

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou



Faculté De Génie Electrique Et D'informatique
DEPARTEMENT D'automatique

**Mémoire de Fin D'études
De MASTER ACADEMIQUE**
Spécialité : **automatique option commande des
systèmes**

Présenté par
**Mounira SILEM
Sadia BOUZAR**

Mémoire dirigée par **Maidi AHMED** et co-dirigée par **Maidi AHMED**

Thème

**Commande géométrique à la frontière
d'un échangeur de chaleur à contre-
courant**

Mémoire soutenu publiquement le 9 septembre 2014 devant le jury composé de :

M Rabeah MELAH
Grade, Lieu d'exercice, Président

M Ahemed MAIDI
Grade, Lieu d'exercice, Rapporteur

M Said DJENOUNE
Grade, Lieu d'exercice, Examineur

M Amar SI AMOUR
Grade, Lieu d'exercice, Examineur

Remerciements

Nous remercions en premier lieu DIEU le tout puissant qui nous a donné le courage pour accomplir ce travail.

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance, à Benameur DYHIA pour son orientation et son aide.

Nous remercions notre promoteur Mr. Ahmed MAIDI d'avoir accepté de nous encadrer.

Nous remercions les membres de jury qui nous feront l'honneur de juger notre travail, et d'apporter leurs éclaircissements.

C'est le moment aussi pour dire merci à tous les professeurs qui nous ont suivi du primaire jusqu'à ce jour.

Un très grand merci à nos parents qui nous ont toujours soutenus quelles que soient nos décisions.

Nous remercions chaleureusement le chef du département D'automatique Mr BENSIDHOUM pour ses conseils.

Dédicace

Je dédie ce travail à :

- *La mémoire de ma grand-mère*
- *Mes très chers parents.*
- *Mes sœurs Souhila , Sonia et son marie*
- *Mes frères, Azzdine et Abdanour*
- *Ma nièce Éva*
- *Mes oncles et tantes et leurs familles*
- *Mon binôme et amie Sadia et toute sa famille*
- *A tous mes amis(es) surtout Karima et Roza*
- *La promotion d'automatique 2014*

Mounira

Sommaire

Sommaire

Introduction Générale	01
------------------------------------	----

Chapitre 1 : Notions sur les systèmes à paramètres distribués

1.1 introduction.....	03
1.2 Définition d'un système à paramètres distribués.....	03
1.3 Approximation des systèmes à paramètres distribués.....	03
1.4 Formulation mathématique d'un système à paramètres distribués.....	04
1.5 Description mathématique d'un système réparti.....	04
1.5.1 Equation d'état	04
1.5.2 Exemple de système distribué.....	05
1.6 Différents types de condition aux limites.....	06
1.6.1 Condition de Dirichlet.....	06
1.6.2 Condition de Neumann.....	06
1.7 Classification des systèmes à paramètres distribués.....	07
1.8 Nature des entrées et des sorties d'un système à paramètres distribués	07
1.8.1 Commande d'un système réparti.....	08
1.8.1.1 Commande répartie	08
1.8.1.2 Commande par zone.....	08
1.8.1.3 Commande ponctuelle.....	09

Sommaire

1.8.1.4 Commande par balayage	09
1.8.1. 5 Commande aux frontières.....	09
1.8.2 Observations d'un système à paramètres distribués	09
1.8.2.1 observation répartis	09
1.8.2.2 Observation ponctuelle.....	09
1.8.2.3 Observation par balayage	10
1.8.2.4 Observation par moyennage spatial.....	10
1.8.2.5 Observation aux frontières	10
1.9 Résolution des équations aux dérivées Partielles	10
1.10 Actionneurs et capteur des systèmes à paramètres distribués	11
1.10.1 Actionneurs	11
1.10.2 Capteurs	12
1.11 Définition des phénomènes	12
1.11.1 Définition de la convection.....	12
1.11.2 Définition de la diffusion	13
1.11.3 Définition de la réaction	13
1.12 Système diffusion-convection-réaction	13
1.13 Equation d'écoulement (convection-diffusion)	14
1.14 Equations de diffusion-convection-réaction	14
1.15 Conclusion.....	15

Chapitre 2 : Simulation avec la méthode des lignes

2.1 Introduction.....	16
2.2 Définition.....	16
2.3 Méthodes d'approximation aux différences finies	17

Sommaire

2.4 Origine et approche de la méthode des lignes.....	17
2.5 Pratique de la méthode des différences finies.....	18
2.6 Contexte général de la méthode des lignes.....	18
2.6.1 Propriétés et utilisations de la méthode des lignes.....	19
2.7 Application de la méthode des lignes.....	20
2.8 Principe de la méthode des lignes	20
2.8.1 Bases de la méthode des lignes.....	20
2.9 Exemple illustratif.....	21
2.10 Simulation du système par la méthode des lignes.....	23
2.11 Synthèse des caractéristiques de la méthode des lignes	24
2.12 Conclusion.....	25

Chapitre 3 : Simulation d'un échangeur de chaleur à Contre-courant par la méthode des lignes

3.1 Introduction	26
3.2 Définition	26
3.3 Critères de classement des échangeurs.....	26
3.3.1 Type de contact.....	27
3.3.2 Classement suivant les types d'échange	27
3.4 Différents modes de Transfer de chaleur	27
3.5 Modélisation du fonctionnement d'un échangeur à double tube	28
3.5.1 Processus.....	28
3.6 Définition et hypothèses.....	29

Sommaire

3.7 Equilibre énergétique.....	31
3.8 Principaux types d'échangeurs à fluide.....	33
3.8.1 Les échangeurs à courant parallèle.....	33
3.8.2 Les échangeurs à contre-courant.....	34
3.9 Discrétisation spatiale.....	35
3.10 Interprétation de la figure	40
3.11 Conclusion	41

Chapitre 4 : Commande géométrique de l'échangeur de chaleur à contre-courant

4.1 Introduction.....	42
4.2 Systèmes d'équations et dérivées partielles hyperboliques de premier ordre.....	42
4.2.1 Préliminaire.....	42
4.2.2 Spécification du problème de commande	43
4.3 Notions sur l'indice caractéristique.....	47
4.3 .1 Indice caractéristique pour les systèmes à paramètres localisés.....	47
4.3.2 Indice caractéristique pour les systèmes à paramètres répartis.....	47
4.4 Commande des systèmes distribués hyperbolique par retour d'état.....	49
4.4.1 Les systèmes linéaires	49
4.5 Description de procédé	53
4.6 Modèle aux dérivées partielles.....	53
4.7 Stratégie de commande	54
4.7.1 Calcule degré relatif.....	54

Sommaire

4.7.2 Calcul de la loi de commande.....	55
4.8 Simulation	58
4.8.1 Asservissement	58
4.9 Conclusion	60
Conclusion Générale	61

Liste des Figures

Liste des figures

Figure 2.1. Evolution temporelle de la température aux différentes positions.....	23
Figure3. 1: L'échangeur de chaleur à double tube à contre courants.....	29
Figure3.2 : Un élément de l'échangeur de chaleur.....	30
Figure 3.3 Cas d'un échangeur à courants parallèles.....	34
Figure 3.4 Cas d'un échangeur à contre- courant.....	35
Figure 3.5 Profiles des températures à l'instant $t = 1$ s.....	40
Figure 4.1 Spécification du problème de commande pour un exemple prototype.....	44
Figure 4.2 Schéma bloc de la commande et du procédé.....	57
Figure 4.3 Schéma fonctionnel de la commande en boucle fermée.....	57
Figure 4.4 Evolution de la température à la sortie du liquide froid.....	59
Figure 4.5 Evolution de la température à la l'entrée du liquide chaud.....	60

Liste des Symboles

Liste des symboles

Z : Variable espace.

t : Variable temps.

T : Variable température.

R : Ensemble des nombres réels.

EDP : Équations aux dérivées partielles.

SPD : Système à paramètres distribués.

SPL : Système à paramètres localisés

EDO : Équations aux dérivées ordinaires.

Ω : Domaine spatial admissible.

$T_0(z)$: Condition initiale.

$T_l(z)$ et $T_0(z)$: Conditions aux limites.

θ : Domaine temporel admissible.

A : Matrice d'évolution.

B : Matrice de commande.

$u(z, t)$: Vecteur de commande d'un système à paramètres distribués.

D^2 : Conductivité thermique à l'intérieur du solide.

∇ : Gradient.

$\nabla_0(t)$ et $\nabla_l(t)$: Gradient aux bords.

a_1, a_2, a_3 : Nombres réels.

$T(z, t)$: vecteur d'état d'un système à paramètres distribués.

C : Diffusion de la chaleur.

$b_i(z)$: Structure géométrique de l'ensemble des actionneurs

Liste des Symboles

$u_i(t)$: l'ensemble des signaux d'entrée à la zone i .

δ : est l'équation de Dirac.

$C(z)$: Structure géométrique du système d'observation.

$y(z, t)$: Sortie distribués.

D : Coefficient de diffusion.

C : Coefficient de convection.

R : Coefficient de Réaction.

Δz : Pas de discrétisation.

N : Nombre de sections.

C_p : Est la capacité calorifique du fluide.

T_f : Température du fluide froid.

T_c : Température du fluide chaud.

$T|_z$: Température au point Z .

$T|_{z+\Delta z}$: Température au point $Z+\Delta z$.

ρ_y et D_y : Constants.

$h|_z$: Enthalpie du fluide chaud entrant.

$h|_{z+\Delta z}$: Enthalpie du fluide chaud sortant.

φQ : Quantité de chaleur apportée au fluide chaud par le fluide froid.

K : Coefficient global de transfert de chaleur.

S_h : La surface totale de transfert thermique dans cet anneau élémentaire.

v_c : vitesse de fluide chaud.

Liste des Symboles

v_f : vitesse de fluide froid.

$h(x), p(x)$: Des fonctions scalaires.

D_1 et D_2 : Matrices constantes de dimension $n \times n$.

$h(x)$: Fonctions de sortie lisse, sortie commandée.

$f(x)$: Fonction vectorielle lisse.

$g(x)$: Fonction vectorielle lisse.

$[z_i, z_{i+1}]$: i^{eme} intervalle du domaine spatial.

$u^i(t)$: i^{eme} entrée de commande relative au i^{eme} intervalle spatial.

$S^i(t)$: i^{eme} sortie mesurée relative au i^{eme} intervalle spatial.

$b^i(z)$: Opérateur représentant la géométrie de l'actionneur.

$y^i(t)$: i^{eme} sortie commandée relative au i^{eme} intervalle spatial.

$Q^i(z)$: Opérateur représentant la géométrie de capteur.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{R^n}$: Produit scalaire standard dans l'espace euclidien R^n .

$L_g h(x)$: Dérivée de lie de $h(x)$ par rapport $g(x)$.

L_{a_j}, L_f : Notion standard de la dérivée de Lie.

α : Opérateur linéaire.

β : Matrice diagonale, de fonction, réversible.

v : Entrée de référence.

τ : Constante du temps.

s : Opérateur de Laplace.

Liste des Symboles

r : degré relatif.

INTRODUCTION

GÉNÉRALE

Introduction Générale

L'automatique fait partie des sciences de l'ingénieur, cette discipline vise la compréhension fine des phénomènes physiques en termes de modélisation, d'identification et de simulation, en se basant sur les logiciels de simulation.

L'élaboration de lois de commande de systèmes a fait l'objet de nombreux travaux de recherche. L'application de certaines de ces méthodes à des procédés réels a montré leur efficacité.

Les variables caractéristiques (entrées, sorties et états) d'un échangeur de chaleur sont caractérisées par une évolution spatio-temporelle. Par conséquent, leur comportement dynamique est décrit par une ou plusieurs équations aux dérivées partielles (EDP) selon les hypothèses simplificatrices de modélisation

On peut étudier les résultats du comportement des systèmes complexes, et celui des phénomènes physiques sans recourir à des expériences qui sont trop chères et parfois irréalisables. Parmi les systèmes complexes, on retrouve les systèmes à paramètres distribués de type convection-diffusion-réaction dont le comportement dynamique est régi par des équations aux dérivées partielles (EDP), ces équations mettent en jeu des variables d'espace et de temps, ce qui rend la simulation un peu délicate, contrairement aux systèmes décrits par des équations aux dérivées ordinaires (EDO) dont la simulation est simple et facile. Ainsi, une approche de simulation des systèmes à paramètres distribués consiste à les approximer par des EDO qui sont obtenues par une approximation du modèle EDP en utilisant des techniques appropriées (méthodes numériques).

Ces dernières années, la commande géométrique, basée sur la notion du degré relatif, a démontré son efficacité dans la commande des systèmes à paramètres distribués. Cette approche présente l'avantage de faciliter la synthèse du correcteur en utilisant directement le modèle EDP. La commande géométrique conduit à un retour d'état permettant de réaliser une réduction du système EDP à un système à paramètres localisés linéaires, ce qui permet de tirer profit des techniques de commande linéaire robustes pour améliorer les performances en boucle fermée.

Notre objectif, dans ce mémoire, est la synthèse d'une loi de commande distribuée sous forme d'un retour d'état non linéaire pour un échangeur de chaleur à double tube à

Introduction Générale

contre-courant modélisé par deux équations aux dérivées partielles hyperbolique de premier ordre, en tenant compte de sa dimension infinie. Le rôle de cette loi de commande est d'assurer la poursuite de consigne et la stabilité de fonctionnement.

Le mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre est dédié aux généralités sur les systèmes à paramètres distribués, et à spécifier les différents classes de commandes et d'observation, suivi des généralités sur les systèmes de convection-diffusion-réaction qui constituent l'une des classes les plus importantes des SPD.

Le deuxième chapitre expose le principe de la méthode des lignes, ses propriétés fondamentales et l'application de la méthode à la résolution des équations aux dérivées partielles. L'approche adoptée est basée sur les différences finies.

Le troisième chapitre présente certaines notions générales sur les échangeurs de chaleur suivie la modélisation de fonctionnement d'un échangeur de chaleur à double tube à contre-courant.

Le dernier chapitre aborde la synthèse de la loi de commande non linéaire géométrique à la frontière d'un système à paramètres distribués hyperboliques.

CHAPITRE 1

NOTIONS SUR LES SYSTEMES A PARAMETRES DISTRIBUES

1.1 Introduction

Pour les systèmes à paramètres distribués, les variations caractéristiques varient en fonction du temps et de l'espace. Ces systèmes sont augmentées par des entrées et des sorties, qui peuvent également évoluer dans le temps et dans l'espace, et sont caractérisés par leur espace d'état qui de dimension infinie. Ces systèmes sont gouvernés par des équations aux dérivées partielles (EDP) qui peuvent être mises sous la forme d'une équation d'état au sens habituel.

1.2 Définition d'un système à paramètres distribués

Un système à paramètres distribués ou répartis (SPD) est un système dans lequel les variations et les divers paramètres peuvent dépendre du temps et de l'espace. Ils comportent des entrées et des sorties qui permettent au système de communiquer avec son environnement extérieur. Les entrées- sorties dépendent aussi des variables de temps et d'espace

1.3 Approximation des systèmes à paramètres distribués

Dans certains cas, les variables caractéristiques sont suffisamment uniformes et homogènes par rapport à l'espace géométrique, pour qu'elles puissent être considérées comme indépendantes de la variable espace.

Parfois, on peut assimiler les paramètres repartis à des paramètres localisés.

Mais cette approximation n'est pas toujours retenue :

- soit parce que l'objectif de l'étude est contraire à cette hypothèse (contrôle d'un gradient de température dans un matériau, identification d'un coefficient de transfert surfacique...)
- soit parce que la nature des phénomènes et la géométrie sont essentielles dans la modélisation : incohérence entre l'approximation et la réalité physique.

1.4 Formulation mathématique d'un système à paramètres distribués

Avant de commencer la description du modèle mathématique de système à paramètres distribués, il faut toujours définir [1] :

- Un domaine spatiale qu'on notera Ω tel que $z \in \Omega \subset R$
ce domaine peut être borné ou ouvert
- Un domaine temporel qu'on notera θ tel que $t \in \theta \subset R$
- La condition pour $t=0$
$$T(z, 0) = T_0(z) \quad (1.1)$$
- La condition aux limites

1.5 Description mathématique d'un système réparti

Un système est dit système à paramètres distribués (SPD) s'il est décrit par une équation aux dérivées partielles (EDP). Ces dernières sont des équations différentielles à deux variables, du temps et d'espace, qui peuvent être de type parabolique, elliptique ou hyperbolique faisant apparaître des propriétés différentes.

En effet, la modélisation des systèmes physiques conduit à des EDP. Ce type de système sont appelés SPD et de dimension infinie, par opposition aux SPL, décrits par des EDO qui sont de dimension finie.[2]

1.5.1 Equation d'état

On considère l'équation d'état d'un système définie par :

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = A(T(z,t)) + B(z)u(z,t) \quad (1.2)$$

Sur un domaine spatial Ω tel que

$$z \in \Omega \subset R$$

Et un domaine temporel :

$$t \in Y \subset R$$

Avec la condition initiale :

$$T(z, t_0) = T_0 \quad (1.3)$$

Et la condition au limite établissant les relations entre l'état et la commande aux limites du domaine géométrique

$$L(T(z', t)) = U(z', l)z' \in F, \Omega$$

(F, Ω : frontière de Ω)

A et L sont des opérateurs matriciels différentiels ne comportant des dérivées par rapport à la variable indépendante z [1].

L'état T du système est représenté par la fonction vectorielle suivante :

$$T(z, t) = \begin{bmatrix} T_1(z, t) \\ T_2(z, t) \\ \vdots \\ T_n(z, t) \end{bmatrix}$$

1.5.2 Exemple de système distribué

Supposons une barre métallique de longueur l , à une température constante T_c par la commande du flux de chaleur entre l'extérieur et la barre.

L'évolution de la température $T(z, t)$ en un point $z \in]0, l[$ est décrite par l'équation de chaleur suivante :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = D^2 \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \quad (1.4)$$

D^2 : Caractérise la conductivité thermique à l'intérieur du solide

Avec :

- La condition initiale $T(z, 0) = T_0(z)$ (1.5)
- Les conditions aux limites :

$$T(0, t) = T_0(t) \quad (1.6)$$

Et

$$T(l, t) = T_l(t) \quad (1.7)$$

1.6 Différents types de condition aux limites

1.6.1 Condition de Dirichlet

Considérons les extrémités de la barre métallique fixées à des températures données $T_0(t)$, $T_l(t)$.

On aura :

$$\begin{cases} T(0, t) = T_0(t) \\ \quad \quad \quad \text{et} \\ T(l, t) = T_l(t) \end{cases} \quad (1.8)$$

1.6.2 Condition de Neumann

Si le dispositif est tel que le flux de chaleur est donné aux bords, c'est le gradient de la température $\nabla(T)$ qui est ainsi fixé, et les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} -c \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \nabla_0(\tau) \\ \quad \quad \quad \text{et} \\ -c \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=l} = \nabla_l(\tau) \end{cases} \quad (1.9)$$

1.7 Classification des systèmes à paramètres distribués

La classification générale des SPD s'appuie sur l'EDP de deuxième ordre, par définition, l'ordre de la plus grande dérivée présente dans l'équation [4].

Pour la classification des systèmes répartis, il existe trois classes : de type hyperbolique, elliptique, parabolique. Cette classification est plus difficile à établir dans le cas des EDP non linéaires.

En général, les systèmes linéaires d'ordre deux, dont la solution $T(z, t)$ est une fonction à deux variables indépendantes t et z . Le modèle mathématique s'écrit :

$$a_1 \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} + 2a_2 \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z \cdot \partial t} + a_3 \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z \cdot \partial t^2} + [\dots] = 0 \quad (1.11)$$

Le terme entre crochet dépend de $T(z, t)$ et ses dérivées premières de $T(z, t)$

L'équation est dite :

- Hyperbolique, si $a_2^2 - a_1 a_3 > 0$.
- Elliptique, si $a_2^2 - a_1 a_3 < 0$.
- Parabolique, si $a_2^2 - a_1 a_3 = 0$.

Si les trois coefficients a_1, a_2, a_3 sont nuls, l'équation dépend seulement des dérivées premières de $T(z, t)$ alors l'équation est hyperbolique et d'ordre un.

1.8 Nature des entrées et des sorties d'un système à paramètres distribués

Pour préciser une description interne ou externe d'un système à paramètres distribués, il faut spécifier en plus de l'équation d'état, la nature de l'entrée u et la sortie y qui peut être soit distribué ou localisé

1.8.1 Commande d'un système réparti

Pour commander un SPD, on distingue plusieurs types de commande [3]:

1.8.1.1 Commande répartie

Sa loi de commande est donnée comme suit :

$$u(z, t) = b(z)u(t) \quad (1.12)$$

Avec :

$b(z)$ caractérise la structure géométrique de l'ensemble des actionneurs.

Et

$u(t)$ est le signal d'entrée relatif à la commande.

1.8.1.2 Commande par zone

Le domaine spatial est décomposé en plusieurs parties ou zones. La commande par zone est définie sur un sous ensemble de $\Omega_i \times \Theta$, avec Ω_i représente une portions du domaine Ω , si la commande est appliquée sur n zones, donc sa loi de commande s'écrit comme suit :

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^n b_i(z)u_i(t) \quad (1.13)$$

Où : $b_i(z)$ représente la structure géométrique de l'ensemble des actionneurs, $u_i(t)$ l'ensemble des signaux d'entrée à la zone i.

1.8.1.3 Commande ponctuelle

La Commande ponctuelle est un cas particulier de la commande par zone qui s'applique dans ce cas sur un point, l'équation $b_i(z)$ est remplacée par la fonction de Dirac :

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^n u_i(z, t) \delta(z - z_i) \quad (1.14)$$

1.8.1.4 Commande par balayage

Les points ou les zones d'action de la commande sont mobiles sur tout le domaine Ω .

1.8.1 .5 Commande aux frontières

Les limites sont définies sur l'ensemble β , cette commande peut être ponctuelles, zones ou à balayage dans le cas où $\Omega \subset R^2$ ou R^3

1.8.2 Observations d'un système à paramètres distribués

La sortie du système coïncide en général avec l'ensemble des observations, et se traduit souvent de transformation linéaires sur le vecteur d'état, on distingue plusieurs types [3]:

1.8.2.1 Observations réparties

Sur $\Omega \times \Theta$, le vecteur de sortie $y(z, t)$ peut être écrit sous la forme simplifiée suivante :

$$y(z, t) = C(z, t)T(z, t) \quad (1.15)$$

où $C(z)$ caractérise la structure géométrique du système d'observation et $T(z, t)$ représente le vecteur d'état du système [1]

1.8.2.2 Observation ponctuelle

Elle nécessite de prendre quelques points particuliers z_i sur l'espace Ω , sur lesquels, on définit la sortie pour chacun de ces points comme suit

$$Y(x, t) = \int T(z - z_i) \delta(z - z_i) dz = T(z_i, t) \quad (1.16)$$

1.8.2.3 Observation par balayage

Les points d'observation (capteur) sont mobiles dans le domaine admissible d'espace Ω et du temps t .

1.8.2.4 Observation par moyennage spatial

Elle est définie par l'intégrale suivante :

$$Y(t) = \int c(z)x(z, t)dz \quad (1.16)$$

Avec $c(z)$ caractérise la structure géométrique de l'ensemble des capteurs.

1.8.2.5 Observation aux frontières

Les limites sont définies sur l'ensemble Γ ou l'observation est appliquée.

1.9 Résolution des équations aux dérivées partielles

Pour la résolution des équations aux dérivées partielles, on cherche à trouver le système d'équations aux dérivées ordinaires équivalant qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial T(t)}{\partial t} = A T(t) + B u(t) \quad (1.17)$$

$$y(t) = C T(t) \quad (1.18)$$

Même cette forme pose de nombreux problèmes pour l'étude des (EDP) par ce qu'il n'existe pas des méthodes générales pour l'étude de ces équations. Pour la commande d'un système décrit par des (EDP), peut effectuer une transformation du modèle mathématique initial en utilisant une des trois méthodes suivantes :

- par séparation des variables d'espace et de temps : c'est la méthode des fonctions propres, très pratique dans le cas particulier où les calculs des valeurs propres et fonction propre.

- par approximation du modèle initial à l'aide d'une méthode permettant de conserver au mieux les propriétés essentielles du système initial. Cette méthode est très utile lorsqu'il s'agit d'obtenir une simple simulation pour les systèmes considérés.
- par transposition des équations sous la forme d'équation opérationnelles définies dans des espaces fonctionnels abstraits ; cette méthode rarement retenue car elle nécessite la connaissance d'outils mathématique peu classique (théorie de semi-groupe).

1.10 Actionneurs et capteur des systèmes à paramètres distribués

Les échangeurs entre un système réel et son environnement se font par l'intermédiaire des capteurs et des actionneurs de rôle passif. Les capteurs permettent de recueillir des informations sur le système et son évolution.

Quant aux actionneurs, ils permettent d'exciter le système.

Ils peuvent être de nature, de forme et de conception diverses.

1.10.1 Actionneurs :

Les actionneurs que l'on rencontre, dans les systèmes physiques, peuvent être de type :

- Ponctuel fixe, tel un brûleur dans un système de diffusion.
- ponctuel mobile : dont la position varie avec le temps, c'est le cas par exemple d'un système excité par un rayon laser de direction variable
- filament, tel un four chauffé par une résistance électrique.
- Zone, tel est le cas d'un système de diffusion avec une zone de chauffe importante

1.10.2 Capteurs :

On distingue différents types des capteurs. Ainsi, les informations peuvent être recueillies :

- En des points, ce cas peut représenter, par exemple, une information fournie par un thermocouple.
- dans des zones $D_i \subset \Omega$, ce cas correspond à une lecture directe sur une partie D_i .
- Suivant des lignes $L_i \subset \Omega$, ce cas est celui d'une lecture d'un miroir pivotant.

1.11 Définition des phénomènes

On définira les trois phénomènes physiques qui conduisent à des systèmes à paramètres distribués l'occurrence la diffusion, la convection, et la réaction.

1.11.1 Définition de la convection

La convection est un mode de transfert d'énergie qui implique un déplacement de matière dans le milieu, par opposition à la conduction thermique ou diffusion de la matière. La matière est advectée (transportée-conduite, mais ces termes sont en fait impropres) par au moins un fluide.

Ainsi durant la cuisson des pâtes, l'eau se met en mouvement spontanément : les groupes de particules de fluide proches du fond de la casserole sont chauffés, se dilatent donc deviennent moins denses (masse volumique) et montent. Celles de la surface de la casserole sont refroidies par le contact de la surface avec un milieu moins chaud, se contractent donc gagnent en densité et plongent. Le transfert thermique est alors plus efficace que dans le cas de la conduction thermique ou du transfert radiatif, qui sont les deux autres modes de transfert thermique.

Ce phénomène physique très commun se produit dans de nombreux systèmes (casserole, atmosphère, manteau terrestre, étoile, ...) sous des formes diverses et le rencontre peu dans les systèmes faisant intervenir de la thermique échangeurs de chaleur et colonnes de distillation et autres .

1.11.2 Définition de la diffusion

La diffusion désigne la tendance naturelle d'un système à rendre homogènes les concentrations des espèces chimiques en son sein. C'est un phénomène de transport irréversible qui se traduit par la migration d'espèces chimiques dans un milieu. Sous l'effet de l'agitation thermique on observe un déplacement des constituants des zones de forte concentration vers celles de faible concentration.

1.11.3 Définition de la réaction

Une réaction chimique est une transformation de la matière au cours de laquelle les espèces chimiques (atomiques, ioniques ou moléculaires) qui constituent la matière sont modifiées : les espèces qui sont consommées sont appelées réactifs. Les espèces formées au cours de la réaction sont appelées produits (de réaction). Depuis les travaux de Lavoisier, les scientifiques savent que la réaction chimique se fait sans variation mesurable de la masse : « Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme » qui traduit la conservation de la masse.

Les réactions chimiques provoquent un changement de la nature chimique de la matière, sont donc exclues les transformations purement physiques, comme les changements d'état (fusion, solidification, évaporation, ébullition...), l'usure et l'érosion, la rupture. Une réaction peut dégager de l'énergie (en général sous forme de chaleur, mais aussi de la lumière), elle est alors dite « exothermique ». Elle peut nécessiter un apport d'énergie, sous forme de chaleur (donc « produire du froid ») ou de lumière, elle est alors dite « endothermique ». D'une manière générale, une réaction ne peut avoir lieu que si certaines conditions sont réunies (présence de tous les réactifs, conditions de température, de pression, de lumière).

1.12 Système diffusion-convection-réaction

C'est l'un des modèles le plus fréquemment rencontré dans les sciences et l'ingénierie. Il décrit comment la concentration d'un ou de plusieurs substances (par exemple, les polluants) dans un milieu (la rivière) change sous l'influence de trois processus, à savoir, la convection, la diffusion et du réaction.

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles qui peut être résolue en utilisant plusieurs méthodes à savoir les méthodes de résolutions numériques classiques comme la méthode des différences finies ou méthode des éléments finies.

La convection se réfère à la circulation d'une substance dans un milieu (par exemple dans l'air). La diffusion est le mouvement de la substance à partir d'une zone de forte concentration à une zone de faible concentration, résultat de la distribution uniforme de la substance. Une réaction chimique est un processus qui aboutit à l'inter-conversion des substances chimiques.

La convection-diffusion-réaction (CDR) comme modèle est un modèle mathématique décrivant la manière dont la concentration de la substance répartie dans les changements à moyen sous l'influence de ces trois processus.

1.13 Equation d'écoulement (convection-diffusion)

Dans le cas d'un écoulement simple c'est-à-dire sans réaction chimique, L'équation aux dérivées partielles est donné par :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} - c \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \quad (1.19)$$

Où D et C représentent respectivement le coefficient de convection et de diffusion.

La plus part des problèmes de structure ou de transfert de chaleur se retrouvent aussi sous la forme donnée par l'équation (1.19). Toutefois, les grandeurs D et c qui apparaissent dans les équations de ce type de problèmes n'ont pas la même signification physique que dans le cas des problèmes d'écoulement où ils représentent respectivement les coefficients de diffusion et de convection.

1.14 Equations de diffusion-convection-réaction

L'EDP qui combine les trois phénomènes de diffusion, de convection, et de réaction est donné par :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} - c \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} + R(T(z, t)) \quad (1.20)$$

$D \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \Rightarrow$ Diffusion

$c \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \Rightarrow$ Convection

$R(T(z, t)) \Rightarrow$ Réaction

D représente le coefficient de diffusion, c est le coefficient de convection

1.15 Conclusion

Dans ce premier chapitre, quelques notions de base sur les systèmes à paramètres distribués ont été présentées. Ces dernières ont été limitées à la description mathématique, aux différentes commandes et observation ainsi qu'aux différents types de condition aux limites.

Pour étudier le comportement d'un système à paramètres distribués, différentes méthodes de transformation existent ces dernières permettent d'approximer le modèle initial par un système à paramètres localisés et de conserver au mieux ses propriétés essentielles.

Une des méthodes les plus utilisées particulièrement pour la simulation est la méthode des lignes. Cette dernière fera l'objectif du chapitre suivant.

CHAPITRE 2

SIMULATION AVEC LA METHODE DES LIGNES

2.1 Introduction

La plupart des phénomènes naturels sont régis par des lois physiques. Ces lois permettent de relier les grandeurs physique qui décrivent ces phénomènes, et une résolution de ces équations différentielles devient nécessaire afin de comprendre et d'expliquer ces phénomènes physiques. Les modèles mathématiques des systèmes physiques sont très avantageux car ils permettent de faire l'analyse du comportement des procédés sans avoir à manipuler les grandeurs physiques qui les décrivent

La résolution des EDP fait appel à plusieurs méthodes, la plus utilisée c'est la méthode des différences finies.

La méthode des différences finies est une procédure semi-analytique, est bien connue par les experts en matière de techniques de résolution d'équations aux dérivées partielles. Les domaines d'applications de la méthode ont augmenté considérablement ces dernières années.

Cette méthode a été initialement développée par des mathématiciens et utilisée, généralement, pour la résolution des problèmes de la physique.

2.2 Définition

La méthode des lignes basée sur les différences finies est une technique bien établie numérique pour l'analyse des lignes de transmission, les structures de guides d'ondes, et les problèmes de diffusion. L'approche des différences finies est basée sur l'utilisation des séries de Taylor pour obtenir des approximations par différences finies des dérivées partielles spatiales. Ces approximations peuvent être arrières, centrées ou avants selon la position des points utilisés pour réaliser l'approximation. La méthode des lignes est devenue l'un des outils standard pour résoudre les problèmes pratiques.

2.3 Méthodes d'approximation aux différences finies

Il existe plusieurs méthodes d'approximation aux différences finies (méthode de discrétisation).

Ces méthodes permettent d'approximer le modèle initial, tout en conservant au mieux les propriétés essentielles du système initial

En distingue généralement deux types discrétisation :

- Discrétisation totale
- Semi-discrétisation

➤ **Discrétisation totale**

Dans cette approximation les domaines d'espace et de temps sont tous les deux décomposés, on obtient dans ce cas une solution très précis du système initial.

➤ **Semi-discrétisation (méthode des lignes)**

Pour cette approche l'un des domaines d'espace ou de temps est discrétisé. On obtient un système d'équation différentielle ordinaire d'ordre d'autant plus élevé que la discrétisation plus fine.

2.4 Origine et approche de la méthode des lignes

La méthode des lignes se rapporte le plus souvent à la construction ou à l'analyse des méthodes numériques pour des équations aux dérivées partielles. Son principe est basée sur la discrétisation des dérivés spatiales seulement et on laisse la variable du temps continue. Ceci mène à un système d'équations aux dérivées ordinaires auxquelles une méthode numérique pour des équations aux dérivées ordinaires peut être appliquée [6].

Cependant, une importante application des différences finies est la résolution numérique des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles ; l'idée est de remplacer les dérivées apparaissant dans l'équation par des différences finies qui les approximent.

Les diverses méthodes qui en résultent sont appelées méthodes des différences finies [7].

On note aussi que dans certains cas, on ne connaît pas de "formule" qui permettrait de calculer directement la valeur de la solution en un point quelconque du domaine Ω .

Le problème se pose donc de trouver un moyen d'approcher les valeurs de la solution d'aussi près qu'on veut.

Une méthode pour y parvenir est la méthode des différences finies, que nous allons décrire dans les sections suivantes.

2.5 Pratique de la méthode des différences finies

Dans le domaine de l'analyse numérique, on peut être amené à rechercher la solution d'une équation aux dérivées partielles. Parmi les méthodes de résolutions couramment pratiquées, la méthode des différences finies est la plus facile d'accès, puisqu'elle repose sur deux notions : la discrétisation des opérateurs de dérivation par différences finies d'une part, et la convergence du schéma numérique ainsi obtenue d'autre part.

La méthode des différences finies fournit une approximation de la solution en un nombre fini de points du domaine Ω . Pour cela, on commence par établir un maillage uniforme de l'espace, de même pas Δz sur Ω (il est parfois utile de considérer des maillages non uniformes).

2.6 Contexte général de la méthode des lignes

La méthode des lignes est considérée comme une méthode des différences finies spéciale mais plus pertinente en ce qui concerne l'exactitude et le temps de calcul que la méthode des différences finies régulière. Elle consiste fondamentalement à la discrétisation d'une équation donnée dans un ou deux sens tout en utilisant la solution analytique dans le sens restant.

2.6.1 Propriétés et utilisations de la méthode des lignes

La méthode des lignes a les propriétés suivantes qui justifient son utilisation [8] :

- ***Efficacité de calcul :***

Le caractère semi-analytique de la formulation mène à un algorithme simple et compact, qui fournit des exacts avec moins d'effort de calcul que d'autres techniques.

- ***Stabilité numérique :***

En séparant la discrétisation du temps et l'espace, il est facile de déterminer la stabilité et la convergence pour un large éventail de problèmes.

- ***Effort de programmation réduit :***

En se servant des solveurs de problèmes d'EDO de pointe, l'effort de programmation peut être considérablement réduit.

- ***Temps de calcul réduit :***

Puisque seulement une petite quantité de lignes de discrétisation est nécessaire dans le calcul, il n'y a aucune nécessité de résoudre un grand système d'équation ; par conséquent la durée de calcul est petite.

2.7 Application de la méthode des lignes

Pour appliquer la méthode des lignes, on a les cinq règles à suivre [9]:

- Division du domaine des solutions en couches.
- Discrétisation de l'équation dans un sens du même rang.
- Transformation pour obtenir des équations ordinaires découplées.
- Transformation et introduction des conditions aux limites.
- Résolution des équations.

2.8 Principe de la méthode des lignes

2.8.1 Bases de la méthode des lignes

L'idée de base de la méthode des lignes est de remplacer les dérivées spatiales dans l'EDP par des approximations algébriques.

Une fois ceci est fait, les dérivées spatiales ne sont expressément plus indiquées en termes de variables spatiales indépendantes mais seulement en termes de la variable temporelle. En d'autres termes, avec seulement une variable indépendante restante, nous avons un système d'équation aux dérivées ordinaires qui approchent ou approximent l'EDP initiale.

L'enjeu est alors de préparer le système rapprochant les équations aux dérivées partielles. Une fois que ceci est fait, nous pouvons appliquer n'importe quel algorithme d'intégration numérique pour que les équations aux dérivées ordinaires, munies des conditions initiales calculent une solution numérique approximative pour l'EDP

2.9 Exemple illustratif

Considérons l'équation de la chaleur suivante :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \quad (2.1)$$

$$z \in [0, 1]$$

avec les condition aux limites :

$$\begin{cases} T_0(t) = T(0, t) = 25 \\ T_l(t) = T(l, t) = 50 \end{cases} \quad (2.2)$$

Et les conditions initiales :

$$T(0) = T_0(t) = 0 \quad (2.3)$$

Un tel problème est appelé problème aux limites car la fonction inconnue (2.1) doit satisfaire les conditions aux limites posées à la frontière de l'intervalle sur lequel l'équation différentielle doit être satisfaite.

Décomposons le domaine d'espace [0,1] en N intervalles égaux correspondant à un pas de discrétisation $\Delta z = \frac{1}{N}$

➤ **Discrétisation de la première dérivée**

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} = \frac{T_{i+1}(t) - T_{i-1}(t)}{2\Delta z} \tag{2.4}$$

➤ **Discrétisation de la deuxième dérivée**

$$\frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} = \frac{T_{i+1}(t) - 2T_i(t) + T_{i-1}(t)}{\Delta z^2} \tag{2.5}$$

D'où l'équation différentielle :

$$\dot{T}_i(t) = \frac{1}{(\Delta z)^2} [T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}] \tag{2.6}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots \dots \dots N - 1$$

On aura :

$$\dot{T}_1(t) = \frac{T_2 - 2T_1 + T_0}{\Delta Z^2}$$

$$\dot{T}_2(t) = \frac{T_3 - 2T_2 + T_1}{\Delta Z^2}$$

$$\dot{T}_3(t) = \frac{T_4 - 2T_3 + T_2}{\Delta Z^2}$$

⋮

⋮

$$\dot{T}_{N-1}(t) = \frac{T_N - 2T_{N-1} + T_{N-2}}{\Delta Z^2}$$

$$\dot{T}_N(t) = \frac{T_{N+1} - 2T_N + T_{N-1}}{\Delta Z^2}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \\ \vdots \\ \dot{T}_{N-1} \\ \dot{T}_N \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta Z^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} T + \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta Z^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} T_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{\Delta Z^2} \end{bmatrix} T_l$$

La matrice dynamique obtenue par ce schéma de discrétisation est tri diagonale symétrique.

Maintenant en considérant les conditions initiales, on peut résoudre par une méthode d'intégrations aux dérivées ordinaires.

2.10 Simulation du système par la méthode des lignes

La simulation numérique permet d'étudier des différences entre des résultats théoriques et numériques. Dans notre cas on traite des systèmes d'équations aux dérivés partiels.

Pour la simulation, on considère un nombre de points de discrétisation $N=10$, on obtient la figure suivante (2.1)

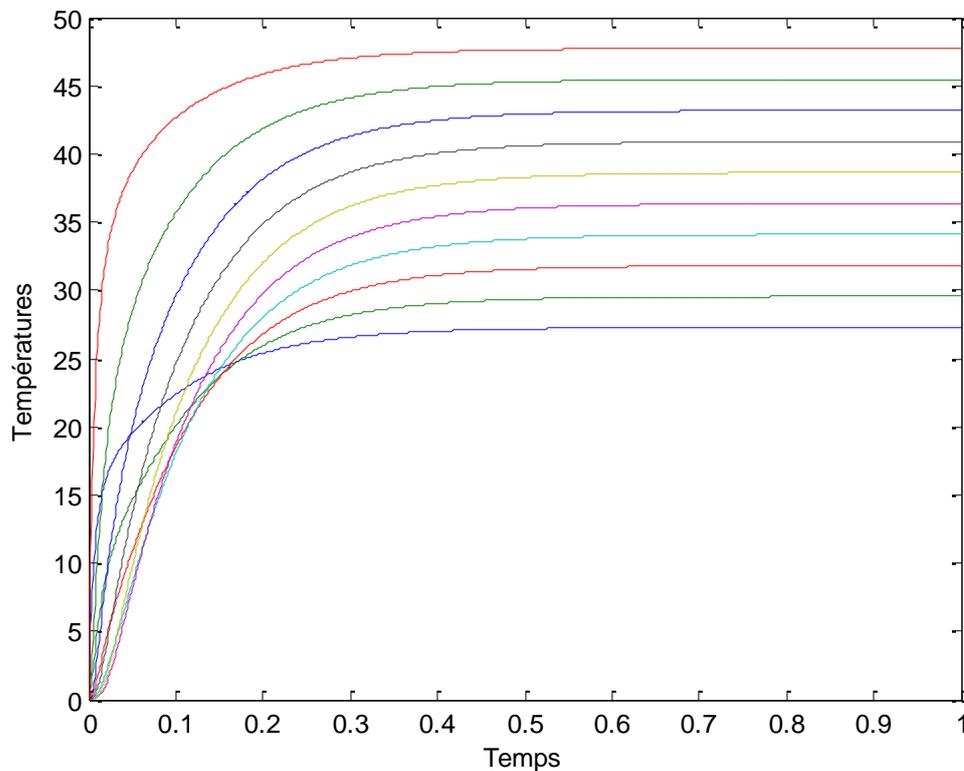


Figure 2.1. Evolution temporelle de la température aux différentes positions.

Les résultats obtenus par la simulation de l'évolution temporelle de la température aux différents points sont apériodiques et le système est stable

2.11 Synthèse des caractéristiques de la méthode des lignes

Pour l'analyser des systèmes à paramètres distribués de type diffusion-convection-réaction on utilise la méthode des lignes pour faire la résolution classique.

c'est aussi une méthode simple à mettre en œuvre, elle n'échappe pas aux plusieurs problèmes reliés à son utilisation dans la résolution des EDP.

Ces cas problématiques sont surtout rencontrés lors de l'analyse des écoulements dominés par les effets de convection et dans la solution présente des variations brusques sur les frontières.

Dans ces conditions, la solution numérique obtenue présente des oscillations qui se manifestent plus précisément dans les voisinages où la solution présente des discontinuités.

Ces oscillations n'ont aucune signification physique car elles ne sont pas observées dans la solution exacte du problème. Elles sont introduites par la méthode numérique utilisée (méthode des lignes) ; donc d'origine purement numériques.

Cependant d'autres études ont aussi montré que, dans notre cas (analyse du problème de diffusion-convection-réaction), l'importance de l'effet du terme de réaction peut être une autre cause des oscillations numériques dans la solution d'approximation du problème.

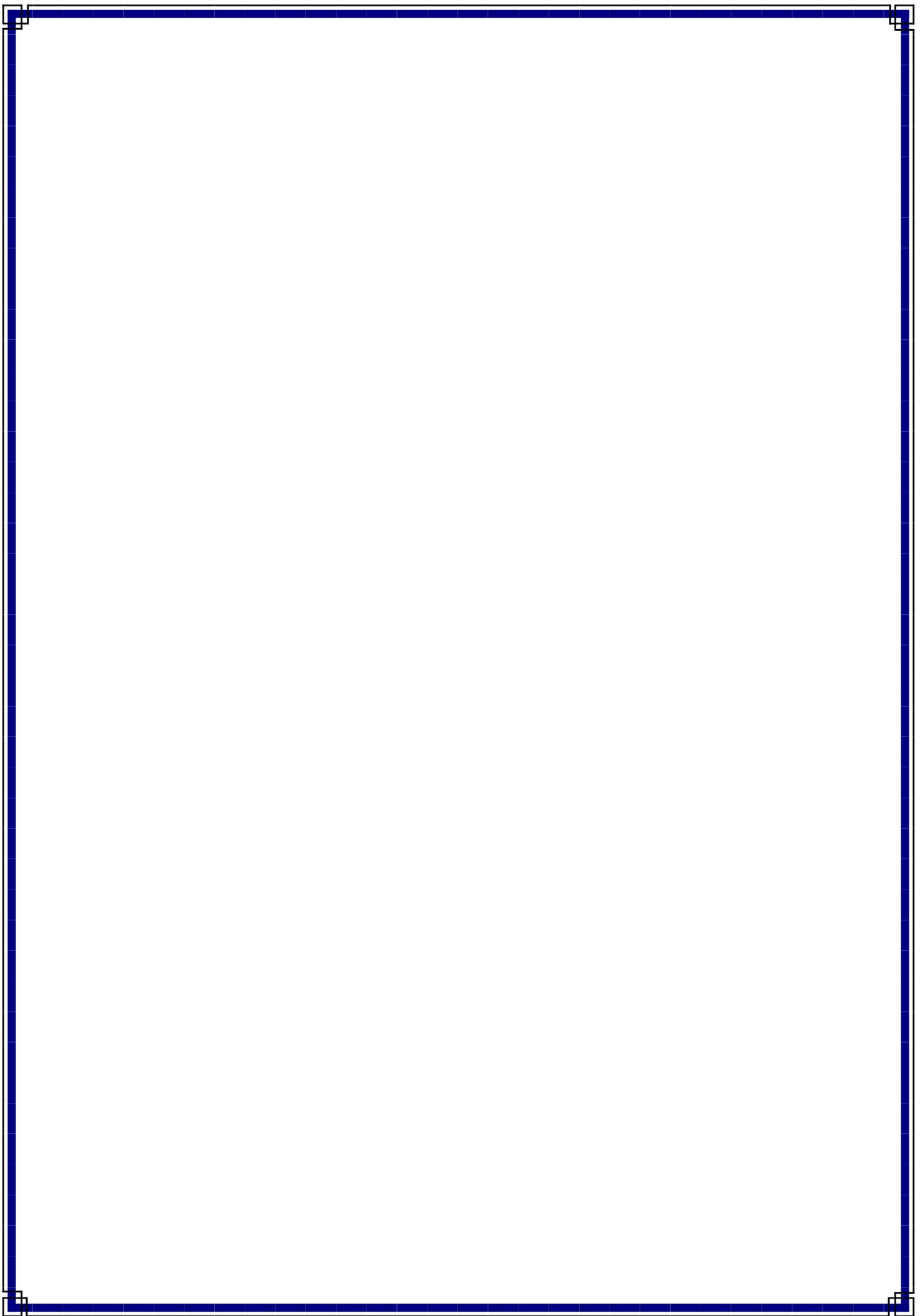
Tout comme dans le cas des problèmes d'écoulement dominés par les effets de convection (système fortement convectif), ces oscillations apparaissent dans la solution numérique aux voisinages des discontinuités même si le terme de convection est nul.

Par ailleurs cette méthode dégrade la caractéristique physique de la solution exacte du problème [5].

2.12 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté des généralités, et des notions de bases de la méthode des différences finies. Cette dernière est très utilisée pour traiter des problèmes de la physique.

Le principe de la méthode des lignes consiste à semi- discrétiser les EDP qui représentent un système de dimension infinie. Cette semi discrétisation conduit à des équations différentielles ordinaires qui décrivent un système de dimension qui peut être élevée mais reste finie.



Chapitre 3 Simulation d'un échangeur de chaleur à Contre-courant par la méthode des lignes

3.1 Introduction

Généralement, l'échangeur de chaleur fait partie intégrante d'une installation thermique, qui peut être exposée à un nombre indéterminé de transitions non planifiées, tels que des démarrages et des arrêts dans un certain temps ou à des coupures électriques provoquant des changements de températures et de débits d'admission. Ces transitions induisent des effets indésirables et réduisent les performances de l'échangeur de chaleur.

Ainsi, il est primordial de savoir et d'être capable de prédire la réponse transitoire ou les caractéristiques dynamiques d'un échangeur de chaleur en plus de ces performances en état stationnaire dans l'ordre de fournir un système de commande adéquat.

3.2 Définition

Un échangeur de chaleur est un système qui permet d'échanger la chaleur entre deux fluides ou plus. Dans un échangeur thermique, le fluide chaud et le fluide froid sont séparés par une paroi bien adaptée et par principe la transmission de la chaleur se fait du fluide chaud vers le fluide froid [10].

3.3 Critères de classement des échangeurs

Il existe plusieurs critères de classement des différents types d'échangeurs.

3.3.1 Type de contact

➤ *Échangeurs à contact direct*

Le type le plus simple comprend une canalisation dans lequel les deux fluides sont directement mélangés et atteignent la même température finale.

➤ *Échangeurs à contact indirect*

Les deux fluides s'écoulent dans des espaces séparés par une paroi.

Chapitre 3 Simulation d'un échangeur de chaleur à Contre-courant par la méthode des lignes

3.3.2 Classement suivant les types d'échange

Pour classer les échangeurs de chaleur on considère les deux types d'échangeur suivant [10] :

➤ **Échangeur sans changement de phase :**

Les échangeurs de chaleur sans changement de phase correspondent aux échangeurs dans lesquels l'un des fluides se refroidit pour réchauffer le deuxième fluide sans qu'il y ait changement de phase. Les températures des fluides sont donc variables tout le long de l'échangeur.

➤ **Échangeur avec changement de phase**

Les échangeurs de chaleur avec changement de phase sont caractérisés par les trois cas suivants :

- L'un des fluides se condense alors que l'autre se vaporise : (les machines frigorifiques).
- Le fluide secondaire se vaporise en recevant de la chaleur du fluide primaire, lequel ne subit pas de changement d'état. Ils sont appelés évaporateurs.
- Le fluide primaire se condense en cédant sa chaleur latente au fluide secondaire plus froid, lequel ne subit pas de transformation d'état.

3.4 Différents modes de transfert de chaleur

En distingue trois modes de transfert de chaleur : la convection, la conduction et le rayonnement.

➤ **convection :**

Se produit lorsqu'un liquide ou un gaz est en contact avec une source plus chaude ; il se produit alors un mouvement d'ensemble des molécules de fluide transportant la chaleur vers les zones plus froides

Chapitre 3 Simulation d'un échangeur de chaleur à Contre-courant par la méthode des lignes

➤ **conduction:**

C'est un contact physique entre les corps ou les parties des corps qui échangent de la chaleur

➤ **rayonnement :**

Ne nécessite ni contact ni présence d'aucune matière entre les deux corps.

3.5 Modélisation du fonctionnement d'un échangeur à double tube

3.5.1 Processus

Ces échangeurs de chaleur, sont constitués de deux tubes coaxiaux comme les montres la figure (3.1), les deux fluides circulent sans arrêt, leurs températures varient d'un point à un autre. Sur toute la longueur de l'échangeur de chaleur, un des deux fluides circule à l'intérieur du tube central, l'autre dans l'enveloppe.

Un fluide (x) circule dans la tuyauterie coaxiale avec un débit (D_x) qui peut servir au réchauffage d'un fluide (y) circulant dans le tube interne de l'échangeur avec un débit (D_y). La température du fluide est fonction, à la fois, de la position spatiale et du temps sur toute la longueur du tube [12].

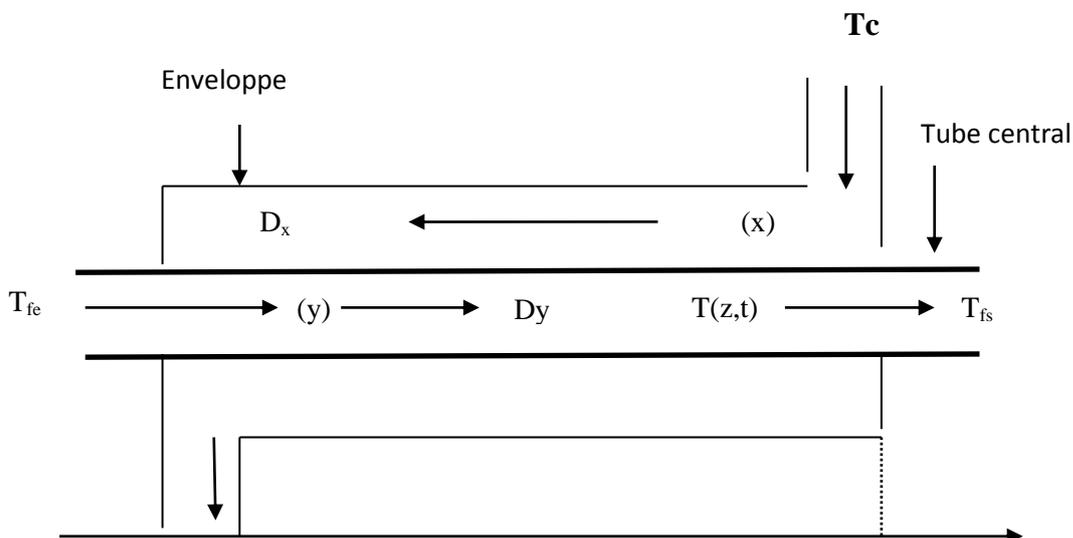


Figure3. 1: L'échangeur de chaleur à double tube à contre courants

Chapitre 3 Simulation d'un échangeur de chaleur à Contre-courant par la méthode des lignes

Le fluide (y) est en fonction du temps 't' et de l'espace 'z' considérée.

Elle est sous la forme suivante :

$$f(z, t) = c_p (T_f(z, t) - T_c(z, t)) \quad (3.1) z \in [0, L]$$

Avec :

C_p : est la capacité calorifique du fluide (Y), supposée constante.

3.6 Définition et hypothèses

On désire développer un modèle théorique qui va décrire la variation de la température du fluide du couple temps-position.

Pour se faire, on considère des changements qui interviennent durant des intervalles de temps infiniment petits $[t, t+\Delta t]$ dans l'espace contenu dans une section d'anneau élémentaire, comme il est montré par la Figure (3.2), dont les frontières sont $[z, z+\Delta z]$.

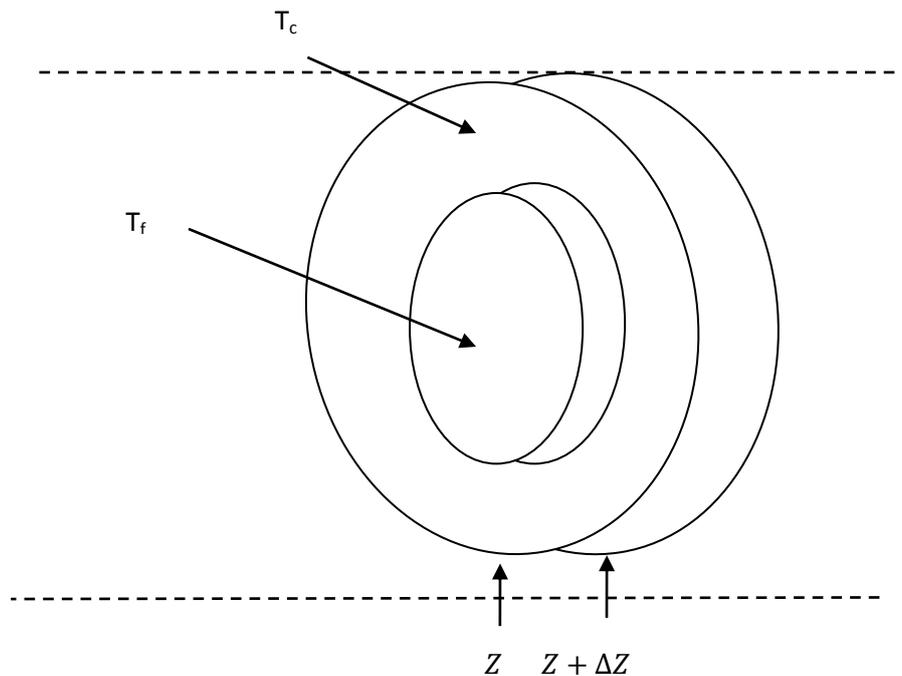


Figure3.2 : Un élément de l'échangeur de chaleur.

Chapitre 3 Simulation d'un échangeur de chaleur à Contre-courant par la méthode des lignes

Les hypothèses suivantes sont utilisées conjointement avec cette description microscopique du processus.

- Le fluide de l'élément est à température uniforme T , mais la température aux frontières de l'élément est $T|_z$ et $T|_{z+\Delta z}$.
- la masse volumique ρ_y et le débit D_y sont supposés constants, même chose pour la section S de l'échangeur qui est supposée constante.
- Les dynamiques de l'échangeur et du tube sont supposées assez petites pour être négligeables ; par conséquent, quel que soit l'accumulation d'énergie dans l'élément de l'anneau, elle est due entièrement au fluide l'occupant, et non pas aux parois de l'échangeur thermique [12].

Avec :

T_c : Température du fluide chaud

T_f : Température du fluide froid

3.7 Equilibre énergétique (Théorème d'Euler)

Le bilan d'énergie interne effectué sur une tranche d'épaisseur Δ_z et de section S , s'exprime de la manière générale selon :

Accumulation d'énergie interne = énergie interne entrante par convection - énergie interne sortante par convection + puissances thermique échangés.

- **Modélisation de l'équation pour fluide chaud :**

La quantité d'énergie accumulée sur l'intervalle du temps $[t, t+\Delta t]$ est :

$$\rho_c S \Delta_z h|_{[t, t+\Delta t]} = \rho_c S \Delta_z c_p (T|_{t+\Delta t} - T|_t) \quad (3.2)$$

Chapitre 3 Simulation d'un échangeur de chaleur à Contre-courant par la méthode des lignes

La quantité de l'énergie entrante à z est :

$$D_c \rho_c \Delta t h|_z = D_c \rho_c \Delta t c_p (T_f - T_c)|_z \quad (3.3)$$

La quantité de l'énergie sortante de z+Δz est :

$$D_c \rho_c \Delta t h|_{z+\Delta z} = D_c \rho_c \Delta t c_p (T_f - T_c)|_{z+\Delta z} \quad (3.4)$$

Avec :

$h|_z$: Enthalpie du fluide chaud entrant.

$h|_{z+\Delta z}$: Enthalpie du fluide chaud sortant.

La quantité de l'énergie apportée au fluide chaud par le fluide froid dans l'intervalle de temps [t, t+Δt] est :

$$\Delta t \varphi Q = \Delta t K S_h (T_c - T_f) \quad (3.5)$$

Où :

φQ : Quantité de chaleur apportée au fluide chaud par le fluide froid

T_c : la température du fluide chaud.

T_f : la température du fluide froid.

K : Coefficient global de transfert de chaleur.

S_h : La surface totale de transfert thermique dans cet anneau élémentaire. Elle

égale à :

$$S_h = D \pi \Delta z = K_s \Delta z \quad (3.6)$$

Pour qu'il y ait équilibre énergétique il faut que :

$$\begin{aligned} & \rho_c S \Delta z c_p (T|_{t+\Delta t} - T|_t) \\ &= D_c \rho_c \Delta t c_p (T_f - T_c)|_z - D_c \rho_c \Delta t c_p (T_f - T_c)|_{z+\Delta z} \\ &+ K K_s \Delta z \Delta t (T_c - T_f) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Chapitre 3 Simulation d'un échangeur de chaleur à Contre-courant par la méthode des lignes

En divisant par $\rho_c S \Delta z c_p \Delta t$

On obtient :

$$\frac{(T|_{t+\Delta t} + T|_t)}{\Delta t} = -\frac{D_c}{S} \frac{(T|_{z+\Delta z} - T|_z)}{\Delta z} + \frac{K K_s}{\rho_c S c_p} (T_c - T_f) \quad (3.8)$$

En considérant les limites Δt et Δz tendant vers zéro, et en appliquant la dérivée partielle sur l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = -v_c \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} + a_c [T_f(z, t) - T_c(z, t)] \quad (3.9)$$

$z \in [0, L]$

Où :

$$a_c = \frac{K K_s}{\rho_c S c_p} \quad (3.10)$$

$v_c = \frac{D_c}{S}$ (vitesse du fluide chaud qui est constante)

C'est une équation aux dérivées partielle linéaire hyperbolique de premier ordre [12] .

➤ Modélisation de l'équation pour fluide froid :

On suivra la même procédure appliqué au fluide chaud ce qui conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = +v_f \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} + a_f [T_c(z, t) - T_f(z, t)] \quad z \in [0, L] \quad (3.11)$$

Chapitre 3 Simulation d'un échangeur de chaleur à Contre-courant par la méthode des lignes

Où :

$$a_f = \frac{K K_s}{\rho_f S c_p} \quad (3.12)$$

$$v_f = \frac{D_c}{S} \quad (\text{vitesse du fluide froid supposé aussi constante})$$

C'est une équation aux dérivées partielle linéaire hyperbolique de premier ordre [13].

3.8 Principaux types d'échangeurs à fluide

Les deux fluides peuvent circuler dans le même sens ou en sens contraires. Selon le sens de circulation des deux fluides dans l'échangeur .on distingue deux types [11] :

3.8.1 Échangeurs à courants parallèles (co-courants)

Dans ce type, les deux fluides s'écoulent en même temps, parallèlement et dans le même sens. Désignons par T_c la température de fluide chauffant et par T_f la température de fluide chauffé. Les indices « e » et « s » se rapportent respectivement à l'entrée et la sortie des fluides dans l'échangeur.

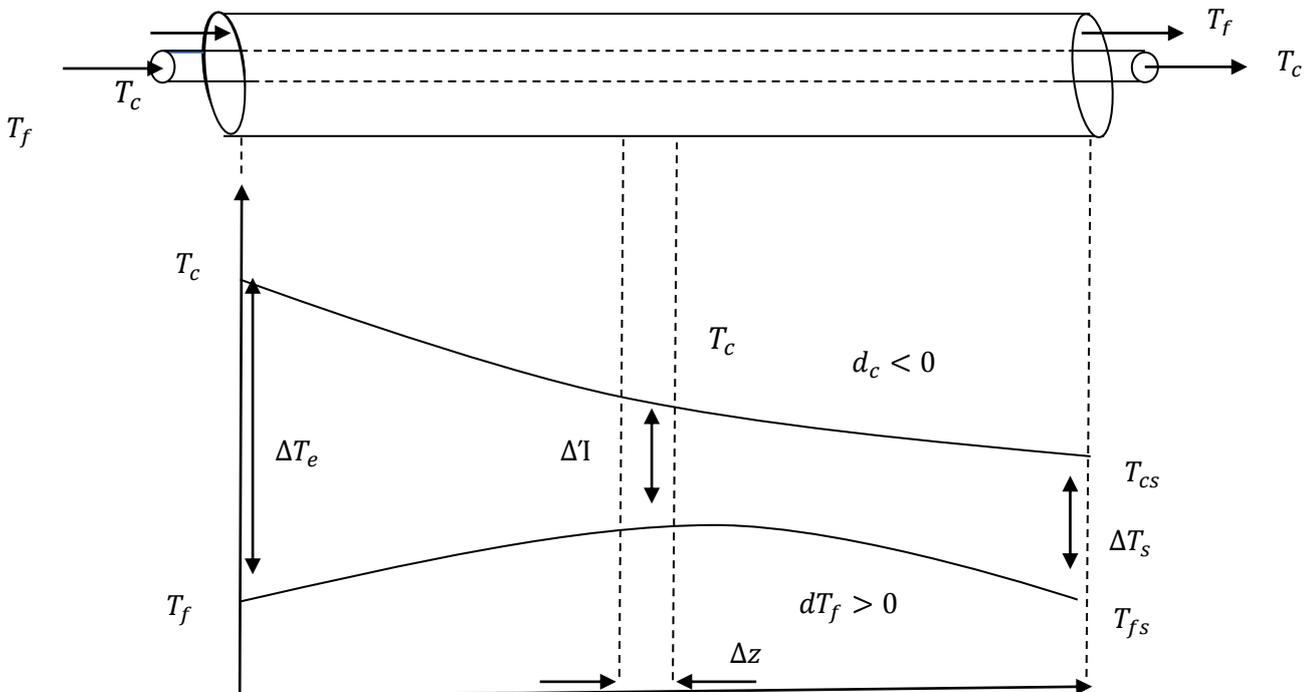


Figure 3.3 Cas d'un échangeur à courant parallèle.

Chapitre 3 Simulation d'un échangeur de chaleur à Contre-courant par la méthode des lignes

3.8.2 Échangeurs à contre-courant

Pour ces échangeurs de chaleur, les deux fluides s'écoulent en sens inverse le long de la surface de chauffe : le fluide chauffant entre en contact avec la surface là où le fluide chauffé abandonne celle-ci et vice versa.

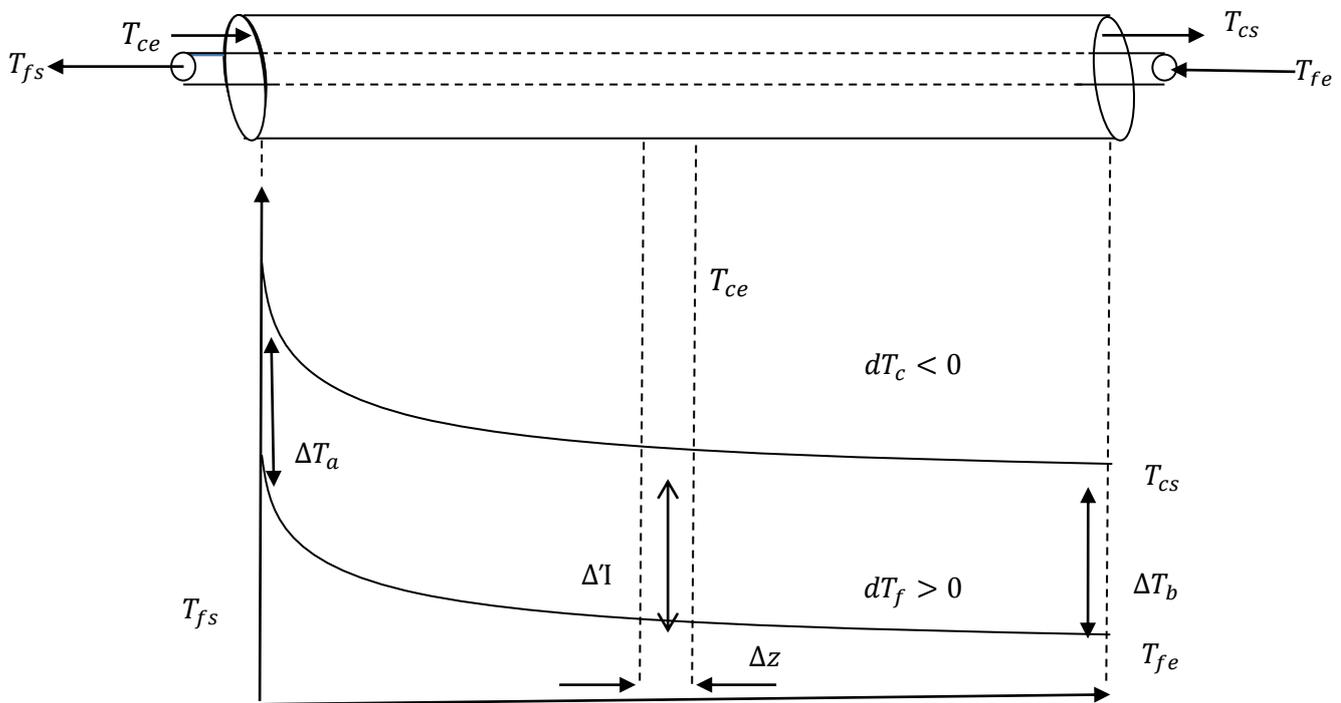


Figure 3.4 Cas d'un échangeur à contre- courant.

Remarque

Dans un échangeur de chaleur à contre- courant, la température de sortie du fluide chauffé peut être supérieure à la température du fluide chauffant, ce qui n'est pas le cas dans un échangeur à courant parallèle.

Chapitre 3 Simulation d'un échangeur de chaleur à Contre-courant par la méthode des lignes

3.9 Discrétisation spatiale

Considérons les deux équations d'un échangeur de chaleur suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial T_c}{\partial t} = -v_c \frac{\partial T_c}{\partial z} + \alpha_c (T_f - T_c) \\ \frac{\partial T_f}{\partial t} = v_f \frac{\partial T_f}{\partial z} + \alpha_f (T_c - T_f) \end{cases} \quad (3.13)$$

Avec

$$|v_c| = |v_f| = 1$$

$$\alpha_1 = 2$$

$$\alpha_2 = 1$$

Avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} T_c(0, t) = 25 \\ T_f(l, t) = 50 \end{cases} \quad (3.14)$$

Et les conditions initiales

$$T_c(z, 0) = T_f(z, 0) = 25 \quad (3.15)$$

➤ La discrétisation de la première dérivée

$$\begin{cases} \dot{T}_{ci} = -v_c \left(\frac{T_{ci} - T_{c_{i-1}}}{\Delta z} \right) + \alpha_c (T_{f_{i+1}} - T_{ci}) \\ \dot{T}_{fi} = v_f \left(\frac{T_{f_{i+1}} - T_{fi}}{\Delta z} \right) + \alpha_f (T_{c_{i-1}} - T_{fi}) \end{cases} \quad (3.16)$$

Chapitre 3 Simulation d'un échangeur de chaleur à Contre-courant par la méthode des lignes

- Pour l'équation de la température chaude :

$$\dot{T}_{c_1} = -v_c \left(\frac{T_{c_1} - T_{c_0}}{\Delta Z} \right) + \alpha_c (T_{f_2} - T_{c_1})$$

$$\dot{T}_{c_2} = -v_c \left(\frac{T_{c_2} - T_{c_1}}{\Delta Z} \right) + \alpha_c (T_{f_3} - T_{c_2})$$

$$\dot{T}_{c_3} = -v_c \left(\frac{T_{c_3} - T_{c_2}}{\Delta Z} \right) + \alpha_c (T_{f_4} - T_{c_3})$$

⋮

⋮

⋮

$$\dot{T}_{c_{N-1}} = -v_c \left(\frac{T_{c_{N-1}} - T_{c_{N-2}}}{\Delta Z} \right) + \alpha_c (T_{f_N} - T_{c_{N-1}})$$

$$\dot{T}_{c_N} = -v_c \left(\frac{T_{c_N} - T_{c_{N-1}}}{\Delta Z} \right) + \alpha_c (T_{f_{N+1}} - T_{c_N})$$

- Pour l'équation de la température froide :

$$\dot{T}_{f_1} = v_f \left(\frac{T_{f_2} - T_{f_1}}{\Delta Z} \right) + \alpha_f (T_{c_0} - T_{f_1})$$

$$\dot{T}_{f_2} = v_f \left(\frac{T_{f_3} - T_{f_2}}{\Delta Z} \right) + \alpha_f (T_{c_1} - T_{f_2})$$

$$\dot{T}_{f_3} = v_f \left(\frac{T_{f_4} - T_{f_3}}{\Delta Z} \right) + \alpha_f (T_{c_2} - T_{f_3})$$

⋮

⋮

⋮

$$\dot{T}_{f_{N-1}} = v_f \left(\frac{T_{f_N} - T_{f_{N-1}}}{\Delta Z} \right) + \alpha_f (T_{c_{N-2}} - T_{f_{N-1}})$$

$$\dot{T}_{f_N} = v_f \left(\frac{T_{f_{N+1}} - T_{f_N}}{\Delta Z} \right) + \alpha_f (T_{c_{N-1}} - T_{f_N})$$

Chapitre 3 Simulation d'un échangeur de chaleur à Contre-courant par la méthode des lignes

Soit sous forme matricielle :

$$a1 = \begin{bmatrix} -\left(\frac{v_c}{\Delta z} + \alpha_c\right) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \left(\frac{v_c}{\Delta z}\right) & -\left(\frac{v_c}{\Delta z} + \alpha_c\right) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \left(\frac{v_c}{\Delta z}\right) & -\left(\frac{v_c}{\Delta z} + \alpha_c\right) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \left(\frac{v_c}{\Delta z}\right) & -\left(\frac{v_c}{\Delta z} + \alpha_c\right) \end{bmatrix}$$

$$a2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \alpha_c \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_c & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_c & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_f & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_f & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_f & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_f & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Chapitre 3 Simulation d'un échangeur de chaleur à Contre-courant par la méthode des lignes

$$a_4 = \begin{bmatrix} -\left(\frac{v_f}{\Delta Z} + \alpha_f\right) & \left(\frac{v_f}{\Delta Z}\right) & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{v_f}{\Delta Z} + \alpha_f\right) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \left(\frac{v_f}{\Delta Z}\right) & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\left(\frac{v_f}{\Delta Z} + \alpha_f\right) & \left(\frac{v_f}{\Delta Z}\right) \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -\left(\frac{v_f}{\Delta Z} + \alpha_f\right) \end{bmatrix}$$

$$\dot{T} = \begin{bmatrix} \dot{T}_{c_1} \\ \dot{T}_{c_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{T}_{c_{N-1}} \\ \dot{T}_{c_N} \\ \dot{T}_{f_1} \\ \dot{T}_{f_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{T}_{f_{N-1}} \\ \dot{T}_{f_N} \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} T_{c_1} \\ T_{c_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{c_{N-1}} \\ T_{c_N} \\ T_{f_1} \\ T_{f_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{f_{N-1}} \\ T_{f_N} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{v_c}{\Delta Z} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_f \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_c \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{v_f}{\Delta Z} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

Le système est sous la forme suivante :

$$\dot{T} = AT + BT_0 + ET_1 \tag{3.16}$$

Chapitre 3 Simulation d'un échangeur de chaleur à Contre-courant par la méthode des lignes

- Pour simuler le comportement dynamique d'un échangeur de chaleur en boucle ouverte on a appliqué :

Conditions aux limites

$$T_0 = 25^\circ \text{ C}$$

Et

$$T_1 = 50^\circ \text{ C}$$

Condition initiale

$$T_0 = 25^\circ \text{ C}$$

l'évolution de la température est donnée par la figure (3.1)

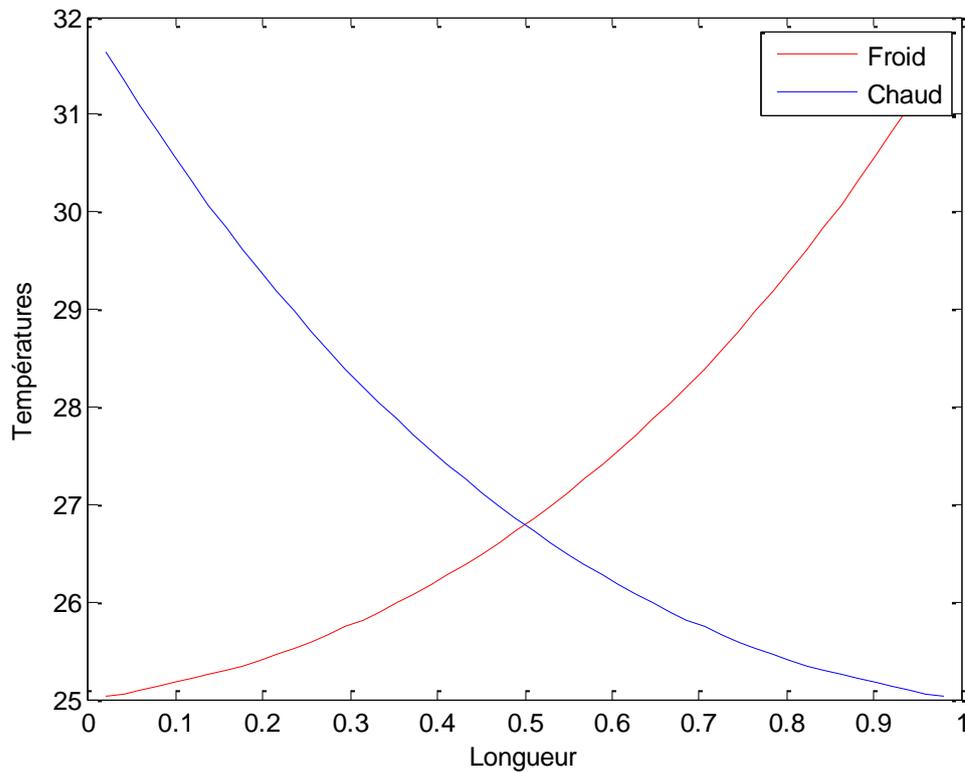


Figure 3.5 Profils des températures à l'instant $t = 1$ s.

Chapitre 3 Simulation d'un échangeur de chaleur à Contre-courant par la méthode des lignes

3.10 Interprétation du résultat

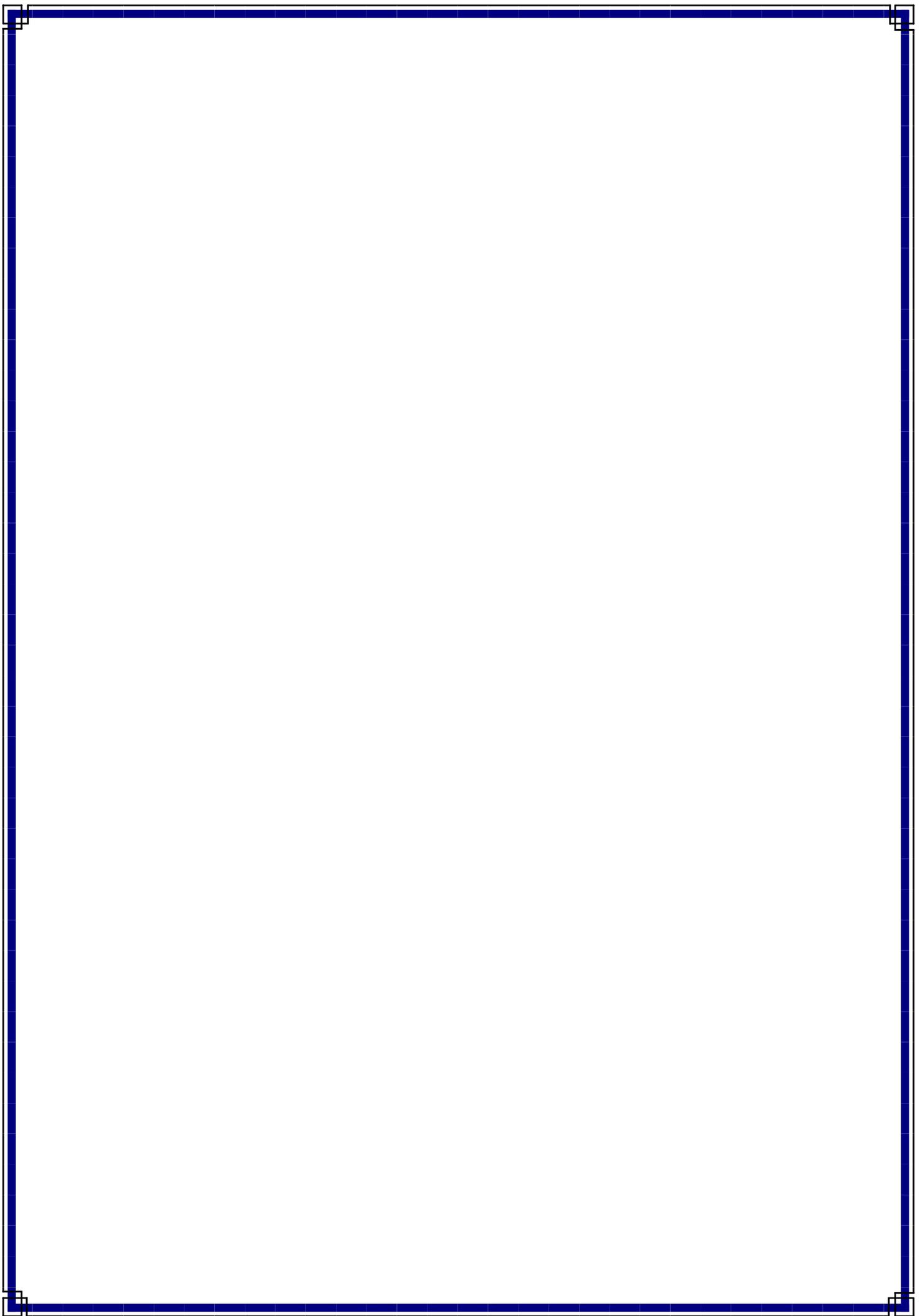
Après avoir approximer avec la méthode des différents finis les deux équations de l'échangeur de chaleur on a obtenu un système d'équations aux dérivées ordinaires (3.16) simulé avec un solveur des équations ordinaires.

Le résultat de la simulation montre l'évolution temporelle de la température de fluide chaud qui diminue contrairement à celle de fluide froid qui augmente par apport au temps (un gain de température pour le fluide froid et une perte pour le fluide chaud)

3.11 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté quelques notions relatives aux échangeurs de chaleurs. On a limité notre étude à la modélisation d'un échangeur de chaleur à double tube à contre-courant, en écrivant les différentes équations du bilan énergétique.

Ce modèle a été approximé est simuler par la méthode des lignes.



4.1 Introduction

Après avoir présenté, globalement les systèmes à paramètres distribués et les échangeur de chaleur comme exemple de ces systèmes, on s'intéresse dans ce chapitre à la synthèse d'une loi de commande géométrique pour l'échangeur de chaleur à contre-courant, décrit d'une manière approfondie et modélisé, dans le chapitre précédent, par deux équations aux dérivées partielles hyperbolique de premier ordre. Dans le but de mettre en évidence les performances de cette loi de commande, des tests de simulation sont effectués et concernent principalement les problèmes de poursuite.

4.2 Systèmes d'équations et dérivées partielles hyperboliques de premier ordre

4.2.1 Préliminaire

Considérant des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles quasi-linéaire de premier ordre dans un espace à une seule dimension avec la représentation interne suivante [13] :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = A(x) \frac{\partial x}{\partial z} + f(x) + g(x)u \quad (4.1)$$

$$y = h(x)$$

$$S = p(x)$$

Avec la condition aux limites suivantes :

$$R(t) = C_1 x(a, t) + C_2 x(b, t) \quad (4.2)$$

Et la condition initiale :

$$x(z, 0) = x_0(z) \quad (4.3)$$

Avec :

$A(x)$ est la matrice d'évolution.

$x(z, t) = [x_1(z, t) \cdots x_n(z, t)]$ est le vecteur des variables d'état.

$f(x)$, $g(x)$ sont des fonctions vectorielles lisses.

$h(x)$, $p(x)$ sont des fonctions scalaires.

S est la sortie mesurée.

u est l'entrée de commande.

y est la sortie à commander.

C_1 et C_2 sont des matrices constantes de dimension $n \times n$.

$R(t)$ est un vecteur colonne fonction lisse du temps.

Remarque : le système d'équations peut être parabolique, elliptique ou hyperbolique, selon

les valeurs propres de $A(x)$.

.

4.2.2 Spécification du problème de commande

Considérons le système d'équations différentielles aux dérivées partielles quasi-linéaire de première ordre de la forme de la relation (4.1) pour lequel : la variable manipulée $u(z,t)$, la variable mesurée $S(z,t)$ et la variable à commander $y(z,t)$, sont distribuées dans l'espace géométrique [13]. On suppose que, pour commander la variable y , on a à notre disposition un nombre fini d'actionneurs et de capteurs. Il est alors impossible de contrôler y en toute position. Ainsi, il est plus commode de formuler une loi de commande dans un nombre fini d'intervalles spatiaux. En particulier, en se référant à un intervalle spatial unidimensionnel

$[z_i, z_{i+1}]$ on suppose que la variable d'entrée est $u^i(t)$, avec $u^i(t) \in R$, et la sortie mesurée est $S^i(t)$ avec $S^i(t) \in R$, et la sortie à commander est $y^i(t)$ avec $y^i(t) \in R$, sont données comme suit :

$$u(z, t) = b^i(z)u^i(t)$$

$$S^i(t) = Q^i(z)p(z, t) \quad \text{avec } z_i \leq z \leq z_{i+1} \quad (4.4)$$

$$y^i(t) = C^i(z)y(z, t)$$

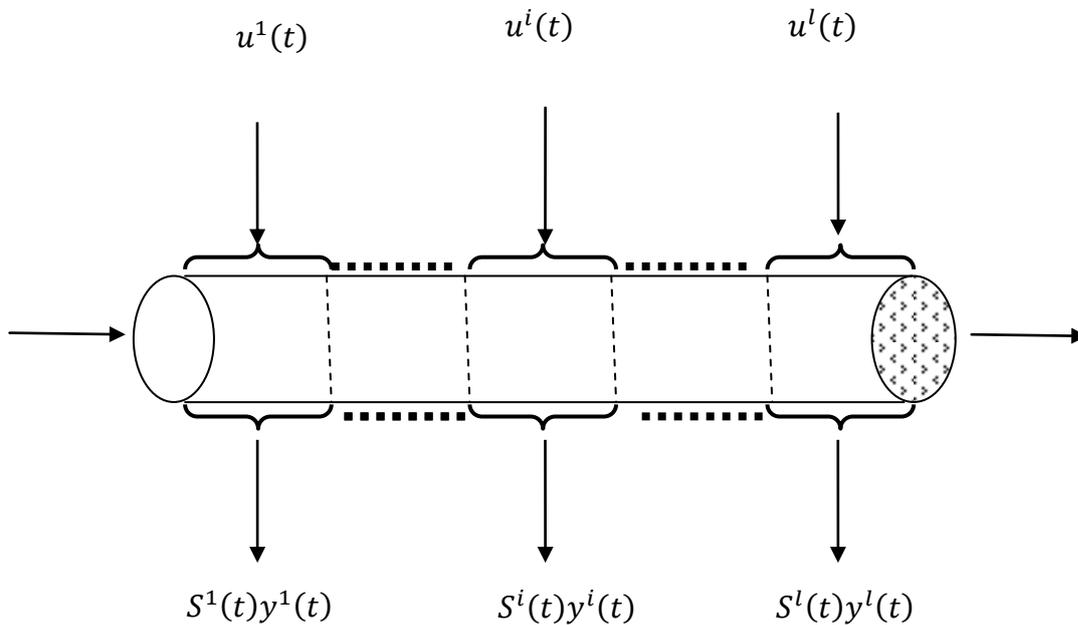


Figure 4.1 Spécification du problème de commande pour un exemple prototype

La figure (4.1) montre une représentation schématique de la formulation d'un problème de commande par zones pour un exemple prototype. De point de vue pratique,

$b^i(z)$ Représente la structure géométrique de l'actionneur dans l'intervalle spatiale $[z_i, z_{i+1}]$

Et

$Q^i(z)$ Représente la structure géométrique du capteur dans le même intervalle spatiale.

L'opérateur C^i dépend des spécifications de performance désirées et dans la majorité des applications pratiques, il est de la forme suivante :

$$y^i(t) = C^i h(x) = \int_{z_i}^{z_{i+1}} C^i(z) h(x(z, t)) dz \quad (4.5)$$

Avec $C^i(z)$ une fonction de z lisse (de classe C^∞) connue. Pour simplifier, considérons les fonctions normalisées $b^i(z), C^i(z)$ pour $i = 1 \dots l$ dans l'intervalle $[a, b]$:

$$\sum_{i=1}^l \int_{z_i}^{z_{i+1}} b^i(z) dz = \sum_{i=1}^l \int_{z_i}^{z_{i+1}} C^i(z) dz = 1 \quad (4.6)$$

En utilisant les relations (4.5) et (4.6) ; le système d'équation (4.1) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= A(x) \frac{\partial x}{\partial z} + f(x) + g(x) b(z) \bar{u} \\ \bar{y} &= Ch(x) \\ \bar{s} &= Qp(x) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$C_1 x(a, t) + C_2 x(b, t) = R(t)$$

Où

$$\bar{u} = [\bar{u}^1 \dots \bar{u}^l]$$

Et

$$\bar{y} = [\bar{y}^1 \dots \bar{y}^l]$$

En posant dans le système d'équations $A(x) = A, f(x) = Bx, g(x) = w,$
 $h(x) = kx$ et $p(x) = px$ dans (4.7), A et B sont des matrices, w, k et p sont des vecteurs de dimensions appropriées, la relation (4.7) se réduit au système d'équation aux dérivées partielles linéaires hyperboliques de premier ordre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= A(x) \frac{\partial x}{\partial z} + f(x) + g(x)b(z)\bar{u} \\ \bar{y} &= Ckx \\ \bar{s} &= Qpx \end{aligned} \tag{4.8}$$

Avec la condition aux limites est décrite par l'équation donnée par la relation (4.2) , et la condition initiale est décrite par l'équation donnée par la relation (4.3).

4.2.3 Propriétés théorique des systèmes hyperboliques de premier ordre

❖ **Définition du produit scalaire et de la norme**

Soient w_1, w_2 deux éléments de l'espace de Hilbert $H([a, b] ; R^n)$, alors le produit scalaire et la norme sont définis, dans $H([a, b] ; R^n)$, comme suit :

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \int_a^b \langle w_1(z), w_2(z) \rangle_{R^n} dz \tag{4.9}$$

$$\|w_1\|_2 = \langle w_1, w_1 \rangle^{1/2} \tag{4.10}$$

La notion $\langle ., . \rangle_{R^n}$ signifie le produit scalaire standard dans l'espace euclidien R^n .

Pour le système linéaire de la relation (4.9) dont l'hypothèse (4.1) est vérifiée, il est bien établi que l'opérateur :

$$L_x = A \frac{\partial x}{\partial z} + Bx \tag{4.11}$$

Défini dans l'espace $H([a, b] ; \mathbb{R}^n)$, engendre un semi groupe fortement continu, ce qui implique l'existence, l'unicité et la continuité des solutions pour l'équation de la relation (4.9). En particulier la solution générale du système est donnée par :

$$x = G(t)x_0 + \int_0^t G(t - \tau)wb\bar{u}(\tau)d\tau + C(t)R \tag{4.12}$$

avec $C(t)$ et un opérateur non linéaire borné projetant l'espace $H([0, t] ; \mathbb{R}^n)$ en $H([a, b] ; \mathbb{R}^n)$.

Il est à noter que la notion de semi groupe est l'analogie à la notion de la matrice de transition utilisée pour le système de dimension fini

4.3 Notions sur l'indice caractéristique

Dans ce paragraphe, on introduit la notion de l'indice caractéristique entre l'entrée \bar{u} et la sortie \bar{y} pour les systèmes décrits par l'équation (4.8), pour formuler et résoudre le problème de commande par retour d'état

4.3.1 Indice caractéristique pour les systèmes à paramètres localisés

Considérons le système, non linéaire monovarié à paramètres localisés, décrit par l'équation suivante

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{4.13}$$

$$y = h(x)$$

Le degré relatif est défini par :

Définition (4.1)

Le degré relatif du système non linéaire (4.13) sur un domaine U est le plus petit entier r pour lequel :

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \text{ dans } U \quad (4.14)$$

$L_g h(x)$ Représente la dérivée de lie de $h(x)$ par rapport $g(x)$

Pour les systèmes linéaires (4.14) devient

$$L_g L_f^{r-1} h(x) = CA^{r-1}B \neq 0 \quad (4.15)$$

4.3.2 Indice caractéristique pour les systèmes à paramètres répartis

Considérons l'opérateur de différentiation de la sortie \bar{y} de système de la relation (4.8) par rapport au temps :

$$\bar{y} = Ckx$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{d}{dt} Ckx = Ck \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = Ck \left(A \frac{\partial}{\partial t} + B \right) + Ckb(z)\bar{u} \quad (4.16)$$

Maintenant si on a $Ckwb(z) \neq 0$, alors l'indice caractéristique de \bar{y} par rapport à l'entrée \bar{u} , notée par r , est égal à 1. Si non r est supérieur. La relation (4.16) devient comme suit :

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = Ck \left(A \frac{\partial}{\partial z} + B \right) \quad (4.17)$$

Donc il faut différentier une autre fois(4.17), ce qui donne :

$$\frac{d^2\bar{y}}{dt} = Ck \left(A \frac{\partial}{\partial z} + B \right)^2 x + Ck \left(A \frac{\partial}{\partial t} + B \right) wb(z)\bar{u} \quad (4.18)$$

De la même manière, si le scalaire $Ck \left(A \frac{\partial}{\partial t} + B \right) wb(z) \neq 0$ alors l'indice caractéristique r est égal à 2, si non il est d'ordre supérieur.

En généralisant le développement précédent, on aboutit à la définition suivante, d'une manière générale, de l'indice caractéristique.

Définition 4.2

Considérons le système d'équation aux dérivées partielle donné par la relation (4.8). L'indice caractéristique est le plus petit entier r , pour lequel [14] :

$$Ck \left(A \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) + B \right)^{r-1} w b(z) \neq 0 \tag{4.19}$$

Remarque 4.1

De la définition (4.2), on note que l'indice caractéristique est l'ordre le plus petit de la dérivée de \bar{y} par rapport au temps pour laquelle l'entrée \bar{u} apparaît explicitement. Il est alors clair que la notion de l'indice caractéristique n'est qu'une généralisation de la notion du degré relatif pour les systèmes à paramètres distribués.

Par analogie au cas linéaires, on définit l'indice caractéristique pour les systèmes quasi linéaires comme suit :

Définition (4.3)

Pour les systèmes d'équation aux dérivées partielles quasi linéaires de la forme de l'équation (4.7), on définit l'indice caractéristique comme l'entier minimal r pour lequel :

$$C L_g \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial z} L_{a_j} + L_f \right)^{r-1} h(x) b(z) \neq 0 \tag{4.20}$$

Avec a_j la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $A(x)$

Et L_{a_j}, L_f : la notion standard de la dérivée de Lie

Hypothèse (4.2)

Considérons les systèmes d'équations aux dérivées partielles de premier ordre de la forme de l'équation (4.8) et (4.7) pour lesquels, $r^1 = r^2 = \dots = r^l = r$. Sous cette hypothèse, r est considéré également comme l'indice caractéristique entre le vecteur de sortie \bar{y} et le vecteur d'entrée \bar{u} [14].

4.4 Commande des systèmes distribués hyperbolique par retour d'état

4.4.1 Les systèmes linéaires

Considérons les systèmes décrits par l'équation de la forme de (4.8), pour lesquels on cherche à synthétiser une loi de commande distribuée par retour d'état qui force la sortie du système en boucle fermée à suivre la consigne(référence). Plus spécialement, considérons la loi de commande distribuée par retour d'état de la forme :

$$\bar{u} = \alpha x + \beta v_1 \quad (4.21)$$

Avec v_1 : entrée de référence, α opérateur linéaire projetant H^n dans R^l et β est une matrice diagonale.

Cette loi de commande offre de bons résultats pour la stabilisation des procédés et assure la poursuite de la référence en boucle fermée.

En remplaçant (4.21) dans (4.8) on aura :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = A \frac{\partial x}{\partial z} + Bx + wb(z)ax + wb(z)\alpha x + wb(z)\beta v_1 \quad (4.22)$$

$$y = cKx$$

La commande (4.21) maintient la linéarité du système par rapport au vecteur d'entrées de référence v_1

Proposition 4.1

Considérons le système d'équations aux dérivées partielles linéaires de premier ordre décrit par l'équation (4.8), sujet à la condition aux limites (4.2) pour lequel les hypothèses (4.1) et (4.2) sont vérifiées.

L'application d'une loi de commande de la forme (4.21) n'affecte pas l'indice caractéristique, c'est-à-dire l'indice caractéristique de la sortie \bar{y} par rapport à l'entrée v_1 , en boucle fermée, reste toujours r [14].

Du fait que l'indice caractéristique entre la sortie \bar{y} et la référence v_1 est égal à r , on peut imposer une dynamique entrée-sortie du système en boucle fermée sous la forme suivante :

$$\gamma_r \frac{d^r \bar{y}}{dt^r} + \dots + \gamma_1 \frac{d\bar{y}}{dt} + \bar{y} = v_1 \quad (4.23)$$

Avec $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ sont des paramètres de synthèses qui peuvent être choisis de façon à assurer la stabilité entrée-sortie et à vérifier les performances spécifiées pour un système en boucle fermée.

On requiert, pour chaque couple entrée-sortie (\bar{y}^i, v_1^i) , $i = 1, \dots, l$ dans la représentation externe (entrée-sortie), le même ordre r et les mêmes caractéristiques transitoires. (C'est-à-dire les paramètres γ_k sont choisis pour être les mêmes pour chaque couple entrée-sortie (\bar{y}^i, v_1^i)).

Théorème 4.1

Considérons le système d'équation aux dérivées partielles de premier ordre (4.8), sujet à la condition aux limites (4.2), pour lesquels les hypothèses (4.1) et (4.2) sont vérifiées. Alors la loi de commande distribué :

$$\bar{u} = \left[\gamma_r Ck \left(A \frac{\partial}{\partial z} + B \right)^{r-1} w b(z) \right]^{-1} \times \left\{ v_1 - Ckx - \sum_{\eta=1}^r \gamma_\eta Ck \left(A \frac{\partial}{\partial z} + B \right)^\eta x \right\} \quad (4.24)$$

Assure la poursuite de la référence en boucle fermée

Remarque 4.2

1. La synthèse de la loi de commande (4.24) requiert des calculs algébriques, différentielle et intégraux dans l'espace à cause de la nature distribuée de la commande.
2. La loi de commande distribuée (4.24) est dérivée d'une approche similaire à celle employée pour la synthèse des lois commandes à base d'inversion pour les systèmes d'équation différentielles ordinaires. Ceci est possible parce que, dans les systèmes d'équations (4.8) on a :
 - a. La solution est bien définie (l'évolution de l'état est commandé par un semi groupe d'opérateur linéaire continu).
 - b. L'espace d'entrée et l'espace de sortie sont de dimension fini.
 - c. La commande et la sortie sont de nature distribuée

Ces trois conditions sont standards pour la majorité des théories de commande appliquées aux systèmes d'équation aux dérivées partielles, à part la condition (c) qui pose quelques limites en pratique, exception faite pour le cas où la commande est frontière.

4.5 Système quasi linéaires

Considérons maintenant les systèmes décrits par l'équation (4.7) auxquels on applique les lois de commande de la forme qui suit :

$$\bar{u} = \bar{\varphi}(x) + \bar{\vartheta}(x)v_1 \quad (4.25)$$

Avec $\bar{\varphi}(x)$ un opérateur non linéaire traçant l'espace de Hilbert H^n dans R^l , $\bar{\vartheta}(x)$ est une matrice diagonale inversible dont les éléments sont des fonctions et $v_1 \in R^l$ est le vecteur d'entrées de référence. La classe de loi de commande décrite par l'équation (4.25) est une généralisation de celles considérées dans le cas des systèmes linéaire donnée par l'équation (4.21).

L'application de la loi de commande (4.25) force le système en boucle fermée à prendre la forme :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = A(x) \frac{\partial x}{\partial z} + f(x) + g(x)b(z)\bar{\varphi}(x) + g(x)b(z)\bar{\vartheta}(x)v_1 \quad (4.26)$$

$$\bar{y} = Ckx$$

Théorème 4.2

Considérons un système quasi linéaire de premier ordre décrit par l'équation (4.7) sujet à la condition aux limites, pour lequel les hypothèses (4.1) et (4.2) sont vérifiées. Alors la loi de commande distribuée par retour d'état :

$$\bar{u} = \left[\gamma_r C L_g \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial z} L_{a_j} + L_f \right)^{r-1} h(x)b(z) \right]^{-1} \times \left\{ v_1 - Ch(x) - \sum_{\eta=1}^r \gamma_\eta C \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial z} L_{a_j} + L_f \right)^\eta h(x) \right\} \quad (4.27)$$

Garantit la poursuite de la référence pour les systèmes donnés par la relation (4.23) en boucle fermée[13].

4.6 Application à la commande de l'échangeur à contre-courant

Il s'agit d'un échangeur de chaleur à double tube à contre courant d'une longueur d'un mètre qui a fait objet d'une étude détaillé dans le chapitre 3

4.7 Modèle de l'échangeur

Le modèle de l'échangeur est décrit par les deux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial T_c}{\partial t} = -v_c \frac{\partial T_c}{\partial z} + \alpha_c(T_f - T_c) \\ \frac{\partial T_f}{\partial t} = v_f \frac{\partial T_f}{\partial z} + \alpha_f(T_c - T_f) \end{cases} \quad (4.28)$$

Avec :

$$|v_c| = |v_f| = 1$$

$$\alpha_1 = 2$$

$$\alpha_2 = 1$$

Avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} T_c(0, t) = 25 \\ T_f(l, t) = 50 \end{cases} \quad (4.29)$$

Et les conditions initiales

$$T_c(z, 0) = T_f(z, 0) = 25 \quad (4.30)$$

4.8 Stratégie de commande

4.8.1 Calcul degré relatif:

On considère comme sortie :

$$\text{Le vecteur de sortie } y = T_c(l, t) \quad (4.31)$$

$$\text{Et la commande } U = T_f(0, t) \quad (4.32)$$

En dérivant y par rapport aux temps, on aura

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial T_c}{\partial t} \Big|_{z=l} \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial T_c}{\partial z} \Big|_{z=l} = -v_c \frac{\partial T_c}{\partial z} \Big|_{z=l} + \alpha_c \left[\frac{T_f(0, t) - T_c(l, t)}{U(t)} \right] \quad (4.34)$$

On remarque que après une seule différentiation de la sortie $y(t)$ par rapport au temps, la commande $u(t)$ apparaît explicitement dans l'équation (4.34), ceci de fait que α_c est différent de zéro.

Ce qui nous amène à conclure que le degré relatif r du système égal à un. Par conséquent, une dynamique entrée -sortie du premier ordre peut être imposée, pour le système, en boucle fermée. Cette dernière est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = v \quad (4.35)$$

Avec :

v est une entrée de référence.

et

τ est un paramètre de commande ; représente la constante du temps du système en boucle fermée.

Cette représentation entrée-sortie et une équation différentielle de premier ordre.

Donc, elle décrit un système de premier ordre dont la représentation dans le domaine de Laplace (fréquentiel) est la suivante :

$$\tau sY(s) + Y(s) = v(s) \quad (4.36)$$

D'où

$$\frac{y(s)}{v(s)} = \frac{1}{1 + \tau s} \quad (4.37)$$

C'est un système de premier ordre

4.8.2 Calcul de la loi de commande

L'objectif de la commande est d'imposer au fluide traversant le tube une température désiré, elle doit maintenir la température du tube très proche de la consigne, et assure une stabilité de fonctionnement.

On a :

$$y = T_c (l, t) \quad (4.38)$$

En différentiant y par rapport aux temps, on aura

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial T_c}{\partial t} \Big|_{z=l}$$

$$\frac{\partial T_c}{\partial z} \Big|_{z=l} = -v_c \frac{\partial T_c}{\partial z} \Big|_{z=l} + \alpha_c \left[\frac{T_f(0, t)}{U(t)} - T_c (l, t) \right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -v_c \frac{\partial T_c}{\partial z} \Big|_{z=l} + \alpha_c [U(t) - T_c (l, t)]$$

$$\tau \frac{\partial y}{\partial t} = -\tau v_c \frac{\partial T_c}{\partial z} \Big|_{z=l} + \tau \alpha_c [U(t) - T_c (l, t)] \quad (4.39)$$

La somme des deux égalités données par les relations (4.38) et (4.39) membre par membre, donne le résultat suivant :

$$\tau \frac{\partial y}{\partial t} + y = -\tau v_c \frac{\partial T_c}{\partial z} \Big|_{z=l} + \tau \alpha_c [U(t) - T_c (l, t)] + T_c (l, t) = v \quad (40)$$

De cette équation, on tire l'expression de la loi de commande

$$\tau \alpha_c U(t) = \tau v_c \left. \frac{\partial T_c}{\partial z} \right|_{z=l} + \tau \alpha_c T_c(l, t) - T_c(l, t) + v$$

$$U(t) = \frac{v_c}{\alpha_c} \left. \frac{\partial T_c}{\partial z} \right|_{z=l} + T_c(l, t) - \frac{1}{\tau \alpha_c} T_c(l, t) + \frac{1}{\tau \alpha_c} v$$

$$U(t) = \frac{v_c}{\alpha_c} \left. \frac{\partial T_c}{\partial z} \right|_{z=l} + T_c(l, t) - \frac{1}{\tau \alpha_c} [T_c(l, t) + v] \quad (4.41)$$

La loi de commande résultante assure au système la poursuite de la référence en boucle fermée.

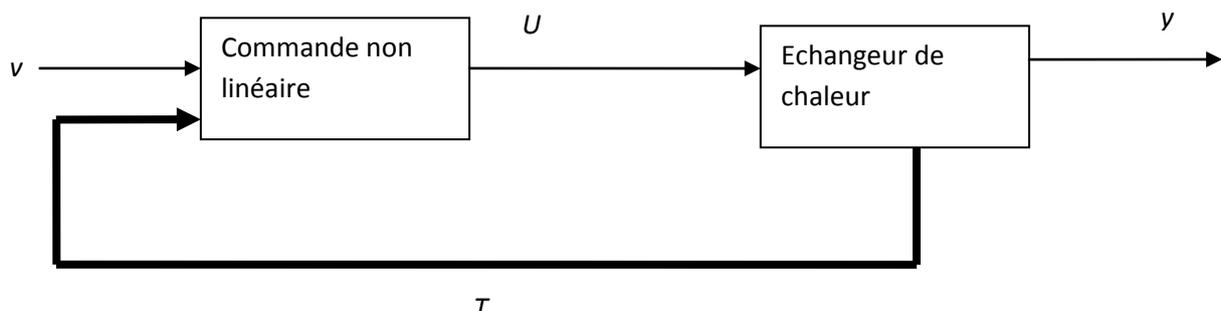


Figure 4.2 schéma bloc de la commande et du procédé

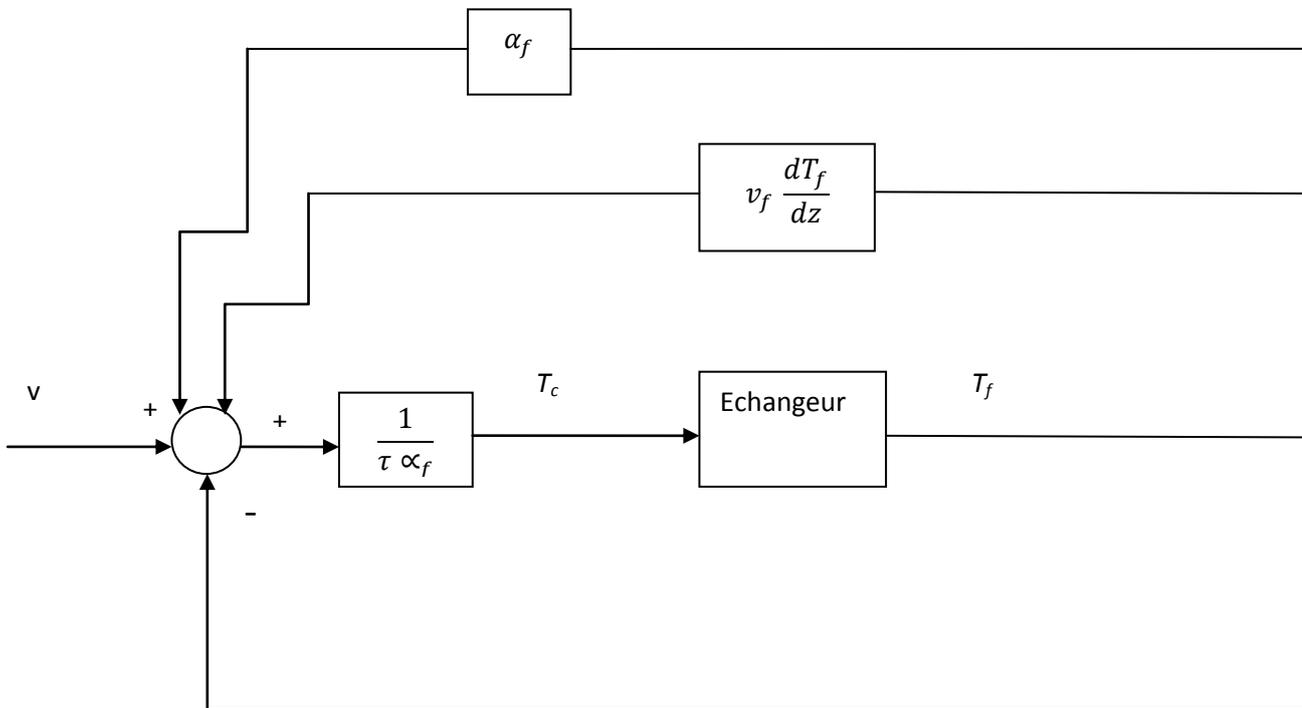


Figure 4.3 schéma fonctionnel de la commande en boucle fermée.

4.9 Simulation

A partir de la représentation d'état (3.16), on simule le système étudié. Après plusieurs essais, on a choisi de partager notre système en 100 éléments, soit 100 points de discrétisation. Cette semi-discrétisation donne des bons résultats sur la précision de poursuite de la consigne. Afin de montrer l'apport de la commande non linéaire par retour d'état, des tests de simulation ont été réalisés.

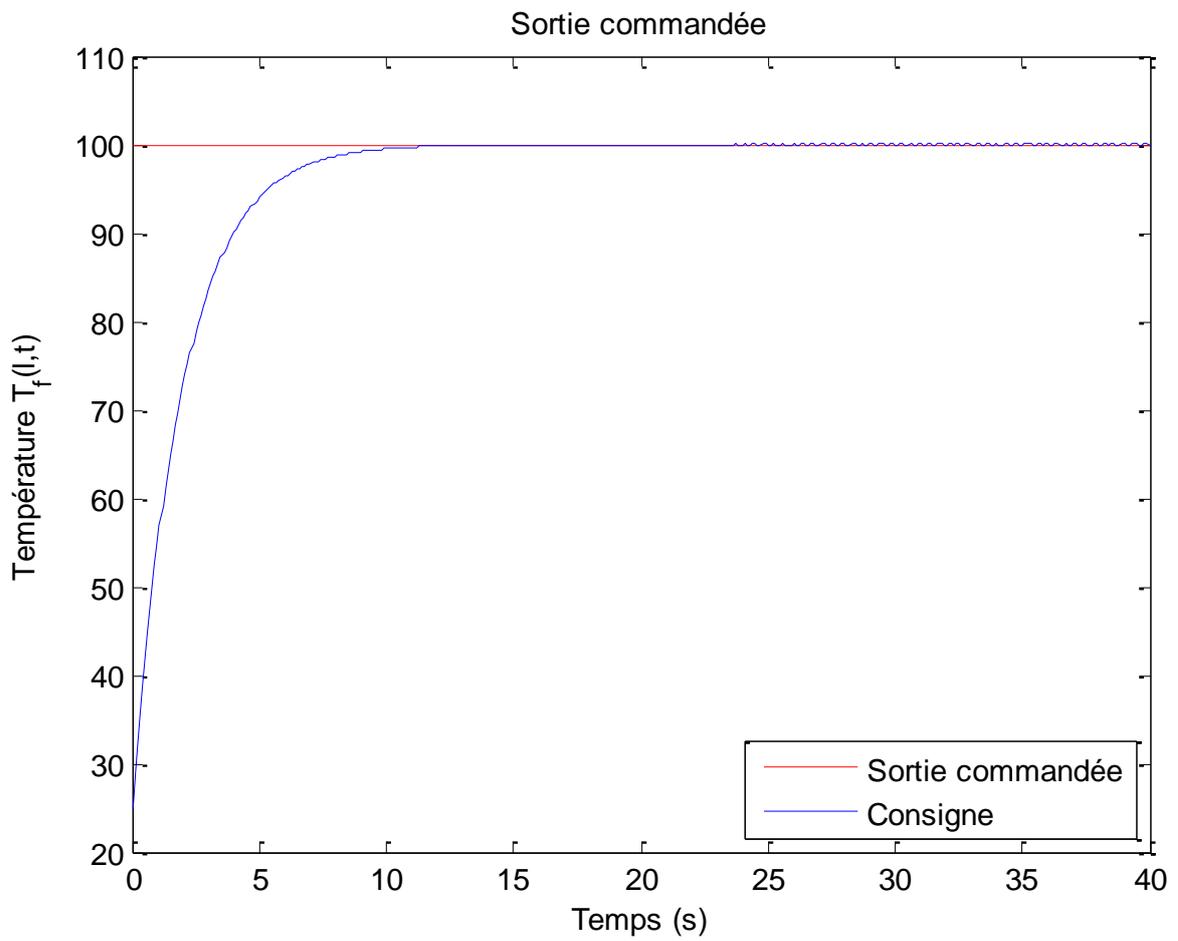


Figure 4.4 Evolution de la température à la sortie du liquide froid.

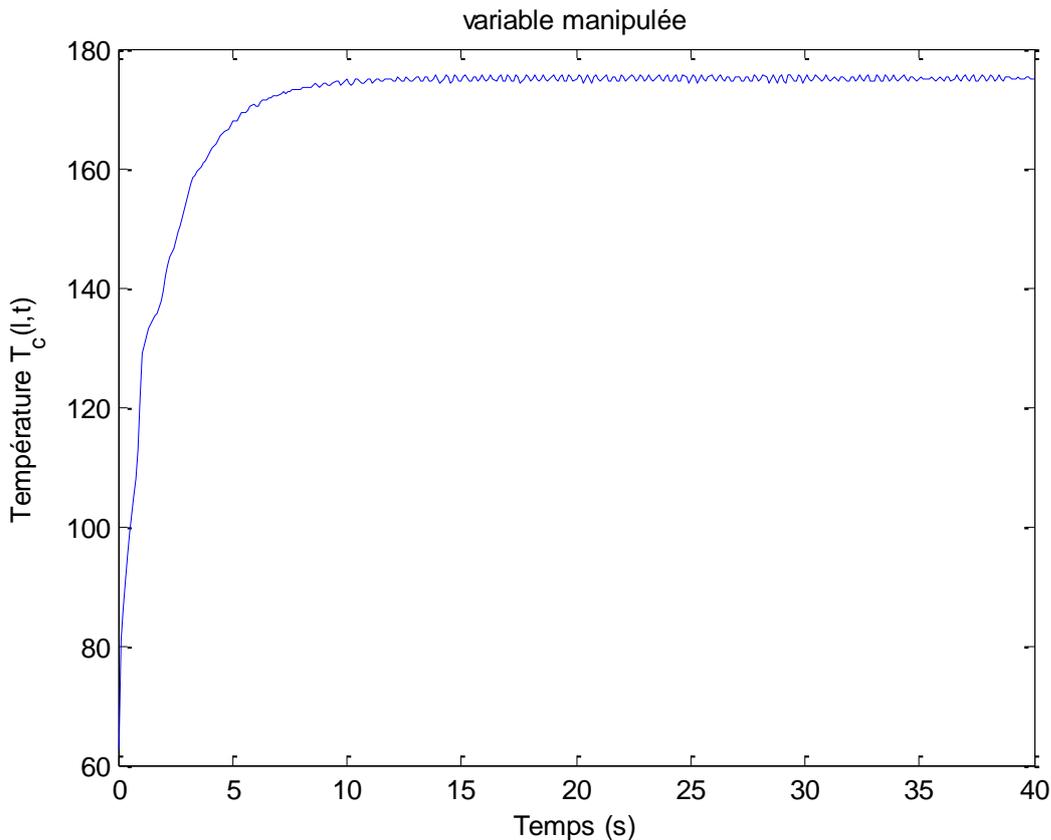


Figure 4.5 Evolution de la température à la l'entrée du liquide chaud.

4.9.1 Asservissement

On s'intéresse ici au comportement de l'échangeur lorsqu'on lui applique l'échelons de consigne, et on visualise le signal de la commande (température de l'enveloppe) et de sortie (Température du fluide traversant l'échangeur).

Ainsi, en imposant une entrée de référence (consigne) échelon d'amplitude de 100°C , on voit bien, dans la figure (4.3) que la température à la sortie du tube de l'échangeur de chaleur suit parfaitement la consigne. On remarque que la dynamique de la température contrôlée (Fig. 4.3) est apériodique et correspond à celle d'un système du premier ordre. De même, on constate que la température manipulée (Fig.4.4) présente des variations physiquement acceptables.

4.10 Conclusion

Dans ce chapitre, on s'est intéressé à la commande géométrique d'un échangeur de chaleur à contre-courant. L'objectif était de commander la température du fluide interne, à la sortie de l'échangeur, en manipulant la température du fluide externe à l'entrée de l'enveloppe, la variation de la température de fluide interne à l'entrée de l'échangeur.

La loi de commande géométrique (retour d'état), synthétisée en se basant sur la notion du degré relatif, une dynamique de premier ordre.

Les performances en poursuite de la loi de commande ont été évaluées par simulation. Le résultat obtenu montre que la loi de commande assure parfaitement la poursuite de consigne.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Conclusion Générale

Le travail réalisé dans ce mémoire porte sur l'étude et la commande géométrique aux frontières d'un échangeur de chaleur à contre-courant dont le comportement dynamique est décrit par deux équations aux dérivées partielles hyperboliques de premier ordre. L'objectif consiste à synthétiser une commande géométrique aux frontières pour contrôler la température du liquide à chauffer à la sortie de l'échangeur.

Avant de faire cette conclusion, nous nous sommes d'abord étalés l'étude sur la description mathématique des systèmes à paramètres répartis dans un espace de dimension infinie tout en abordant les différents types de commande et d'observations. Et pour des raisons de simulation, cette classe de système nécessite une approximation dont les méthodes sont brièvement abordées. La méthode des lignes utilisées dans ce travail a été exposée de manière détaillée. Puis nous avons donné certaines notions sur l'échangeur thermique et nous avons modélisé un exemple type de ces appareils en l'occurrence un échangeur thermique à double tube contre-courant. Ensuite nous avons abordé la synthèse d'une commande géométrique aux frontières pour l'échangeur de chaleur dont les performances en poursuite ont été évaluées par simulation.

L'étude présentée montre que la commande géométrique est une approche de commande intéressante pour les systèmes à paramètres distribués. La synthèse et l'implémentation de commande sont faciles.

Bibliographie

Bibliographie

[1] **J.P. BABRY et W. PELCZEWSKI**, «Commande optimale des systèmes continus déterministes », Editions Masson, Paris, 1985.

[2] **R.F. curtain et H. Zwart**, « An Informatique to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory-Verlag», New York, 1995.

[3] **A. RACHID**, «système de régulation », Edition Masson, Paris 1996.

[4] **RENARDY M and ROGERS RC**. An introduction to partial differential equations, Texts in Applied Mathematics, vol. 13. Second edn., Springer: New York, 2004.

[5].**J.D.OUREGA**, Résolution numérique des systèmes d'équations paraboliques par les Méthodes de Décentrage(*UPWIND*), Ecole Polytechnique de Montréal, aout 2002.

[6] **HAMDI S., W. E. SCHIESSER and G. W. GRIFFITHS.**, Method of lines. Scholarpedia, 2(7):2859, 2007.

[7] **WILLIAM F. AMES.**, Numerical Methods for Partial Differential Equations. Section **1.6**. Academic Press, New York, 1977.

[8] **U. SCHULZ and R. PREGLA.**, *A new technique for the analysis of the dispersion characteristics of planar waveguides*, Arch. **ELEK UBERTRAGUNG.**, **34**, pp. 169- 173, 1980. Also in **R. SORRENTINO** (ed.), *Numerical Methods for Passive Microwave and Millimeter Wave Structure*. IEEE Press, New York, pp. 233-237, 1989.

[9] **W. E. SCHIESSER.**, *The Numerical Method of Lines*. Academic Press, San Diego, 1991.

Bibliographie

[10] **TAOURIT FARIDA** «étude du comportement dynamique et thermique de deux écoulements du fluide dans un échangeur de chaleur (comparaison entre le cas simple et le cas avec ailettes) Master en Génie Energétique UABBT –FT, 2013

[11] **J.F Sacadura**, «Initiation aux transferts thermiques», Editions TEC & DOC, paris, 2000.

[12] **W. H. RAY et B. A. OGUNNIKE**, «process dynamic, modeling and control, Oxford University Press, 1994, PP. 376-380.

[13] **PANAGIOTIS D. CHRISTOFIDES et PRODRAMOS DAOUTIDIS**, «Feedback control of hyperbolic PDE systems », in AICHE JOURNAL , Vol 42, No11.November 1996, pp. 3063-3070.

[14] **AIT MOHMED LYES et AKKOU OMAR** « Commande non Linéaire d'un échangeur thermique» Thèse d'ingénieur en automatique, UMMTO-FGEI, 2004.

Résumé :

Le travail réalisé dans ce mémoire porte sur l'étude et la commande géométrique aux frontières d'un échangeur de chaleur à contre-courant dont le comportement dynamique est décrit par deux équations aux dérivées partielles hyperboliques de premier ordre. L'objectif consiste à synthétiser une commande géométrique aux frontières pour contrôler la température du liquide à chauffer à la sortie de l'échangeur.

L'étude présentée montre que la commande géométrique est une approche de commande intéressante pour les systèmes à paramètres distribués. La synthèse et l'implémentation de commande sont faciles.

Les mots clés :

Systèmes à paramètres distribués, équations aux dérivées partielles, méthodes des lignes, échangeur de chaleur, commande géométrique.