

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERRI DE TIZI OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire de Master

Spécialité : **Mathématiques**

Option : **Méthodes et modèles de Décision**

Proposé par :

M^r Hamadouche Djamel

Présenté par :

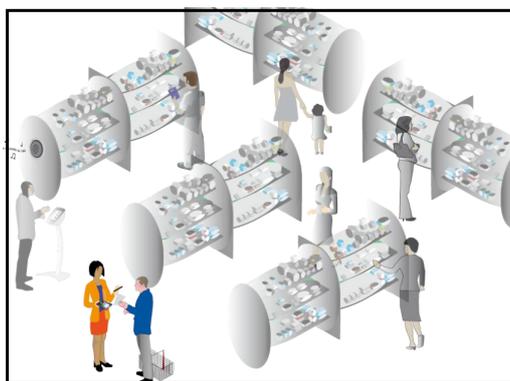
Boudane Massiva

Salmi Nadia

Thème :

Modélisation de files d'attente et simulation :

Cas de gestion de caisses d'un supermarché



Devant le jury d'examen composé de :

M^r OUKACHA

M^r TALEB

Soutenue le : 03/07/2016

Remerciements

Avant d'entamer cette présentation, nous tenons à exprimer notre sincère gratitude envers tous ceux qui nous ont aidées à faire en sorte que ce projet arrive à terme.

Tout d'abord, nous tenons à remercier M^r Hamadouche Djamel, notre encadreur, pour son aide, sa générosité et le temps qu'il nous a consacrés.

Nous sommes reconnaissantes également à tous nos enseignants pour leur disponibilité, leur soutien et leur précieuse contribution à notre formation.

Un grand merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Dédicaces

Nous dédions ce modeste travail :

A nos familles,

A nos amis,

Et à nos professeurs.



Table des matières

1	Processus Markoviens	9
1.1	Introduction	9
1.2	Généralités	9
1.3	Processus stochastique	9
1.4	Processus stationnaires	10
1.5	Processus à accroissement indépendants et stationnaires	11
1.5.1	Processus à Accroissement Indépendants (PAI)	11
1.5.2	Processus à Accroissement Stationnaires (PAS)	11
1.5.3	Processus à accroissement indépendants et stationnaires (PAIS)	11
1.6	Processus de Poisson	11
1.6.1	Définitions et généralités	11
1.6.2	Processus de poisson et la loi exponentielle	14
1.7	Processus de naissance et de mort	16
1.7.1	Généralités	16
1.7.2	Équations de Chapman Kolmogorov associées au système	16
1.7.2.1	Cas stationnaire	17
1.7.3	Graphe de transition associé au processus de naissance et de mort	19
1.8	Processus de naissance pur et Processus de mort pur	21
1.8.1	Processus de naissance pur	21
1.8.2	Processus de mort pur	22
1.9	Processus de Markov	22
1.9.1	Générateur infinitésimal d'un processus de Markov	25
1.9.2	Équations de Chapman Kolmogorov associées aux processus de Markov	26
1.9.3	Loi stationnaire du processus de Markov	27
1.9.4	Ergodicité du processus de Markov	27
1.10	Conclusion	27
2	Systèmes de files d'attente	29
2.1	Introduction	29
2.2	Description	29
2.3	Caractéristiques d'un système d'attente	30
2.4	Notation de Kendall	31
2.5	Étude de la file M/M/1	31
2.5.1	Étude du processus $(N_t)_{t \in T}$	32
2.5.2	Loi du système en régime permanent (stable)	33
2.5.3	Nombre moyen de clients dans le système à la date t	33
2.5.4	Écart type σ_t	34

2.5.5	Nombre moyen de clients dans la file à la date t	35
2.5.6	Formule de Little :	35
2.5.7	Caractéristiques du système liées aux serveurs	37
2.5.7.1	Durée moyenne d'une période de répit (oisiveté) \bar{R}	37
2.5.7.2	Nombre moyen de périodes de répit \bar{A} (en régime permanent)	38
2.5.7.3	Nombre moyen d'une période d'activité \bar{B} (en régime permanent)	38
2.5.7.4	Durée moyenne d'une période d'activité \bar{C}	38
2.5.7.5	Nombre moyen de clients à servir durant une période d'activité \bar{N}_0	38
2.5.8	Étude de la file M/M/1/k	38
2.5.9	Étude de la file M/M/1/k/[F]	40
2.5.10	Étude de la file M/M/s	42
2.5.10.1	Description du modèle	42
2.5.10.2	Étude du processus $N(t)$	43
2.5.10.3	Étude du système en régime permanent	46
2.5.11	Étude de la file M/M/ ∞	49
2.6	Conclusion	50
3	Modélisation de files d'attente	52
3.1	Introduction	52
3.2	Étude de cas	52
3.3	Position du problème	53
3.4	Détermination des lois	53
3.4.1	Loi des arrivées	53
3.5	Modélisation du nombre d'achats d'un clients en cours de paiement	54
3.6	Modélisation du temps de service	55
3.6.1	Organisation de paiement à guichet unique (M/M/1)	55
3.7	Cas d'un nombre fini de guichets (M/M/k)	56
3.8	Problème d'optimisation	56
3.9	Conclusion	58
4	Simulation et implémentation	59
4.1	Introduction	59
4.2	Simulation	59
4.2.1	Simulation de la loi des arrivées	59
4.3	Simulation du nombre d'achats et temps de simulation	61
4.4	Organisation de paiement à guichet unique	63
4.5	Cas d'un nombre fini de guichets	69
4.6	Problème d'optimisation	70
4.7	Conclusion	72

Introduction générale

La théorie des files d'attente est une méthodologie de recherche opérationnelle qui permet de modéliser un système d'attente, un phénomène de masse et de mesurer ses performances et ses caractéristiques pour aider les gestionnaires dans leurs prises de décisions. Parmi ces preneurs de décisions, les responsables d'entreprises, de supermarchés,...

Dans le but d'apporter notre aide au gestionnaire, une méthode s'offre à nous "La modélisation et la simulation" sous MATLAB. Dans les grands complexes industriels, la modélisation et la simulation jouent un rôle prépondérant dans l'évaluation prédictive du comportement du système. Il s'agit de modéliser par exemple une file d'attente (clients entrants et traitement de leurs demandes par des serveurs ou caisses).

Comme les arrivées des clients et les temps de service dépendent de certains paramètres souvent difficiles à évaluer, on opte souvent pour un modèle stochastique en rendant certains paramètres du système aléatoires. Évidemment, ces clients arrivent en des temps aléatoires, les temps de service sont eux aussi aléatoires, il peut y avoir un seul guichet, ou un nombre déterminé k de guichets. Les modèles les plus simples à étudier théoriquement sont ceux pour lesquels les clients arrivent suivant un processus de Poisson homogène qui ne dépend pas du temps (les temps d'inter-arrivées sont exponentiels). On parle de file d'attente $M/M/1$ ou $M/M/k$ s'il y a k guichets et capacité infinie (dans le sens assez grande). Si la capacité totale du système (attente+guichets) est égale à N , on parle de système $M/M/1/N$ ou $M/M/k/N$. Lorsque les temps d'inter-arrivées et/ou de service ne sont pas exponentiels exemple de loi Binomiale, il s'agira de système G/M ou M/G ou G/G , avec la aussi éventuellement plusieurs guichets et une longueur bornée de file d'attente. En pratique, dès que le système n'est pas de type M/M , on se contentera de l'approximer et d'utiliser une simulation informatique pour le traiter.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres organisés comme suit : Le premier traite les processus de Markov. On y introduira d'importantes définitions (Processus stochastiques-Processus à accroissements indépendants-Processus à accroissements stationnaires-Processus à accroissements indépendants et stationnaires,...). Ces généralités seront nécessaires à la compréhension de ce qui suivra à savoir le chapitre deux "Les files d'attente". En troisième lieu, on présentera une modélisation par files d'attente qui vise à mesurer et évaluer les performances du système d'attente présenté. On va ensuite s'intéresser à la simulation que l'on appliquera dans le dernier chapitre, nous implémenterons ces algorithmes en utilisant le logiciel MATLAB.

Processus Markoviens

Chapitre 1

Processus Markoviens

1.1 Introduction

Bon nombre de phénomènes physiques se décrivent par l'évolution d'une ou de plusieurs grandeurs au cours du temps. A un instant donné, ces grandeurs présentent souvent un caractère imprévisible, aléatoire, et il est alors naturel de les représenter par une variable aléatoire. L'évolution du phénomène est alors décrite par l'ensemble des variables aléatoires modélisant le phénomène à chaque instant. Cet ensemble de variables aléatoires forme un processus stochastique ou aléatoire.

1.2 Généralités

Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité
 $T \subseteq R$ un espace temps (ou de paramètres).
 $IE \subseteq R$ un espace d'états.

1.3 Processus stochastique

Définition 1

Un processus stochastique est une application mesurable

$$X : \Omega \times T \rightarrow IE.$$

$$(\omega, t) \rightarrow X(t, \omega) = X_t(\omega)$$

ou à t_0 fixé $\omega \rightarrow X_{t_0}(\omega)$ est une variable aléatoire.
et à ω_0 fixé $t \rightarrow X(t, \omega_0)$.

Remarque 1

- Si T est dénombrable (fini ou infini : $T \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$), $X=(X_t)_{t \in T}$ est une suite de variables aléatoires ou un processus à temps discret.
- Si $T \subseteq \mathbb{R}$ a la puissance du continu (intervalle ou combinaison d'intervalles), $(X_t)_{t \in T}$ est dit processus à temps continu ou processus stochastique.
- Si IE est discret (dénombrable fini ou infini) X est dit processus discret.
- Si $IE \subseteq \mathbb{R}$ a la puissance du continu, X est dit processus continu.

1.4 Processus stationnaires

Définition 2 (Stationnarité forte)

Un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ est dit fortement stationnaire (stationnaire au sens stricte) si les lois fini-dimensionnelles sont invariantes par transition : $\forall h > 0$ et $t_1, t_2, \dots, t_n \in T, n \in \mathbb{N}^*$, le vecteur $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ a la même loi que le vecteur $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$. En particulier, X_t et X_{t+h} ont la même loi $\forall t, h \in T$ (c'est à dire X_t et X_s ont la même loi $\forall t, s \in T$). La loi ne dépend pas du temps.

Définition 3 (Stationnarité faible)

Un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ est dit faiblement stationnaire (stationnaire au sens large) si

1. $E(X_t) = m_t = m < +\infty$.
2. $E(X_t^2) = \sigma_t^2 = \sigma^2 < +\infty$.
3. $Cov(X_t, X_s) = E((X_t - m)(X_s - m)) = \Gamma(t, s) = \Gamma(|t - s|)$.

(E représente l'espérance et $\Gamma(t, s)$: une fonction quelconque dont les paramètres sont t et s)

Remarque 2

- 3 \implies 2. En effet, quand $t=s$, $Cov(X_t, X_t) = Var(X_t) = \Gamma(0) = c$.
 Comme $Var(X_t) = E(X_t^2) - m^2 \implies E(X_t^2) = c + m^2 = \sigma^2 < +\infty \implies$ 2.

Remarque 3

La stationnarité forte implique la stationnarité faible.

1.5 Processus à accroissement indépendants et stationnaires

1.5.1 Processus à Accroissement Indépendants (PAI)

Un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ est dit un PAI si $\forall t_0, t_1, \dots, t_n \in T, n \in \mathbb{N}$ les variables aléatoires $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}}, \dots, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_1} - X_{t_0}$ sont indépendantes.

1.5.2 Processus à Accroissement Stationnaires (PAS)

Un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ est dit un PAS si $\forall t, s \in T$, la loi de l'accroissement $X_t - X_s$ ne dépend que de $t-s$, c'est à dire : $X_t - X_s$ et X_{t-s} ont la même loi.

1.5.3 Processus à accroissement indépendants et stationnaires (PAIS)

Un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ est dit un PAIS si (X_t) est un PAI et (X_t) est un PAS.

1.6 Processus de Poisson

1.6.1 Définitions et généralités

Définition 4 (Processus de comptage)

Un processus stochastique $(N_t)_{t \in T}$ est dit un processus de comptage ou processus de dénombrement si :

N_t représente le nombre d'évènements se produisant dans l'intervalle $[0, t]$ vérifiant :

1. $N(t) \in \mathbb{N}, \forall t \in R^+, (T = R^+)$.
2. $\forall t > s \in T, N(t) \geq N(s)$.
3. $N(t) - N(s)$ représente le nombre d'évènements se produisant dans l'intervalle $[s, t], \forall s < t \in T$.

Remarque 4

$$N(t) = N_t \geq 0, \forall t \in T.$$

Définition 5 (Processus de Poisson)

Un processus de comptage $(N_t)_{t \in T}$ est dit un processus de poisson si :

1. $N(0)=0$.
2. $(N_t)_{t \in T}$ est un PAIS.
3. $P[N_{dt} = k] = \begin{cases} o(dt) & k \geq 2 \\ \lambda dt + o(dt) & k = 1 \\ 1 - (\lambda dt + o(dt)) & k = 0 \end{cases}$

Proposition 1

$$P[N(t)=n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp^{-\lambda t}, t \in R^+, n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 5

$\lambda > 0$ est appelé le taux du processus de Poisson

La condition (1) signifie qu'à l'instant $t=0$, il n'y a aucune occurrence (réalisation d'évènement).

Le processus est à accroissement stationnaire (homogène dans le temps), signifie que la probabilité de réalisation de k évènement dans un intervalle de temps $[s, s+t]$ ne dépend que de la longueur de l'intervalle donné t et non de la position de cet intervalle. Si l'on pose $P[N_t = k] = p_k(t) \forall k \in \mathbb{N}, t, s \in \mathbb{R}^+$:

$$P[N_{s+t} - N_s = k] = P[N_t = k] = p_k(t).$$

- Le processus est à accroissement indépendant (PAI) signifie que :

$$P[N_{s+t} - N_s = k, N_s = j] = P[N_{s+t} - N_s = k] \times P[N_s = j] = p_k(t) \times p_j(s).$$

$$\forall s, t \in \mathbb{R}^+, \forall k, j \in \mathbb{N}$$

- La condition (3) signifie que dans un laps de temps très court (dt), au plus, il y a une occurrence d'évènement.

Preuve

Soit la propriété (*) : $P[N_t = n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp^{-\lambda t}$.

- (*) est elle vraie $\forall n \in \mathbb{N}$?

Pour $n=0$, on a :

$$\begin{aligned} P[N = 0] &= p_0[t + dt] = P[N_{t+dt} = 0] \\ &= P[N_t = 0, N_{t+dt} - N_t = 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{PAI}{=} P[N_t = 0]P[N_{t+dt} - N_t = 0] \\
 &\stackrel{PAS}{=} p_0(t) \times P[N_{dt} = 0] \\
 &= p_0(t)(1 - \lambda dt + o(dt)) \\
 P[N_t = 0] &= p_0(t) - \lambda p_0(t)dt + o(dt). \\
 \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{p_0(t+dt) - p_0(t)}{dt} &= \frac{-\lambda p_0(t)dt}{dt} + \frac{o(dt)}{dt}. \\
 \begin{cases} P'_0(t) = -\lambda p_0(t) \implies P_0(t) = \exp^{-\lambda t} \\ p_0(0) = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc (*) est vraie pour le premier terme n=0.

Pour n=1 on a :

$$\begin{aligned}
 &P[N_{t+dt} = 1] \\
 &= P[(N_t = 1, N_{t+dt} - N_t = 0) \cup (N_t = 0, N_{t+dt} - N_t = 1)] \\
 &= P[(N_t = 1, N_{t+dt} - N_t = 0)] + P[(N_t = 0, N_{t+dt} - N_t = 1)] \\
 &\stackrel{PAIS}{=} P[N_t = 1] \times P[N_{dt} = 0] + P[N_t = 0] \times P[N_{t+dt} = 1] \\
 &= p_1(t)(1 - \lambda dt + o(dt)) + (p_0(t)p_1(dt)) \\
 &= p_1(t)(1 - \lambda dt + o(dt)) + p_0(t)(\lambda dt + o(dt)) \\
 &= p_1(t) - \lambda p_1(t)dt + \lambda p_0(t)dt + o(dt) \\
 \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{p_1(t+dt) - p_1(t)}{dt} &= -\lambda p_1(t) + \lambda p_0(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} P'_1(t) = -\lambda p_1(t) + \lambda \exp^{-\lambda t} \\ p_1(0) = 0 \end{cases}$$

$\implies p_1(k) = \lambda t \exp^{-\lambda t} \implies (*)$ est vraie pour n=1.

On suppose que (*) est vraie jusqu'à l'ordre n :

$$\forall k \leq n, p_k(t) = \exp^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Montrons que (*) est aussi vraie pour k=n+1.

$$\text{Montrons que } p_{n+1}(t) = P[N_t = n + 1] = \exp^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$p_{n+1}(t + dt) = P[N_{t+dt} = n + 1]$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{n+1} P[N_t = n + 1 - k, N_{t+dt} - N_t = k] \\
 &\stackrel{PAIS}{=} \sum_{k=0}^{n+1} p_{n+1-k}(t) \times p[N_{dt} = k] \\
 &= p_{n+1}(t) \times (1 - \lambda dt + o(dt)) + p_n(t) \times (\lambda dt + o(dt)) \\
 &= p_{n+1}(t) - \lambda p_{n+1}(t) dt + \lambda p_n(t) dt + o(dt) \\
 &\implies p_{n+1}(t + dt) = p_{n+1}(t) - \lambda p_{n+1}(t) dt + \lambda p_n(t) dt + o(dt) \\
 \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{p_{n+1}(t+dt) - p_{n+1}(t)}{dt} &= -\lambda p_{n+1}(t) + \lambda p_n(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} P'_{n+1}(t) = -\lambda p_{n+1}(t) + \lambda \exp^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ p_{n+1}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\implies p_{n+1}(t) = P[N_t = n + 1] = \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \exp^{-\lambda t}$$

Donc (*) est aussi vraie pour $k=n+1$. D'où (*) est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

$P[N_t = n] = p_n(t) = \exp^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N} \iff N_t \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda t)$. En effet, lorsqu'il s'agit d'un processus $(N_t)_{t \in T}$, on dit qu'il est de poisson de "Taux" λ et les variables aléatoires N_t sont de loi de Poisson de paramètre λt . De plus, les accroissements du processus qui sont notés " $N_{t_{i+1}} - N_{t_i}$ " suivent une loi de poisson de "paramètres" $\lambda(t_{i+1} - t_i)$ avec $(t_{i+1} - t_i)$ est la durée de intervalle $[t_i, t_{i+1}]$.

1.6.2 Processus de poisson et la loi exponentielle

On considère un processus de Poisson $(N_t)_{t \in T}$ de taux λ . Soient $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$ les instants d'occurrence de ce processus. On pose :

$$\begin{cases} T_0 = \tau_0 \\ T_n = \tau_n - \tau_{n-1} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Proposition 2

Les variables aléatoires T_n , $n \geq 0$, sont indépendantes identiquement distribuées (iid) de même loi exponentielle(λ).

Preuve

Soit n, m ($n < m$), montrons que T_n est indépendant de T_m :

Montrons alors que $F_{n,m}(x, y) = P[T_n < x, T_m < y] = P[T_n < x] \times P[T_m < y]$.

On montre donc que $P[T_n \geq x, T_m \geq y] = P[T_n \geq x] \times P[T_m \geq y]$

$$P[T_n \geq x, T_m \geq y] = P[N_{\tau_{n-1}+x} - N_{\tau_{n-1}} = 0, N_{\tau_{n-1}+y} - N_{\tau_{n-1}} = 0]$$

$$\stackrel{PAI}{=} P[N_{\tau_{n-1}+x} - N_{\tau_{n-1}} = 0] \times P[N_{\tau_{n-1}+y} - N_{\tau_{n-1}} = 0]$$

$$= P[N_x = 0] \times P[N_y = 0]$$

$$= \exp^{-\lambda x} \exp^{-\lambda y}$$

$$= P[T_n \geq x] \times P[T_m \geq y]$$

c'est à dire $P[T_n \geq x]$ et $P[T_m \geq y]$ sont indépendantes $\implies P[T_n < x]$ et $P[T_m < y]$ sont indépendantes.

$F_{n,m} = F_n \times F_m \implies T_n$ et T_m sont indépendantes $\forall n \neq m \implies T_n$ sont indépendantes.

On a $F_n(x) = P[T_n < x] = 1 - P[T_n \geq x] = 1 - \exp^{-\lambda x}$, $x \geq 0$.

$$F'_n(x) = f_n(x) = \begin{cases} \lambda \exp^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\implies T_n \rightsquigarrow \exp(\lambda), \forall n \geq 0.$$

Finalement $T_n \stackrel{iid}{\rightsquigarrow} \exp(\lambda)$.

Généralisation de la proposition précédente

La durée qui sépare la $n^{\text{ième}}$ entrée de la $(n+k)^{\text{ème}}$ entrée est une v.a S_k ,

$$S_k = \sum_{i=n+1}^{n+k} T_i \stackrel{Enloi}{\approx} \sum_{i=1}^k T_i. \quad (S_k \text{ somme d'exponentielles indépendantes}).$$

$$\exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda) \implies S_k \rightsquigarrow \Gamma(k, \lambda).$$

1.7 Processus de naissance et de mort

1.7.1 Généralités

On considère un processus $(X_t)_{t \in T}$ à temps continu ($T = \mathbb{R}^+$), qui consiste à faire évaluer un système entre une infinité dénombrable d'états ($IE = \mathbb{N}$), on suppose que le système vérifie les hypothèses suivantes :

- H_1 : à partir d'un état $n \in E$, à l'instant t , le système ne pourra passer à l'instant $t+dt$ que dans l'un des états $n+1$, $n-1$ ou n ($n \geq 1$). Dans un laps de temps très court (dt), il y a réalisation du phénomène.
- H_2 : le processus est un PAIS.
- H_3 : au plus un évènement peut survenir à l'instant t .

1. On appelle naissance à la date t , le passage du système de l'état n à l'état $n+1$.
2. On appelle mort, à la date t , le passage du système de l'état n à la date $n-1$.

$$P[N_{t+dt} = n + 1 / N_t = n] = \lambda_n dt + o(dt).$$

$$P[N_{t+dt} = n - 1 / N_t = n] = \mu_n dt + o(dt).$$

λ_n : Taux de naissance du système et μ_n : Taux de mort du système.
 $(N_t)_{t \geq 0}$ ainsi défini est appelé processus de naissance et de mort (PNM).

1.7.2 Équations de Chapman Kolmogorov associées au système

Le système d'équations de Chapman Kolmogorov s'obtient par un simple calcul de probabilités, et en faisant appel à la résolution d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{aligned} P[N_{t+dt} = n / N_t = n] &= 1 - P[N_{t+dt} \neq n / N_t = n] \\ &= 1 - (P[N_{t+dt} = n + 1 / N_t = n] \text{ ou } P[N_{t+dt} = n - 1 / N_t = n]) \\ &= 1 - (P[N_{t+dt} = n + 1 / N_t = n] + P[N_{t+dt} = n - 1 / N_t = n]) \\ &= 1 - (\lambda_n dt + o(dt) + \mu_n dt + o(dt)) \\ &= 1 - (\lambda_n + \mu_n) dt + o(dt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_n(t+dt) &= P[N_{t+dt} = n] = P[N_t = n, N_{t+dt} = n] \cup P[N_t = n-1, N_{t+dt} = n] \\ &\quad \cup P[N_t = n+1, N_{t+dt} = n] \\ &= P[N_t = n, N_{t+dt} = n] + P[N_t = n-1, N_{t+dt} = n] + P[N_t = n+1, N_{t+dt} = n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= P[N_{t+dt} = n / N_t = n] \times P[N_{dt} = n] + P[N_{t+dt} = n - 1 / N_t = n] \times P[N_t = n - 1] + P[N_{t+dt} = n + 1 / N_t = n] \times P[N_t = n + 1] \\
 &= (1 - (\lambda_n + \mu_n) dt + o(dt)) p_n(t) + (\lambda_{n-1} dt + o(dt)) p_{n-1}(t) + (\mu_{n+1} dt + o(dt)) p_{n+1}(t) \\
 &= p_n(t) - (\lambda_n + \mu_n) dt p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) dt + \mu_{n+1} dt p_{n+1}(t) + o(dt). \\
 p_n(t+dt) - p_n(t) &= -(\lambda_n + \mu_n) p_n(t) dt + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) dt + \mu_{n+1} dt p_{n+1}(t) + o(dt). \\
 p'_n(t) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{p_n(t+dt) - p_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n) p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) + \mu_{n+1} p_{n+1}(t) + \frac{o(dt)}{dt} \\
 &= \mu_{n+1} p_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t).
 \end{aligned}$$

$$(S) \begin{cases} P'_0(t) = \mu_1 p_1(t) - \lambda_0 p_0(t), & n = 0 \\ p'_n(t) = \mu_{n+1} p_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) & n \geq 1 \\ \sum_{n \geq 0} p_n(t) = 1, p_n(0) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n > 1 \end{cases} \end{cases}$$

Ceci est un système d'équations différentielles et de récurrence (aux différences) de $p_n(t)$.

Comme il s'agit d'un système d'équations différentielles et de récurrence, sa résolution analytique se fait avec les fonctions orthogonales de Bessel (C'est le cas transitoire ou non stationnaire).

1.7.2.1 Cas stationnaire

On suppose que quand $t \rightarrow +\infty$, $p_n(t) \rightarrow p_n$ (indépendante de t), c'est à dire que le régime permanent (stable) ou stationnaire à partir de $t > t_0$ s'établit. Le système d'équations précédent (S) devient :

$$(S') \begin{cases} \mu_1 p_1 - \lambda_0 p_0 = 0 & n = 0 \\ \mu_{n+1} p_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n) p_n + \lambda_{n-1} p_{n-1} = 0 & n \geq 1 \\ \sum_{n \geq 0} p_n = 1 \end{cases}$$

\iff

$$(S') \begin{cases} \mu_1 p_1 = \lambda_0 p_0 & n = 0 \\ \mu_{n+1} p_{n+1} - \lambda_n p_n = \mu_n p_n - \lambda_{n-1} p_{n-1} & n \geq 1 \\ \sum_{n \geq 0} p_n = 1 \end{cases}$$

Résolution de (S')

$$n=0, p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0.$$

$$n=1, \mu_2 p_2 - \lambda_1 p_1 = \mu_1 p_1 - \lambda_0 p_0 \implies p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0.$$

$$n=2, \mu_3 p_3 - \lambda_2 p_2 = \mu_2 p_2 - \lambda_1 p_1 \implies p_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} p_2 = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} p_0.$$

$$\text{On suppose que } p_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_2 \mu_1} p_0.$$

Qu'en est-il de $n+1$?

$$n=n+1, \mu_{n+1} p_{n+1} - \lambda_n p_n = \mu_n p_n - \lambda_{n-1} p_{n-1} = 0. \text{ Car } p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \left(\frac{\lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_{n-1} \dots \mu_1} \right) p_0$$

$$\implies p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} p_{n-1}$$

$$\implies p_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} p_n = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_2 \mu_1} p_0$$

$$\text{Finalement, on obtient } p_n = \left(\prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) p_0, \forall n \geq 1.$$

$$p_n = a_n p_0, a_n = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}.$$

$(p_n)_{n \geq 0}$ est une loi de probabilité si on a :

$$\sum_{n \geq 0} p_n = 1 \implies p_0 + \sum_{n \geq 1} a_n = 1 \implies p_0 + \sum_{n \geq 0} a_n p_0 = 1 \implies p_0 (1 + \sum_{n \geq 1} a_n) = 1$$

$$\implies p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} a_n} \text{ est défini si } \sum a_n < +\infty \text{ (converge).}$$

Ceci est la condition de stabilité ou de stationnarité du système.

Conclusion

$$\text{Si } \sum_{n \geq 1} a_n < +\infty \text{ alors } p_n = \frac{a_n}{1 + \sum_{n \geq 1} a_n}, n \geq 1.$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} a_n} \text{ avec } a_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_2 \mu_1}.$$

Cas particulier $\lambda_n = \lambda$ et $\mu_n = \mu$.

$$a_n = \frac{\lambda \lambda \dots \lambda \lambda}{\mu \mu \dots \mu \mu} = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n = \rho^n, \text{ avec } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\text{Taux de naissance (entrée)}}{\text{Taux de mort (sortie)}}.$$

$$\implies \sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} \rho^n < +\infty \text{ si } \rho < 1 \text{ i.e } \lambda < \mu.$$

Donc la condition de stabilité dans ce cas est $\lambda < \mu$ ou $\rho < 1$.

Ainsi, la loi est

$$\begin{cases} p_n = \frac{\rho^n}{1 + \sum_{n \geq 1} \rho^n} = \frac{\rho^n}{\rho^0 + \sum_{n \geq 1} \rho^n} = \frac{\rho^n}{\sum_{n \geq 0} \rho^n} = \frac{\rho^n}{1 - \rho} = \rho^n (1 - \rho) & n \geq 1 \\ p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} a_n} = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \rho^n} = \frac{1}{1 - \rho} = 1 - \rho \end{cases}$$

C'est à dire $p_n = \rho^n (1 - \rho), \forall n \geq 0$.

1.7.3 Graphe de transition associé au processus de naissance et de mort

Soit (X_t) un processus de naissance et de mort de taux (λ_n, μ_n)

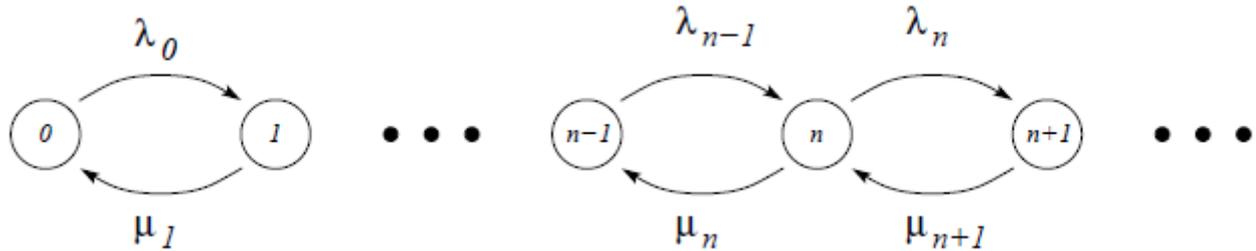


Figure 1 Graphe de transition d'un PNM.

$$p_{01} = P[X_{t+dt} = 1 / X_t = 0] = \lambda_0 dt + o(dt).$$

$$p_{12} = P[X_{t+dt} = 2 / X_t = 1] = \lambda_1 dt + o(dt).$$

On peut associer un graphe de transition à tout PNM (λ_n, μ_n) . Les flèches correspondent aux transitions possibles du système avec les probabilités de transition correspondantes.

Cas particulier $\lambda_n = \lambda$ et $\mu_n = \mu$.

On a la stabilité du système si $\lambda < \mu$ ($\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$) et on a :

$$p_n(t) = p_n = \rho^n (1 - \rho), \forall n \geq 0, \rho < 1.$$

Exemple 1

Une file devant un guichet.

X_t : Longueur de la file (nombre de clients), avec $\lambda_n = \lambda =$ nombre de clients entrés par unité de temps, $\mu_n = \mu,$ = nombre de clients servis par unité de temps $\lambda < \mu$.

$(N_t)_{t \geq 0}$ est un PNM (λ, μ) stationnaire (il modélise un système qui se stabilise) et cette loi stationnaire (d'après ce qui précède) est égale à

$$p_n(t) = p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right), \forall n \geq 0.$$

La longueur moyenne de la file à la date t est $\bar{\eta}$:

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= E(N_t) = \sum_{n \geq 0} n p_n \\ &= \sum_{n \geq 0} n \rho^n (1 - \rho) = 0 + \sum_{n \geq 1} n \rho^n (1 - \rho) \\ &= \rho(1 - \rho) \sum_{n \geq 1} n \rho^{n-1}. \end{aligned}$$

Comme $\rho < 1$, $\sum \rho^n$ est convergente

$$\begin{aligned}\bar{\eta} &= \rho(1 - \rho) \left(\sum_{n \geq 0} \rho^n \right)' = \rho(1 - \rho) \left(\frac{1}{1 - \rho} \right)' \\ &= \rho(1 - \rho) \left(\frac{1}{(1 - \rho)^2} \right)' \\ &= \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\frac{\mu - \lambda}{\mu}} \\ &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.\end{aligned}$$

La variance sera $Var(N_t)$:

$$\begin{aligned}Var(N_t) &= E(N_t^2) - E^2(N_t). \\ E(N_t^2) &= \sum_{n \geq 0} n^2 p_n = \sum_{n \geq 0} n^2 \rho^n (1 - \rho) \\ &= \sum_{n \geq 0} n(n + 1 - 1) \rho^n (1 - \rho) \\ &= \sum_{n \geq 0} [n(n - 1) \rho^n (1 - \rho) + n \rho^n (1 - \rho)] \\ &= \sum_{n \geq 0} n(n - 1) \rho^n (1 - \rho) + \sum_{n \geq 0} n \rho^n (1 - \rho). \\ \sum_{n \geq 0} n(n - 1) \rho^n (1 - \rho) &= \sum_{n \geq 2} n(n - 1) \rho^{n-2} (1 - \rho) \rho^2 \\ &= \rho^2 (1 - \rho) \sum_{n \geq 2} n(n - 1) \rho^{n-2} \\ &= \rho^2 (1 - \rho) \sum_{n \geq 2} (\rho^n)'' \\ &= \rho^2 (1 - \rho) \left(\sum_{n \geq 2} \rho^n \right)'' \\ &= \rho^2 (1 - \rho) \left(\frac{1}{1 - \rho} \right)'' \\ &= \rho^2 (1 - \rho) \left(\frac{1}{(1 - \rho)^2} \right)' \{ \text{Car } \rho < 1 \text{ et } \sum \rho^n \text{ est convergente et dérivable} \}. \\ &= -\rho^2 (1 - \rho) \frac{2(1 - \rho)}{(1 - \rho)^4} = \frac{2\rho^2}{(1 - \rho)^2}. \\ E(N_t^2) &= \frac{2\rho^2}{(1 - \rho)^2} + \frac{\rho}{1 - \rho}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(N_t) &= E(N_t^2) - \bar{\eta}^2 = \frac{2\rho^2}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} \\ &= \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho)^2} \\ &= \frac{\rho^2 + \rho - \rho^2}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}. \\ \sigma &= \frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho}. \end{aligned}$$

Donc la longueur de la file à l'instant t est dans l'intervalle $[\bar{\eta} - \sigma, \bar{\eta} + \sigma] = \left[\frac{\rho - \sqrt{\rho}}{1-\rho}, \frac{\rho + \sqrt{\rho}}{1-\rho} \right]$.

1.8 Processus de naissance pur et Processus de mort pur

1.8.1 Processus de naissance pur

C'est un PNM de taux de naissance $\lambda_n, n \geq 0$ et de taux de mort $\mu_n = 0, \forall n \geq 0$.

Le système (S) d'équations de Chapman Kolmogorov s'écrit :

$$(S) \begin{cases} p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) \\ p'_n(t) = -\lambda_n p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) & n \geq 1 \\ \sum_{n \geq 0} p_n(t) = 1 \end{cases} \quad p_n(0) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Condition de stabilité

$\sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_n} \rightsquigarrow \infty \{ \text{Car } \forall i = 1, \dots, n; \mu_i = 0 \}$
 $p_0 = 0 \implies p_n = 0, \forall n \geq 0 \implies \sum_{n \geq 0} p_n \neq 1$. { p_n ne définit pas une loi de probabilité }

C'est à dire le système ne se stabilise pas. Donc, il faut le résoudre dans le cas transitoire.

Si $\lambda_n = \lambda$. Le système (S) devient

$$(S') \begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t) \\ p'_n(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) & n \geq 1 \\ \sum_{n \geq 0} p_n(t) = 1 \end{cases} \quad p_n(0) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La solution de (S') est :

$p_n(t) = \exp^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \forall n \geq 0 \implies E(N_t) = \lambda t; \sigma_t = \sqrt{\lambda t} \implies$ La longueur de la file appartient à l'intervalle $[\lambda t - \sqrt{\lambda t}, \lambda t + \sqrt{\lambda t}]$.

Il s'agit donc d'un processus de Poisson de taux λ .

1.8.2 Processus de mort pur

C'est un PNM avec $\lambda_n = 0, \forall n \geq 0$ et on suppose que

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \mu & n = 1, N \end{cases} \text{ avec } N : \text{ la capacit e du syst eme.}$$

C'est à dire, le processus de mort pur prend ses valeurs dans l'espace d' tats $IE = \{0, 1, 2, \dots, N\}, N \in \mathbb{N}$.

L' tat initiale du processus est N . Il n'y a pas d'arrivées et les départs se produisent avec un taux μ constant jusqu'à ce que le système soit vide.

On a $p_n(t) =$ Probabilité que le système soit à l'état n à l'instant $t =$
 Probabilité que $N-n$ départs se produisent dans l'intervalle $[0, t]$.

$$p_n(t) = P[N_t = n] = P[Y_t = N-n] = \exp^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{N-n}}{(N-n)!}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

$$\text{et } p_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^N p_n(t) = \sum_{j \geq N} \exp^{-\mu t} \frac{(\mu t)^j}{j!}.$$

1.9 Processus de Markov

Définition 6

Soit (Ω, Q, P) un espace probabilisé, IE un ensemble fini ou infini (dénombrable) et $T \subset \mathbb{R}^+$, un intervalle.

IE : Espace d' tats.

T : Espace temps.

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus défini sur Ω à valeurs dans IE .

On dit que le processus $(X_t)_{t \in T}$ est de Markov si :

$$\forall s, t, u \in T, \forall i, j, x \in IE \quad (u < s < t) \text{ on a :}$$

$$P[X_t = j / X_s = i, X_u = x] = P[X_t = j / X_s = i] = p_{i,j}(s, t) \dots \dots (**)$$

Cette propriété s'appelle "Propriété d'absence de mémoire (ou de Markov)".

Remarque 6

Si dans la propriété (**), on a en plus $p_{i,j}(s, t) = p_{i,j}(t - s)$, on dira que le processus de Markov est **homogène**. On ne consid rera que ce cas, par la suite.

On note $p_{i,j} = P[X_{s+t} = j / X_s = i] \quad s, t \in T, i, j \in IE$. (Probabilité de transition) et $P(t) = (p_{i,j}(t))_{(i,j) \in IE \times IE}$ est la matrice de transition du processus de Markov $(X_t)_{t \in T}$.

Proposition 3

Pour $s, t \in T$ et $i \in IE$, $P[X_s = i] > 0$, on a :

$$\sum_{j \in E} p_{ij}(t) = 1, \forall i \in IE. \quad (1)$$

$$p_{ik}(t+s) = \sum_{j \in E} p_{ij}(s) \times p_{jk}(t). \quad (2)$$

(Equations de Chapman – Kolmogorov associées au processus).

Preuve (1)

Soit $i, j \in IE$, $s, t \in T$ tel que $P[X_s = i] > 0$,

$$\begin{aligned} P[X_s = i] &= \sum_{j \in E} P[X_s = i / X_{s+t} = j] \\ &= \sum_{j \in E} P[X_{s+t} = j / X_s = i] \times P[X_s = i] \\ &= \sum_{j \in E} p_{ij}(t) \times P[X_s = i] \\ &= P[X_s = i] \times \sum_{j \in E} p_{ij}(t) \\ &\implies \sum_{j \in E} p_{ij}(t) = 1. \end{aligned}$$

Preuve (2)

Soit $i, j \in IE$, $s, t \in T$, $P[X_s = j] > 0$, $P[X_0 = i] \neq 0$,

$$\begin{aligned} p_{ik}(s+t) &= P[X_{s+t} = k / X_0 = i] \\ &= \frac{P[X_{s+t}=k, X_0=i]}{P[X_0=i]} \\ &= \sum_{j \in E} \frac{P[X_{s+t}=k, X_0=i, X_s=j]}{P[X_0=i]} \\ &= \sum_{j \in E} \frac{P[X_{s+t}=k, X_0=i / X_s=j] \times P[X_s=j / X_0=i] \times P[X_0=i]}{P[X_0=i]} \\ &= \sum_{j \in E} \frac{p_{jk}(t) \times p_{ij}(s) \times P[X_0=i]}{P[X_0=i]} \\ &= \frac{P[X_0=i] \times \sum_{j \in E} p_{ij}(s) \times p_{jk}(t)}{P[X_0=i]} \\ &= \sum_{j \in E} p_{ij}(s) \times p_{jk}(t). \end{aligned}$$

Proposition 4

La matrice de transition $P(t)$ caractérise le processus de Markov $(X_t)_{t \in T}$. C'est à dire : A toute matrice stochastique $P(t)$, on peut associer un processus de Markov $(X_t)_{t \in T}$ de loi initiale :

$(P[X_0 = i], (i \in IE))$ donnée, qui va admettre $P(t)$ comme **matrice de transition**.

preuve

En effet, construire ce processus revient à évaluer juste ses lois fini-dimensionnelles, c'est à dire à évaluer :

$P[X_{t_n} = a_n, X_{t_{n-1}} = a_{n-1}, \dots, X_{t_1} = a_1, X_{t_0} = a_0], \forall t_0, \dots, t_{n-1}, t \in T,$
 $\forall a_i \in IE,$

on a :

$$\begin{aligned} & P[X_{t_n} = a_n, X_{t_{n-1}} = a_{n-1}, \dots, X_{t_1} = a_1, X_{t_0} = X_0 = a_0] \\ &= P[X_{t_n} = a_n, / X_{t_{n-1}} = a_{n-1}, \dots, X_0 = a_0] \times P[X_{t_{n-1}} = a_{n-1} / X_{t_{n-2}} = \\ & \quad a_{n-2}, \dots, X_0 = a_0] \\ & \times \dots \times P[X_{t_2} = a_2 / X_{t_1} = a_1, X_0 = a_0] \times P[X_{t_1} = a_1 / X_0 = a_0] \times P[X_0 = a_0] \\ & \stackrel{PM}{=} P[X_{t_n} = a_n, / X_{t_{n-1}} = a_{n-1}] \times P[X_{t_{n-1}} = a_{n-1} / X_{t_{n-2}} = a_{n-2}] \\ & \times \dots \times P[X_{t_2} = a_2 / X_{t_1} = a_1] \times P[X_{t_1} = a_1 / X_0 = a_0] \times P[X_0 = a_0] \\ &= p_{a_{n-1}a_n}(t_n - t_{n-1}) \times p_{a_{n-2}a_{n-1}}(t_{n-1} - t_{n-2}) \times p_{a_1a_2}(t_2 - t_1) \times p_{a_0a_1}(t_1 - t_0) \times \\ & \quad \pi_0(a_0). \end{aligned}$$

Avec :

$(p_{a_{n-1}a_n}(t_n - t_{n-1}) \times p_{a_{n-2}a_{n-1}}(t_{n-1} - t_{n-2}) \times p_{a_1a_2}(t_2 - t_1) \times p_{a_0a_1}(t_1 - t_0))$ qui figure dans la matrice de transition et $(\pi_0(a_0))$ est la loi initiale donnée du processus.

On note $\pi(t) = (P[X_t = i], i \in IE)$, la loi t-instantanée du processus $(X_t)_{t \in T}$.

On a $\pi(t) = \pi(0)P(t)$ (Écriture matricielle), avec $\pi(0) = (P[x_0 = j], j \in IE)$. En effet, pour $i \in IE$,

$$\begin{aligned} P[X_t = i] & \stackrel{FPT}{=} \sum_{j \in IE} P[X_t = i, X_0 = j] = \sum_{j \in IE} P[X_t = i, / X = j] \times P[X_0 = j] \\ & = \sum_{j \in E} \pi_0(j) p_{ji}(t) \end{aligned}$$

C'est à dire $\pi_t(i) = \sum_{j \in IE} \pi_0(j) p_{ji}(t) \iff \pi(t) = \pi(0) \times p(t)$.

1.9.1 Générateur infinitésimal d'un processus de Markov

On suppose que $\forall(i, j) \in IE \times IE$, la fonction $p_{ij}(\cdot)$ est continue en 0 i.e :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} p_{ij}(t) = \delta_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= P_{ij}(0). \end{aligned}$$

Soit alors $i \leq j$

1. Pour $i \neq j$, $q_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(t) - p_{ij}(0)}{t - 0} = p'_{ij}(0)$. (Si $p_{ij}(\cdot)$ est dérivable en 0).
2. Pour $i=j$, $q_{ii} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{ii}(t) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{ii}(t) - p_{ii}(0)}{t - 0} = p'_{ii}(0)$. (Si $p_{ii}(\cdot)$ est dérivable en 0).

On pose $q_i = -q_{ii} (\geq 0)$. On appelle alors "Générateur infinitésimal du processus de Markov", la matrice

$$Q = (q_{ij})_{(i,j) \in IE \times IE}$$

On a

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= q_{ij}t + o(t); \quad i \neq j. \\ p_{ii}(t) &= 1 + q_{ii}t + o(t); \quad i=j \\ \implies 1 - p_{ii}(t) &= -q_{ii}t + o(t) \implies 1 - p_{ii}(t) = q_i t + o(t). \end{aligned}$$

Remarque 7

$$\sum_{j \in IE} q_{ij} = 0; \forall i \in IE. \text{ Car } \sum_{j \in IE} q_{ij} = \sum_{j \in IE} (p_{ij}(t))' |_{t=0} = \left(\sum_{j \in IE} p_{ij}(t) \right)' |_{t=0}$$

$$= (1)' = 0.$$

$$q_{ii} + \sum_{\substack{j \in IE \\ i \neq j}} q_{ij} = 0 \implies q_i = -q_{ii} = \sum_{i \neq j} q_{ij}$$

q_{ij} est appelé taux de transition de i vers j .

q_i est appelé taux de transition à partir de i .

1.9.2 Équations de Chapman Kolmogorov associées aux processus de Markov

On a

$$p_{ik}(s+t) = \sum_{j \in IE} p_{ij}(s) \times p_{jk}(t).$$

$$1. \frac{\delta[p_{ik}(s+t)]}{\delta t} \Big|_{t=0} = \frac{\delta[\sum_{j \in IE} p_{ij}(s) \times p_{jk}(t)]_{t=0}}{\delta t} = \sum_{j \in IE} p_{ij}(s) \times q_{jk} \iff p'_{ik}(s) = \sum_{j \in IE} p_{ij}(s) \times q_{jk} \quad \forall i, k \in IE \text{ et } \forall s, t \in T$$

$$2. \text{ On a aussi } \frac{\delta}{\delta s}[p_{ik}(s+t)] \Big|_{s=0} = \sum_{j \in IE} q_{ij} \times p_{jk}(t). \iff p'_{ik}(t) = \sum_{j \in IE} q_{ij} \times p_{jk}(t) \quad \forall i, k \in IE \text{ et } \forall s, t \in T$$

$$k \in IE \text{ et } \forall s, t \in T$$

On aura donc l'écriture matricielle suivante :

$$P'(t) = Q \times P(t) = P(t) \times Q$$

Proposition 5

L'équation différentielle $\begin{cases} P'(t) = Q \times P(t) \\ P(0) = I_{IE \times IE} \end{cases}$ admet la solution qui s'écrit

comme suit :

$$P(t) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{Q^n \times t^n}{n!} \right) = I_{IE \times IE} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{Q^n \times t^n}{n!} \right) = \exp^{Qt}$$

Proposition 6

Si IE est fini et Q est diagonalisable (\exists une matrice B inversible et D diagonale telles que $Q = B \times D \times B^{-1}$) avec

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \lambda_i, i = \overline{1, n} : \text{valeurs propres de } Q.$$

Alors :

$$P(t) = B \times \Delta(t) \times B^{-1} \quad \text{Avec}$$

$$\Delta(t) = \exp^{Dt} = \begin{bmatrix} \exp^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \exp^{\lambda_2 t} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \exp^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

1.9.3 Loi stationnaire du processus de Markov

On dit que $\pi(t) = \pi$ est une loi stationnaire du processus de Markov $(X_t)_{t \in T}$ si elle est solution du système d'équations :

$$(S) \quad \begin{cases} \pi \times Q = 0, \\ \sum_{j \in E} \pi_j = 1. \end{cases}$$

Avec Q , générateur infinitésimal du processus de Markov $(X_t)_{t \in T}$.

1.9.4 Ergodicité du processus de Markov

Un processus de Markov est dit ergodique si :

1. Le système d'équations (S) admet une seule solution.
2. Cette solution $\pi = (\pi_j, j \in IE)$ vérifie $\pi_j = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_{ij}(t)$, $\forall i, j \in IE$.

1.10 Conclusion

A la différence de la théorie des probabilités, qu'on peut considérer comme étant le traitement mathématique de la notion intuitive du hasard, les processus stochastiques fournissent des modèles mathématiques de phénomènes aléatoires dont la dépendance du temps (ou d'un autre paramètre) joue un rôle prépondérant.

Des applications des processus stochastiques existent dans de nombreux domaines de l'ingénieur, mais ce sont également des informaticiens, physiciens, biologistes, sociologues, ainsi que des spécialistes d'autres disciplines qui font appel, de plus en plus, à la modélisation par les processus stochastiques, notamment ceux du type markovien.

Systèmes de files d'attente

Chapitre 2

Systèmes de files d'attente

2.1 Introduction

Une file d'attente est un modèle mathématique décrivant un phénomène d'attente. Des clients arrivent à intervalles aléatoires dans un système comportant plusieurs serveurs auxquels ils vont adresser une requête. La durée du service auprès de chaque serveur est elle-même aléatoire. Après avoir été servis, les clients quittent le système. La théorie des files d'attente a pour objectif l'étude des structures et le calcul des valeurs caractéristiques permettant d'en décrire les performances. Le présent chapitre est consacré à une présentation de quelques files d'attente élémentaires.

2.2 Description

on considère un système destiné à offrir un certain service, celui (personne ou objet) qui vient bénéficier d'un service est dit client et les postes de service sont appelés serveurs.

- File d'attente : "salle" ou attendent les unités (clients) avant d'être servis.
- Système d'attente : la file d'attente + service en cours.

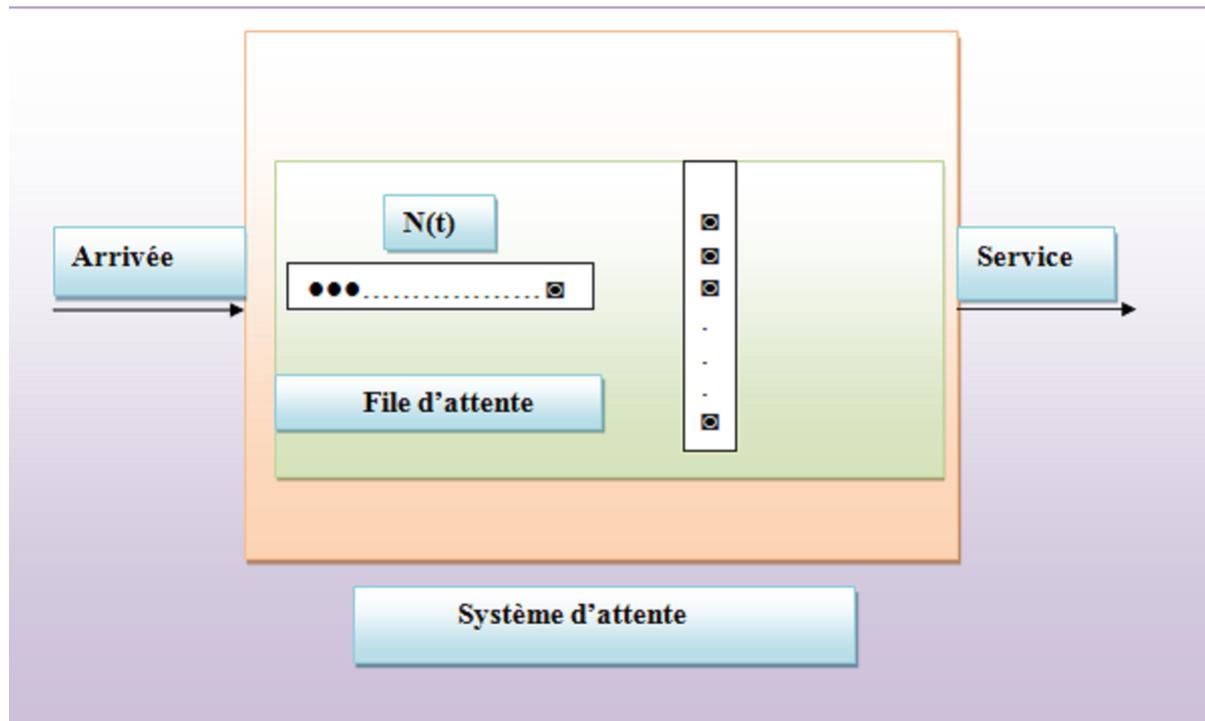


Figure 2 Système d'attente.

L'étude de ces files d'attente porte sur la qualité et le rendement du service fourni. Le service fourni sera caractérisé par la description de :

- La file d'attente (longueur, temps d'attente,...)
- Serveurs (nombre de clients servis par période d'activité, durée d'oisiveté (répit),...)

Cette étude peut avoir deux buts :

1. L'amélioration du fonctionnement dans le cadre des structures actives, actuelles du système.
2. L'étude de l'investissement à consentir (augmentation de serveurs ou la capacité du système,...) pour améliorer la qualité et le rendement du service fourni.

2.3 Caractéristiques d'un système d'attente

Les caractéristiques d'un système d'attente sont :

- Loi des arrivées des clients dans le système (Poisson, G ,...), cette loi sera notée L_1 .
- Loi des durées de service de chaque serveur (c'est la même loi service indépendante des arrivées), notée L_2 .
- Nombre de serveurs noté s ($s \geq 1$).

- La capacité du système ou la longueur maximale de la file d'attente permise par le système, notée k .
- La discipline de service c'est à dire la façon dont un client à servir est choisi dans la file d'attente quand un guichet devient libre.

Exemple 1

- FIFO (PAPS) : Premier Arrivé, Premier Servi.
- LIFO (DAPS) : Dernier Arrivé, Premier Servi.
- PS (SP) : Service avec priorité.
- RS (SA) : Service aléatoire.
- Système ouvert [O] : accepte tous les clients. Système fermé [F] (accepte des clients particuliers).

2.4 Notation de Kendall

Une file d'attente est la donnée des caractéristiques citées précédemment et elle est notée : $(L_1/L_2/s/k/FIFO (ou autre discipline)/[O] ou [F])$

Remarque 1

Une file d'attente $(L_1/L_2/s)$ représente par défaut une file d'attente de type : $(L_1/L_2/s/\infty/FIFO/[O])$.

2.5 Étude de la file M/M/1

C'est une file d'attente avec un serveur qui sert les clients dans l'ordre de leurs arrivées.

- Le processus des arrivées est supposé $P(\lambda)$, $\lambda > 0$ ($L_1 \rightsquigarrow M$).
- La durée de service est exponentielle $\exp(\mu)$, $\mu > 0$ ($L_2 \rightsquigarrow M$).

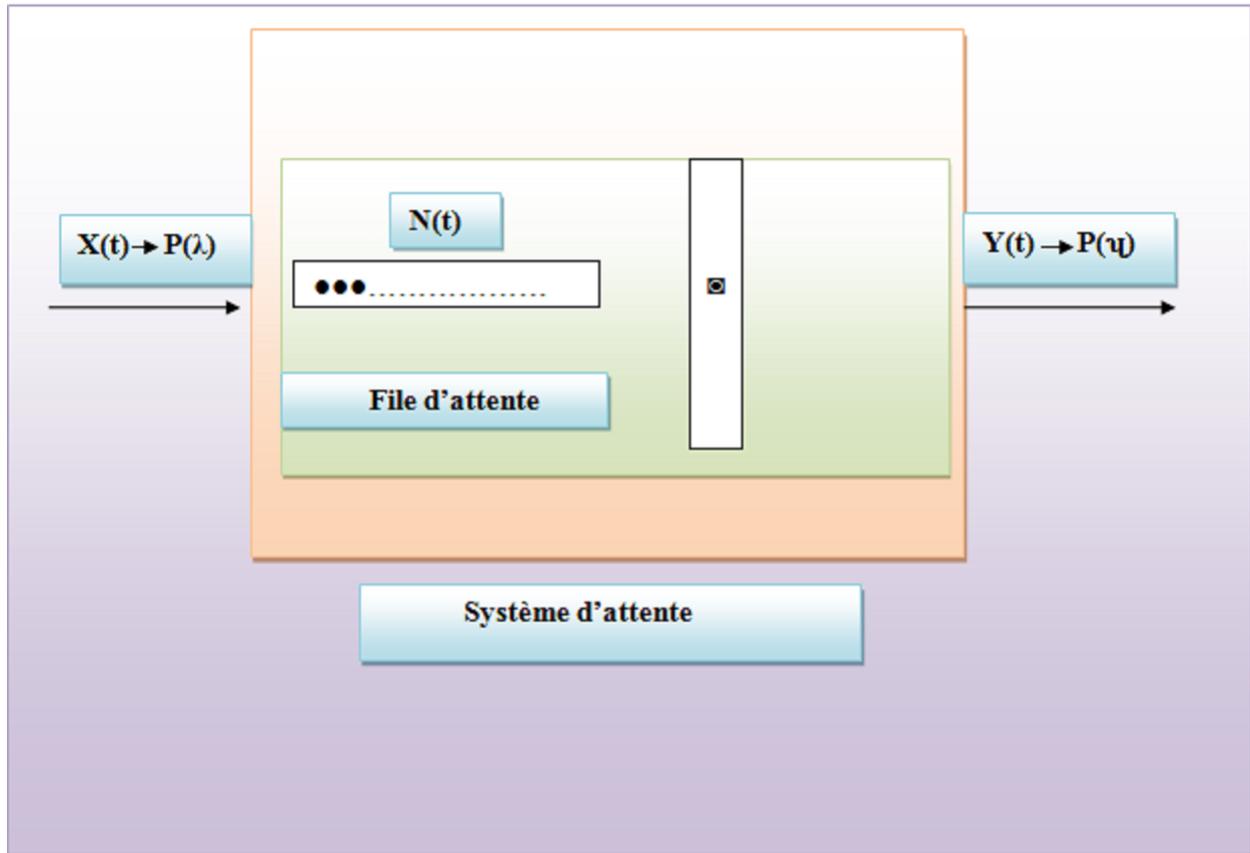


Figure 3 Système d'attente M/M/1.

On pose : $N(t)$: Nombre de clients dans le système à la date t .

$M(t)$: Nombre de clients dans la file à la date t .

2.5.1 Étude du processus $(N_t)_{t \in T}$

C'est un processus de naissance et de mort (PNM) de taux λ_n et μ_n .

λ_n : taux de naissance quand le système est à l'état n .

μ_n : taux de mort quand le système est à l'état n .

λ_n et μ_n sont à déterminer :

- On a :

$$\begin{aligned} \lambda_n dt + o(dt) &= P[N_{t+dt} = n + 1 / N_t = n] \\ &= P[X_{t+dt} = X_t + 1] = P[X_{t+dt} - X_t = 1] \\ &= P[X_{dt} = 1] = \lambda dt + o(dt) \\ &\implies \lambda_n = \lambda. \end{aligned}$$

- On a aussi :

$$\mu_n dt + o(dt) = P[N_{t+dt} = n - 1 / N_t = n]$$

$$\begin{aligned}
 &= P[Y_{t+dt} = Y_t + 1] = P[Y_{t+dt} - Y_t = 1] \\
 &= P[Y_{dt} = 1] = \mu dt + o(dt) \\
 &\implies \mu_n = \mu.
 \end{aligned}$$

2.5.2 Loi du système en régime permanent (stable)

Lorsque le système se stabilise, sa loi est donnée par :

$$p_n(t) = p_n = \begin{cases} \frac{\prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}{1 + \sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}} & n \geq 1 \\ \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}} & n = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{1 + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} & n \geq 1 \\ \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} & n = 0 \end{cases}$$

– On pose $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$:

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{\rho^0 \frac{1}{1-\rho}} & n \geq 1 \\ 1 - \rho & n = 0 \end{cases}$$

Donc $p_n = \rho^n(1 - \rho)$, $n \geq 0$, si $\rho < 1$.

2.5.3 Nombre moyen de clients dans le système à la date t

Le nombre moyen de clients présents dans le système à la date t se traduit mathématiquement par l'espérance qui est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
 E(N_t) &= \sum_{n \geq 0} n p_n = (1 - \rho) \sum_{n \geq 0} n \rho^n \\
 &= (1 - \rho) \rho \sum_{n \geq 1} n \rho^{n-1} = (1 - \rho) \rho \sum_{n \geq 1} (\rho^n)' \\
 &= (1 - \rho) \rho (\sum_{n \geq 1} \rho^n)' = (1 - \rho) \rho \left(\frac{1}{1-\rho}\right)' \\
 &= (1 - \rho) \rho \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} \\
 &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda}
 \end{aligned}$$

d'où $\bar{\eta} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$.

2.5.4 Écart type σ_t

Afin de préciser le nombre de clients exacte présents dans le système à un instant donné, la moyenne à elle seule ne suffit pas. D'où le calcul de l'écart type qui est donné par :

$$\sigma_t = \sqrt{V(N_t)} \text{ et } V(N_t) = E(N_t^2) + (E(N(t)))^2$$

$$\begin{aligned} E(N_t^2) &= \sum_{n \geq 0} n^2 P_n = \sum_{n \geq 0} n^2 \rho^n (1 - \rho) \\ &= \sum_{n \geq 0} n(n + 1 - 1) \rho^n (1 - \rho) \\ &= \sum_{n \geq 0} (n(n - 1) \rho^n (1 - \rho) + n \rho^n (1 - \rho)) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (n(n - 1) \rho^n (1 - \rho)) &= \sum_{n \geq 0} n(n - 1) \rho^{n-2} (1 - \rho) \rho^2 \\ &= (1 - \rho) \rho^2 \sum_{n \geq 0} n(n - 1) \rho^{n-2} \\ &= (1 - \rho) \rho^2 \sum_{n \geq 0} (\rho^n)'' \\ &= (1 - \rho) \rho^2 (\sum_{n \geq 0} \rho^n)'' \\ &= (1 - \rho) \rho^2 \left(\frac{1}{(1 - \rho)^2} \right)' \\ &= \frac{2\rho^2}{(1 - \rho)^2} \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} E(N_t)^2 &= \frac{2\rho^2}{(1 - \rho)^2} + \eta = \frac{2\rho^2}{(1 - \rho)^2} + \frac{\rho}{1 - \rho} \\ V(N_t) &= E(N_t^2) - (E(N_t))^2 = \frac{2\rho^2}{(1 - \rho)^2} + \frac{\rho}{1 - \rho} - \frac{\rho^2}{(1 - \rho)^2} \\ &= \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \sigma_t = \frac{\sqrt{\rho}}{1 - \rho} \text{ et } [\eta - \rho, \eta + \rho] = \left[\frac{\rho - \sqrt{\rho}}{1 - \rho}, \frac{\rho + \sqrt{\rho}}{1 - \rho} \right].$$

2.5.5 Nombre moyen de clients dans la file à la date t

Le nombre moyen de clients en attente dans la file est donné par $E(M_t)$, M_t est le nombre de clients présents dans la file à la date t.

$$\begin{aligned}
 E(M_t) &= \sum_{k \geq 0} k P[M_t = k] \\
 &= \sum_{k \geq 0} k P[N_t = k + 1] \\
 &= \sum_{n \geq 0} n P[N_t = n + 1] \\
 &= \sum_{n \geq 0} n p_{n+1} \\
 &= \sum_{n' \geq 0} (n' - 1) p_{n'} \\
 &= \sum_{n' \geq 1} n' p_{n'} - \sum_{n' \geq 1} p_{n'} \\
 &= E(N_t) - (1 - p_0) \\
 &= (\eta - \rho)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta &= E(N_t) = \frac{\rho}{1-\rho}. \\
 \eta_q &= E(M_t) = \eta - \rho.
 \end{aligned}$$

Ou bien

$$\begin{aligned}
 N_t &= M_t + X \implies M_t = N_t - X \\
 \implies E(M_t) &= E(N_t) - E(X) = \eta - (1 - P_0) = \eta - \rho
 \end{aligned}$$

$$\text{Avec } P = P[X=1] = \begin{cases} p & (\text{Système ne soit pas vide}) \\ 1 - p & (\text{Système soit vide}) \end{cases}$$

2.5.6 Formule de Little :

soit $\bar{\omega}$: Temps moyen d'attente dans le système et $\bar{\omega}_q$: Temps moyen d'attente dans la file, alors :

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega} &= \frac{\bar{\eta}}{\lambda} = \frac{\text{Nombre moyen de clients dans le système}}{\text{Taux d'entrée global}}. \\
 \bar{\omega}_q &= \frac{\bar{\eta}_q}{\lambda} = \frac{\text{Nombre moyen de clients dans la file}}{\text{Taux d'entrée global}}
 \end{aligned}$$

Avec le taux d'entrée global du système =
Taux de sortie global du système

Preuve

Déterminons d'abord la loi de ω

ω = Nombre de clients présents dans le système à la date t . $[\omega / N(t) = n]$ coïncide avec la somme de $(n+1)$ v.a "durée de service" notée $D^{(i)}, i=\overline{1, n+1}$.

$$[\omega / N(t) = n] = \sum_{i=1}^{n+1} D^i = \sum_{i=1}^{n+1} Y_i, \quad \text{avec } Y_i \rightsquigarrow \text{exp}(\mu) = \Gamma(1, \mu).$$

La fonction de densité de la loi Gamma (a, λ) est donné par :

$$f(x) = \left\{ \frac{\lambda^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} \exp^{-\lambda x} \right.$$

En posant $a=1$ on aura :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\Gamma(1)} \exp^{-\lambda x} \\ = \lambda \exp^{-\lambda x} \end{cases}$$

Donc $D^i \rightsquigarrow \text{exp}(\mu)$

$$\implies \sum_{i=1}^{n+1} D^i \rightsquigarrow \Gamma(n+1, \mu).$$

Alors

$$f_{(\omega / N(t)=n)}(t) = \begin{cases} \frac{\mu^{n+1} t^n \exp^{-\mu t}}{\Gamma(n+1)} & t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_{\omega}(t) = \sum_{n \geq 0} f_{\omega / N(t)=n}(t) \times P(N_t = n)$$

$$= \mu(1 - \rho) \exp^{-\mu(1-\rho)t}$$

En posant $\theta = \mu(1 - \rho)$ on aura :

$$f_{\omega}(t) = \theta \exp^{-\theta}, \quad t \geq 0.$$

- Calculons maintenant $\bar{\omega}$

$$\omega \rightsquigarrow \text{exp}(\mu - \lambda)$$

$$\implies \bar{\omega} = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

$$\implies \bar{\omega} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{\bar{\eta}}{\lambda} \quad (\bar{\eta} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda})$$

On a

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_q + \frac{1}{\mu} \implies \bar{\omega}_q = \bar{\omega} - \frac{1}{\mu}$$

$$\implies \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\bar{\eta}}{\lambda}$$

$$\text{D'où } \bar{\omega} = \frac{\bar{\eta}}{\mu}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_q &= \bar{\eta} - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} \\ &= \frac{\rho^2}{1-\rho} = \rho \bar{\eta} \\ \implies \bar{\eta} &= \frac{\bar{\eta}_q}{\rho} \\ \implies \bar{\omega}_q &= \frac{\bar{\eta}}{\mu} = \frac{\bar{\eta}_q}{\mu} \times \frac{\mu}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \bar{\omega}_q = \frac{\bar{\eta}_q}{\lambda}$$

- Ce qui donne comme résultats :

$$\begin{cases} \bar{\omega} = \frac{\bar{\eta}}{\lambda} \\ \bar{\omega}_q = \frac{\bar{\eta}_q}{\lambda}, \end{cases}$$

qui est la formule de Little.

2.5.7 Caractéristiques du système liées aux serveurs

2.5.7.1 Durée moyenne d'une période de répit (oisiveté) \bar{R}

Soit R : v.a durée de la période de répit. Une période de répit commence à la fin du service d'un client seul dans le système et se termine lorsqu'un nouveau client arrive ou continue tant qu'il n'y a aucune arrivée.

Donc pour $s \geq 0$, $s \in T$

$$\begin{aligned} [R > s] &= [X_{t+s} = X_t] \\ &= [X_{t+s} - X_t = 0]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_R(s) &= P[R \leq s] = 1 - P[R > s] \\ &= 1 - P[X_{t+s} - X_t = 0] \quad \{(X_t) \rightsquigarrow P(\lambda)\} \\ &= 1 - P[X_s = 0]. \end{aligned}$$

$$F_R(s) = \begin{cases} 1 - \exp^{-\lambda s} & s \neq 0 \\ 0 & s = 0 \end{cases} \implies f_R(s) = \begin{cases} \lambda \exp^{-\lambda s}, & s \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où R suit une loi exponentielle de paramètre λ .

$$\implies \bar{R} = \frac{1}{\lambda} \text{ et } \sigma_R = \frac{1}{\lambda}.$$

2.5.7.2 Nombre moyen de périodes de répit \bar{A} (en régime permanent)

Soit une période de temps T assez longue. Sur cette période, le serveur est oisif pendant une proportion de temps p :

$$p = P[N_t = 0] = p_0 = 1 - \rho = p \quad p_n = \rho^n (1 - \rho).$$

$$\text{On a donc : } P \times T = \bar{A} \times \bar{R} \implies \bar{A} = \frac{(1-p)T}{\bar{R}} = \lambda(1 - \rho)T = \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{\mu}\right)T = E(A).$$

2.5.7.3 Nombre moyen d'une période d'activité \bar{B} (en régime permanent)

A cause de l'alternance activité-répit, on a $A=B$ à une unité près, c'est à dire en moyenne

$$\bar{A} = \bar{B}$$

\bar{B} : Nombre moyen de période d'activités

Ainsi

$$\bar{B} = \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{\mu}\right)T.$$

2.5.7.4 Durée moyenne d'une période d'activité \bar{C}

Soit C : La durée d'une période d'activité. C est une v.a et comme précédemment ;

$$\bar{C} = E(C) \text{ vérifie } \bar{C} \times \bar{B} = (1 - p)T \implies \bar{C} = \frac{(1-p)T}{\lambda p T} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

2.5.7.5 Nombre moyen de clients à servir durant une période d'activité \bar{N}_0

N_0 est une v.a et en moyenne :

$\bar{N}_0 = E(N_0)$ vérifie $\bar{N}_0 \times \bar{D} = \bar{C}$. (D : Durée de service d'un client ($\exp(\mu)$)).

$$N_0 \times \bar{D} = \bar{C} \implies N_0 = \frac{\bar{C}}{\bar{D}} = \frac{\mu}{\mu - \lambda}.$$

Remarque 2

\bar{R} , \bar{A} , \bar{C} et \bar{N}_0 sont appelés "paramètres ou caractéristiques du système liées au serveur".

2.5.8 Étude de la file M/M/1/k

Dans ce cas on a la capacité du système qui est limitée à k .

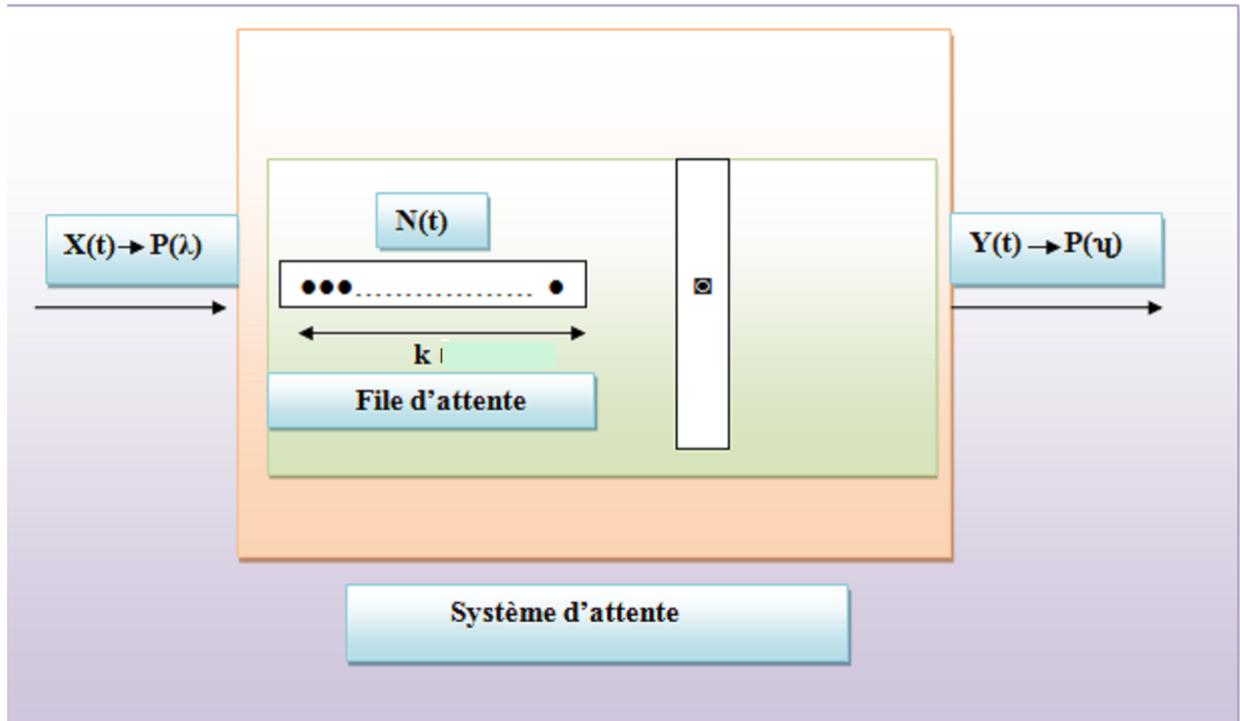


Figure 4 Système d'attente M/M/1/k.

Soit $N(t)$: Nombre de clients dans le système

(N_t) est un processus de naissance et de mort de taux λ_n et μ_n .

- Déterminons λ_n :

$$\begin{aligned} \lambda_n dt + o(dt) &= P[N_{t+dt} = n + 1 / N_t = n] \\ &= \begin{cases} P[X_{t+dt} - X_t = 1] & 0 \leq n \leq k - 1 \\ 0 & n = k \end{cases} \\ &= \begin{cases} \lambda dt + o(dt) & 0 \leq n \leq k - 1 \\ o(dt) & n = k \end{cases} \\ \implies \lambda_n &= \begin{cases} \lambda & 0 \leq n \leq k - 1 \\ 0 & n = k \end{cases} \end{aligned}$$

- Déterminons μ_n :

$$\begin{aligned} \mu_n dt + o(dt) &= P[N_{t+dt} = n - 1 / N_t = n] \\ &= \begin{cases} P[Y_{t+dt} - Y_t = 1] & 1 \leq n \leq k \\ 0 & n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{cases} \mu dt + o(dt) & 1 \leq n \leq k \\ o(dt) & n = 0 \end{cases} \\
 \implies \mu_n &= \begin{cases} \mu & 1 \leq n \leq k \\ 0 & n = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On sait qu'en régime permanent

$$\begin{aligned}
 p_n(t) = p_n &= \begin{cases} \frac{\prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}{1 + \sum_{n=1}^k \frac{\prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}{1}} & n = \overline{1, k} \\ \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^k \frac{\prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}{1}} & n = 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{\frac{\rho^n}{\prod_{j=1}^n \rho^j}}{1 + \sum_{j=1}^k \frac{\rho^j}{\prod_{j=1}^j \rho^j}} = \frac{\frac{\rho^n}{\prod_{j=0}^n \rho^j}}{\sum_{j=0}^k \frac{\rho^j}{\prod_{j=0}^j \rho^j}} & n = \overline{1, k} \\ \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^k \frac{\rho^j}{\prod_{j=1}^j \rho^j}} = \frac{1}{\sum_{j=0}^k \frac{\rho^j}{\prod_{j=0}^j \rho^j}} & n = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Remarque 3

Dans ce cas, le régime permanent s'établit car on a une somme finie donc $\forall \rho$ ou λ et μ , cette somme existe.

2.5.9 Étude de la file M/M/1/k/[F]

Dans ce cas, les clients sont en nombre limité k et encore particuliers

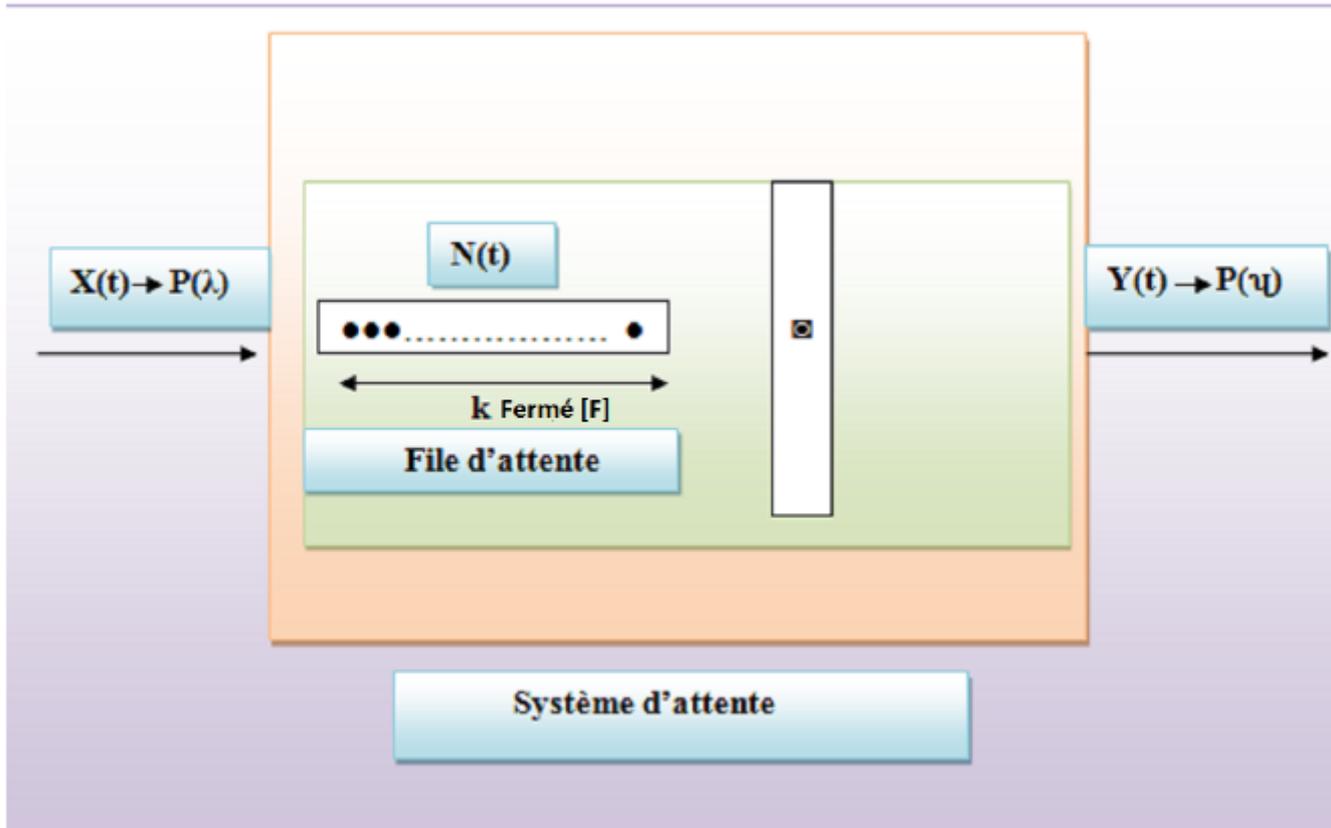


Figure 5 Système d'attente M/M/1/k/[F].

Donc (N_t) est un processus de naissance et de mort de taux λ_n et μ_n .

$$\begin{aligned}
 \lambda_n dt + o(dt) &= P[N_{t+dt} = n + 1 / N_t = n] \\
 &= C_{k-n}^1 P[X_{t+dt} - X_t = 1] \\
 &= ((k-n)(\lambda dt + o(dt))) \\
 &= (k-n)\lambda dt + o(dt) \\
 \Rightarrow \lambda_n &= \begin{cases} (k-n)\lambda & n = \overline{0, k-1} \\ 0 & n = k \end{cases}
 \end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}
 \mu_n dt + o(dt) &= P[N_{t+dt} = n - 1 / N_t = n] \\
 &= \begin{cases} P[Y_{t+dt} - Y_t = 1] & 1 \leq n \leq k \\ 0 & n = 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \mu dt + o(dt) & 1 \leq n \leq k \\ o(dt) & n = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc la loi en régime permanent est

$$\begin{aligned}
 p_n &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) p_0 \quad \overline{1, k} \\
 &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{(k-i+1)\lambda}{\mu} \right) p_0 = p_0 \rho^n \frac{k!}{(k-n)!} \\
 &= p_0 \rho^n C_k^n n! \quad \overline{n = 1, k}
 \end{aligned}$$

Et $p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^k \rho^n C_k^n n!} = \frac{1}{\sum_{n=0}^k \rho^n C_k^n n!}$.

Donc dans un système M/M/1/k/[F] la loi est donnée par :

$$p_n = \begin{cases} \rho^n C_k^n n! p_0, & n = \overline{1, k} \\ \frac{1}{\sum_{n=0}^k \rho^n C_k^n n!}, & n = 0 \end{cases}$$

2.5.10 Étude de la file M/M/s

2.5.10.1 Description du modèle

C'est un système d'attente qui comporte une seule file et s serveurs (guichets). Les clients arrivent au système suivant un processus de poisson de taux λ . Le taux de service pour chaque serveur est exponentiel de paramètre μ (ces temps sont indépendants entre eux ainsi que du processus des entrées).

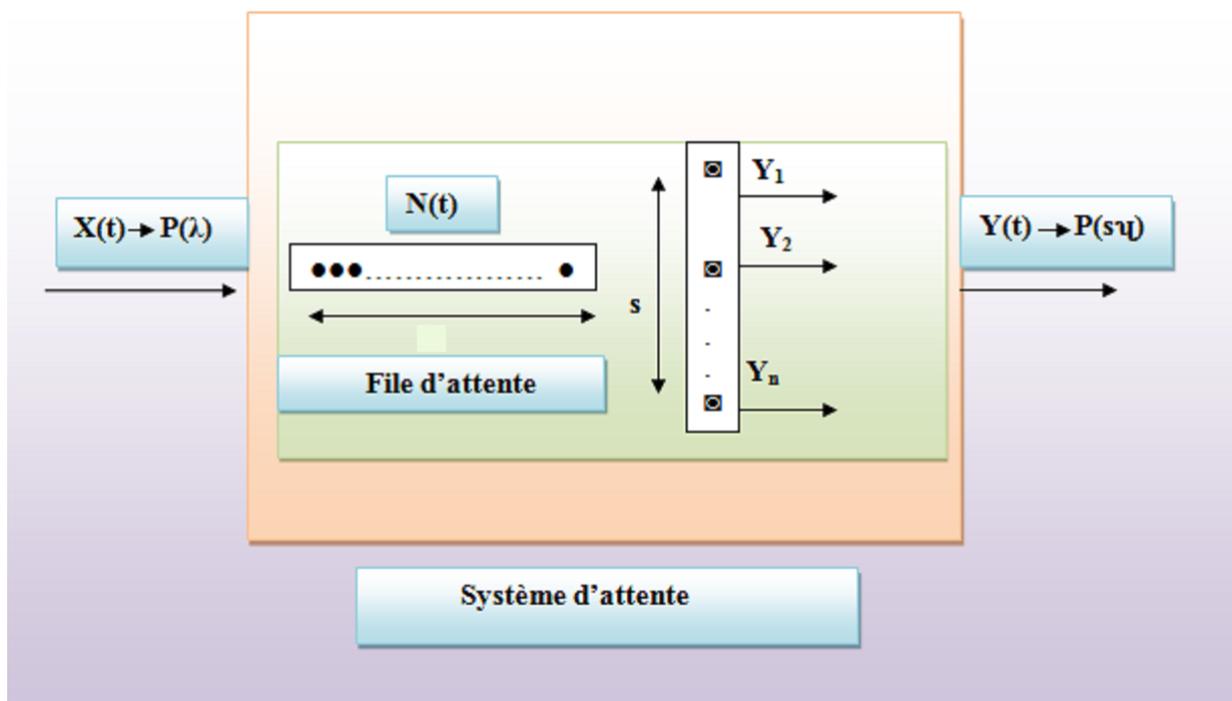


Figure 6 Système d'attente M/M/s.

Soit $N(t)$: Nombre de clients dans le système (la file et les guichets), sous les hypothèses précédentes : $N(t)$ est un processus de naissance et de mort de taux λ_n et μ_n à déterminer.

2.5.10.2 Étude du processus $N(t)$

On a le taux de naissance $\lambda_n(t)$ qui vérifie

$$\lambda_n(t)dt + o(dt) = P[N_{t+dt} = n + 1 / N_t = n]$$

$$P[N_{t+dt} = n + 1 / N_t = n] = P[\text{d'avoir une entrée de plus pendant ce laps de temps } dt]$$

$$= P[X_{t+dt} = X_t + 1] = P[X_{t+dt} - X_t = 1]$$

$$= P[X_{dt} = 1] = \lambda dt + o(dt)$$

$$\implies \lambda_n(t) = \lambda \quad \forall n \geq 0$$

Quant au taux de mort $\mu_n(t)$ il vérifie :

$$\mu_n(t)dt + o(dt) = P[N_{t+dt} = n - 1 / N_t = n]$$

$$P[N_{t+dt} = n - 1 / N_t = n] = P[\text{d'avoir une sortie de plus pendant ce laps de temps } dt]$$

$$= \begin{cases} 0 & n = 0, \\ A & 1 \leq n \leq s, \\ B & n > s. \end{cases}$$

- si $1 \leq n \leq s$:

$$A = P[\text{d'avoir une sortie parmi les } n \text{ clients aux guichets}]$$

$$= C_n^1 P[\text{d'avoir une sortie donnée}]$$

$$= C_n^1 P[Y_{i_0}(t + dt) = Y_{i_0}(t) + 1]$$

On a $Y_i \rightsquigarrow P(\mu)$, $\forall i = \overline{1, s}$.

$$A = n P[Y_{i_0}(dt) = 1]$$

$$= n(\mu dt + o(dt)) = n\mu dt + o(dt).$$

$$\implies \mu_n(t) = n\mu$$

- Si $n > s$

$$\begin{aligned}
 B &= P[\text{d'avoir une sortie parmi les } s \text{ clients aux guichets}] \\
 &= C_s^1 P[\text{d'avoir une sortie donnée}] \\
 &= C_s^1 P[Y_j(t+dt) = Y_j(t) + 1] \\
 &\stackrel{PAS}{=} s P[Y(dt) = 1] \\
 &= s(\mu dt + o(dt)) = s\mu dt + o(dt). \\
 &\Rightarrow \mu_n(t) = s\mu
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\mu_n(t) = \begin{cases} 0 & n = 0, \\ n\mu & 1 \leq n \leq s, \\ s\mu & n > s. \end{cases}$$

Ainsi $\mu_n(t) = (n \wedge s)\mu, \forall n \geq 0$.

Donc N_t est un processus de naissance et de mort de taux $\lambda_n = \lambda$ et $\mu_n = (n \wedge s)\mu, \forall n \geq 0$.

Déterminons maintenant Loi de N_t en régime permanent (quand il existe) :

On a :

$$p_n(t) = p_n = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} p_0 & n \geq 1 \\ \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}} & n = 0 \end{cases}$$

- Si $1 \leq n \leq s$

$$\begin{aligned}
 p_n &= \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} p_0 \\
 &= \frac{\lambda}{1\mu} \frac{\lambda}{2\mu} \frac{\lambda}{3\mu} \cdots \frac{\lambda}{n\mu} p_0 \\
 &= \frac{\rho^n}{n!} p_0 \quad \forall n = \overline{1, s}
 \end{aligned}$$

- Si $n > s$

$$p_n = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} p_0$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\prod_{i=1}^s \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) p_0 \times \left(\prod_{i=s+1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} p_0 \right) \\
 &= \left(\frac{\lambda}{1\mu} \frac{\lambda}{2\mu} \frac{\lambda}{3\mu} \cdots \frac{\lambda}{s\mu} p_0 \right) \left(\frac{\lambda}{s\mu} \frac{\lambda}{s\mu} \frac{\lambda}{s\mu} \cdots \frac{\lambda}{s\mu} p_0 \right) \\
 &= \frac{\lambda^s}{s! \mu^s} \frac{\lambda^{n-s}}{s^{n-s} \mu^{n-s}} p_0 \\
 &= \frac{\lambda^n}{\mu^n} \frac{1}{s! s^{n-s}} p_0 \\
 &= \rho^n \frac{1}{s! s^{n-s}} p_0 \\
 &= \frac{\rho^s}{s!} \left(\frac{\rho}{s} \right)^{n-s} p_0, \quad n > s
 \end{aligned}$$

On aura la stabilité si :

$$\sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} < +\infty \iff \sum_{n=1}^s \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} + \sum_{n \geq s+1} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} < +\infty.$$

Il est clair que $\sum_{n=1}^s \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$ est une somme finie.

D'un coté on a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq s+1} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} &= \sum_{n \geq s+1} \prod_{i=1}^s \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \prod_{i=s+1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \\
 &= \sum_{n \geq s+1} \frac{\rho^s}{s!} \left(\frac{\rho}{s} \right)^{n-s} \\
 &= \frac{\rho^s}{s!} \sum_{n-s=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{s} \right)^{n-s} \\
 &= \frac{\rho^s}{s!} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{s} \right)^k && k=n-s \\
 &= \frac{\rho^s}{s!} \sum_{k \geq 1} \left(\tilde{\rho} \right)^k && \tilde{\rho} = \frac{\rho}{s}.
 \end{aligned}$$

On sait que

$$\sum_{k \geq 1} \left(\tilde{\rho} \right)^k < +\infty \text{ si } \tilde{\rho} < 1 \text{ i.e. } \rho < s \iff \frac{\lambda}{\mu} < s \iff \lambda < \mu s.$$

$$\frac{\rho^s}{s!} \sum_{k \geq 1} \left(\tilde{\rho} \right)^k = \frac{\rho^s \tilde{\rho}}{s!} \frac{1}{1-\tilde{\rho}} = \frac{\rho^{s+1}}{s! s} \frac{1}{1-\rho} = \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}.$$

Si $\lambda < s\mu$ le régime permanent s'établit et $p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} &= \sum_{n=1}^s \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} + \sum_{n \geq s+1} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \\
 &= \sum_{n=1}^s \frac{\lambda}{1\mu} \frac{\lambda}{2\mu} \cdots \frac{\lambda}{n\mu} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)} \\
 &= \sum_{n=1}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)} \\
 \implies p_0 &= \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}}
 \end{aligned}$$

Donc dans un système M/M/s la loi est donnée par :

$$p_n = \begin{cases} \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{\rho}{s-\rho}} & 0 \leq n \leq s, \\ \frac{\frac{\rho^s}{s!} \left(\frac{\rho}{s}\right)^{n-s}}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{\rho}{s-\rho}} & n > s. \end{cases}$$

Remarque 4

Pour $n \geq s$, on a : $p_n = p_0 \frac{\rho^s}{s!} \left(\frac{\rho}{s}\right)^{n-s}$. Si l'on pose $n=s+i$, $i=0,1,\dots$

$$p_n = p_{s+i} = \frac{\rho^s}{s!} \frac{\left(\frac{\rho}{s}\right)^i}{\sum_{k=0}^s \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{s+i}}{s!(s-\rho)}}, \quad i=0,1,2,\dots \text{ avec } \lambda < \mu s \text{ ou } \rho < s.$$

2.5.10.3 Étude du système en régime permanent

Probabilité qu'un client attende (Saturation)

Soit $\pi(\rho, s)$ la probabilité qu'un client qui arrive attende.

$$\pi(\rho, s) = p[N_t \geq s] \quad (\text{probabilité de saturation})$$

$$= \sum_{i \geq 0} p[N_t = s + i] = \sum_{i \geq 0} p_{s+i}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} p_0 \frac{\rho^s}{s!} \left(\frac{\rho}{s}\right)^i$$

$$= p_0 \frac{\rho^s}{s!} \sum_{i=0}^{+\infty} (\tilde{\rho})^i, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{s},$$

$$= p_0 \frac{\rho^s}{s!} \frac{1}{1-\tilde{\rho}}$$

$$= p_0 \frac{\rho^s}{s!} \frac{s}{s-\rho}$$

$$= \pi(\rho, s).$$

Nombre moyen de clients dans la file ($\bar{\eta}_q$)

On a $N(t) = M(t) + s$, ou :

$N(t)$: Nombre de clients dans le système.

$M(t)$: Nombre de clients dans la file.

s : nombre de clients aux guichets.

Ainsi :

$$\bar{\eta}_q = E(M(t)) = \sum_{k=0}^{+\infty} k P[M_t = k]$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k P[N_t = k + s]$$

$$= \sum_{k \geq 0} k P_{k+s} = \sum_{i \geq 0} i P_{i+s}$$

$$= \sum_{i \geq 0} i \frac{\rho^{s+i}}{s! s^i} p_0$$

$$= \frac{\rho^s}{s!} p_0 \sum_{i \geq 0} i \frac{\rho^i}{s^i}$$

$$\sum_{i \geq 0} i \frac{\rho^{s+i}}{s! s^i} = \sum_{i \geq 0} \left(\left(\tilde{\rho} \right)^i \right)' = \left(\sum_{i \geq 0} \left(\tilde{\rho} \right)^i \right)' = \left(\frac{1}{1 - \tilde{\rho}} \right)' = \frac{1}{1 - (\tilde{\rho})^2}.$$

$$\bar{\eta}_q = \frac{\rho^{s+i}}{s! s^i} p_0 \frac{1}{1 - (\tilde{\rho})^2}.$$

$$= \frac{\rho^{s+i}}{s! s^i} p_0 \frac{s^2}{(1 - \rho)^2}$$

$$= \frac{\rho^s s}{s! (s - \rho)} p_0 \frac{\rho}{s - \rho}$$

$$= \pi(\rho, s) \frac{\rho}{s - \rho}.$$

Ainsi $\bar{\eta} = \bar{\eta}_q + E(s)$.

Nombre de clients dans le système

S : Nombre de clients aux guichets = Nombre de guichets occupés.

$S \in \{0, 1, 2, \dots, s\}$

$S = \sum_{i=1}^s s_i$ ou s_i = occupation du guichet i

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{s'il est occupé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est à dire $s_i \rightsquigarrow \text{Bernoulli}(p)$

$$p = P[s_i = 1] = P[\text{le guichet } i \text{ soit occupé}]$$

$$= \frac{1}{s} P[\text{le système ne soit pas vide}]$$

$$= \frac{1}{s} (1 - p_0^*) \text{ ou } p_0^* = 1 - \rho$$

$$p = \frac{\rho}{s}$$

$s_i \rightsquigarrow \text{Bernoulli}(p) = \text{Binomiale}(1, p)$.

Les variables aléatoires s_i sont indépendantes donc $S = \sum_{i=1}^s s_i \rightsquigarrow \text{Binomiale}(s, p)$

$$\implies E(S) = sp = \rho. \text{ Donc } \bar{\eta} = \bar{\eta}_q + E(S) = \bar{\eta}_q + \rho.$$

Temps moyen d'attente d'un client dans la file $\bar{\omega}_q$

Par Little $\bar{\omega}_q = \frac{\bar{\eta}_q}{\Lambda}$ ou Λ :taux moyen d'entrée globale. C'est à dire :

$$\Lambda = \sum_{i \geq 0} \lambda_i p_i = \lambda \sum_{i \geq 0} p_i = \lambda.$$

$$\bar{\omega}_q = \frac{\bar{\eta}_q}{\Lambda} = \frac{\bar{\eta}_q}{\lambda} = \frac{\pi \rho}{(s-\rho)\lambda}$$

$$= \frac{\pi}{(s-\rho)\mu} = \frac{\pi}{s\mu - \lambda}.$$

Temps moyen d'attente d'un client dans le système $\bar{\omega}$

$\bar{\omega} = \bar{\omega}_q + \bar{D}_i$ ou D_i =Durée de service du ième client.

$$D_i \rightsquigarrow \exp(\mu) \implies E(D_i) = \frac{1}{\mu}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{\eta}}{\Lambda} = \frac{\bar{\eta}}{\lambda} = \frac{\bar{\eta}_q}{\lambda} + \frac{\rho}{\lambda}.$$

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_q + \frac{1}{\mu}.$$

2.5.11 Étude de la file M/M/∞

Dans ce cas, le nombre de serveurs n'est pas fini.

$N(t)$: Nombre de clients dans le système; $(N_t)_{t \geq 0}$ est un PNM de taux λ_n et μ_n à déterminer.

$$\lambda_n(t)dt + o(dt) = P[N_{t+dt} = n + 1 / N_t = n]$$

$$\begin{aligned} P[N_{t+dt} = n + 1 / N_t = n] &= P[X_{t+dt} - X_t = 1] \\ &= P[X_{dt} = 1] = \lambda dt + o(dt) \\ &\implies \lambda_n(t) = \lambda, \quad \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

$$\mu_n(t)dt + o(dt) = P[N_{t+dt} = n - 1 / N_t = n]$$

$$\begin{aligned} P[N_{t+dt} = n - 1 / N_t = n] &= nP[Y_{t+dt} - Y_t = 1] \\ &= n P[Y_{dt} = 1] = n\mu dt + o(dt) \\ &\implies \mu_n(t) = n\mu, \quad \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

Loi de (N_t) en régime stationnaire

$$\begin{cases} p_n = \left(\prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) p_0, & n \geq 1, \\ p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}, & n = 0. \end{cases}$$

Le régime stationnaire s'établit si $\sum a_n < +\infty$.

On a $\sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = \sum_{n \geq 1} \frac{\rho^n}{n!} < \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} = \exp^\rho < +\infty$.

Donc le régime permanent s'établit toujours.

Ainsi

$$\begin{cases} p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 = \frac{\rho^n}{n!} \exp^{-\rho}, & n \geq 1, \\ p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\rho^n}{n!}}, & n = 0. \end{cases}$$

Nombre de clients dans le système

$$\bar{\eta} = E(N_t) = \sum_{n \geq 0} n p_n = \sum_{n \geq 0} n \frac{\rho^n}{n!} \exp^{-\rho} = \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Temps moyen d'attente d'un client dans le système $\bar{\omega}$

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{\eta}}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons procédé à l'analyse de certains systèmes d'attente. Cette étude nous a permis de caractériser leurs degrés de performance et de ce fait, d'estimer en moyenne le temps d'attente d'un client avant d'être servi, le nombre moyen de clients dans le système à une date précise, le taux d'utilisation moyen de serveurs,...

Modélisation de files d'attente

Chapitre 3

Modélisation de files d'attente

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'organisation des caisses de paiement à la sortie d'un supermarché. Nous effectuerons des modèles qui consisteront à définir les points suivants :

- Le système : Existant (ou pas) auquel se réfère le modèle.
- Le modèle : Représentation abstraite du système (simplifié).
- L'objectif : Le (s) but (s) pour lequel (s) le modèle aura été élaboré.
- Un critère de rentabilité : Un critère économique que justifie l'utilisation du modèle.

3.2 Étude de cas

L'étude d'un système est faite dans le but de prédire son comportement futur et optimiser ses performances. Pendant une période de deux semaines, nous avons effectué une collecte des données sur les arrivées des clients et les durées des services au sein d'un supermarché situé à Tizi Ouzou où se trouvaient plusieurs guichets (serveurs). Une étude scientifique a démontré que les consommateurs étaient davantage susceptibles de revenir chez des vendeurs qui leurs font perdre le moins de temps possible. Dans le cadre de notre étude, nous avons supposé les arrivées poissonniennes de paramètre λ donné et les durées de service exponentielles de paramètres μ . Le gestionnaire du supermarché s'est vu confronté à certains soucis financiers engendrés par le temps d'attente des clients devant les guichets causant ainsi des pertes considérables mais non contournables. C'est là qu'intervient notre étude. En effet, notre but est de réduire le temps d'attente aux caisses jusqu'à un pourcentage raisonnable (ce qui améliore grandement le processus de paiement et optimise l'efficacité opérationnelle du système), maximiser le nombre d'articles vendus,... Mais par dessus tout, mesurer le nombre de caisses nécessaires dans

l'entreprise.

3.3 Position du problème

Il s'agit d'un problème de modélisation dans un supermarché où les clients se présentent à des caisses afin d'être servis.

L'organisation des caisses de paiement à la sortie du supermarché peut être modélisée à l'aide de trois paramètres A, B et C :

- Le paramètre A représente le flux d'arrivées des clients aux caisses de paiement. Il est modélisé à l'aide d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et d'une suite de v.a. $(T_n)_{n \geq 0}$ vérifiant :

1. $T_0 = 0$.
2. $\forall n \geq 0, T_n \leq T_{n+1}$.

Donc, $\forall n \geq 1, T_n$ modélise l'instant d'arrivée du nième client dans la file de paiement (celle-ci pouvant être vide ou non). Nous nous focaliserons en particulier sur le cas où la suite $(\tau_n = T_{n+1} - T_n)_{n \geq 0}$ est une suite de v.a indépendantes et identiquement distribuées.

τ_n sont les inter arrivées qui sont exponentielles (λ) .

- Le paramètre B symbolise la durée du service de chacun des clients. Ces quantités peuvent aussi bien être déterministes qu'aléatoires. Dans le second cas, il est nécessaire de spécifier la loi de ces variables et la façon dont elles dépendent les unes des autres. La durée de service étant une inter-sortie $\rightsquigarrow \exp(\mu)$.
- Le paramètre C indique des règles de service particulières. Par exemple, il est possible que le commerce compte plusieurs guichets ou que le nombre de clients en attente de paiement soit limité. Dans notre cas, nous appelons file d'attente l'ensemble constitué par les personnes en attente de paiement (les clients en cours de paiement en sont donc exclus).

3.4 Détermination des lois

3.4.1 Loi des arrivées

Nous allons dans un premier temps nous intéresser aux arrivées des clients. Pour cela nous considérons que ces derniers arrivent aléatoirement et indépendamment les uns des autres. Bien qu'aléatoire, cette loi est bien une loi de Poisson.

Preuve

En raison des propriétés d'absence de mémoire des lois exponentielles, nous fixons un réel $\lambda > 0$ et choisissons de modéliser la loi commune des temps d'inter-arrivées $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ par une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, dont nous rappelons la densité par rapport à sur \mathbb{R} :

$$P_\lambda : x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \exp^{-\lambda x} \quad \forall x \in]0, +\infty[.$$

Dans ce contexte, le paramètre λ représente l'inverse du temps moyen séparant deux arrivées consécutives de clients. En supposant que la taille de la file d'attente ne soit pas limitée, le nombre de clients y étant entrés (en ne prenant pas en compte les sorties) à un instant $t \geq 0$ quelconque est donné par la relation :

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} T_n \quad \forall T_n \in [0, t]$$

On rappelle que le processus $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ . En particulier, il s'agit d'un processus continu dont les accroissements $(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})$, $0 < i < n-1$, pour une suite $t_0=0 < t_1 < \dots < t_n$ donnée, sont indépendants et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λt_1 , $\lambda(t_2 - t_1)$, ..., $\lambda(t_n - t_{n-1})$.

Loi des services

La loi exponentielle va nous permettre de déterminer les intervalles de temps entre deux arrivées de clients. En effet, les intervalles de temps suivent une loi exponentielle. Il se trouve que la modélisation des services (guichet) passe également par une loi exponentielle. On retrouve donc la même formule que dans le cas des arrivées mais avec des paramètres différents :

$U(x) = \mu \exp^{-\mu x}$ est la densité des inter sorties ou des durées de service D .

D représente l'intervalle entre 2 évènements « service d'un client »

μ le nombre de clients servis par unité de temps.

U ou U_n nième sortie.

$U_n - U_{n-1}$ inter sortie.

3.5 Modélisation du nombre d'achats d'un clients en cours de paiement

Nous cherchons maintenant à modéliser le nombre d'articles achetés par un client en paiement. Dans ce contexte, nous supposons que le magasin offre un large choix de produits, de sorte que nous désignons par N le nombre total d'articles différents en magasin. Dans un souci de simplification, nous admettons que chaque client n'achète qu'un seul exemplaire du même produit. Dans ces conditions, le nombre de biens que le client envisage d'acquérir est :

$$A = \sum_{j=1}^N Z_j \dots \dots \dots (ACH)$$

Où, pour tout $1 \leq j \leq N$, $Z_j=1$ si le client envisage d'acheter le j ème produit et $Z_j=0$ dans le cas contraire. Le client se dirige vers la file d'attente si et seulement si $A \geq 1$. En particulier, le nombre d'articles présentés par un client à la caisse suit la loi de A sachant que $\{A \geq 1\}$.

Afin de déterminer la loi de A , supposons que les variables aléatoires $(Z_j)_{1 \leq j \leq N}$ sont indépendantes et équidistribuées. On désigne alors par p leur espérance commune. De la relation (ACH), il vient $E(A) = pN$.

Le nombre moyen, $E(A)$, d'articles achetés par un client entrant dans le magasin peut être assimilé à un réel compris entre 0 et 10. La loi de la variable A peut donc être modélisée par une loi de Poisson de paramètre $c=E(A)$. Nous en déduisons finalement que la loi du nombre d'articles présentés à la caisse par un client peut être modélisée par une loi de Poisson de paramètre c conditionnée à prendre des valeurs >1 :

$$\forall j \geq 1, P\{A = j | A \geq 1\} = \frac{c^j}{j!} (\exp(c) - 1)^{-1}.$$

Nous désignons par $v(c)$ cette loi. Son espérance est donnée par $\frac{c}{1-\exp(-c)}$.

3.6 Modélisation du temps de service

Il nous reste désormais à modéliser le temps de paiement d'un client aux caisses. Dans cette perspective, pour $n \geq 1$, nous désignons par R_n le temps de paiement du n ème client entrant dans la file d'attente. Il est raisonnable de formuler les hypothèses suivantes

- Les variables aléatoires $(R_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes et identiquement distribuées.
- Les suites $(R_n)_{n \geq 1}$ et $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes. En revanche, pour tout $n \geq 1$, nous formulons l'hypothèse qu'il existe deux constantes $a, D > 0$ telles que :

$$\forall n \geq 1, R_n = aA_n + D.$$

où A_n est le nombre d'articles achetés du n ème client.

3.6.1 Organisation de paiement à guichet unique (M/M/1)

Nous visons maintenant à étudier la taille de la file d'attente à un temps donné. En particulier, nous prenons désormais en compte les sorties survenues après la réalisation des services. Dans ce modèle, nous supposons que le serveur ne compte qu'un guichet, que la file peut contenir un nombre illimité de clients et que les clients sont servis dans l'ordre d'arrivée.

On désigne par $(U_n)_{n \geq 1}$ la suite des instants d'arrivée des clients à la caisse : Pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire U_n désigne le temps d'arrivée au guichet du nième client entré dans la file.

$$U_n - U_{n-1} \rightsquigarrow \exp(\lambda).$$

3.7 Cas d'un nombre fini de guichets (M/M/k)

On suppose désormais que l'organe de service dispose de k guichets, pour un entier $k \geq 1$ fixé. En revanche, nous conservons les hypothèses suivantes :

- (1) Les clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
- (2) Les clients en attente forment une unique file d'attente et sont servis dans l'ordre d'arrivée.
- (3) Les temps de paiement sont régis par une relation affine avec le nombre d'achats.

3.8 Problème d'optimisation

Nous visons maintenant à calibrer ou optimiser le nombre de caisses du magasin de façon à ce que la taille de la file d'attente demeure raisonnable au cours d'une journée d'ouverture. Dans cette perspective, nous cherchons à estimer, pour un réel $t > 0$ fixé, la probabilité que la taille de la file d'attente F franchisse entre les instants 0 et t un seuil critique S donné, S étant un entier non nul. Plus exactement, nous cherchons à déterminer la valeur de $p = P\{\max_{[0,t]} F > S\}$, pour différentes valeurs de k . Nous choisirons alors le plus petit entier k rendant cette quantité inférieure à 0,05. Le calcul théorique de p est bien-sur très délicat. Aussi, l'utilisation de la simulation peut-elle se révéler particulièrement efficace : le calcul d'une valeur approchée de p revient dans ce cas à un calcul numérique d'une espérance à l'aide de la loi des grands nombres.

Dans ce contexte, l'algorithme dont le codage sera présenté dans la partie simulation du problème d'optimisation n'est pas le plus pertinent : il permet simplement de calculer des valeurs ponctuelles de la taille de la file, alors que nous souhaitons déterminer son maximum sur $[0, t]$. En revanche, cet algorithme permet d'obtenir les réalisations des suites T_n et U_n jusqu'à un instant donné. Comme le montre la proposition suivante, le maximum de la file d'attente sur $[0, t]$ s'obtient par un simple comptage :

Proposition

Étant données les suites $(T_n)_{n \geq 1}$ et $(U_n)_{n \geq 1}$ préalablement définies, et :

$\tau = \max\{n \geq 1, T_n \leq t\}$, on définit pour $\tau \geq 1 : \forall 1 \leq i \leq \tau, m_i = \sum_{k=1}^i \{1_{T_i < U_k}\}$.

Alors, $\max_{[0,t]} F = \max_{i=1,2,\dots,\tau} (m_i)$, avec $\max(\emptyset) = 0$.

Nous supposons que :

- (1) L'unité de temps est la minute.
- (2) Le magasin est ouvert 10 heures par jour.
- (3) La constante a est fixée à trente secondes par article, et la constante d à une minute et Trente secondes.
- (4) Le temps moyen d'inter-arrivée est d'une minute et vingt secondes.
- (5) Le nombre moyen d'articles achetés par un client entrant dans le magasin est de 3.
- (6) Le seuil critique est fixé à 20 personnes.

En utilisant ces données numériques, nous avons simulé, pour des valeurs de k allant de 1 à 4, une réalisation de la loi binomiale de paramètres 100 et p . Nous avons consigné les résultats obtenus ci-dessous en prenant soin de faire apparaître la moyenne empirique associée :

- Pour $k=1$: Réalisation de la somme : 100. Moyenne empirique : 1 .
- Pour $k=2$: Réalisation de la somme : 100. Moyenne empirique : 1.
- Pour $k=3$: Réalisation de la somme : 2. Moyenne empirique : 0.02 .
- Pour $k=4$: Réalisation de la somme : 0. Moyenne empirique : 0 .

Afin de préciser la validité de ces estimations, nous accompagnons ces résultats de la donné d'intervalles de confiance. Pour cela, nous rappelons que pour une variable aléatoire S_n de loi binomiale de paramètres $n \geq 1$ et p :

$$\forall \varepsilon > 0, IP = P\left[p - \frac{S_n}{n} > \varepsilon\right].$$

En choisissant $\varepsilon = \sqrt{\frac{-\ln(0.05)}{200}}$, nous en déduisons les intervalles de confiance suivants au niveau 0.95 :

1. Si $k = 1, p \in]0.87, 1]$,
2. Si $k = 2, p \in]0.87, 1]$,
3. Si $k = 3, p \in [0, 0.15]$,
4. Si $k = 4, p \in [0, 0.13]$.

Les valeurs $k = 1$ et $k = 2$ sont d'emblée éliminées. Des précisions semblent en revanche nécessaires pour la valeur $k = 3$. Dans cette perspective, un calcul similaire réalisé sur un échantillon de taille 1000 nous a permis d'obtenir, pour $k = 3$, une réalisation de la moyenne empirique égale à 0.007 et un intervalle de confiance au niveau 0.95 égal à $[0, 0.046]$. De fait, la valeur $k = 3$ apparaît satisfaisante.

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons modélisé : Les instants d'arrivées des clients, les durées de service et le nombre d'articles achetés par chaque client. Nous avons aussi pu extraire des modèles correspondants aux cas de l'organisation de paiement à guichet unique (M/M/1), et à un nombre fini de guichets (M/M/s). Enfin, nous avons calibré le nombre de caisses du magasin en modélisant la situation sous forme d'un problème d'optimisation. Afin d'illustrer cela, nous allons implémenter des algorithmes dans le chapitre suivant (Simulation et implémentation).

Chapitre 4

Simulation et implémentation

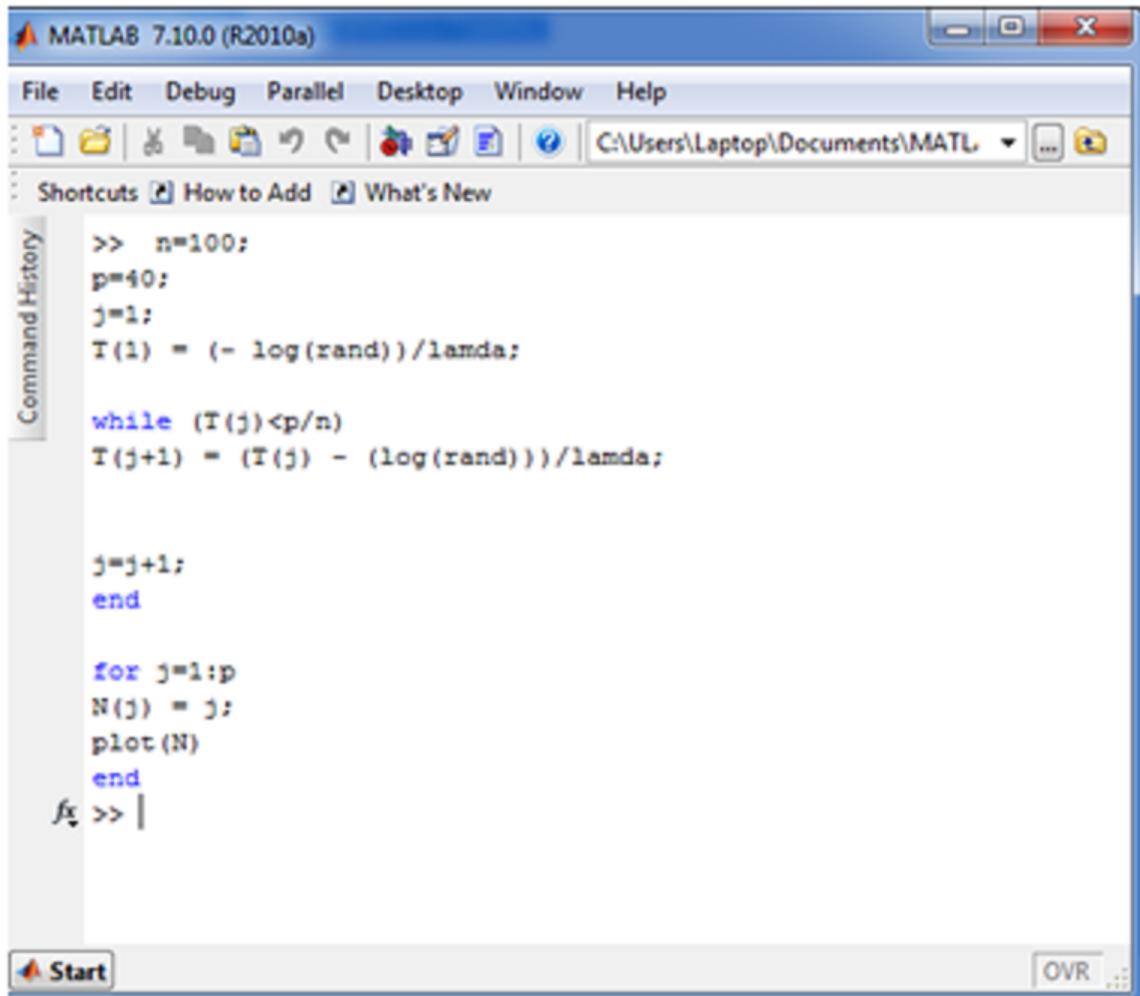
4.1 Introduction

Les systèmes qu'on trouve dans la réalité sont le plus souvent trop complexes pour pouvoir se prêter à une évaluation analytique et leurs modèles doivent être étudiés au moyen de la simulation. Dans une simulation, on utilise l'ordinateur pour évaluer numériquement un modèle. Des données sont collectées dans le but d'estimer les caractéristiques du système. A titre d'exemple, si un gérant d'un supermarché prévoit de faire certaines extensions mais n'est pas sûr que le gain potentiel dans la productivité justifierait le cout de la construction. Il peut donc recourir à une étude par la simulation. En effet, il ne serait sûrement pas rentable en terme d'argent que l'entreprise procède à l'extension puis se ravise plus tard si cette dernière est jugée par la suite, non satisfaisante. Une étude pourrait éclairer le gérant sur la question et ce en simulant le fonctionnement du système dans son état avant l'extension puis après. Ceci pourra être fait sans que cela ne nécessite des changements physiques dans le supermarché. Cette partie est une application du problème étudié, nous implémenterons ici les méthodes de générations et de la simulation déjà décrites dans le chapitre précédent en utilisant MATLAB.

4.2 Simulation

4.2.1 Simulation de la loi des arrivées

Algorithme : Pour deux entiers p , n non nuls arbitrairement fixés, le code sous Matlab suivant permet de simuler une réalisation du vecteur $(N(1/n), N(2/n), \dots, N(p/n))$:



```
MATLAB 7.10.0 (R2010a)
File Edit Debug Parallel Desktop Window Help
C:\Users\Laptop\Documents\MATL
Shortcuts How to Add What's New
Command History
>> n=100;
p=40;
j=1;
T(1) = (- log(rand))/lamda;

while (T(j)<p/n)
T(j+1) = (T(j) - (log(rand)))/lamda;

j=j+1;
end

for j=1:p
N(j) = j;
plot(N)
end
fx >> |
Start OVR
```

Figure 7 Simulation du vecteur $(N(1/n), N(2/n), \dots, N(p/n))$.

Pour $\lambda = 2$ nous avons implémenté cet algorithme et représenté une réalisation du vecteur $(N(1), N(2), N(3), \dots, N(100))$:

Le résultat apparait dans la figure suivante :

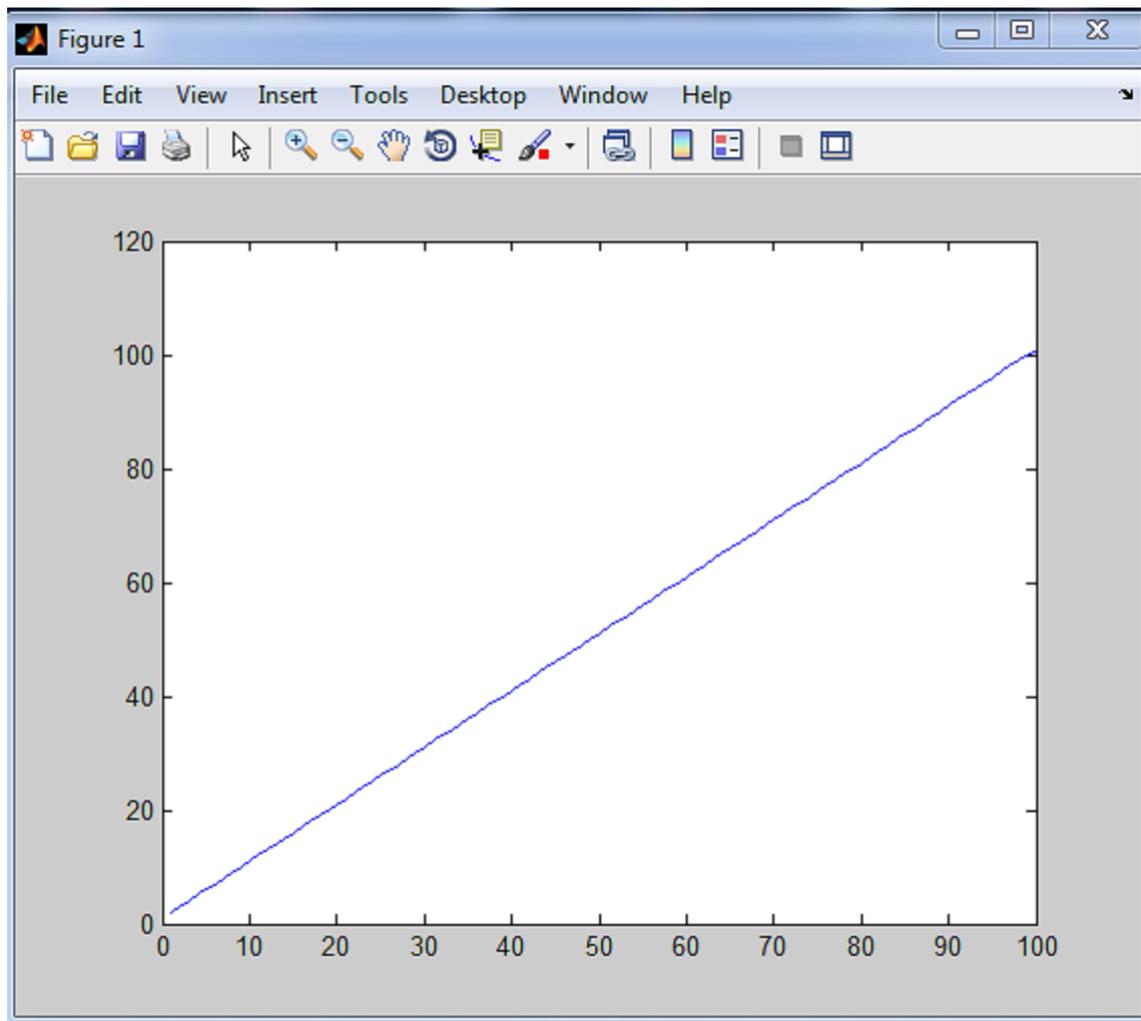
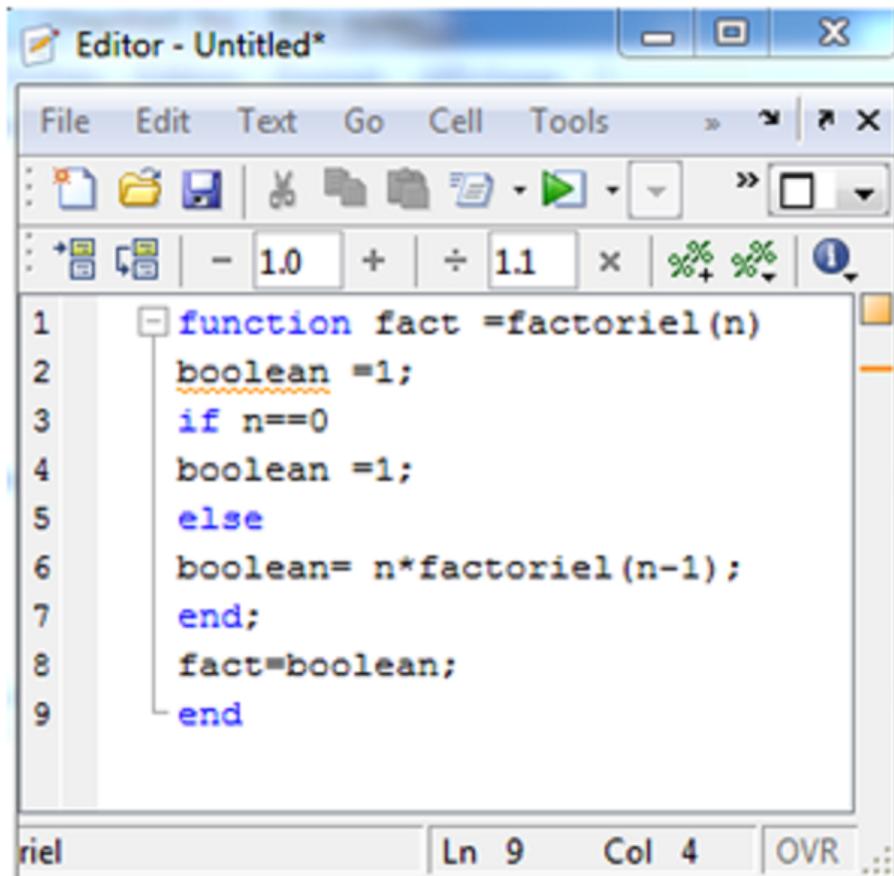


Figure 8 Simulation du vecteur $(N(1/n), N(2/n), \dots, N(p/n))$ pour $\lambda = 2$.

4.3 Simulation du nombre d'achats et temps de simulation

D'abord, nous allons créer la fonction "fact", qui calcule la factorielle :



The image shows a screenshot of a MATLAB editor window titled "Editor - Untitled*". The window contains a menu bar with "File", "Edit", "Text", "Go", "Cell", and "Tools". Below the menu bar is a toolbar with various icons for file operations and execution. A numeric keypad is visible, showing values like "1.0" and "1.1". The main editing area contains the following MATLAB code:

```
1 function fact =factoriel(n)
2     boolean =1;
3     if n==0
4         boolean =1;
5     else
6         boolean= n*factoriel(n-1);
7     end;
8     fact=boolean;
9 end
```

The status bar at the bottom indicates the current position: "Ln 9 Col 4" and "OVR".

Figure 9 Fonction factorielle.

Puis, en posant $c=2$ et $n=5$, on applique le codage suivant :

```
>> c=2

c =

     2

>> n=5

n =

     5

>> U = (exp(c)-1)*rand;
j=1;
p=c;
while(U>p)
j=j+1;
p=p+c^j/factoriel(j);
end
Simulation=j

Simulation =

     3
```

Figure 10 Simulation du nombre d'articles achetés.

4.4 Organisation de paiement à guichet unique

Ce codage permet de donner la taille de la file d'attente à un instant donné :

Pour un entier $p=100$ (arbitrairement fixé), le codage suivant permet de simuler une réalisation du vecteur $(F(1), F(2), \dots, F(p))$:

```
>> lamda=0.75
p=100
a=3
c=1
d=1

T(1) = - log(rand)/lamda
U(1) = T(1)
n=1
while (T(n)<p)
T(n+1) = T(n) - log(rand)/lamda
U(n+1) = max(U(n)+ a*randn(c) + d,T(n+1))
n=n+1
end

for (j=1:p)
N(j) = T(j)
end
for (j=1:p)
S(j) = U(j)
end
for (j=1:p)
F(j) = N(j)-S(j)
end
plot(-F)
```

Figure 11 Simulation d'une réalisation du vecteur $(F(1), F(2), \dots, F(p))$.

Tout d'abord, nous devons implémenter la fonction "randach" suivante :

```
function X = randach(c)
% <debut> : l'instant de depart
% <fin> : l'instant de fin
% <lamda> : temps moyen
debut=0;
fin=10;
n = 20000;
X = rand(n, 5);
Y = -log(1-X)/c;

% Y est une loi exponentielle de paramètre lamda
i = 1;
X(1) = debut+Y(1);
while X(i) < fin
X(i+1) = X(i) + Y(i+1);
plot(X);
i = i + 1;
end
X(i) = fin;
```

Figure 12 Fonction "randach".

Pour un entier $p=100$, l'algorithme donne une réalisation du vecteur $(F(1), \dots, F(p))$.
Et pour $\lambda = 0.75$ on aura :

```

>> k=3;
a=2;
c=1;
d=1;
p=100;
lamda=0.7;
T(1) = - log(rand)/lamda;
U(1) = T(1);
n=1;
while(T(n)<p) & (n < k)
T(n+1) = T(n) - log(rand)/lamda;
U(n+1) = T(n+1);
n=n+1;
end

v=U+a*randn(c)+d;
v;
while (T(n)<p)
T(n+1) = T(n) - log(rand)/lamda;
U(n+1) = max(v(1),T(n+1));
v;
n=n+1;
end
for (j=1:p)
N(j) = T(j);
end
for (j=1:p)
S(j) = U(j);
end
for (j=1:p)
end
plot(-F)

```

Figure 13 Algorithme de réalisation du vecteur $(F(1), \dots, F(p))$ pour $\lambda = 0.75$.

Le résultat figure dans l'image suivante :

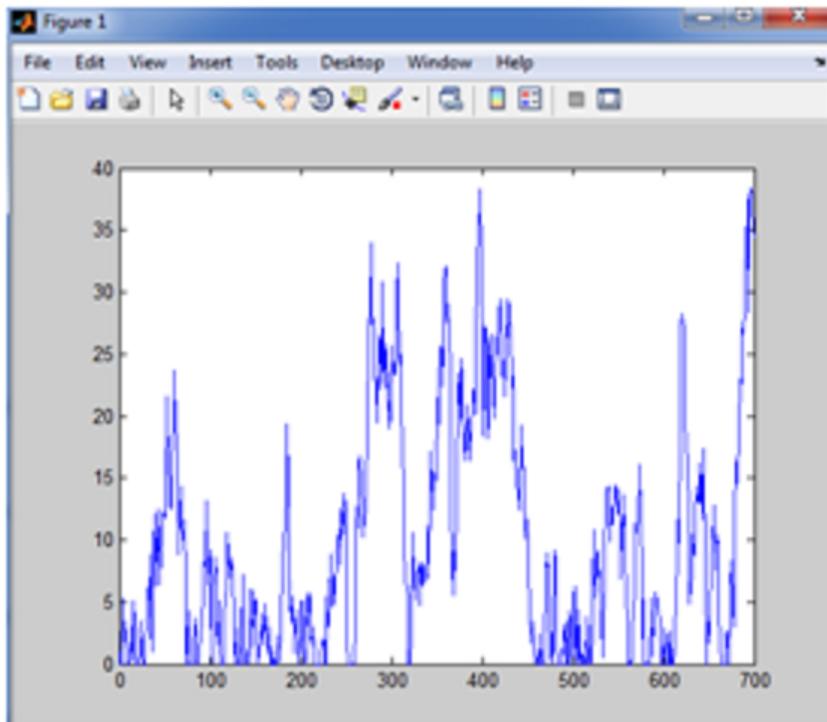


Figure 14 Algorithme de réalisation du vecteur $(F(1), \dots, F(p))$

Pour $\lambda = 0.25$:

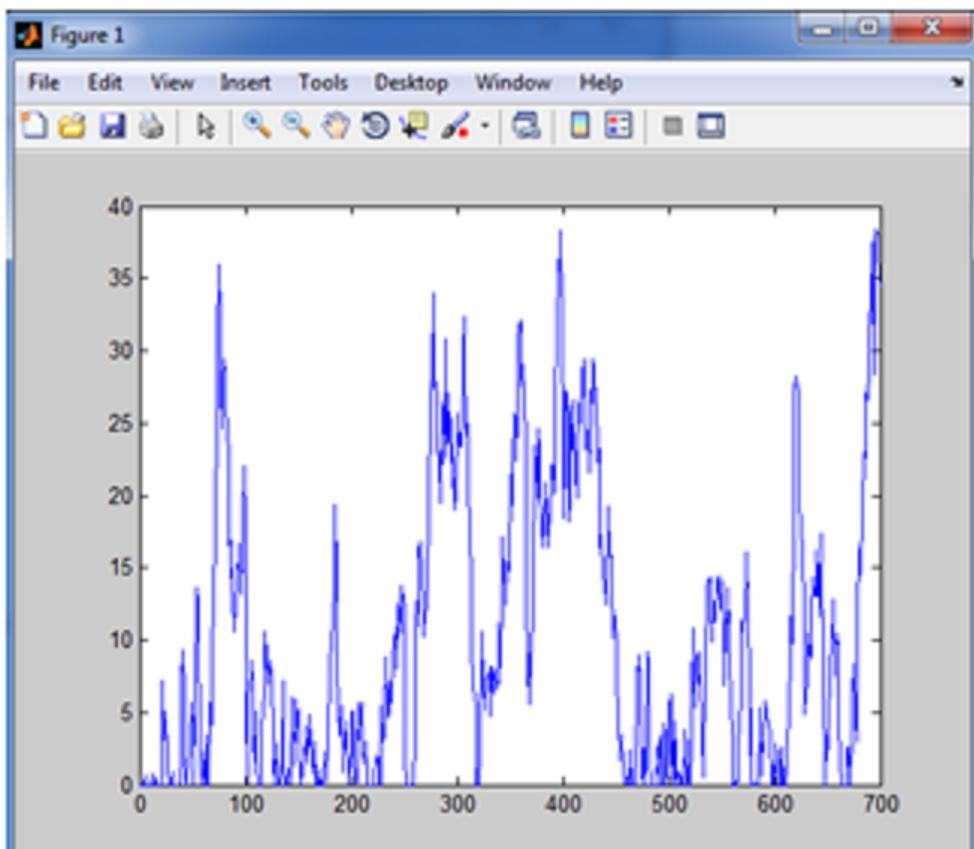
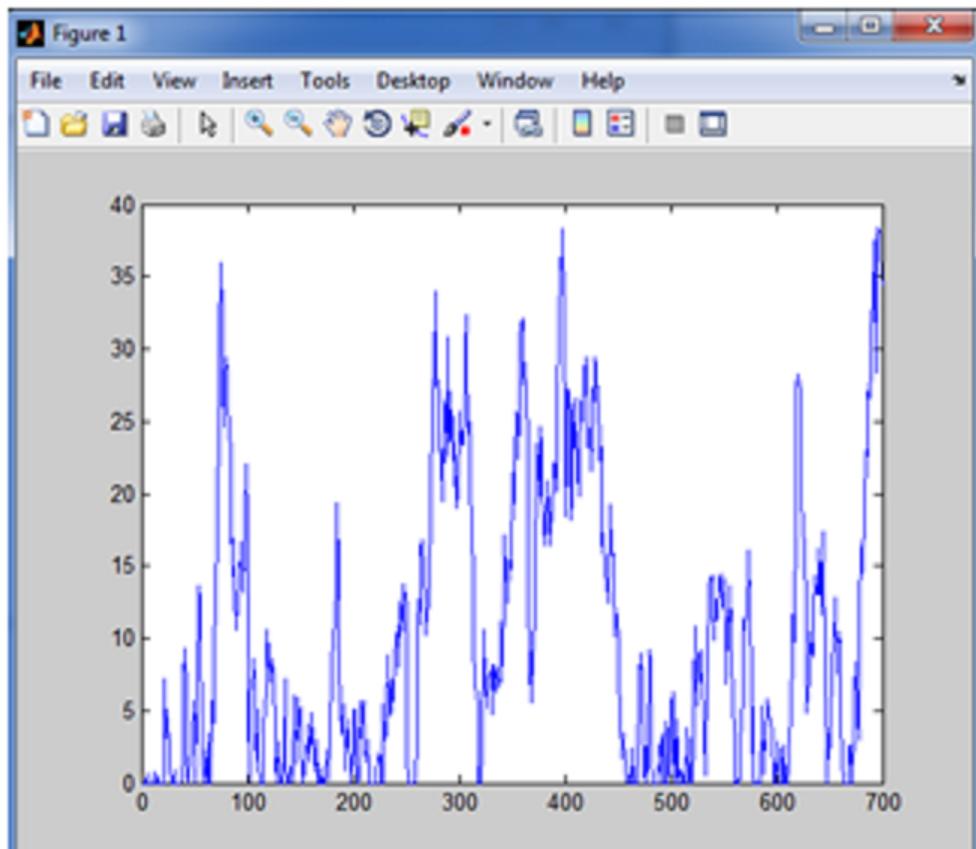


Figure 15 Algorithme de réalisation du vecteur $(F(1), \dots, F(p))$.

Pour $\lambda = 0.15$ on aura :

**Figure 16** Algorithme de réalisation du vecteur $(F(1), \dots, F(p))$

Ces trois graphiques font apparaître les phénomènes suivants :

- Si l'espérance des temps d'inter-arrivées est strictement plus grande que l'espérance du temps de paiement, la file d'attente passe fréquemment par 0. Ceci peut encore s'exprimer de la façon suivante : le temps d'attente s'annule avec une fréquence assez élevée.
- Si l'espérance des temps d'inter-arrivées est égale à l'espérance du temps de paiement, la file d'attente passe par 0, mais la fréquence de libération du guichet semble beaucoup plus faible. En particulier, il existe de longues périodes au cours desquelles la file compte toujours au moins un client.
- Si l'espérance des temps d'inter-arrivées est strictement inférieure à l'espérance du temps de paiement, la taille de la file d'attente explose avec le temps. Le serveur est manifestement saturé.

4.5 Cas d'un nombre fini de guichets

Après avoir utilisé encore une fois la fonction "randach" définie dans le cas d'un guichet unique, et comme $(U_n)_{n \geq 1}$ désigne maintenant la suite des instants d'arrivées des clients aux différentes caisses ; Voici finalement le code que nous proposons pour simuler la taille de la file d'attente jusqu'à un instant donné :

```
>> k=3; a=2; c=1; d=1;
p=100;
lamda=0.7;
T(1) = - log(rand)/lamda;
U(1) = T(1);
n=1;
while(T(n)<p) & (n < k)
T(n+1) = T(n) - log(rand)/lamda;
U(n+1) = T(n+1);
n=n+1;
end
v=U+a*randn(c)+d; v;
while (T(n)<p)
T(n+1) = T(n) - log(rand)/lamda;
U(n+1) = max(v(1),T(n+1)); v;
n=n+1;
end
for (j=1:p)
N(j) = T(j);
end
for (j=1:p)
S(j) = U(j);
end
plot(-F)
```

Figure 17 Cas d'un nombre fini de guichets

Le résultat apparaît ainsi :

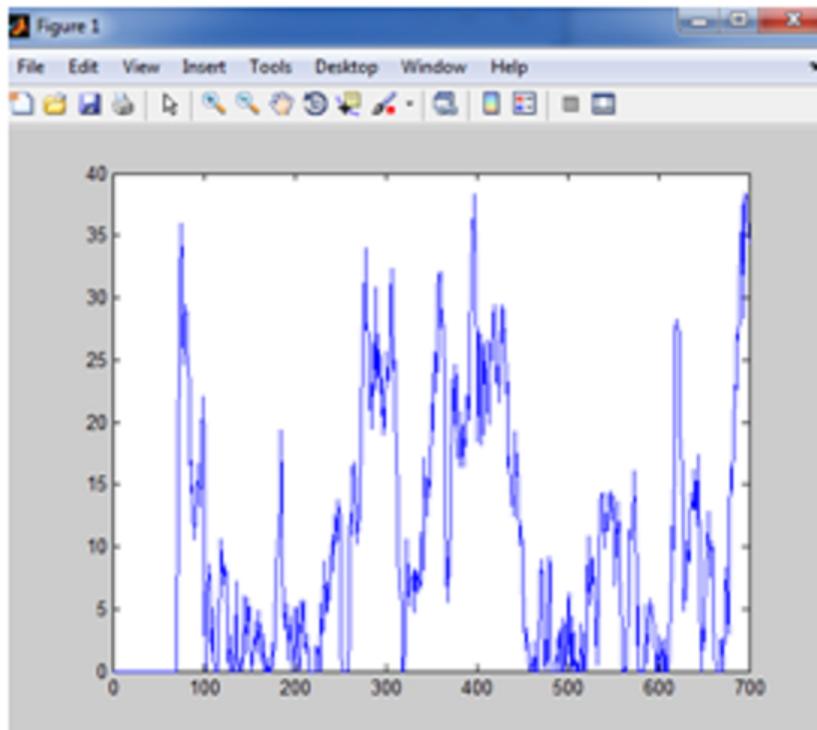


Figure 18 Résultat dans le cas d'un nombre fini de guichets

4.6 Problème d'optimisation

Maintenant, nous allons implémenter un algorithme d'optimisation pour le problème précédent (d'optimisation) du chapitre 3 et voir son illustration graphique et numérique.

```
>> k=3;
a=3;
c=1;
d=1;
p=0.88;
lamda=0.2;
T(1) = - log(rand)/lamda;
U(1) = T(1);
n=1;
while (T(n)<p) & (n < k)
T(n+1) = T(n) - log(rand)/lamda;
U(n+1) = T(n+1);
n=n+1;
end
v=U+a*randn(c)+d; v;
while (T(n)<p)
T(n+1) = T(n) - log(rand)/lamda;
U(n+1) = max(v(1),T(n+1)); v; n=n+1;
end
nombre=1; T; U; t=2;
for (i=1:t)
for (j=1:i)
if U(j) >T(i)
m(j)=U(j);
nombre=nombre+1;
end
end
end
plot(T)
```

Figure 19 Algorithme d'optimisation

Le résultat apparaît dans la figure suivante :

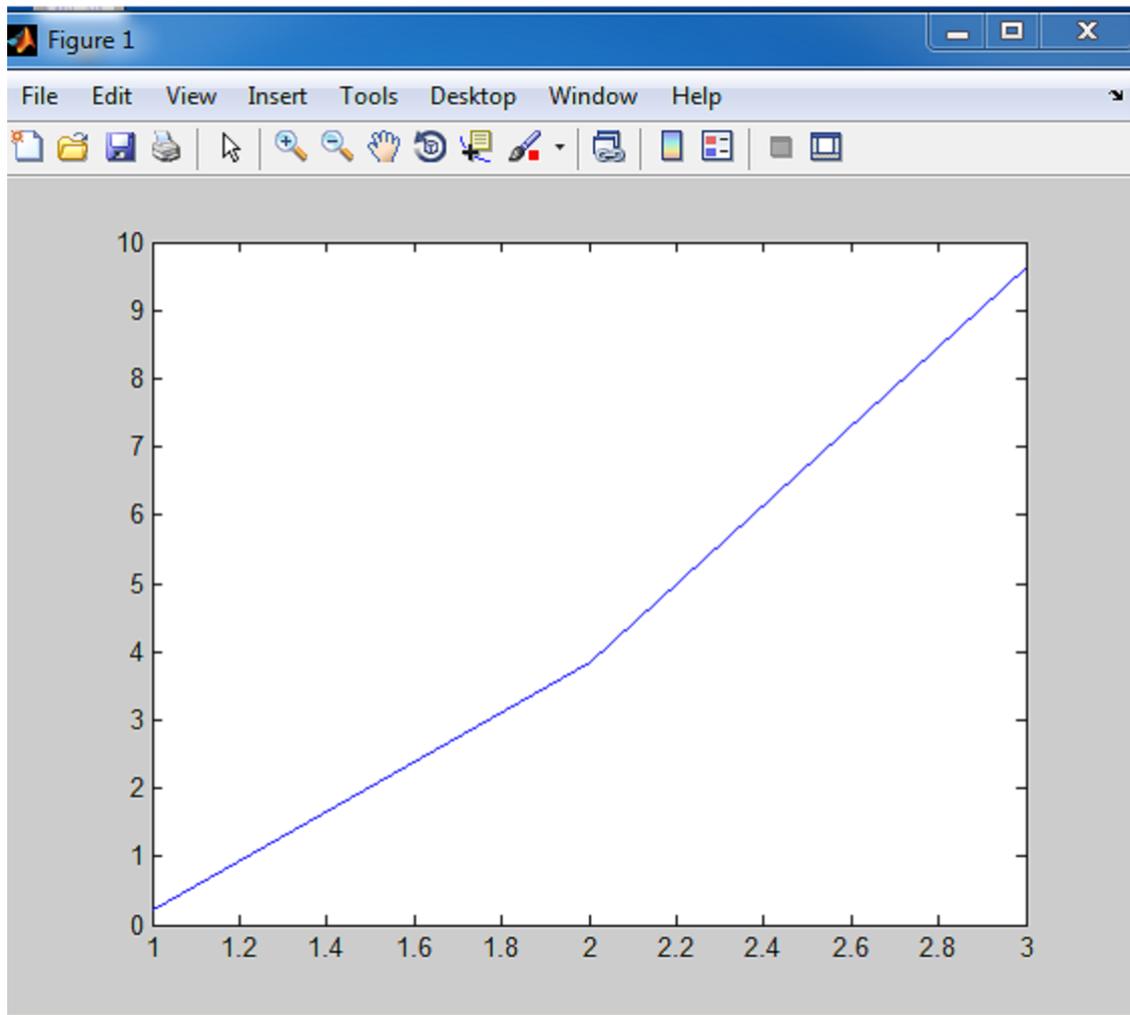


Figure 19 Résultat de l'optimisation

4.7 Conclusion

Selon les données prises en compte et à l'aide de la simulation, nous sommes maintenant en mesure d'aider le preneur de décision à améliorer son commerce tout en se préservant des pertes occasionnées par une éventuelle extension. Les programmes que l'on a implémentés sous Matlab nous ont permis de proposer au gestionnaire la meilleure stratégie ($k=3$ guichets) qui lui évite des dommages tout en optimisant le revenu total de l'entreprise.

Conclusion générale

La modélisation et l'évaluation de performances constituent un enjeu majeur pour la conception et le contrôle de systèmes, qui sont de plus en plus complexes et évoluent rapidement. Il y a donc un besoin important d'outils pour comprendre leur comportement, pour minimiser les coûts de déploiement et de gestion et pour optimiser les performances, au cours de la vie de ces systèmes. Pour répondre à ces questions, l'utilisation d'une démarche intuitive peut s'avérer très dangereuse, et une évaluation expérimentale extrêmement coûteuse. Une méthode intermédiaire entre ces deux extrêmes est la modélisation abstraite et l'évaluation théorique. De nos jours, il est devenu inconcevable de construire un système quelconque sans avoir auparavant fait d'analyse des performances. La pression des enjeux économiques est telle que l'on doit éviter le maximum de pertes. Modifier la construction du supermarché tout en respectant le plus possible les objectifs de son gestionnaire a été notre souhait. Cette démarche est passée par une étape de modélisation et d'analyse des performances. En plus des modélisations analytiques, la simulation sur MATLAB nous a permis d'acquérir des évaluations relativement précises. Nous avons consacré le premier chapitre à l'étude des processus Markoviens. Nous y avons présenté un cours assez simple et détaillé. La seconde partie a décrit brièvement certains systèmes d'attente tout en évoquant leurs caractéristiques (liées aux serveurs - liées aux clients). Dans le troisième chapitre, nous avons ciblé deux modèles qui reflètent l'aspect aléatoire du déroulement des achats dans un supermarché (Systèmes à guichet unique $M/M/1$ - Systèmes possédant un nombre fini de guichets $M/M/s$). Enfin, en toute dernière partie, nous avons implémenté certains algorithmes de simulation qui à leurs tours, nous ont permis de définir précisément la structure optimale du supermarché grâce à laquelle le preneur de décision pourra éviter des dommages inutiles à son entreprise, tout en garantissant un rendement optimal.

Bibliographie

- [1] Cours de Master I RO : Processus stochastiques, Mr Hamadouche.
- [2] Cours de Master II RO : Files d'attente, Mr Hamadouche.
- [3] Files d'attente et simulation : Université Paris VII. Préparation à l'Agrégation. (François Delarue)
- [4] Méthodes explicites de l'optimisation (J.P.AUBIN, P.NEPOMIASTCHY, A.M.CHARLES).
- [5] Recherche opérationnelle TRAVAUX DIRIGES (J.M.HELARY, R.PEDRONO).
- [6] Files d'attente, Alexandre Blondin Massé, laboratoire d'informatique formelle- université du Québec à Chicoutimi.
- [7] Simulation des processus de production de biens et services (Vincent Giard).
- [8] Modélisation de flux dans un réseau : Etude et simulation de files d'attente (Université Abou Bakr Belkaid, Tlemcen).
- [9] Simulation de files d'attente (Pierre Girardeau & JEAN PHILIPPE Chancelier).

Résumé

Les chaînes de Markov, souvent obtenues par le biais d'un formalisme de modélisation de haut niveau, sont souvent utilisées pour l'analyse des performances des systèmes et ce, dans de nombreux domaines. Ce formalisme fait bien souvent appel à la notion de "Processus Stochastique". Cette étude propose des méthodes visant à optimiser le nombre nécessaire de caisses de paiement à la sortie d'un supermarché. Une fois développés, ces algorithmes vont faire l'objet d'une implémentation. Nous en présenterons quelques exemples numériques afin d'illustrer les apports de cette étude. Cette dernière se basera en premier lieu sur le concept de processus Markoviens. Puis, elle ciblera quelques modèles de files d'attente Markoviennes qui pourront refléter la structure du système de paiement de l'entreprise ($M/M/1 - M/M/s$). Enfin, nous réaliserons une modélisation basée sur l'étude du supermarché, que l'on utilisera par la suite, pour la construction d'un modèle de simulation prêt à être présenté au preneur de décision.