MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU.
FACULTÉ : DES SCIENCES
DÉPARTEMENT : MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master II
Spécialité
MATHÉMATIQUES
Option
Modélisation Mathématique

Sujet :

Sur les fonctions presque périodiques à valeurs vectorielles

Réalisé par :

Slimi Karima

Dirigé par :

M^{me} **Daoui Amina**

Devant le jury d'examen composé de :

Mohammed Morsli	Prf.	U.M.M.T.O.	Président
Amina Daoui	M.C.B.	U.M.M.T.O.	Rapporteur
Manel Smaali	M.C.A.	U.M.M.T.O.	Examinatrice
Omar Mellah	M.C.B.	U.M.M.T.O.	Examinateur

Soutenu le 30/ 09 / 2015

Remerciements

Je remercie avant tout, le bon Dieu de m'avoir donné le courage et la volonté, pour l'élaboration de ce travail.

Je tiens à exprimer mon profond respect et ma reconnaissance à ma promotrice, Madame **Daoui.A** qui ma fait l'honneur de diriger ce travail, pour son aide, sa gentillesse, ses conseils, ses encouragements, sa grand disponibilité et son ouverture d'esprit qui m'ont aidé à mener à bien ce travail.

Je remercie également le président ainsi que les membres de jury pour l'honneur qu'ils me font en jugeant ce travail.

Je tiens à remercier aussi tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation de prés ou de loin.

Merci infiniment à tous

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mon père et ma mère ;

À mes sœurs et mes frères ;

À mes très chères amies : Zahra, Marilia, Fadhila ;

À toute la promotion 2014/2015 ;

À ceux que j'aime et m'aiment.

Karima

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale

La théorie des fonctions presque périodiques a joué un rôle important dans différentes branches de Mathématiques. Elle à été introduite pour la première fois par le mathématicien danois **Harald Bohr**[1] entre les années 1923 et 1925. La définition de Bohr est claire et simple mais les démonstrations des résultats principaux étaient difficiles et compliquées. Par la suite, en 1933 **S. Bochner**[2] a donné une autre définition au cas des fonctions à valeurs dans un espace de Banach quelconque qui fournit un moyen plus court et plus efficace pour obtenir certains résultats.

Rappelons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, continue est dite satisfaire :

1. Le critère de Bohr si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists l > 0,$ tel que $: \forall a \in \mathbb{R}, [a, a+l]$ contient un nombre τ vérifiant : $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t+\tau) - f(t)| \leq \varepsilon$.
2. Le critère de Bochner si : de toute suite $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$, on peut exraire une sous suite $(\alpha_{n'})$ telle que $(f(. + \alpha_{n'}))_{n'}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
3. Le critère d'approximation si : il existe une suite de polynôme trigonométriques généralisés $(P_n)_n,\ P_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k t}, c_k \in \mathbb{C}, \lambda_k \in \mathbb{R},$

[1] Né le 22 Avril 1887 à Copenhague, Danemark et mort le 22 Janvier 1951 à Copenhague.

[2] Né le 20 Aout 1899 à Houston et mort le 2 Mai 1982 à Houston.

convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f

Ces trois critères définissent la même classe de fonctions dites uniformément presque périodiques. En outre, pour toute fonction uniformément presque périodique, la quantité $\lim\limits_{T \longrightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{-i\lambda t}dt$ existe et est nulle sauf sur un ensemble au plus dénombrable de λ. Les λ pour lesquels $a(\lambda) = \lim\limits_{T \longrightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{-i\lambda t}dt \neq 0$ sont appelés exposants de Fourier et les $a(\lambda)$ coefficients de Fourier associés à f. La série de Fourier associée à f est, donc, donnée par : $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a(\lambda_k)e^{i\lambda_k t}$

Dans ce travail, nous allons présenter l'équivalence entre ces trois critères dans le cas où f est à valeurs dans un espace de Banach.

Le mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous exposerons les différentes définitions et propriétés des fonctions presque périodiques à valeurs dans un espace de Banach. Plus particulièrement, on verra que la notion de presque périodicité au sens de Bohr et au sens de Bochner coïncident. On terminera ce chapitre par une application aux systèmes dynamiques.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons la notion de série de Fourier d'une fonction presque périodique à valeurs dans un espace de Banach afin de présenter le principal résultat de cette partie : l'approximation d'une fonction presque périodique par des polynômes trigonométriques particuliers, les polynômes de Bochner-Féjer.

A la fin de ce mémoire nous avons mis une annexe où nous avons consigné les différents résultats de topologie et d'analyse fonctionnelle que nous avons utilisé tout au long de ce mémoire, ainsi qu'un bref exposé sur l'intégrale de Bochner.

CHAPITRE 1

Fonctions presque périodiques à valeurs dans un espace de Banach

1.1 Introduction

La théorie des fonctions presque périodiques à été établie par H. Bohr et développée par S. Bochner. La définition donnée par ce dernier est équivalente à celle donnée par Bohr, mais plus maniable.
Nous exposons dans ce chapitre les différentes définitions et propriétés essentielles des fonctions presque périodique à valeurs vectorielles. On terminera par une brève application aux systèmes dynamiques.
Pour plus de détails concernant les résultats cités dans ce chapitre, on peut consulter les références [1], [12], [4], [6], [7] et [20].

1.2 Fonctions presque périodiques de Bohr

Dans cette section, nous présentons quelques propriétés des fonctions vectorielles presque périodiques au sens de Bohr.
Tout au long de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{E}$ un espace de

Banach et $\mathbb{C}_b(\mathbb{E},\mathbb{R})$ désigne l'espace de Banach des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E, muni de la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$: $\|f\| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|$

1.2.1 Définitions

Définition 1.1. Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dit relativement dense dans $\mathbb{R}$ s'il existe un nombre réel $l > 0$ pour lequel tout intervalle de longueur l rencontre A, i.e.,

$$\exists l > 0, \forall a \in \mathbb{R} : [a, a+l] \cap A \neq \emptyset.$$

Exemple 1.1.
1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est relativement dense puisque tout intervalle de longueur 1 contient un élément de $\mathbb{Z}$.
2. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas relativement dense puisque pour tout $l > 0$, l'intervalle
$$[-1-l, -1] \cap \mathbb{N} = \emptyset.$$
3. L'ensemble $\{\pm\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}\}$ est relativement dense. En effet,
Soit $a > 0$. Alors $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^2 \leq n \leq a^2 + 1 \leq (a+1)^2$, d'où $a \leq \sqrt{n} \leq a+1$. Par consequent $\forall a > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n} \in [a, a+1]$.
Pour $a < 0$, il suffit d'appliquer ce qui précède à $-a$.
4. L'ensemble $\{\pm n^2, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas relativement dense.
En effet, pour tout $l > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2n > l$.
L'intervalle $[n^2 + 1, n^2 + l + 1]$ est de longueur l et est strictement contenu dans $[n^2, (n+1)^2]$.

A présent, nous pouvons énoncer la définition de la presque périodicité de Bohr :

Définition 1.2. Une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ est dite uniformément presque périodique en brève *u.p.p.* si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$T(f,\varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{R}, \sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t+\tau) - f(t) \|_E < \varepsilon\}$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $l = l(\varepsilon) > 0$ tel que

$$T(f,\varepsilon) \cap [a, a+l] \neq \emptyset, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.3. Un nombre réel $\tau \in T(f,\varepsilon)$ est dit ε-presque période ou ε-translation de f. Le réel positif $l(\varepsilon)$ est dit longueur d'inclusion associée à ε. L'ensemble de toutes les longueurs d'inclusion associées à ε est noté $L(f,\varepsilon)$.

Commençant d'abord par donner quelques propriétés concernant les ensembles des ε-translations et longueurs d'inclusion.

Proposition 1.1. *1. $T(f,\varepsilon) \subset T(f,\varepsilon')$ avec $\varepsilon \leq \varepsilon'$.*

2. $\tau \in T(f,\varepsilon) \Rightarrow -\tau \in T(f,\varepsilon)$.

3. Si τ_1 et τ_2 sont dans $T(f,\varepsilon_1)$ et $T(f,\varepsilon_2)$ respectivement alors $\tau_1 \pm \tau_2$ est dans $T(f,\varepsilon_1+\varepsilon_2)$.

Démonstration.

1. évidente.

2. $\tau \in T(f,\varepsilon) \Rightarrow \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\|_E = \sup\limits_{t'\in\mathbb{R}} \|f(t') - f(t'-\tau)\|_E \leq \varepsilon.$
D'où, $-\tau \in T(f,\varepsilon)$.

3. On a :

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(t+\tau_1+\tau_2)\|_E &\leq \|f(t) - f(t+\tau_1)\|_E + \|f(t+\tau_1) - f(t+\tau_1+\tau_2)\|_E \\ &\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t) - f(t+\tau_1+\tau_2)\|_E \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Ce que veut dire que

$$\tau_1 + \tau_2 \in T(f,\varepsilon_1+\varepsilon_2).$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\|f(t)-f(t+\tau_1-\tau_2)\|_E &\leq \|f(t)-f(t+\tau_1)\|_E+\|f(t+\tau_1)-f(t+\tau_1-\tau_2)\|_E\\ &\leq \varepsilon_1+\varepsilon_2.\end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)-f(t+\tau_1-\tau_2)\|_E \leq \varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

Ce que veut dire que

$$\tau_1-\tau_2\in T(f,\varepsilon_1+\varepsilon_2).$$

Lemme 1.1. *L'ensemble $T(f,\varepsilon)$ est fermé.*

Démonstration. *Soit $\tau_n\in T(f,\varepsilon)$, tel que*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\tau_n=\bar{\tau}.$$

Alors

$$\| f(t+\tau_n)-f(t) \|_E\leq \varepsilon, \forall t\in\mathbb{R}.$$

Faisant tendre n vers l'infini, on obtient :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\| f(t+\tau_n)-f(t) \|_E\leq \varepsilon, \forall t\in\mathbb{R}.$$

Par continuité des fonctions f et $\| \,.\, \|_E$, on déduit que

$$\| f(t+\bar{\tau})-f(t) \|_E\leq \varepsilon, \forall t\in\mathbb{R}.$$

i.e. $\bar{\tau}\in T(f,\varepsilon)$. □

Proposition 1.2. *Soit $\bar{l}(\varepsilon)=\inf L(f,\varepsilon)$. Alors, $\bar{l}(\varepsilon)\geq 0$ et $\bar{l}(\varepsilon)\in L(f,\varepsilon)$.*

Démonstration. *De la caractérisation de la borne* inf *de l'ensemble $L(f,\varepsilon)$, on a :*

$$\forall n\in\mathbb{N}, \exists l_n\in L(f,\varepsilon) \text{ tel que } \bar{l}(\varepsilon)<l_n\leq \bar{l}(\varepsilon)+\tfrac{1}{n}.$$

Soit maintenant $a \in \mathbb{R}$. *L'intervalle* $[a, a + l_n]$ *est inclu dans* $[a, a + \bar{l}(\varepsilon) + \frac{1}{n}]$. *Donc,* $[a, a + \bar{l}(\varepsilon) + \frac{1}{n}]$ *contient au moins un nombre* $\tau_n \in T(f, \varepsilon)$. *Soit* $(\tau_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ *une sous suite de* $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *convergente et soit* $\bar{\tau}$ *sa limite. Comme* $a \leq \tau_{n_k} \leq a + \bar{l} + \frac{1}{n_k}$. *Par passage à la limite, on obtient :*

$$a \leq \lim_{k \longrightarrow \infty} \tau_{n_k} = \bar{\tau} \leq a + \bar{l}.$$

De par le lemme 1.1 on sait que $\bar{\tau}$ *est dans* $T(f, \varepsilon)$*, on en déduit que tout intervalle de longueur* $\bar{l}$ *contient une* ε*- translation de* f*, i.e.* $\bar{l} \in L(f, \varepsilon)$. □

Remarque 1.1. Si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ alors $L(f, \varepsilon_1) \subset L(f, \varepsilon_2)$ et $\bar{l}(\varepsilon_2) \leq \bar{l}(\varepsilon_1)$.
En effet, soit $l \in L(f, \varepsilon_1)$, alors $[a, a + l] \cap T(f, \varepsilon_1) \neq \emptyset, \forall a \in \mathbb{R}$.
Ce qui implique que

$$[a, a + l] \cap T(f, \varepsilon_2) \neq \emptyset, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Donc, $l \in L(f, \varepsilon_2)$.

Nous pouvons conclure que la fonction $\varepsilon \longrightarrow \bar{l}(\varepsilon)$ est décroissante.

Proposition 1.3. *Soit* f *une fonction uniformément presque périodique, si l'ensemble* $\{\bar{l}(\varepsilon)\}_{0<\varepsilon<1}$ *est borné. Alors* f *est périodique.*

Démonstration. *Supposons que* $\exists l > 0$ *t.q.* $\forall \varepsilon \in]0, 1[$*, on a* $0 \leq \bar{l}(\varepsilon) < l$.
Dans l'intervalle $[l, 2l]$*, on peut trouver alors* $\tau_n \in T(f, \frac{1}{n})$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc :

$$\| f(t + \tau_n) - f(t) \|_E \leq \frac{1}{n}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

De plus, la suite $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *admet une sous suite* $(\tau_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ *convergente dans* $[l, 2l]$ *vers* τ^* *(* $[l, 2l]$ *est compact).*
Par passage à la limite on a :

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \| f(t + \tau_{n_k}) - f(t) \|_E \leq \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{1}{n_k}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Comme f *et* $\| \,.\, \|_E$ *sont continues alors*

$$\| f(t + \tau^*) - f(t) \|_E = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

D'où, f est périodique. $\square$

Dans ce qui suit, on présentera certaines propriétés élémentaires des fonctions presque périodiques. Nous les retrouverons avec plus de détails dans les références [1], [4], [14] et [20].

1.2.2 Propriétés des fonctions Bohr presque périodiques

Proposition 1.4. *Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ est u.p.p. Alors pour tout $a \in \mathbb{K}$, et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les fonctions $af(t)$ et $f_\alpha(t) = f(\alpha + t)$ sont aussi u.p.p.*

Démonstration.

1. *Soient $a \in \mathbb{K}^*$, et $\tau \in T(f, \frac{\varepsilon}{|a|})$. Alors*

$$\| af(t+\tau) - af(t) \|_E = |a| \, \| f(t+\tau) - f(t) \|_E \leq \varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Il s'ensuit que :

$$T(f, \tfrac{\varepsilon}{|a|}) \subseteq T(af, \varepsilon),$$

par consequent $T(af, \varepsilon)$ est relativement dense et af est u.p.p.

2. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $\tau \in T(f, \varepsilon)$. On a alors*

$$\|f_\alpha(t+\tau) - f_\alpha(t)\|_E = \|f(\alpha + t + \tau) - f(\alpha + t)\|_E \leq \varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Par consequent $T(f, \varepsilon) \subseteq T(f_\alpha, \varepsilon)$, et f_α est u.p.p. En fait on a l'égalité des deux ensembles : pour $\tau \in T(f_\alpha, \varepsilon)$, on a aussi

$$\begin{aligned} \|f(t+\tau) - f(t)\|_E &= \|f((t-\alpha) + \alpha + \tau) - f((t-\alpha) + \alpha)\|_E \\ &= \|f_\alpha(t - \alpha + \tau) - f_\alpha(t-\alpha)\|_E \leq \varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Proposition 1.5. *Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ est u.p.p. alors f est bornée et uniformément continue.*

Démonstration.

1. *Montrons que f est bornée : pour $\varepsilon = 1$, considérons $\bar{l} = \inf L(f, 1)$ et soit $t \in \mathbb{R}$, l'intervalle $[-t, -t + \bar{l}]$ contient une 1-translation de f soit τ. On a alors : $t + \tau \in [0, \bar{l}]$. Comme f est continue, elle est bornée sur le compact $[0, \bar{l}]$. Par consequent*

$$\begin{aligned} \| f(t) \|_E &\leq \| f(t) - f(t+\tau) \|_E + \| f(t+\tau) \|_E \\ &\leq 1 + \sup_{t \in [0,\bar{l}]} \| f(t) \|_E \,. \end{aligned}$$

   t étant quelconque, on en déduit que f est bornée.

2. *Montrons que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $l \in L(f, \frac{\varepsilon}{3})$. Sur l'intervalle $[0, 2l]$, f est uniformément continue, soit alors $\delta \in]0, 1[$ tel que $\|f(t_1) - f(t_2)\|_E \leq \frac{\varepsilon}{3}$ dès que t_1, t_2 sont dans $[0, l + 2]$ et tels que $|t_1 - t_2| < \delta$.*
   Soient maintenant t', t'' deux réels tels que $|t' - t''| < \delta$. L'intervalle $[-t' + 1, -t' + 1 + l]$ contient une $\frac{\varepsilon}{3}$-translation de f, soit τ. On a alors $t' + \tau \in [1, l]$. Du fait que $t'' - t' \in] - \delta, \delta[$ on obtient : $t'' + \tau \in [0, 2 + l]$

$$\begin{aligned} \|f(t') - f(t'')\|_E &\leq \|f(t') - f(t'+\tau)\|_E + \|f(t'+\tau) - f(t''+\tau)\|_E \\ &+ \|f(t''+\tau) - f(t'')\|_E \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

   D'où f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Nous allons maintenant énoncer un théorème très utile en théorie des fonctions presque périodiques.

Théorème 1.1. *Soit $\varepsilon > 0$, et soient f_1 et f_2 deux fonctions presque périodiques, alors $T(f_1, \varepsilon) \cap T(f_2, \varepsilon)$ est relativement dense.*

La preuve de ce théorème repose sur les deux lemmes suivants :

Lemme 1.2. *Soit f une fonction presque périodique et soient ε_1 et ε_2 deux nombres positifs ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2$), alors il existe $\delta > 0$ tel que $\tau + \theta \in T(f, \varepsilon_2)$, $\forall \tau \in T(f, \varepsilon_1)$ et $\forall \theta \in] - \delta, +\delta[$.*

Démonstration.

f étant presque périodique, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
Il existe alors $\delta > 0$ tel que $|x - x'| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\|_E \leq \varepsilon_2 - \varepsilon_1$.
Autrement dit il existe $\delta > 0$ tel que $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|f(x) - f(x+\theta)\|_E \leq \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ dès que $\theta \in]-\delta, +\delta[$.
Ce qui entraîne l'inclusion $]-\delta, +\delta[\subset T(f, \varepsilon_2 - \varepsilon_1)$. La conclusion découle de la propriété 3 de la proposition (1.1).

Lemme 1.3. *Soient ε, δ deux nombres positifs arbitraires et f_1, f_2 deux fonctions presque périodiques. Alors l'ensemble des nombres de $T(f_1, \varepsilon)$ dont la distance à $T(f_2, \varepsilon)$ est inférieure à δ est relativement dense.*

Démonstration.

Considérons les ensembles $T(f_1, \frac{\varepsilon}{2})$ et $T(f_2, \frac{\varepsilon}{2})$ et soit $l = k\delta; k \in \mathbb{N}$ une longueur d'inclusion associée aux deux ensembles. (Une façon de choisit l est de prendre $k \in \mathbb{N}$ tel que : $k\delta \geq \max(l_1, l_2)$ où $l_1 \in L(f_1, \frac{\varepsilon}{2})$ et $l_2 \in L(f_2, \frac{\varepsilon}{2})$).
Subdivisons tout l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ en des sous-intervalle $[(n-1)l, nl[$, avec $n \in \mathbb{Z}$.
Dans tout intervalle $[(n-1)l, nl[$ on peut trouver des nombres $\tau_1^{(n)}, \tau_2^{(n)}$ appartenant respectivement à $T(f_1, \frac{\varepsilon}{2})$ et à $T(f_2, \frac{\varepsilon}{2})$.
Ces nombres vérifient les inégalités suivantes :

$$-l \leq \tau_1^{(n)} - \tau_2^{(n)} \leq l.$$

Notons par λ_i l'intervalle $[(i-1)\delta, i\delta[$ avec $i = -k+1, ..., k$.
Les nombres $\tau_1^{(n)} - \tau_2^{(n)}$ appartiennent toujours à l'un des intervalle λ_i.

On peut affirmer qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier n correspond un entier n' $(-n_0 \leq n' \leq n_0)$ pour lequel la différence $\tau_1^{(n')} - \tau_2^{(n')}$ appartient au même intervalle λ_i que la différance $\tau_1^{(n)} - \tau_2^{(n)}$. (Ce résultat sera démontré ci dessous.)

En ce cas, nous avons

$$\tau_1^{(n)} - \tau_2^{(n)} = \tau_1^{(n')} - \tau_2^{(n')} + \theta\delta \quad (-1 \leq \theta \leq +1).$$

Ou

$$\tau_1^{(n)} - \tau_1^{(n')} = \tau_2^{(n)} - \tau_2^{(n)} + \theta\delta.$$

D'après la propriétés 3 *des* ε*-translations* $\tau_1^{(n)} - \tau_1^{(n)}$ *et* $\tau_2^{(n)} - \tau_2^{(n')}$ *appartient respectivement à* $T(f_1, \varepsilon)$ *et* $T(f_2, \varepsilon)$.
D'où, tout nombres $\tau_1^{(n)} - \tau_1^{(n')}$ *de* $T(f_1, \varepsilon)$ *est à une distance inférieur à* δ *de l'ensemble* $T(f_2, \varepsilon)$.
Considérons maintenant l'ensemble $A = \{\tau_1^{(n)} - \tau_1^{(n')}; n \in \mathbb{N}\}$.
Calculons le module de la différence de deux nombres consécutifs de l'ensemble A.

$$\mid \overbrace{\tau_1^{(n)} - \tau_1^{(n')}}^{a_n} - \overbrace{(\tau_1^{(n-1)} - \tau_1^{(n-1)'})}^{a_{n-1}} \mid \leq \mid \tau_1^{(n)} - \tau_1^{(n-1)} \mid + \mid \tau_1^{(n-1)'} - \tau_1^{(n')} \mid .$$

On a :

$$(n-1)l \leq \tau_1^n \leq nl$$

et

$$(n-2)l \leq \tau_1^{n-1} \leq (n-1)l.$$

Ce qui implique que

$$0 \leq \tau_1^{(n)} - \tau_1^{(n-1)} \leq 2l.$$

I.e.

$$\mid \tau_1^{(n)} - \tau_1^{(n-1)} \mid \leq 2l.$$

D'autre parts :

$$\tau_1^{(n')} \in [(-n_0 - 1)l, n_0 l[$$

et

$$\tau_1^{(n-1)')} \in [(-n_0 - 1)l, n_0 l[.$$

La longueur de ce dernier intervalle est égale $2n_0 + l$*, il s'ensuit que*

$$\tau_1^{(n-1)'} - \tau_1^{(n')} \leq (2n_0 + 1)l.$$

D'où

$$\mid a_n - a_{n-1} \mid \leq (2n_0 + 3)l.$$

En déduit donc que A est relativement dense.

Montrons maintenant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n correspond un entier n' $(-n_0 \leq n' \leq n_0)$ tel que $\tau_1^{(n)} - \tau_2^{(n)}$ et $\tau_1^{(n')} - \tau_2^{(n')}$ appartiennent au même intervalle λ_i.

Pour cela supposons le contraire :
$\forall n \in \mathbb{N}, \exists n_0$ *tel que :* $\forall n' \in \{-n, ..., 0, ..., n\}$
$\tau_1^{(n_0)} - \tau_2^{(n_0)}$ *et* $\tau_1^{(n')} - \tau_2^{(n')}$ *appartient à des intervalles* λ_i *différents.*

1ière étape :

Pour $n = 1$ $\exists n_1$ tel que $\forall n' \in \{-1, 0, 1\}$: $\tau_1^{(n_1)} - \tau_2^{(n_1)}$ et $\tau_1^{(n')} - \tau_2^{(n')}$ appartient à des intervalles λ_i différents. En particulier $\tau_1^{(n_1)} - \tau_2^{(n_1)}$ et $\tau_1^1 - \tau_2^1$ sont dans des intervalles λ_i différents.

2ième étape

Pour $n = n_1$ $\exists n_2$ tel que : $\forall n' \in \{-n_1, ..., 0, ..., n_1\}$, $\tau_1^{(n_2)} - \tau_2^{(n_2)}$ et $\tau_1^{(n')} - \tau_2^{(n')}$ sont dans des intervalles λ_i différents. En particulier $\tau_1^{(n_2)} - \tau_2^{(n_2)}$, $\tau_1^{(n_1)} - \tau_2^{(n_1)}$), et $\tau_1^1 - \tau_2^1$ sont tous dans des intervalles λ_i différents. Ici on remarque que $n_2 \geq n_1$

3ième étape

Pour $n = n_2$ $\exists n_3$ avec $n_3 > n_2$ tel que :
$\forall n' \in \{-n_2, ..., -n_1, ..., -1, 0, 1, ..., n_1, ..., n_2\}$. $\tau_1^{(n')} - \tau_2^{(n')}$ *et* $\tau_1^{(n_3)} - \tau_2^{(n_3)}$ *sont dans intervalles* λ_i *différents.*

Ainsi de suite, on peut alors construire à la k+1 ième étape

$$1, n_1, n_2, n_3, ..., n_{k+1}$$

tels que : $\tau_1^1 - \tau_2^1, \tau_1^{n_1} - \tau_2^{n_1}, ..., \tau_1^{n_{k+1}} - \tau_2^{n_{k+1}}$ sont tous dans des intervalles

λ_i *différents. Or le nombre des* λ_i *est égale à* k *contradiction.*

Montrons à présent le théorème :
Soit $\varepsilon_1 > 0$ *tel que* $\varepsilon_1 < \varepsilon$.
Par le lemme 1.2, il existe un $\delta > 0$ *tel que :* $\forall \tau \in T(f_1, \varepsilon_1), \forall \theta \in]-\delta, +\delta[$, *on a :* $\tau + \theta \in T(f_1, \varepsilon)$.
Maintenant par le lemme 1.3, l'ensemble G *des éléments de* $T(f_2, \varepsilon_1)$ *qui sont distants des éléments de* $T(f_1, \varepsilon_1)$ *d'une distance inférieur à* δ *est relativement dense. Comme* G *est inclut dans* $T(f_1, \varepsilon)$.
Donc, $T(f_2, \varepsilon_1) \cap T(f_1, \varepsilon)$ *est relativement dense.*
Par conséquent, $T(f_2, \varepsilon) \cap T(f_1, \varepsilon)$ *est relativement dense.*
Grace au théorème 1.1 on peut montrer que la somme de deux fonctions presque périodiques est presque périodique.

Proposition 1.6. *La somme de deux fonctions presque périodiques* f_1, f_2 *est presque périodique.*

Démonstration. *Soit* $\varepsilon > 0$, *et soit* $\tau \in T(f_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cap T(f_2, \frac{\varepsilon}{2})$. *On a alors*

$$\|f_1(t+\tau) + f_2(t+\tau) - f_1(t) - f_2(t)\|_E \leq \varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}.$$

On en conclut que $T(f_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cap T(f_2, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq T(f_1 + f_2, \varepsilon)$, *par le théorème 1.1* $T(f_1 + f_2, \varepsilon)$ *est relativement dense. Ce qui prouve la proposition.*

Proposition 1.7. *Soit* $f_n(t)$ *une suites de fonctions u.p.p. telle que* $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ *existe uniformément sur* $\mathbb{R}$. *Alors la fonction* $f(t)$ *est presque périodique.*

Démonstration. *Supposons que la suite de fonctions u.p.p.* $\{f_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ *est telle que* $f_n(.)$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers la fonction* $f(.)$. *Alors,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tel que } \| f(t) - f_n(t) \|_E \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \geq n_0.$$

Soit maintenant $\tau \in T(f_{n_0}, \frac{\varepsilon}{3})$ *Nous avons alors*

$$\begin{aligned}\|f(t+\tau) - f(t)\|_E &\leq \|f(t+\tau) - f_{n_0}(t+\tau)\|_E + \|f_{n_0}(t+\tau) - f_{n_0}(t)\|_E \\ &+ \|f_{n_0}(t) - f(t)\|_E \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } T(f_{n_0}, \tfrac{\varepsilon}{3}) \subset T(f, \varepsilon).$$

Ce qui veut dire que $T(f, \varepsilon)$ *est relativement dense pour tout* ε *:* f *est presque périodique sur* $\mathbb{R}$.

Proposition 1.8. *Soit* f *une fonction continue presque périodique, l'ensemble* $R_f = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$ *est relativement compact dans* E.

Démonstration. *Un ensemble* $K \subset E$ *est dit relativement compact, si pour tout suite dans* K*, on peut extraire une sous-suite convergente dans* K*. Dans un espace de Banach, la compacité relative coïncide avec la précompacité ou ce qu'on appelle par totale bornitude. Il suffit de montrer que pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un nombre fini des boules de rayon* ε *dans* E*, telles que leur réunion couvre l'ensemble* $\{f(x), x \in \mathbb{R}\}$.
Soit $\varepsilon > 0$ *et* $l \in L(f, \frac{\varepsilon}{2})$ *une longueur d'inclusion de* f *associée à* $\frac{\varepsilon}{3}$*. Comme* f *est continue sur le compact* $[0, l]$*, on déduit alors que l'ensemble* $\{f(x), x \in [0, l]\}$ *est compact dans* E.
On prend $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *les centres des boules qui couvrent* $\{f(x), x \in [0, l]\}$.
Soit maintenant, $t \in \mathbb{R}$ *et* $\tau \in T(f, \varepsilon) \cap [-t, -t+l]$*. Comme* $t + \tau \in [0, l]$*, alors il existe* $e_i \in \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *tel que* $f(t+\tau) \in B(e_i, \varepsilon)$*. Où* $B(e_i, \varepsilon)$ *est la boule de centre* e_i *et de rayon* ε*, donc*

$$\| f(t+\tau) - e_i \|_E \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent

$$\| f(t) - e_i \|_E \leq \| f(t) - f(t+\tau) \|_E + \| f(t+\tau) - e_i \|_E \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Finalement, on déduit que

$$\{f(x), x \in \mathbb{R}\} = \bigcup_{i=1}^{n} B(e_i, \varepsilon).$$

□

1.3 Fonctions normales

Cette classe de fonctions à été défini par Bochner entre les années 1920 et 1930 et donne un moyen plus efficace pour vérifier les propriétés algébriques et topologiques des fonctions presque périodique. En effet cette dernière est équivalente à la classe de fonctions presque périodiques au sens de Bohr.

Définition 1.4. Une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ est presque périodique au sens de Bochner si elle est normale. c.à.d. si pour tout suite $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, on peut extraire une sous-suite $\{h'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\{f(. + h'_n)\}_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

1.3.1 Propositions élémentaires

Dans ce qui suit, nous allons présenter certaines propriétés essentielles des fonctions normales.

Proposition 1.9. *Toute fonction normale est bornée.*

Démonstration. *Supposons que f n'est pas bornée ; dans ce cas on peut trouver une suite $\{t_n\} \subseteq \mathbb{R}$, telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \|f(t_n)\|_E = +\infty$. Mais alors, pour toute sous-suite $\{t_{n_k}\}_k$ de la suite $\{t_n\}_n$, la suite de fonctions $\{f(. + t_{n_k})\}_k$ ne converge pas au point $t = 0$ et donc ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$. D'où, f n'est pas normale.*

Proposition 1.10. *Si la fonction $f(t) : \mathbb{R} \longrightarrow E$ est normale alors*

$$\sup_{t\geq 0} \| f(t) \|_E = \sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t) \|_E .$$

Démonstration. *Il suffit de montrer que* $\sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t) \|_E \leq \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \| f(t) \|_E$. *De la suite des translatées* $\{f(t+n)\}_{n\in\mathbb{N}}$*, on peut extraire une sous suite* $\{f(t+n_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim_{k\longrightarrow\infty} f(t+n_k) = g(t)$ *uniformément sur* $\mathbb{R}$*. i.e.* $\forall\varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ *tel que :*

$$k \geq k_0 \Rightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t+n_k) - g(t) \|_E \leq \varepsilon.$$

Ceci est equivalent à : $\forall\varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ *tel que :*

$$k \geq k_0 \Rightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t) - g(t-n_k) \|_E \leq \varepsilon.$$

Cette dernière veut dire que $\lim_{k\longrightarrow\infty} g(t-n_k) = f(t)$*, uniformément sur* $\mathbb{R}$*.*

Soit maintenant $t_0 < 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $k \geq k_0 \Rightarrow t_0 + n_k \geq 0$*. Donc*

$$\| f(t_0+n_k) \|_E \leq \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \| f(t) \|_E, \forall k \geq k_0.$$

Par passage à la limite on aura : $\| g(t_0) \|_E \leq \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \| f(t) \|_E$ *. Cette inégalité reste valable pour tout* $t \geq 0$*, on en déduit alors :*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \| g(t) \|_E \leq \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \| f(t) \|_E .$$

D'autres parts :

$$\| g(t-n_k) \|_E \leq \sup_{u\in\mathbb{R}} \| g(u) \|_E, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Par passage à la limite on obtient :

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \| g(t-n_k) \|_E \leq \sup_{u\in\mathbb{R}} \| g(u) \|_E \leq \sup_{u\in\mathbb{R}^+} \| f(u) \|_E .$$

Mais $\lim_{k\longrightarrow+\infty} g(t-n_k) = f(t), \ \forall t \in \mathbb{R}$*. D'où*

$$\| f(t) \|_E \leq \sup_{u\in\mathbb{R}^+} \| f(u) \|_E, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Finalement

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t) \|_E \leq \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \| f(t) \|_E .$$

Corollaire 1.1. *Soit* $\{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions normales telle que* $\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(t) = g(t)$ *uniformément sur la demi droite* $[0,\infty[$*, alors la convergence est uniforme sur* $\mathbb{R}$*.*

Démonstration. *Il est facile de vérifier que la somme ou la différence de deux fonctions normales est aussi une fonction normale. Par conséquent :*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \| f_n(t) - f_m(t) \|_E = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \| f_n(t) - f_m(t) \|_E .$$

Remarque 1.2. D'après la preuve de proposition 1.10, on remarque que l'on a le même résultat sur le demi intervalle $[\alpha,\infty[$. *i.e.*

$$\sup_{t\geq\alpha} \| f(t) \|_E = \sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t) \|_E .$$

Proposition 1.11. *Si f est normale alors* $\limsup_{t\longrightarrow\infty} \| f(t) \|_E = \sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t) \|_E$.

Démonstration. *On sait que*

$$\limsup_{t\longrightarrow\infty} \| f(t) \|_E = \lim_{A\longrightarrow\infty} (\sup_{t\geq A} \| f(t) \|_E) = \lim_{A\longrightarrow\infty} (\sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t) \|_E).$$

Donc, nous avons que :

$$\limsup_{t\longrightarrow\infty} \| f(t) \|_E = \sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t) \|_E .$$

1.3.2 L'enveloppe

Définition 1.5. $H(f)$ est le sous ensemble de $C_b(\mathbb{R},E)$ constitué de toutes les fonctions g qui sont limite uniforme d'une certaine suite de fonctions translatées de f. Autrement dit $H(f)$ est la fermeture dans $\mathbb{C}_b(\mathbb{R},E)$ de l'ensemble de toutes les translatées de f, $H(f)$ est appelée enveloppe de f.

Remarque 1.3. De la définition de la normalité de f, il est clair que f est normale si et seulement si H(f) est compact dans $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}, E)$.

Remarque 1.4. $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}, E)$ étant complet, alors f est normale si et seulement si l'ensemble de ses translatées $\{f(.+\tau), \tau \in \mathbb{R}\}$ est totalement bornée dans $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}, E)$.

Proposition 1.12. *Si la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ est presque périodique et $g \in H(f)$ alors g est presque périodique et $H(g) = H(f)$.*

Démonstration. *f est presque périodique donc toute fonction translatée de f est aussi presque périodique. Donc si $g \in H(f)$ alors g est aussi presque périodique, car limite uniforme d'une suite de fonctions presque périodiques.*

Montrons maintenant l'égalité $H(f) = H(g)$.
Soit $h \in H(g)$, il existe alors $(\alpha_{n)_{n\in\mathbb{N}}} \subset \mathbb{R}$ tel que : $h(t) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} g(t+\alpha_n)$ uniformément sur $\mathbb{R}$. Aussi comme $g \in H(f), \exists(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :
$g(t) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(t+\beta_n)$ uniformément sur $\mathbb{R}$.
Pour un $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} \| h(t) - g(t+\alpha_n) \|_E \leq \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ et } \sup_{t\in\mathbb{R}} \| g(t) - f(t+\beta_n) \|_E \leq \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Avec un changement de variable dans la première estimation, on aura :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \| h(t-\alpha_n) - g(t) \|_E \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_0.$$

Par conséquent

$$n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} \| h(t-\alpha_n) - f(t+\beta_n) \|_E \leq \varepsilon.$$

Un autre changement de variable nous donne :

$$n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} \| h(t) - f(t+\alpha_n+\beta_n) \|_E \leq \varepsilon.$$

h est alors un élément de $H(f)$. D'où, $H(g) \subset H(f)$.

Maintenant pour montrer que $H(f) \subset H(g)$, il suffit de remarquer que

$$g \in H(f) \Rightarrow f \in H(g).$$

1.4 Le théorème fondamental

Le théorème suivant affirme que la presque périodicité de Bohr et celle de Bochner sont équivalentes :

Théorème 1.2. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ une fonction continue. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est normale.*
2. *f est u.p.p.*

Démonstration. *Supposons que la fonction $f(t) : \mathbb{R} \longrightarrow E$ est uniformément presque périodiques, f est alors uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Donc, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $t, s \in \mathbb{R}$ et $|t - s| \leq \delta$ alors*

$$\| f(u+t) - f(u+s) \|_E \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall u \in \mathbb{R}.$$

Soit $l \in L(f, \frac{\varepsilon}{2})$ et considérons les nombres réels : $a_1 = \delta, a_2 = 2\delta, ..., a_n = n\delta$ avec $n\delta > l$.
Soit $a \in \mathbb{R}$, l'intervalle $[-a, -a+l]$ contient une $\frac{\varepsilon}{2}$ translation de f, Soit τ. Alors on a :

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} \| f(u+\tau) - f(u) \|_E \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $\tau + a \in [0, l]$, il existe alors un $m \in \{1, ..., n\}$ tel que : $|\tau + a - a_m| \leq \delta$. De l'uniforme continuité de f, on a :

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} \| f(u+a+\tau) - f(u+a_m) \|_E \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \sup_{u \in \mathbb{R}} \|f(u+a) - f(u+a_m)\|_E &\leq \sup_{u \in \mathbb{R}} \|f(u+a) - f(u+a+\tau)\|_E \\ &+ \sup_{u \in \mathbb{R}} \|f(u+a+\tau) - f(u+a_m)\|_E \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

a étant quelconque, on en déduit que l'ensemble des translatées de f, est totalement borné. Par la remarque 1.4, f est alors, normale.

Inversement supposons que f est normale, de la remarque 1.4 on a :
$\forall\varepsilon > 0, \exists a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ *tels que :* $\forall\tau \in \mathbb{R}, \exists i(\tau) \in \{1, ..., n\}$ *tel que*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t + a_{i_{(\tau)}}) - f(t + \tau) \|_E \leq \varepsilon.$$

Ceci est équivalent à

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t) - f(t + \tau - a_{i_{(\tau)}}) \|_E \leq \varepsilon$$

$\tau - a_{i(\tau)}$ *est donc un élément de* $T(f, \varepsilon)$.
De plus, en posant $l = \max_{i=1,..,n} |a_i|$, *on voit que* $\tau - l \leq \tau - a_{i(\tau)} \leq \tau + l$ *et* $T(f, \varepsilon)$ *est donc relativement dense et a, comme longueur d'inclusion* $2l$.
f *est alors presque périodique.*

Remarque 1.5. L'équivalence entre la définition de Bohr des fonctions presque périodiques et celle de Bochner des fonctions normales, nous permet de fournir des preuves simples pour certaines propriétés élémentaires fondamentales. Par exemple la proposition 1.6 et le théorème 1.1 peuvent être obtenu plus simplement :

Soient $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow E, f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow E$ deux fonctions presque périodiques. $\{f_1(. + \tau), \tau \in \mathbb{R}\}$ et $\{f_2(. + \tau), \tau \in \mathbb{R}\}$ sont alors relativement compacts dans $(C_b(\mathbb{R}, E), \| . \|_\infty)$.
Considérons maintenant l'ensemble des fonctions translatées de $f_1 + f_2$.
$\{(f_1 + f_2)(. + \tau), \tau \in \mathbb{R}\}$ on a :

$$\{f_1(. + \tau) + f_2(. + \tau), \tau \in \mathbb{R}\} \subseteq \{f_1(. + \tau), \tau \in \mathbb{R}\} + \{f_2(. + \tau), \tau \in \mathbb{R}\}.$$

Il est claire que l'ensemble $\{(f_1 + f_2)(. + \tau), \tau \in \mathbb{R}\}$ est donc relativement compacte dès que $\{f_1(. + \tau), \tau \in \mathbb{R}\}$ et $\{f_2(. + \tau), \tau \in \mathbb{R}\}$ le sont. Notons que la difficulté de cette preuve en utilisant la définition de Bohr vient en fait de la difficulté à montrer le théorème 1.1, avec les ε-translations. Ce dernier théorème s'obtient facilement avec la définition de Bochner, comme on le verra ci dessous :

Considérons la fonction :

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow E \times E$$

Définie par :

$$F(t) = (f_1(t), f_2(t)) \text{ avec } \| F(t) \|_{E\times E} = \| f_1(t) \|_E + \| f_2(t) \|_E.$$

F est normale. En effet,

Considérons l'ensemble de toute les translatées de F. Soit $\{F(.+\tau), \tau \in \mathbb{R}\}$.
On a :

$$\{F(.+\tau), \tau \in \mathbb{R}\} = \{(f_1(.+\tau), f_2(.+\tau)), \tau \in \mathbb{R}\} \subseteq \{f_1(.+\tau), \tau \in \mathbb{R}\} \times \{f_2(.+\tau), \tau \in \mathbb{R}\}.$$

D'où

$$\overline{\{F(.+\tau), \tau \in \mathbb{R}\}} \subseteq \overline{\{(f_1(.+\tau), \tau \in \mathbb{R}\}} \times \overline{\{(f_2(.+\tau), \tau \in \mathbb{R}\}}.$$

C.à.d.

$$H(F) \subseteq H(f_1) \times H(f_2).$$

et comme $H(f_1)$ et $H(f_2)$ sont compacte. En déduit que $H(F)$ est aussi compact car fermé dans un compacte.
D'où, F est presque périodique au sens de Bohr.

Soit maintenant $\tau \in T(F, \varepsilon)$. Par définition on a alors

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \| F(t+\tau) - F(t) \|_E \leq \varepsilon.$$

i.e.

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \| (f_1(t+\tau) - f_1(t), f_2(t+\tau) - f_2(t)) \|_E \leq \varepsilon.$$

Ce qui implique que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}(\| f_1(t+\tau)-f_1(t)\|_E+\| f_2(t+\tau)-f_2(t)\|_E)\leq\varepsilon.$$

D'où

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\| f_1(t+\tau)-f_1(t)\|_E\leq\varepsilon \text{ et } \sup_{t\in\mathbb{R}}\| f_2(t+\tau)-f_2(t)\|_E\leq\varepsilon.$$

De la on voit que $\tau\in T(f_1,\varepsilon)\cap T(f_2,\varepsilon)$.
i.e.

$$T(F,\varepsilon)\subseteq T(f_1,\varepsilon)\cap T(f_2,\varepsilon).$$

On en déduit alors la relative densité de l'ensemble $T(f_1,\varepsilon)\cap T(f_2,\varepsilon)$.

Remarque 1.6.

1. De la preuve ci dessus, on voit que l'on peut généraliser le résultat à une famille finie de fonctions presque périodiques : étant donnée une famille finie $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ de fonctions presque périodiques alors :
   $\forall\varepsilon>0$, $T(f_1,\varepsilon)\cap ....\cap T(f_n,\varepsilon)$ est relativement dense.
2. Aussi on utilisant le même raisonnement, on peut démontrer que le produit d'une fonction presque périodique numérique f(à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$) et d'une fonction presque périodique g à valeurs dans un espace de Banach E est aussi une fonction presque périodique à valeurs dans E. En effet, on considère la fonction $F(t)=(f(t),g(t))$ qui est à valeurs dans $\mathbb{K}\times E$. On démontre que F est normale puis en remarquant que $T(F(t),\varepsilon)\subseteq T(f(t)g(t),2M\varepsilon)$ où $M=\max(\sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|,\sup_{t\in\mathbb{R}}\|g(t)\|_E)$, on déduit que $f.g$ qui est à valeurs dans E est alors uniformément presque périodique.

1.5 Exemple

Soit $L(E)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés sur E.
Supposons $G:\mathbb{R}\longrightarrow L(E)$ une fonction telle que, $\forall x\in E$

$$\begin{aligned} G(t)x : \mathbb{R} &\longrightarrow E \\ t &\longrightarrow G(t)x = G(t)(x) \end{aligned}$$

est presque périodique.

Considérons une fonction presque périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$. On peut montrer alors que la fonction h définie par :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow E \\ t &\longrightarrow h(t) = G(t)(f(t)) \end{aligned}$$

est aussi presque périodique.

En effet,
Du fait que toute fonction presque périodique est borné, alors $\{G(t)x, t \in \mathbb{R}\}$ est borné, $\forall x \in E$.
Donc, d'après le théorème de Banach Steinhaus

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \| G(t) \|_{L(E)} \leq +\infty.$$

Maintenant l'ensemble $\{f(t), t \in \mathbb{R}\}$ est totalement borné dans E.
Donc, pour un $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ε-reseau fini de f. *i.e.*
$\exists \{n_1, n_2, ..., n_n\} \subset E$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, \exists i \in \{1, 2, ..., n\}$ tel que :
$f(t) \subseteq B(x_i, \varepsilon)$ ou tout simplement $\| f(t) - x_i \|_E \leq \varepsilon$.

Considérons maintenant les fonctions presque périodiques $G(t)x_1, G(t)x_2, ..., G(t)x_n, f(t)$.
D'aprés la remarque 1.6, on peut affirmer qu'il existe un ensemble relativement dense d'ε-translations commun pour les fonctions $G(t)x_1, G(t)x_2, ..., G(t)x_n, f(t)$.
C.à.d, $\exists T_\varepsilon$ tel que $\forall \tau \in T_\varepsilon$, on a :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \| G(t+\tau)x_j - G(t)x_j \|_E \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t+\tau) - f(t) \|_E \leq \varepsilon.$$

Montrons maintenant que T_ε est un ensemble de translation de la fonction $G(t)f(t)$ ce qui prouve qu'elle est presque périodique puisque $G(t)f(t)$ est continue.

Maintenant

$$\begin{aligned}
\| G(t+\tau)f(t+\tau)-G(t)f(t)\|_E &\leq \| G(t+\tau)f(t+\tau)-G(t+\tau)x_j\|_E \\
&+ \| G(t+\tau)x_j-G(t)x_j\|_E+\| G(t)x_j-G(t)f(t)\|_E \\
&\leq \| G(t+\tau)\|_{L(E)}\| f(t+\tau)-x_j\|_E+\| G(t+\tau)x_j-G(t)x_j\|_E \\
&+ \| G(t)\|_{L(E)}\| x_j-f(t)\|_E \\
&\leq \| G(t)\|_{L(E)}(\| f(t+\tau)-f(t)\|_E+\| f(t)-x_j\|_E) \\
&+ \| G(t+\tau)x_j-G(t)x_j\|_E+\| G(t)\|_{L(E)}\| x_j-f(t)\|_E \\
&\leq l(2\varepsilon)+\varepsilon+l\varepsilon=3l\varepsilon+\varepsilon, \forall\tau\in T_\varepsilon. \qquad \square
\end{aligned}$$

Nous terminons ce chapitre par donner une propriété de stabilité des systèmes dynamiques que l'on obtient avec la définition de Bochner (voir [14]).

1.6 Quelques notions sur les systèmes dynamiques

Les systèmes dynamiques sont les notions mathématiques qui permettent de modéliser des phénomènes évoluant dans le temps, ces phénomènes pouvant provenir de la physique, la mécanique, l'économie, la biologie, la chimie...etc.
L'ensemble des variables d'état d'un système permet de construire un espace mathématique appelé espace des phases.

Dans ce qui suit on rappelle quelques définitions nécessaires.

Définition 1.6. Soit M un ensemble quelconque et G un groupe additif ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$). Une famille $S(t)$ d'applications de M dans M indexée par le groupe G, $t \in G$ est appelée groupe à un paramètre de M si :

$$S(t+s) = S(t) \circ S(s), \forall t, s \in G \text{ et } S(0) = I_M.$$

Définition 1.7. Soit E un espace métrique, $S(t), t \in \mathbb{R}$ un groupe à un paramètre d'homéomorphismes de l'espace métrique E.
Si pour tout $x \in E$ la trajectoire correspondante $x^t = S(t)x : \mathbb{R} \longrightarrow E$ est continue, alors on dit que $(E, S(t))$ est un système dynamique ou flow.

Définition 1.8. Le flow de $(E, S(t))$ est dit deux côté stable ou équi-continue, si les transformations de $S(t), \forall t \in \mathbb{R}$ sont équi-continues sur tout ensemble compact de E.

Pour énoncer le résultat qui nous intéresse on considère que E est un espace de Banach ; le résultat est énoncé pour un espace métrique complet (voir [14]).

Proposition 1.13. *Toute trajectoire relativement compacte de flow stable deux côté est une fonction presque périodique.*

Démonstration. *Soit $f(t) = S(t)(x)$ une trajectoire relativement compacte du flow $(E, S(t))$, ie $\overline{R_f} = \overline{\{f(t), t \in \mathbb{R}\}}$ est compacte.*
Considérons $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de R_f, elle admet donc une sous suite $(f(t'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans E (donc de Cauchy dans E).
Le flow $(E, S(t))$ étant un flow stable des deux cotés les transformations $(S(t), t \in \mathbb{R})$ sont équi-continues sur $\overline{R_f}$. i.e. :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ t.q. \ \|f(t'_n) - f(t'_m)\|_E \leq \delta \Rightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} \|S(t)(f(t'_n)) - S(t)(f(t'_m))\|_E \leq \varepsilon.$$

Mais par définition

$$\begin{aligned}
\|S(t)(f(t'_n)) - S(t)(f(t'_m))\|_E &= \|S(t)(S(t'_n)(x)) - S(t)(S(t'_m)(x))\|_E \\
&= \|S(t) \circ S(t'_n)(x) - S(t) \circ S(t'_m)(x)\|_E \\
&= \|S(t + t'_n)(x) - S(t + t'_m)(x)\|_E \\
&= \|f(t + t'_n) - f(t + t'_m)\|_E.
\end{aligned}$$

Ce qui veut dire donc que la suite $(f(. + t'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy dans* $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}, E)$*, ainsi par la définition de Bochner* f *est presque périodique.*

CHAPITRE 2

Séries de Fourier des fonctions presque périodiques

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'énoncer un théorème d'approximation des fonctions presque périodiques à valeurs vectorielles par une suite de polynômes trigonométriques généralisés (polynômes de Bochner-Fejer).
Pour plus détails sur les résultats de ce chapitre, nous renvoyons le lecteur à [1], [6] et [7].

2.2 Définitions fondamentales

Définition 2.1. Un polynôme trigonométrique généralisé est une application $T : \mathbb{R} \longmapsto E$ de la forme

$$T(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{i\lambda_k t}, \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

avec $n \in \mathbb{N}^*, \lambda_k \in \mathbb{R}$ et $C_k \in E$.

Remarque 2.1. Les applications de la forme $t \longmapsto e^{i\lambda t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ sont périodiques donc u.p.p. Donc aussi toute combinaison linéaire finie de telles fonction est u.p.p. (voir Proposition 1.4.)

Définition 2.2. Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ possède la propriété d'approximation polynomiale, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un polynôme trigonométrique généralisé T_ε tel que

$$\| f(t) - T_\varepsilon(t) \|_E \leq \varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Proposition 2.1. *Toute fonction possédant la propriété d'approximation polynomiale est presque périodique.*

Démonstration.
Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes trigonométriques généralisés approchant f uniformément sur $\mathbb{R}$. Puisque T_n est u.p.p.$\forall n \in \mathbb{N}$, par la Proposition 1.7 on déduit le résultat souhaité. □

2.3 Valeur moyenne d'une fonction presque périodique

Proposition 2.2. *Pour toute fonction u.p.p. $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$, la valeur moyenne $M\{f\}$ définie par :*

$$M\{f\} = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt \tag{2.3}$$

existe et est finie.

Démonstration. *Soit $\varepsilon > 0$ et soit $l(\frac{\varepsilon}{2})$ la longueur d'inclusion de f associée à $\frac{\varepsilon}{2}$, et $A = \sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t) \|_E$.*
Soit $a \in \mathbb{R}$ et τ une $\frac{\varepsilon}{2}$-translation de f dans l'intervalle $[a, a+\tau]$.
Par la relation de Chasles on a pour tout $T > 0$

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^{\tau} f(t)dt + \int_{\tau}^{\tau+T} f(t)dt + \int_{\tau+T}^{a+T} f(t)dt.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\| \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt - \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt \|_E &\leq \| \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt - \frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f(t)dt \|_E + \| \frac{1}{T}\int_a^{\tau} f(t)dt \|_E \\
&+ \| \frac{1}{T}\int_{\tau+T}^{a+T} f(t)dt \|_E \\
&\leq \frac{1}{T}\int_0^T \| f(t) - f(t+\tau) \|_E \, dt + |\frac{1}{T}\int_a^{\tau} \| f(t) \|_E \, dt| \\
&+ |\frac{1}{T}\int_{\tau+T}^{a+T} \| f(t) \|_E \, dt| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2A}{T} l.
\end{aligned}$$

Posons $a = (k-1)T, \forall k \in \mathbb{N}^*$. *Alors, on peut écrire :*

$$\| \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt - \frac{1}{T}\int_{(k-1)T}^{kT} f(t)dt \|_E < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2A}{T} l, \forall k \in \mathbb{N}^* \tag{2.4}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\| \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt - \frac{1}{nT}\int_0^{nT} f(t)dt \|_E &= \| \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt - \frac{1}{nT}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)T}^{kT} f(t)dt \|_E \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \| \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt - \frac{1}{T}\int_{(k-1)T}^{kT} f(t)dt \|_E .
\end{aligned}$$

En utilisant (2.4)*, il vient que*

$$\| \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt - \frac{1}{nT}\int_0^{nT} f(t)dt \|_E \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2A}{T} l \tag{2.5}$$

Soit maintenant T_1, T_2 *deux nombres positifs tels que pour certains* m_1, m_2 *dans* $\mathbb{N}^*$ *on a*

$$m_1 T_1 = m_2 T_2 \tag{2.6}$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned}\| \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)dt - \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} f(t)dt \|_E &\leq \| \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)dt - \frac{1}{m_1T_1}\int_0^{m_1T_1} f(t)dt \|_E \\ &+ \| \frac{1}{m_2T_2}\int_0^{m_2T_2} f(t)dt - \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} f(t)dt \|_E \\ &+ \| \frac{1}{m_1T_1}\int_0^{m_1T_1} f(t)dt - \frac{1}{m_2T_2}\int_0^{m_2T_2} f(t)dt \|_E .\end{aligned}$$

En utilisant (2.5) *et* (2.6), *on obtient :*

$$\| \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)dt - \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} f(t)dt \|_E \leq \varepsilon + 2A(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2})l$$

Cette dernière inégalité, reste valable pour $T_1, T_2 > 0$ en raison de la continuité de $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$ comme fonction de T,(voir annexe propriété (2.1) (1)) .

On a :

$$\| \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)dt - \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} f(t)dt \|_E \leq 2\varepsilon,$$

dés que T_1 et T_2 sont supérieurs à $t_0 = \frac{4Al}{\varepsilon}$.

L'existence de la limite dans (2.3) est donc assurée par le critère de Cauchy.

Proposition 2.3. *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto E$ u.p.p. Alors*

$$\lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt = M\{f\},$$

uniformément par rapport à $a \in \mathbb{R}$.

Démonstration. *Soit f_a la fonction translatée de f. Alors*

$$\begin{aligned} M\{f_a\} &= M\{f(t+a)\} \\ &= \lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t+a)dt. \end{aligned}$$

Par un changement de variable, on aura :

$$M\{f_a\} = \lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t)dt.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} M\{f_a\} &= \lim_{T \longrightarrow \infty} (\frac{1}{T} \int_a^0 f(t)dt + \frac{1}{T} \int_0^{a+T} f(t)dt) \\ &= \lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^0 f(t)dt + \lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{a+T}{T} \frac{1}{a+T} \int_0^{a+T} f(t)dt \\ &= \lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{a+T} \int_0^{a+T} f(t)dt \\ &= M\{f\}. \end{aligned}$$

D'où $\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t)dt = M\{f_a\} = M\{f\}$.
Il reste à prouver que pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe un* $T_0(\varepsilon) > 0$ *indépendant de* a *tel que*

$$\| \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t)dt - M\{f\} \|_E \leq \varepsilon, \forall T > T_0(\varepsilon). \tag{2.7}$$

Soit

$$\| \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t)dt - M\{f_a\} \|_E \leq \varepsilon, \forall T > T_0(\varepsilon). \tag{2.8}$$

Soit encore

$$\| \frac{1}{T} \int_0^{T} f(t+a)dt - M\{f_a\} \|_E \leq \varepsilon, \forall T > T_0(\varepsilon). \tag{2.9}$$

Faisant tendre n *vers l'infini dans* (2.5), f *remplacée par* f_a *on obtient :*

$$\| \frac{1}{T} \int_0^{T} f(t+a)dt - M\{f_a\} \|_E \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2A}{T} l$$

Comme A *et* l *sont indépendants de* a*. En déduit alors* (2.7) . □

Ce qui nous permet alors de dire que pour $a = -T$ *on a :*

$$M\{f\} = \lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{0} f(t)dt$$

et donc par conséquent on a l'expression de la moyenne

$$M\{f\} = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)dt.$$

Propriétés : *Soient f et g deux fonctions u.p.p. Alors, on a :*

1. $M\{\lambda f\} = \lambda M\{f\}, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.
2. *Si* $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *alors* $M\{f\} \geq 0$.
3. $M\{f+g\} = M\{f\} + M\{g\}$.
4. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions u.p.p. qui converge uniformément vers une fonction f. Alors*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} M\{f_n\} = M\{f\} \tag{2.10}$$

Démonstration.

1. *On a :*
$$M\{\lambda f\} = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \lambda f(t)dt.$$
De la linéarité de l'intégrale, on déduit que
$$\begin{aligned} M\{\lambda f\} &= \lambda(\lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)dt) \\ &= \lambda M\{f\}. \end{aligned}$$
2. *Supposons que* $f(t) \geq 0$. *Alors, on a :* $\int_0^T f(t)dt \geq 0, \forall T > 0$, *d'où*
$$M\{f\} = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)dt \geq 0.$$
3. *On a :*
$$M\{f+g\} = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{T} (f+g)(t)dt.$$
Comme l'intégrale est linéaire, alors
$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} (f+g)(t)dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T} g(t)dt,$$

d'où

$$\begin{aligned} M\{f+g\} &= \lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt + \lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt \\ &= M\{f\}+M\{g\}. \end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned} \| M\{f_n\} - M\{f\} \|_E &= \| \lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (f_n(t)-f(t))dt \|_E \\ &\leq \lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \| f_n(t)-f(t) \|_E \, dt \\ &\leq \lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \| f_n(t)-f(t) \|_\infty \, dt \\ &= \| f_n(t)-f(t) \|_\infty \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, nous obtiendrons

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \| M\{f_n\} - M\{f\} \|_E \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \| f - f_n \|_\infty = 0.$$

Finalement, on déduit que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} M\{f_n\} = M\{f\}.$$

Remarque 2.2. L'application $M : f \longmapsto M\{f\}$ est une application linéaire continue. En effet,
la linéarité est une conséquence directes des propriétés 1, 3. La continuité découle du fait que :

$$|M\{f\}| \leq \| f \|_\infty . \tag{2.11}$$

De plus, nous avons

$$\| M \|_E = \sup_{\|f\|\neq 0} \frac{|M\{f\}|}{\| f \|_\infty} = 1.$$

En effet d'après (2.11) $\| M \|_E \leq 1$, or si f est une fonction constante alors

$$|M\{f\}| = \| f \|_\infty .$$

D'où la propriété souhaitée.

2.3.1 Un résultat de compacité dans l'ensemble de fonctions presque périodiques à valeurs vectorielles

Notons $AP(E)$ l'espace des fonctions presque périodiques de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach E que l'on munit de la norme
$\| f \| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|_E$.
D'après les résultats cités dans le chapitre précédent $AP(E)$ est un sous espace fermé de $(\mathbb{C}_b(\mathbb{R}, E), \|f\|)$ d'où $(AP(E), \|f\|)$ est aussi un espace de Banach.

Définition 2.3. Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions presque périodiques est dite équi-continue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe δ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(y) \|_E < \varepsilon, \forall f \in \mathcal{F}.$$

Définition 2.4. Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions presque périodiques est dite équi-presque périodique si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $l > 0$ tel que tout intervalle de longueur l contient un nombre τ vérifiant

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t + \tau) - f(t)\|_E \leq \varepsilon, \forall f \in \mathcal{F}.$$

Théorème 2.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille $\mathcal{F}$ de fonctions dans $AP(E)$ soit relativement compacte est qu'elle satisfasse les propriétés suivantes :*

1. *$\mathcal{F}$ est équi-continue.*
2. *$\mathcal{F}$ est équi-presque périodique.*
3. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{f(t), f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans E.*

Démonstration.

1. *Nécessitè : Tout d'abord, observons que toute famille finie de fonctions presque périodiques est équi-presque périodique (voir la remarque 1.6) et est équi-continue.*

Supposons que la famille $\mathcal{F}$ de fonctions dans $AP(E)$ est relativement compacte. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ε-réseau finie de $\mathcal{F}$.
Soit $\{f_1, ...f_p\}$ un ε-réseau de $\mathcal{F}$, i.e.,
pour tout $f \in \mathcal{F}$ il existe f_p avec $1 \leq p \leq m$ tel que $\| f - f_p \| < \varepsilon$.
On a :

$$\begin{aligned} \| f(t+\tau) - f(t) \|_E &\leq \| f(t+\tau) - f_p(t+\tau) \|_E + \| f_p(t+\tau) - f_p(t) \|_E \\ &+ \| f_p(t) - f(t) \|_E \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Où τ est une ε-translation de $\{f_i, i = \overline{1,m}\}$ ($\{f_1, ...f_m\}$ est équi-presque périodique). Par conséquent, la famille $\mathcal{F}$ de fonctions presque périodiques est équi-presque périodique et équi-continue sur E.

De plus, de toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ on peut extraire une sous-suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ convergente dans $AP(E)$ .i.e.

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \| f_m(t) - f_0(t) \|_E = 0.$$

Ce qui donne

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \| f_m(t) - f_0(t) \|_E = 0.$$

Donc, $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur E.

Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{f(t), f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact sur E.

2. *Suffisance : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$. Du fait que l'ensemble $\{f(t), f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact, on peut extraire une sous suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergera simplement sur un ensemble M dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$.*

   Montrons que $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. Comme $\mathcal{F}$ est équi-continue, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\frac{\varepsilon}{5})$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(y) \|_E < \frac{\varepsilon}{5}, \forall f \in \mathcal{F}.$$

De plus, $\mathcal{F}$ est équi-presque périodique. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $l = l(\frac{\varepsilon}{5}) > 0$ tel que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\|_E \leq \frac{\varepsilon}{5}, \forall f \in \mathcal{F}.$$

Soit $(I_i)_{i=\overline{1,p}}$ une subdivision de l'intervalle $[0, l]$ en des intervalles de longueur inférieur à δ. Considérons, ensuite, $M_0 = \{s_1, ...s_p\} \subset M$ tel que $\forall i = \overline{1,p}$, $s_i \in I_i$ (ceci est possible car M est dense dans $\mathbb{R}$). Puisque M_0 est fini, il existe, alors, $N(\frac{\varepsilon}{5})$ correspondant à la convergence uniforme de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sur M_0.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'intervalle $[-t, -t + l]$ contient au moins une ε-translation τ de $\mathcal{F}$. Comme $t + \tau \in [0, l]$, il existe $s_i \in M_0$ tel que $|t + \tau - s_i| < \delta$.

Finalement, pour tout $n, m \geq N(\frac{\varepsilon}{5})$ on a :

$$\begin{aligned} \| f_n(t) - f_m(t) \|_E &\leq \| f_n(t) - f_n(t+\tau) \|_E + \| f_n(t+\tau) - f_n(s_i) \|_E \\ &+ \| f_n(s_i) - f_m(s_i) \|_E + \| f_m(s_i) - f_m(t+\tau) \|_E \\ &+ \| f_m(t+\tau) - f_m(t) \|_E \\ &< 5\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. □

2.4 Série de Fourier associée à une fonction presque périodique

Nous allons montrer dans cette section que l'on peut associer pour une fonction presque périodique à valeurs vectorielles une série de Fourier formelle.
La méthode utilisée est technique. Le lecteur pourra aussi consulter l'exposé fait dans Zaidman chapitre 10 *page* 85.

Pour ne pas alourdir l'exposé de ce chapitre nous admettant le lemme technique suivant sans démonstration. Le lecteur intéressé pourra le consulter dans [6] page 165.

Lemme 2.1. *Soient $\varphi(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction presque périodique et $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k t}$ la série de Fourier correspondante à φ.*
Considérons $\mathcal{M}$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les λ_i.
Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R} - \mathcal{M}$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre δ ; $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ et un entier n tels que $\varphi(t)$ ait une ε-translation qui satisfait le système

$$|\lambda_k \tau| < \delta, k = 1, 2, ..., n, \quad |\lambda\tau - \pi| < \delta, (mod\ 2\pi). \tag{2.12}$$

Nous pouvons à présent énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ une fonction presque périodique. Les quantités*

$$a(\lambda) = M\{f(t)e^{-i\lambda t}\}$$

sont différentes du 0 de E sauf sur un ensemble au plus dénombrable de $\mathbb{R}$.

Démonstration. *Considérons la fonction numérique*

$$\varphi(t) = \sup_{u\in\mathbb{R}} \| f(u+t) - f(u) \|_E .$$

Alors

$$\begin{aligned} |\varphi(t+\tau) - \varphi(t)| &= |\sup_{u\in\mathbb{R}} \| f(u+t+\tau) - f(u) \|_E - \sup_{u\in\mathbb{R}} \| f(u+t) - f(u) \|_E| \\ &\leq \sup_{u\in\mathbb{R}} ||\| f(u+t+\tau) - f(u) \|_E - \| f(u+t) - f(u) \|_E| \\ &\leq \sup_{u\in\mathbb{R}} \| f(u+t+\tau) - f(u+t) \|_E = \sup_{u\in\mathbb{R}} \| f(u+\tau) - f(u) \|_E . \end{aligned}$$

On voit immédiatement de cette inégalité que toute ε-translation de f est une ε-translation de φ. On en déduit donc que φ est une fonction presque périodique. De même toute ε-translation de φ est une ε-translation de f,

cela découle du fait que $\varphi(0) = 0$. *En effet : si* τ *est une* ε*-translation de* φ, *alors* $\sup_{t\in\mathbb{R}}|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)| \leq \varepsilon$. *En particulier,*
$|\varphi(0+\tau) - \varphi(0)| = |\varphi(\tau)| = \sup_{u\in\mathbb{R}}\|f(u+\tau) - f(u)\|_E \leq \varepsilon.$

Maintenant considérons $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k t}$, *la série de Fourier associée à* φ *et soit* $\mathcal{M}$ *le* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel engendré par les* λ_i. *Montrons que pour tout* $\lambda \in \mathbb{R} - \mathcal{M}, a(\lambda) = 0$. *En ce cas l'ensemble* $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $a(\lambda) \neq 0\}$ *est au plus dénombrable.*

Soit alors $\lambda \in \mathbb{R} - \mathcal{M}$. *Par le Lemme 2.1, on peut trouver*

une ε*-translation* τ *de la fonction* $\varphi(t)$ *telle que :*

$$|\lambda\tau - \pi| < \frac{\pi}{2}, (mod\ 2\pi).$$

I.e.

$$\lambda\tau = (\pi \pm \alpha) + 2k\pi,\ \ avec\ \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[.$$

Alors, on déduit que

$$|1 - e^{-i\lambda\tau}| > 1. \tag{2.13}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= M\{f(t)e^{-i\lambda t}\} \\ &= \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\lambda t}dt \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 2.3, on obtient

$$a(\lambda) = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T} f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t+\tau)e^{-i\lambda(t+\tau)}dt \\ &= e^{-i\lambda\tau}M\{f(t+\tau)e^{-i\lambda t}\} \\ &= e^{-i\lambda\tau}a(\lambda) + e^{-i\lambda\tau}M\{[f(t+\tau) - f(t)]e^{-i\lambda t}\}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}\| (1-e^{-i\lambda\tau})a(\lambda) \|_E &= \| e^{-i\lambda\tau} M\{[f(t+\tau)-f(t)]e^{-i\lambda t}\} \|_E \\ &\leq |e^{-i\lambda\tau}|.M\{\| [f(t+\tau)-f(t)]e^{-i\lambda t} \|_E\} \\ &= M\{\| [f(t+\tau)-f(t)]e^{-i\lambda t} \|_E\}.\end{aligned}$$

Comme τ est un ε-translation de f, alors

$$\| (1-e^{-i\lambda\tau})a(\lambda) \|_E = |1-e^{-i\lambda\tau}|.\|a(\lambda)\|_E \leq \varepsilon.$$

Par (2.13), on obtient

$$\| a(\lambda) \|_E < \varepsilon.$$

Finalement, puisque ε est arbitraire on conclut que $a(\lambda) = 0, \forall\lambda \in \mathbb{R} - \mathcal{M}$.

Conséquence : *Soit f une fonction presque périodique. Alors, on peut lui associer la série de Fourier formelle*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a(\lambda_k)e^{i\lambda_k t}.$$

On note

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a(\lambda_k)e^{i\lambda_k t}.$$

Les $\lambda_k \in \mathbb{R}$ sont les exposants de Fourier de f, et les $a(\lambda_k) \in E$ sont les coefficients de Fourier de f.

2.5 Approximation de Bochner-Fejér

Suivant la méthode de Fejér sur la césaro-sommabilité des séries de Fourier, Bochner construit explicitement une suite de polynôme trigonométrique convergeant uniformément vers une fonction presque périodique donnée.

Définition 2.5. Soit $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que cette suite est linéairement indépendante si pour tout entier n

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i r_i = 0 \Rightarrow r_i = 0, \forall i \in \{1, ..., n\}, \forall (r_1, ..., r_n) \in \mathbb{Q}^n. \tag{2.14}$$

Définition 2.6. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels linéairement indépendant forme une base de A si pour tout $a \in A$ il existe un entier n et $(r_1, ..., r_n) \in \mathbb{Q}^n$ tels que $a = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i \beta_i$.

2.5.1 Résultats intermédiaires

Dans ce qui suit, nous présentons quelques résultats intermédiaires utiles pour démontrer théorème l'approximation polynômiale.

Proposition 2.4. *Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ une fonction presque périodique et $\phi \in E^*$. Alors la fonction composée*

$$(\phi \circ f) = \phi(f(t)), \forall t \in \mathbb{R}$$

est presque périodique.

Démonstration. *Supposons que τ un ε-translation de f et soit $\phi \in E^*$.i.e. ϕ est linéaire et bornée sur E. On a alors*

$$\begin{aligned} |\phi(f(t+\tau)) - \phi(f(t))| &\leq \parallel \phi \parallel_{E^*} \parallel f(t+\tau) - f(t) \parallel_E \\ &\leq \parallel \phi \parallel_{E^*} \varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'où, $(\phi \circ f)$ est presque périodique.

Proposition 2.5. *Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ une fonction presque périodique et $\phi \in E^*$. Alors*

$$\phi(M\{f\}) = M\{\phi \circ f\}. \tag{2.15}$$

Démonstration. *On a :*

$$\begin{aligned}
\phi(M\{f\}) &= \lim_{T\longrightarrow\infty}\phi(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt)(\text{ par continuité de } \phi),\\
&= \lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{T}\phi(\int_0^T f(t)dt)(\text{ par linéarité de } \phi),\\
&= \lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{T}(\int_0^T \phi(f(t))dt)(\text{ Voir Annexe Propriété 2.1}(4)),\\
&= M\{\phi\circ f\}.
\end{aligned}$$

Lemme 2.2. *Si A un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$. Alors, il existe un sous-ensemble β de A formant une base de A.*

Démonstration. *Soit $A=\{\lambda_k; k\geq 1\}$. On pose $\beta_1=\lambda_1$*
$\omega_1=A\backslash\{r\beta_1; r\in\mathbb{Q}\}$, $\beta_2=\{$ *premier élément de* $\omega_1\}$
$\omega_2=A\backslash\{r_1\beta_1+r_2\beta_2; (r_1,r_2)\in\mathbb{Q}^2\}$, $\beta_3=\{$ *premier élément de* $\omega_2\}$.
Puis par récurrence, on obtient
$\omega_j=A\backslash\left\{\sum_{i=1}^{j} r_i\beta_i; (r_1,...,r_j)\in\mathbb{Q}^j\right\}$, $\beta_{j+1}=\{$*premier élément de* $\omega_j\}$.

Cette procédure génèrera, alors une suite $\beta=(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A. Montrons que cette dernière suite forme une base de A. Il est clair que pour tout $x\in A$, il existe $(r_1,r_2,...,r_n)\in\mathbb{Q}^n$ tel que

$$x=\sum_{i=1}^{n} r_i\beta_i.$$

D'autre part, on a, par construction :

$$\beta_j\notin\left\{\sum_{i=1}^{j-1} r_i\beta_i; (r_1,r_2,...,r_{j-1})\in\mathbb{Q}^{j-1}\right\}, \forall j\in\mathbb{N}.$$

Par conséquent, β est linéairement indépendante.

Nous aurons également besoin d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.3. *Si $f:\mathbb{R}\longrightarrow E$ et $g:\mathbb{R}\longrightarrow E$ deux fonctions presque périodiques ont même série de Fourier, alors $f(t)=g(t), \forall t\in\mathbb{R}$.*

Démonstration. *Soient f et g deux fonctions presque périodiques ayant la même série de Fourier. On a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$M\{f(t)e^{-i\lambda t}\} = M\{g(t)e^{-i\lambda t}\}. \tag{2.16}$$

Soit $\phi \in E^*$. En utilisant la Proposition 2.5, on obtient

$$\phi(M\{f(t)e^{-i\lambda t}\}) = M\{\phi(f(t)e^{-i\lambda t})\}$$

et

$$\phi(M\{g(t)e^{-i\lambda t}\}) = M\{\phi(g(t)e^{-i\lambda t})\}.$$

On en déduit que

$$M\{\phi(g(t)e^{-i\lambda t})\} = M\{\phi(f(t)e^{-i\lambda t})\}.$$

Ce qui signifie que les fonctions presque périodiques $\phi \circ f$ et $\phi \circ g$ ont la même série de Fourier.
D'après le théorème d'unicité pour les fonctions presque périodiques, on obtient que

$$\phi(f(t)) = \phi(g(t)), \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.17}$$

En utilisant le corollaire de Hahn-Banach (voir Annexe Proposition 2.6)(théorème de séparation des points de E). En déduit que
$f(t) = g(t), \forall t \in \mathbb{R}$, puisque (2.17) a lieu $\forall \phi \in E^*$.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 2.4. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ une fonction presque périodique de sérier de Fourier associée*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k t}.$$

On peut trouver une suite $(\sigma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques

$$\sigma_m(t) = \sum_{k=1}^{n(m)} r_{k,m} A_k e^{i\lambda_k t}$$

qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
De plus, les nombres $r_{k,m}$ sont rationnels et dépendent uniquement de λ_k et de m et non de A_k.

Démonstration. *On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ le polynôme trigonométrique*

$$K_n(t) = \frac{1}{n}\frac{\sin^2(n\frac{t}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})}$$

$$= \sum_{k=-n}^{n}(1-\frac{|k|}{n})e^{-ikt}$$

appelée noyau de Fejér.

Par théorème 2.2 et lemme 2.2, on sait qu'on peut trouver une base $(\beta_n)_{n\geq 1}$ de la suite des exposants de Fourier $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ de f. On pose alors

$$\begin{aligned}\Pi_m(t) &= K_{(m!)^2}\left(\frac{\beta_1 t}{m!}\right)..K_{(m!)^2}\left(\frac{\beta_m t}{m!}\right)\\ &= \left(\sum_{k_1=-(m!)^2}^{(m!)^2}\left(1-\frac{|k_1|}{(m!)^2}\right)\exp\left(-ik_1\frac{\beta_1 t}{m!}\right)\right)..\left(\sum_{k_m=-(m!)^2}^{(m!)^2}\left(1-\frac{|k_m|}{(m!)^2}\right)\exp\left(-ik_m\frac{\beta_m t}{m!}\right)\right)\\ &= \sum_{k_1=-(m!)^2}^{(m!)^2}..\sum_{k_m=-(m!)^2}^{(m!)^2}\left(1-\frac{|k_1|}{(m!)^2}\right)..\left(1-\frac{|k_m|}{(m!)^2}\right)\exp\left(-i(\frac{k_1\beta_1}{m!}+..+\frac{k_m\beta_m}{m!})t\right).\end{aligned}$$

Π_m est manifestement une fonction presque périodique numérique et comme f est presque périodique alors le translaté de f, $f_t = f(u+t)$ est aussi presque périodique. On déduit alors de la remarque (1.6) que le produit $\Pi_m f_t$ est une fonction périodique . On pose donc

$$\sigma_m(t) = M\{\Pi_m f_t\} = \lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \Pi_m(u)f(u+t)du.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}\sigma_m(t) &= M_u\left[\sum_{k_1=-(m!)^2}^{(m!)^2}...\sum_{k_m=-(m!)^2}^{(m!)^2}\left(1-\frac{|k_1|}{(m!)^2}\right)...\left(1-\frac{|k_m|}{(m!)^2}\right)e^{\left(-i(\frac{k_1\beta_1}{m!}+..+\frac{k_m\beta_m}{m!})u\right)}f(u+t)\right]\\ &= \sum_{k_1=-(m!)^2}^{(m!)^2}...\sum_{k_m=-(m!)^2}^{(m!)^2}\left(1-\frac{|k_1|}{(m!)^2}\right)...\left(1-\frac{|k_m|}{(m!)^2}\right)M_u\left[e^{(-i(\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{k_j\beta_j}{m!})(u+t-t))}f(u+t)\right]\\ &= \sum_{k_1=-(m!)^2}^{(m!)^2}...\sum_{k_m=-(m!)^2}^{(m!)^2}\left(1-\frac{|k_1|}{(m!)^2}\right)...\left(1-\frac{|k_m|}{(m!)^2}\right)a(\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j\beta_j}{m!})e^{(i(\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{k_j\beta_j}{m!})t)}.\end{aligned}$$

Pour m suffisamment grand, $\sigma_m(t)$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\sigma_m(t)=\sum_{k=1}^{n(m)}r_{k,m}A_k e^{i\lambda_k t},$$

où

$$r_{k,m}=\prod_{j=1}^{m}(1-\tfrac{|k_j|}{(m!)^2})\ \text{ et }\ \lambda_k=\sum_{j=1}^{m}\tfrac{k_j\beta_j}{m!}.$$

En effet un exposant de Fourier de f donné λ_k s'écrit sous la forme : $\frac{p_1}{q_1}\beta_1+\frac{p_2}{q_2}\beta_2+......+\frac{p_h}{q_h}\beta_h$. Il suffit de prendre $m\geq\max(\max\limits_{i=1..h}|p_i|,q_1.q_2.....q_h,h)$. Dans ce cas $\lambda_k=\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{k_j\beta_j}{m!}$, avec $k_j=\frac{p_j}{q_j}m!$ pour $j\leq h$ et $k_j=0$ pour $j\in\{h+1,....,m\}$ et on vérifie facilement que $k_j\in\{-(m!)^2,..,(m!)^2\}$.

Les polynômes $\sigma_m(t)$ sont appelés polynômes de Bochner-Fejér.

Montrons que $\forall k,\ \lim\limits_{m\longrightarrow+\infty}r_{k,m}=1$. Si pour un certain m on a

$$\lambda_k=\frac{k_1}{m!}\beta_1+..+\frac{k_m}{m!}\beta_m,\ \text{ et }r_{k,m}=(1-\frac{|k_1|}{(m!)^2})..(1-\frac{|k_m|}{(m!)^2}),$$

avec $k_j\in\{-(m!)^2,..,(m!)^2\}$.

Pour $m' > m$

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \frac{k'_1}{m'!}\beta_1 + .. + \frac{k'_m}{m'!}\beta_m + \frac{k'_{m+1}}{m'!}\beta_{m+1} + .. + \frac{k'_{m'}}{m'!}\beta_{m'} \text{ avec } k'_j \in \{-(m'!)^2, .., (m'!)^2\}.\\
&= \frac{m'(m'-1)..(m+1)k_1}{m'!}\beta_1 + .. + \frac{m'(m'-1)..(m+1)k_m}{m'!}\beta_m + 0\beta_{m+1} + .. + 0\beta_{m'}.\\
&= \frac{k_1}{m!}\beta_1 + .. + \frac{k_m}{m!}\beta_m,
\end{aligned}$$

et

$$r_{k,m'} = (1 - \frac{|k_1|}{m!.m'!})..(1 - \frac{|k_m|}{m!.m'!}), \text{ avec } |k_j| \leq (m!)^2 < m!.m'!.$$

Il vient que

$$(1 - \frac{m!}{m'!})^m \leq r_{k,m'} \leq 1.$$

Par passage à la limite, m étant fixé, on aura

$$e^0 \leq \lim_{m' \longrightarrow +\infty} r_{k,m'} \leq 1,$$

d'où $\lim_{m' \longrightarrow +\infty} r_{k,m'} = 1$.

On montre que la suite $\{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $AP(E)$. Commençons par montrer que $\{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ est équi-continue et équi-presque périodique. Nous avons par définition de σ_m, pour tout réels t et τ et pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\| \sigma_m(t+\tau) - \sigma_m(t) \|_E &= \| M_x\{f(x+t+\tau)\Pi_m(x)\} - M_x\{f(x+t)\Pi_m(x)\} \|_E\\
&= \| M_x\{(f(x+t+\tau) - f(x+t))\Pi_m(x)\} \|_E\\
&\leq M_x\{ \| f(x+t+\tau) - f(x+t) \|_E \Pi_m(x)\}\\
&\leq \sup_{u\in\mathbb{R}} \| f(u+\tau) - f(u) \|_E M_x\{\Pi_m(x)\}.\\
&= \sup_{u\in\mathbb{R}} \| f(u+\tau) - f(t) \|_E, \text{ car } M_x\{\Pi_m(x)\} = 1(voir[7]).
\end{aligned}$$

On en déduit donc que la famille $\{\sigma_m, m \in \mathbb{N}\} \subset AP(E)$ est équi-presque périodique et équi-continue. Il reste à montrer que $\{\sigma_m(t), m \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans E, $\forall t \in \mathbb{R}$. Pour cela on utilisera le Théorème 2.6 dans l'annexe.

Observons tout d'abord que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\|\sigma_m(t)\|_E \leq \sup_{u\in\mathbb{R}} \|f(u)\|_E, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E^*$ *une suite bornée et* $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ *une fonction presque périodique, alors du fait que,*

$$|\varphi_n(f(t))| \leq \| \varphi_n \|_{E^*} \| f(t) \|_E$$

et

$$|\varphi_n(f(t+\tau)) - \varphi_n(f(t))| \leq \| \varphi_n \|_{E^*} \| f(t+\tau) - f(t) \|_E,$$

on déduit que la suite de fonctions numériques $(\varphi_n \circ f)$ *est bornée, équi-presque périodiques et équi-continues. D'où, en utilisant le théorème 2.1, on peut en extraire une sous-suite* $(\varphi_{n_k} \circ f)$ *uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$.

Montrons maintenant que la suite $(\varphi_{k_n} \circ \sigma_h)$ *est uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$. *On a :*

$$\varphi_{k_n}(\sigma_m(t)) = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \Pi_m(u-t)\varphi_{k_n}(f(u))du. \tag{2.18}$$

Soit $\varepsilon > 0$, *il existe* $N(\varepsilon) > 0$ *tel que pour tout* $p, q \geq N(\varepsilon)$ *:*

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} |\varphi_{k_p}(f(u)) - \varphi_{k_q}(f(u))| < \varepsilon. \tag{2.19}$$

De (2.18) et (2.19) , on obtient

$$\begin{aligned}
|\varphi_{k_p}(\sigma_m(t)) - \varphi_{k_q}(\sigma_m(t))| &= |\lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \Pi_m(u-t)[\varphi_{k_p}(f(u)) - \varphi_{k_q}(f(u))]du| \\
&\leq \sup_{u\in\mathbb{R}} |\varphi_{k_p}(f(u))| - \varphi_{k_q}(f(u))| \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \Pi_m(u-t)du \\
&\leq \varepsilon \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \Pi_m(u-t)du \\
&= \varepsilon \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{T} \int_0^{T} \Pi_m(u)du = \varepsilon,
\end{aligned}$$

pour tout $p, q \geq N(\varepsilon)$ *et pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$. *D'où, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\{\sigma_m(t), m \in \mathbb{N}\}$ *est relativement compact dans* E.

Le théorème 2.1 appliqué à la suite $\{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ nous permet d'en extraire une sous suite, que nous notons encore $\{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $g:\mathbb{R}\longrightarrow E$. Manifestement g est u.p.p.

Finalement, montrons, en utilisant le théorème 2.3, que $f = g$. On a par définition des coefficients de Fourier $\tilde{a}(\lambda)$ de g :

$$\tilde{a}(\lambda) = M\{g(t)e^{-i\lambda t}\}$$

Comme la suite $\{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g, on peut alors écrire

$$\tilde{a}(\lambda) = \lim_{m\longrightarrow\infty} M\{\sigma_m(t)e^{-i\lambda t}\}.$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} M\{\sigma_m(t)e^{-i\lambda t}\} &= \lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \sigma_m(t)e^{-i\lambda t}dt \\ &= \lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=1}^{n(m)} r_{k,m}A_k e^{i\lambda_k t}e^{-i\lambda t}dt \\ &= \sum_{k=1}^{n(m)} r_{k,m}A_k(\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{i(\lambda_k-\lambda)t}dt). \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{i(\lambda_k-\lambda)t}dt = \begin{cases} 0 & si \quad \lambda\neq\lambda_k \\ 1 & si \quad \lambda=\lambda_k \end{cases}$$

D'où, si $\lambda\neq\lambda_k$, $\tilde{a}(\lambda)=0$ et si $\lambda=\lambda_k$ on a

$$\tilde{a}(\lambda) = \lim_{m\longrightarrow\infty}\sum_{k=1}^{n(m)} r_{k,m}A_k.$$

Et puisque

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} r_{k,m} = 1,$$

on obtient

$$\tilde{a}(\lambda) = A_k = a(\lambda_k), \forall k = 1,2,...$$

Ce qui montre que f et g ont la même série de Fourier et par le biais du théorème 2.3,on déduit que $f = g$.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié les fonctions presque périodiques à valeurs dans un espace de Banach. Nous nous somme intéressé uniquement à étudier leurs propriétés essentielles, notre objectif principal étant de faire apparaître l'équivalence des trois classes de fonctions presque périodiques continues : La classe de fonctions presque périodiques donnée par le critère de Bohr, la classe de fonctions donnée par le critère de Bochner et celle donnée par le critère d'approximation polynômiale. Nous avons utilisé des résultats technique d'analyse fonctionnelle.

Les espaces de fonctions uniformément presque périodiques sont étroitement liées aux systèmes dynamiques, particulièrement aux propriétés des trajectoires relativement compactes des systèmes dynamiques stables. Nous avons juste indiqué l'un de ces liens en fin du premier chapitre et qui s'obtient directement par le critère de Bochner.

Enfin nous espérons que ce travail puisse servir aux étudiants qui veulent s'initier à ce domaine.

Annexe

Théorème 2.5. *(**Banach-Steinhaus**)(voir [5])*

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateur linéaire continu de E dans F. On suppose que

$$\sup_{i\in I} \| T_i x \|_E < \infty, \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup_{i\in I} \| T_i \|_{L(E,F)} < \infty.$$

Où $L(E,F)$ l'espace d'opérateurs linéaires continus de E dans F muni de la norme

$$\begin{aligned} \| T \|_{L(E,F)} &= \sup_{\|x\|\leq 1} \| T(x) \|_E \\ &= \sup_{x\neq 0} \frac{\| T(x) \|_E}{\| x \|_E} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \| T(x) \|_E \ . \end{aligned}$$

Proposition 2.6. *(**Hahn-Banach**)(voir [5])*

Si $x \neq y$, $x, y \in E$, alors il existe $\phi \in E^*$ telle que $\phi(x) \neq \phi(y)$.

Théorème 2.6. *(voir [6],[16])*
Soient E un espace de Banach, A une partie bornée de E, E^* le dual de E et M_A l'espace de Banach des fonctions complexes bornées sur A muni de la topologie de la convergence uniforme sur A. Soit $T : E^* \longrightarrow M_A$ un opérateur linéaire défini par $(T\varphi)(x) = \varphi(x), \forall x \in A$. Alors :
A est relativement compcate dans E ssi T est compact.

Donc pour qu'une partie bornée A d'un espace de Banach E soit relativement compacte, il suffit que pour toute suite bornée $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E^*$, on peut extraire une sous-suite $(\varphi_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ uniformément convergente sur A.

Intégrale de Bochner

Nous allons donner maintenant un petit résumé sur l'intégration de Bochner. Nous nous contentons juste de quelques éléments que nous avons utiliser dans ce mémoire. Pour plus de détails voir ([10]).
Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, de mesure μ finie, et X un espace de Banach.

Définition 2.7. Une fonction $f : \Omega \to X$ est dite simple s'il existe $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ et $B_1, B_2, ..., B_n \in \Sigma$ avec $\cup B_i = \Omega$ et $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$ tels que $f = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \chi_{B_i}$.

Définition 2.8. Une fonction $f : \Omega \to X$ est dite μ mesurable s'il existe une suite de fonction simple $(f_n)_n$ avec $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \|f_n - f\|_X = 0$ μ.p.p. sur Ω.

La proposition suivante nous donne une caractérisation des fonctions μ mesurable :

Proposition 2.7. *Une fonction $f : \Omega \to X$ est μ mesurable si et seulement si $\exists g$ mesurable telle que $f - g = 0$ μ.p.p. et $\exists N \in \Sigma,$ avec $\mu(N) = 0$ telle que $f(\Omega/N)$ est séparable.*

Définition 2.9. Une fonction $f : \Omega \to X$ μ mesurable est dite Bochner intégrable s'il existe une suite de fonctions simples (f_n) telle que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f_n - f\|_X d\mu = 0.$$

Dans ce cas, $\int_{\Omega} f d\mu$ est définie par

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Où $\int_{\Omega} f_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(B_i)$.
On a la caractérisation suivante des fonctions Bochner integrable :

Théorème 2.7. *Une fonction μ mesurable est Bochner intégrable si et ssi $\int_{\Omega} \|f\|_X d\mu < +\infty$.*
L'intégrale de Bochner vérifie les propriétés suivantes :

Propriétés 2.1. *Soit $f : \Omega \to X$ une fonction Bochner intégrable. Alors :*

1. $\lim_{\mu(E) \longrightarrow 0} \int_E f d\mu = 0.$
2. $\| \int_{\Omega} f d\mu \|_X \leq \int_{\Omega} \|f\|_X d\mu.$
3. *L'application $f \mapsto \int_{\Omega} f d\mu$ est linéaire.*
4. *Pour toute forme linéaire continue T sur X on a :*

$$T(\int_{\Omega} f d\mu) = \int_{\Omega} T(f) d\mu.$$

Remarque 2.3. Considérons sur $\mathbb{R}$ la tribu de Borel avec la mesure μ de Lebesgue, et une fonction $f : \mathbb{R} \to X$ presque périodique, alors

$$f/[-T, -T]$$

est μ mesurable. En effet :

1. f étant continue donc mesurable.
2. $f(\mathbb{R})$ est totalement bornée dans X donc séparable.

Par la proposition 2.7 on a $f/[-T, +T]$ est μ mesurable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Amerio L., Prouse G., Almost periodic functions and functional equations. New-York : Van Norstrand Reinhold Co. 1971.

[2] A. Kolmogorov, S. Fomine, Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Moscou. 1994.

[3] A.M. Fink, Almost Periodic Differential Equations, Lectures Notes in Mathematics n^0 377, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[4] A. S. Besicovitch, Almost periodic functions, Dover publications, New York, 1948.

[5] Brezis H.,Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, Masson (1983).

[6] C. Corduneanu, Almost Periodic Functions, Chelsea, New York 1989.

[7] C. Corduneanu, Almost Periodic Oscillations and Waves, Springer 2009.

[8] D. Giraudo, Fonctions presques périodiques, Mémoire de master 1, Université de Rouen, 2011.

[9] Dhaou Lassoued, Fonctions présque-périodiques et équations différentielles, Thése de doctorat, Université de Paris, 2013.

[10] J.Diestel, J.J.Uhl,Jr., Vector Measures, Americal society, 1977.

[11] J. Favard, Leçons sur les fonctions presque-périodiques, Gauthiers-Villars, Paris, 1933.

[12] H.Bohr, Almost periodic functions. New York, 1933.

[13] Larbi Ahmed, Constribution à l'étude de modéles autorégressifs AR(1) à coefficients périodiques et presque périodiques, Memoire de Magister, Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, 2012.

[14] Levitan, B.M. and Zhikov, V.V., Almost Periodic Functions and Differential equations, Cambridge University Press, Cambridge-Landon-New York, 1982.

[15] Mosleh Uddin Mazumder. Almost periodic differentiel equations and a study of the non-hemogeneous heat equation, Canada, 1992.

[16] Phillips, R.S. On liner transformations. Trans. Am. Math. Sco., 48 (1940), 516-541.

[17] R.S.Guter, L.D. Kudryavtesv, B.M. Levitan,Elements of the theory of functions, New York, 1966.

[18] Tayeb Hamaizia. Systemes dynamiques et chaos, Thése de doctorat, Université de Constantine, 2013.

[19] Toka Diagana. Almost Automorphic types functions in abstract spaces, New York, 2013.

[20] S. Zaidman,Almost periodic functions in abstract spaces, Pitman publishing, 1985.