

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE et POPULAIRE.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Filière : MATHÉMATIQUES
Option : Modélisation mathématique

Présenté par :
M^r MAHDI BRAHIM

Sujet :

Méthodes asymptotiques pour la modélisation des couches minces : Application aux cellules biologiques

Devant le jury d'examen composé de :

<i>M^r</i> Mohamed Morsli ;	Professeur ;	U.M.M.T.O ;	Président
<i>M^{me}</i> Leila Rahmani ;	Professeur ;	U.M.M.T.O ;	Rapporteur
<i>M^r</i> Ali Menguelti ;	M.A.A ;	U.M.M.T.O ;	Examineur

Soutenu le : 14/07/2015

~~~~~ <<< <<< <<< *Remerciements* >>> >>> >>> ~~~~~

*Je remercie Dieu le tout puissant d'avoir guidé mes pas vers les portes du savoir, et m'avoir donné suffisamment de santé et du courage pour mener mon travail à terme.*

*Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à M<sup>me</sup> L.RAHMANI pour l'honneur qu'elle m'a fait en assurant la direction et le suivi scientifique et technique du présent mémoire. Je la remercie pour sa grande contribution à l'aboutissement de ce travail, et pour sa disponibilité malgré ses nombreuses activités acceptant de diriger ce travail, ainsi que sa disponibilité et l'intérêt qu'elle lui a porté, malgré ses nombreuses préoccupations. Qu'elle trouve ici ma profonde gratitude.*

*Je remercie vivement M<sup>r</sup> M.Morsli professeur pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.*

*Mes remerciements chaleureux s'adressent également à M<sup>r</sup> A.Menguelti pour avoir accepté d'examiner ce travail.*

*On ne peut oublier de remercier tous les membres de nos familles pour leurs soutiens et leurs encouragements particulièrement nos parents.*

~~~~~ <<< <<< <<< *Dédicaces* >>> >>> >>> ~~~~~

Je dédie ce modeste travail à tous ceux qui me sont chers : Mes chers parents Ahcene et Ouiza à ceux que je dois tout .Mon frère Youcef, Ma soeur Djidji et son époux sans oublier leurs enfants Hanane et Yasmine. Ma soeur Kahina et son époux. Ma soeur Fazia et son époux. Ma soeur Noura. Ma femme Rima et sa famille. La famille Mahdi et Terkmani .À la mémoire de mes grands parents. Mes amis : Asmane, B.Asmane, Farid, Rahim, M'hand, Ramdane, Hocine de Draa elmi-zane .Toute la promotion de mathématiques 2015-2016



Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Table des matières | 1 |
| Introduction générale | 3 |
| 1 Équations de Maxwell et cellule biologique | 4 |
| 1.1 Les équations de Maxwell en régime harmonique | 4 |
| 1.1.1 L'équation vectorielle des ondes en régime harmonique | 5 |
| 1.1.2 L'équation de Helmholtz | 8 |
| 1.1.3 La formulation diélectrique | 9 |
| 1.2 La cellule biologique | 11 |
| 1.2.1 La membrane cellulaire | 11 |
| 1.2.2 La cellule biologique d'un point de vue électromagnétique | 12 |
| 2 Asymptotiques du champ dans une cellule circulaire | 13 |
| 2.1 Position du problème | 13 |
| 2.2 Changement d'échelle | 14 |
| 2.2.1 Choix des coordonnées | 16 |
| 2.3 La formulation diélectrique | 18 |
| 2.3.1 Expression explicite de V en série de Fourier | 18 |
| 2.3.2 Solution exacte dans toute la cellule | 20 |
| 2.4 Développement asymptotique du champ électrique | 26 |
| 2.4.1 Développement asymptotique dans la membrane : | 26 |
| 2.4.2 Développement asymptotique dans le cytoplasme : | 30 |
| 2.5 L'équation vectorielle des ondes avec une condition Neumann | 31 |
| 2.5.1 Résultat de régularité | 32 |
| 2.5.2 Séparation de variables | 34 |
| 2.5.3 Étude de \mathbf{E}_r et \mathbf{E}_θ | 39 |
| 2.5.4 Asymptotiques | 42 |

| | |
|--|-----------|
| Table des matières | 2 |
| 2.5.5 La comparaison avec la formulation diélectrique dans le cytoplasme | 48 |
| Bibliographie | 49 |

Introduction générale

Durant les vingt dernières années, plusieurs études ont été menées dans le but de comprendre et d'analyser les interactions entre les champs électromagnétiques et le corps humain. Qu'ils soient d'origine naturelle ou artificielle, ces champs sont omniprésents dans notre quotidien, surtout avec l'apparition des nouvelles technologies : la téléphonie mobile, les fours à micro-ondes, les appareils électroménagers et électroniques,.. autant de dispositifs qui constituent des sources de rayonnement électromagnétique et qui conditionnent notre environnement. Ainsi, l'exposition de l'homme aux champs électromagnétiques est un problème qui se pose aujourd'hui de manière cruciale.

Les champs électromagnétiques interagissent avec le corps humain et induisent des effets plus ou moins néfastes pour la santé. Cette interaction est aussi utilisée pour réaliser des diagnostics médicaux, par le biais de l'imagerie par résonance magnétique (IRM) ou plus généralement en imagerie médicale. Il est donc très important de pouvoir déterminer avec précision les interactions entre champs magnétiques et tissus biologiques et de modéliser la distribution de ces champs dans un organe du corps humain. Pour ce faire, l'une des approches consiste à étudier le problème à l'échelle microscopique (à l'échelle cellulaire) et de généraliser ensuite l'étude, via les méthodes de l'homogénéisation, à l'échelle macroscopique (i.e un organe donné ou tout le corps).

A l'échelle de la cellule, le calcul des champs électromagnétiques présente des difficultés lors de la simulation numérique. Ceci est dû en particulier à la structure de la cellule et surtout à la présence d'une fine membrane (la membrane plasmique) difficile à mailler à cause de sa faible épaisseur. L'étude effectuée dans ce mémoire et qui reprend les résultats obtenus par Clair Poignard[11], consiste à utiliser une approche asymptotique afin d'élaborer un modèle simple pour la cellule biologique qui permettra de contourner les difficultés numériques rencontrées.

Chapitre 1

Équations de Maxwell et cellule biologique

1.1 Les équations de Maxwell en régime harmonique

Les phénomènes de propagation d'ondes peuvent être décrits par plusieurs modèles selon la nature et le milieu dans lequel celle-ci se propagent. Parmi ces modèles, nous retrouvons :

- Les équations de l'acoustique pour la propagation des ondes sonores dans un fluide.
- Les équations de l'élastodynamique pour la propagation des ondes élastiques dans un solide.
- Les équations de Maxwell pour la modélisation des ondes électromagnétiques.

Nous nous intéressons dans cette partie aux équations de Maxwell qui régissent les phénomènes électromagnétiques dans un matériau. Nous notons ϵ, μ, σ respectivement les permittivité diélectrique, perméabilité magnétique et conductivité électrique de ce matériau. La permittivité diélectrique est une propriété physique qui décrit la réponse d'un milieu donné à un champ électrique appliqué. La perméabilité magnétique caractérise la faculté d'un matériau à modifier un champ magnétique. Finalement, la conductivité électrique d'un matériau traduit sa capacité à laisser circuler un courant électrique.

Les équations de Maxwell relient les champs de vecteurs E et H (appelés champs électriques et magnétiques) ainsi que les champs de vecteurs D et B (appelés inductions électriques et magnétiques) à la densité de courant J et à la densité de charge électrique ρ . Les champs obéissent aux équations suivantes (dites de Maxwell) qui regroupent diverses

lois comme la loi de Faraday, celle d'Ampère, celle de Gauss, établies chacune avant.

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.1a)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (1.1b) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.1c)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{D} = \rho \quad (1.1d)$$

La relation de conservation de la charge se déduit de la loi d'Ampère (1.1b) et de la loi de Gauss électrique (1.1d) :

$$\mathbf{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Afin de modéliser complètement les phénomènes électromagnétiques, les équations ci-dessus sont complétées par les lois de comportement :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.2a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.2b) \quad (1.2)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.2c)$$

On suppose que ϵ , μ et σ sont des quantités positives qui ne dépendent que de la variable d'espace et qu'elles sont indépendantes des champs électromagnétiques.

1.1.1 L'équation vectorielle des ondes en régime harmonique

En régime harmonique, nous supposons que les champs électrique et magnétique s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, t) &= \mathbf{E}(x)e^{i\omega t}, \\ \mathbf{H}(x, t) &= \mathbf{H}(x)e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

où ω est la pulsation à laquelle se déroule le phénomène étudié. Nous parlerons aussi bien de pulsation que de fréquence. Nous rappelons le lien entre ces

deux entités :

$$w = 2\pi f$$

Notons que l'unité du système international (S.I.) de la pulsation est le radian par seconde (rad/s) et celle de la fréquence le hertz (Hz).

En remplaçant (1.2b) dans (1.1a) on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{E}(x, t) + \frac{\partial(\mu \mathbf{H}(x, t))}{\partial t} &= 0, \\ \mathbf{rot} \mathbf{E}(x, t) &= -\frac{\partial(\mu \mathbf{H}(x, t))}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial(\mu H(x) e^{iwt})}{\partial t} \\ &= -i\mu w H(x) e^{iwt} \\ &= -i\mu w \mathbf{H}(x, t). \end{aligned}$$

Maintenant on remplace (1.2a) et (1.2c) dans (1.1b). Ceci donne

$$\mathbf{rot} \mathbf{H}(x, t) - \frac{\partial(\epsilon \mathbf{E}(x, t))}{\partial t} = \mathbf{J},$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{H}(x, t) &= \frac{\partial(\epsilon \mathbf{E}(x, t))}{\partial t} + \mathbf{J} \\ &= \frac{\partial(\epsilon E(x) e^{iwt})}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}(x, t) \\ &= i\epsilon w E(x) e^{iwt} + \sigma \mathbf{E}(x, t) \\ &= i\epsilon w \mathbf{E}(x, t) + \sigma \mathbf{E}(x, t) \\ &= (i\epsilon w + \sigma) \mathbf{E}(x, t) \\ &= iw \left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w} \right) \mathbf{E}(x, t). \end{aligned}$$

Ainsi, les équations de maxwell sont données par :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} = -i\mu w \mathbf{H}, & (1.4a) \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} = iw \left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w} \right) \mathbf{E}. & (1.4b) \end{cases} \quad (1.4)$$

Les équations vectorielles des ondes en régime harmonique pour \mathbf{E} et \mathbf{H} sont données par :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} \right) - w^2 \left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w} \right) \mathbf{E} = 0, & (1.5a) \\ \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w} \right)} \mathbf{rot} \mathbf{H} \right) - w^2 \mu \mathbf{H} = 0. & (1.5b) \end{cases} \quad (1.5)$$

Ces équations sont obtenues en transformant le système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1 (1.4) en un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2 de la manière suivante :

On a

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -i\mu w \mathbf{H} \implies \mathbf{H} = -\frac{1}{i\mu w} \mathbf{rot} \mathbf{E} = \frac{i}{\mu w} \mathbf{rot} \mathbf{E}$$

En remplaçant \mathbf{H} dans (1.4b), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \left(\frac{i}{\mu w} \mathbf{rot} \mathbf{E} \right) &= iw \left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w} \right) \mathbf{E} \implies \frac{i}{w} \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} \right) = iw \left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w} \right) \mathbf{E} \\ &\implies \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} \right) = w^2 \left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w} \right) \mathbf{E} \\ &\implies \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} \right) - w^2 \left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w} \right) \mathbf{E} = 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = iw \left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w} \right) \mathbf{E} \implies \mathbf{E} = \frac{1}{iw} \frac{1}{\left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w} \right)} \mathbf{rot} \mathbf{H}.$$

En remplaçant \mathbf{E} dans (1.4a), on obtient

$$\mathbf{rot} \left(\frac{1}{iw} \frac{1}{\left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w} \right)} \mathbf{rot} \mathbf{H} \right) = -i\mu w \mathbf{H} \implies \frac{1}{iw} \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w} \right)} \mathbf{rot} \mathbf{H} \right) = -i\mu w \mathbf{H},$$

donc

$$\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w}\right)} \mathbf{rot} \mathbf{H} \right) = \mu w^2 \mathbf{H}.$$

Ceci donne

$$\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w}\right)} \mathbf{rot} \mathbf{H} \right) - \mu w^2 \mathbf{H} = 0.$$

1.1.2 L'équation de Helmholtz

Dans la plupart des matériaux, les paramètres σ et ϵ sont constants par morceaux et $\left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w}\right)$ n'est jamais nul, ce qui implique que $\mathbf{div} \mathbf{E} = 0$ presque partout.

De même, si μ est constant par morceaux, $\mathbf{div} \mathbf{H} = 0$ presque partout. On peut alors transformer l'opérateur $\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \right)$ de l'équation (1.5a). En utilisant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta &= \mathbf{div} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{grad} \right) = \mathbf{grad} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{div} \right) - \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \right), \\ \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \right) &= \mathbf{grad} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{div} \right) - \mathbf{div} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{grad} \right), \end{aligned}$$

l'équation (1.5a) devient

$$\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} \right) - w^2 \left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w} \right) \mathbf{E} = \mathbf{grad} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{div} \mathbf{E} \right) - \mathbf{div} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{grad} \mathbf{E} \right) - w^2 \left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w} \right) \mathbf{E} = 0.$$

Comme

$$\mathbf{grad} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{div} \mathbf{E} \right) = 0,$$

alors

$$-\mathbf{div} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{grad} \mathbf{E} \right) - w^2 \left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w} \right) \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{div} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{grad} \mathbf{E} \right) + w^2 \left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w} \right) \mathbf{E} = 0.$$

De même pour (1.5b), on a :

$$\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w}\right)} \mathbf{rot} \mathbf{H} \right) - w^2 \mu \mathbf{H} = \mathbf{grad} \left(\frac{1}{\left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w}\right)} \mathbf{div} \mathbf{H} \right) - \mathbf{div} \left(\frac{1}{\left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w}\right)} \mathbf{grad} \mathbf{H} \right)$$

$$-w^2\mu\mathbf{H} = 0.$$

Comme

$$\mathbf{grad} \left(\frac{1}{\left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w}\right)} \mathbf{div} \mathbf{H} \right) = 0$$

alors

$$-\mathbf{div} \left(\frac{1}{\left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w}\right)} \mathbf{grad} \mathbf{H} \right) - w^2\mu\mathbf{H} = 0 \Rightarrow \mathbf{div} \left(\frac{1}{\left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w}\right)} \mathbf{grad} \mathbf{H} \right) + w^2\mu\mathbf{H} = 0.$$

Donc nous obtenons les équations de Helmholtz suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{grad} \mathbf{E} \right) + w^2 \left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w} \right) \mathbf{E} = 0, \quad (1.6a) \\ \mathbf{div} \left(\frac{1}{\left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w}\right)} \mathbf{grad} \mathbf{H} \right) + w^2\mu\mathbf{H} = 0. \quad (1.6b) \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Afin de déterminer complètement le champ \mathbf{E} , on associe à ces équations différentes conditions aux limites.

Les plus courantes et les plus simples sont les conditions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{E} = (C.L^1 \text{ imposée sur le bord du domaine}) & \text{Dirichlet} \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} = (C.L^1 \text{ imposée sur le bord du domaine}) & \text{Neumann} \end{array}$$

1.1.3 La formulation diélectrique

Dans cette formulation, aussi appelée approximation quasistatique, les variations temporelles de l'induction magnétique sont négligées dans l'équation (1.1a). Ainsi en négligeant le terme $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, cette équation devient :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = 0.$$

¹Condition aux Limites

Les équations de Maxwell en régime harmonique (1.4) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0, & (1.7a) \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} = iw \left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w} \right) \mathbf{E}. & (1.7b) \end{cases} \quad (1.7)$$

Comme $\mathbf{rot} \mathbf{E} = 0$, cela revient à supposer que \mathbf{E} dérive d'un potentiel V appelé potentiel scalaire :

$$\mathbf{E} = \mathbf{grad} V.$$

On a alors

$$\frac{1}{i} (\mathbf{rot} \mathbf{H}) = (w\epsilon - i\sigma) \mathbf{grad} V$$

En prenant la divergence de (1.7b), on obtient :

$$\mathbf{div} \left(\left(\frac{1}{i} \right) \mathbf{rot} \mathbf{H} \right) = \mathbf{div} (w\epsilon - i\sigma) \mathbf{grad} V,$$

ce qui entraîne

$$\mathbf{div} (\mathbf{rot} \mathbf{H}) = \mathbf{div} ((w\epsilon - i\sigma) \mathbf{grad} V).$$

or, la divergence du rotationnel d'un champ est toujours nulle, donc

$$\mathbf{div} (\mathbf{rot} \mathbf{H}) = 0,$$

ce qui permet d'obtenir l'EDP elliptique suivante pour V , appelée formulation diélectrique :

$$\mathbf{div} ((w\epsilon - i\sigma) \mathbf{grad} V) = 0. \quad (1.8)$$

Les conditions aux limites usuelles pour cette EDP sont des conditions de Neumann :

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} = (\text{C.L imposée sur le bord du domaine})$$

ou de Dirichlet

$$\mathbf{E} = (\text{C.L imposée sur le bord du domaine})$$

1.2 La cellule biologique

L'objectif de ce travail étant l'étude des champs électromagnétiques dans une cellule biologique, il nous paraît essentiel de décrire la cellule biologique et la structure moléculaire de la membrane plasmique. Nous présentons aussi le modèle électrique de la cellule qui sera utilisé par la suite.

1.2.1 La membrane cellulaire

La cellule biologique est l'unité structurelle et fonctionnelle de tous les êtres vivants. Elle est caractérisée par son noyau, son cytoplasme et sa membrane plasmique.

La membrane plasmique cellulaire joue un rôle primordial dans la vie de la cellule. Elle délimite la cellule et sépare le cytoplasme du milieu extérieur. Elle entoure le cytosol (i.e la phase liquide où baignent les organites cytoplasmiques) et forme une couche protectrice très fine constituée de molécules lipidiques et protéiniques. Elle présente ainsi une structure moléculaire hétérogène lui permettant de jouer un double rôle : Les phospholipides qui sont les constituants essentiels de sa matière de base, la rendent isolante, tandis que les molécules protéiniques qui sont éparpillées, assurent les échanges entre le cytoplasme et le milieu extracellulaire.

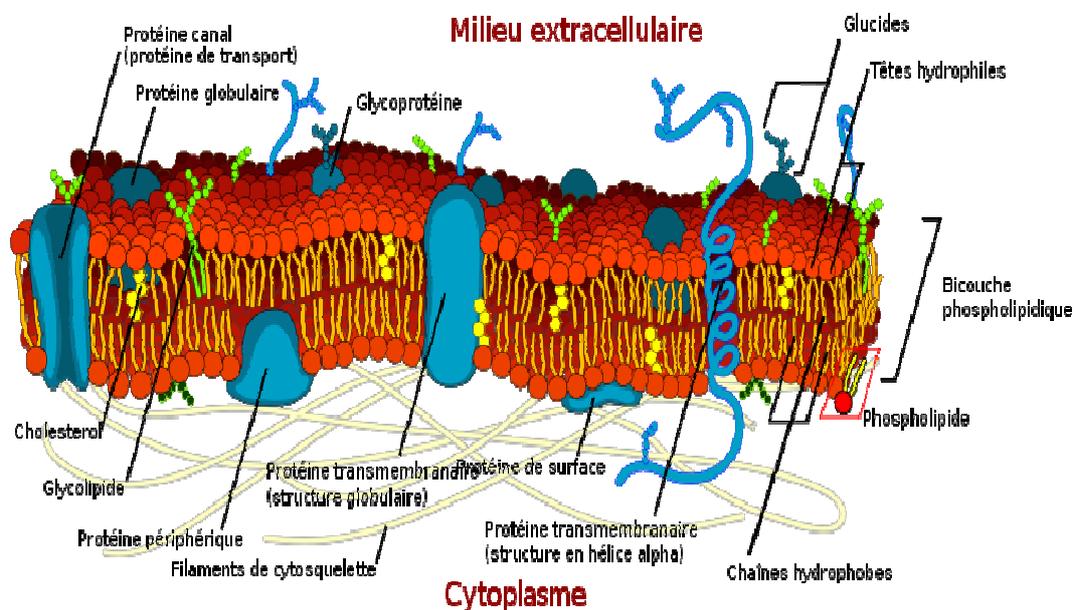


FIG. 1.1 – Schéma bidimensionnel d'une membrane plasmique

1.2.2 La cellule biologique d'un point de vue électromagnétique

À l'aide de mesures effectuées sur des organes, plusieurs chercheurs, principalement Fera et Stuchly ont pu élaborer un modèle électromagnétique simplifié de la cellule biologique. Dans ce modèle, la cellule biologique est considéré comme un matériau diélectrique composé de :

1. Un cytoplasme : sa taille varie de 1 à quelques micromètres, sa conductivité est de $1S/m$ et sa permittivités relative est de 80.
2. Une membrane plasmique : sa taille est de l'ordre de quelques nanomètre. sa conductivité varie de $10^{-7}S/m$ à $10^{-5}S/m$ et sa permittivité relative est de 11,3.

La perméabilité dans toute la cellule est égale à celle du vide μ_0 .

Les valeurs des perméabilités et permittivité de vide sont :

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}, \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$$

L'analyse de ce modèle est importante car elle constitue une première approche pour l'étude de la répartition des champs dans une cellule. Le choix de la bonne formulation (équation vectorielle des ondes, quasistatique ...) dépend des courants de déplacement dans la membrane et du fait qu'ils soient négligeables ou non devant les courants d'induction.

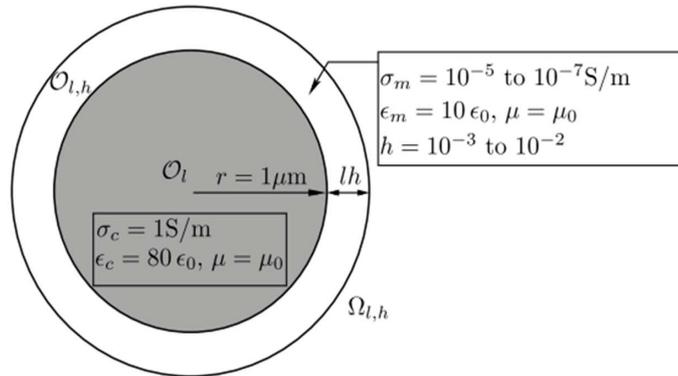


FIG. 1.2 – Paramètres de la cellule biologique

Chapitre 2

Asymptotiques du champ dans une cellule circulaire

2.1 Position du problème

Nous étudions dans ce chapitre le comportement du champ électrique, en régime harmonique, dans un domaine circulaire hétérogène $\Omega_{l,h}$ composé d'un milieu intérieur O_l ¹ et d'une couche mince $O_{l,h}$ d'épaisseur constante lh , h étant un paramètre positif destiné à tendre vers 0.

Le domaine $\Omega_{l,h}$ correspond à une cellule biologique : O_l étant le domaine occupé par le cytoplasme et $O_{l,h}$ représente la membrane plasmique.

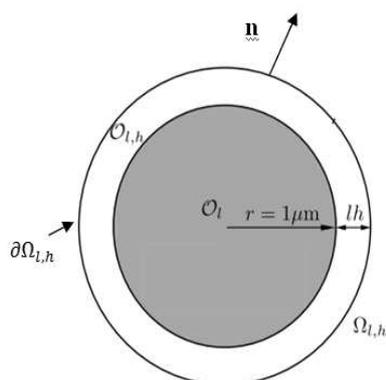


FIG. 2.1 – La cellule biologique

¹ l étant une longueur caractéristique de O_l

Nous définissons la conductivité et la permittivité de la cellule comme suit :

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_c & \text{si } x \in \mathcal{O}_l \\ \sigma_m & \text{si } x \in \mathcal{O}_{l,h} \end{cases}$$

$$\epsilon(x) = \begin{cases} \epsilon_c & \text{si } x \in \mathcal{O}_l \\ \epsilon_m & \text{si } x \in \mathcal{O}_{l,h} \end{cases}$$

On désigne par f une fonction définie sur le bord de $\partial\Omega_{l,h}$ de la cellule.

L'équation vectorielle des ondes qui résulte des équations de Maxwell s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} \right) - w^2 \epsilon \mathbf{E} + iw \sigma \mathbf{E} = 0 & \text{sur } \Omega_{l,h} & (2.1a) \\ \mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} = f & \text{sur } \partial\Omega_{l,h} & (2.1b) \end{cases} \quad (2.1)$$

où n désigne la vecteur normal unitaire extérieur à $\partial\Omega_{l,h}$.

2.2 Changement d'échelle

Dans ce paragraphe, nous allons faire un changement d'échelle dans le domaine de la cellule. Rappelons que les dimensions physiques respectives de conductivité, permittivité électrique absolue, perméabilité magnétique absolue, potentiel électrique et champ électrique sont les suivantes :

| | |
|--|--------------------------|
| Conductivité électrique σ : | $m^{-3} kg^{-1} s^3 A^2$ |
| Permittivité électrique absolue ϵ : | $m^{-3} kg^{-1} s^4 A^2$ |
| Perméabilité magnétique absolue μ : | $m kg s^{-2} A^{-2}$ |
| Champ électrique E : | $m kg s^{-3} A^{-1}$ |
| Potentiel électrique V : | $m^2 kg s^{-3} A^{-1}$ |

Nous effectuons un changement d'échelle dans le domaine spatial occupé par la cellule de la façon suivante :

$$\begin{cases} \Omega_h = \frac{\Omega_{l,h}}{l} \\ \mathcal{O} = \frac{\mathcal{O}_l}{l} \\ \mathcal{O}_h = \frac{\mathcal{O}_{l,h}}{l} \end{cases}$$

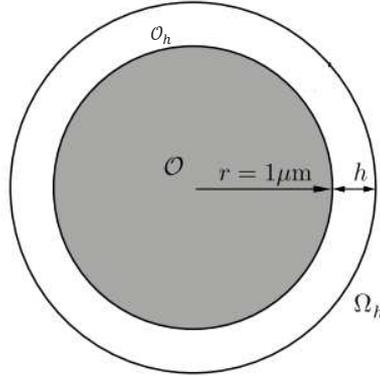


FIG. 2.2 – La cellule biologique après le changement d'échelle

Par conséquent Ω_h est le disque de centre 0 et de rayon $1 + h$, \mathcal{O} est le disque unité et \mathcal{O}_h est l'anneau défini par $\Omega_h \setminus \mathcal{O}$ (car $\Omega_h = \mathcal{O} \cup \mathcal{O}_h$).

On note x un élément de Ω_h et \mathbf{x} un élément de $\Omega_{l,h}$. L'égalité $\mathbf{x} = lx$ donne x en fonction de \mathbf{x} . Soit V_0 un potentiel choisi. On pose :

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{l}{V_0} \mathbf{E}(\mathbf{x}), \\ f(x) &= \frac{l^2}{V_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

La conductivité de la cellule est une fonction donnée par :

$$\sigma_h(x) = \begin{cases} \sigma_c & \text{si } x \in \mathcal{O}. \\ \sigma_m & \text{si } x \in \mathcal{O}_h. \end{cases}$$

La permittivité est donnée par :

$$\epsilon_h(x) = \begin{cases} \epsilon_c & \text{si } x \in \mathcal{O}. \\ \epsilon_m & \text{si } x \in \mathcal{O}_h. \end{cases}$$

La perméabilité est donnée par :

$$\mu_h(x) = \begin{cases} \mu_c & \text{si } x \in \mathcal{O}. \\ \mu_m & \text{si } x \in \mathcal{O}_h. \end{cases}$$

En remplaçant (2.2) dans (2.1), on obtient

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu_h} \mathbf{rot} \mathbf{E} \right) - l^2 w^2 \epsilon_h \mathbf{E} + i l^2 w \sigma_h \mathbf{E} = 0 & \text{sur } \Omega_h & (2.3a) \\ \mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} = f & \text{sur } \partial\Omega_h & (2.3b) \end{cases} \quad (2.3)$$

À partir de maintenant, nous considérons le problème (2.3). L'adimensionalisation de la permittivité, conductivité et la permittivité complexe donne des fonctions définies sur la cellule mise à l'échelle Ω_h par :

$$\begin{cases} \alpha_h = l^2 w^2 \epsilon_h, \\ \beta_h = l^2 w \sigma_h, \\ q_h = \alpha_h - i \beta_h, \\ z_h = \mu_h q_h. \end{cases} \quad (2.4)$$

Nous récrivons le problème (2.3) :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu_h} \mathbf{rot} \mathbf{E} \right) - q_h \mathbf{E} = 0 & \text{sur } \Omega_h, & (2.5a) \\ \mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} = f. & \text{sur } \partial\Omega_h & (2.5b) \end{cases} \quad (2.5)$$

Notation. Dans toute la suite de ce travail, la lettre μ désignera la perméabilité relative, q la permittivité complexe adimensionnée :

$$q = w^2 l^2 \left(\epsilon - \frac{i\sigma}{w} \right)$$

et z représentera le produit μq . Nous utiliserons les indices c et m pour désigner les valeurs des quantités précédentes prises respectivement dans le cytoplasme et la membrane.

2.2.1 Choix des coordonnées

Dans cette étude, nous avons émis l'hypothèse que la cellule est circulaire. Avec ce choix, le domaine sur lequel les équations sont posées est un disque : ceci permet de séparer les variables et d'utiliser l'analyse de Fourier.

Nous allons utiliser les coordonnées polaires. Les vecteurs de la base polaire $(e_\theta, e_{\theta+\frac{\pi}{2}})$ de \mathbb{R}^2 sont donnés en coordonnées euclidiennes par :

$$e_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad e_{\theta+\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Le champ électrique est décomposé alors comme suit :

$$\mathbf{E} = \mathbb{E}_r e_\theta + \mathbb{E}_\theta e_{\theta+\frac{\pi}{2}}.$$

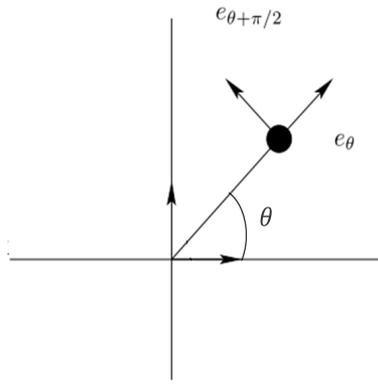


FIG. 2.3 – Les coordonnées polaires.

On a

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_1 \\ \mathbb{E}_2 \end{pmatrix} = \mathbb{E}_r \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \mathbb{E}_\theta \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

Ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{E} &= \cos \theta \frac{\partial \mathbb{E}_r}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \mathbb{E}_\theta}{\partial r} \cos^2 \theta - \frac{\sin \theta}{r} \left(\frac{\partial \mathbb{E}_r}{\partial \theta} \sin \theta + \cos \theta \mathbb{E}_r - \mathbb{E}_\theta \sin \theta + \frac{\partial \mathbb{E}_\theta}{\partial \theta} \cos \theta \right) \\ &\quad - \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \mathbb{E}_r}{\partial r} + \frac{\partial \mathbb{E}_r}{\partial \theta} \sin^2 \theta - \frac{\cos \theta}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial \mathbb{E}_r}{\partial \theta} - \sin \theta \mathbb{E}_r - \frac{\partial \mathbb{E}_\theta}{\partial \theta} \theta - \cos \theta \frac{\partial \mathbb{E}_r}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbb{E}_r}{\partial \theta} \mathbb{E}_\theta \right) \\ &= \frac{\partial \mathbb{E}_\theta}{\partial r} - \frac{\partial \mathbb{E}_r}{\partial \theta} \frac{1}{r} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \mathbb{E}_r \left(\frac{-\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \right) + \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\sin^2 \theta}{r} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \right). \end{aligned}$$

On a alors :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbb{E}_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbb{E}_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \mathbb{E}_\theta.$$

Pour simplifier le calcul, nous écrivons \mathbf{E} sous la forme :

$$\mathbf{E} = \mathbb{E}_r e_\theta + \frac{1}{r} \mathbb{E}_\theta e_{\theta+\frac{\pi}{2}},$$

i.e, on a posé

$$\mathbb{E}_\theta = \frac{1}{r} \mathbf{E}_\theta.$$

Enfin, si nous supposons que le champ \mathbf{E} dérive d'un potentiel scalaire V , c'est à dire, si $\mathbf{E} = \mathbf{grad}V$, nous avons la relation simple :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_r &= \frac{\partial V}{\partial r}, \\ \mathbb{E}_\theta &= \frac{\partial V}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

2.3 La formulation diélectrique

Soit $h \in [0, 1]$ et soient q_c et q_m deux complexes. Soit q_h la fonction constante par morceaux, définie par :

$$q_h = \begin{cases} q_c, & \text{dans } \mathcal{O}. \\ q_m, & \text{dans } \mathcal{O}_h \end{cases}$$

Soit ϕ dans $\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_h)$ vérifiant la condition de compatibilité :

$$\int_{\partial\Omega_h} \phi(\theta) d\theta = 0.$$

Nous notons $V \in \mathbb{H}^1(\Omega_h)$ la solution du problème de Neumann suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{div}(q_h \mathbf{grad}V) = 0 & \text{sur } \Omega_h & (2.6a) \\ \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\phi}{1+h} & \text{sur } \partial\Omega_h & (2.6b) \end{cases} \quad (2.6)$$

avec la condition imposée sur le bord $\partial\Omega_h$ suivante :

$$\int_{\partial\mathcal{O}} V d\sigma = 0 \quad (2.6c)$$

2.3.1 Expression explicite de V en série de Fourier

L'utilisation des coordonnées polaires va nous permettre de développer en série de Fourier le potentiel électrique V . Par la suite, nous dérivons l'expression du gradient de V en fonction de la donnée ϕ . Désignons par \mathbb{T} le tore :

$$\mathbb{T} = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}.$$

Le domaine Ω_h est paramétré par :

$$\Omega_h = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad , (r, \theta) \in [0, 1 + h] \times \mathbb{T}\}$$

et la frontière $\partial\Omega_h$ est isomorphe au tore \mathbb{T} . Le problème (2.6) peut être réécrit comme suit :

$$\forall (r, \theta) \in [0, 1 + h] \times \mathbb{T}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(q_h r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{q_h}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0, \quad (2.7a)$$

(2.7)

$$\left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) \Big|_{r=1+h} = \phi, \quad (2.7b)$$

avec les conditions de transmission sur $\partial\mathcal{O}$:

$$V(1^-, \theta) = V(1^+, \theta), \quad (2.7c)$$

$$q_c \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=1^-} = q_m \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=1^+}. \quad (2.7d)$$

La condition (2.6c) sur le bord du cytoplasme s'écrit :

$$\int_0^{2\pi} V(r, \theta) d\theta = 0.$$

Notation. Le k ème coefficient de Fourier d'une fonction

$$g \longrightarrow g(r, \theta)$$

supposée être 2π -périodique par rapport à θ , est défini par :

$$\widehat{g}_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r, \theta) e^{-ik\theta} d\theta.$$

Une fonction g appartient à $\mathbb{L}^2(\Omega_h)$ si et seulement si

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{1+h} |g(r, \theta)|^2 r dr d\theta < \infty,$$

et g appartient à $\mathbb{H}^1(\Omega_h)$ si et seulement si g est dans $\mathbb{L}^2(\Omega_h)$ et les deux intégrales suivantes sont finies :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{1+h} |\partial_r g(r, \theta)|^2 r dr d\theta < \infty,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{1+h} |\partial_\theta g(r, \theta)|^2 dr d\theta < \infty.$$

Remarque 2.1. la condition $\int_{\partial\Omega_h} \phi(\theta) d\theta = 0$ imposée sur la frontière $\partial\Omega_h$ entraîne $\widehat{\phi}_0 = 0$. En effet, les coefficients de Fourier de ϕ sont donnés par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{\phi}_k = \frac{1}{2\pi} \int_1^{2\pi} \phi(\theta) e^{-ik\theta} d\theta,$$

donc pour $k = 0$, on obtient $\widehat{\phi}_0 = 0$.

2.3.2 Solution exacte dans toute la cellule

La proposition suivante nous donne l'expression exacte du potentiel électrostatique V dans une cellule biologique.

Proposition 2.1. Soit $h \in [0, 1]$ et $q_m, q_c \in \mathbb{C}^*$

- Si $\frac{q_m}{q_c} \notin]-\infty, -1]$ alors $V \in \mathbb{H}^1(\Omega_h)$. De plus pour $\phi \in \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{T})$, la solution V du problème (2.7) est donnée explicitement par son développement en série de Fourier :

1. $\forall (r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}$, i.e dans le **cytoplasme** :

$$V(r, \theta) = \frac{2q_m}{q_c} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left(\frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \right) \left(\frac{r^{|k|}}{(1+h)^{|k|} \mathcal{D}_k} \right) e^{(ik\theta)},$$

2. $\forall (r, \theta) \in [1, 1+h] \times \mathbb{T}$, i.e dans la **membrane** :

$$\begin{aligned} V(r, \theta) &= \left(1 + \frac{q_m}{q_c} \right) \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left(\frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \right) \left(\frac{r^{|k|}}{(1+h)^{|k|} \mathcal{D}_k} \right) e^{(ik\theta)} \\ &\quad - \left(1 - \frac{q_m}{q_c} \right) \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left(\frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \right) \left(\frac{r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|} \mathcal{D}_k} \right) e^{(ik\theta)}, \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left(\frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \right) \left(\frac{r^{|k|} - r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|} \mathcal{D}_k} \right) e^{(ik\theta)} \\ &\quad + \frac{q_m}{q_c} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left(\frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \right) \left(\frac{r^{|k|} + r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|} \mathcal{D}_k} \right) e^{(ik\theta)}, \end{aligned}$$

où les quantités \mathcal{D}_k sont données pour $k \in \mathbb{Z}^*$ par :

$$\mathcal{D}_k = 1 + (1+h)^{-2|k|} + \frac{q_m}{q_c} (1 - (1+h)^{-2|k|}), \quad (2.8)$$

Remarque 2.2. 1. Si $\frac{q_m}{q_c} \in]-\infty, -1]$ le problème satisfait par V est mal posé.

2. D'après l'hypothèse 1 de la proposition 2.1, il existe une constante \mathcal{C} , qui ne dépend que de q_c et q_m tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, pour tout $h \in [0, 1]$,

$$|\mathcal{D}_k| \geq \mathcal{C} > 0, \quad (2.9)$$

Preuve. Nous désignons par \widehat{V}_k le k ième coefficient de Fourier du potentiel dans la cellule entière. Nous notons \widehat{V}_k^c le k ième coefficient de Fourier du potentiel V dans le domaine $[0, 1] \times \mathbb{T}$ correspondant au cytoplasme, et \widehat{V}_k^m le k ième coefficient de Fourier dans le domaine $[1, 1+h] \times \mathbb{T}$ correspondant à la membrane.

On a d'après l'équation (2.7) :

$$q_h r^2 \frac{d^2 V}{dr^2} + q_h r \frac{dV}{dr} + q_h \frac{d^2 V}{d\theta^2} = 0,$$

donc

$$r^2 \frac{d^2 V}{dr^2} + r \frac{dV}{dr} + \frac{d^2 V}{d\theta^2} = 0.$$

Nous effectuons la transformée de Fourier en la variable θ dans cette équation. Nous obtenons :

$$r^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d^2 V(r, \theta)}{dr^2} e^{-ik\theta} d\theta + r \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dV(r, \theta)}{dr} e^{-ik\theta} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d^2 V(r, \theta)}{d\theta^2} e^{-ik\theta} d\theta = 0,$$

donc

$$r^2 \frac{d^2 \widehat{V}_k}{dr^2} + r \frac{d\widehat{V}_k}{dr} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d^2 V(r, \theta)}{d\theta^2} e^{-ik\theta} d\theta = 0.$$

En intégrant par partie le terme suivant :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d^2 V(r, \theta)}{d\theta^2} e^{-ik\theta} d\theta,$$

on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d^2 V(r, \theta)}{d\theta^2} e^{-ik\theta} d\theta = \left(\frac{dV(r, 2\pi)}{d\theta} - \frac{dV(r, 0)}{d\theta} \right) + ik(V(r, 2\pi) - V(r, 0)) - k^2 \int_0^{2\pi} V(r, \theta) e^{-ik\theta} d\theta,$$

ce qui implique

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d^2 V(r, \theta)}{d\theta^2} e^{-ik\theta} d\theta = -k^2 \widehat{V}_k.$$

Donc

$$r^2 \frac{d^2 \widehat{V}_k}{dr^2} + r \frac{d\widehat{V}_k}{dr} - k^2 \widehat{V}_k = 0.$$

Nous avons pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $r \in [0, 1]$,

$$r^2 \frac{d^2 \widehat{V}_k^c}{dr^2} + r \frac{d \widehat{V}_k^c}{dr} - k^2 \widehat{V}_k^c = 0, \quad (2.10)$$

Et pour tout $r \in [1, 1+h]$

$$r^2 \frac{d^2 \widehat{V}_k^m}{dr^2} + r \frac{d \widehat{V}_k^m}{dr} - k^2 \widehat{V}_k^m = 0, \quad (2.11)$$

avec les conditions de transmission :

$$\widehat{V}_k^c \Big|_{r=1^-} = \widehat{V}_k^m \Big|_{r=1^+}, \quad (2.12)$$

$$q_c \frac{d \widehat{V}_k^c}{dr} \Big|_{r=1^-} = q_m \frac{d \widehat{V}_k^c}{dr} \Big|_{r=1^+}, \quad (2.13)$$

et la condition aux limites :

$$\frac{d \widehat{V}_k^c}{dr} \Big|_{r=1+h} = \frac{\widehat{\phi}_k}{1+h}. \quad (2.14)$$

Comme nous avons aussi la condition :

$$\widehat{V}_0^c(1) = 0, \quad (2.15)$$

nous obtenons :

$$\widehat{V}_0^c = 0, \quad \widehat{V}_0^m = 0.$$

Pour $k \neq 0$, une base de solutions de l'équation différentielle ordinaire du second ordre $r^2 u'' + ru' - k^2 u = 0$ est $r^{|k|}, r^{-|k|}$.

En effet, pour cette équation, nous cherchons la solution sous la forme :

$$u = r^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z}.$$

On aura donc :

$$r^2(\alpha(\alpha-1))r^{\alpha-2} + r(\alpha r^{\alpha-1}) - k^2(r^\alpha) = 0,$$

ce qui entraîne

$$(\alpha^2 - k^2)r^2 = 0.$$

Par suite, nous obtenons l'équation :

$$\alpha^2 - k^2 = 0,$$

qui implique $\alpha = \pm|k|$.

Donc obtient donc deux solutions indépendantes :

$$u = r^{|k|} \quad \text{et} \quad u = r^{-|k|}$$

Ainsi, les entités \widehat{V}_k^m et \widehat{V}_k^c sont nécessairement de la forme :

$$\widehat{V}_k^c = A_k^c r^{|k|},$$

$$\widehat{V}_k^m = A_k^m r^{|k|} + B_k^m r^{-|k|}.$$

où A_k^c, A_k^m et B_k^m sont des constantes, qui seront déterminées par les conditions de transmission (2.12), (2.13) et la condition aux limites (2.14). Plus précisément, nous avons :

$$A_k^c = A_k^m + B_k^m, \quad (2.16a)$$

$$q_c A_k^c = q_m (A_k^m - B_k^m), \quad (2.16b) \quad (2.16)$$

$$A_k^m (1+h)^{|k|} - B_k^m (1+h)^{-|k|} = \frac{\widehat{\phi}}{|k|}. \quad (2.16c)$$

Nous désignons par $b_k = (1+h)^{-2|k|}$ et nous écrivons :

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ q_c & -q_m & q_m \\ 0 & 1 & -b_k \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

$$A_k = \begin{pmatrix} A_k^c \\ A_k^m \\ B_k^m \end{pmatrix},$$

$$\Phi_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \widehat{\phi}_k \\ |k|(1+h)^{|k|} \end{pmatrix}.$$

Le système (2.16) peut être écrit comme suit :

$$M_k A_k = \Phi_k.$$

Soit $\mathbf{det}(M_k)$ le déterminant de la matrice M_k . Nous avons :

$$\mathbf{det}(M_k) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ q_c & -q_m & q_m \\ 0 & 1 & -b_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -q_m & q_m \\ 1 & -b_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_c & q_m \\ 0 & -b_k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} q_c & -q_m \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= -(q_m(b_k - 1) + q_c(b_k + 1)) \\
 &= -q_c \mathcal{D}_k \quad ,
 \end{aligned}$$

où \mathcal{D}_k est donné par (2.8). Ainsi, d'après (2.9) **det** $M_k \neq 0$, donc la matrice M_k est inversible et :

$$M_k^{-1} = \frac{-1}{q_c \mathcal{D}_k} \begin{pmatrix} q_m(b_k - 1) & -b_k - 1 & -2q_m \\ q_c b_k & -b_k & -q_m - q_c \\ q_c & -1 & -q_m + q_c \end{pmatrix}$$

Nous obtenons l'expression de A_k :

$$A_k = M_k^{-1} \Phi_k = \begin{pmatrix} \frac{2q_m}{q_c} \\ 1 + \frac{q_m}{q_c} \\ 1 - \frac{q_m}{q_c} \end{pmatrix} \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|(1+h)^{|k|} \mathcal{D}_k}$$

De ce fait, on a :

$$\widehat{V}_k^c = \frac{2q_m}{q_c} \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \frac{r^{|k|}}{(1+h)^{|k|} \mathcal{D}_k} .$$

$$\widehat{V}_k^m = \left(1 + \frac{q_m}{q_c}\right) \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \frac{r^{|k|}}{(1+h)^{|k|} \mathcal{D}_k} - \left(1 - \frac{q_m}{q_c}\right) \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \frac{r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|} \mathcal{D}_k} .$$

Ainsi, nous avons le développement en série de Fourier pour V :

- $\forall (r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}$,

$$V(r, \theta) = \frac{2q_m}{q_c} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left(\frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \right) \left(\frac{r^{|k|}}{(1+h)^{|k|} \mathcal{D}_k} \right) e^{(ik\theta)} ,$$

- $\forall (r, \theta) \in [1, 1+h] \times \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned}
 V(r, \theta) &= \left(1 + \frac{q_m}{q_c}\right) \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left(\frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \right) \left(\frac{r^{|k|}}{(1+h)^{|k|} \mathcal{D}_k} \right) e^{(ik\theta)} \\
 &\quad - \left(1 - \frac{q_m}{q_c}\right) \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left(\frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \right) \left(\frac{r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|} \mathcal{D}_k} \right) e^{(ik\theta)} .
 \end{aligned}$$

Maintenant, nous allons prouver le résultat de régularité. Selon (2.9), nous avons

$$\forall k \in \mathbb{Z}, r \in [0, 1+h], \left| \frac{r^{|k|}}{(1+h)^{|k|} \mathcal{D}_k} \right| \leq \frac{1}{\mathcal{C}}$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}^*$, nous avons :

$$\int_0^{1+h} \left| \frac{\widehat{\phi}_k r^{|k|}}{k(1+h)^{|k|} \mathcal{D}_k} \right|^2 r dr = \frac{|\widehat{\phi}_k|^2 (1+h)^{2|k|+2}}{(2|k|+2)k^2(1+h)^{|k|} \mathcal{D}_k} \leq \frac{1}{2\mathcal{C}} \frac{|\widehat{\phi}_k|^2}{|k|^3}.$$

Donc si $\phi \in \mathbb{H}^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega_h)$, nous avons :

$$\int_0^{1+h} \left| \frac{\widehat{\phi}_k r^{|k|}}{k(1+h)^{|k|} \mathcal{D}_k} \right|^2 r dr \in L^2(\mathbb{Z}).$$

Pour continuer, nous devons utiliser ce théorème :

Théorème. ² Soit f une fonction 2π -périodique continue par morceaux. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2$ converge et on a

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Ainsi, par l'égalité de Parseval, si $\phi \in \mathbb{H}^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega_h)$, $V \in L^2(\Omega_h)$.

De plus, si ϕ est dans $\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_h)$, de la même façon, nous montrons que :

$$\int_0^{1+h} \left| \frac{\widehat{\phi}_k r^{|k|}}{(1+h)^{|k|} \mathcal{D}_k} \right|^2 r dr \in L^2(\mathbb{Z}),$$

ce qui prouve, (par l'égalité de Parseval) que les deux intégrales

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{1+h} |\partial_r V(r, \theta)|^2 r dr d\theta < \infty,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{1+h} |\partial_\theta V(r, \theta)|^2 r dr d\theta < \infty.$$

sont finies, et donc le résultat de la régularité est démontré. □

Remarque 2.3. Dans l'expression de V dans la membrane, le terme $\left(\frac{r^{|k|} - r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|}} \right)$ est de l'ordre de $O(h)$. En effet, en posant

$$f(r) = \left(\frac{r^{|k|} - r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|}} \right),$$

²Théorème égalité de Parseval

la formule de Taylor donne :

$$f(r) = \frac{2h|k|}{(1+h)^{|k|}} + h^2 \times \int_0^1 (1-t)f''(th)dt$$

De même en posant

$$g(r) = \left(\frac{r^{|k|} + r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|}} \right)$$

le terme $\left(\frac{r^{|k|} + r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|}} \right)$ est de l'ordre de $O(1)$. D'après la formule de Taylor, on obtient :
donc

$$g(r) = \frac{2}{(1+h)^{|k|}} + h^2 \times \int_0^1 (1-t)g''(th)dt.$$

Il est aisé de voir que dans le cytoplasme, le potentiel V est de l'ordre de $\frac{q_m}{q_c}$ alors que dans la membrane, il est de l'ordre de $h + \frac{q_m}{q_c}$. Ainsi, pour des valeurs de $\frac{q_m}{q_c}$ petites devant h , le potentiel se concentre sur la membrane.

De cette expression analytique, nous allons extraire les deux premiers termes du développement asymptotique du champ statique $\mathbf{grad}V$ par rapport à h . Dans la membrane, nous obtenons une expression explicite de $\mathbf{grad}V$ en fonction de la donnée de Neumann ϕ et dans le cytoplasme, le potentiel électrostatique approché est la solution d'une formulation diélectrique avec une condition aux limites particulière, exprimée en fonction de ϕ et des paramètres diélectriques de la membrane.

2.4 Développement asymptotique du champ électrique

Nous allons maintenant écrire un développement asymptotique, par rapport au petit paramètre h , du champ électrique E . Plus précisément, nous allons déterminer les deux premiers termes de ce développement.

Rappelons la définition de la transformée de Hilbert des fonctions 2π -périodiques voir [9] :

$$\mathcal{H}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sgn}(k) \widehat{f}_k e^{ik\theta}.$$

Comme $E = \mathbf{grad}V$, il suffit d'écrire le développement asymptotique de $\partial_r V$ et $\partial_\theta V$.

2.4.1 Développement asymptotique dans la membrane :

La proposition suivante nous permet d'obtenir les deux premiers termes des asymptotiques du champ statique dans la membrane .

Proposition 2.2. Soit $\phi \in \mathbb{H}^3(\mathbb{T})$ vérifiant la condition de la compatibilité $\int_{\mathbb{T}} \phi(\theta) d\theta = 0$ et soit $(q_c, q_m) \in (\mathbb{C}^*)^2$ satisfaisant la condition (1) de la Proposition 2.1 et $h \in [0, 1]$. Nous notons par V la solution du problème (2.7).

Nous définissons les deux fonctions suivantes $\mathcal{L}_1(\phi)$ et $\mathcal{L}_2(\phi)$ sur $[1, 1+h] \times \mathbb{T}$ par :

$$\forall r \in [1, 1+h],$$

$$\mathcal{L}_1(\phi)(r, \cdot) = \phi - i \frac{q_m}{q_c} (r-1-h) \mathcal{H} \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right),$$

$$\mathcal{L}_2(\phi)(r, \cdot) = \frac{q_m}{q_c} i \mathcal{H}(\phi) + \left(r-1-h \frac{q_m^2}{q_c^2} \right) \frac{d\phi}{d\theta}.$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $r \in [1, 1+h]$

$$|r \partial_r V(r, \cdot) - \mathcal{L}_1(\phi)(r, \cdot)| \leq Ch^2 \left(1 + \left| \frac{q_m}{q_c} \right| \right)^2 \|\phi\|_{\mathbb{H}^3(\mathbb{T})} \quad (2.18a)$$

$$|\partial_\theta V(r, \cdot) - \mathcal{L}_2(\phi)(r, \cdot)| \leq Ch^2 \left(1 + \left| \frac{q_m}{q_c} \right| \right)^2 \|\phi\|_{\mathbb{H}^3(\mathbb{T})} \quad (2.18b)$$

Cette proposition nous donne une expression explicite, en fonction de la donnée au bord, du champ électrique approché à $O(h^2)$ près.

Dans la suite, nous utilisons la notation O de Landau. La notation $O(\|g\|)$ dénote une quantité γ tel que $|\gamma| \leq C\|g\|$ pour quelques constantes $C > 0$.

Preuve. Nous allons étudier le comportement asymptotique des coefficients de Fourier de $r \partial_r V$ et $\partial_\theta V$ quand h tend vers zéro. Le développement en série de Fourier (1) de la proposition 2.1 de V dans la membrane, pour tout $r \in [1, 1+h]$ implique, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$:

$$r \frac{d\widehat{V}_k}{dr}(r) = \left(\frac{r^{|k|} + r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|}} + \frac{q_m}{q_c} \frac{r^{|k|} - r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|}} \right) \frac{\widehat{\phi}_k}{\mathcal{D}_k}.$$

Notons par f et g les fonctions définies sur $[0, h]$ par :

$$f(s) = \frac{(1+s)^{|k|} + (1+s)^{-|k|}}{(1+h)^{|k|}},$$

$$g(s) = \frac{(1+s)^{|k|} - (1+s)^{-|k|}}{(1+h)^{|k|}}.$$

On a alors pour tout $r \in [1, 1+h]$,

$$r \frac{d\widehat{V}_k}{dr}(r) = \left(f(r-1) + \frac{q_m}{q_c} g(r-1) \right) \frac{\widehat{\phi}_k}{\mathcal{D}_k}$$

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, nous obtenons :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \forall s \in [0, h],$$

$$f(s) = \frac{2}{(1+h)^{|k|}} + h^2 \int_0^1 (1-t)f''(th)dt,$$

$$g(s) = \frac{2s|k|}{(1+h)^{|k|}} + h^2 \int_0^1 (1-t)g''(th)dt,$$

de plus, nous avons

$$(1+h)^{-|k|} = 1 - |k|h + |k|(|k|+1)h^2 \int_0^1 (1-t)(1+ht)^{-|k|-2} dt. \quad (2.19)$$

Ceci entraîne l'existence d'une constante C indépendante de k tel que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \forall s \in [0, h],$$

$$|f(s) - 2(1 - |k|h)| \leq Ch^2 k^2, \quad (2.20a)$$

$$|g(s) - 2s|k|| \leq Ch^2 k^2. \quad (2.20b)$$

Ainsi \mathcal{D}_k est égal à

$$\mathcal{D}_k = 1 + (1+h)^{-2|k|} + \frac{q_m}{q_c} (1 - (1+h)^{-2|k|});$$

Il existe une constante, encore notée par C , telle que :

$$\left| \frac{1}{\mathcal{D}_k} - \frac{1}{2} \left(1 + |k|h \left(1 - \frac{q_m}{q_c} \right) \right) \right| \leq C \left(h^2 k^2 \left(1 + \left| \frac{q_m}{q_c} \right| \right) \right). \quad (2.21)$$

En utilisant (2.20) et (2.21), il existe une constante $C > 0$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \forall s \in [0, h],$$

$$\left| \frac{f(s)}{\mathcal{D}_k} - \left(1 - h|k| \frac{q_m}{q_c} \right) \right| \leq Ch^2 \left(1 + \left| \frac{q_m}{q_c} \right| \right) k^3,$$

$$\left| \frac{g(s)}{\mathcal{D}_k} - s|k| \right| \leq Ch^2 \left(1 + \left| \frac{q_m}{q_c} \right| \right) k^3.$$

Nous en déduisons :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \forall r \in [1, 1+h],$$

$$\left| r \frac{d\widehat{\mathbf{V}}_k}{dr}(r) - \widehat{\phi}_k \left(1 + |k| \frac{q_m}{q_c} (r-1-h) \right) \right| \leq Ch^2 \left(1 + \left| \frac{q_m}{q_c} \right| \right)^2 k^3 |\widehat{\phi}_k|,$$

ce qui implique (2.18a)

Un raisonnement analogue permet d'obtenir une approximation asymptotique pour $\partial_\theta \mathbf{V}$. Nous avons pour tout entier $k \neq 0$ et pour tout $r \in [1, 1+h]$:

$$ik\widehat{\mathbf{V}}_k(r) = i\mathbf{sgn}(k) \frac{q_m}{q_c} \frac{r^{|k|} + r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|}} \frac{\widehat{\phi}_k}{\mathcal{D}_k} + i\mathbf{sgn}(k) \frac{r^{|k|} - r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|}} \frac{\widehat{\phi}_k}{\mathcal{D}_k},$$

qui s'écrit, en utilisant les fonctions f et g

$$ik\widehat{\mathbf{V}}_k(r) = i\mathbf{sgn}(k) \widehat{\phi}_k \left(\frac{q_m}{q_c} \frac{f(r-1)}{\mathcal{D}_k} + \frac{g(r-1)}{\mathcal{D}_k} \right),$$

donc nous en déduisons :

$$ik\widehat{\mathbf{V}}_k(r) = i\mathbf{sgn}(k) \widehat{\phi}_k \left(\frac{q_m}{q_c} + |k|(r-1) - h|k| \frac{q_m^2}{q_c^2} \right),$$

ce qui entraîne (2.18b). \square

Remarque 2.4. Lorsque $\frac{q_m}{q_c}$ et h sont petits devant 1, seule la composante normale du champ $r\partial_r V$ est non négligeable dans la membrane à l'ordre $h + \frac{q_m}{q_c}$.

Cette proposition nous permet d'avoir une expression explicite en fonction de la donnée aux bord du champ électrique statique approché à $O(h^2)$ près. Notons $\mathbf{E}^{ap.st.}$ le champ statique approché à $O(h^2)$. La proposition précédente nous donne l'expression explicite des composantes normales $E_r^{ap.st.}$ et tangentielles $E_\theta^{ap.st.}$ en fonction de q_c , q_m et de la donnée aux bord :

$$\begin{cases} E_r^{ap.st.} = \frac{1}{r} \left(\phi - i \frac{q_m}{q_c} (r-1-h) \mathcal{H} \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right) \right) \\ E_\theta^{ap.st.} = \frac{1}{r} \left(\frac{q_m}{q_c} i \mathcal{H}(\phi) + \left(r-1-h \frac{q_m^2}{q_c^2} \right) \frac{d\phi}{d\theta} \right) \end{cases} \quad (2.22)$$

Exemple 2.1. Si la donnée aux bords est de la forme :

$$\phi(\theta) = a \cos(m\theta) + b \sin(n\theta), \forall \theta \in \mathbb{T},$$

pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathcal{H}(\phi) = a \sin(m\theta) - b \cos(n\theta), \forall \theta \in \mathbb{T}.$$

Ainsi nous obtenons

$$\mathcal{H} \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right) = am \cos(m\theta) + bn \sin(n\theta), \forall \theta \in \mathbb{T}$$

Nous avons explicitement le champ statique approché à $O(h^2)$ près dans la membrane $[1, 1+h] \times \mathbb{T}$ via l'égalité (2.2).

2.4.2 Développement asymptotique dans le cytoplasme :

La proposition 2.3 suivante donne la condition aux bords du cytoplasme satisfaite par le potentiel électrostatique V_{app} approché à $O(h^2)$. Cette condition permet de remplacer la membrane et traduit son effet sur le cytoplasme.

Pour obtenir le développement asymptotique du champ électrique dans le cytoplasme, nous utilisons l'expression suivante de \widehat{V}_k dans $[0,1] : \forall k \in \mathbb{Z}^*$,

$$\widehat{V}_k^c = \frac{2q_m}{q_c} \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \frac{r^{|k|}}{(1+h)^{|k|} \mathcal{D}_k}$$

En utilisant les estimations (2.19) et (2.21) de $(1+h)^{-|k|}$ et \mathcal{D}_k , nous obtenons : $\forall k \in \mathbb{Z}^*$,

$$\left| r \frac{d\widehat{V}_k}{dr}(r) \right|_{r=1^-} - \widehat{\phi}_k \left(1 - |k|h \frac{q_m}{q_c} \right) \leq Ch^2 \left(1 + \left| \frac{q_m}{q_c} \right| \right)^2 k^3 |\widehat{\phi}_k|,$$

ce qui entraîne

$$\left| r \frac{dV_k}{dr}(r) \right|_{r=1^-} - \left(\phi - i \frac{q_m}{q_c} h \mathcal{H} \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right) \right) \leq Ch^2 \left(1 + \left| \frac{q_m}{q_c} \right| \right)^2 k^3 |\phi|_{\mathbb{H}^3(\mathbb{T})}. \quad (2.23)$$

En utilisant les notations de Landau, l'équation (2.23) devient :

$$\left| r \frac{dV_k}{dr}(r) \right|_{r=1^-} - \left(\phi - i \frac{q_m}{q_c} h \mathcal{H} \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right) \right) = O(h^2),$$

ceci suggère alors l'idée de négliger le terme en $O(h^2)$ et de définir ainsi une nouvelle condition aux limites approchée sur le bord du cytoplasme. Plus précisément, nous avons la proposition :

Proposition 2.3. *Soit $\phi \in \mathbb{H}^3(\mathbb{T})$ satisfaisant la condition de compatibilité $\int_{\partial\Omega_h} \phi(\theta) d\theta = 0$. Soit \mathbf{V} la solution du problème (2.7). Soient q_c et q_m des nombres complexes non nuls vérifiant la condition (1) de la proposition 2.1 et $h \in [0, 1]$. Soit V^c la restriction à $[0, 1] \times \mathbb{T}$ de la solution V du problème (2.7).*

Soit V_{app} la solution du problème suivant :

$\forall (r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_{app}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_{app}}{\partial \theta^2} &= 0, \\ \left(r \frac{\partial V_{app}}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} &= \left(\phi + i \frac{q_m}{q_c} h \mathcal{H} \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right) \right) \end{aligned}$$

avec la condition aux limites :

$$\int_0^{2\pi} V_{app}(1, \theta) d\theta = 0.$$

Notons par \mathbf{C} le cylindre $[0, 1] \times \mathbb{T}$.

Il existe une constante $\mathcal{C} > 0$ tel que :

$$\|V - V_{app}\|_{\mathbb{H}^1(\mathbf{C})} \leq \mathcal{C} \left| \frac{q_m}{q_c} \right| h^2 \left(1 + \left| \frac{q_m}{q_c} \right| \right)^2 \| \phi \|_{\mathbb{H}^3(\mathbb{T})}.$$

Preuve. Remarquons que $\phi + \left(h \frac{q_m}{q_c} \right) \mathcal{H} \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right)$ satisfait la condition de la proposition 2.1, donc V est bien défini. Pour prouver la proposition 2.3, nous devons juste étudier la différence \mathbf{W} entre V et V_{app} . \mathbf{W} satisfait dans \mathbf{C} :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{W} &= 0 \text{ dans } \mathbf{C} \\ r \frac{d\mathbf{W}}{dr} \Big|_{r=1} &= r \frac{dV^c}{dr} \Big|_{r=1^-} - \left(\phi + i \frac{q_m}{q_c} h \mathcal{H} \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right) \right). \end{aligned}$$

La condition de transmission (2.7d) implique

$$r \frac{d\mathbf{W}}{dr} \Big|_{r=1} = \frac{q_m}{q_c} r \frac{dV^m}{dr} \Big|_{r=1^+} - \left(\phi + i \frac{q_m}{q_c} h \mathcal{H} \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right) \right).$$

L'estimation d'erreur de la proposition 2.3 découle directement de l'estimation (2.13). \square

2.5 L'équation vectorielle des ondes avec une condition Neumann

Dans cette section, nous étudions la solution de l'équation vectorielle des ondes. Rappelons que

$$\Omega_h = \mathcal{O}_h \cup \mathcal{O}$$

est le domaine circulaire défini auparavant. Soit f une fonction donnée dans $\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{T})$. Soient q_c et q_m deux nombres complexes avec une partie réelle positive et une partie imaginaire négative, et soit μ_c et μ_m deux nombres strictement positifs. Nous définissons les fonctions constantes par morceaux q_h et μ_h comme dans (2.4). Soit E la solution de l'équation vectorielle des ondes (2.5) :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu_h} \mathbf{rot} E \right) - q_h E = 0 & \text{sur } \Omega_h \\ \mathbf{rot} E \times \mathbf{n} |_{r=1+h} = f & \text{sur } \partial\Omega_h \end{cases}$$

2.5.1 Résultat de régularité

Le théorème qui va suivre nous donnera un résultat de régularité sur E .
 Tout d'abord, nous introduisons les espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_{\mathbf{div}} &= \{E \in L^2(\Omega_h)^N \text{ tel que } \mathbf{div} E \in L^2(\Omega_h)\}, \\ \mathbb{H}_{\mathbf{rot}} &= \{E \in L^2(\Omega_h)^N \text{ tel que } \mathbf{rot} E \in L^2(\Omega_h)\},\end{aligned}$$

les espaces sont munis respectivement des normes :

$$\begin{aligned}\|E\|_{\mathbb{H}_{\mathbf{div}}(\Omega_h)} &= \left(\int_{\Omega_h} |E|^2 + |\mathbf{div} E|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|E\|_{\mathbb{H}_{\mathbf{rot}}(\Omega_h)} &= \left(\int_{\Omega_h} |E|^2 + |\mathbf{rot} E|^2 \right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\|E\|_{\mathbb{H}_{\mathbf{div}}(\Omega_h)}^2 &= \|E\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + \|\mathbf{div} E\|_{L^2(\Omega_h)}^2, \\ \|E\|_{\mathbb{H}_{\mathbf{rot}}(\Omega_h)}^2 &= \|E\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + \|\mathbf{rot} E\|_{L^2(\Omega_h)}^2.\end{aligned}$$

Afin d'établir notre résultat de régularité, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1. [8]

Soit Ω une ouvert régulier de \mathbb{R}^N et soit $E \in \mathbb{H}_{\mathbf{div}} \cap \mathbb{H}_{\mathbf{rot}}(\Omega_h)$, alors $E \in (\mathbb{H}_{loc}^1(\Omega_h))^3$.

Théorème 2.1. Soient q_c et q_m des nombres complexes avec une partie réelle positive et une partie imaginaire négative et soient μ_c et μ_m deux nombres strictement positifs. Soit f dans $\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega_h)$.

Par conséquent, il existe une solution unique E satisfaisant le problème (2.5). Cette solution a la régularité suivante :

$$E \in (\mathbb{H}^1(\Omega_h))^2$$

Preuve. L'existence et l'unicité de la solution peut être démontré en utilisant le théorème de Lax-Milgram.

En effet, on peut associer à notre problème la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } E \text{ dans } \mathbb{H}_{\mathbf{rot}}(\Omega_h), \\ a(E, \varphi) = \mathcal{L}(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbb{H}_{\mathbf{rot}}(\Omega_h). \end{cases}$$

Avec

$$a(\mathbf{E}, \varphi) = \int_{\Omega_h} \frac{1}{\mu_h} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \varphi - \int_{\Omega_h} q_h \cdot \mathbf{E} \cdot \varphi$$

$$\mathcal{L}(\varphi) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu_h} (\mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n}) \cdot \varphi = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu_h} f \cdot \varphi$$

On montre alors que $a(\cdot, \cdot)$ est continue et coercive sur $\mathbb{H}_{\mathbf{rot}}(\Omega_h)$ et que la forme linéaire $\mathcal{L}(\cdot)$ est continue.

Le théorème de Lax-Milgram assure alors l'existence et l'unicité de la solution.

Puisque $\mathbf{div}(\mathbf{E}) \in \mathbf{L}^2(\Omega_h)$ (elle est nulle presque partout dans Ω_h), nous en déduisons que \mathbf{E} est dans $\mathbb{H}_{\mathbf{div}} \cap \mathbb{H}_{\mathbf{rot}}(\Omega_h)$, donc par le lemme précédent nous déduisons :

$$\mathbf{E} \in (\mathbb{H}_{loc}^1(\Omega_h))^2.$$

Puisque $\partial\Omega_h$ est régulier, on peut définir le vecteur normal unitaire extérieur à $\partial\Omega_h$ dans un voisinage tubulaire de la frontière. On note le encore par \mathbf{n} . Nous effectuons le produit scalaire de (2.5a) avec \mathbf{n} . Pour simplifier, on note respectivement par z_c et par z_m les produits $\mu_c q_c$ et $\mu_m q_m$. On obtient :

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} - z_m \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

En utilisant les propriétés des opérateurs rotationnel et la divergence, on obtient :

$$z_m \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{div}|_{\partial\Omega_h} (\mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}),$$

La condition aux limites (2.5b) implique :

$$z_m \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{div}|_{\partial\Omega_h} (f).$$

Comme f est supposée être dans $\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega_h)$, nous obtenons que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ est dans $\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_h)$. Nous avons $\mathbf{E} \in (\mathbb{H}_{loc}^1(\Omega_h))^2$ et $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_h)$, donc $\mathbf{E} \in (\mathbb{H}^1(\Omega_h))^2$. \square

Dans ce qui suit, nous allons montrer comment on peut passer de l'équation vectorielle des ondes à l'équation de Helmholtz. Puisque la solution \mathbf{E} du problème (2.5) est dans $\mathbb{H}^1(\Omega_h) \times \mathbb{H}^1(\Omega_h)$, sa divergence est dans $\mathbf{L}^2(\Omega_h)$. Nous avons :

$$\mathbf{div}(\mathbf{rot} v) = 0,$$

$$\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu_h} \mathbf{rot} v \right) = \mathbf{grad} \left(\frac{1}{\mu_h} \mathbf{div} v \right) - \mathbf{div} \left(\frac{1}{\mu_h} \mathbf{grad} v \right),$$

où $\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_h} \mathbf{grad} v \right)$ est donné par :

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_h} \mathbf{grad} v \right) = \begin{pmatrix} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_h} \mathbf{grad} v_x \right) \\ \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_h} \mathbf{grad} v_y \right) \end{pmatrix}$$

Nous avons alors la solution E du problème (2.5) qui satisfait :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E &\equiv 0 \quad \text{sur } L^2(\Omega_h), \\ \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_h} \mathbf{grad} E \right) - q_h E &= 0 \quad \text{sur } \Omega_h, \end{aligned} \quad (2.24)$$

avec les conditions :

$$\operatorname{rot} E \times \frac{n}{\mu_h} \quad \text{et} \quad E \times \frac{n}{\mu_h} \quad \text{continues en } r = 1 \quad (2.25)$$

2.5.2 Séparation de variables

Nous rappelons que le champ E admet la décomposition suivante dans la base $(e_\theta, e_{\theta+\frac{\pi}{2}})$:

$$\begin{aligned} E &= \mathbb{E}_r e_\theta + \mathbb{E}_\theta e_{\theta+\frac{\pi}{2}}, \\ &= \mathbb{E}_r e_\theta + \frac{1}{r} E_\theta e_{\theta+\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Nous avons aussi :

$$\operatorname{rot} E = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{\partial \mathbb{E}_r}{\partial \theta} \right).$$

Par conséquent, nous pouvons réécrire le problème (2.5) en coordonnées cylindriques :

$$\rho = \frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{\partial \mathbb{E}_r}{\partial \theta}, \quad (2.26a)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\mu_h} \rho \right) - q_h \mathbb{E}_r = 0, \quad \text{pour } 0 \leq r \leq 1+h, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (2.26b)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu_h} \rho \right) - q_h E_\theta = 0, \quad \text{pour } 0 \leq r \leq 1+h, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (2.26c)$$

$$\rho(1+h, \theta) = (1+h)f(\theta). \quad \text{pour } 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (2.26d)$$

Nous effectuons la transformée de Fourier en la variable θ dans les équations (2.26). On note $\widehat{E}^k = \left(\widehat{\mathbb{E}}_r^k, \frac{1}{r} \widehat{E}_\theta^k \right)$ le k ème coefficient de Fourier de E , et $\widehat{\rho}^k$ celui de ρ .

Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0, 1 + h]$ nous avons les égalités suivantes :

$$\widehat{\rho}^k = \frac{d\widehat{\mathbb{E}}_\theta^k}{dr} - ik\widehat{\mathbb{E}}_r^k, \quad (2.27a)$$

$$ik\frac{\widehat{\rho}^k}{\mu_h r^2} - q_h\widehat{\mathbb{E}}_r^k = 0, \quad (2.27b)$$

$$r\frac{d}{dr}\left(\frac{\widehat{\rho}^k}{\mu_h r}\right) + q_h\widehat{\mathbb{E}}_\theta^k = 0, \quad (2.27c)$$

$$\widehat{\rho}^k(1 + h, \theta)|_{1+h} = (1 + h)\widehat{f}^k(\theta). \quad (2.27d)$$

(2.27)

Nous multiplions par r l'équation (2.27b) et nous dérivons par rapport à r . Nous avons

$$r\left(ik\frac{\widehat{\rho}^k}{\mu_h r^2} - q_h\widehat{\mathbb{E}}_r^k\right) = 0,$$

entraîne

$$ik\frac{\widehat{\rho}^k}{\mu_h r} = rq_h\widehat{\mathbb{E}}_r^k,$$

par suite

$$\frac{d}{dr}\left(ik\frac{\widehat{\rho}^k}{\mu_h r}\right) = \frac{d}{dr}\left(rq_h\widehat{\mathbb{E}}_r^k\right).$$

On obtient :

$$\frac{d}{dr}\left(q_h r\widehat{\mathbb{E}}_r^k\right) = ik\frac{d}{dr}\left(\frac{\widehat{\rho}^k}{\mu_h r}\right),$$

et en utilisant (2.27c),

$$r\frac{d}{dr}\left(q_h r\widehat{\mathbb{E}}_r^k\right) = ikr\frac{d}{dr}\left(\frac{\widehat{\rho}^k}{\mu_h r}\right),$$

on obtient

$$r\frac{d}{dr}\left(\frac{\widehat{\rho}^k}{\mu_h r}\right) = -q_h\widehat{\mathbb{E}}_\theta^k.$$

Donc on a

$$r\frac{d}{dr}\left(q_h r\widehat{\mathbb{E}}_r^k\right) = -ikq_h\widehat{\mathbb{E}}_\theta^k.$$

Nous allons dériver une fois de plus par rapport à r . En utilisant les égalités (2.27a)-(2.27b), on obtient

$$ik\frac{\widehat{\rho}^k}{\mu_h r^2} - q_h\widehat{\mathbb{E}}_r^k = 0,$$

et

$$\widehat{\rho}^k = \frac{d\widehat{\mathbb{E}}_\theta^k}{dr} - ik\widehat{\mathbb{E}}_r^k.$$

On remplace (2.27a) dans (2.27b) :

$$ik \frac{1}{\mu_h r^2} \left(\frac{d\widehat{\mathbb{E}}_\theta^k}{dr} - ik\widehat{\mathbb{E}}_r^k \right) - q_h \widehat{\mathbb{E}}_r^k = 0,$$

i.e

$$ik \frac{1}{\mu_h r^2} \left(\frac{d\widehat{\mathbb{E}}_\theta^k}{dr} \right) + \frac{k^2}{\mu_h r^2} \widehat{\mathbb{E}}_r^k - q_h \widehat{\mathbb{E}}_r^k = 0,$$

$$ik \frac{1}{\mu_h r^2} \left(\frac{d\widehat{\mathbb{E}}_\theta^k}{dr} \right) + \left(\frac{k^2}{\mu_h r^2} - q_h \right) \widehat{\mathbb{E}}_r^k = 0 \quad (2.27f)$$

On a $\widehat{\mathbb{E}}_\theta^k = -\frac{r}{ikq_h} \frac{d}{dr} (q_h r \widehat{\mathbb{E}}_r^k)$. En remplaçant dans (2.27f) on obtient :

$$\frac{ik}{\mu_h r^2} \left(\frac{d}{dr} \left(-\frac{r}{ikq_h} \frac{d}{dr} (q_h r \widehat{\mathbb{E}}_r^k) \right) \right) + \left(\frac{k^2}{\mu_h r^2} - q_h \right) \widehat{\mathbb{E}}_r^k = 0$$

$$\frac{ik}{ik\mu_h r^2} \left(\frac{d}{dr} \left(-\frac{r}{q_h} \frac{d}{dr} (q_h r \widehat{\mathbb{E}}_r^k) \right) \right) + \left(\frac{k^2}{\mu_h r^2} - q_h \right) \widehat{\mathbb{E}}_r^k = 0,$$

i.e

$$-\frac{1}{\mu_h r^2} \left(\frac{d}{dr} \left(\frac{r}{q_h} \frac{d}{dr} (q_h r \widehat{\mathbb{E}}_r^k) \right) \right) + \left(\frac{k^2}{\mu_h r^2} - q_h \right) \widehat{\mathbb{E}}_r^k = 0.$$

En multipliant cette équation par r^2 , elle devient :

$$\frac{1}{\mu_h} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{q_h} \frac{d}{dr} (q_h r \widehat{\mathbb{E}}_r^k) \right) = \left(\frac{k^2}{\mu_h r} - r q_h \right) r \widehat{\mathbb{E}}_r^k.$$

et on a les conditions de transmission suivantes :

$$\frac{1}{z_c} \frac{d}{dr} (q_c \widehat{\mathbb{E}}_r^k) \Big|_{r=1^-} = \frac{1}{z_m} \frac{d}{dr} (q_m \widehat{\mathbb{E}}_r^k) \Big|_{r=1^+},$$

$$q_c \widehat{\mathbb{E}}_r^k \Big|_{r=1^-} = q_m \widehat{\mathbb{E}}_r^k \Big|_{r=1^+}.$$

Notons $\widehat{\mathbb{E}}_r^k$ la quantité suivante :

$$\widehat{\mathbb{E}}_r^k = r \widehat{\mathbb{E}}_r^k.$$

On a

$$\frac{1}{\mu_h} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{q_h} \frac{d}{dr} \left(q_h r \widehat{\mathbf{E}}_r^k \right) \right) = \left(\frac{k^2}{\mu_h r} - r q_h \right) r \widehat{\mathbf{E}}_r^k.$$

qui devient, en remplaçant $\widehat{\mathbf{E}}_r^k$:

$$\frac{1}{\mu_h} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{q_h} \frac{d}{dr} \left(q_h \widehat{\mathbf{E}}_r^k \right) \right) = \left(\frac{k^2}{\mu_h r} - r q_h \right) \widehat{\mathbf{E}}_r^k.$$

Cette équation, multipliée par μ_h donne

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r}{q_h} \frac{d}{dr} \left(q_h \widehat{\mathbf{E}}_r^k \right) \right) = \left(\frac{k^2}{r} - r \mu_h q_h \right) \widehat{\mathbf{E}}_r^k,$$

Ce qui entraîne

$$\frac{1}{q_h} \frac{d}{dr} \left(q_h \widehat{\mathbf{E}}_r^k \right) + \frac{r}{q_h} \frac{d^2}{dr^2} \left(q_h \widehat{\mathbf{E}}_r^k \right) = \left(\frac{k^2}{r} - r \mu_h q_h \right) \widehat{\mathbf{E}}_r^k,$$

i.e

$$\frac{d}{dr} \left(\widehat{\mathbf{E}}_r^k \right) + r \frac{d^2}{dr^2} \left(\widehat{\mathbf{E}}_r^k \right) = \left(\frac{k^2}{r} - r \mu_h q_h \right) \widehat{\mathbf{E}}_r^k.$$

Ainsi, on voit que $\widehat{\mathbf{E}}_r^k$ est solution de l'équation de Bessel dans chaque domaine :

$$\frac{d^2}{dr^2} \widehat{\mathbf{E}}_r^k + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \widehat{\mathbf{E}}_r^k + \left(\mu_h q_h - \frac{k^2}{r^2} \right) \widehat{\mathbf{E}}_r^k = 0, \quad (2.28)$$

avec les conditions de transmission en $r = 1$:

$$\frac{1}{\mu_c} \frac{d\widehat{\mathbf{E}}_r^k}{dr} \Big|_{r=1^-} = \frac{1}{\mu_m} \frac{d\widehat{\mathbf{E}}_r^k}{dr} \Big|_{r=1^+}, \quad (2.29a)$$

$$q_c \widehat{\mathbf{E}}_r^k \Big|_{r=1^-} = q_m \widehat{\mathbf{E}}_r^k \Big|_{r=1^+}. \quad (2.29b)$$

Par ailleurs, la relation (2.27b) donne $\widehat{\mathbf{E}}_r^k$ en fonction de $\widehat{\rho}^k$:

$$\widehat{\mathbf{E}}_r^k = \frac{ik}{z_h r} \widehat{\rho}^k, \quad (2.30)$$

où $z_h = u_h q_h$. Grâce à la condition aux limites (2.27d), on obtient la condition de Dirichlet suivante pour $\widehat{\mathbf{E}}_r^k$ et pour $r = 1 + h$:

$$\widehat{\mathbf{E}}_r^k \Big|_{1+h} = \frac{ik}{z_m} \widehat{f}^k. \quad (2.31)$$

On remarque que pour tout entier non nul k et pour tout $r \in [0, 1 + h]$ nous pouvons facilement écrire $\frac{\widehat{E}_\theta^k}{r}$ en fonction de \widehat{E}_r^k . En fait, en remplaçant (2.30) dans la relation (2.27c), on obtient :

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} \left(\frac{\widehat{\rho}^k}{\mu_h r} \right) + q_h \widehat{E}_\theta^k = 0 &\Leftrightarrow r \frac{d}{dr} \left(\frac{q_h i k}{q_h i k} \left(\frac{\widehat{\rho}^k}{\mu_h r} \right) \right) + q_h \widehat{E}_\theta^k = 0 \\ &\Leftrightarrow r \frac{d}{dr} \left(\frac{q_h}{i k} \left(\frac{i k}{q_h} \frac{\widehat{\rho}^k}{\mu_h r} \right) \right) + q_h \widehat{E}_\theta^k = 0. \end{aligned}$$

L'égalité (2.30) entraîne

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} \left(\frac{q_h}{i k} \widehat{E}_r^k \right) + q_h \widehat{E}_\theta^k &= 0, \\ \frac{r}{i k} \frac{d}{dr} \left(q_h \widehat{E}_r^k \right) + q_h \widehat{E}_\theta^k &= 0. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\widehat{E}_\theta^k = \frac{r}{i k} \frac{d}{dr} \left(\widehat{E}_r^k \right), \quad (2.32)$$

qui donne

$$\frac{\widehat{E}_\theta^k}{r} = \frac{1}{i k} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \widehat{E}_r^k \right),$$

Comme on a $\widehat{E}_r^k = r \widehat{\mathbb{E}}_r^k$ et $\widehat{E}_\theta^k = r \widehat{\mathbb{E}}_\theta^k$, alors

$$\widehat{\mathbb{E}}_\theta^k = \frac{1}{i k} \frac{d}{dr} \left(r \widehat{\mathbb{E}}_r^k \right).$$

donc la connaissance de \widehat{E}_r^k suffit pour obtenir tous les coefficients de Fourier non nuls de E . Le cas $k = 0$ doit être considéré séparément. En effet, si $k = 0$, en utilisant les égalités (2.27)

$$\widehat{\rho}^0 = \frac{d\widehat{E}_\theta^0}{dr},$$

En remplaçant dans (2.27c), on obtient

$$r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\mu_h r} \frac{d\widehat{E}_\theta^0}{dr} \right) + q_h \widehat{E}_\theta^0 = 0,$$

donc pour $r \in [0, 1 + h]$, nous avons l'équation satisfaite par \widehat{E}_θ^0 :

$$r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\mu_h r} \frac{d\widehat{E}_\theta^0}{dr} \right) + q_h r \widehat{E}_\theta^0 = 0. \quad (2.33)$$

En remplaçant la condition aux limites (2.27d) dans l'égalité (2.27a) appliquée à $r = 1 + h$, on obtient la condition aux limites de Neumann suivante pour $\widehat{\mathbf{E}}_\theta^0$:

$$\left. \frac{d\widehat{\mathbf{E}}_\theta^0}{dr} \right|_{r=1+h} = (1+h)\widehat{f}^0. \quad (2.34)$$

2.5.3 Étude de \mathbf{E}_r et \mathbf{E}_θ

2.4.3.1 Étude de \mathbf{E}_r

Dans cette section, nous donnons le développement en série de Fourier de la composante normale \mathbf{E}_r de \mathbf{E} . Puisque nous connaissons explicitement les solutions de l'équation de Bessel satisfaite par \mathbf{E}_r , il est plus commode d'étudier \mathbf{E}_r , qui est égale à $r\mathbf{E}_r$.

Soit h dans $[0, 1]$. Soient q_c, q_m, μ_c et μ_m des constantes données (comme au théorème 2.1) Nous définissons :

$$\begin{aligned} z_c &= \mu_c q_c, & z_m &= \mu_m q_m, & z_h &= \mu_h q_h \\ q_h(r) &= \begin{cases} q_c & \text{si } 0 \leq r \leq 1, \\ q_m & \text{si } 1 \leq r \leq 1+h, \end{cases} \\ \mu_h(r) &= \begin{cases} \mu_c & \text{si } 0 \leq r \leq 1, \\ \mu_m & \text{si } 1 \leq r \leq 1+h. \end{cases} \end{aligned}$$

Soit f une fonction donnée dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$. Pour tout entier k , $\widehat{\mathbf{E}}_r^k$ est la solution du problème suivant :

$$\frac{d^2}{dr^2} \widehat{\mathbf{E}}_r^k + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \widehat{\mathbf{E}}_r^k + \left(z_h - \frac{k^2}{r^2} \right) \widehat{\mathbf{E}}_r^k = 0, \quad (2.35)$$

avec les conditions de transmission suivante en $r = 1$:

$$\frac{1}{\mu_c} \left. \frac{d\widehat{\mathbf{E}}_r^k}{dr} \right|_{r=1^-} = \frac{1}{\mu_m} \left. \frac{d\widehat{\mathbf{E}}_r^k}{dr} \right|_{r=1^+}, \quad (2.36a)$$

$$q_c \widehat{\mathbf{E}}_r^k \Big|_{r=1^-} = q_m \widehat{\mathbf{E}}_r^k \Big|_{r=1^+}, \quad (2.36b)$$

et avec la condition aux limites de Dirichlet :

$$\widehat{\mathbf{E}}_r^k \Big|_{r=1+h} = \frac{ik}{z_m} \widehat{f}^k. \quad (2.37)$$

En particulier

$$\widehat{E}_r^0 \equiv 0.$$

Soient J^k et Y^k des fonctions de Bessel de première et de seconde espèce. Pour tout entier k dans \mathbb{Z}^* , la solution du problèmes (2.35), (2.36) et (2.37) \widehat{E}_r^k peut être écrite sous la forme suivante :

$$\widehat{E}_r^k(r) = \alpha_c^k J^{|k|}(\sqrt{z_c}r), \quad \forall r \in [0, 1] \quad (2.38a)$$

$$\widehat{E}_r^k(r) = \alpha_m^k J^{|k|}(\sqrt{z_m}r) + \beta_m^k Y^{|k|}(\sqrt{z_m}r). \quad \forall r \in [1, 1+h] \quad (2.38b)$$

Les conditions de transmission (2.36a) et (2.36b) avec la condition limite Neumann (2.37) devraient permettre de déterminer les constantes α_c^k, α_m^k et β_m^k . En fait, ces constantes doivent satisfaire un système matriciel de 3 équations à 3 inconnues. Pour tout n dans \mathbb{N}^* , nous définissons la suite de matrices $\mathcal{A}_n(h)$:

$$\mathcal{A}_n(h) = \begin{pmatrix} q_c J^n(\sqrt{z_c}) & -q_m J^n(\sqrt{z_m}) & -q_m Y^n(\sqrt{z_m}) \\ \mu_m \sqrt{z_c} \frac{J^n(\sqrt{z_c})}{\mu_c} & -(\sqrt{z_m}) J^n(\sqrt{z_m}) & -(\sqrt{z_m}) Y^n(\sqrt{z_m}) \\ 0 & J^n(\sqrt{z_m}(1+h)) & Y^n(\sqrt{z_m}(1+h)) \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

et α_c^k, α_m^k et β_m^k doivent satisfaire

$$\mathcal{A}_{|k|}(h) \begin{pmatrix} \alpha_c^k \\ \alpha_m^k \\ \beta_m^k \end{pmatrix} = \frac{ik}{z_m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \widehat{f}^k \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

2.4.3.2 Étude de E_θ

Pour k non nul, nous avons l'expression suivante de \widehat{E}_θ^k en fonction de \widehat{E}_r^k :

$$\widehat{E}_\theta^k = \frac{1}{ik} r \frac{d}{dr} \left(\widehat{E}_r^k \right) . \quad (2.41)$$

Le coefficient de Fourier de E_θ correspondant à $k = 0$ satisfait l'équation suivante :

$$\text{pour } r \in [0, 1+h]$$

$$r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\mu_h r} \frac{d\widehat{E}_\theta^0}{dr} \right) + q_h r \widehat{E}_\theta^0 = 0, \quad (2.42a)$$

$$\left. \frac{d\widehat{E}_\theta^0}{dr} \right|_{1+h} = (1+h) \widehat{f}_0^k. \quad (2.42b)$$

(2.42)

L'équation (2.42a) est une EDO de type Laplace. Avec le changement de variables, on obtient la solution générale de (2.42a) dans chaque intervalle où z_h est constante, avec des fonctions de Bessel. Posons

$$\zeta = \sqrt{z_c},$$

$$\eta = \sqrt{z_m},$$

$$\tilde{\eta} = (1+h) \sqrt{z_m}$$

et définissons :

$$w(s) = \frac{\widehat{E}_\theta^0 \left(\frac{s}{\sqrt{z_h}} \right)}{s}$$

La fonction w est une solution, dans les segments complexes $\zeta[0, 1]$ et $\eta[1, 1+h]$ de l'équation de Bessel suivante :

$$s^2 w'' + s w' + (s^2 - 1) w = 0.$$

Un système fondamental de solutions de cette équation se compose de fonctions de Bessel du premier et deuxième types, désignés respectivement par J^1 et par Y^1 .

Nous définissons la matrice $\mathcal{A}_0(h)$ par :

$$\mathcal{A}_0(h) = \begin{pmatrix} \zeta J^1(\zeta) & -\eta J^1(\eta) & -\eta Y^1(\eta) \\ q_c J^1(\zeta) & -q_m J^1(\eta) & -q_m Y^1(\eta) \\ 0 & \eta(\tilde{\eta} J^1(\tilde{\eta}) + J^1(\tilde{\eta})) & \eta(\tilde{\eta} Y^1(\tilde{\eta}) + Y^1(\tilde{\eta})) \end{pmatrix}$$

Ensuite, \widehat{E}_θ^0 est égale à :

$$\widehat{E}_\theta^0(r) = a_c^0 r \zeta J_1(r \zeta) \quad \text{pour } 0 \leq r \leq 1, \quad (2.43a)$$

$$\widehat{E}_\theta^0(r) = a_m^0 r \zeta J_1(r \eta) + b_m^0 r \zeta y_1(r \eta) \quad \text{pour } 1 \leq r \leq 1+h. \quad (2.43b)$$

(2.43)

où les constantes a_c^0, a_m^0, b_m^0 sont définies par :

$$\mathcal{A}_0(h) \begin{pmatrix} a_c^0 \\ a_m^0 \\ b_m^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1+h)\widehat{f}^0 \end{pmatrix}$$

Remarque 2.5. Selon le théorème 2.1, \mathbb{E} est dans $(\mathbb{H}^1(\Omega_h))^2$, donc ses composantes \mathbb{E}_r et \mathbb{E}_θ sont dans $\mathbb{H}^1(\Omega_h)$. comme

$$\mathbb{E}_r = r\mathbb{E}_r,$$

\mathbb{E}_r est également dans $\mathbb{H}^1(\Omega_h)$. Donc pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, le vecteur

$$\begin{pmatrix} \alpha_c^k \\ \alpha_m^k \\ \beta_m^k \end{pmatrix},$$

est bien défini par (2.40) et la série

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{E}}_r^k(r) e^{ik\theta}$$

avec des coefficients $\widehat{\mathbb{E}}_r^k$ défini par (2.38), converge dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ pour presque tout r dans $[0, 1+h]$, et sa somme est une fonction, qui appartient à $\mathbb{H}^1(\Omega_h)$. Nous avons le même résultat pour

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{E}}_\theta^k(r) e^{ik\theta}.$$

Dans ce qui suit, nous donnerons le développement asymptotique de chacune des composantes de \mathbb{E} , lorsque la donnée de la frontière f est un polynôme trigonométrique.

2.5.4 Asymptotiques

2.5.4.1 Asymptotique dans le cytoplasme

Soit $k \in \mathbb{Z}^*$ et supposons qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$\frac{1}{C_0} \leq \frac{\mu_m}{\mu_c} \leq C_0.$$

Rappelons que z_m et z_c sont les produits respectifs $\mu_m q_m$ et $\mu_c q_c$. Notons \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 les deux expressions suivantes :

$$\mathcal{D}_1 = J^{|k|}(\sqrt{z_m}(1+h)) Y^{|k|}(\sqrt{z_m}) - J^{|k|}(\sqrt{z_m}) Y^{|k|}(\sqrt{z_m}(1+h)),$$

$$\mathcal{D}_2 = J^{|k|}(\sqrt{z_m})Y^{|k|}(\sqrt{z_m}(1+h)) - J^{|k|}(\sqrt{z_m}(1+h))Y^{|k|}(\sqrt{z_m}(1+h)).$$

Nous pouvons montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad J^{|k|}(z)Y'^{|k|}(z) - J'^{|k|}(z)Y^{|k|}(z) = \frac{2}{\pi z}$$

De (2.40), nous déduisons par un simple calcul l'expression suivante de α_c^k :

$$\alpha_c^k = \frac{\frac{2}{\pi\sqrt{z_m}}}{\mathcal{D}_1 + \left(\sqrt{\frac{z_m}{z_c}}\right)\left(\frac{J'^{|k|}(\sqrt{z_c})}{J^{|k|}(\sqrt{z_c})}\right)\mathcal{D}_2} \times \frac{i\mu_c k \hat{f}^k}{\mu_m z_c J^{|k|}(\sqrt{z_c})}$$

En utilisant la formule de Taylor, on obtient :

$$\mathcal{D}_1 = \frac{2}{\pi\sqrt{z_m}} + \frac{h^2 z_m}{2} \int_0^1 (1-th)^2 (J''^{|k|}(\sqrt{z_m}(1+th))Y'^{|k|}(\sqrt{z_m}) - Y''^{|k|}(\sqrt{z_m}(1+th))J'^{|k|}(\sqrt{z_m})) dt,$$

$$\mathcal{D}_2 = \frac{2h}{\pi} - \frac{h^2 z_m}{2} \int_0^1 (1-th)^2 (J''^{|k|}(\sqrt{z_m}(1+th))Y^{|k|}(\sqrt{z_m}) - Y''^{|k|}(\sqrt{z_m}(1+th))J^{|k|}(\sqrt{z_m})) dt.$$

Nous avons pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$z f_k(z) = k f_k(z) - f_{k+1}(z),$$

pour f^k égale à $J^{|k|}$ ou $Y^{|k|}$. Ainsi, comme conséquences simples des propriétés asymptotiques des fonctions de Bessel voir [13], il existe $C > 0$ tel que

$$|z_m (J''^{|k|}(\sqrt{z_m}(1+th))Y'^{|k|}(\sqrt{z_m}) - Y''^{|k|}(\sqrt{z_m}(1+th))J'^{|k|}(\sqrt{z_m}))| \leq \frac{Ck^2}{\sqrt{z_m}},$$

$$|z_m (J''^{|k|}(\sqrt{z_m}(1+th))Y^{|k|}(\sqrt{z_m}) - Y''^{|k|}(\sqrt{z_m}(1+th))J^{|k|}(\sqrt{z_m}))| \leq Ck^2$$

pour z_m et h tendant vers zéro, donc nous en déduisons :

$$\mathcal{D}_1 = \frac{2}{\pi\sqrt{z_m}} (1 + O(k^2 h^2)),$$

$$\mathcal{D}_2 = \frac{2}{\pi} + (O(k^2 h^2)).$$

Nous avons aussi, pour z_c tendant vers zéro :

$$J'^{|k|}(\sqrt{z_c})/J^{|k|}(\sqrt{z_c}) = \frac{|k|}{\sqrt{z_c}} + O\left(\frac{\sqrt{|z_c|}}{1+|k|}\right).$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 + \left(\frac{\sqrt{z_m}}{\sqrt{z_c}} \right) \left(\frac{J'^{|k|} \sqrt{z_c}}{J^{|k|} \sqrt{z_c}} \right) \mathcal{D}_2 &= \frac{2}{(\pi \sqrt{z_m})} (1 + O(k^2 h^2)) \\ &+ \left(\frac{\sqrt{z_m}}{\sqrt{z_c}} \right) \left(|k| \sqrt{z_c} + O \left(\frac{\sqrt{|z_c|}}{(1 + |k|)} \right) \left(\frac{2h}{\pi + O(k^2 h^2)} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.44)$$

Ainsi

$$\alpha_c^k = \left(1 - \frac{z^m}{z_c} |k| h + O \left(\frac{|z_m| h}{1 + |k|} + h^2 k^2 + \left| \frac{z_m}{z_c} \right| h^2 |k|^3 \right) \right) \times \frac{i \mu_c k \widehat{f}^k}{\mu_m z_c J^{|k|}(\sqrt{z_c})}$$

Ainsi, nous déduisons l'expression asymptotique de \widehat{E}_r^k , pour tout $k \in \mathbb{Z}_*$:

$$\begin{aligned} \widehat{E}_r^k &= \left(1 - \frac{z^m}{z_c} |k| h + O \left(\frac{|z_m| h}{1 + |k|} + h^2 k^2 + \left| \frac{z_m}{z_c} \right| h^2 |k|^3 \right) \right) \\ &\times \frac{i \mu_c k \widehat{f}^k}{\mu_m z_c J^{|k|}(\sqrt{z_c})} \frac{J^{|k|}(\sqrt{z_c} r)}{J^{|k|}(\sqrt{z_c})}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

En utilisant l'égalité (2.41), nous obtenons

$$\begin{aligned} \widehat{E}_\theta^k &= \left(1 - \frac{z^m}{z_c} |k| h + O \left(\frac{|z_m| h}{1 + |k|} + h^2 k^2 + \left| \frac{z_m}{z_c} \right| h^2 |k|^3 \right) \right) \\ &\times \frac{\mu_c \widehat{f}^k}{\mu_m z_c J^{|k|}(\sqrt{z_c})} \frac{\sqrt{z_c} J'^{|k|}(\sqrt{z_c} r) + J^{|k|}(\sqrt{z_c})}{J^{|k|}(\sqrt{z_c})}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Il reste à étudier \widehat{E}_θ^0 défini par (2.43).

$$\begin{aligned} \widehat{E}_\theta^0 &= \left(\frac{2}{\pi \sqrt{z_m}} \right) / \left(\sqrt{z_c z_m} (1 + h) J^1(\sqrt{z_c}) (J^1(\sqrt{z_m}) Y'^1(\sqrt{z_m} (1 + h))) \right. \\ &- Y^1(\sqrt{z_m}) J^1(\sqrt{z_m} (1 + h))) + \sqrt{z_c} J^1(\sqrt{z_c}) (Y^1(\sqrt{z_m}) J^1(\sqrt{z_m} (1 + h))) \\ &- J^1(\sqrt{z_m}) Y^1(\sqrt{z_m} (1 + h))) + J^1(\sqrt{z_c}) z_m (1 + h) (Y'^1(\sqrt{z_m}) J^1(\sqrt{z_m} (1 + h))) \\ &- J^1(\sqrt{z_m}) Y^1(\sqrt{z_m} (1 + h))) + J^1(\sqrt{z_c}) \sqrt{z_m} (Y'^1(\sqrt{z_m}) J^1(\sqrt{z_m} (1 + h))) \\ &- J^1(\sqrt{z_m}) Y^1(\sqrt{z_m} (1 + h))) \times r \sqrt{z_c} J^1(\sqrt{z_c} r) \frac{\mu_c (1 + h) \sqrt{z_m}}{\mu_m \sqrt{z_c}} \widehat{f}^0. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de fonctions de Bessel, nous en déduisons

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{z_c z_m}(1+h)J^1(\sqrt{z_c}) \left(J^1(\sqrt{z_m})Y^1(\sqrt{z_m}(1+h)) \right. \\
 & \left. - Y^1(\sqrt{z_m})J^1(\sqrt{z_m}(1+h)) \right) + \sqrt{z_c}J^1(\sqrt{z_c}) \left(Y^1(\sqrt{z_m})J^1(\sqrt{z_m}(1+h)) \right. \\
 & \left. - J^1(\sqrt{z_m})Y^1(\sqrt{z_m}(1+h)) \right) + J^1(\sqrt{z_c})z_m(1+h) \left(Y^1(\sqrt{z_m})J^1(\sqrt{z_m}(1+h)) \right. \\
 & \left. - J^1(\sqrt{z_m})Y^1(\sqrt{z_m}(1+h)) \right) + J^1(\sqrt{z_c})\sqrt{z_m} \left(Y^1(\sqrt{z_m})J^1(\sqrt{z_m}(1+h)) \right. \\
 & \left. - J^1(\sqrt{z_m})Y^1(\sqrt{z_m}(1+h)) \right) = \left(2(1+h)/\pi + O\left(|z_c| + h^2 \left(1 + \sqrt{|z_m|} + |z_m| \right) \right) \right) J^1(\sqrt{z_c}).
 \end{aligned}$$

Ainsi, on déduit le développement asymptotique de \widehat{E}_θ^0 . Un simple calcul montre que

$$\widehat{E}_\theta^0 = \left(1 + O\left(|z_c| + h^2 \left(1 + \sqrt{|z_m|} + |z_m| \right) \right) \right) r \frac{\mu_c J^1(\sqrt{z_c}r)}{\mu_m J^1(\sqrt{z_c})} \widehat{f}^0.$$

Par conséquent, nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Soit $f \in \mathbb{H}^3(\mathbb{T})$. Supposons qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que*

$$\frac{1}{C_0} \leq \frac{\mu_m}{\mu_c} \leq C_0$$

Soient E_r et E_θ les composantes de la solution du problème (2.26). Nous définissons E^{app} la solution dans $[0, 1] \times \mathbb{T}$ du problème suivant :

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} E^{app} + z_c E^{app} = 0 \quad , \quad (2.47a)$$

$$\mathbf{rot} E^{app} \times n = \frac{\mu_c}{\mu_m} \left(f + i \frac{z_m}{z_c} \mathcal{H} \left(\frac{df}{d\theta} \right) \right). \quad (2.47b)$$

On note par $\widehat{E}_r^{app}(\cdot, k)$ et par $\widehat{E}_\theta^{app}(\cdot, k)$ les coefficients de Fourier de chacune des composantes de E^{app} . Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}^$, nous avons*

$$z_c \left(\widehat{E}_r^k - \widehat{E}_r^{app}(\cdot, k) \right) = O \left(\left(\frac{|z_m|h}{1+|k|} + h^2 k^2 + \left| \frac{z_m}{z_c} \right| h^2 |k|^3 \right) |\widehat{f}^k| \right),$$

et

$$z_c \left(\widehat{E}_\theta^k - \widehat{E}_\theta^{app}(\cdot, k) \right) = O \left(\left(\frac{|z_m|h}{1+|k|} + h^2 k^2 + \left| \frac{z_m}{z_c} \right| h^2 |k|^3 \right) |\widehat{f}^k| \right),$$

et pour $k = 0$, on a :

$$\left(\widehat{E}_\theta^0 - \widehat{E}_\theta^{app}(\cdot, 0) \right) = O \left(|z_c| + h^2 \left(1 + \sqrt{|z_m|} + |z_m| \right) \right) r |\widehat{f}^0|.$$

Rappelons que $\mathbb{C} = [0, 1] \times \mathbb{T}$. En particulier les estimations ci-dessus impliquent :

$$|z_c| \left\| \widehat{\mathbb{E}} - \widehat{\mathbb{E}}^{app} \right\|_{(\mathbb{L}^2(\mathbb{C}))^2} = O \left(\left(|z_m| h + h^2 + \left| \frac{z_m}{z_c} \right| h^2 \right) \left| f - \widehat{f}^0 \right|_{\mathbb{H}^3(\mathbb{T})} + (|z_c|^2 + |z_c| h^2) \left| \widehat{f}^0 \right| \right).$$

pour z_m , z_c et h tendant vers zéro.

Remarque 2.6. Noter que si $\mu_m = \mu_c$ et si $\phi = z_c f / z_m$, la condition aux limites imposée pour \mathbb{E}^{app} est exactement la même que celle imposée à $\frac{\partial V^{app}}{\partial n}$ dans la Proposition 2.4.

2.5.4.2 Asymptotique dans la membrane

Dans la membrane, $\widehat{\mathbb{E}}_r^k$ a l'expression suivante, pour $k \neq 0$:

$$\widehat{\mathbb{E}}_r^k = \alpha_m^k J_{|k|}(\sqrt{z_m} r) + \beta_m^k Y_{|k|}(\sqrt{z_m} r),$$

avec α_m^k et β_m^k sont données par :

$$\alpha_m^k = \frac{Y'^{|k|}(\sqrt{z_m}) - \sqrt{z_m/z_c} (J'^{|k|}(\sqrt{z_c})/J^{|k|}(\sqrt{z_c})) Y_{|k|}(\sqrt{z_m})}{\mathcal{D}_1 + (\sqrt{z_m/z_c}) (J'^{|k|}(\sqrt{z_c})/J^{|k|}(\sqrt{z_c})) \mathcal{D}_2} \times \frac{ik \widehat{f}^k}{z_m},$$

$$\beta_m^k = - \frac{J'^{|k|}(\sqrt{z_m}) - \sqrt{z_m/z_c} (J'^{|k|}(\sqrt{z_c})/J^{|k|}(\sqrt{z_c})) J_{|k|}(\sqrt{z_m})}{\mathcal{D}_1 + (\sqrt{z_m/z_c}) (J'^{|k|}(\sqrt{z_c})/J^{|k|}(\sqrt{z_c})) \mathcal{D}_2} \times \frac{ik \widehat{f}^k}{z_m}.$$

Nous en déduisons :

$$\widehat{\mathbb{E}}_r^k = \left(\frac{J^{|k|}(\sqrt{z_m} r) Y'^{|k|}(\sqrt{z_m}) - Y^{|k|}(\sqrt{z_m} r) J'^{|k|}(\sqrt{z_m})}{\mathcal{D}_1 + (\sqrt{z_m/z_c}) (J'^{|k|}(\sqrt{z_c})/J^{|k|}(\sqrt{z_c})) \mathcal{D}_2} - \sqrt{z_m/z_c} (J'^{|k|}(\sqrt{z_c})/J^{|k|}(\sqrt{z_c})) \right)$$

$$\times \frac{J^{|k|}(\sqrt{z_m} r) Y^{|k|}(\sqrt{z_m}) - Y^{|k|}(\sqrt{z_m} r) J^{|k|}(\sqrt{z_m})}{\mathcal{D}_1 + (\sqrt{z_m/z_c}) (J'^{|k|}(\sqrt{z_c})/J^{|k|}(\sqrt{z_c})) \mathcal{D}_2} \times \frac{ik \widehat{f}^k}{z_m}.$$

En utilisant la formule de Taylor, on obtient :

$$J^{|k|}(\sqrt{z_m} r) Y'^{|k|}(\sqrt{z_m}) - Y^{|k|}(\sqrt{z_m} r) J'^{|k|}(\sqrt{z_m}) = \frac{2}{\pi \sqrt{z_m}} (1 + O(h^2 k^2)),$$

$$J^{|k|}(\sqrt{z_m} r) Y^{|k|}(\sqrt{z_m}) - Y^{|k|}(\sqrt{z_m} r) J^{|k|}(\sqrt{z_m}) = (r-1) |k| \frac{2}{\pi} + ch^2 k^2.$$

En utilisant (2.44), nous en déduisons facilement :

$$\widehat{\mathbb{E}}_r^k = \left(1 - \frac{z_m}{z_c} |k| (r-1-h) + O \left(\frac{|z_m| h}{1+|k|} + h^2 k^2 + \left| \frac{z_m}{z_c} \right| h^2 |k|^3 \right) \right) \times \frac{ik \widehat{f}^k}{z_m}.$$

Par conséquent, en faisant la somme de $k \in \mathbb{Z}^*$, on obtient le développement asymptotique de E_r dans la membrane :

$$\forall r \in [1, 1+h],$$

$$E_r = \frac{1}{z_m} \left(\frac{df}{d\theta} + i \frac{z_m}{z_c} (r-1-h) \mathcal{H} \left(\frac{d^2 f}{d\theta^2} \right) + O \left(\left(|z_m| h + h^2 \left(1 + \left| \frac{z_m}{z_c} \right| \right) \right) |f|_{\mathbb{H}^3(\mathbb{T})} \right) \right).$$

Pour \widehat{E}_θ^k , nous utilisons (2.46). Nous obtenons :

$$\forall r \in [1, 1+h]$$

$$\widehat{E}_\theta^k = \left(\frac{\sqrt{z_m} J'^{|k|}(\sqrt{z_m} r) Y'^{|k|}(\sqrt{z_m}) - \sqrt{z_m} Y'^{|k|}(\sqrt{z_m} r) J'^{|k|}(\sqrt{z_m})}{\mathcal{D}_1 + (\sqrt{z_m}/z_c)(J'^{|k|}(\sqrt{z_c})/J'^{|k|}(\sqrt{z_c})) \mathcal{D}_2} - \sqrt{z_m}/z_c (J'^{|k|}(\sqrt{z_c})/J'^{|k|}(\sqrt{z_c})) \right)$$

$$\times \frac{\sqrt{z_m} J'^{|k|}(\sqrt{z_m} r) Y'^{|k|}(\sqrt{z_m}) - \sqrt{z_m} Y'^{|k|}(\sqrt{z_m} r) J'^{|k|}(\sqrt{z_m})}{\mathcal{D}_1 + (\sqrt{z_m}/z_c)(J'^{|k|}(\sqrt{z_c})/J'^{|k|}(\sqrt{z_c})) \mathcal{D}_2} \times \frac{r \widehat{f}^k}{z_m}.$$

Avec un raisonnement analogue, on obtient :

$$\widehat{E}_\theta^k = \left(\frac{z_m}{z_c} |k| - k^2 (r-1) + \frac{z_m^2}{z_c^2} k^2 h + O \left(|z_m| h + h^2 k^2 + \left| \frac{z_m}{z_c} \right| h^2 |k|^3 \right) \right) \times \frac{\widehat{f}^k}{z_m}.$$

Une estimation simple montre que

$$\widehat{E}_\theta^0 = O \left(h \left| \widehat{f}^0 \right| \right)$$

Par conséquent, si f appartient à $\mathbb{H}^3(T)$, on obtient :

$$E_\theta = \frac{1}{z_m} \left(i \frac{z_m}{z_c} \mathcal{H} \left(\frac{df}{d\theta} \right) + \left((r-1) - \frac{z_m^2}{z_c^2} k^2 h \right) \frac{d^2 f}{d\theta^2} + O \left(\left(|z_m| h + h^2 \left(1 + \left| \frac{z_m}{z_c} \right| \right) \right) |f|_{\mathbb{H}^3(\mathbb{T})} \right) \right).$$

Donc nous avons montré la proposition suivante :

Proposition 2.4. *Soit $f \in \mathbb{H}^3(T)$. Soit E la solution de l'équation vectorielle des ondes dans toute la cellule, avec f comme condition aux limites de Neumann.*

Nous avons l'asymptotique suivante pour z_m, z_c et h tendant vers zéro, pour tout r dans $[1, 1+h]$:

$$\forall r \in [1, 1+h],$$

$$E_r = \frac{1}{z_m} \left(\frac{df}{d\theta} + i \frac{z_m}{z_c} (r-1-h) \mathcal{H} \left(\frac{d^2 f}{d\theta^2} \right) + O \left(\left(|z_m| h + h^2 \left(1 + \left| \frac{z_m}{z_c} \right| \right) \right) |f|_{\mathbb{H}^3(\mathbb{T})} \right) \right).$$

$$E_\theta = \frac{1}{z_m} \left(i \frac{z_m}{z_c} \mathcal{H} \left(\frac{df}{d\theta} \right) + \left((r-1) - \frac{z_m^2}{z_c^2} k^2 h \right) \frac{d^2 f}{d\theta^2} + O \left(\left(|z_m| h + h^2 \left(1 + \left| \frac{z_m}{z_c} \right| \right) \right) |f|_{\mathbb{H}^3(\mathbb{T})} \right) \right).$$

Remarque 2.7. Supposons $\mu_m = \mu_c = 1$. Alors, si nous fixons

$$\phi = \frac{df}{d\theta}$$

dans la proposition 2.3, nous obtenons directement l'estimation dans la membrane suivante i.e, soit pour tout $r \in [1, 1+h]$,

$$(z_m \mathbf{E} - \mathbf{grad} V)(r, \cdot) = O\left(\left(|z_m|h + h^2 \left(1 + \left|\frac{z_m}{z_c}\right|\right)\right) |f|_{\mathbb{H}^3(\mathbb{T})}\right).$$

2.5.5 La comparaison avec la formulation diélectrique dans le cytoplasme

Maintenant, nous comparons \mathbf{E} avec V^{app} donnée dans la Proposition 2.4. Nous supposons que

$$\frac{\mu_m}{\mu_c} = 1$$

Comme on a pour tout $r \in [0, 1]$, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, pour z_c tendant vers zéro :

$$\frac{J^{|k|}(\sqrt{z_c}r)}{J^{|k|}(\sqrt{z_c})} = r^{|k|} \left(1 + O\left(\sqrt{|z_c|}\right)\right),$$

nous déduisons de (2.45), pour h , z_m et z_c tendant vers zéro l'asymptotique suivante :

$$\widehat{\mathbf{E}}_r^k = \left(1 - \frac{z_m|k|h}{z_c} + O\left(\sqrt{|z_c|} \left(1 + \left|\frac{z_m}{z_c}\right| |k|h\right) + \frac{|z_m|h}{1+|k|} + \sqrt{|z_m|h^2k^2} + \left|\frac{z_m}{z_c}\right| h^2|k|^3\right)\right) \times \frac{ik\widehat{f}^k}{z_c} r^{|k|}.$$

Nous soulignons que la constante dans O dépend de k .

Rappelons l'expression asymptotique du coefficient de Fourier de V^{app} donné dans la proposition 2.4 :

$$\widehat{V}^{\text{app},k} = \frac{z_m}{z_c} \left(1 - \frac{z_m|k|h}{z_c}\right) \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} r^{|k|},$$

ainsi

$$\begin{aligned} r \frac{\partial \widehat{V}^{\text{app},k}}{\partial r} &= \frac{z_m}{z_c} \left(1 - \frac{z_m|k|h}{z_c}\right) \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} r^{|k|}, \\ ik \widehat{V}^{\text{app},k} &= \frac{z_m}{z_c} \left(1 - \frac{z_m|k|h}{z_c}\right) i \mathbf{sing}(k) \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} r^{|k|}. \end{aligned}$$

De ce fait, si $\widehat{\phi}_k = \frac{ik\widehat{f}^k}{z_m}$, nous avons montré que, pour chaque $k \in \mathbb{Z}^*$, pour tout $r \in [0, 1]$,

$$\widehat{E}_k^r - r \frac{\partial \widehat{V}^{app,k}}{\partial r} = O\left(\sqrt{|z_c|} \left(1 + \left|\frac{z_m}{z_c}\right| |k|h\right) + \frac{|z_m|h}{1+|k|} + \sqrt{|z_m|} h^2 k^2 + \left|\frac{z_m}{z_c}\right| h^2 |k|^3\right) \times \frac{|k\widehat{f}^k|}{|z_c|} r^{|k|}.$$

Par conséquent, nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème 2.3. *Soit $f \in \mathbb{H}^3(\mathbb{T})$. Soient E_r et E_θ les composantes de la solution du problème (2.26). Soit ϕ la fonction suivante*

$$\phi = \frac{df}{d\theta},$$

et V^{app} est donné dans la Proposition 2.3

Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, nous avons

$$z_c \widehat{E}_k^\theta - i \frac{z_c}{z_m} k \widehat{V}^{app,k} = O\left(\sqrt{|z_c|} \left(1 + \left|\frac{z_m}{z_c}\right| |k|h\right) + \frac{|z_m|h}{1+|k|} + \sqrt{|z_m|} h^2 k^2 + \left|\frac{z_m}{z_c}\right| h^2 |k|^3\right) \times |\widehat{f}^k| r^{|k|},$$

Et

$$z_c \widehat{E}_k^r - r \frac{z_c}{z_m} \frac{\partial \widehat{V}^{app,k}}{\partial r} = O\left(\sqrt{|z_c|} \left(1 + \left|\frac{z_m}{z_c}\right| |k|h\right) + \frac{|z_m|h}{1+|k|} + \sqrt{|z_m|} h^2 k^2 + \left|\frac{z_m}{z_c}\right| h^2 |k|^3\right) \times |\widehat{f}^k| r^{|k|}.$$

En particulier, nous en déduisons, quand z_m , z_c et h tendent vers zéro :

$$\begin{aligned} \left\| z_c E - i \frac{z_c}{z_m} \mathbf{grad}(V^{app}) \right\|_{(\mathbb{L}^2(C))^2} &= O\left(\sqrt{|z_c|} \left(1 + \left|\frac{z_m}{z_c}\right| h\right) + |z_m|h \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{|z_m|} h^2 + \left|\frac{z_m}{z_c}\right| \right) |f - \widehat{f}^0|_{\mathbb{H}^3(\mathbb{T})} + |z_c| |\widehat{f}^0|. \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] Toufic Abboud and Jean-Claude Nédélec. Electromagnetic waves in an inhomogeneous medium. *J. Math. Anal. Appl.*, 164(1). 1992, 40–58.
- [2] Alberts.Johnson.Lewis.Raff.Roberts and Walter. Molecular biology of the cell. *Garland Science, NY. Fourth Edition*, 2002.
- [3] Balanis and Constantine. Advanced engineering electromagnetics. *John Wiley and Sons Ltd*, 1989.
- [4] Haïm Brézis. Analyse fonctionnelle. *Masson. Paris*, 1983.
- [5] E.C. Fear and M.A. Stuchly. Modeling assemblies of biological cells exposed to electric fields. *IEEE Trans.Bio.Eng.*, 45(1)., page 1259–1271, 1998.
- [6] E.C. Fear and M.A. Stuchly. A novel equivalent circuit model for gap-connected cells. *Phys.Med. Biol.*,43, page 1439–1448, 1998.
- [7] K.R. Foster and H.P. Schwan. Dielectric properties of tissues and biological materials : a critical review. *CRC in Biomedical Engineering*, 17(1), page 25–104, 1989.
- [8] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart. Finite element methods for navier-stokes equations, volume 5. *Springer-Verlag. Berlin*, 1986.
- [9] Yitzhak Katznelson. An introduction to harmonic analysis. *Dover Publications Inc., New York, corrected edition*, 1976.
- [10] J.L. Lions and E. Magenes. Problèmes aux limites non homogènes et applications. vol. 1. travaux et recherches mathématiques, no. 17. *Dunod, Paris*, 1968.
- [11] Clair Poignard. Méthodes asymptotiques pour le calcul des champs Électromagnétiques dans des milieux à couches minces. application aux cellules biologiques. *Thèse de Doctorat Université CLAUDE BERNARD-LYON 1*, 2006.
- [12] Clair Poignard. Asymptotic estimates of the electric field in a biological cell at low frequencies. *Brown University, Providence R.I, U.S.A, June 2005.*, 20–24.

- [13] G. N. Watson. A treatise on the theory of bessel functions. *Cambridge University Press. Cambridge. England*, 1944.