systèmes linéarisé et non linéaire

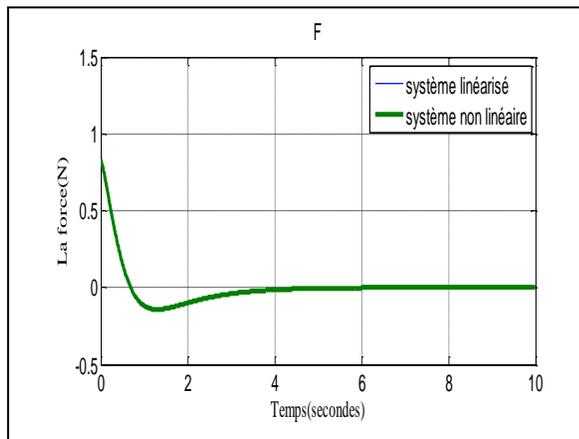


Figure 3.5: La force appliquée pour les deux systèmes linéarisé et non linéaire

b. Simulation (2): Angle initial égal à 45 degrés :

Pour un angle initial 45 degrés, la figure (3.6) illustre la réponse temporelle de la position du chariot du système linéarisé et du système non linéaire. La figure (3.7) montre l'angle du pendule inversé des deux systèmes (linéarisé et non linéaire). La commande par placement de pôles des deux systèmes est représentée par la figure (3.9), ainsi la figure (3.8) donne la force appliquée au pendule.

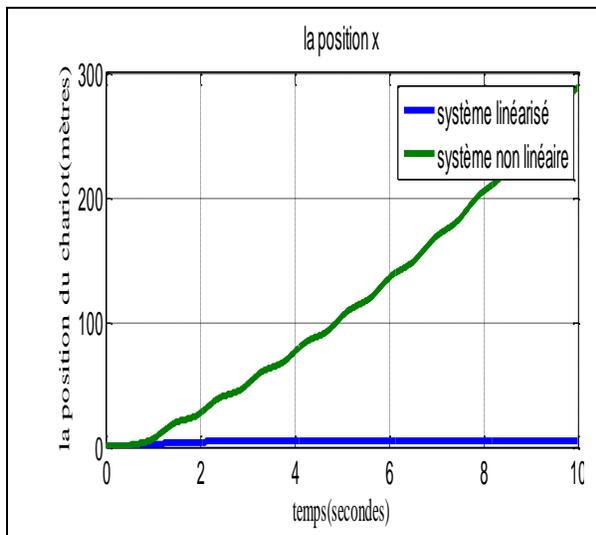


Figure3.6: La position du chariot pour les deux systèmes linéarisé et non linéaire

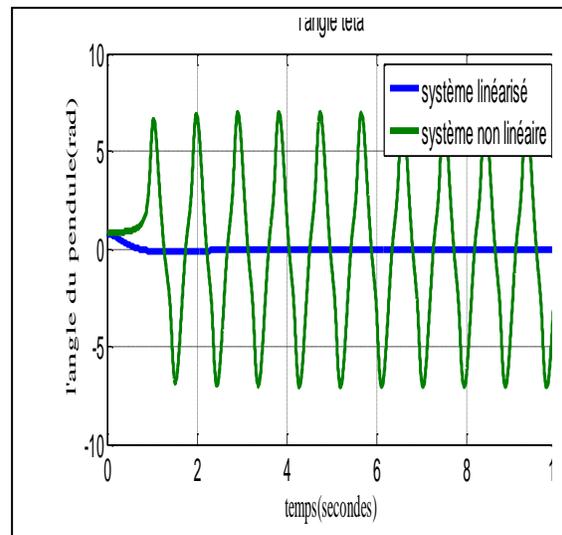


Figure3.7: L'angle du pendule pour les deux systèmes linéarisé et non linéaire

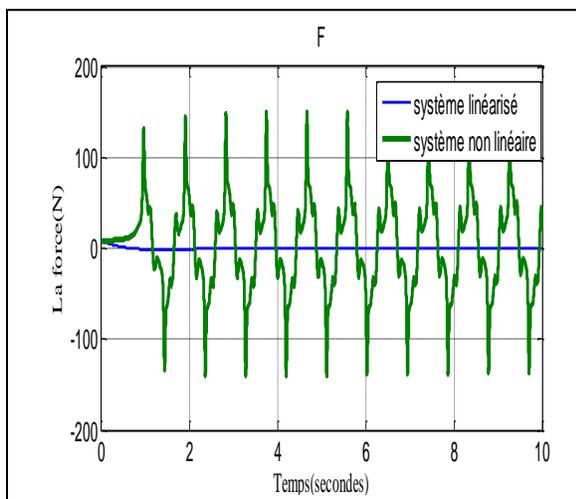


Figure3.8: La force appliquée pour les deux systèmes linéarisé et non linéaire

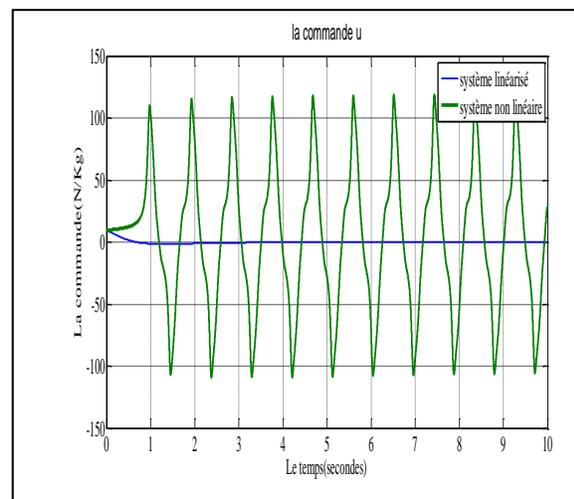


Figure3.9: La commande appliquée pour les deux systèmes linéarisé et non linéaire

- **Commande par mode de glissement:**

a. Simulation (1): L'angle initial du pendule est $\frac{\pi}{36} = 5^\circ$

La figure (3.10) illustre la réponse temporelle de la position du chariot, la figure (3.11) illustre la trajectoire de l'angle du pendule en fonction du temps ainsi les figures (3.12), (3.13), (3.14) donnent successivement la commande équivalente, la commande stabilisante et la commande résultante donnée par mode de glissement. La figure (3.15) montre la surface de glissement et la force exercée au pendule est illustrée par la figure (3.16).

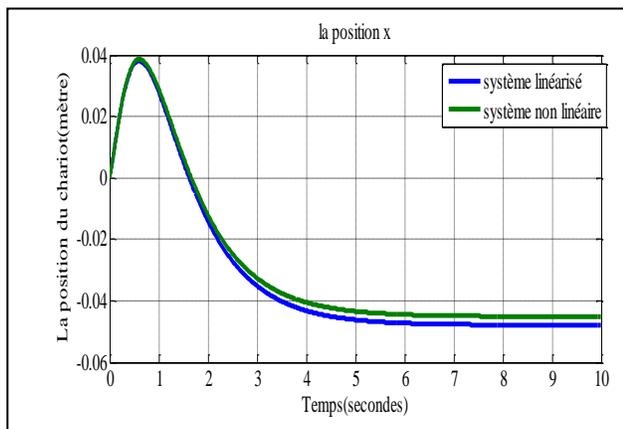


Figure 3.10: La position du chariot pour les deux systèmes linéarisé et non linéaire

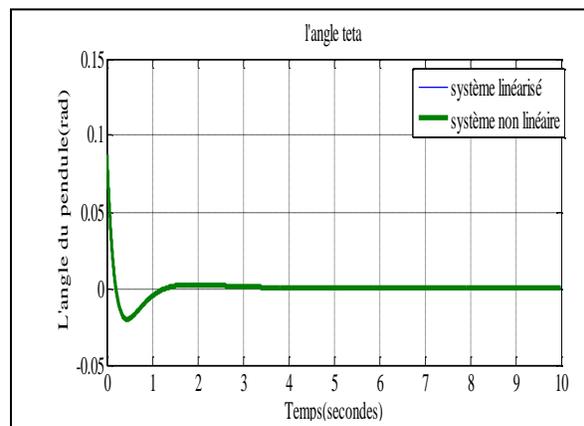


Figure 3.11: L'angle du pendule inversé pour les deux systèmes

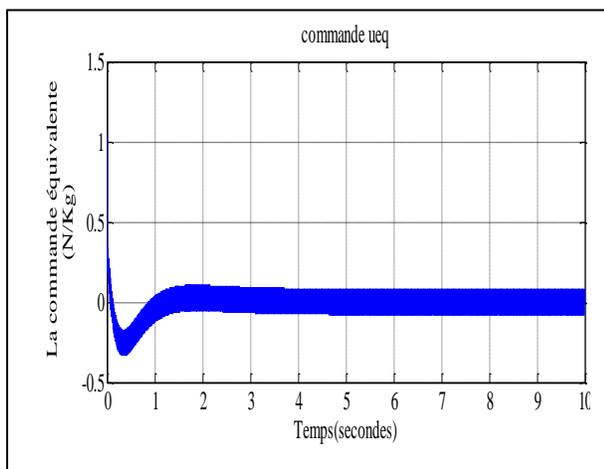


Figure 3.12: La commande équivalente donnée par mode glissant

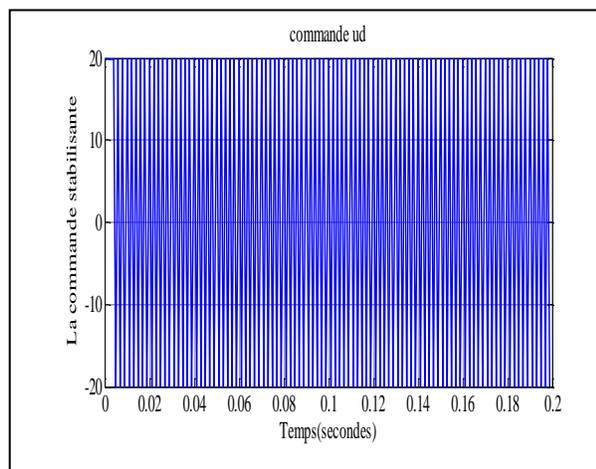


Figure 3.13: La commande stabilisante donnée par mode glissant

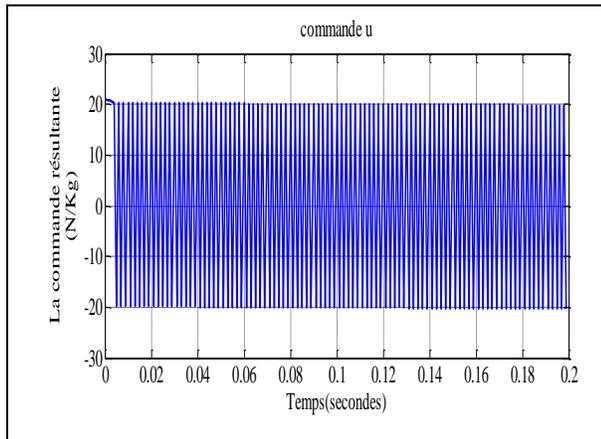


Figure 3.14: La commande résultante donnée par mode glissant

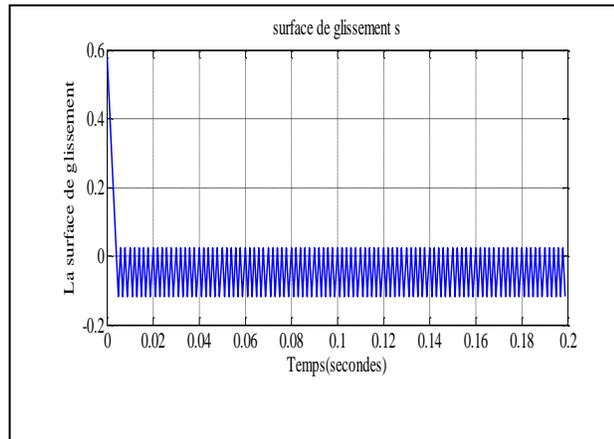


Figure 3.15: La surface de glissement

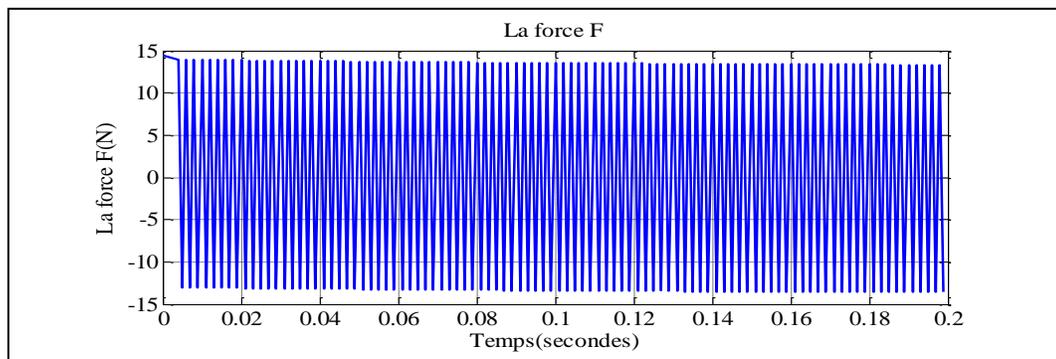


Figure 3.16: La force appliquée au système

b. Simulation (2): L'angle initial du pendule est 73° :

Les figures (3.17) et (3.18) illustrent la réponse temporelle de la position du chariot du système linéarisé et du système non linéaire. Les figures (3.19) et (3.20) illustre la trajectoire de l'angle du pendule en fonction du temps pour le système linéarisé et le système non linéaire. Ainsi les figures (3.21), (3.22) et (3.23) donnent successivement la commande équivalente, la commande stabilisante et la commande résultante donnée par mode de glissement du système non linéaire. La surface de glissement est donnée par la figure (3.24) et la figure (3.25) donne la force exercée au pendule.

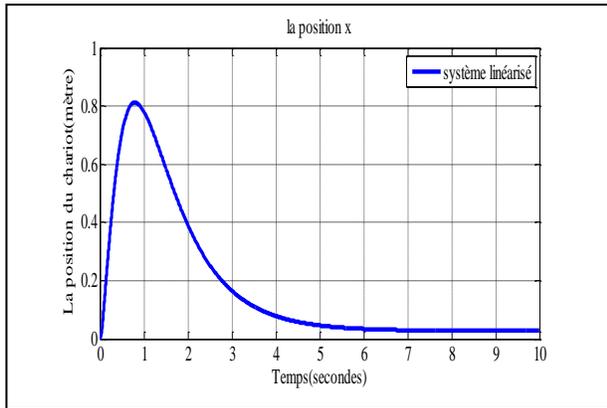


Figure 3.17: La position du chariot pour le système linéarisé

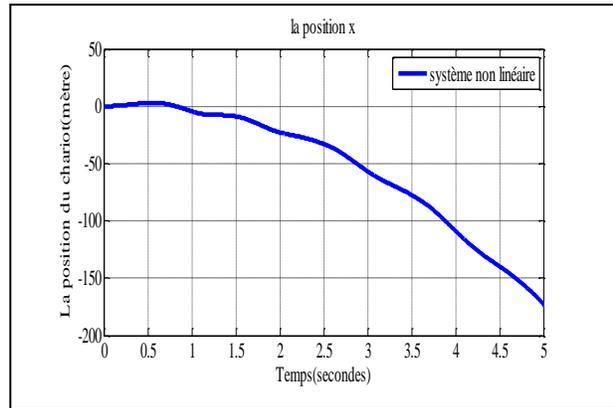


Figure 3.18: La position du chariot pour le système non linéaire

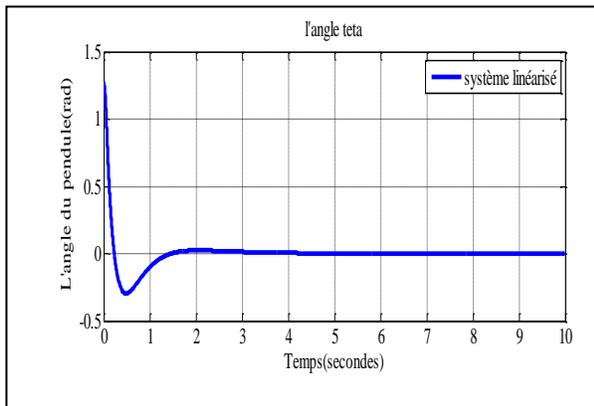


Figure 3.19: L'angle du pendule inversé pour le système linéarisé

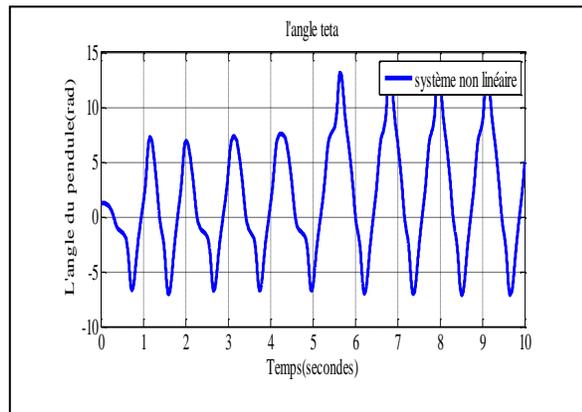


Figure 3.20: L'angle du pendule inversé pour le système non linéaire

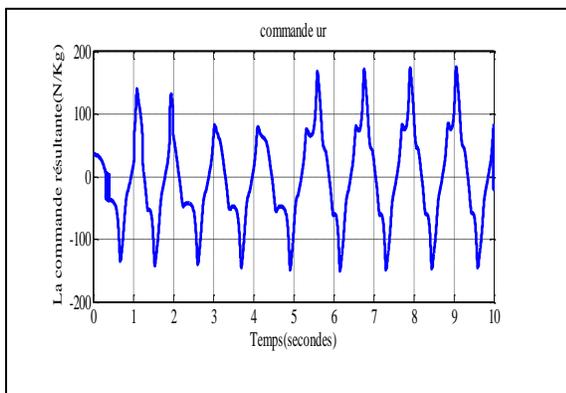


Figure 3.21: La commande équivalente donnée par mode glissant

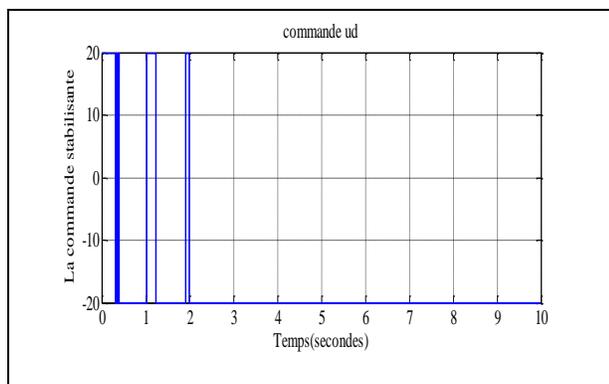


Figure 3.22: La commande stabilisante donnée par mode glissant

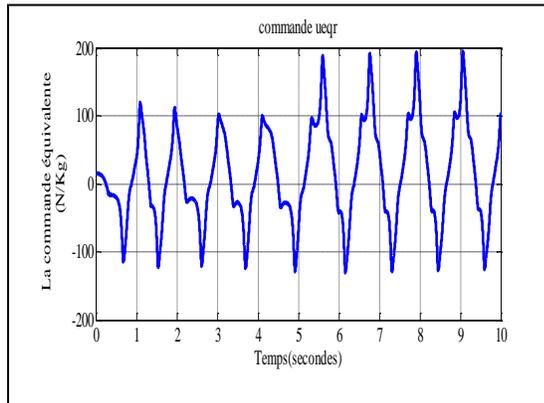


Figure 3.23: La commande équivalente donnée par mode glissant pour le système non linéaire

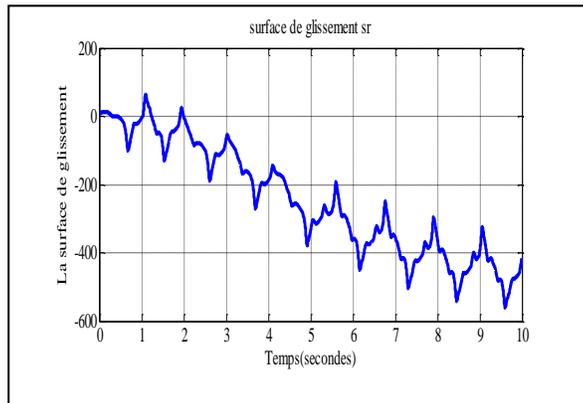


Figure 3.24: La surface de glissement pour le système non linéaire

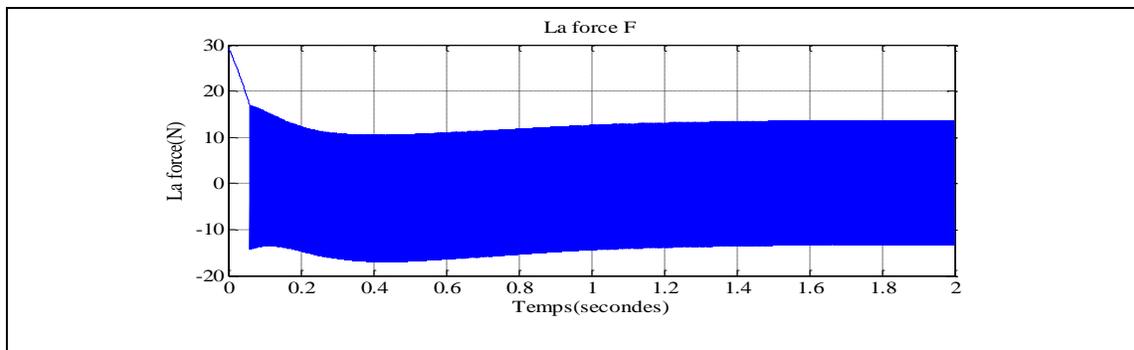


Figure 3.25: La force appliquée au pendule

III.IV.5. Interprétation et comparaison des résultats:

A partir des graphes (3.2) et (3.3) visualisant successivement la position du chariot et l'angle du pendule des deux systèmes linéaire et non linéaire obtenus lors de l'application de la commande par placement de pôles, on constate que le pendule se stabilise pour un angle initial égal à 5 degrés. Par contre, cette même commande ne stabilise pas le système non linéaire lorsque l'angle initial égal à 45 degrés (figures (3.6) et (3.7)).

A partir des graphes (lors de la simulation avec un angle initial égal à 5 degrés) montrés par les figures (3.10) jusqu'à (3.16) obtenus lors de l'application de la commande par mode de glissement, on constate que celle-ci arrive à stabiliser le pendule inversé. En effet, elle a pu le ramener à sa position d'équilibre instable avec un temps de réponse égal à 2 secondes et l'y

maintenir. Elle a en outre permet de stabiliser le déplacement du chariot avec un déplacement maximum de 0.04m. Pour la surface de glissement (figure (3.15)), on voit qu'elle converge dans un temps fini. Dans le régime établi, cette surface oscille autour de zéro ce qui explique un bon choix de la surface. On peut aussi observer le phénomène de chattering dans la commande par mode de glissement à cause de la valeur introduite au paramètre K_S .

Cette commande en mode glissant donne des résultats acceptables pour un angle initial égal à 45° . Pour l'angle initial égal à 73 degrés, (figures (3.17) jusqu'à (3.25)) le système linéarisé se stabilise dans sa position d'équilibre instable. D'autre part, la distance parcourue par le chariot est plus importante. Cependant, cette même commande ne stabilise pas le système non linéaire, en effet, dans la figure (3.20) qui montre la réponse temporelle de l'angle du pendule inversé, on constate des oscillations bruitées pour le pendule.

On conclue que la méthode par placement de pôles est insuffisante pour la stabilisation du pendule dans sa position d'équilibre instable lors de l'augmentation de l'angle initial. Cette méthode reste valable au voisinage du point d'équilibre, elle n'est pas assez robuste. C'est dans ce contexte que dans ce qui vient nous allons ignorer la commande par placement de pôles.

III.V. Linéarisation approximée du modèle en utilisant la méthode basée sur la maximisation du degré relatif:

Pour que le système (3.24) soit linéarisable exactement par feedback, il doit vérifier les deux conditions de commandabilité et d'involutivité suivantes :

- ✓ Les champs de vecteurs $\{g(X_0), ad_f g(X_0), ad_f^2 g(X_0), ad_f^3 g(X_0)\}$ sont linéairement indépendants.
- ✓ La distribution $\Delta = \text{span}\{g(X), ad_f g(X), ad_f^2 g(X)\}$ est involutive au voisinage de X_0 . ce qui revient à vérifier que la dimension de $\bar{\Delta} = \text{span}\{g(X), ad_f g(X), ad_f^2 g(X), [g, ad_f^2 g(X)]\}$ égale à la dimension de Δ .

La première condition est satisfaite au point $X_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Cependant, la deuxième condition n'est pas vérifiée au voisinage de $X_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

La deuxième condition donne :

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cos(x_3)}{l} & \frac{-2\sin(x_3)x_4}{l} & \frac{2\sin(x_3)\cos(x_3)}{l^2} \\ \frac{-\cos(x_3)}{l} & \frac{\sin(x_3)x_4}{l} & \frac{\cos(x_3)x_4^2}{l} + \frac{\sin^2(x_3)g}{l^2} - \frac{\cos^2(x_3)g}{l^2} & -\frac{2\cos^2(x_3)x_4}{l^2} + \frac{2\sin^2(x_3)x_4}{l^2} \end{array} \right) \quad (3.34)$$

On prend par exemple, $g = l = 1$ et $x_4 = 0$, la distribution devient :

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x_3) & 0 & 2\sin(x_3)\cos(x_3) \\ -\cos(x_3) & 0 & 1-2\cos^2(x_3) & 0 \end{array} \right) \quad (3.35)$$

Pour que la dimension de cette distribution soit égale à 3, il faut que la quatrième colonne aille disparaître, en d'autres termes, il n'existe pas un moyen pour le rendre égale à 3, ce qui signifie que la distribution n'est pas involutive au voisinage de x_0 . Donc ce système est non linéarisable exactement par feedback.

III.V.1. Calcul du degré relatif maximum pour le pendule inversé:

Sachant que le degré relatif r du système (3.24) est différent de $4 = n$ (n est la dimension du système), existe-elle une sortie $h(X)$ qui maximise le degré relatif ? Est-il possible d'obtenir un degré relatif $r = 3$?

Avoir un degré relatif $r = 3$ implique que r satisfait les deux équations suivantes :

$$L_g h(X) = L_g L_f h(X) = 0, \text{ pour tout } X \text{ voisinage de } X_0 \quad (3.36)$$

$$L_g L_f^2 h(X_0) \neq 0 \quad (3.37)$$

On considère la distribution $\Delta_1 = \text{span}\{g(X), ad_f g(X)\} = \{f_1, f_2\}$, si on calcule le crochet de Lie $[f_1, f_2]$, on constate que ce dernier n'appartient pas à la distribution Δ_1 , ce qui signifie que cette distribution n'est pas involutive, donc r ne peut pas être égale à 2.

$$\text{Soit : } \Delta_2 = \text{span}\{g(X), ad_f g(X), [g(X), ad_f g(X)]\} = \{f_1, f_2, f_3\}$$

On a $f_3 = [f_1, f_2] = [g(X), ad_f g(X)] \in \Delta_2$, donc il nous reste de vérifier si $[f_1, f_3]$ et $[f_2, f_3]$ appartiennent à cette distribution, un simple calcul de $[f_1, f_3]$ nous donne $[f_1, f_3] = 0 \in \Delta_2$, calculons alors le crochet de Lie $[f_2, f_3]$.

Finalement, la distribution Δ_2 aura la forme :

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x_3) & 0 & 0 \\ -\cos(x_3) & x_4 \sin(x_3) & -2 \sin(x_3) \cos(x_3) & -6 \cos^3(x_3) + 4 \cos(x_3) \end{array} \right) \quad (3.38)$$

Au voisinage de $X_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ le rang de cette matrice égale à 3, donc cette distribution est involutive.

Par le théorème de Frobenius, il existe une fonction $h(X)$ telle que cette dernière représente une des solutions des équations différentielles partielles donnée par :

$$\begin{aligned} \langle dh(X), f_1(X) \rangle &= 0 \\ \langle dh(X), f_2(X) \rangle &= 0 \\ \langle dh(X), f_3(X) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Au voisinage de X_0 .

III.V.2 La fonction de sortie :

Trouver la sortie $h(X)$ revient à résoudre le système d'équations différentielles partielles (3.39), admettant que la sortie $h(X)$ une fonction de (x_1, x_3) seulement, donc le système

$$\text{d'équation précédent se simplifie à : } \frac{\partial h}{\partial x_1} l - \frac{\partial h}{\partial x_3} \cos(x_3) = 0.$$

La fonction $h(X) = x_1 + l \ln\left(\frac{1 + \sin(x_3)}{\cos(x_3)}\right)$ est l'une des solutions de l'équation (3.39) ; (plusieurs solutions peuvent être obtenus).

Avec cette solution la première condition du degré relatif est vérifié, cependant la deuxième est non vérifiée i.e. $L_g L_f^2 h(X_0) = 0$.

Ce qui signifie que le degré relatif de notre système est non défini, il s'agit donc d'un système *non réglable*.

III.V.3. Linéarisation approximative entrée-sortie :

Dans la commande de tels systèmes, les auteurs proposent une méthode dont laquelle l'approximation du système originale se fait par la commande de linéarisation entrée-sortie dans des nouvelles coordonnées.

Soit le système :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ \frac{g \sin(x_3)}{l} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\cos(x_3)}{l} \end{pmatrix} u$$

$$y = h(X) = x_1 + l \ln \left(\frac{1 + \sin(x_3)}{\cos(x_3)} \right)$$

(3.40)

On construit le changement de variables $Z = \phi(X)$ où:

$$\begin{aligned} z_1 &= \phi_1(X) = h(X) \\ z_2 &= \phi_2(X) = L_f z_1 \\ z_3 &= \phi_3(X) = L_f^2 z_1 \\ z_4 &= \phi_4(X) = L_f^3 z_1 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Après calcul, on obtient la matrice suivante :

$$\phi(X) = \begin{pmatrix} x_1 + l \ln\left(\frac{1 + \sin(x_3)}{\cos(x_3)}\right) \\ x_2 + \frac{lx_4}{\cos(x_3)} \\ \tan(x_3)\left(g + \frac{lx_4}{\cos(x_3)}\right) \\ \left(\frac{2}{\cos^3(x_3)} - \frac{1}{\cos(x_3)}\right)lx_4^3 + \left(\frac{3g}{\cos^2(x_3)} - 2g\right)x_4 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Afin de vérifier si la matrice $\phi(X)$ définit un difféomorphisme, on calcule sa matrice jacobienne, il vient :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{X=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Donc la matrice $\phi(X)$ définit un difféomorphisme au voisinage de 0.

Dans les nouvelles coordonnées, le système s'écrit sous la forme normale suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = y^{(1)} &= \underbrace{x_2 + \frac{lx_4}{\cos(x_3)}}_{\phi_2(X)} \\ \dot{z}_2 = y^{(2)} &= \underbrace{\tan(x_3)\left(g + \frac{lx_4}{\cos(x_3)}\right)}_{\phi_3(X)} \\ \dot{z}_3 = y^{(3)} &= \underbrace{\left(\frac{2}{\cos^3(x_3)} - \frac{1}{\cos(x_3)}\right)lx_4^3 + \left(\frac{3g}{\cos^2(x_3)} - 2g\right)x_4}_{\phi_4(X)} - \underbrace{2x_4 \tan(x_3)}_{\text{à ignorer}} u \\ \dot{z}_4 = y^{(4)} &= f(Z(X)) + g(Z(X))u \end{aligned} \quad (3.44)$$

En négligeant le terme de u dans la troisième équation, on obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 \dot{z}_3 &= z_4 \\
 \dot{z}_4 &= f(Z(X)) + g(Z(X))u \\
 y &= z_1
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

III.V.4. Commande par mode glissant :

Après avoir la forme canonique commandable du système, on peut utiliser la commande par mode de glissement, la sortie désirée est donnée par $y_d(t) = 0$, ainsi l'erreur est donnée par $e = y - y_d$.

On définit la surface de glissement par $S = \{X \in \mathfrak{R}^4 / s(X, t) = 0\}$, et $\lambda > 0$ ([19]).

$$\begin{aligned}
 s(X, t) &= \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^3 e \\
 &= e^{(3)} + 3\lambda e^{(2)} + 3\lambda^2 e^{(1)} + \lambda^3 e
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 \dot{s}(X, t) &= e^{(4)} + 3\lambda e^{(3)} + 3\lambda^2 e^{(2)} + \lambda^3 e^{(1)} \\
 &= y^{(4)} + 3\lambda y^{(3)} + 3\lambda^2 y^{(2)} + \lambda^3 y^{(1)} \\
 &= f(Z(X)) + g(Z(X))u + 3\lambda y^{(3)} + 3\lambda^2 y^{(2)} + \lambda^3 y^{(1)} \\
 &= b(X) + a(X)u
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

En utilisant la théorie de mode glissant, on choisit la loi de commande:

$$u = \frac{-b(X)}{a(X)} + K_s \text{sign}(s) \tag{3.48}$$

Où $K_s > 0$ est un paramètre expérimental, par conséquent:

$$\dot{s} = K_s \text{sign}(s) a(X) \quad (3.49)$$

Au voisinage de $a(X) < 0$, on observe que lorsque $s < 0, \dot{s} > 0$ et lorsque $s > 0, \dot{s} < 0$. On peut constater par la commande (3.48) que la surface s sera atteinte en un temps limité et les états $z_i, i = 1, \dots, 4$ tendent vers s , en d'autres termes, on a :

$$e^{(3)} + 3\lambda e^{(2)} + 3\lambda^2 e^{(1)} + \lambda^3 e = 0 \quad (3.50)$$

Comme $\lambda > 0$, la solution de cette équation différentielle tend donc exponentiellement vers 0 (décroissance exponentielle), lorsque $t \rightarrow \infty$, $y(t) - y_d(t) \rightarrow 0$ où bien $y(t) \rightarrow 0$ donc :

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + l \ln\left(\frac{1 + \sin(x_3)}{\cos(x_3)}\right) = 0 \\ z_2 &= x_2 + \frac{lx_4}{\cos(x_3)} = 0 \\ z_3 &= \tan(x_3) \left(g + \frac{lx_4}{\cos(x_3)} \right) = 0 \\ z_4 &= \left(\frac{2}{\cos^3(x_3)} - \frac{1}{\cos(x_3)} \right) lx_4^3 + \left(\frac{3g}{\cos^2(x_3)} - 2g \right) x_4 = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Tandis que $\phi(X)$ est un difféomorphisme au point $X = 0$, la résolution des équations précédentes donne une solution évidente. Néanmoins, on obtient $x_1 = 0$ et $x_3 = 0$ qui représentent physiquement la position initiale du chariot et la position angulaire verticale du pendule.

III.V.5. Simulation et résultats :

On simule le modèle donné par l'équation (3.40) à l'aide de la fenêtre de programmation donnée par Matlab en utilisant la commande par mode de glissement.

On simule d'abord le système non linéaire approximé pour deux conditions initiales (5 degrés puis 67 degrés). Ensuite, on donne les résultats de simulation pour le système non linéaire réel pour deux conditions initiales (5 degrés puis 67 degrés).

1. Système non linéaire approximé:

a. **Simulation (1):** L'angle initial du pendule est $\frac{\pi}{36} = 5^\circ$

La figure (3.26) illustre la réponse temporelle de la position du chariot du système approximé. La figure (3.27) illustre la trajectoire de l'angle du pendule en fonction du temps. Ainsi les figures (3.28), (3.29) et (3.30) donnent successivement la commande équivalente, la commande stabilisante et la commande résultante donnée par mode de glissement du système non linéaire. La surface de glissement est donnée par la figure (3.31) et la figure (3.32) donne la force exercée au pendule.

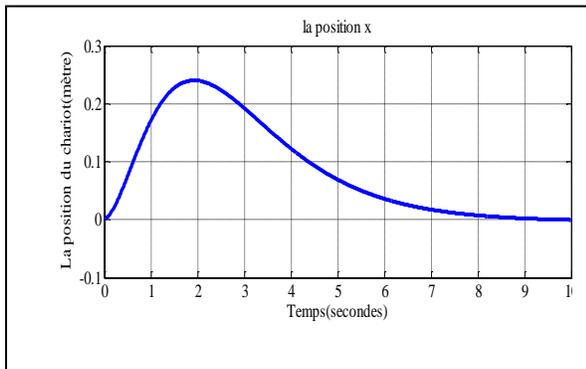


Figure 3.26: La position du chariot

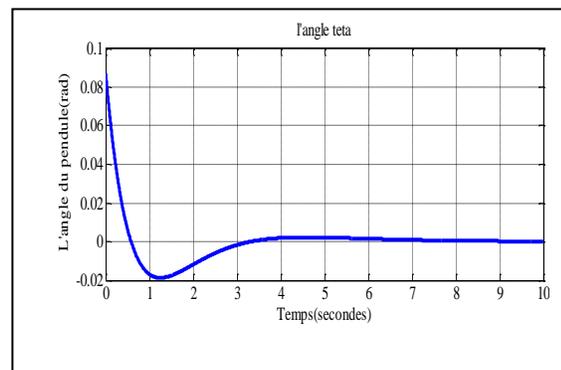


Figure 3.27: L'angle du pendule inversé

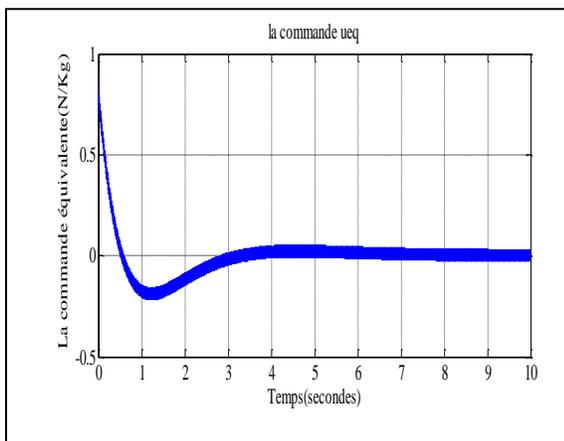


Figure 3.28: La commande équivalente donnée par mode glissant

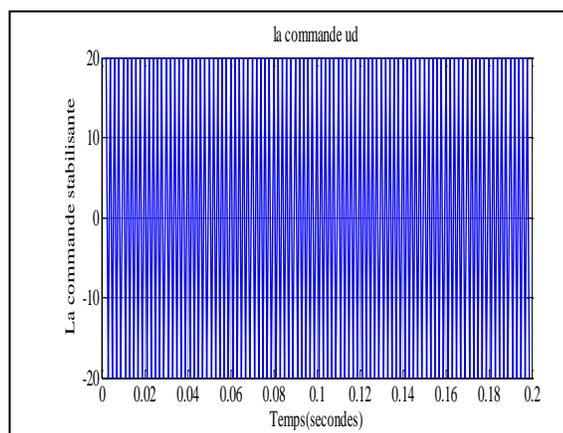


Figure 3.29: La commande stabilisante donnée par mode glissant

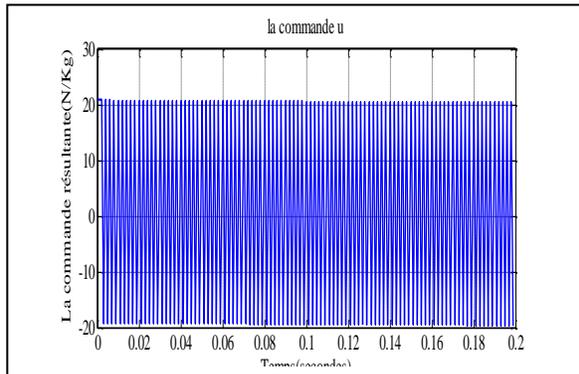


Figure 3.30: La commande résultante donnée par mode glissant

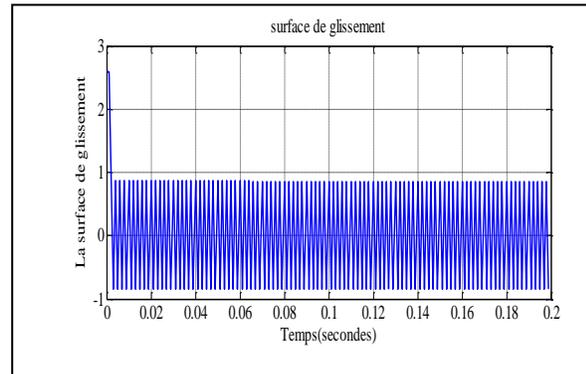


Figure 3.31: La surface de glissement

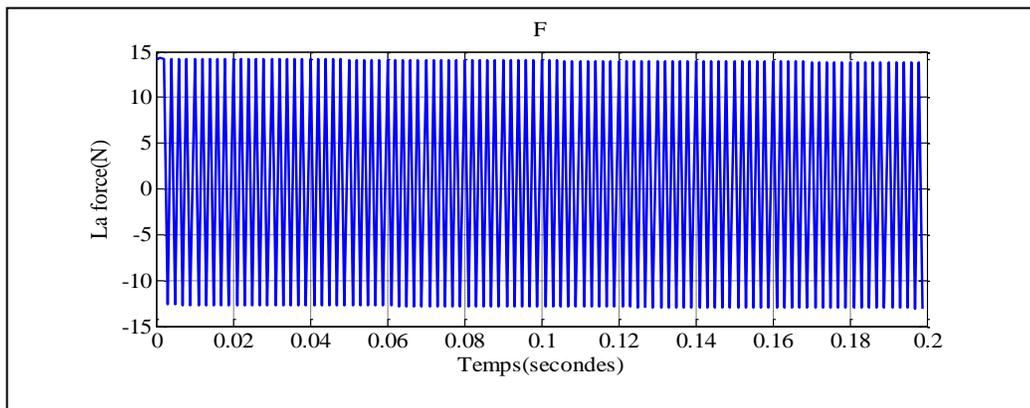


Figure 3.32: La force appliquée au système

b. Simulation (2): L'angle initial du pendule est 67° :

La figure (3.33) illustre la réponse temporelle de la position du chariot du système approximé. La figure (3.34) illustre la trajectoire de l'angle du pendule en fonction du temps. Ainsi les figures (3.35), (3.36) et (3.37) donnent successivement la commande équivalente, la commande stabilisante et la commande résultante donnée par mode de glissement du système non linéaire. La surface de glissement est donnée par la figure (3.38) et la figure (3.39) donne la force exercée au pendule.

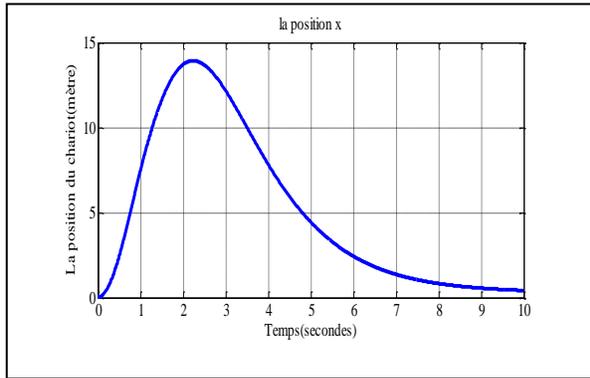


Figure 3.33: La position du chariot

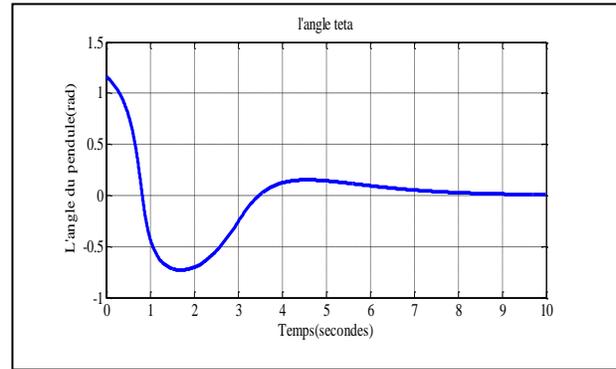


Figure 3.34: L'angle du pendule inversé

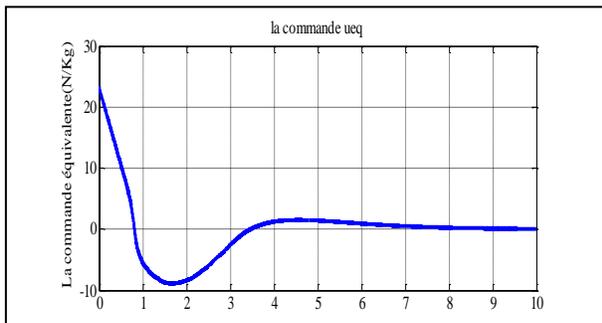


Figure 3.35: La commande équivalente donnée par mode glissant

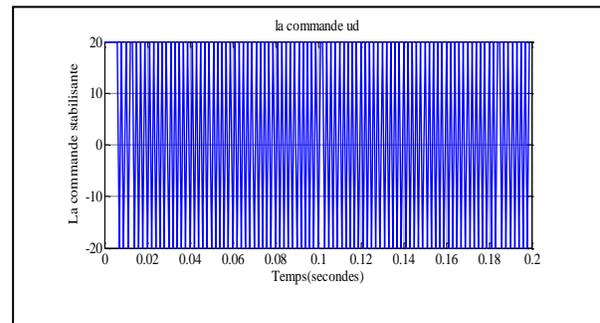


Figure 3.36: La commande stabilisante donnée par mode glissant

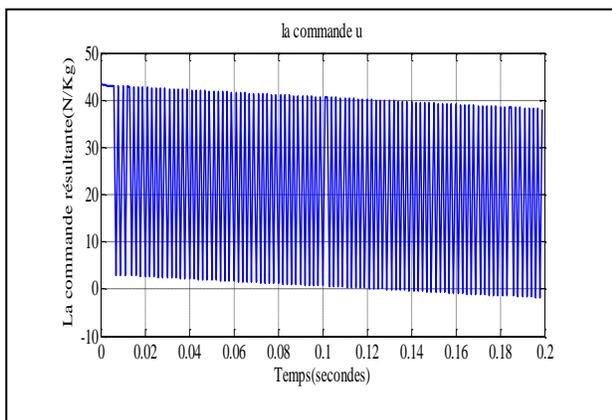


Figure 3.37: La commande résultante donnée par mode glissant

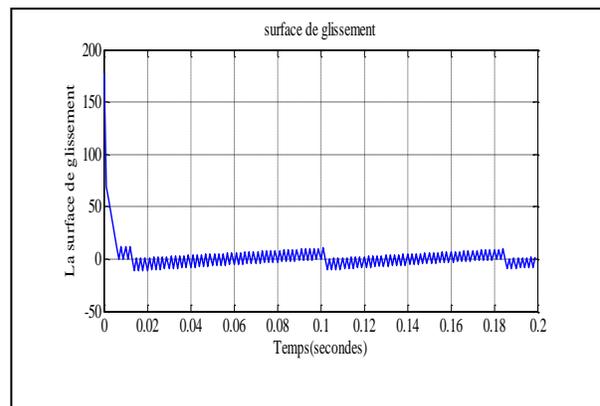


Figure 3.38: La surface de glissement

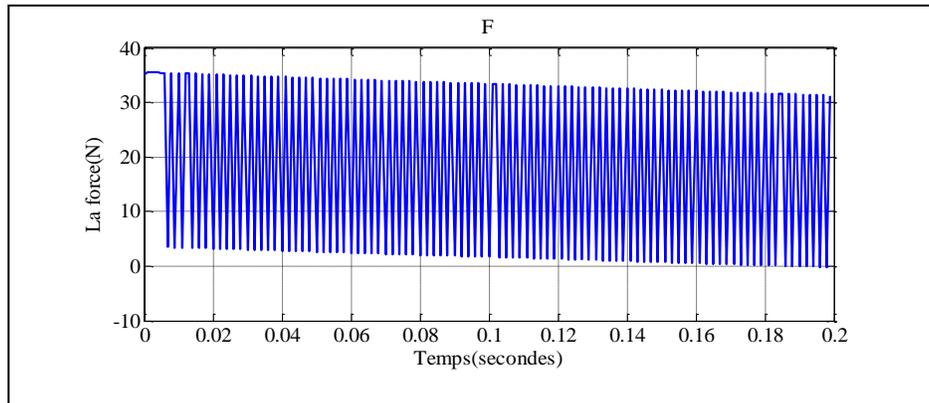


Figure 3.39: La force appliquée au système

2. Système non linéaire réel:

a. **Simulation (1):** L'angle initial du pendule est $\frac{\pi}{36} = 5^\circ$

La figure (3.40) illustre la réponse temporelle de la position du chariot du système approximé. La figure (3.41) illustre la trajectoire de l'angle du pendule en fonction du temps. Ainsi les figures (3.42), (3.43) et (3.44) donnent successivement la commande équivalente, la commande stabilisante et la commande résultante donnée par mode de glissement du système non linéaire. La surface de glissement est donnée par la figure (3.45) et la figure (3.46) donne la force exercée au pendule.

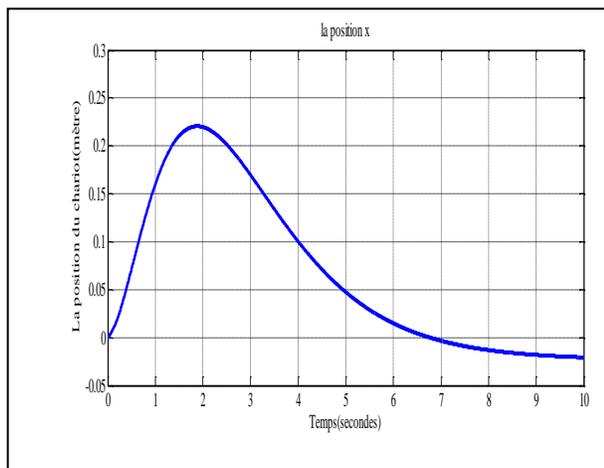


Figure3.40: La position du chariot

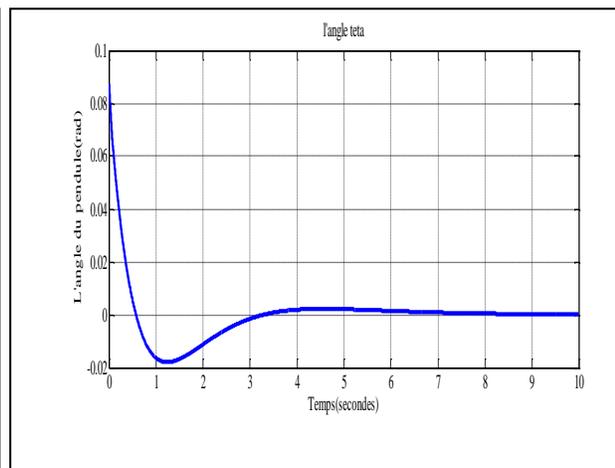


Figure 3.41: L'angle du pendule inversé

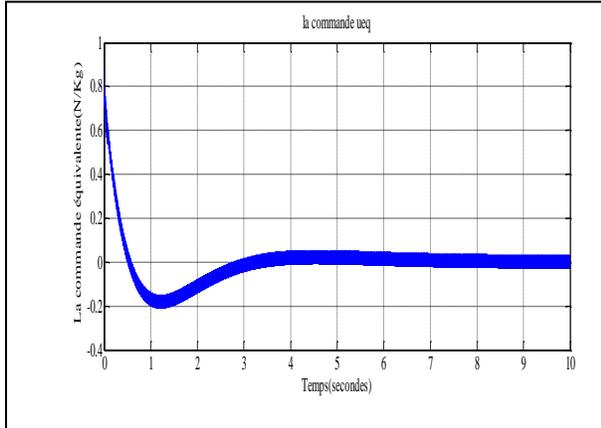


Figure 3.42: La commande équivalente donnée par mode glissant

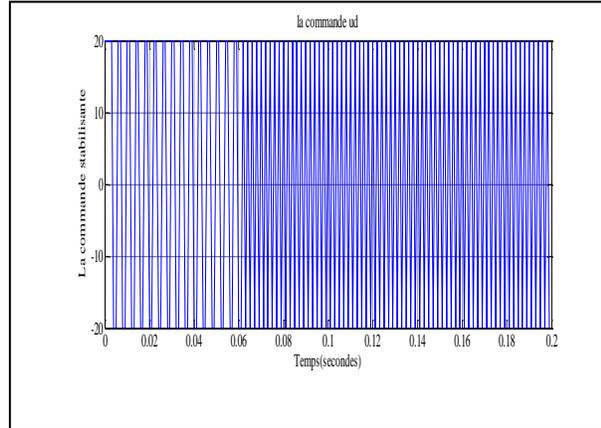


Figure 3.43: La commande stabilisante donnée par mode glissant

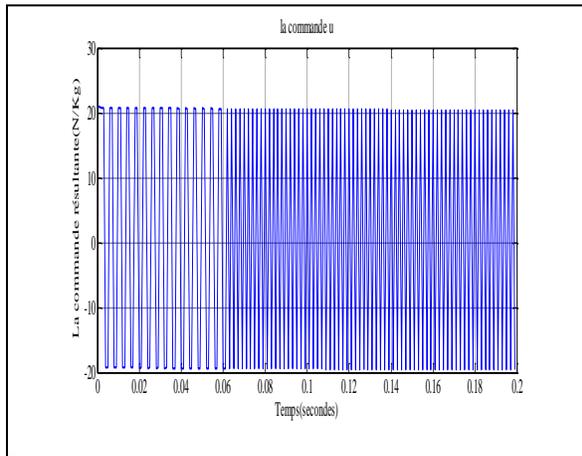


Figure 3.44: La commande résultante donnée par mode glissant

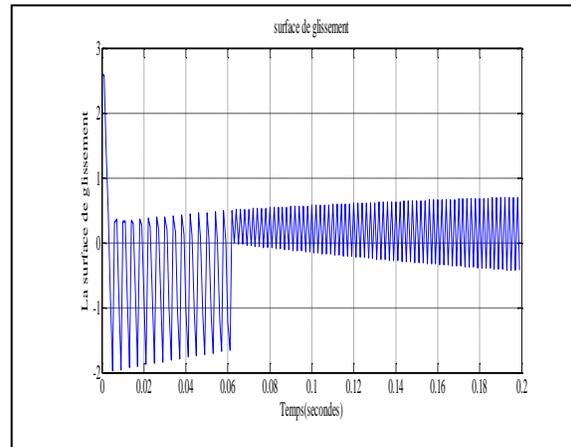


Figure 3.45: La surface de glissement

/

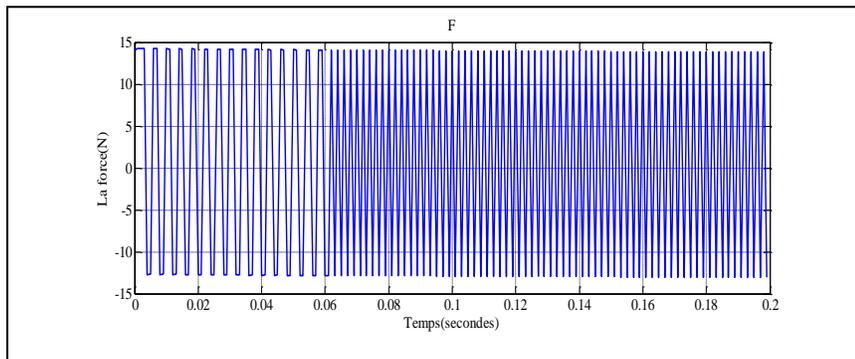


Figure 3.46: La force appliquée au système

b. Simulation (2): L'angle initial du pendule est 67°

La figure (3.47) illustre la réponse temporelle de la position du chariot du système approximé. La figure (3.48) illustre la trajectoire de l'angle du pendule en fonction du temps. Ainsi les figures (3.49), (3.50) et (3.51) donnent successivement la commande équivalente, la commande stabilisante et la commande résultante donnée par mode de glissement du système non linéaire. La surface de glissement est donnée par la figure (3.52) et la figure (3.53) donne la force exercée au pendule.

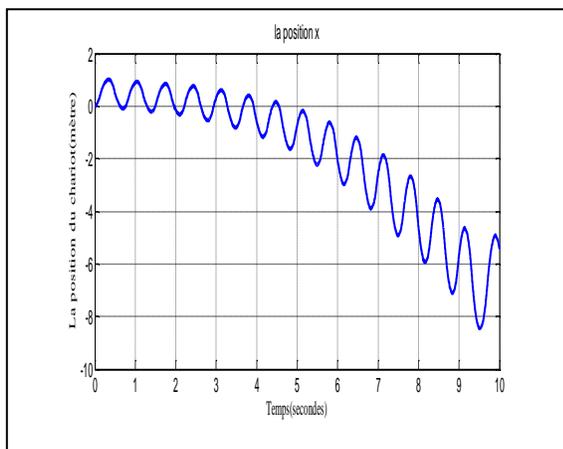


Figure 3.47: La position du chariot

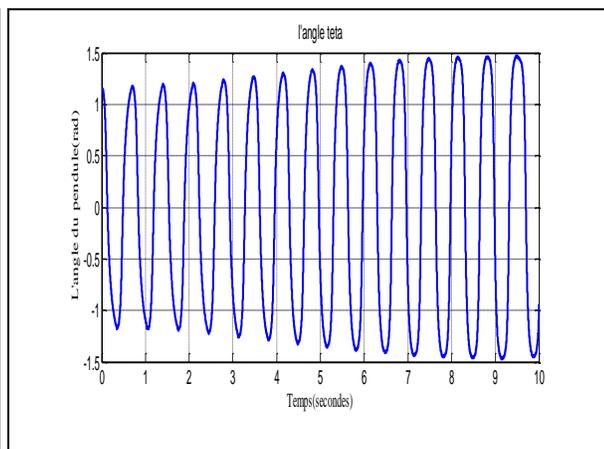


Figure 3.48: L'angle du pendule inversé

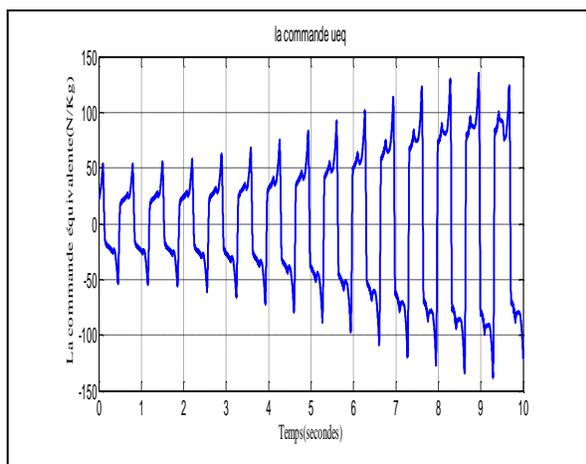


Figure 3.49: La commande équivalente donnée par mode glissant

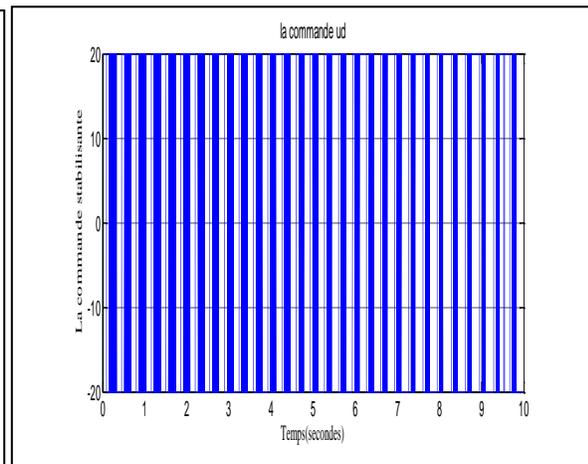


Figure 3.50: La commande stabilisante donnée par mode glissant

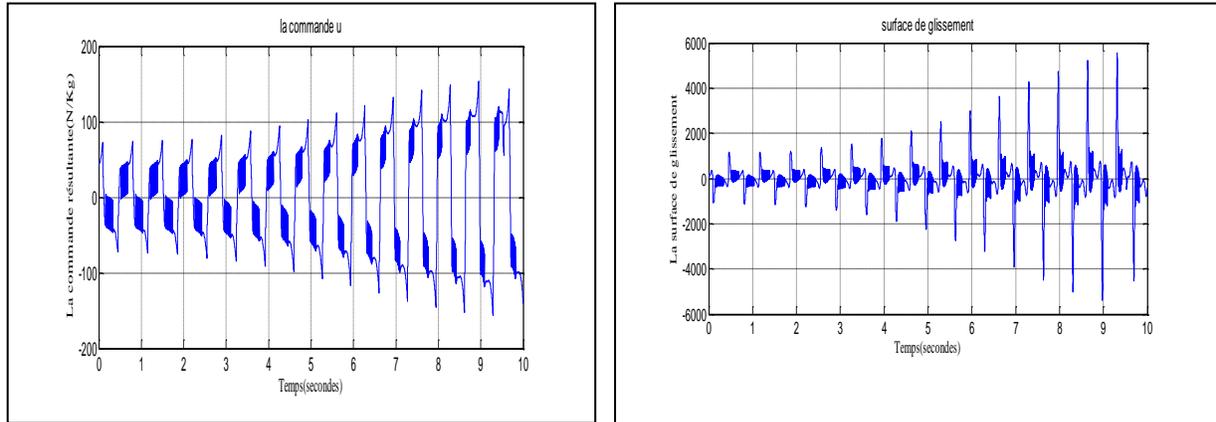


Figure 3.51: La commande résultante donnée par mode glissant

Figure 3.52: La surface de glissement

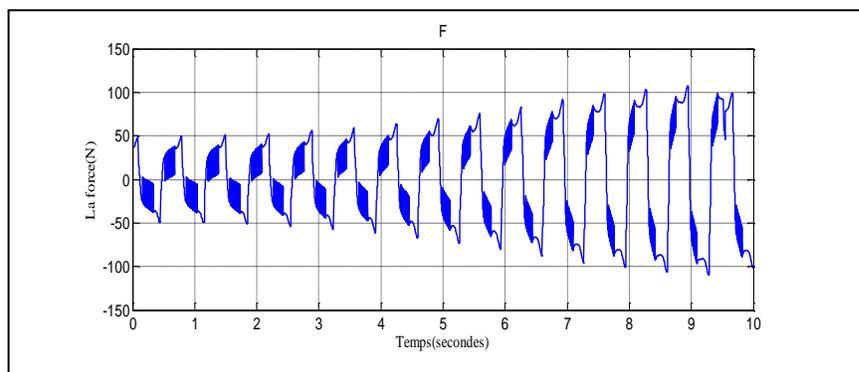


Figure 3.53: La force appliquée au système

III.V.6. Interprétation des résultats:

A partir des graphes du système non linéaire approximé montrés sur les figures (3.26) jusqu'à (3.39), on constate qu'avec un angle initial égal à 5 degrés notre commande par mode de glissement arrive à stabiliser le pendule inversé. En effet, elle a pu le ramener à sa position d'équilibre instable avec un temps de réponse égal à 5 secondes et l'y maintenir (figure (3.27)). Elle a en outre permis de stabiliser le déplacement du chariot avec un déplacement maximum de 0.24m (figure (3.26)). Pour la surface de glissement (figure (3.31)), on voit qu'elle converge dans un temps fini. Dans le régime établi, cette surface oscille autour de zéro ce qui explique un bon choix de la surface. On peut aussi observer un phénomène de chattering dans la commande par mode de glissement à cause de la valeur introduite au paramètre K_s .

Pour un angle initial égal à 67 degrés (figure (3.33) jusqu'à (3.39)), on constate que la réponse temporelle de la position du chariot a été stabiliser avec un déplacement maximum très important (14 mètres) ainsi la trajectoire de l'angle du pendule en fonction du temps a été annulée avec un temps de réponse égal à 7secondes, ceci établi la stabilisation du pendule avec un déplacement maximum important de la position du chariot.

Lorsqu'on applique notre commande par mode glissant au système réel, on constate que le pendule se stabilise pour un angle initial égal à 5 degrés. La figure (3.41) montre la réponse temporelle de l'angle du pendule, le pendule se stabilise dans sa position d'équilibre instable en un temps de réponse égal à 4secondes et le chariot se stabilise dans une position avec un déplacement maximum de 0.22m. D'autre part, pour ce même système et avec un angle initial égal à 67 degrés, notre commande n'a pu stabiliser le pendule en sa position d'équilibre (figure (3.48)) et le chariot se déplace aléatoirement (3.47).

III.VI. Linéarisation par l'algorithme de Hunt:

La détermination de l'ordre d'involutivité de l'ensemble $\{g(X), ad_f g(X), ad_f^2 g(X)\}$ est l'une des difficultés de cet algorithme à cause de la complexité du modèle du pendule inversé. Par conséquent, on va appliquer cet algorithme en fixant dès le début l'ordre de linéarisation ρ , par exemple on fixe $\rho = 1$ car on ne sait pas à quel ordre le système est linéarisable.

Soit le modèle du système non linéaire du pendule inversé donné par l'équation (3.24).

Après le calcul, on trouvera :

$$z_1 = x_1 + x_3 \quad (3.52)$$

Le reste des variables est déterminé par les dérivées successives de z_1 , c'est à dire:

$$\begin{aligned} z_2 &= L_f z_1 = x_2 + x_4 \\ z_3 &= L_f^2 z_1 = \frac{g}{l} \sin(x_3) \\ z_4 &= L_f^3 z_1 = \frac{g}{l} x_4 \cos(x_3) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Le système non linéaire sera le suivant:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 + \left(1 - \frac{1}{l} \cos(x_3)\right)u \\
 \dot{z}_3 &= z_4 \\
 \dot{z}_4 &= a(X) + b(X)u
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

En négligeant le coefficient de u , i.e. le terme $\left(1 - \frac{1}{l} \cos(x_3)\right)$, le système sera sous forme:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 \dot{z}_3 &= z_4 \\
 \dot{z}_4 &= a(X) + b(X)u \\
 y &= z_1
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Soit la nouvelle commande auxiliaire:

$$v = L_f z_4 + L_g z_4 u \tag{3.56}$$

Le système en boucle fermée sera donc:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 \dot{z}_3 &= z_4 \\
 \dot{z}_4 &= v \\
 y &= z_1
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

III.VI.1. Commande par mode glissant :

Après avoir la forme canonique commandable du système, on peut utiliser la commande par mode de glissement afin de stabiliser le système.

Ainsi le problème de poursuite de trajectoire consiste à déterminer la loi de commande u qui permet d'assurer la convergence du vecteur de sortie y vers le vecteur de sortie désiré y_d avec une erreur de suivie $e(t) = y(t) - y_d(t)$.

On prend $y_d = 0$, l'erreur sera donc sous la forme $e(t) = y(t)$

Soit la surface de glissement :

$$S = \{X \in \mathfrak{R}^4 / s(X, t) = 0\} \quad \lambda > 0 \quad (3.58)$$

On choisit comme surface de glissement celle proposée par Slotine:

$$\begin{aligned} s(X, t) &= \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^3 e \\ &= e^{(3)} + 3\lambda e^{(2)} + 3\lambda^2 e^{(1)} + \lambda^3 e \end{aligned} \quad (3.59)$$

La dérivée de la surface donne :

$$\begin{aligned} \dot{s}(X, t) &= e^{(4)} + 3\lambda e^{(3)} + 3\lambda^2 e^{(2)} + \lambda^3 e^{(1)} \\ &= y^{(4)} + 3\lambda y^{(3)} + 3\lambda^2 y^{(2)} + \lambda^3 y^{(1)} \\ &= f(Z(X)) + g(Z(X))u + 3\lambda y^{(3)} + 3\lambda^2 y^{(2)} + \lambda^3 y^{(1)} \\ &= B(X) + A(X)u \end{aligned} \quad (3.60)$$

En utilisant la théorie de mode glissant, on choisit la loi de commande

$$u = \frac{-B(X)}{A(X)} + K_s \text{sign}(s) \quad (3.61)$$

Où $K_s > 0$ est un paramètre expérimental, par conséquent:

$$\dot{s} = K_s \text{sign}(s) A(X) \quad (3.62)$$

III.VI.2. Simulation et résultats :

On simule le modèle donné par l'équation (3.54) à l'aide de la fenêtre de programmation donnée par Matlab en utilisant la commande par mode de glissement.

On simule d'abord le système non linéaire approximé pour deux conditions initiales (5 degrés puis 89 degrés). Ensuite, on donne les résultats de simulation pour le système non linéaire réel pour deux conditions initiales (5 degrés puis 85 degrés).

Avec un choix de $\lambda = 2$.

1. Système non linéaire approximé:

a. Simulation (1): L'angle initial du pendule est $\frac{\pi}{36} = 5^\circ$

La figure (3.54) illustre la réponse temporelle de la position du chariot du système approximé. La figure (3.55) illustre la trajectoire de l'angle du pendule en fonction du temps. Ainsi les figures (3.56), (3.57) et (3.58) donnent successivement la commande équivalente, la commande stabilisante et la commande résultante donnée par mode de glissement du système non linéaire. La surface de glissement est donnée par la figure (3.59) et la figure (3.60) donne la force exercée au pendule.

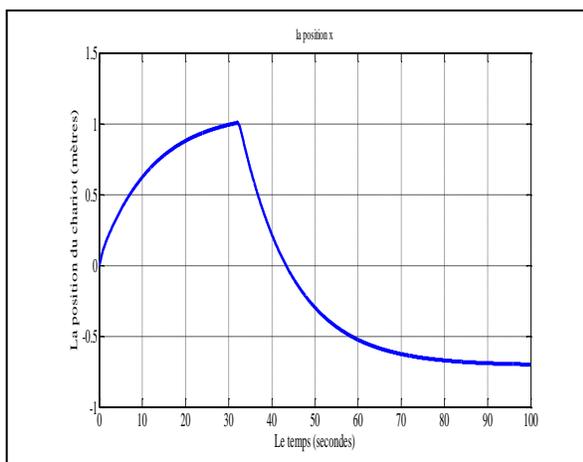


Figure 3.54: La position du chariot

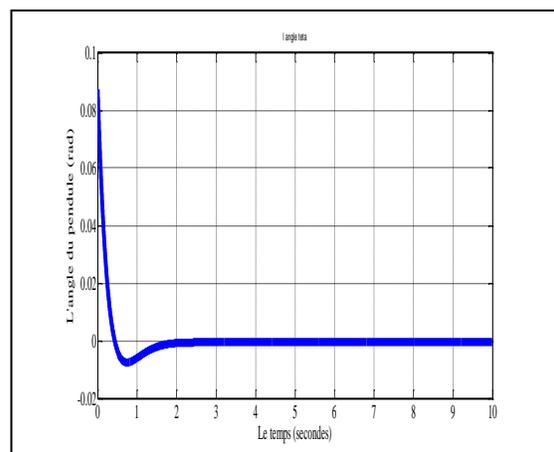


Figure 3.55: L'angle du pendule inversé

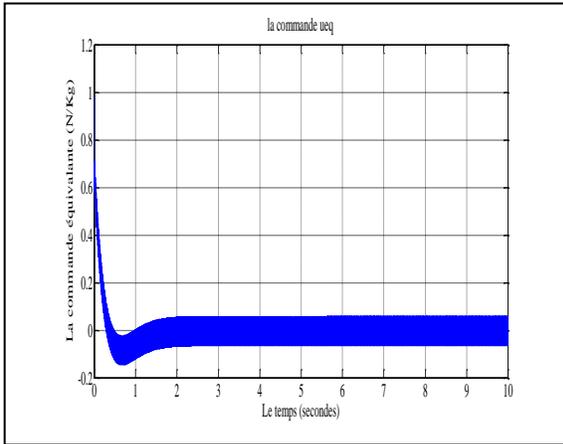


Figure 3.57: La commande équivalente donnée par mode glissant

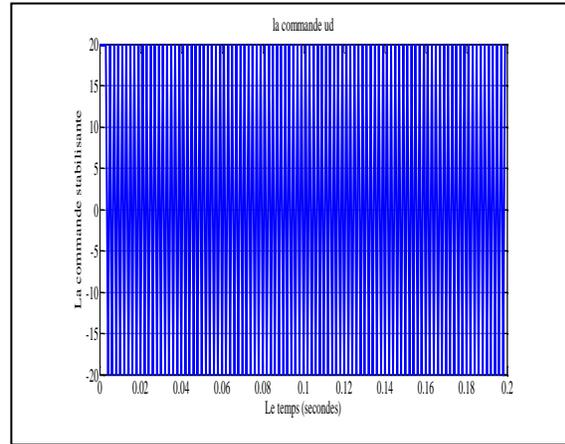


Figure 3.58: La commande stabilisante donnée par mode glissant

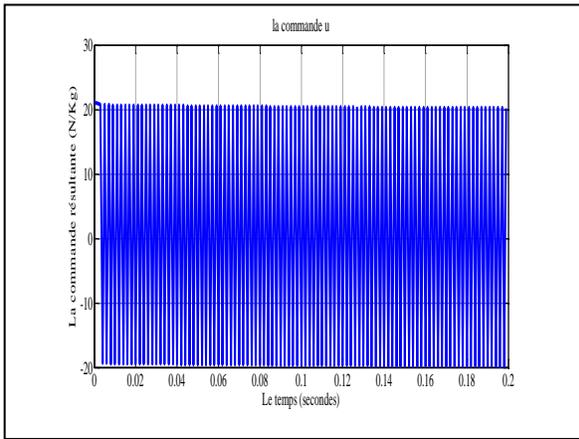


Figure 3.59: La commande résultante donnée par mode glissant

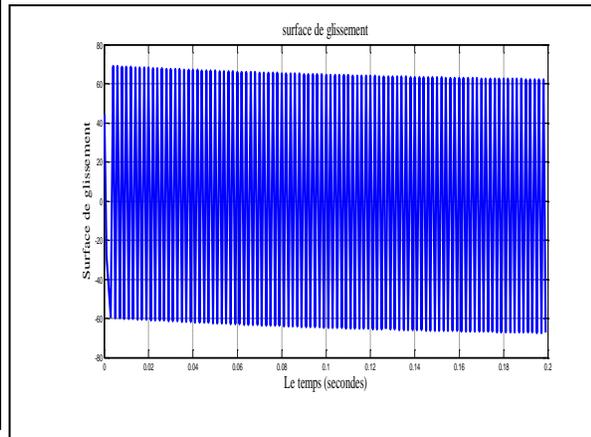


Figure 3.60: La surface de glissement

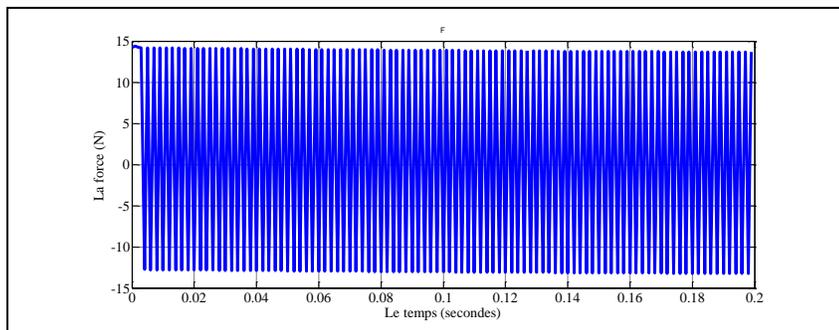


Figure 3.61: La force appliquée au système

b. Simulation (2): L'angle initial du pendule est 89°

La figure (3.62) illustre la réponse temporelle de la position du chariot du système approximé. La figure (3.63) illustre la trajectoire de l'angle du pendule en fonction du temps. Ainsi les figures (3.64), (3.65) et (3.66) donnent successivement la commande équivalente, la commande stabilisante et la commande résultante donnée par mode de glissement du système non linéaire. La surface de glissement est donnée par la figure (3.67) et la figure (3.68) donne la force exercée au pendule.

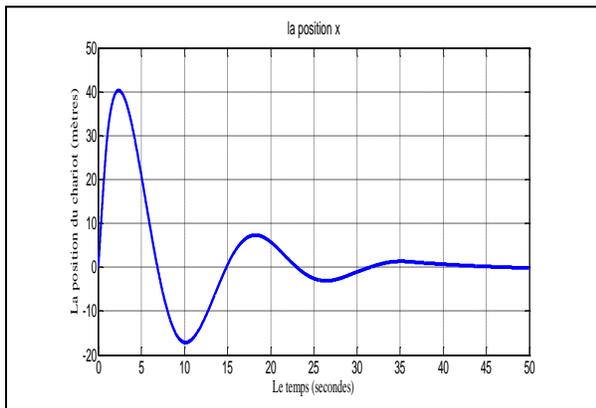


Figure 3.62: La position du chariot

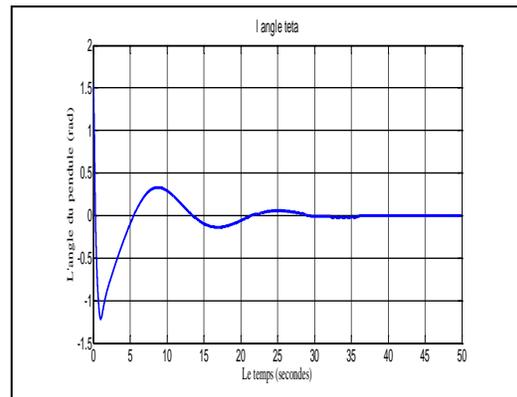


Figure 3.63: L'angle du pendule inversé

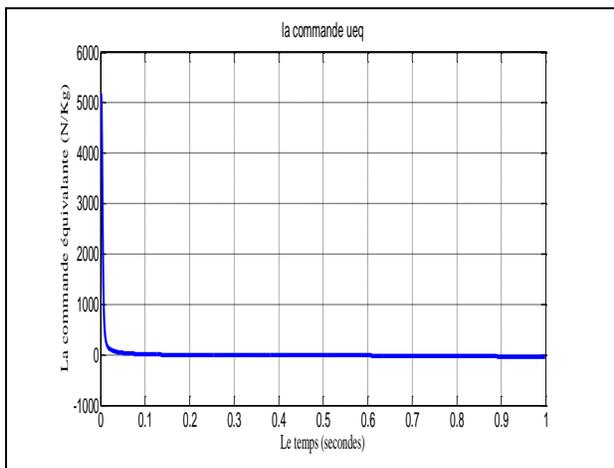


Figure 3.64: La commande équivalente donnée par mode glissant

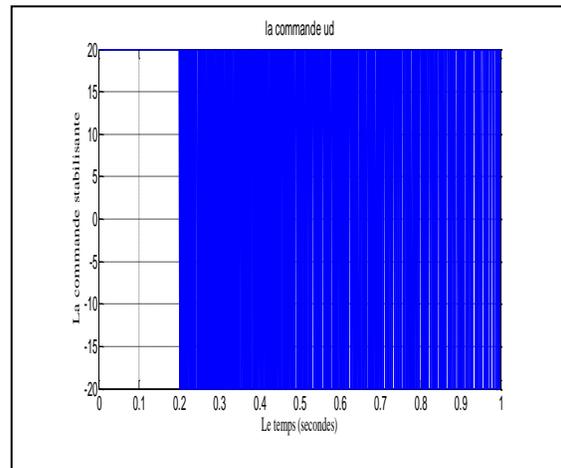


Figure 3.65: La commande stabilisante donnée par mode glissant

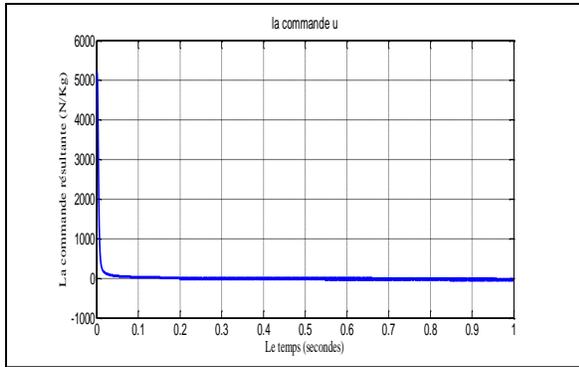


Figure 3.66: La commande résultante donnée par mode glissant

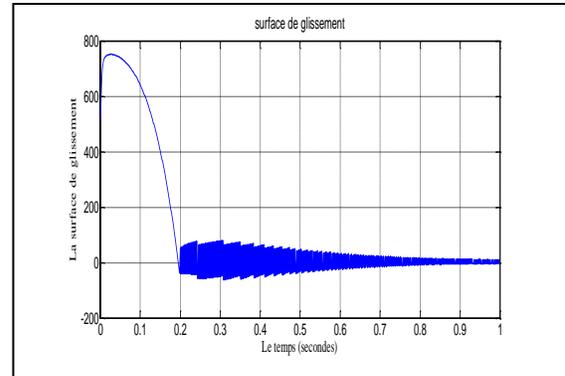


Figure 3.67: La surface de glissement

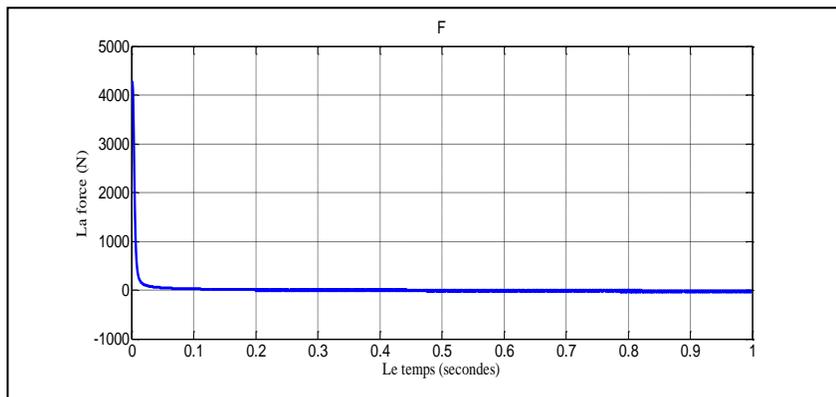


Figure 3.68: La force appliquée au système

1. Système non linéaire réel:

a. Simulation (1): L'angle initial du pendule est $\frac{\pi}{36} = 5^\circ$

La figure (3.69) illustre la réponse temporelle de la position du chariot du système approximé. La figure (3.70) illustre la trajectoire de l'angle du pendule en fonction du temps. Ainsi les figures (3.71), (3.72) et (3.73) donnent successivement la commande équivalente, la commande stabilisante et la commande résultante donnée par mode de glissement du système non linéaire. La surface de glissement est donnée par la figure (3.74) et la figure (3.75) donne la force exercée au pendule.

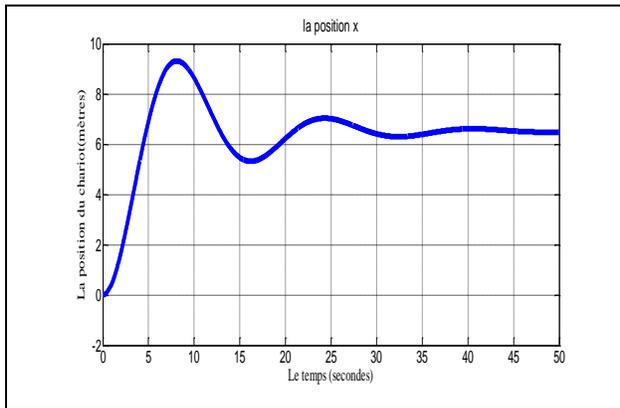


Figure 3.69: La position du chariot

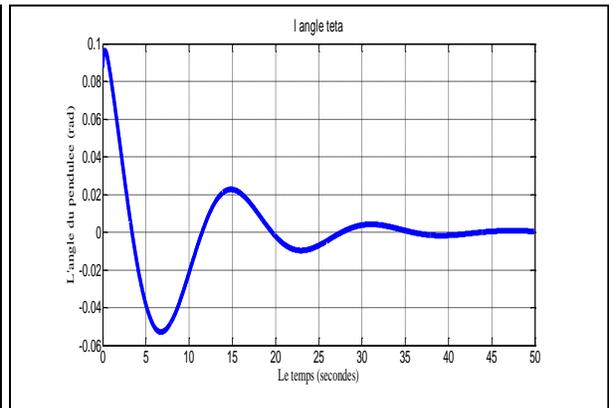


Figure 3.70: L'angle du pendule inversé

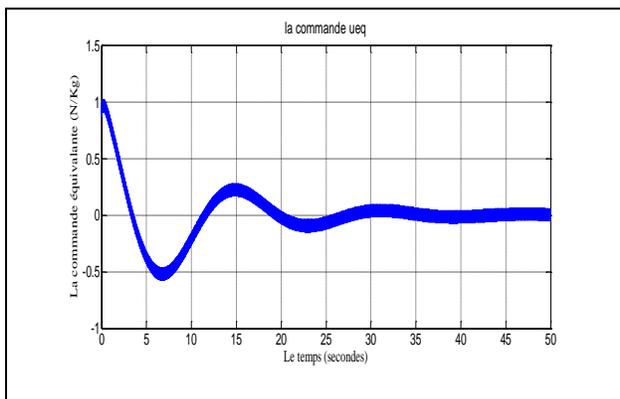


Figure 3.71: La commande équivalente donnée par mode glissant

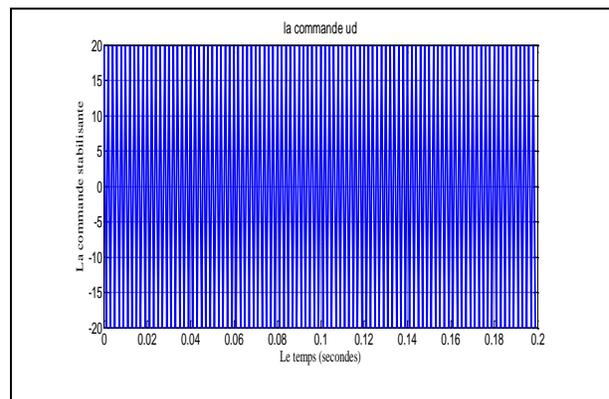


Figure 3.72: La commande stabilisante donnée par mode glissant

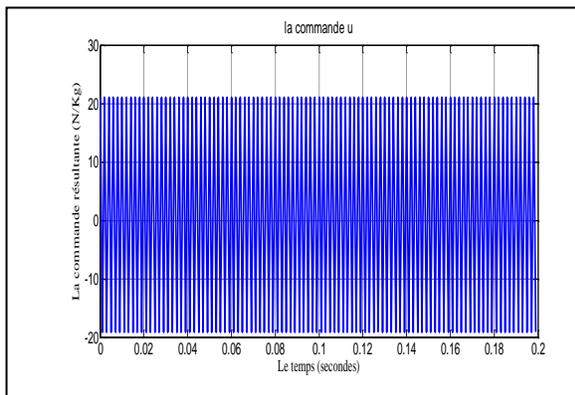


Figure 3.73: La commande résultante donnée par mode glissant

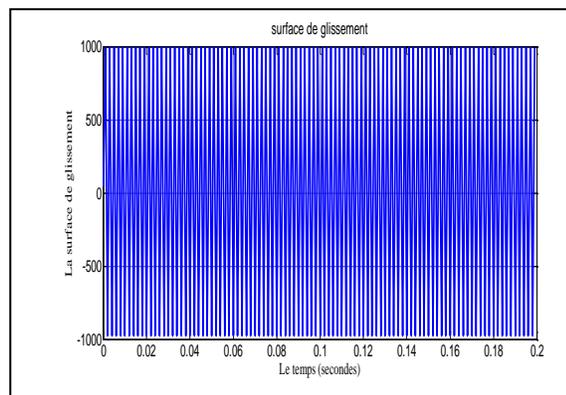


Figure 3.74: La surface de glissement

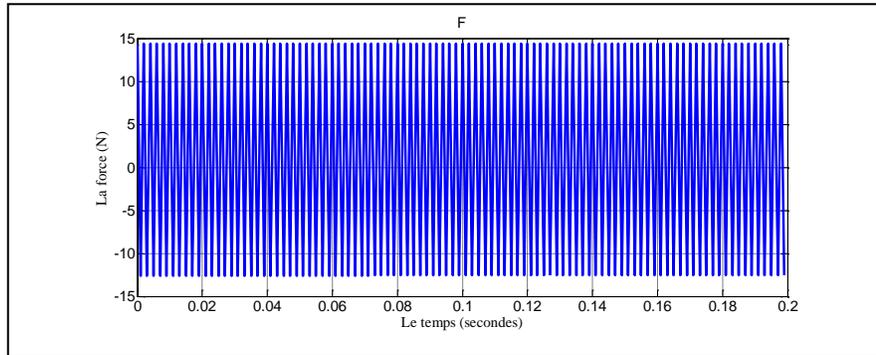


Figure 3.75: La force appliquée au système

b. Simulation (2): L'angle initial du pendule est 85°

La figure (3.76) illustre la réponse temporelle de la position du chariot du système approximé. La figure (3.77) illustre la trajectoire de l'angle du pendule en fonction du temps. Ainsi les figures (3.78), (3.79) et (3.80) donnent successivement la commande équivalente, la commande stabilisante et la commande résultante donnée par mode de glissement du système non linéaire. La surface de glissement est donnée par la figure (3.81) et la figure (3.82) donne la force exercée au pendule.

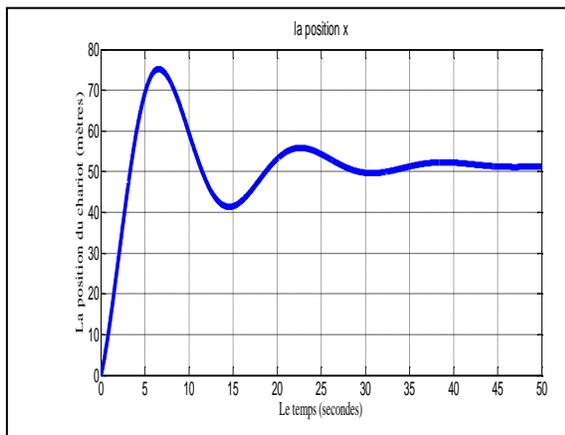


Figure 3.76: La position du chariot

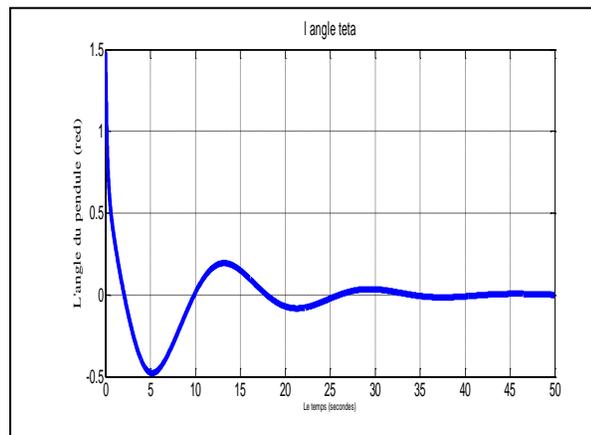


Figure 3.77: L'angle du pendule inversé

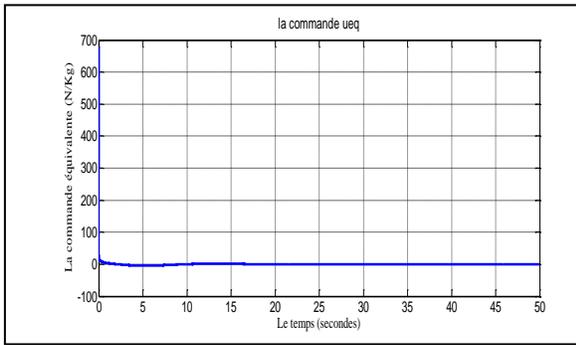


Figure 3.78: La commande équivalente donnée par mode glissant

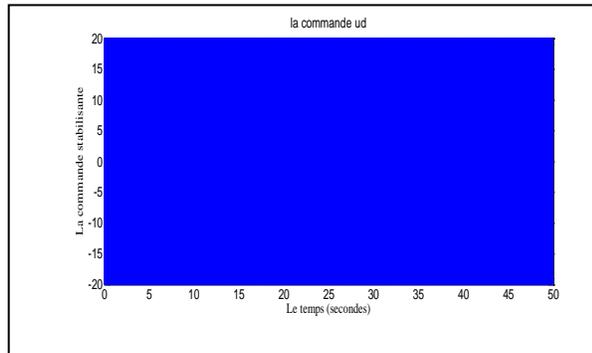


Figure 3.79: La commande stabilisante donnée par mode glissant

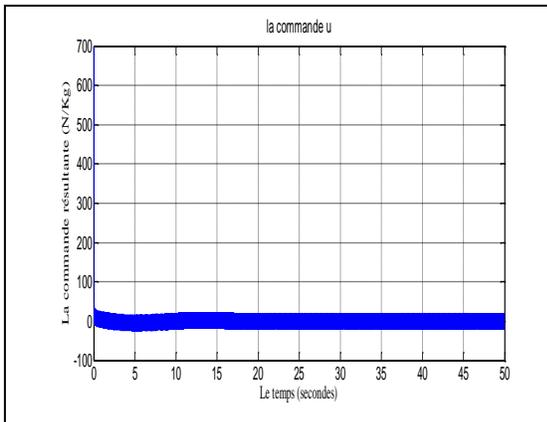


Figure 3.80: La commande résultante donnée par mode glissant

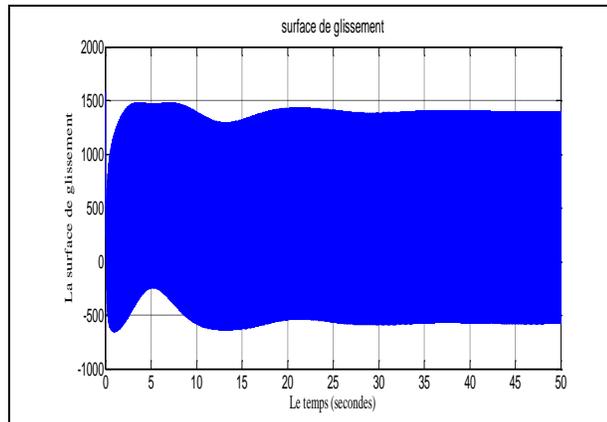


Figure 3.81: La surface de glissement

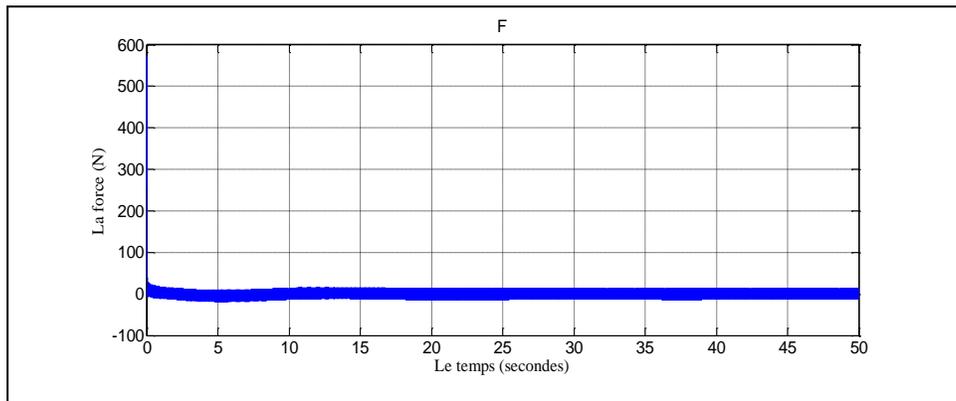


Figure 3.82: La force appliquée au système

III.VI.3. Interprétation des résultats:

Pour le système approximé, on constate de la figure (3.55) qui représente la réponse temporelle de l'angle du pendule avec une condition initiale égale à 5 degrés, que notre commande par mode de glissement a pu stabiliser le pendule en sa position d'équilibre instable en un temps de réponse de 2secondes. Le chariot a été aussi stabilisé avec un déplacement de 1mètre (figure (3.54)).

Pour un angle initial égal à 89 degrés (figure (3.62) jusqu'à (3.68)), on constate que la réponse temporelle de la position du chariot a été stabiliser avec un déplacement maximum important (40mètres) ainsi la trajectoire de l'angle du pendule en fonction du temps a été annulée avec un temps de réponse égal à 30secondes, ceci établi la stabilisation du pendule avec un déplacement maximum important de la position du chariot.

Pour les surfaces de glissement (figure (3.60) et figure (3.67)), on voit qu'elles convergent dans un temps fini. Dans le régime établi, ces surfaces oscillent autour de zéro ce qui explique un bon choix des surfaces. On peut aussi observer un phénomène de chattering dans les commandes par mode de glissement à cause de la valeur introduite au paramètre K_S .

Lorsqu'on applique notre commande par mode glissant au système réel, on constate que le pendule se stabilise pour un angle initial égal à 5 degrés. La figure (3.70) montre la réponse temporelle de l'angle du pendule, le pendule se stabilise dans sa position d'équilibre instable en un temps de réponse égal à 35secondes et le chariot se stabilise dans une position avec un déplacement maximum de 9m. Pour ce même système et avec un angle initial égal à 85degré, notre commande a pu stabiliser le pendule en sa position d'équilibre mais avec un temps de réponse important égale à 35s (figure (3.77)), cependant, le chariot change sa position et se déplace pour atteindre un déplacement maximal très important irréalisable en pratique 86m (figure 3.76). Au delà de 85 degrés cette commande n'arrive plus à stabiliser le pendule.

Remarque (3.1):

Les résultats présentés dans tous les tests effectués ne sont que des résultats de simulation donc théoriques. Il faut impérativement les confronter à la réalité. En particulier, il faut étudier la faisabilité du signal de commande à travers les éléments du dispositif du système de commande (moteur, actionneur, ...) et aussi tenir compte des limites de déplacement du chariot.

III.VII. Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons présenté le procédé sur lequel nous avons travaillé, il s'agit du pendule inversé. En effet, l'objectif de notre travail, est de commander le pendule inversé à l'aide de la commande par mode de glissement.

Nous avons d'abord modélisé le système, puis le linéariser par différentes méthodes de linéarisation approximative (Méthode du jacobien, méthode basée sur le nouvel algorithme de Hunt et la méthode basée sur la maximisation du degré relatif). Par la suite, nous avons exposé les divers résultats de simulation ainsi leurs interprétations.

On constate par cette étude, que la méthode par mode de glissement est une technique puissante pour la commande de ce type de système.

L'étude présentée a montrée que la linéarisation approximative effectuée par le jacobien est insuffisante pour la commande du pendule inversé pour un angle initial relativement élevé.

En revanche la méthode basée sur le nouvel algorithme de Hunt donnent des résultats satisfaisant, cette approche est très puissante grâce à son action rapide et aux calculs faciles.

Le travail abordé au cours de ce projet porte essentiellement sur la commande d'un système non linéaire.

La procédure la plus élémentaire pour synthétiser une commande pour un système non linéaire est d'obtenir un modèle linéaire de ce système autour d'un point d'équilibre en utilisant les jacobiniennes des fonctions non linéaires intervenant dans les équations décrivant le système. Cependant, en dépit de sa simplicité, cette procédure contraint le contrôleur à agir dans un domaine très restreint au voisinage du point d'équilibre. Ceci conduit à des performances en boucle fermée souvent médiocres.

Nous nous sommes intéressés particulièrement aux commandes linéarisantes par retour d'état. L'intérêt de ces stratégies réside dans le fait qu'une fois le système linéarisé, on peut lui imposer un comportement d'un système linéaire par injection de nouvelles commandes additionnelles. D'autre part, le bouclage linéarisant est déterminé à partir du modèle non linéaire exacte et ne nécessite pas une approximation numérique autour du point de fonctionnement. Parmi les commandes additionnelles, nous avons opté pour la commande en mode glissant dont les performances de robustesse ainsi la facilité de son implémentation sont largement prouvées théoriquement et aussi pratiquement dans de nombreuses applications.

Cependant, il n'est pas toujours aisé de concevoir des bouclages linéarisants. En effet, l'existence même de ces bouclages est assujettie à des conditions souvent non satisfaites par le système. Dans ce cas, on a recourt à des bouclages linéarisant de manière approximative.

Nous avons étudié, dans ce mémoire deux techniques de bouclage linéarisants approximatif. La première, dite de Krener-Hunt, est basée sur la détermination d'un changement de coordonnées approximatif. La seconde, proposée par Aguilar, utilise la notion du degré relatif maximal. Ces deux techniques ont été implémentées sous MATLAB. Afin de faire une étude comparative et de vérifier l'efficacité de ces techniques nous avons considéré, en guise d'application, la commande d'un pendule inversé. Le choix de cette application est guidé pour deux raisons. D'une part, le modèle non linéaire du pendule inversé répond bien à notre étude puisque les conditions de commandabilité et d'involativité ne sont pas satisfaites. L'utilisation des techniques de bouclage linéarisants approximatifs s'impose donc. D'autre part, un banc d'essai expérimental est disponible au sein du Laboratoire de Conception et de Conduite des Systèmes de Production (L2CSP) dans lequel s'est déroulé notre stage.

Sur cette application, les trois cas de stratégies de commande suivants ont été traités:

- commande par placement de pôles sur la base du modèle linéarisé numérique.
- commande par mode glissant sur la base du modèle linéarisé numérique.
- commande par mode glissant par la linéarisation approximée de Krener-Hunt.
- commande par mode glissant par la linéarisation approximée du degré relatif maximal.

A travers les résultats de simulation obtenus, nous avons tiré les remarques importantes suivantes:

- i) La commande par mode glissant est robuste par rapport à celle par placement de pôles. En effet, même si cette commande est calculée à partir d'un modèle linéarisé numérique autour d'un point d'équilibre, elle peut donner lieu à des résultats acceptables dans un domaine relativement large.

- ii) La technique de linéarisation approximée de Krener-Hunt est plus performante que celle du degré relatif maximal. De plus, l'ordre d'approximation peut être poussé pour avoir des résultats encore plus précis. L'inconvénient de cette méthode est la complexité des calculs.

Notre travail reste ouvert. De nombreuses perspectives peuvent être envisagées. A titre d'exemples, nous donnons:

- Implémentation réelle des techniques étudiées dans ce mémoire sur le banc d'expérimentation existant au laboratoire.
- Mise en œuvre d'un programme complet sous langage symbolique (Maple, Mathematica) de la méthode de Krener-Hunt.
- Application à d'autres exemples didactiques (machine électrique, double pendule inversé,...).
- Extension au cas discret et échantillonné.

Bibliographie

- [1] **J.J.E. Slotine et Li. Weiping:** "Applied Nonlinear Control", *Massachusetts Institute of Technology*, Prentice-Hall, USA, 1991.
- [2] **B. Jouvencel:** " Régulation du premier ordre", <http://www.lirmm.fr/~jouvence/cours/maitrise/coursNL3.pdf>.
- [3] **A.Maidi:** "Cours de modélisation et identification des procédés", 4^{ème} année Automatique, Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou, 2008/2009.
- [4] **P. Müllhaupt:** "Introduction à l'Analyse et à la Commande des Systèmes Non Linéaires", Lausanne, Juin 2007.
- [5] **S.Djenoune:** "Cours Systèmes non linéaires ", Master 2 en Automatique, Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou, 2010/2011.
- [6] **A.Isidori:** "Nonlinear Control systems" Springer-Verlag, Third Edition, 1989.
- [7] **F. Lamnabhi-Lagarrigue, P.Rouchon:** " Systèmes non linéaires". Lavoisier, Paris, Hermès Science Publications, 2002.
- [8] **C. Jutten:** " Systèmes asservis non linéaires " Cours de troisième année du département 3i Options Automatique, Université Joseph Fourier - Polytech' Grenoble, 2006.
- [9] **F.lamnabhi-Lagarrigue, P.Rouchon:** " Commandes non linéaires", Lavoisier, Paris, Hermès Science Publications, 2003.
- [10] **H.K.Khalil :** "Non linear system" Third Edition, Prentice Hall, 2002.
- [11] **J.P. Corriou:** "Commande des procédés", Lavoisier, technique&Documentation, 1996.
- [12] **H.Bühler:** "Réglage par mode de glissement", Presses Polytechniques Romandes, 1986.
- [13] **M. W. Naouar:** "Commande numérique à base de composants FPGA d'une machine synchrone", Thèse Doctorat, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis et l'Université de Cergy Pontoise, Tunis 2007.
- [14] **M.C. S. Alaoui:** "Commande et Observateur par Modes glissants d'un système de pompage et d'un bras manipulateur", Thèse Doctorat, Université Sidi Mohammed Ben Abdallah, Faculté des sciences Dhar El Mahrez FES, 2009.
- [15] **F. Lahouazi:** "Mise en oeuvre d'une stratégie de commande neuro floue: Application à un pendule inversé", Thèse de Magister, Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou, 2010.

Bibliographie

- [16] **N. Djeghali:** "Commande par mode glissant des systèmes non linéaires à entrée retardée, Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou, 2007.
- [17] **V.I. Utkin:** "Sliding modes and their application in variable structure systems", Edition MIR, Moscow, 1978.
- [18] **S.V. Emelyanov:** "Variable structure control systems", moscow, 1967.
- [19] **J.J.E. Slotine:** "Sliding controller design for nonlinear systems", Int. Jour. of Cont., 40(2): 421.434, 1984.
- [20] **K. Benmansour:** "Réalisation d'un banc d'essai de la commande et de l'observation des convertisseurs multicellulaires, Série: Approche Hybride", 2009.
- [21] **A.J.Krener:** "Approximate Linearization by state feedback and coordinate change", Systems&Control Letters 5, 181-185, North-Holland, 1984.
- [22] **L.R.Hunt et J.Turi:** "A New Algorithm for Constructing Approximate Transformations for Nonlinear Systems ", IEEE transactions on automatic control, vol. 38, no. 10, pp.1553-1556, October 1993.
- [23] **A.Banaszuk et J.Hauser:** "Least Squares Approximate Feedback Linearization: Avariational pproach", Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control San Antonio, Texas, pp. 2760-2765, December 1993.
- [24] **C.Aguilar:** " Approximate Feedback Linearization and Sliding Mode Control for the Single Inverted Pendulum ", Queen's University Mathematics and Engineering, August 2002.
- [25] **M. Latfaoui , B. Cherki:** " Linéarisation approximative par feedback pour un modèle de pendule inverse ", Laboratoire d' Automatique de Tlemcen Faculté des Sciences de l'Ingénieur - Université Abou Bekr Belkaïd BP230 - Tlemcen 13000,Algérie, 2006.
- [26] **S. Riachy :**"Contribution à l'estimation et à la commande de systèmes mécaniques sous-actionnés", Docteur de l'Ecole Centrale de Lille Discipline Automatique et Informatique Industrielle, 2008.
- [27] **D. Bensoussan:** "commande moderne; approche par modèles continus et discrets", presses internationales polytechniques, 2008.
- [28] **Emmanuel Trélat:** "Contrôle Optimal: Théorie et applications", Unniversité Paris-Sud, laboratoire AN-EDP, France.
- [29] **T. Sugie et K. Fujimoto:** "Control of Inverted Pendulum Systems based on Approximate Linearization: Design and Experiment", submission to the 33rd IEEE CDC.

Notion sur la géométrie différentielle :

1. Champ de vecteur :

Application de $\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

$f(x)$ est un champ de vecteurs ; on suppose que $f(x)$ est suffisamment différentiable.

2. La jacobienne :

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

3. Fonction scalaire de plusieurs variables :

$V(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow V(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}$$

4. Gradient de $V(x)$:

$$\nabla V(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]$$

5. Dérivée de Lie :

Considérant une fonction scalaire $h(x)$ de n variables x_1, \dots, x_n et un champ de vecteur $f(x)$, on définit la dérivée de Lie de $h(x)$ le long de $f(x)$ par :

$$L_f h(x) = \nabla h(x) f(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h}{\partial x_n} \end{array} \right] \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

6. Dérivées itérées de Lie :

$$\begin{cases} L_f^0 h(x) = h(x) \\ L_f^i h(x) = L_f \{L_f^{i-1} h(x)\}; i = 1, 2, \dots, \infty \end{cases}$$

7. crochet de Lie :

Le crochet de Lie entre deux champs de vecteurs f et g est définie par :

$$\begin{aligned} [f, g] &= \nabla_g f - \nabla_f g \\ &= \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g \end{aligned}$$

8. crochet de Lie itéré :

$$\begin{aligned} \text{Pour } i=1 : ad_f g &= [f, g] \\ i=2 : ad_f^2 g &= [f, [f, g]] \\ i=3 : ad_f^3 g &= [f, [f, [f, g]]] \end{aligned}$$

Notation:

$$\begin{aligned} ad_f^0 g &= g \\ ad_f^i g &= [f, ad_f^{i-1} g]; i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

9. Difféomorphisme :

Une fonction $\phi: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ est un difféomorphisme si $\nabla\phi(x)$ (la matrice jacobienne de $\phi(x)$) est non singulière ($\text{rang } \nabla\phi(x) = n$) en un point x_0 ; n représente l'ordre du système.

10. distribution :

Une distribution notée $\Delta(x)$ est un espace vectoriel engendré par des champs de vecteurs f_1, f_2, \dots, f_d , on écrit donc :

$$\Delta(x) = \text{span}[f_1 \ f_2 \ \dots \ f_d]$$

11. Méthode de RUNGE KUTTA :

L'algorithme de la méthode de RUNGE KUTTA se déroule comme suit :

- **Etape 1 :**

Posons $h = \frac{b-a}{N}$; $t_0 = a$; $t_f = b$

N : Entier positif.

- **Etape 2 :**

$$k_1 = h(t_i, y_i)$$

$$k_2 = h(t_i + h/2, y_i + k_1/2)$$

$$k_3 = h(t_i + h/2, y_i + k_2/2)$$

$$k_4 = h(t_{i+1}, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{i+1} = a + (i+1)h$$