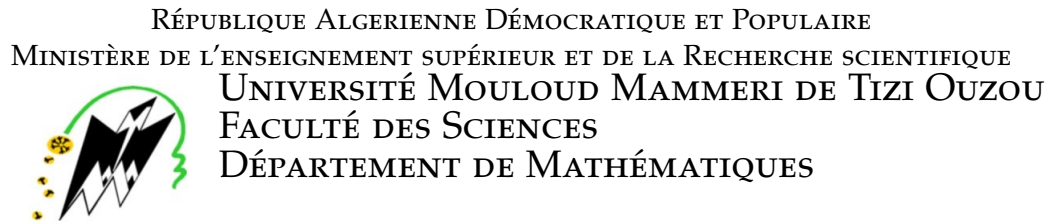


N° d'ordre: .....



# MÉMOIRE DE MASTER

Filière : Mathématiques  
Spécialité : Mathématique appliquée à la gestion

Par

BESSAA TINHINANE  
BEN HADJI NOUARA

## LES PROBLÈMES DE TRANSPORTS ET LA PROGRAMMATION LINÉAIRE FRACTIONNAIRE MULTI-OBJECTIVE

Soutenu le Octobre 2022 devant le jury :

Mme.	SLIMI FARIDA	UMMTO	Présidente du jury
Mme.	OUBAKOUK LYNDIA	UMMTO	Examinatrice
Mme.	LESLOUS FADILA	UMMTO	Encadreur

Année Universitaire : 2021/2022



# DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

Ce qu'est toujours mon meilleur exemple dans la vie : mon très cher père, pour les sacrifices qu'il a consentis pour mon éducation et pour l'avenir qu'il n'a cessé d'offrir.

Symbole de douceur, de tendresse, d'amour et affection : ma chère mère. A mes chers frères qui sont toujours derrière moi surtout RABAH, MAKHLOUF.

– a toute ma famille, mes oncles, mes tantes (surtout ma tante TASSADIT que j'aime énormément), cousins et cousines (surtout ma chère TERKIA). A ma moitié égale AREZKI, qui m'a constamment soutenu et a permis la réalisation de ce mémoire. Je le remercie ici de son amour et lui dédie ce travail.

A ma belle-famille que j'aime très fort.

A ma chère binôme NOUARA et tous les membres de sa famille. L'ensemble de mes amis(es) et tous les membres de leurs familles plus particulièrement FAROUJA, HOURIA , FERIEL, MOUH, AMEL.

A toutes personnes que j'aime.

A vous tous je dis merci.

**TINHINANE**

# DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

Ce qu'est toujours mon meilleur exemple dans la vie : mon très cher père,  
pour les sacrifices qu'il a consentis pour mon éducation et pour l'avenir qu'il  
n'a cessé d'offrir.

Symbole de douceur, de tendresse, d'amour et affection : ma chère mère. A  
mon chère frère et soeur qui sont toujours derrière moi surtout  
AMINE, CELINA.

– a toute ma famille, mes oncles SALAH et sa femme, DJAMEL et sa femme,  
ma tante MALIKA , et mes chères grand mère et grand père que j'aime  
énormément.

A ma moitié égale AHMED, qui m'a constamment soutenu et a permis la  
réalisation de ce mémoire. Je le remercie ici de son amour et lui dédie ce  
travail.

A ma belle-famille que j'aime très fort.

A ma chère binôme TINHINANE et tous les membres de sa famille.  
ma copine TINHINANE et tous les membres de sa familles.

A toutes personnes que j'aime.

A vous tous je dis merci.

**NOUARA**

# REMERCIEMENTS

**N**ous remercions d'abord et avant tout notre dieu qui nous a donné la vie, la force et le courage, ainsi que la patience pour réaliser ce travail. Nous le remercions également pour avoir mis à notre disposition d'aimables personnes qui nous ont soutenues du mieux qu'elles pouvaient.

Nos profonds remerciements vont à notre promotrice Mme LESLOUS.F, à qui nous devons tout le respect et la gratitude de son aide et ses précieux conseils pour réaliser ce mémoire.

Aussi il est très agréable d'exprimer nos meilleures gratitudees envers les honorables membres de jury, qui ont bien voulu assister à la soutenance de notre mémoire et évaluer nos efforts, nous espérons être à la hauteur de la confiance qu'ils ont bien voulu placer en moi et je les remercie d'avance.

Enfin Nous tenons à remercier tous nos enseignants du département Mathématique qui ont participés à notre formation.

# TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vi
LISTE DES FIGURES	vii
LISTE DES TABLEAUX	vii
INTRODUCTION	1
1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME DE TRANSPORT	3
1.1 INTRODUCTION	3
1.2 PRÉSENTATION DU MODÈLE DU TRANSPORT	3
1.3 LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DU PROBLÈME DE TRANSPORT	5
1.4 ÉCRITURE MATRICIELLE DU PROBLÈME DE TRANSPORT	6
1.5 FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME DE TRANSPORT	8
1.6 PROBLÈME DE TRANSPORT ÉQUILIBRÉ	13
1.7 PROBLÈME DE TRANSPORT NON ÉQUILIBRÉ	13
1.8 PROBLÈME DE TRANSPORT AVEC DES ITINÉRAIRES INTERDITS	14
1.9 PROBLÈME DE TRANSPORT AVEC ITINÉRAIRES IMPOSÉS	14
1.10 PROBLÈME DE DÉGÉNÉRESCENCE	15
1.11 CONCLUSION	16
2 MÉTHODES DE RÉOLUTION D'UN PROBLÈME DE TRANSPORT	17
2.1 INTRODUCTION	17
2.2 RÉOLUTION DU PROBLÈME DE TRANSPORT	17
2.3 MÉTHODE DE COIN NORD-OUEST	17
2.4 MÉTHODE DE MEILLEUR COIN NORD-OUEST (L'ÉLÉMENT MINIMAL)	19
2.5 MÉTHODE DE VOGEL	21
2.6 MÉTHODE DE COUPES ET BRANCHEMENTS (BRANCH AND CUT)	22
2.7 CONCLUSION	23
3 PROBLÈME DE TRANSPORT MULTI-OBJECTIFS	24
3.1 INTRODUCTION	24
3.2 FORMULATION DU PROBLÈME	25
3.3 CLASSIFICATION DES APPROCHES MULTICRITÈRES	28
3.4 CONCLUSION	33
4 MÉTHODES DE RÉOLUTION D'UN PROBLÈME LINÉAIRE DISCRET FRACTIONNAIRE MULTI-OBJECTIF	34
4.1 INTRODUCTION	34
4.2 DÉFINITIONS ET NOTATIONS	34
4.2.1 Région de contraintes	35
4.2.2 Problème au niveau inférieur	35
4.2.3 Région inductible	35

4.2.4	Les gradients réduits des objectifs fractionnaires linéaires . . .	37
4.3	DESCRIPTION DE LA MÉTHODE. . . . .	37
4.4	CONCLUSION . . . . .	46
CONCLUSION GÉNÉRALE		47
BIBLIOGRAPHIE		48
NOTATIONS		50

## LISTE DES FIGURES

1.1	Schéma 1 . . . . .	6
1.2	Tableau de transport . . . . .	7
2.1	1er tableau de la méthode de coin Nord-ouest . . . . .	18
2.2	2ème tableau de la méthode de coin Nord-ouest . . . . .	18
2.3	3ème tableau de la méthode de coin Nord-ouest . . . . .	19
2.4	4ème tableau de la méthode de coin Nord-ouest . . . . .	20
3.1	Représentation l'espace des décisions et l'espaces des objectifs correspondants . . . . .	25
3.2	Point Nadir et point Idéal . . . . .	27
3.3	Mode de résolution . . . . .	28
4.1	Arbre représentant les états des nœuds pendant l'algorithme Branch & Cut. . . . .	46

## LISTE DES TABLEAUX

4.1	Table simplex pour le nœud 0. . . . .	43
4.2	Table simplex pour le nœud 1. . . . .	43
4.3	Tableau simplex du problème de niveau inférieur. . . . .	43
4.4	Tableau simplex du problème de niveau inférieur. . . . .	43
4.5	Table simplexe pour le nœud 4. . . . .	44
4.6	Table simplex pour le nœud 5. . . . .	45

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

LE problème de transport est parmi les premiers problèmes traités par la recherche opérationnelle. Les modèles de transport intéressent un très grand nombre de problèmes de gestion parmi lesquels se trouvent évidemment les opérations de transport au sens habituel du terme, mais aussi d'autres types de questions analogues.

D'une manière générale, on entendra par problème de transport tout problème d'optimisation du transfert entre points-origine ou fournisseurs et points-destination ou clients. Lorsque ces points matérialisent des lieux géographiques et lorsque l'objet du transfert est un ensemble de marchandises, il s'agit du problème de transport au sens strict [1, 2, 3, 4]. Mais il peut s'agir, également de personnel jouant le rôle de points-origine, que l'on désire affecter dans les meilleures conditions à des fonctions vacantes jouant le rôle de point destinations.

La modélisation des problèmes de transport doit prendre en considération tous les critères de décision qui sont nombreux et diversifiés (multi-objectif). Les coûts de transport dépendent généralement de paramètres extérieurs non contrôlés, donc la modélisation du problème doit tenir compte de cette incertitude cette dernière est considérée de nature floue. Ensuite Nous avons mis au point les méthodes de résolutions d'un problème de transport[1, 2].

Les problèmes d'optimisation rencontrés en pratique sont généralement multi-objectifs, dans ce cas on recherche des solutions qui correspondent au meilleurs compromis. Les décideurs sont toujours confrontés à des situations où les données du problème sont imprécises ou incertaines : des données sur des événements du passé qui ne pouvaient pas être connues exactement en raison d'erreurs de mesure, des données sur des événements futurs ne pouvant pas être connues avec certitude contrairement au cas mono-objectif une solution optimale est facilement définie, avec précision [5, 6].

La classification des problèmes de transport peut être établie en fonction de la typologie (classification du nombre d'indice) du nombre d'indices et des méthodes de résolution correspondantes. Ce mémoire est composé de quatre chapitres :

Le premier chapitre traite le problème de transport classique. Nous donnons une description détaillée[7, 8, 9, 10].

Le deuxième chapitre, traitent les différentes méthodes de résolution de notre problème initiale[11, 12].

Nous avons consacré le troisième chapitre, sur l'optimisation multi-objectif en rappelant les définitions de base relatives à la dominance et l'efficacité d'une solution de base réalisable. Nous y avons inclus quelques approches utilisées pour la résolution des problèmes multi objectifs[13, 14].

Le quatrième chapitre constitue la partie essentielle de notre travail. Nous avons mis au point les méthodes de résolution d'un problème linéaire discret fractionnaire multi-objectif. Notre méthode est basée essentiellement sur la théorie des ensembles exposé dans le chapitre précédent

# PRÉSENTATION DU PROBLÈME DE TRANSPORT



## 1.1 INTRODUCTION

On appelle un problème de transport tout problème d'optimisation du transfert entre points-origine ou fournisseurs et points-destination où clients. Lorsque ces points matérialisent des lieux géographiques et lorsque l'objet du transfert est un ensemble de marchandises, il s'agit du problème de transport au sens strict. Les problèmes de transport les plus connus sont : le problème de transport classique à deux indices, le problème de répartition équilibrée, le problème d'affectation, le problème de tournées de véhicule ainsi que les problèmes de transport à indices multiples. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons qu'au problème de transport classique.

## 1.2 PRÉSENTATION DU MODÈLE DU TRANSPORT

### Description du problème de transport classique

Le problème de transport classique est en fait un cas particulier d'un problème de flux de réseaux.

Le problème de transport est un problème linéaire qui peut être représenté sous forme d'un graphe et qu'on peut le résoudre en utilisant les différentes méthodes de résolution des problèmes linéaires.

Le but du problème de transport est de déterminer la stratégie optimale pour la distribution d'un produit à partir d'un ensemble de sources d'approvisionnement, telles que des usines, appelées sources, vers divers centres de réparation, tels que des entrepôts, appelés destinations, afin de minimiser les coûts totaux de distribution. Chaque source est capable de fournir un nombre fixe d'unités du produit, généralement appelé capacités ou disponibilité, et chaque destination a une demande fixe, souvent appelée besoin.

On dispose de  $m$  dépôts de marchandise et  $n$  centres de demandes (magasins). On note par :

$a_i$  : La disponibilité au dépôt (i)

$b_j$  : La demande du magasin (j)

$X_{ij}$  : La quantité de marchandise à acheminer du dépôt (i) vers le magasin (j)

$C_{ij}$  : Le coût de transport d'une unité de marchandise du dépôt (i) au magasin (j).

- Au niveau des dépôts :  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i (a_i \geq 0, \forall i = 1, m)$  (l'offre)
- Au niveau des magasins :  $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j (b_j \geq 0, \forall j = 1, n)$  (la demande)

Le problème consiste à minimiser le coût de transport global de tous les dépôts vers tous les magasins. Ce coût est représenté par la fonction :

$$Z = Z(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \text{ où } x = (x_{ij}, i = \overline{1\dots m}, j = \overline{1\dots n}) [2].$$

**Condition d'existence d'un plan optimale de transport**

On suppose que les quantités  $a_i$  et  $b_j$  sont toutes positives ou nulles. De plus, pour que le problème de transport soit réalisable, il faut que les quantités produites soient supérieures ou égales aux quantités demandées, c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$$

Dans le cas où on aurait la condition précédente, on crée un dépôt fictif (supplémentaire), où on transporte la quantité produite restante pour avoir l'égalité :

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = K$$

Cette condition appelée condition de balance, c'est-à-dire l'offre est égale à la demande [1].

**Théorème 1.1** *Le problème de transport possède un plan optimal si et seulement si la condition de balance est vérifiée [1].*

*Dans ce cas le problème s'écrit sous la forme :*

$$(T) \left\{ \begin{array}{l} Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \\ \text{sc :} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad ; \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad ; \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0; i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (1.1)$$

*En effet,*

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j$$

**Cas où l'offre est supérieure à la demande**

Dans cette situation ( $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ ) Le modèle mathématique s'écrit alors de

la manière suivante :

$$(T) \left\{ \begin{array}{l} Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \\ \text{sc :} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad ; \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad ; \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0; i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (1.2)$$

**Conséquence 1**

Pour avoir l'équilibre (Cas où offre = demande) il faut ajouter une ligne (m+1) (dépôt fictif). Cela a pour conséquence l'ajout de (m variables d'écart)  $X_{m+1,j}, 1 \leq j \leq n$  dont les coefficients  $C_{m+1,j}$  sont nuls ( $C_{m+1,j} = 0$ ). La disponibilité au niveau du dépôt (m+1) est :

$$a_{m+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

**Cas où la demande est supérieure à l'offre**

Dans ce cas nous avons ( $\sum_{j=1}^n b_j > \sum_{i=1}^m a_i$ ) Le modèle mathématique s'écrit alors de la manière suivante :

$$(T) \left\{ \begin{array}{l} Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \\ \text{sc :} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad ; \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j \quad ; \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0; i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (1.3)$$

**Conséquence 2**

Pour avoir l'équilibre (offre = demande) il faut ajouter une colonne (n+1) (destination fictive). Cela a pour conséquence l'ajout de (n variables d'écart)  $X_{i,n+1}, 1 \leq i \leq m$  dont les coefficients  $C_{i,n+1}$  sont nuls ( $C_{i,n+1} = 0$ ).

La demande au niveau de la destination (n+1) est :

$$b_{n+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$$

**1.3 LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DU PROBLÈME DE TRANSPORT**

Le modèle du transport peut être représenté graphiquement en considérant une origine (dépôts) et une destination (clients).

Une marchandise doit être transportée de m centres de dépôts,  $A_i(i=1, \dots, m)$  vers n centres de consommation  $B_j(j=1, \dots, n)$ .

Les centres de dépôts disposent de  $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_m$ , unités du produit.

Les centres de consommation demandent,  $b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_n$  unités de produit.

(Schéma 1)

Le coût de livraison d'une unité  $X_{ij}$ ,  $i=1,m$  et  $j=1,n$  est connu et désigné par  $C_{ij}$ .

Notons que le transport de  $j$  vers  $i$  est interdit et qu'il n'existe aucun point intermédiaire entre une source  $i$  et une destination  $j$ .

Le problème de transport consiste alors à déterminer le nombre d'unités  $X_{ij}$  à transporter de  $i$  vers  $j$  de sorte que :

- Le stock soit écoulé c'est-à-dire :

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i, i=1, \dots, m$$

- La demande soit satisfaite c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j, j=1, \dots, n$$

- Le coût total de transport soit minimal c'est-à-dire :

$$\min Z(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

- Les quantités  $X_{ij}$  soient positives[3] :

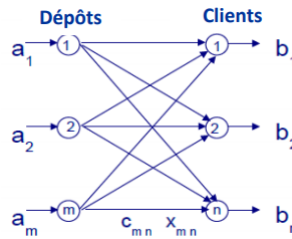


FIGURE 1.1 – Schéma 1

- Dans ce cas le problème se formule comme suit :

$$(T) \begin{cases} \min Z(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i & ; \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & ; \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0, & \forall i, \quad \forall j \end{cases}$$

#### 1.4 ÉCRITURE MATRICIELLE DU PROBLÈME DE TRANSPORT

Les données du problème de transport sont représentées sous forme d'un tableau appelé tableau de transport :

On considère pour illustrer ce tableau que  $n=1$  à IV et  $j=1$  à 5

Destinations Origines	1	2	3	4	5	Disponibilités
I	$C_{I,1} x_{I,1}$	$C_{I,2} x_{I,2}$	$C_{I,3} x_{I,3}$	$C_{I,4} x_{I,4}$	$C_{I,5} x_{I,5}$	$a_I$
II	$C_{II,1} x_{II,1}$	$C_{II,2} x_{II,2}$	$C_{II,3} x_{II,3}$	$C_{II,4} x_{II,4}$	$C_{II,5} x_{II,5}$	$a_{II}$
III	$C_{III,1} x_{III,1}$	$C_{III,2} x_{III,2}$	$C_{III,3} x_{III,3}$	$C_{III,4} x_{III,4}$	$C_{III,5} x_{III,5}$	$a_{III}$
IV	$C_{IV,1} x_{IV,1}$	$C_{IV,2} x_{IV,2}$	$C_{IV,3} x_{IV,3}$	$C_{IV,4} x_{IV,4}$	$C_{IV,5} x_{IV,5}$	$a_{IV}$
Demandes	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$\sum_{j=1}^m a_i = \sum_{i=1}^n d_j$

FIGURE 1.2 – Tableau de transport

(conventionnellement  $i=1$  à  $n$  et  $j=1$  à  $m$ ). il s'agit d'un tableau à double entrée (appelé tableau de contingence par les statisticiens).

Les lignes représentent les différentes origines et les colonnes les différentes destinations. Dans chaque case de la matrice centrale de ce tableau, sont mentionnés deux éléments : le coût dans le coin-ouest et les quantités des marchandises transportées dans le coin sud-est. La dernière ligne du tableau nous renseigne sur les quantités demandées par les différentes destinations. Chaque destination a une demande spécifique que l'on écrit respectivement de  $d_1$  à  $d_5$  dans ce tableau.

Dans le tableau du transport, les disponibilités doivent être égales aux demandes. Mais comme ce n'est pas toujours le cas dans la réalité, il suffit de faire quelques transformations pour l'adapter au problème traité. Si les demandes sont supérieures aux disponibilités, il suffit d'ajouter dans le tableau une colonne qui représente une destination fictive et lui attribuer un coût nul. Dans cette colonne, est mentionné l'excédent de la demande. Dans le cas où les disponibilités sont supérieures aux demandes, il suffit d'ajouter une ligne dans le tableau où sera mentionné l'excédent des disponibilités. Cette ligne supplémentaire représente une origine fictive.

Le problème de transport peut aussi se présenter sous forme matricielle :

$$\begin{cases} Z = CX \rightarrow \min \\ sc \\ AX = B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

où A est une matrice à  $(m+n)$  lignes et  $mn$  colonnes, B est un  $(m+n)$  vecteur colonne, C est un  $mn$ -vecteur ligne et X est un  $mn$ -vecteur colonne avec  $X = (X_{11}, X_{12}, \dots, X_{ij}, \dots, X_{mn})$ .

Pour  $m = 6$  et  $n = 5$  par exemple, la matrice A est donné par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de transport possède trois propriétés essentielles :

- A est une matrice uni modulaire : elle ne contient que des 0 et des 1
- Chaque vecteur colonne de A contient seulement deux valeurs positives et égales à 1.
- Pour un problème de transport avec m dépôts et n centres de consommation, le rang de la matrice A est égal a m+n-1 donc Rang(A)=1.

Par conséquent, une solution de base réalisable du problème de transport possède (m+n-1) composantes positives (de base) et  $mn-(m+n-1) = mn-m-n+1=(m-1)(n-1)$  composantes hors bases (nulle).

La matrice A contient donc une ligne redondante.

Bien que le problème de transport soit un problème linéaire, on ne peut, en général, le résoudre avec le simplexe car, non seulement le nombre de variables et de contraintes est important mais il faut aussi trouver la ligne redondante et la supprimer avant de résoudre. C'est pour cette raison que la méthode des potentiels (ou variables duales) a été désignée pour la recherche de la solution optimale du problème de transport[7].

## 1.5 FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME DE TRANSPORT

On peut formuler un problème de transport sous forme d'un programme linéaire, avec deux manières différentes.

### Formulation primale

Dans un problème de transport, on est amené à minimiser une application linéaire, appelée fonction objectif ou fonction économique qui est définie comme suit :

$$\begin{cases} \min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij}x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \\ x_{ij} \geq 0; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \end{cases}$$

### Écriture du programme dual

- On associe à chacune des contraintes primales une variables duale. La variable duale qui est associée à la contrainte origine i et la variable duale  $v_j$  a la contrainte destination j;
- L'objectif du problème dual est de rendre maximum une fonction linéaire des m variables  $u_i$  et des n variables  $v_j$ ;
- Les coefficients économiques de la fonction objectif duale (en ce qui concerne les variables  $u_i$  et  $v_j$ ) sont respectivement les disponibilités  $a_i$  et les demandes

$b_j$  du problème primal ;

- La matrice des coefficients des variables dans les contraintes est la transposée de la matrice utilisée dans le problème primal. Compte tenu de la structure spécifique de la matrice  $A$ , dans chacune des contraintes duales

n'interviendront que deux variables. De façon plus précise, dans la contrainte associée à la variable primale  $X_{ij}$ , seules les variables  $u_i$  et  $v_j$  apparaîtront ;

- La contrainte (i,j) s'exprime ainsi :  $u_i + v_j \leq C_{ij}$

L'écriture duale du problème de transport se présente alors de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max R = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \\ \text{sc :} \\ u_i + v_j \leq C_{ij} \\ u_i, v_j \in \mathbb{R}; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \\ u_i \geq 0; v_j > 0 \end{array} \right.$$

Où les variables  $u_i, v_j$  sont considérées comme des coûts fictifs, l'un est un coût d'envoi et l'autre de réception, elles sont appelées les potentiels ou les coûts duaux[7].

**La Relations entre le dual et le primal**

Les relations qui existent en programmation linéaire entre le primal et le dual se retrouvent dans le modèle de transport. En particulier,

-Si l'une des formalisations a une solution, l'autre en a une également et la valeur de la fonction objectif est la même, à l'optimum pour les deux formulations. Ainsi,

$$\min Z = Z^* = \max R = R^*$$

Soit encore

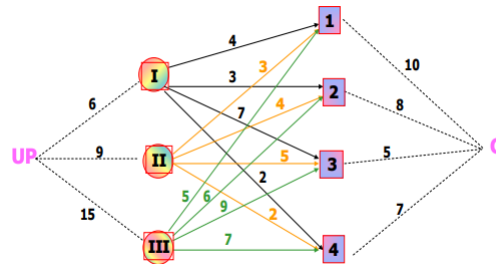
$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}^* = \sum_{i=1}^m a_i u_i^* + \sum_{j=1}^n b_j v_j^*$$

- Si la contrainte (i, j) duale n'est pas saturée à l'optimum, ce qui est matérialisé par une inégalité stricte, la variable  $X_{ij}$  est nulle dans la solution primale optimale[10].

**Exemple 1.1** *La sonatrach possède trois unités de production I,II et III d'un produit liquide au centre du pays, plus précisément à Alger,Blida et Tipaza. Elle doit livrer son produit à quatre clients dans des zones géographiques différentes qui sont Médéa, Boumerdas, Dellys et Boufarik représentées par les chiffres 1 à 4. Les demandes des clients sont respectivement de 10,8,5 et 7 m<sup>3</sup>, alors que les quantités disponibles dans les unités de production sont de 6,9 et 15m<sup>3</sup>. Les coûts de transport de ce produit des origines vers leurs destinations sont représentés dans le tableau suivant. On peut résumer toutes ces données dans un tableau, un graphe ou sous forme de programme linéaire. tableau de tranport*

Clients Unités	1	2	3	4	Disponibilités
I	4	3	7	2	6
II	3	4	5	2	9
III	5	6	9	7	15
Demandes	10	8	5	7	Unité : 10 <sup>3</sup> U.M

Représentation graphique de l'application



Comme il y a trois unités de production, on a trois segments qui aboutissent à trois sommets : Alger, Blida et Tipaza (I, II et III). À partir de ces trois sommets, on trace des vecteurs représentant les coûts de transport et qui se terminent au niveau de quatre sommets représentant les zones géographiques des clients, c'est-à-dire Médéa, Boumerdes, Dellys et Boufarik (1 à 4). De ces quatre sommets, on trace des segments représentant les demandes.

### Programme linéaire primal

**Fonction objectif :**

$$\min Z = 4x_{I,1} + 3x_{I,2} + 7x_{I,3} + 2x_{I,4} + 3x_{II,1} + 4x_{II,2} + 5x_{II,3} + 2x_{II,4} + 5x_{III,1} + 6x_{III,2} + 9x_{III,3} + 7x_{III,4}.$$

Contraintes liées aux disponibilités des dépôts :

$$x_{I,1} + x_{I,2} + x_{I,3} + x_{I,4} = 6$$

$$x_{II,1} + x_{II,2} + x_{II,3} + x_{II,4} = 9$$

$$x_{III,1} + x_{III,2} + x_{III,3} + x_{III,4} = 15.$$

Contraintes liées aux demandes des clients :  $x_{I,1} + x_{II,1} + x_{III,1} = 10$

$$x_{I,2} + x_{II,2} + x_{III,2} = 8$$

$$x_{I,3} + x_{II,3} + x_{III,3} = 5$$

$$x_{I,4} + x_{II,4} + x_{III,4} = 7.$$

Contraintes de positivité :  $x_{ij} = 0$  avec  $i = I$  à  $III$  et  $j = 1$  à  $4$ .

Programme linéaire dual.

$$\max Z' = 6u_I + 9u_{II} + 15u_{III} + 10v_1 + 8v_2 + 5v_3 + 7v_4$$

$$u_I + v_1 = 4u_{II} + v_3 = 5$$

$$u_I + v_2 = 3u_{II} + v_4 = 2$$

$$u_I + v_3 = 7u_{III} + v_1 = 5$$

$$u_I + v_4 = 2u_{III} + v_2 = 6$$

$$u_{II} + v_1 = 3u_{III} + v_3 = 9$$

$$u_{II} + v_2 = 4u_{III} + v_4 = 7$$

$$u_i = 0 \text{ avec } i = I \text{ à } III$$

$$v_j = 0 \text{ avec } j = 1 \text{ à } 4.$$

Vu que les produits transportés sont homogènes, on peut résoudre ce problème par la méthode du transport.

La résolution du problème de transport s'effectue en deux phases : la première consiste à calculer une solution de base, puis la seconde est consacrée à des itérations successives pour l'amélioration de la solution de base jusqu'à son optimisation.

**Cas particulier du modèle de transport**

La définition donnée du modèle de transport rend son extension possible à d'autres domaines de la gestion que celui du transport au sens strict. C'est ce qui se produit chaque fois que le problème peut s'assimiler à une question de mise en relation de points-origine et de points-destination. On envisage ici deux (2) applications du modèle de transport :

- Le problème d'affectation.
- Le problème de tournées de véhicules (VRP).

**Exemple 1.2 Problème d'affectation**

Le problème d'affectation est un cas particulier du problème de transport dans lequel chaque source est affectée à une seule destination. Etant donné  $n$  tâches et  $n$  ouvriers, une affectation consiste à affecter la tâche  $i$  à l'ouvrier  $j$  de façon :

- ★ Chaque ouvrier  $j$  ait une et une seule tâche.
- ★ Chaque tâche  $i$  est attribuée à un ouvrier.

L'affectation d'une tâche  $i$  à un ouvrier  $j$  coûte  $C_{ij}$ . Le problème d'affectation consiste à trouver une affectation de coût minimum[10].

**Formulation du problème**

Les variables de décisions sont définies comme suit :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si la tâche } i \text{ est effectuée à l'ouvrier } j; \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Les contraintes du problème d'affectation s'écrivent donc simplement :

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = \overline{1, n}$$

(La ressource  $i$  doit être affectée à une et une seule activité).

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = \overline{1, n}$$

(L'activité  $j$  ne peut être affectée qu'à une et une seule ressource)[10].

Le problème linéaire d'affectation s'écrit comme :

$$\begin{cases} \min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \\ x_{ij} \in \{0, 1\}; i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Le problème dual s'écrit

$$\begin{cases} \max W = \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j \\ u_i + v_j, i, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

**Exemple 1.3 Le problème de tournées de véhicules (VRP)**

Le problème de tournées de véhicules est la combinaison de plusieurs problèmes de

voyageur de commerce. Il a fait l'objet de nombreux travaux et classifications de ses variantes dans la littérature.

**Définition 1.1** *Le problème de tournées (de routage) de véhicules est une extension du problème du voyageur de commerce. Il a été introduit pour la première fois par Dantzig et Ramser sous le nom " Truck Dispatching Problem " et a depuis fait l'objet d'études intensives pour le modéliser et le résoudre.*

*Dans sa version la plus basique dite " Capacitated VRP (CVRP) " ou VRP avec contraintes de capacité, une flotte de véhicules de capacité finie, basée dans un dépôt, doit assurer des tournées entre plusieurs clients (ou villes) ayant demandé chacun une certaine quantité de marchandises. L'ensemble des clients visités par un véhicule désigne la tournée de celui-ci. Chaque client doit être desservi une et une seule fois et chaque tournée commence et se termine au dépôt.*

*L'objectif du (CVRP) est de minimiser le coût total, c'est-à-dire la somme des distances ou des temps de parcours des tournées, tout en respectant la contrainte de capacité des véhicules : la quantité de marchandises livrées sur une tournée ne doit pas dépasser la capacité du véhicule qui l'assure[4].*

### Modélisation du problème de tournées de véhicules

L'ensemble des paramètres nécessaires pour effectuer la formulation mathématique est :

$n$  : nombre de sommets

$m$  : nombre de véhicules (k)

$D_k$  : capacité de véhicules (k)

$T_k$  : temps maximal de parcours du véhicule (k)

$d_i$  : demande du sommet i ( $d_1 = 0$ )

$t_i^k$  : temps nécessaire au véhicule (k) pour décharger ou charger au sommet i

$t_{ij}^k$  : temps nécessaire au véhicule (k) pour traverser l'arc (i,j)

$c_{ij}$  : coût ou distance du sommet i au sommet j

### Variables de décision

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si (i,j) est parcouru par le client (k)} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Alors le modèle mathématique est :

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \sum_{k=1}^m x_{ij}^k \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m x_{ij}^k = 1 \quad j = \overline{2, n} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m x_{ij}^k = d_i \quad i = \overline{2, n} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ip}^k - \sum_{j=1}^n x_{pj}^k = 0 \quad k = \overline{1, m}, p = \overline{1, n} \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n d_i \left( \sum_{j=1}^n x_{ij}^k \right) \leq D_k \quad k = \overline{1, m} \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n t_j^k \sum_{j=1}^n x_{ij}^k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij}^k x_{ij}^k \leq t_k \quad k = \overline{1, m} \quad (6)$$

$$\sum_{j=2}^n x_{1j}^k \leq 1 \quad k = \overline{1, m} \quad (7)$$

$$\sum_{i=2}^n x_{i1}^k \leq 1 \quad k = \overline{1, m} \quad (8)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}$$

La fonction objective (1) consiste à minimiser le coût total de transport. Les équations (2) et (3) assurent que chaque client soit servi par un et un seul véhicule. La continuité d'une tournée est représentée par les équations (4) : un véhicule visitant un sommet doit en sortir. Les équations (5) sont les contraintes de capacité d'un véhicule, celles de (6), les contraintes de durée totale d'une tournée. Les équations (7) et (8) assurent le non dépassement de la disponibilité d'un véhicule[8].

## 1.6 PROBLÈME DE TRANSPORT ÉQUILIBRÉ

Minimiser  $z = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_{ij} x_{ij}$  soumis à des contraintes

Si :  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_{i, i=1,2,\dots,m} \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_{j, j=1,2,\dots,n} x_{11}$  pour tous les  $i$  et  $j$ . On dit que le problème de transport est équilibré lorsque l'offre totale de toutes les sources est égale à la demande totale de toutes les destinations, sinon, on dit que le problème est déséquilibré.

$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$  pour un problème non équilibré

Si :  $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$  Un problème de transport ne peut avoir une solution réalisable que s'il est équilibré. Un problème déséquilibré peut être rendu équilibré en ajoutant un centre d'approvisionnement fictif (rangé) ou un centre de demande fictif selon les besoins[9].

## 1.7 PROBLÈME DE TRANSPORT NON ÉQUILIBRÉ

Si dans un problème de transport, la somme de l'offre disponible de toutes les sources n'est pas égale à la somme des demandes de toutes les destinations, c'est-à-dire que le problème est dit déséquilibré (ou non équilibré).

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$$

$a_i$  représentent les

quantités de produits disponible de  $n$  origines et  $b_j$  les quantités de produits demandés à  $m$  destinations.

Dans ce modèle de transport déséquilibré, deux cas peuvent se présenter :

**Premier cas :** les disponibilités sont supérieures aux demandes. Ainsi, dans ce cas, les demandes sont totalement satisfaites et il reste une certaine quantité  $Q_{m+1}$  de produits disponibles qui est égale à la formule qui suit :

$$Q_{m+1} = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j$$

Il suffit d'affecter cette quantité à un centre de consommation fictif et d'attribuer un coût de transport nul aux quantités transférées des origines à ce centre.

**Deuxième cas :** les disponibilités sont inférieures aux demandes.

Les demandes ne peuvent être totalement satisfaites et le déficit est de  $D_{n+1}$ . Pour pouvoir combler ce déficit, il suffit de créer une source supplémentaire fictive dont la capacité est égale à  $D_{n+1}$ .

Le coût de transport pour les livraisons de cette source fictive aux différentes destinations sera considéré comme nul[7].

## 1.8 PROBLÈME DE TRANSPORT AVEC DES ITINÉRAIRES INTERDITS

Il arrive souvent dans les problèmes de transport que certaines « routes » ou « itinéraires » ne sont pas praticables. Il s'agit de transport avec itinéraires interdits. Le programme linéaire associé à ce problème est le suivant :

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m C_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = a_i$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = b_j$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Il existe au moins un couple  $(i,j)$  tel que  $(1 < i < n)$  et  $(1 < j < m)$ , pour lequel la liaison est interdite. La résolution de ce problème est simple. Il suffit de trouver une solution de base au problème sans restriction, remplacer dans cette solution les  $C_{ij}$  par 0 lorsque la « route » est permise et par 1 lorsque la « route » est interdite. Résoudre alors le problème avec ces nouvelles données par la méthode de stepping stone[7], ou la méthode de votre choix.

## 1.9 PROBLÈME DE TRANSPORT AVEC ITINÉRAIRES IMPOSÉS

Lorsque dans un modèle de transport, la marchandise transportée doit obligatoirement suivre un chemin prédéterminé, il s'agit d'un problème de transport avec « itinéraire imposé ».

L'écriture générale du programme linéaire associé à ce problème est la suivante :

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m C_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = a_i$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = b_j$$

$x_{ij} \geq 0$  Il existe au moins un couple (i,j) tel que ( $1 < i < m$ ) et ( $1 < j < m$ ), pour lequel la liaison est imposée.

Dans un problème de transport, où l'itinéraire est imposé, trois cas peuvent se présenter.

- On impose à ce chemin une quantité minimale à transporter.
- On impose à ce chemin une quantité exacte à transporter.
- On impose à ce chemin une quantité maximale à transporter.

Nous présentons dans ce qui suit l'étude des deux premiers cas seulement.

- Quantité minimale à transporter.

Dans ce premier cas, dans lequel une quantité minimale  $T_{mi}$  à transporter est imposée dans un itinéraire, il faut ramener le problème à un cas où il n'y a pas de restriction, d'où la nécessité de :

- \* Soustraire de la disponibilité  $a_i$ , la quantité minimale  $T_{mi}$ .
- \* Soustraire de la demande  $b_j$ , la quantité minimale  $T_{mi}$ .

La soustraction est nécessaire pour les demandes et disponibilités simultanément afin d'équilibrer le problème.

Après ces transformations et à partir du nouveau tableau obtenu, résoudre le problème.

Lorsque la solution optimale est obtenue, ajouter la quantité  $T_{mi}$  dans la case (i,j) de la solution optimale[7].

## 1.10 PROBLÈME DE DÉGÉNÉRESCENCE

Puisque l'algorithme de transport n'est qu'un cas particulier de la programmation linéaire, il peut alors se présenter le phénomène de dégénérescence. Concrètement, cette situation peut se produire lorsqu'il y a égalité entre une disponibilité et une demande ou, lorsque la somme des capacités provenant de  $x$  origines ( $x < n$ ) est égale à la somme de  $y$  destinations ( $y < m$ ).

Généralement, on constate qu'il y a un problème de dégénérescence lorsque le nombre de cases utilisées pour une solution est inférieur à  $(m + n - 1)$  ou plus de  $(m - 1) \times (n - 1)$  cases vides. Comme dans un programme linéaire, l'éventualité de dégénérescence dans un modèle de transport peut entraîner le risque de cyclage, c'est-à-dire qu'après plusieurs itérations, on peut aboutir à une solution déjà évaluée. Pour éviter le risque de cyclage, il suffit de faire varier légèrement les disponibilités et demandes. Il existe plusieurs méthodes pour effectuer ces petites variations, nous en présentons une seule qui est due [15] et qui consiste à faire varier les disponibilités et demandes telles que :

$$A'_i = A_i + \varepsilon \quad i = 1 \text{ à } n$$

$$D'_j = D_j \quad j = 1 \text{ à } (m-1)$$

$$D'_m = D_m + n \cdot \varepsilon$$

Avec  $A_i$  qui représente les disponibilités et  $D_j$  les demandes[7].

### 1.11 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté un cas particulier des problèmes linéaires : le problème de transport. Par la suite, nous avons mis l'accent sur quelques applications du problème de transport en outre, le problème d'affectation, tournées de véhicules et le problème de transport avec itinéraires interdits et imposés et aussi le problème de dégénérescence .

# MÉTHODES DE RÉOLUTION D'UN PROBLÈME DE TRANSPORT

# 2

## 2.1 INTRODUCTION

Le problème du transport est un problème linéaire qui peut être représenté sous forme d'un graphe et qu'on peut le résoudre en utilisant les différentes méthodes de résolution des problèmes linéaires qu'on va présenter par la suite.

Il existe plusieurs méthodes permettent d'obtenir une solution de base pour un problème de transport. On distingue dans ce chapitre quatre méthodes qui sont le plus souvent utilisées :

La méthode du coin nord-ouest, La méthode de l'élément minimal, et la méthode de branchement et coupes (branch and cut), La méthode de Vogel.

## 2.2 RÉOLUTION DU PROBLÈME DE TRANSPORT

Pour résoudre le problème de transport, il n'est pas intéressant d'utiliser l'algorithme du simplexe à cause du nombre important de variables et de contraintes.

L'exploitation de la structure spéciale d'une matrice de transport a permis de développer une méthode de résolution dite méthode des potentiels qui n'est rien d'autre qu'une adaptation de l'algorithme révisé du simplexe au problème de transport. Par conséquent, les étapes de cette méthode sont :

- La recherche de la solution de base de départ.
- Calcul des variables duales et des coûts marginaux.
- Test d'optimalité de la solution obtenue.
- L'amélioration de la solution si celle-ci n'est pas optimale.

Dans ce qui suit nous décrirons en détail chacune de ces étapes.

### **Méthode de résolution d'un problème de transport**

il existe plusieurs méthodes de résolutions, comme la méthode de coin nord-ouest, méthode de l'élément minimal ... etc, dont voici quelques-unes[1].

## 2.3 MÉTHODE DE COIN NORD-OUEST

L'idée de la méthode est le suivant :

On choisit la case  $(1,1)$  située au coin nord-ouest du tableau de donnée, et on lui affecte la quantité  $X_{11} = \min a_1, b_1$ .

i.Si  $X_{11} = a_1$ , alors la quantité disponible au dépôt  $A_1$  est entièrement

transportée ceci saturera la première ligne du tableau.

Dans le tableau réduit, on remplacera  $b_1$  par  $(b_1 - X_{11})$  et on répétera la même procédure que précédemment.

ii. Si  $X_{11} = b_1$ , alors la demande du point de distribution  $B_1$  est entièrement satisfaite par  $A_1$  et ceci sature la première colonne .

Dans le tableau réduit, on remplacera  $a_1$  par  $(a_1 - X_{11})$  et on fera la procédure. De cette manière, après  $(m+n-1)$  opérations, on trouve  $(m+n-1)$  quantités positives  $X_{ij}$  affectées à  $(m+n-1)$  cases, et les cases restantes auront des quantités nulles  $X_{ij} = 0$ , on obtiendra ainsi un plan basique de transport .

**Exemple 2.1** *Considérons le problème de transport dont la matrice des coûts, les disponibilités et les demandes sont dans le tableau suivant, trouver un plan basique initial par la méthode de coin Nord-ouest :*

	B1	B2	B3	B4	$a_i$
A1	1	4	2	3	20
A2	5	1	3	4	21
A3	2	5	1	2	35
$b_j$	12	23	28	13	76

FIGURE 2.1 – 1er tableau de la méthode de coin Nord-ouest

*On appliquant la méthode de coin Nord-ouest, on trouve :*

$$X_{11} = \min\{20, 12\} = 12; X_{12} = \min\{20 - 12, 23\} = 8;$$

$$X_{22} = \min\{21, 23 - 8\} = 15; X_{13} = \min\{20 - 15, 28\} = 6;$$

$$X_{33} = \min\{35, 28 - 6\} = 22; X_{34} = \min\{35 - 22, 13\} = 13;$$

*Les composantes basiques du plan  $X$  sont représentées en gras dans le tableau ci-dessous et  $X_{ij}=0$  pour les cases restantes.*

	B1	B2	B3	B4	$a_i$
A1	(12)	(8)	2	3	20
A2	5	(15)	(6)	4	21
A3	2	5	(22)	(13)	35
$b_j$	12	23	28	13	76

FIGURE 2.2 – 2ème tableau de la méthode de coin Nord-ouest

$$Z(x) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 C_{ij} X_{ij} = (1 \times 12) + (4 \times 8) + (1 \times 15) + (36 \times) + (1 \times 22) + (2 \times 13) = 125$$

**Avantage de la méthode :**

★Elle est facile à mettre en œuvre.

**Inconvénients de la méthode :**

★Elle ne fait pas intervenir les coûts unitaires de transport.

\*La solution de base obtenue est loin de la solution optimale.

## 2.4 MÉTHODE DE MEILLEUR COIN NORD-OUEST (L'ÉLÉMENT MINIMAL)

La méthode de meilleur coin nord-ouest (l'élément minimal) et aussi appelée la méthode de coin nord-ouest modifiée. Cette méthode donne en général un plan basique initial plus proche du plan basique optimal que celui obtenu par la méthode du coin Nord-ouest (Cette méthode nous donne une solution initiale proche à la solution optimale). Le principe consiste à choisir au début une case  $(i_1, j_1)$  qui correspond à l'élément  $C_{i_1 j_1}$  tel que :  
 $C_{i_1 j_1} = \min\{C_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ , puis on posera  $X_{i_1 j_1} = \min\{a_{i_1}, b_{j_1}\}$  dans la case  $(i_1, j_1)$ .

Si  $C_{i_1 j_1} = a_{i_1}$ , on exclut la ligne  $i_1$  et on remplace le nombre  $b_{j_1}$  par  $(b_{j_1} - X_{i_1 j_1})$ . Dans le cas où  $X_{i_1 j_1} = b_{j_1}$ , on exclut la colonne  $j_1$  et on remplace le nombre  $a_{i_1}$  par le nombre  $(a_{i_1} - X_{i_1 j_1})$ . Ensuite on refait la même procédure avec le tableau réduit.

Ce processus sera répété  $(m+n-1)$  fois et permettra de trouver les  $(m+n-1)$  variables basiques du plan initial recherché.

**Exemple 2.2** Par la méthode de meilleur coin nord-ouest (l'élément minimal), trouver un plan basique initial dans le tableau de transport suivant :

	B1	B2	B3	B4	$a_i$
A1	1	4	2	3	20
A2	5	1	3	4	21
A3	2	5	1	2	35
$b_j$	12	23	28	13	76

FIGURE 2.3 – 3ème tableau de la méthode de coin Nord-ouest

On a :

$$c_{11} = \min_{i,j} c_{ij} = 1, x_{11} = \min\{20, 12\} = 12;$$

$$c_{22} = \min_{j \neq 1} c_{ij} = 1, x_{22} = \min\{22, 23\} = 21;$$

$$c_{33} = \min_{i \neq 2, j \neq 1} c_{ij} = 1, x_{33} = \min\{35, 28\} = 28;$$

$$c_{34} = \min_{i \neq 2, j \neq 1, 3} c_{ij} = 1, x_{34} = \min\{35 - 28, 13\} = 7;$$

$$c_{14} = \min_{i \neq 2, 3, j \neq 1, 3} c_{ij} = 1, x_{14} = \min\{20 - 12, 13 - 7\} = 6;$$

$$c_{12} = \min_{i \neq 2, 3, j \neq 1, 3, 4} c_{ij} = 1, x_{12} = \min\{20 - 18, 23 - 21\} = 2;$$

Les composantes basiques du plan  $X$  sont représentées en gras dans le tableau ci-dessous et  $X_{ij} = 0$  pour les cases restantes :

	B1	B2	B3	B4	$a_i$
A1	1 (12)	4 (2)	2	3 (6)	20
A2	5	1 (21)	3	4	21
A3	2	5	1 (28)	2 (7)	35
$b_j$	12	23	28	13	76

FIGURE 2.4 – 4ème tableau de la méthode de coin Nord-ouest

Soient  $X$  et  $X'$  les plans basiques obtenus respectivement par la méthode du coin nord-ouest et par celle de l'élément minimal, alors on aura :

$$Z(x) = (1 \times 12) + (4 \times 8) + (1 \times 15) + (3 \times 6) + (1 \times 22) + (2 \times 13) = 125.$$

$$Z(x') = (1 \times 12) + (4 \times 2) + (3 \times 6) + (1 \times 21) + (1 \times 28) + (2 \times 7) = 101.$$

On remarque bien que  $Z(x') < Z(x)$ .

2ème étape :

### La recherche d'une solution optimale

Consiste à améliorer la solution trouvée à l'étape précédente en utilisant la méthode des potentiels (UV), le principe de la méthode des potentiels est issu de la théorie de la dualité pour cela, introduisons le problème dual du problème (1.1) dans le chapitre précédent (1) (Critère d'optimalité).

$$(D) \begin{cases} W(y) = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \longrightarrow \max \\ u_i + v_j \leq c_{ij}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \\ \text{où } y = (u, v), u = (u_i, i = \overline{1, m}), v = (v_j, j = \overline{1, n}) \end{cases}$$

**Théorème 2.1** Soient  $x^\circ$  et  $y^\circ = (u^\circ, v^\circ)$  deux solutions optimales respectivement du problème (P) et de son dual (D), alors les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_i^\circ + v_j^\circ = c_{ij}, & \text{si } x_{ij}^\circ > 0 \\ u_i^\circ + v_j^\circ \leq c_{ij}, & \text{si } x_{ij}^\circ = 0 \end{cases} \text{ sont vérifiées}$$

$$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Par la méthode de simplexe on construit  $\Delta_{ij}$  tels que :

$$\Delta = u_i + v_j - c_{ij} = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

Par construction on a :

$$u_i + v_j - c_{ij} = 0, \quad (i, j) \in U_B \quad (6)$$

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} = 0, \quad (i, j) \in U_H \quad (7)$$

$u_i, v_j$  : sont appelés potentiels

$\Delta_{ij}$  : sont appelés variables estimations

$U_B$  : sont cases de base

$U_H$  : sont appelés cases hors base

**Théorème 2.2** (critère d'optimalité) Les inégalités :  $\Delta_{ij} \leq 0, (i, j) \in U_H$ , sont suffisantes pour

*l'optimalité de plan basique de transport x. Elles sont aussi nécessaires dans le cas où x est non dégénérée. Avec :*

$$u_i + v_j - c_{ij} = 0 \quad (i, j) \in U_B \quad (3)$$

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \quad (i, j) \in U_H \quad (4)$$

*Les  $U_B$  sont appelés cases de base et les  $U_H$  cases hors base.*

*★Méthode des potentiels (uv) Soit x un plan basique de transport de départ, auquel correspond  $U_B$ . Si le critère d'optimalité n'est pas vérifié, alors on cherche une case  $(i_0, j_0) \in U_H : \Delta_{ij} = \max_{(i,j) \in U_H} \Delta_{ij}$ .*

*A l'aide de la case  $(i_0, j_0)$  et des cases de  $U_B$ , on construit un cycle qui est d'ailleurs unique. Puis on affecte des signes successivement (+) et (-) aux sommets de ce cycle, en commençant par le sommet  $(i_0, j_0)$  affecté du signe (+) et on se mouvant dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire.*

*Parmi les sommets du cycle affectés du signe (-), on choisit celui où la variables  $x_{ij}$  est minimale et on pose :  $\Theta = \min x_{ij} = x_{i_1 j_1}$*

*Pour les sommets affectés du signe (+), on ajoute aux variables  $x_{ij}$  la quantité  $\Theta$  puis on soustrait la même quantité des variables  $x_{ij}$ , correspondante aux sommets affectés du signe(-) Toutes les autres variables  $x_{ij}$  resteront inchangées.*

*On obtient ainsi un nouveau plan basique de transport x, avec un nouvel ensemble basique  $U_B = \{U_B \setminus (i_1, j_1)\} \cup \{(i_0, j_0)\}$ .*

*Cette itération sera répétée jusqu'à ce que le critère d'optimalité soit vérifié[1].*

## 2.5 MÉTHODE DE VOGEL

La méthode de Vogel peut avoir certains avantages sur la règle du coin nord-ouest pour déterminer une solution initiale de base. En effet, elle peut permettre d'obtenir plus rapidement une solution optimale en moins d'itérations et parfois la solution initiale peut être optimale. La démarche est la suivante :

1. Construire la matrice des coûts en incluant les disponibilités et demandes. Ajouter une destination fictive ou une origine fictive pour que l'offre soit égale

à la demande 
$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

2. Évaluer la différence entre les deux coûts les plus petits pour chaque ligne et chaque colonne. Nous obtenons ainsi m différences pour les lignes et n différences pour les colonnes.

3. Choisir la ligne ou la colonne ayant le maximum de différences, faire un choix arbitraire si le maximum des différences n'est pas unique.

4. Allouer la quantité la plus grande possible (tout en respectant les contraintes) à la cellule possédant le coût le plus faible de la ligne ou de la colonne obtenue à l'étape 3.

5. Supprimer la ligne ou la colonne qui est saturée.

6. Retourner à l'étape 2 mais cette fois les calculs seront fait sur la matrice résultante. La procédure se termine lorsque toutes les lignes et les colonnes sont saturées[2].

**Exemple 2.3** *la procédure suivie est résumée dans le tableau ci-dessous  
Le coût de transport associé à cette solution est : 475.*

	B	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	<i>offre</i>
A	$A_1$	10	2	20	11	15
	$A_2$	12	7	9	20	25
	$A_3$	4	14	16	18	10
	<i>demande</i>	5	15	15	15	50

itération	calcul des différences							
	lignes			colonnes				
	1	2	3	1	2	3	4	
1	8	2	10	6	5	7	7	$x_{31} = 15$
2	9	2	2	—	5	7	7	$x_{12} = 5$
3	—	11	2	—	—	7	2	$x_{23} = 5$
4	—	20	18	—	—	—	2	$x_{24} = 10$
5	—	—	18	—	—	—	18	$x_{34} = 5$

## 2.6 MÉTHODE DE COUPES ET BRANCHEMENTS (BRANCH AND CUT)

Cette technique est connue également sous le terme anglais Branch and Cut. L'idée générale des méthodes de coupes est de résoudre un programme en nombres entiers comme une séquence de programmes linéaires. Un algorithme de coupes et branchements (Branch-and-Cut algorithm) est une technique de séparation et évaluation dans laquelle on applique un algorithme de coupes pour calculer la borne de chaque sous-problème. Cette méthode introduite par Padberg et al (1991) pour le problème du voyageur de commerce s'est avérée très efficace, elle est maintenant largement utilisée pour résoudre d'une manière exacte des problèmes d'optimisation combinatoire[10].

### Algorithme de Branch-and-Cut

A moins que  $P = NP$ , il semble impossible de posséder un algorithme de coupes pour résoudre un PLNE sans branchement. Le couplage d'un algorithme de coupes et d'un branchement est appelé algorithme de coupes et branchement ou plutôt Branch-and-Cut algorithm :

- chaque nœud de l'arbre de branchement correspond à une relaxation résolue par une méthode de coupes : donc un nombre polynomial mais important de répétition de l'algorithme de coupes. La relaxation d'un nœud s'arrête quand il n'y a plus d'inégalités violées trouvées par l'algorithme.
- l'arbre de branchement suit le principe générique du branchement. On peut noter que cet algorithme produit un grand nombre de points fractionnaires (qui seront coupés) : ils sont à un moment donné des points extrêmes de la

formulation PL en cours de traitement. En utilisant une heuristique primale (rapide) pour chacun de ces points, on énumère un grand nombre de solutions entières... parmi elles il y a bien souvent la solution optimale

L'algorithme du "Branch and Cut" est une méthode qui conjugue les efforts de l'algorithme du "Branch and Bound" et de la méthode des coupes polyédrales. Ainsi, pour résoudre un programme linéaire en nombres entiers, le "Branch and Cut" commence par résoudre une relaxation du problème puis il applique la méthode des coupes polyédrales sur la solution trouvée. Si celle-ci n'arrive pas à obtenir une solution entière alors le problème est divisé en plusieurs sous-problèmes qui seront résolus de la même façon. L'algorithme de base est décrit dans algorithme 1.

Une telle approche a été utilisée pour la première fois pour le problème de "linear ordering" par Grötschel, Junger et Reinelt [GJR84]. Le terme de "Branch and Cut" était introduit par Padberg et Rinaldi [PR87, PR91] pour un algorithme de résolution du problème du voyageur de commerce. Dans [PR91], Padberg et Rinaldi ont établi le premier état de l'art de cet algorithme, en introduisant des nouvelles procédures telles que la génération de colonnes, des procédures de séparation sophistiquées et une utilisation efficace du solveur du programme linéaire[11].

#### Algorithme du Branch and Cut

On veut résoudre le problème d'optimisation combinatoire

$\min\{c^t : Ax \geq b, x \in \mathbb{R}^n\}$  avec  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $b \in \mathbb{R}^m$  liste des problèmes vides ;

Initialiser le programme linéaire par le sous système de contraintes  $(A_1, B_1)$

avec  $A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$  et  $b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$  avec  $m_1 \ll m$ ;

Étapes d'évaluation d'un problème

Calculer la solution optimale  $\bar{x}$  du programme linéaire

$c^t \bar{x} = \min\{c^t : A_1 x \geq b, x \in \mathbb{R}^n\}$ ; Solution courante = Appliquer la méthode des coupes polyédrales();

Fin étapes d'évaluation

**Si** Solution courante est réalisable **alors**

$x^* = \bar{x}$  est la solution optimale de  $\min\{c^t : Ax \geq b, x \in \mathbb{R}^n\}$ ; **Sinon**

Ajouter le problème dans liste des problèmes ;

**Tant que** liste des problèmes non vide **faire**

Sélectionner un problème ;

Brancher le problème en deux ou plusieurs sous problèmes ;

Résoudre les nouveaux sous problèmes (en appliquant les étapes d'évaluation);

**Fin Tant que**[12].

## 2.7 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons rappelé brièvement les méthodes de résolution de notre problème principal, Le chapitre suivant fera l'objet du problème du transport multi- objectif.

# PROBLÈME DE TRANSPORT MULTI-OBJECTIFS

# 3

## 3.1 INTRODUCTION

Dans la plupart des problèmes dans le monde sont de nature multi-objectif car plusieurs critères sont à considérer simultanément. Optimiser un tel problème relève donc l'optimisation multi- objectif. Les problèmes multi-objectif sont courants, par exemple considérons la conception d'un système informatique complexe (du point de vue matériel et logiciel) comme on peut en trouver dans les téléphones mobiles, voitures, etc. Le concepteur doit souvent minimiser le coût de production et maximiser les performances de son produit, comme maximiser un temps de réponse pour exécuter une opération ou minimiser sa consommation d'énergie.

D'autres Objectifs dépendants de l'application peuvent être importants tel que la fiabilité. Ceux-ci peuvent être soit explicitement définis comme des critères d'optimisations (objectifs) ou formulés comme étant des contraintes. Dans notre exemples ces contraintes peuvent être liées à certaines dimensions imposées au produit à ne pas dépasser.

Ces objectifs sont généralement conflictuels et/ou présentés dans des unités différentes. Les problèmes de ce type sont résolus par la programmation multi objectif. La difficulté d'un problème multi-objectif (MOP) réside dans le fait qu'il soit un problème mathématique mal posé dans le sens où il n'admet pas de solution optimale. En effet, il n'existe pas une solution meilleure que toutes les autres simultanément pour tous les objectifs. Le concept de solution optimale n'a donc pas de sens dans ce contexte. Nous allons utiliser le terme solution optimale au sens de Pareto ou solution non dominée ou encore solution efficace, il nous faut donc en donner les définitions précises.

Avec une approche multi-objectif, la notion d'optimum unique n'est plus valable puisque on ne se concentre plus sur une seule cible mais essayons d'améliorer simultanément la qualité d'un ensemble d'objectifs.

En fait, une optimisation multi-objectif ne produit pas une solution unique, mais un ensemble de solutions dites efficaces. Ces solutions sont appelées solutions optimales de Pareto et l'ensemble de toutes ces solutions efficaces est appelé front de Pareto ou ensemble efficace.

Avoir un ensemble de solutions efficaces, plutôt qu'une seule, offre au décideur

une approche plus robuste et une vision générale plus large du problème, ce qui peut l'aider, considérablement, dans sa prise de décision finale. Disposer d'un ensemble d'options optimales signifie que, si quelque chose change dans le scénario d'origine, le décideur peut réagir avec une autre solution efficace déjà disponible dans le panier de choix efficace.

Quand les variables de décision doivent prendre des valeurs entières, on parle alors d'optimisation multi-objectif en nombre entiers[5].

### 3.2 FORMULATION DU PROBLÈME

Mathématiquement, un problème d'optimisation multi-objectif (MOP) peut être défini de la manière suivante :

$$(MOP) \begin{cases} \text{"max"} z(x) = (z_1(x), z_2(x), \dots, z_k(x)) \\ \text{sc} \\ x \in S \end{cases}$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur de décision.

$z(x) = (z_1(x), z_2(x), \dots, z_k(x))$  représente le vecteur de fonctions objectifs (ou critères de décision) et  $k$  est le nombre d'objectifs,  $k \geq 2$ .

$S$  est l'ensemble non vide des solutions réalisables vérifiant un certain nombre de contraintes.

Le symbole " " signifie qu'en général on ne peut pas trouver des solutions réalisables qui maximisent les  $k$  critères simultanément et évidemment, le maximum peut être remplacé par un minimum.

L'ensemble  $\mathbb{R}^n$  qui contient  $S$  est dit espace de décision ;

L'ensemble  $\mathbb{R}^k$  qui contient  $z(S)$  est dit espace des objectifs ;

L'ensemble  $z(S)$  est la projection de l'espace  $S$  sur l'espace des objectifs.

Dans ce qui suit, nous donnons quelques définitions relatives aux problèmes multi-objectifs dans le cas d'une maximisation.

L'ensemble  $Y=Z(S)$  représente les points réalisables dans l'espace des critères (espace objectifs), et  $Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_r(x))$  avec  $Y_i = Z_i(x)$ [6].

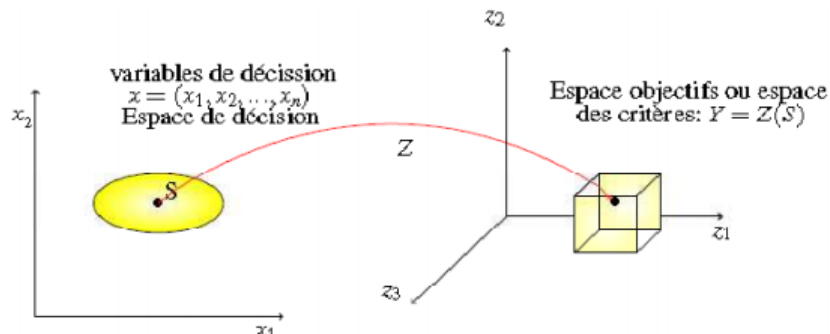


FIGURE 3.1 – Représentation l'espace des décisions et l'espaces des objectifs correspondants

**Définition 3.1** (Dominance) Soient deux vecteurs critères  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_r)$  et  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_r)$  on dit que  $y$  domine  $z$  si et seulement si

$$\begin{cases} \forall i \in [1, \dots, r] Y_i \leq Z_i \\ \text{et } \exists i \in [1, \dots, r] y_i < Z_i \end{cases}$$

si  $y$  domine  $z$ , alors  $y$  est au moins aussi bon que  $z$  sur tous les critères et meilleurs que lui sur au moins un des critères[6].

**Définition 3.2** Soient deux vecteurs critères  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_r)$  et  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_r)$  on dit que  $y$  domine faiblement  $z$  si et seulement si :

$$\forall i \in [1, \dots, r] \quad Y_i \leq Z_i \text{ [6].}$$

**Définition 3.3** (Efficacité) Soit  $y^*$  un vecteur critère  $\in Y$ , on dit que  $y^*$  est non dominé si et seulement s'il n'existe aucun autre vecteur critère  $y \in Y$  tel que :

$$\forall i \in [1, \dots, r] \quad Y_i \leq Y_i^* \text{ et } Y_i < Y_i^* \text{ pour au moins un indice } i \text{ [6].}$$

**Définition 3.4** Une solution  $x^* \in S$  est Pareto optimale si et seulement s'il n'existe pas une solution  $x \in S$ , tel que  $y(x)$  domine  $y(x^*)$ , ie  $Y_i(x) < Y_i(x^*)$  pour au moins un indice  $i$ .

La définition de la Pareto optimalité découle directement de la notion de dominance. Elle signifie qu'il est impossible de trouver une solution qui améliore les performances sur un critère sans que cela entraîne une dégradation des performances sur au moins un autre critère. Elles forment le front Pareto. Les solutions Pareto optimales sont aussi connues sous le nom de solutions efficaces, non-dominées ou non inférieures[6].

**Définition 3.5** Une solution  $x^* \in S$  est dite fortement efficace, s'il n'existe aucun vecteur  $x \in S$ , tel que  $x \neq x^*$  et  $Y_i(x) < Y_i(x^*)$  pour au moins un indice  $i$ .

Une solution est fortement efficace si son vecteur critère est fortement non dominé[6].

**Définition 3.6** Une solution est faiblement efficace si son vecteur critère est faiblement dominé[6].

**Définition 3.7** Le vecteur idéal  $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*)$  est le vecteur qui optimise chacune des fonctions objectives  $f_i$ , i.e :  $y_i^* = \min(Z_i(x)), x \in S$

Il est clair que si le vecteur idéal est réalisable, il est la solution du problème (MOP), mais ce n'est pas en général possible à cause des conflits qui existent entre les critères[6].

**Définition 3.8** Le vecteur  $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*)$  défini par :  $\underline{y}_i^* = \min(Z_i(x)), x \in S$  est le points anti-idéal appelé aussi point Nadir[6].

**Définition 3.9** Un vecteur de référence  $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*)$  est un vecteur qui définit le but à atteindre par chaque objectif  $Z_i$ [6].

**Définition 3.10** C'est l'ensemble des vecteurs de décision qui ne sont pas dominés

$$FP^* = \{x \in X \mid \nexists x' \in X, x < x'\} [6].$$

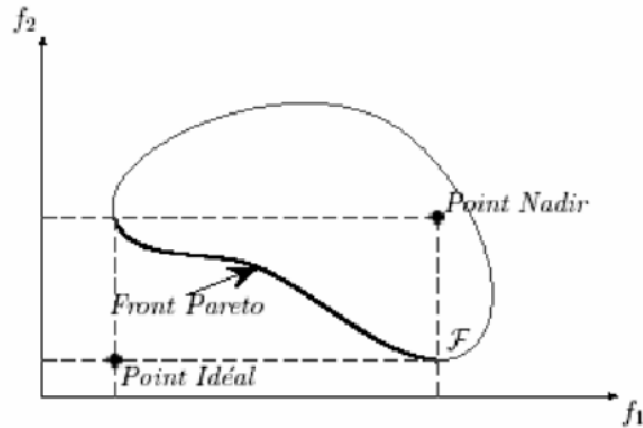


FIGURE 3.2 – Point Nadir et point Idéal

- Remarque 3.1**
- Le point nadir est le vecteur des valeurs les plus mauvaises de chaque objectif  $z_i, i = 1, \dots, k$ .
  - Si pour un objectif, il existe plusieurs solutions optimales alors, la matrice des gains n'est pas unique. Ainsi, le point nadir peut ne pas être unique.
  - Le point nadir sert à restreindre l'espace de recherche  $R^{(k)}$ . Il peut être utilisé comme point de réservation (valeurs non souhaitables) utilisé dans les méthodes itératives.

**Définition 3.11** [6] Un ensemble  $A$  est convexe, si et seulement si l'équivalence suivante est vérifiée :  $x \in A \cap \{y\} \in A \Leftrightarrow [x, y] \subset A$  La convexité est le premier indicateur de la difficulté du problème. En effet, plusieurs méthodes d'optimisation sont incapables de résoudre d'une façon optimale des problèmes non convexes. Mais il existe d'autres indicateurs tout aussi importants, notamment la continuité, la nature des variables de décision (entières ou réelles),...

### I.3. Problématique

La difficulté principale d'un problème multi-objectif est qu'il n'existe pas de définition de la solution optimale. Le décideur peut simplement exprimer le fait qu'une solution est préférable à une autre mais il n'existe pas une solution meilleure que toutes les autres.

Dès lors, résoudre un problème multi-objectif ne consiste pas à rechercher la solution optimale mais l'ensemble des solutions satisfaisantes pour lesquelles on ne pourra pas effectuer une opération de classement. Les méthodes de résolution des problèmes multi-objectifs sont donc des méthodes d'aide à la décision car le choix final sera laissé au décideur.

Pour répondre à ce problème, il existe deux types de comportement. Le premier est de ramener un problème multi-objectif à un problème uni-critère au risque d'enlever toute signification au problème.

Le second comportement est de d'apporter des réponses au problème au prenant en compte l'ensemble des critères. La différence entre ces deux

communautés s'exprime dans le schéma ci-dessous.

- Soit le décideur intervient dès le début de la définition du problème, en exprimant sa préférence, afin de transformer un problème multi-objectif en un problème uni-critère.

- Soit le décideur effectue son choix dans l'ensemble des solutions proposées par le solveur multi-objectif [6].

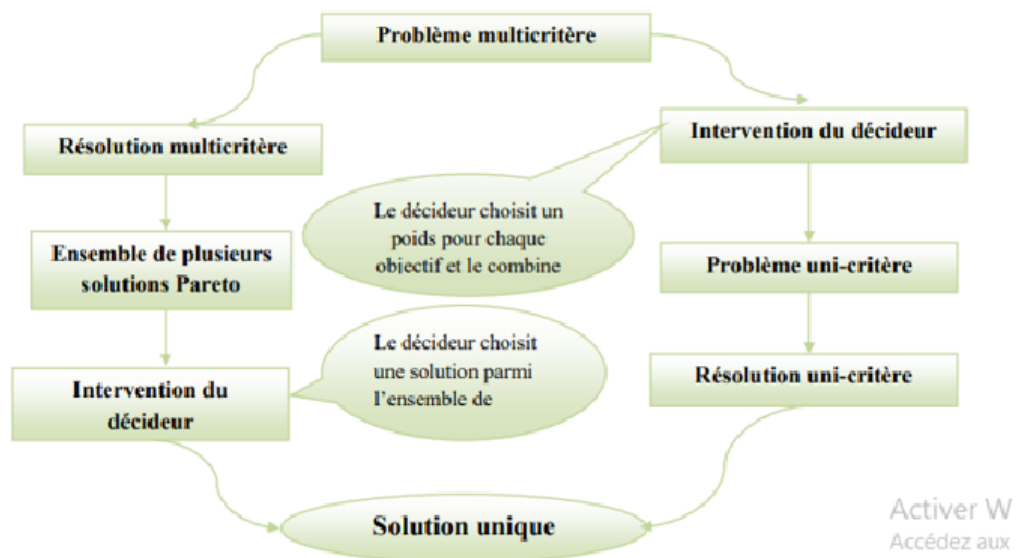


FIGURE 3.3 – Mode de résolution

### 3.3 CLASSIFICATION DES APPROCHES MULTICRITÈRES

Dans la programmation mathématique multi objectif, on distingue trois principales approches qui sont définies dans :

**Approche à priori (décideur → recherche)**

Dans ce type de méthode, le problème multi objectif est remplacé par un problème mono-objectif. Dans ce cas le décideur est supposé connaître à priori le poids de chaque objectif afin de les mélanger dans une fonction scolarisant unique.

**Approche à postériori des préférences (recherche → décideur)**

Dans cette approche, le décideur prend sa décision dans un ensemble de solutions efficaces calculées par un solveur. La qualité de la décision dépend du choix de la méthode de résolution car, celle-ci va devoir donner un ensemble de résultats le plus représentatif possible de l'espace des objectifs [16].

**Approche interactive (recherche ↔ décideur)**

C'est une approche qui consiste en une alternance de deux types d'étapes.

- L'étape de calcul exécutée par l'analyste
- Les compromis fournis par la première étape sont présentés au décideur

qui réagit surtout en apportant des informations complémentaires sur les préférences. Cette quantité d'information est injectée dans le modèle utilisé et permet de construire de nouveaux compromis. Le processus continu jusqu'à satisfaction du décideur ou après la satisfaction d'un certain test d'arrêt indiquant l'étape finale (comme le nombre d'itérations fixé par le décideur).

**Problème de transport multi-objectif (PTMO)**

Dans les applications pratiques, il est souvent nécessaire de prendre en compte plus d'un objectif pour rendre le problème plus réaliste. Les objectifs peuvent être le coût du transport, la fiabilité du transport, le temps de transport et détérioration des produits, etc. si  $O$  est le nombre d'objectifs à optimiser et  $C_{(o)ij}$  représente la pénalité unitaire de transport (coût du transport, profit, temps etc.) pour l'objectif  $P, P=1, \dots, p$ , la formulation mathématique de problème s'écrit comme suit [6] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min / \max Z_0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij}^p x_{ij}, P = 1, \dots, p \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} (\leq; =) a_i, \forall i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} (\geq; =) b_j, \forall j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0, \forall i, j \end{array} \right.$$

**2.1.Méthodes de résolution des problèmes de transport multi-objectif**

**1.Méthode interactive[13]**

Dans la méthode interactive, une procédure de résolution interactive est mise en place, ses étapes sont répétées et le (DM) spécifie les informations de préférence progressivement au cours du processus de résolution. En d'autres termes, la phase de demande de préférence et la génération de solutions alternent jusqu'à ce que le (DM) ait trouvé la solution la plus favorable. Après l'étape d'approche, certaines informations sont fournies au (DM), et il/elle est invité(e) à répondre à certaines questions concernant l'évaluation critique de la solution proposée et à fournir. Certaines informations pour exprimer sa préférence. Dans ce cas, le (DM) dirige le processus de résolution et seule une partie des solutions optimales doit être générée et évaluée. Les principales étapes de la méthode interactive sont les suivantes :

- 1 : Initialisation.
- 2 : Génération d'un point de départ optimal.
- 3 : Demande d'informations sur la préférence du (DM).
- 4 : Génération d'une nouvelle solution optimale en fonction de la préférence et présentation au (DM). Si plusieurs solutions sont générées, demandez au DM de choisir la meilleure.

**2.Méthodes non interactives[13]**

Le processus de résolution de ces méthodes dépend de la détermination des solutions à coefficients et, finalement, le (DM) est responsable du choix de la solution préférée à partir de cet ensemble. Dans cette situation, la procédure de résolution peut prendre un certain temps pour rechercher la région possible pour la ou les solutions à coefficients. Un autre point à noter ici est que le (DM) a des difficultés à faire des choix entre les différentes alternatives en raison de son manque d'expérience et/ou d'informations

complètes sur l'environnement décisionnel. Les principales étapes des méthodes interactives sont résumées ci-dessous :

- 1 : Déterminer une solution de base à coefficient initial.
- 2 : Les solutions de base à coefficient sont énumérées et construites.

### 3.Objectif de la programmation

La programmation par objectifs (GP) est l'une des techniques les plus efficaces pour résoudre les problèmes d'optimisation à objectifs multiples. Elle est utilisée comme un outil puissant qui s'appuie sur les techniques hautement développées et éprouvées de la programmation linéaire et offre en même temps une solution unique au système complexe d'objectifs concurrents et une technique largement acceptée et appliquée, principalement en raison de la philosophie sous-jacente de la satisfaction. La programmation par objectifs a été appliquée dans divers domaines et constitue un excellent modèle pour une grande variété de problèmes du monde réel comportant des objectifs multiples. En général, la programmation par objectifs minimise les écarts indésirables par rapport aux valeurs cibles. Il s'agit d'une méthode particulière à critères multiples qui suppose que le décideur connaît les valeurs des objectifs et leur importance relative. Elle peut être conçue pour prendre en compte plusieurs objectifs simultanément dans la recherche d'une solution de compromis et peut s'appuyer sur la programmation mathématique.

L'approche de base de la programmation des objectifs consiste à fixer un objectif numérique spécifique  $G$  pour chaque fonction objectif  $F_0(x)$  et à minimiser l'écart total par rapport aux objectifs spécifiés  $P$  ( $p=1$ ), où  $p$  est l'écart par rapport à l'objectif  $G$  pour la fonction objectif :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{p=1}^P (d_p^+ + d_p^-) \\ Z_p(x) - d_p^+ + d_p^- = G_p, \quad \forall p \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad \forall j \\ x_{ij} \geq 0, \forall i, j \\ d_p^+ + d_p^- \geq 0, \quad \forall p \end{array} \right.$$

### Approches de modélisation de l'incertitude dans les problèmes de transport

Dans de nombreux problèmes du monde réel, les données disponibles ne sont ni exactes ni précises, et ce pour plusieurs raisons : insuffisance d'informations, imprécision des informations, incomplétude des informations, incertitude des informations, manque de fiabilité des informations, doute sur les informations, ... Afin de décrire et d'extraire des informations utiles cachées dans des données incertaines et de les utiliser correctement et judicieusement dans des problèmes pratiques, les chercheurs ont élaboré de nombreuses théories et proposé de nombreuses approches pour résoudre ce problème. Les approches les plus fréquemment utilisées pour résoudre le problème de l'incertitude ou des informations inconnues dans le domaine des transports sont présentées ci-dessous :

#### Approche floue

Un problème de transport fuzzy se produit lorsque les offres, les demandes, les capacités et les coûts de transport d'un problème de transport sont

inconnus et caractérisés par des ensembles fuzzy (/variables). Un ensemble fuzzy, aux limites imprécises, a été introduit par [17], comme une extension de l'ensemble classique (crisp). Un nombre AFuzzy est décrit par une fonction d'appartenance dont la valeur est comprise dans l'intervalle d'unités réelles  $[0,1]$ , tandis qu'un nombre crisp est décrit par une valeur d'appartenance qui est soit 0, soit 1. Dans un ensemble AFuzzy, les données sont représentées par différents niveaux de fonctions d'appartenance, tels que les fonctions triangulaires, trapézoïdales et LRFuzzy.

Les ensembles flous ont connu de nombreux types d'extensions. [18] a souligné qu'il est préférable de représenter les contraintes sous forme de nombres flous triangulaires à valeur d'intervalle plutôt que sous forme de nombres flous normaux. Les ensembles flous intuitionnistes ont été introduits par Atanassov (1986) comme une généralisation des ensembles flous où les degrés d'appartenance et de non-appartenance sont utilisés. Atanassov et Gargov ont généralisé les ensembles flous intuitionnistes en tant qu'ensembles flous intuitionnistes à valeurs d'intervalle. Dans lesquels les degrés d'appartenance et de non-appartenance sont des intervalles plutôt que des nombres exacts. Les ensembles flous de type 2 sont proposés par Zadeh définis à la fois par l'appartenance primaire et secondaire afin de fournir plus de degrés de liberté et de flexibilité. Les ensembles flous de type 2 à intervalles peuvent être considérés comme un cas particulier des ensembles flous de type 2 généraux dans lesquels toutes les valeurs de l'appartenance secondaire sont égales à 1.

#### **Approche par intervalles**

La programmation par intervalles est l'une des approches permettant d'aborder l'incertitude. Elle possède des caractéristiques intéressantes car elle ne nécessite pas la spécification ou l'hypothèse de distributions probabilistes (comme dans la programmation stochastique) ou de distributions possibilités (comme dans la programmation floue). La programmation par intervalles suppose simplement que l'on dispose d'informations sur le domaine de variation de certains (ou de tous) les paramètres, ce qui permet de spécifier un modèle avec des coefficients d'intervalle.

Les problèmes de transport par intervalles se posent lorsque les offres, les demandes, les capacités et les coûts de transport dans le problème de transport sont exprimés sous forme d'ensembles d'intervalles (/variables).

#### **Approche stochastique**

Lorsque les valeurs des paramètres de la fonction objectif et des contraintes de la (STP) ne peuvent être connues à l'avance, on peut les traiter comme des variables aléatoires selon l'expérience statistique (nous considérons que les données de l'échantillon sont suffisantes). La (STP) devient alors une (STP) stochastique, généralement désignée par (SSTP). Ainsi, pour une solution, les fonctions objectives correspondantes deviennent des variables aléatoires et les contraintes deviennent des relations impliquant des variables aléatoires. Pour ces conditions, il est impossible de traiter le problème par des méthodes déterministes classiques, et la théorie des probabilités doit être utilisée pour interpréter ces conditions. L'idée principale est de choisir certains critères pour classer les variables aléatoires, puisqu'il n'est pas possible de les classer directement.

En suivant ces idées, on peut construire différents modèles pour le (SSTP), selon différents critères de classement.

**Approche incertaine**

Compte tenu de la complexité du monde réel, plusieurs auteurs étaient conscients du fait qu'il était généralement inapproprié de considérer les différents paramètres du problème de transport comme des nombres entiers. Ils doivent être considérés comme des variables. Mais dans de nombreux cas, aucune donnée étudiée n'est disponible pour estimer une distribution de probabilité de ces variables. Comme il est bien connu que la théorie des probabilités n'a aucun effet dans le cas d'un manque de données observées suffisantes, il n'y a pas d'autre choix que d'inviter des experts du domaine pour évaluer les paramètres ci-dessus. Par conséquent, pour faire face à de telles situations, la théorie de l'incertitude a été fondée par Liu[13] sur la base des axiomes de normalité, de dualité, de qu'additivité et de produit.

De nos jours, la théorie de l'incertitude est devenue une branche des mathématiques axiomatiques pour la modélisation des degrés de croyance.

**Approche approximative**

Pour traiter l'incertitude, la théorie des ensembles bruts développée par Pawlak peut être utilisée avec succès. La théorie des ensembles bruts s'est avérée être un outil mathématique très puissant pour traiter les descriptions vagues d'objets. Une hypothèse fondamentale de la théorie des ensembles bruts est que tout objet d'un univers est perçu à travers les informations disponibles, et que ces informations peuvent ne pas être suffisantes pour caractériser exactement l'objet. Une façon de le faire est l'approximation d'un ensemble par d'autres ensembles. Ainsi, un ensemble rugueux peut être défini par une paire d'ensembles nets, appelés approximations inférieure et supérieure, qui sont initialement produits par une relation d'équivalence.

Les problèmes de transport brutaux surviennent lorsque les paramètres du problème de transport sont initialement pris comme des variables brutes basées sur l'estimation subjective des experts. En outre, ces estimations approximatives sont convenablement approchées en tant que variables normales incertaines et le modèle conceptuel de programmation incertaine a été développé.

Chacune de ces approches est utilisée selon la nature des données disponibles et la modélisation retenue pour le problème à résoudre[13].

**Nouveaux modèles de problèmes de transport :**

Dans de nombreuses applications de la programmation non linéaire, un rapport de deux fonctions doit être maximiser ou minimiser ces problèmes sont communément appelés programmes fractionnaires.

La formule mathématique d'un programme fractionnaire peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \max Z(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \\ h(x) \leq 0, \end{cases}$$

Sous les hypothèses classiques :

- $f, g$  et  $h$  sont des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^n$ ,
- l'ensemble de solution réalisables  $X = \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) \leq 0\}$  n'est pas vide.
- $\forall x \in X : g(x) > 0$

Quand les deux fonctions de ce rapport sont des fonctions affines et le domaine des solutions réalisable est décrit par des contraintes linéaires, on parle alors de programmes fractionnaires linéaires.

**Programmes fractionnaires multi-objectifs :**

Le problème de maximisation simultanée de plusieurs fractions conduit à un

programme fractionnaire multi-objectif (PFMO) qui est formulé comme suit :

$$(PFMO) \begin{cases} \max Q_i(x) = \frac{f_i(x)}{g_i(x)}, i \in \{1, \dots, r\} \\ s.c \\ x \in S \end{cases}$$

Où  $g_i(x) > 0 \quad \forall x \in S, \forall i \in \{1, \dots, r\}$ . Dans les auteurs ont classifié les problèmes de programmation fractionnaire multi-objectif en neuf catégories que voici :

1. programmation fractionnaires multi-objectif général.
2. programmation linéaires fractionnaire multi-objectif.
3. programmation linéaires fractionnaire stochastique multi-objectif.
4. programmation linéaires fractionnaire multi-objectifs bi-niveaux.
5. programmation linéaires fractionnaire multi-objectifs avec paramètres flous.
6. programmation linéaire plus linéaires fractionnaires multi-objectif.
7. programmation linéaire fractionnaires multi-objectif mixte.
8. programmation linéaire fractionnaires min-max multi-objectif.
9. programmation linéaire fractionnaires robuste min-max multi-objectif.

En général, les problèmes de (PFMO) sont utilisés pour modéliser des rapports tirés des problèmes du monde réel tels que les stocks/ventes, Les bénéfiques/coûts, les dettes/investissement et autres. Ainsi, les (PFMO) se posent notamment lors de la planification financière on dans les problèmes de minimisation de risque et dans plein d'autres domaines.

Les articles de la littérature ont traité les (PFMO) de différentes perspectives, ainsi on trouve ceux qui abordent la dualité des programmes fractionnaires multi-objectifs, généralement pour des fractions concaves ou linéaires, ou bien ceux qui proposent des méthodes approchées de résolution souvent pour les problèmes linéaires fractionnaires flous.

En contrepartie, on trouve les méthodes exactes telles que celle de M. ABBAS et M. MOULAI ou la méthode de M. E-A CHERGUI et M. MOULAI [14] qui sont des procédures de B&C utilisant un même schéma d'exploration mais différentes méthodes de coupes [5].

### 3.4 CONCLUSION

Dans ce chapitre notre objectif était d'introduire les concepts fondamentaux liés aux problèmes de transport multi-objectif et la programmation fractionnaire linéaire dans le cas multi-objectifs à savoir la définition formelle du problème multi-objectif. On a cité quelques méthodes de résolutions et leur modélisation.

# MÉTHODES DE RÉOLUTION D'UN PROBLÈME LINÉAIRE DISCRET FRACTIONNAIRE MULTI-OBJECTIF

# 4

## 4.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on présente un algorithme exact pour résoudre un problème de maximisation linéaire fractionnaire en nombres entiers à deux niveaux avec plusieurs objectifs au niveau supérieur et un seul objectif au niveau inférieur (IFMOBP). La première phase de l'algorithme commence par trouver la solution optimale à deux niveaux du problème de programmation linéaire fractionnaire à deux niveaux avec un seul objectif aux deux niveaux, en se basant sur la coupe de Dantzig pour trouver la deuxième meilleure solution de la première fonction objectif du niveau supérieur. La deuxième phase explore avec la coupe efficace pour générer l'ensemble des solutions efficaces sans énumérer le domaine entier.

## 4.2 DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Les programmes à deux niveaux linéaires fractionnaires en nombres entiers avec des fonctions objectives multiples au niveau supérieur peuvent être formulés comme suit :

$$(IFMOBP) \left\{ \begin{array}{l} \max_{(x,y)} F^1(x,y) = \frac{(c_1^1 x + c_2^1 y + \alpha^1)}{(d_1^1 x + d_2^1 y + \beta^1)} \\ \max_{(x,y)} F^2(x,y) = \frac{(c_1^2 x + c_2^2 y + \alpha^2)}{(d_1^2 x + d_2^2 y + \beta^2)} \\ \vdots \\ \max_{(x,y)} F^k(x,y) = \frac{(c_1^k x + c_2^k y + \alpha^k)}{(d_1^k x + d_2^k y + \beta^k)} \\ \text{s.c} \\ A_1^1 x + A_2^1 y \leq b^1 \\ \text{où } y \text{ résout} \\ \left\{ \begin{array}{l} \max_y f(x,y) = \frac{(p^1 x + p^2 y + \omega)}{(q^1 x + q^2 y + \delta)} \\ \text{s.c} \\ A_1^2 x + A_2^2 y \leq b^2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \text{ et les entiers} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1)$$

où

$$x \in \mathbb{R}^{n_1} \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{R}^{n_2} \quad (2)$$

sont des variables contrôlées par le décideur du niveau supérieur et du niveau inférieur, respectivement

$$F, f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, n = n_1 + n_2 \quad (3)$$

sont les fonctions d'objectif de niveau supérieur et de niveau inférieur, respectivement ;

$k \geq 2$  est le nombre de fonctions d'objectif du leader.

$$A_1^1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}; A_2^1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}; b^1 \in \mathbb{R}^{m_1}$$

$$A_1^2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}; A_2^2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}; b^2 \in \mathbb{R}^{m_2}$$

$$c_1^i, d_1^i, p^1, q^1 \in \mathbb{R}^{n_1}; \quad \text{les constantes} \quad \omega, \delta, \alpha^i, \beta^i \in \mathbb{R}, \quad i \in \{1, \dots, \kappa\}$$

#### 4.2.1 Région de contraintes

La région de contraintes de l'(IFMOBP), notée S, est définie par toutes les contraintes imposées au leader et au suiveur comme suit :

$$S = \{(x, y) : A_1^1 x + A_2^1 y \leq b^1, A_1^2 x + A_2^2 y \leq b^2, x \geq 0, y \geq 0\} \quad (4)$$

Dans tout cet article, on suppose que S n'est pas vide et que  $(d_1^i x + d_2^i y + \beta^i) > 0$  sur S pour tous les  $i \in \{1, \dots, \kappa\}$ , ainsi que  $(q^1 x + q^2 y + \delta) > 0$ .

Soit  $\mathbb{Z}^n$  l'ensemble des solutions entières sur S. Ainsi,  $D = S \cap \mathbb{Z}^n$ .

Dans un problème à deux niveaux, le niveau supérieur fait son choix en premier, puis le niveau suivant réagit en choisissant un y qui optimise sa fonction objective.

#### 4.2.2 Problème au niveau inférieur

Pour un x donné, le problème de niveau inférieur (LLIFP) peut être écrit comme :

$$(LLIFP(x)) \begin{cases} \max_y f(x, y) = \frac{(p^1 x + p^2 y + \omega)}{(q^1 x + q^2 y + \delta)} \\ A_2^2 y \leq b^2 - A_1^2 x \\ y \geq 0, \quad \text{et les entiers} \end{cases} \quad (5)$$

M(x) est l'ensemble des solutions optimales au problème de niveau inférieur :

$$M(x) = \arg \max_y \{f(x, y) : A_2^2 y \leq b^2 - A_1^2 x; \quad \text{pour un x donnée}\} \quad (6)$$

#### 4.2.3 Région inductible

La région réalisable du décideur de niveau supérieur, appelée région inductible  $\mathbb{R}$ , est implicitement définie par le problème d'optimisation de

niveau inférieur :  $\mathbb{R} = \{(x, y^*) \in D, y^* \in M(x)\}$

Par conséquent, le successeur a une influence sur la région réalisable du niveau supérieur et sur les résultats de sa fonction objectif unique ou multiple. Sur les résultats de sa fonction objectif unique ou multiple. En particulier, si  $M(x)$  n'est pas singleton et que le leader ne peut pas forcer le suiveur à choisir une réponse, le leader ne peut pas obtenir son maximum sur  $\mathbb{R}$ .

Pour éviter cette situation, on suppose que la solution optimale du niveau inférieur est unique. En d'autres termes, pour chaque valeur  $x$  du problème de niveau supérieur, il y aura une solution unique  $y$  au problème de niveau inférieur [19].

Tous les points de  $\mathbb{R}$  sont des solutions réalisable à deux niveaux. En tenant compte de la description précédente, le problème de bilevel formule dans (1) peut être écrit comme un problème multiobjectif standard avec des fonctions objectives linéaires fractionnaires comme suit :

$$(IFMOBP) \left\{ \begin{array}{l} \max_{(x,y)} F^1(x, y) = \frac{(c_1^1 x + c_2^1 y + \alpha^1)}{(d_1^1 x + d_2^1 y + \beta^1)} \\ \max_{(x,y)} F^1(x, y) = \frac{(c_1^2 x + c_2^2 y + \alpha^2)}{(d_1^2 x + d_2^2 y + \beta^2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \max_{(x,y)} F^\kappa(x, y) = \frac{(c_1^\kappa x + c_2^\kappa y + \alpha^\kappa)}{(d_1^\kappa x + d_2^\kappa y + \beta^\kappa)} \\ s.c \quad (x, y) \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (7)$$

De nombreuses approches pour résoudre le problème d'optimisation multi-objectif à deux niveaux [20, 21, 22, 23] utilisent le concept d'efficacité. Les solutions efficaces sont des solutions faisables à deux niveaux qui ne peuvent pas être améliorées pour une fonction leur performance dans au moins une des autres fonctions objectives.

L'objectif est de chercher à obtenir la meilleure des solutions faisables à deux niveaux en fonction de toutes les fonctions objectives. selon toutes les fonctions objectives, appelées solutions efficaces de l'IFMOBP, conformes à la définition suivante :

**Définition 4.1** [21] Soit le couple  $(x, y) \in \mathbb{R}$  est une solution efficace du (IFMOBP) si et seulement s'il n'existe aucun couple  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}$ , tel que  $F^i(\bar{x}, \bar{y}) \geq F^i(x, y)$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, \kappa\}$  et  $F^i(\bar{x}, \bar{y}) > F^i(x, y)$  pour au moins un  $i \in \{1, \dots, \kappa\}$ . Sinon,  $(x, y)$  n'est pas efficace et son vecteur de critère  $F(x, y)$  est domine par le vecteur de critère  $F(\bar{x}, \bar{y})$ , où  $F(x, y) = F^i(x, y)_{i=1, \dots, \kappa}$ . Le problème linéaire entier fractionné à deux niveaux avec une seule fonction objective à chaque niveau peut être formulé comme suit :

$$(BP) \left\{ \begin{array}{l} \max_{(x,y)} F^1(x, y) = \frac{(c_1^1 x + c_2^1 y + \alpha^1)}{(d_1^1 x + d_2^1 y + \beta^1)} \\ s.c \quad (x, y) \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (8)$$

Le décideur cherche à maximiser son objectif sur les solutions réalisables à deux niveaux, appelées solution optimale de la BP, selon la définition suivante :

**Définition 4.2** Une solution faisable à deux niveaux  $(x, y) \in \mathbb{R}$  est une solution optimale du problème (8) si et seulement si il n'existe aucun  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}$ , tel que  $F^1(\bar{x}, \bar{y}) > F^1(x, y)$ [24]. Pour générer l'ensemble de solutions efficaces du problème principal (1), la méthode proposée est basée sur la résolution, à chaque étape  $\ell$ , d'un problème de programmation linéaire fractionnaire (ULFP $_{\ell}$ ) ( $\ell \in \mathbb{N}$ ) au niveau supérieur définie par :

$$(ULFP_{\ell}) \begin{cases} \max F^1(z) = \frac{(c^1 z + \alpha^1)}{(d^1 z + \beta^1)} \\ \text{s.t } z \in S_{\ell} \end{cases} \quad (9)$$

ou  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ ,  $S_0 = S$  et  $S_{\ell}$  est un sous-ensemble de l'ensemble original  $S$ .

#### 4.2.4 Les gradients réduits des objectifs fractionnaires linéaires

Soit  $z^{*(\ell)}$  la solution entière obtenue après avoir résolu le problème (9) en utilisant, probablement, le processus de branchement de ramification.  $B_{\ell}$  et  $N_{\ell}$  désignent respectivement l'ensemble des variables de base et l'ensemble des variables hors base de  $z^{*(\ell)}$ .

Soit  $\gamma_j^i$  la  $j^{\text{ème}}$  composante du vecteur gradient réduit  $\bar{\gamma}^i$  pour chaque fonction du problème de niveau supérieur  $F^i$ ,  $i \in \{1, \dots, \kappa\}$  au dernier tableau simplex ;

$$\bar{\gamma}^i = \bar{\beta}^i \bar{c}^i - \bar{\alpha}^i \bar{d}^i \quad (10)$$

ou  $\bar{c}^i, \bar{d}^i, \bar{\alpha}^i$  et  $\bar{\beta}^i$  sont des valeurs actualisées.

Le théorème suivant de [25] donne la condition d'optimalité pour le problème (9).

**Théorème 4.1** Une solution faisable de base  $z^{*(\ell)}$  est une solution optimale du problème (9) si et seulement si le vecteur gradient réduit  $\bar{\gamma}^1$  et tel que  $\bar{\gamma}_j^1 \leq 0$  pour tout  $j \in N_{\ell}$ .

### 4.3 DESCRIPTION DE LA MÉTHODE.

Soit  $S_E$  l'ensemble des solutions efficaces du problème (1) initialise à l'ensemble vide.

L'algorithme proposé est une méthode basée sur le branchement et la coupure, qui consiste à résoudre le programme (9) à chaque étape de l'algorithme, en utilisant une méthode de Cambini et Martein[26]. Chaque programme (9) correspond à un nœud  $\ell$  dans un arbre structure. Dans le cas où cette solution optimale n'est pas entière, deux nouveaux programmes fractionnaires linéaires sont créés en utilisant le processus de branchement et résolus comme le problème (9).

La première phase de l'algorithme commence par la recherche de la solution optimale du problème (8) basé sur la coupe de dantzig. Pour ce faire, la coupe définie à partir de la table de simplex correspondant à la solution optimale entière  $z^{*(\ell)}$  du problème (9) est :

$$\sum_{j \in N_{\ell}} z_j \geq 1 \quad (11)$$

La coupe de dantzig (11) est ajoutée au tableau simplex actuel, ce qui permet d'éliminer la solution optimale entière  $z^{*(\ell)}$  du problème (9) et de trouver la deuxième meilleure solution entière solution du problème (9). par conséquent, l'ensemble  $S_{\ell+1}^1$  est obtenu en appliquant (11) à  $z^{*(\ell)}$  [27]

$$S_{\ell+1}^1 = \left\{ z \in S_\ell : \sum_{j \in N_\ell} z_j \geq 1 \right\}. \quad (12)$$

Il s'ensuit que la coupure (11) élimine de  $S_\ell$  uniquement la solution optimale entière du problème (9).

Une fois qu'une solution optimale entière du problème (8) est obtenue, la deuxième phase de l'algorithme, explore en utilisant la coupe efficace de Chergui et Moulaï [14], pour générer l'ensemble des solutions efficaces sans énumérer l'ensemble du domaine entier. Pour ce faire, l'ensemble des indices de toutes les directions croissantes des critères pour chaque nœud  $\ell$ , est défini comme suit :

$$H_\ell = \left\{ j \in N_\ell \mid \exists i \in \{2, \dots, \kappa\}, \bar{\gamma}_j^i > 0 \right\} \cup \left\{ j \in N_\ell \mid \bar{\gamma}_j^i = 0, \forall i \in \{1, \dots, \kappa\} \right\}. \quad (13)$$

et l'inégalité

$$\sum_{j \in H_\ell} z_j \geq 1 \quad (14)$$

est appelé coupe efficace, qui élimine uniquement les solutions entières non efficaces [14].

Par conséquent, l'ensemble  $S_{\ell+1}^2$  est obtenu en appliquant (14) à  $z^{*(\ell)}$

$$S_{\ell+1}^2 = \left\{ z \in S_\ell : \sum_{j \in H_\ell} z_j \geq 1 \right\}. \quad (15)$$

où  $S_{\ell+1}^2$  est le complément de  $S_{\ell+1}^1$  à  $S_{\ell+1}$  :

$$S_{\ell+1} = S_{\ell+1}^1 \cup S_{\ell+1}^2$$

### Phase I. Trouver la solution optimale entière du problème (8)

(8) Résoudre d'abord le programme ( $ULFP_0$ ). Cette phase consiste à résoudre le problème(9) à l'étape  $\ell$  à l'aide d'une méthode de Cambini et Martein[8], puis des solutions optimales entières sont générées par la technique du branch et bound. Dès qu'une solution optimale entière solution  $z^{*(\ell)} = (x^{*(\ell)}, y^{*(\ell)})$  est trouvée, elle est testée pour l'optimalité du problème de niveau inférieur(5). Pour ce faire, laissons  $x$  être fixé à  $x = x^{*(\ell)}$  et laissons  $\hat{y}$  être une solution optimale entière du problème de niveau inférieur(5). Si  $y^{*(\ell)} = \hat{y}$ , alors  $z^{*(\ell)} = (x^{*(\ell)}, y^{*(\ell)})$  est une solution optimale entière du problème(8) et si cette solution n'est pas une solution réalisable à deux niveaux du problème(8), une coupe (11) est ajoutée au tableau simplex courant, ce qui permet d'éliminer la solution optimale entière  $z^{*(\ell)}$  du problème(9) et de déterminer une prochaine

meilleure solution entière.

Cette phase se termine lorsque le problème est infaisable ou que la solution optimale entière du problème (8) est trouvée.

L'algorithme qui permet de déterminer une solution optimale entière du problème (8) est présenté dans les étapes suivantes :

**algorithme 1 :** Algorithme de résolution du problème (8)

**Résultat :** Soit  $z^{*(\ell)}$  la solution optimale entière du problème(8).

**Initialisation**  $\ell = 0, S_0 = S, S_E = \emptyset$ ;

**tandis que**  $S_E = \emptyset$  **faire**

Résoudre le problème(9) et trouver sa solution optimale entière ;

**si** (9) a une solution optimale entière  $z^{*(\ell)} = (x^{*(\ell)}, y^{*(\ell)})$  **alors**

Mettre  $x = x^{*(\ell)}$  et résoudre le problème(5).

Soit  $\hat{y}$  la solution optimale entière du problème(5) ;

**si**  $y^{*(\ell)} = \hat{y}$  **alors**

$z^{*(\ell)} = (x^{*(\ell)}, y^{*(\ell)})$  est la solution optimale entière du problème(8),

$S_E = \{z^{*(\ell)}\}$

**sinon**

Ajouter la coupe(11) au successeur de  $\ell$ ;

**fin**

**sinon**

La solution optimale entière du problème(8) n'existe pas ;

**fin**

**fin**

### Phase II. Générer l'ensemble des solutions efficaces du problème(1)

Résoudre d'abord le problème (8), en utilisant l'algorithme 1 ci-dessus, en commençant par  $S_E = \{z^{*(\ell)}\}$ . Cette phase consiste à résoudre le problème (9) au pas  $\ell$  en utilisant une méthode de Cambini et Martein [21]. Ensuite, pour mettre à jour le vecteur gradient réduit  $\bar{\gamma}^i$ ,  $i \in \{1, \dots, \kappa\}$ ,  $\kappa$  lignes sont ajoutées au tableau simplex de base et les coûts réduits sont calculés par rapport à la base correspondante.

Si la solution optimale  $z^{*(\ell)}$  du problème (9) n'est pas entière, laissons  $z_j^{*(\ell)}$  soit une composante de  $z^{*(\ell)}$  de sorte que  $z_j^{*(\ell)} = v_j$ , où  $v_j$  est un nombre fractionnaire. Le nœud  $\ell$  de l'arbre est alors séparé en deux nœuds qui sont imposés par les contraintes supplémentaires  $z_j^{*(\ell)} \leq \lfloor v_j \rfloor + 1$ , où  $\lfloor v_j \rfloor$  indique le plus grand entier inférieur à  $v_j$ .

Dés qu'une solution entière  $z^{*(\ell)} = (x^{*(\ell)}, y^{*(\ell)})$  est trouvée au niveau du nouveau nœud  $\ell$ , elle est testée pour l'optimalité du problème de niveau inférieur (5). Pour ce faire, on fixe  $x$  à  $x = x^{*(\ell)}$  et laissons  $\hat{y}$  être une solution optimale entière du problème de niveau inférieur (5).

Si  $y^{*(\ell)} = \hat{y}$ ,  $z^{*(\ell)} = (x^{*(\ell)}, y^{*(\ell)})$  est une solution faisable bilevel entière du problème (1).

Lorsqu'une solution faisable à deux niveaux est obtenue, elle est comparée à l'ensemble des solutions efficaces  $S_E$  et l'ensemble  $S_E$  est mis à jour. La coupe (14) est établie et ajoutée au tableau du simplexe courant, ce qui permet d'éviter les solutions non efficaces du problème (1) et de déterminer une nouvelle solution entière. Cependant, si aucune amélioration des critères ne peut être faite le long du domaine restant ( $H_\ell = \emptyset$ ), le nœud  $\ell$  est fathomed.

Cette phase se termine lorsque tous les nœuds créés sont fathomisés. Un nœud

$\ell$  de l'arbre est "fathomed" si le programme correspondant est infaisable ou si l'ensemble  $H_\ell$  est vide.

L'algorithme générant l'ensemble des solutions efficaces du problème (1) est présenté dans les étapes suivantes. Les nœuds de la structure arborescente sont traités selon le principe du retour en arrière.

**Algorithme 2 :** Algorithme de résolution du problème(1)

**Résultat :**  $S_E$  est l'ensemble efficace du problème(1)

**Initialisation** En utilisant l'algorithme 1 ci-dessus, nous générons la solution optimale entière solution optimale  $z^{*(\ell)}$  du problème (8), commençons avec  $S_E = \{z^{*(\ell)}\}$ ;

**tant que** il y a un noeud non atomisé  $\ell$  **faire**  
résoudre le problème (9);

**si** (9) a une solution optimale  $z^{*(\ell)}$  **alors**

**si**  $z^{*(\ell)} = (x^{*(\ell)}, y^{*(\ell)})$  est entier **alors**

Mettre  $x = x^{*(\ell)}$  et résolvez le problème (5).

Soit  $\hat{y}$  la solution optimale entière du problème (5);

**si**  $y^{*(\ell)} = \hat{y}$  **alors**

**si** le vecteur  $F(z^{*(\ell)})$  n'est pas dominé par le vecteur  $F(z)$  pour tout  $z \in S_E$  **alors**

$S_E = S_E \cup \{z^{*(\ell)}\}$

**fin**

**si** il existe une solution  $z \in S_E$  telle que  $F(z^{*(\ell)})$  domine  $F(z)$  **alors**

$S_E = S_E \setminus \{z\} \cup \{z^{*(\ell)}\}$

**fin**

**fin**

Construire l'ensemble  $H_\ell$ ;

**si**  $H_\ell = \emptyset$  **alors**

Fathom le noeud  $\ell$

**sinon**

Ajouter la coupe (14) au successeur de  $\ell$ ;

**fin**

**sinon**

Choisir un indice  $j$  tel que  $z_j^{*(\ell)}$  soit fractionnaire. Ensuite, diviser le programme (9) en deux sous-programmes, en ajoutant respectivement les contraintes  $z_j \leq \lfloor z_j^{*(\ell)} \rfloor$  et  $z_j \leq \lfloor z_j^{*(\ell)} \rfloor + 1$  pour obtenir  $(ULFP_{\ell_1})$  et  $(ULFP_{\ell_2})$  ( $\ell_1 \geq \ell + 1, \ell_2 > \ell + 1$  et  $\ell_1 \neq \ell_2$ )

**fin**

**sinon**

Fathom le nœud  $\ell$

**fin**

**fin**

Les outils théoriques suivants [14] montrent que l'algorithme génère des solutions entières efficaces du programme (1) en un nombre fini d'itérations.

**Théorème 4.2** [20] *Supposons que  $H_\ell \neq \emptyset$  à la solution entière courante  $z^{*(\ell)}$ . Si  $z$  est une solution entière efficace dans le domaine  $S^\ell \setminus \{z^{*(\ell)}\}$ , alors  $z \in S_{\ell+1}$ .*

**Corollaire 4.1** [20] contrainte  $\sum_{j \in H_\ell} z_j \geq 1$  définit une coupe efficace.

**Proposition 4.1** [20] Si  $H_\ell = \emptyset$  à la solution entière courante  $z^{*(\ell)}$  alors  $S_\ell \setminus \{z^{*(\ell)}\}$  est un domaine exploré.

**Théorème 4.3** L'algorithme proposé génère des solutions entières efficaces du programme (IFMOBP) en un nombre fini d'itérations, si une telle solution existe.

**Preuve :**

La cardinalité de l'ensemble des solutions réalisables entières  $D$  contenues dans l'ensemble borné  $S_E$  est un nombre fini, l'ensemble efficace cardinal  $S_E$  est un nombre fini aussi. Chaque fois qu'une solution entière optimale  $z^{*(\ell)}$  est calculée, la coupe de dantzig ou la coupe efficace est ajoutée si  $z^{*(\ell)} \notin S_E$  ou non. Ainsi, d'après le théorème et le corollaire, au moins la solution  $z^{*(\ell)}$  est éliminé lorsqu'on étudie tout sous-problème  $(ULFP_\kappa), \kappa > \ell$ . Dans le cas où il n'y a pas de solution entière optimale dans l'ensemble de décision  $S_\ell$  le sous-arbre en raciné au nœud  $\ell$  est exploré et tous les nœuds sont explorés après un nombre fini d'étapes.

**Exemple 4.1** Pour illustrer l'utilisation de l'algorithme, considérons le problème suivant :

$$(IFMOBP) \left\{ \begin{array}{l} \max_{(x,y)} F^1(x_1, y_1, y_2) = \frac{(x_1 + 2y_2 + 3)}{(3y_1 + 2)} \\ \max_{(x,y)} F^2(x_1, y_1, y_2) = \frac{(x_1 + 2y_1 + 2)}{(y_2 + 1)} \\ \text{s.c} \\ 3x_1 + y_1 + 2y_2 \leq 5 \\ y_1 + y_2 \leq 3 \\ \text{où } (y_1, y_2) \text{ } y \text{ résout} \\ \left\{ \begin{array}{l} \max_{(y)} f(x_1, y_1, y_2) = \frac{(x_1 + y_1 + y_2 + 1)}{(x_1 + y_2 + 3)} \\ \text{s.c} \\ 3x_1 + 2y_1 + y_2 \leq 2 \\ 3y_1 + 2y_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \text{ et les entiers} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (16)$$

**Initialisation :**

Commencez par  $S_E = \emptyset, \ell = 0$  et mettez  $(y_1, y_2) = (x_2, x_3)$ .  
 $S = \{(x_1, x_2, x_3) : 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5, x_2 + x_3 \leq 3, x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2, 3x_2 + 2x_3 \leq 6, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$

$$(LFP_0) \left\{ \begin{array}{l} \max F^1(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1 + 2x_3 + 3)}{(3x_2 + 2)} \\ \text{s.t} \\ x \in S \end{array} \right. \quad (17)$$

**Phase.1**

**Nœud 0 :**

1. La solution mentionnée dans le tableau 1 est entière après avoir résolu le programme  $LFP_0 : z^{*(0)} = (0, 0, 2)$ .
2. En plaçant  $x_1 = 0$  dans le problème de niveau inférieur, la solution optimale entière trouvée est  $(y_1^{*(0)}, y_2^{*(0)}) = (1, 0)$  et est donné dans le tableau 3.
3. Puisque  $(y_1^{*(0)}, y_2^{*(0)}) \neq (x_2^{*(0)}, x_3^{*(0)})$ , la solution  $z^{*(0)} = (0, 0, 2)$  n'est pas une solution faisable de notre problème (IFMOBP). Donc  $N_1 = \{1, 2, 6\}$ .

**Nœud 1 :**

1. Après avoir ajouté la coupe de dantzig  $x_1 + x_2 + x_6 \geq 1$  au tableau 1. Nous obtenons le tableau 2, avec la solution optimale  $z^{*(\ell)} = (1, 0, 1)$ .
2. En plaçant  $x_1 = 1$  dans le problème de niveau inférieur, la solution optimale entière trouvée est  $(y_1^{*(0)}, y_2^{*(0)}) = (0, 1)$  est donné dans le tableau 4.
3. Puisque  $(y_1^{*(1)}, y_2^{*(1)}) = (x_2^{*(1)}, x_3^{*(1)})$ , la solution  $z^{*(1)} = (1, 0, 1)$  est une solution faisable à deux niveaux de notre problème (IFMOP) avec  $F(z^{*(1)}) = (3, \frac{3}{2})$ . Nous mettons à jour l'ensemble  $S_E = (1, 0, 1)$  et  $H_1 = \{2, 8\}$ .

$B_0$	$x_1$	$x_2$	$x_6$	Rhs
$x_4$	1	-3	-2	1
$x_5$	-1	-1	-1	1
$x_3$	1	2	1	2
$x_7$	-2	-1	-2	2
$c_j^1 - z_j^{1(1)}$	-1	-4	-2	-7
$d_j^1 - z_j^{1(2)}$	0	3	0	-2
$\gamma_j^1$	-2	-29	-4	$\frac{7}{2}$
$c_j^2 - z_j^{2(1)}$	1	2	0	-2
$d_j^2 - z_j^{2(2)}$	-1	-2	-1	-3
$\gamma_j^2$	5	10	2	$\frac{2}{3}$

TABLE 4.1 – Table simplex pour le nœud 0.

$B_1$	$x_2$	$x_6$	$x_8$	Rhs
$x_4$	-4	-3	1	0
$x_5$	0	0	-1	2
$x_3$	1	0	1	1
$x_7$	1	0	-2	4
$x_1$	1	1	-1	1
$c_j^1 - z_j^{1(1)}$	-3	-1	-1	-6
$d_j^1 - z_j^{1(2)}$	3	0	0	-2
$\gamma_j^1$	-24	-2	-2	3
$c_j^2 - z_j^{2(1)}$	1	-1	1	-3
$d_j^2 - z_j^{2(2)}$	-1	0	-1	-2
$\gamma_j^2$	5	-2	5	$\frac{3}{2}$

TABLE 4.2 – Table simplex pour le nœud 1.

$B$	$y_2$	$y_3$	Rhs
$y_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$y_4$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-3}{2}$	3
$p_j - z_j^{(1)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	-2
$q_j - z_j^{(2)}$	1	0	-3
$\gamma_j$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{2}{3}$

TABLE 4.3 – Tableau simplex du problème de niveau inférieur.

$b_1$	$y_3$	$y_5$	Rhs
$y_1$	0	1	0
$y_4$	-2	1	4
$y_2$	1	-2	1
$p_j - z_j^{(1)}$	-1	1	-3
$q_j - z_j^{(2)}$	-1	2	-5
$\gamma_j$	-2	-1	$\frac{3}{5}$

TABLE 4.4 – Tableau simplex du problème de niveau inférieur.

**Phase. 2**

**Nœud 2 :**

Après avoir ajouté la coupe efficace  $x_2 + x_8 \geq 1$  au tableau 2. La solution trouvée  $z^{*(2)} = (5, 3, 0, 0)$  n'est pas entier donc le nœud est divisé en deux nœuds.

**Nœud 3 :**

1. Après avoir ajouté la contrainte  $x_1 \leq \lfloor \frac{5}{3} \rfloor$ , on obtient le tableau 5 avec la solution optimale  $z^{*(3)} = (1, 0, 0)$ .
2. En plaçant  $x_1 = 1$  dans le problème de niveau inférieur, la solution optimale entière trouvée est  $(y^*(2)1, y^*(2)2) = (0, 1)$  et est donné dans le tableau 4.
3. Puisque  $(y_1^{(2)}, y_2^{*(2)}) \neq (x_2^{*(3)}, x_3^{*(3)})$ , la solution  $z^{*(3)} = (1, 0, 0)$  n'est pas une solution faisable de notre problème (IFMOBP) et  $H_2 = \{2, 9\}$ .

**Nœud 4 :**

Après avoir ajouté la contrainte  $x_1 \geq \lceil \frac{5}{3} \rceil$  le problème devient infaisable, alors le nœud est fathomisé.

**Nœud 5 :**

1. Après avoir ajouté la coupe efficace  $x_2 + x_9 \geq 1$  au tableau 5, on obtient le tableau 6 avec solution optimale  $z^{*(4)} = (0, 1, 0)$ , qui est entière.
2. En plaçant  $x_1 = 0$  dans le problème de niveau inférieur, la solution optimale entière trouvée est  $(y_1^{*(3)}, y_2^{*(3)}) = (1, 0)$  et est donné dans le tableau 3.
3. Puisque  $(y_1^{*(3)}, y_2^{*(3)}) = (x_2^{*(4)}, x_3^{*(4)})$  la solution  $z^{*(4)} = (0, 1, 0)$  est une solution faisable à deux niveaux solution faisable de notre problème IFMOBP avec  $F(z^{*(4)}) = (\frac{3}{5}, 4)$ . Nous mettons à jour l'ensemble  $S_E = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$  et  $H_3 = \emptyset$ , alors le nœud est fathomisé.

L'algorithme se termine car tous les nœuds créés sont sondés et l'ensemble des solutions efficaces pour le problème IFMOBP est  $S_E = \{(0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ .

$B_1$	$x_2$	$x_9$	$x_{10}$	Rhs
$x_6$	2	-1	-1	1
$x_5$	1	-1	-0	3
$x_3$	0	1	0	0
$x_7$	3	-2	0	6
$x_1$	0	0	-1	1
$x_8$	1	-1	0	1
$x_4$	1	-2	-3	2
$c_j^1 - z_j^{1(1)}$	0	-2	-1	-4
$d_j^1 - z_j^{1(2)}$	3	0	0	-2
$\gamma_j^1$	-12	-4	-2	2
$c_j^2 - z_j^{2(1)}$	2	0	-1	-3
$d_j^2 - z_j^{2(2)}$	0	-1	0	-1
$1 \gamma_j^2$	2	3	-1	3

TABLE 4.5 – Table simplexe pour le nœud 4.

$B_1$	$x_3$	$x_6$	$x_{11}$	Rhs
$x_{10}$	-3	-1	-2	1
$x_5$	2	0	1	2
$x_2$	-1	0	-1	1
$x_7$	5	0	3	3
$x_1$	3	1	2	0
$x_8$	2	0	1	0
$x_4$	-6	-3	-5	4
$x_9$	1	0	0	0
$c_j^1 - z_j^{1(1)}$	-1	-1	-2	-3
$d_j^1 - z_j^{1(2)}$	3	0	3	-5
$\gamma_j^1$	-14	-5	-19	$\frac{3}{5}$
$c_j^2 - z_j^{2(1)}$	-1	-1	0	-4
$d_j^2 - z_j^{2(2)}$	1	0	0	-1
$\gamma_j^2$	-5	-1	0	4

TABLE 4.6 – Table simplex pour le nœud 5.

Pour résumer la méthode Branch & Cut proposée à travers cet exemple, nous présentons un arbre représentant les états des nœuds au cours du processus.

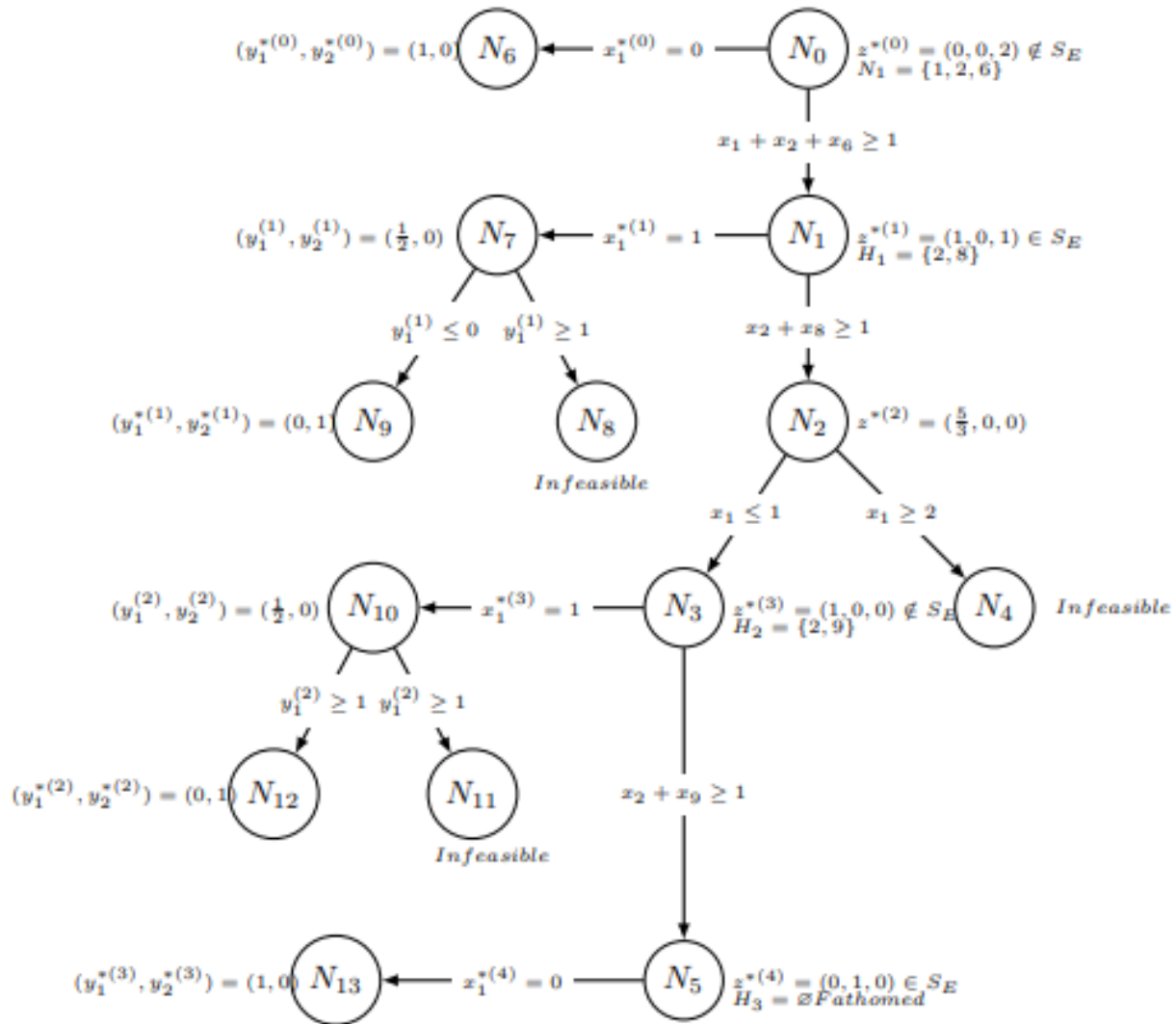


FIGURE 4.1 – Arbre représentant les états des nœuds pendant l'algorithme Branch & Cut.

#### 4.4 CONCLUSION

Ce chapitre présente un algorithme exact qui résout un programme linéaire en nombres entiers fractionnaires à deux niveaux avec des objectifs multiples au niveau supérieur (1). Le problème fractionnaire linéaire de niveau supérieur (9) est résolu, puis les solutions entières sont générées par le processus de branchement (branch), bien connu dans la méthode de branchement (branch) et de délimitation[28].

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Toutes entreprises quelque soit sa taille, son domaine d'activité est amenée à faire face à des problèmes de gestion au quotidien. Les exigences des entreprises de transport sont souvent nombreuses et diversifiées comme le respect des délais de livraison, la minimisation des couts de transport, la maximisation du profit, ainsi que la satisfaction des demandes et l'écoulements des stocks. Ces entreprises doivent donc trouver un modèle de transport qui peut alimenter le marché avec leurs produits, qui satisfait le besoin des clients. Dans ce mémoire, on a fait une présentation du problème de transport. Puis, on a parlé des différentes méthodes de résolution de ce dernier. Ensuite, on s'est intéressé au problème de transport multi-objectifs. Enfin, on a présenté une méthode exacte pour résoudre un problème linéaire fractionnaire entier à deux niveaux avec des objectifs multiples au niveau supérieur, désigné par IFMOBP. L'algorithme présenté génère un ensemble de solutions efficaces à l'aide de l'algorithme de Branch and Cut basé sur un problème linéaire fractionnaire continu de niveau supérieur. Tout d'abord la solution optimale entière du problème à deux niveaux est recherchée avec une seule fonction objective à chaque niveau. Ensuite une coupe efficace est ajoutée et de nouvelles solutions entières sont déterminées.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] B Oukacha M Aidene. programmation linéaire. recherche opérationnelle. éditions pages bleues ,alger.
- [2] Sonia Hammar, Karima Seggari, and Fatima Rabia. *Problème de transport multi objectif à coefficients intervalles*. PhD thesis, UMMTO, 2019.
- [3] Boualem Mokrane and Ourdia Hocine. *Optimisation de la Distribution des Produits Pétroliers (Lubrifiants) au sein de l'Entreprise NAFTAL*. PhD thesis, UMMTO, 2017.
- [4] Abbas Yamina. résolution du problème de transport des hydrocarbures au niveau de la rtc bejaia.
- [5] Mekhilef Amel. Optimisation multi-objectif fractionnaire quadratique en nombres entiers.
- [6] Zabot Nora Bouabbache Zahia. Optimisation fractionnaire linéaire multicritère en nombres entiers.
- [7] Farida Bouarab-Dahmani Razika Tahi. *Algorithme du transport*, 115.editions al-djazair, alger.
- [8] Thierry Garaix. *Étude et résolution exacte de problèmes de transport à la demande avec qualité de service*. PhD thesis, Université d'Avignon, 2007.
- [9] <https://www.engineeringenotes.com/project-management-2/operations-research/balanced-and-unbalanced-transportation-problem-operations-research/15633>.
- [10] Soraya Saghi, M Ourbih, Nessma Maameri, et al. *Recueil sur les méthodes d'optimisation combinatoire et application sur un problème de transport réel cas Ifri*. PhD thesis, Université abderrahmane mira béjaia, 2013.
- [11] Pierre Fouilhoux. mise en oeuvre d'un algorithme de branch and cut avec le framework scip.
- [12] Mohamed Ekbal Bouzgarrou. *Parallélisation de la méthode du " Branch and Cut" pour résoudre le problème du voyageur de commerce*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 1998.
- [13] Thiziri Sifaoui. *Résolution du problème de type transport multi-objectifs dans un environnement incertain*. PhD thesis, Université Mouloud MAMMERRI Tizi-Ouzou, 2021.
- [14] Mohamed El-Amine Chergui and Mustapha Moulai. An exact method for a discrete multiobjective linear fractional optimization. *Journal of Applied Mathematics & Decision Sciences*, 2008(1), 2008.

- [15] A.Orden. *Méthode de variation des disponibilités et demandes*. PhD thesis.
- [16] Ouanes Mohand, Goubi Mouloud, and Fadila Leslous. A new approach for non convex optimization problems applied to hump and benchmark functions. *International Journal of Mathematics in Operational Research*, 1 :1, 01 2022.
- [17] Lotfi Asker Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy sets and systems*, 1(1) :3–28, 1978.
- [18] Chunshien Li, Tai-Wei Chiang, and Long-Ching Yeh. A novel self-organizing complex neuro-fuzzy approach to the problem of time series forecasting. *Neurocomputing*, 99 :467–476, 2013.
- [19] H. Calvete and C. Gal. Optimalité locale dans la programmation bilevelles quasiconcave,, monogr. semin. mat. garc'ia galdeano, 27.
- [20] S. Dempe et J. Judice M. J. Alves. Calcul de la frontière de pareto d'un problème linéaire bi-objectif à deux niveaux à l'aide d'un algorithme de programmation mixte multiobjectif linéaire à l'aide d'un algorithme multiobjectif de programmation en nombres entiers mixtes research, 61.
- [21] Herminia I Calvete and Carmen Galé. Linear bilevel programs with multiple objectives at the upper level. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(4) :950–959, 2010.
- [22] Y. Lv et Z. Wan. Problème d'optimisation multiobjectif linéaire à deux niveaux : approche par les pénalités, j. ind. manag. optim. 15.
- [23] L. P. Fotso C. O. Pieume, P. Marcotte and P. Siarry. Génération de solutions efficaces dans les problèmes de programmation multi-objectifs à deux niveaux, american j. oper. res., 3.
- [24] D. Thirwani and S. R. Arora. Un algorithme pour le problème de programmation linéaire fractionnaire à deux niveaux en nombres entiers, optimisation, 39.
- [25] B. Martos. *Programmation non linéaire, théorie et méthodes*, amsterdam : North-holland, publishing co, amsterdam-oxford ; american elsevier publishing co, inc, new york.
- [26] A Camibini and L Martein. Equivalence in linear fractional programming. *Optimization*, 23(1) :41–51, 1992.
- [27] H. C. Bakhshi V. Verma and M. C. Puri. Classement dans les problèmes de programmation fractionnelle linéaire en nombres entiers, z. oper. res., 34.
- [28] Fatima Fali and Mustapha Moulai. Solving discrete linear fractional bilevel programs with multiple objectives at the upper level. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2022.

# NOTATIONS

PTMO	problème de transport multi-objectif.
PLNE	problème de programmation linéaire en nombres entiers.
PL	programmation linéaire.
MOP	problème d'optimisation multi-objectif.
PFMO	problème fractionnaire multi-objectif.
STP	the solid Transportation problem.
SSTP	the solid strachstic transportation Problem.
DM	the decision maker (Décideur).
GP	goel programming.
IFMOBP	un problème fractionnaire linéaire entier à deux niveau avec des objectifs multiples au niveau supérieur
GJR84	Grötschel Junger Reinel 1984.
PR87	Padberg Rinaldi 1987.
PR91	Padberg Rinaldi 1991.

## Résumé

Toutes entreprises quelque soit sa taille, son domaine d'activité est amenée à faire face à des problèmes de gestion au quotidien. Parmi ces problèmes on cite le problème de transport qui nécessite la mise en oeuvre d'un procédé de prise de décision rationnel, ce qui souligne l'importance qu'occupe ce type de problème dans la gestion quotidienne de l'entreprise.

Le problème de transport est parmi les premiers problèmes traités par la recherche opérationnelle. Ce dernier consiste à déterminer la manière de minimiser le coût de transport des ressources, des marchandises ou des personnes d'un ensemble d'endroits (souvent appelés sources) à un autre ensemble d'endroits (appelés destinations) en utilisant divers types des modes de transport, qui minimise l'ensemble des coûts de cette opération.

Dans ce mémoire on a fait une présentation du problème de transport puis on se focalise sur les méthodes de résolutions, ensuite on s'est intéressé au problème de transport multi-objectif à la fin on a présenté une méthode exacte pour résoudre un problème linéaire fractionnaire entier à deux niveaux avec des objectifs multiples au niveau supérieur et un seul objectif au niveau inférieur (IFMOBP).

## Abstract

All companies, whatever their size or field of activity, have to face management problems on a daily basis. Among these problems is the transportation problems, which requires the implementation of a rational decision making process, which underlines the importance of this type of problems in the daily management of the company.

The transportation problems is among the first problems treated by operational research. It consists of determining how to minimize the cost of transporting resources, goods or people from one set of locations (often called sources) to another set of locations (called destinations) using various types of transport modes, which minimizes the overall costs of this operation.

In this work we have made a presentation of the transportation problems and then we focus on the resolution methods, then we are interested in the multi-objective transportation problems and finally we have presented an exact method for solving a two-level integer fractional linear problems with multiple objectives at the upper level and a single objective at the lower level (IFMOBP).