



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMÈRI DE TIZI-OUZOU

FACULTÉ DU GÉNIE DE LA CONSTRUCTION

DEPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE



# Mémoire de fin d'études

## THÈME

COMPARAISON DE MÉTHODES DE  
MODELISATION DES FISSURES DES  
STRUCTURES MÉCANIQUES VIBRANTES

Présenté par :

Malik ABDOUS

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER 2 EN GÉNIE MÉCANIQUE

SPECIALITÉ : CONSTRUCTION MÉCANIQUE

Le jury :

<b>Président</b> : Amar BOUAZZOUNI	Professeur	UMMTO
<b>Encadreur</b> : Mohand SLIMANI	Maître de conférences	UMMTO
<b>Co-encadreur</b> : Samir TIACHACHT	Maître-assistant	UMMTO
<b>Examineur</b> : Kamel BELAID	Maître-assistant	UMMTO



Année universitaire 2016-2017



## Résumé

L'analyse vibratoire, en vue d'une maintenance prédictive, s'avère un outil pertinent, utilisé depuis quelques décennies pour connaître "l'état de santé" d'une structure ou d'un équipement industriel. Nous présenterons dans ce mémoire de fin d'étude, les outils et les méthodes basés sur des données vibratoires pour la détection d'endommagements dans des structures poutres. Nous avons choisi trois méthodes d'identification d'endommagements à savoir : la méthode basée sur la forme des courbures modales (FCM), la méthode basée sur la fonction de la réponse fréquentielle (FRF) et la méthode basée sur les forces résiduelles modales (FRM). Cinq modèles mathématiques de poutres endommagées ont été développés pour l'application de ces méthodes et pour pouvoir faire une analyse dynamique d'une poutre endommagée. Ces modèles en question sont ceux proposés par J. K. Sinha *et al.*, M.H.F. Dado *et al.*, Ostachowicz et Krawkczuk, Dimarogonas et Paipetis et le modèle basé sur la réduction de la raideur  $E$  d'un élément poutre.

L'objectif de ce travail est de faire, en premier lieu, une étude comparative des cinq modèles de poutres endommagées en comparant leurs fréquences naturelles par rapport aux fréquences naturelles obtenues expérimentalement. En second lieu, une étude comparative de ces modèles de fissuration en appliquant les trois méthodes d'identification d'endommagements choisies. Pour cela, trois approches sont suivies : une modélisation par éléments finis, une simulation numériques par éléments finis et des analyses expérimentales sur des poutres sont exploitées. Pour cette étude, les programmes ont été développés à l'aide du code de calcul MATLAB.

**Mots clés** : Eléments finis, analyse dynamique, détection d'endommagement, modélisation d'une fissure.

## Abstract

Vibration analysis, with a view to predictive maintenance, is proving to be a useful tool, used since a few decades to know the "state of health" of a structure or industrial equipment. We present in this thesis the tools and methods based on vibratory data for the detection of damages in beam structures. We have chosen three methods of damage identification namely : Method using the curvature mode shapes (CMS), Method the frequency response function (FRF), and finally the method using the residual modal forces (RMF). Five mathematical models of damaged beams have been developed for the application of these methods and for dynamic analysis of a damaged beam. These models in question are those proposed by : J. K. Sinha *et al.*, M.H.F. Dado *et al.*, Ostachowicz and Krawkczuk, Dimarogonas and Paipetis, and finally that which based on reducing the rigidity of a beam element.

The objective of this work is to make, first of all, a comparative study of the five models of damaged beams by comparing their natural frequencies to the natural frequencies obtained experimentally, then, secondly, to make a comparative study of these models of cracking by applying the three methods of damage identification. For this, three approaches are followed : finite element modeling, numerical finite element simulation and experimental analyzes on beams are used. For this study, the programs were developed using the MATLAB code.

**Key words** : Finite elements, dynamic analysis, damage detection, crack modeling.

## DEDICACES

*Au meilleur des pères*

*A ma très chère mère*

*Qu'ils trouvent en moi la source de leur fierté*

*A qui je dois tout*

*A mes frères et sœurs*

*A qui je souhaite un avenir radieux plein de réussite*

*A mes Amis et proches*

*A tous ceux qui me sont chers*

*Malik*

## REMERCIEMENTS

*Je tiens à remercier mes encadrateurs, monsieur Mohand SLIMANI, maître de conférences à l'UMMTO, et monsieur Samir TIACHAÏT, maître-assistant à l'UMMTO, de m'avoir proposé ce sujet qui est très intéressant et pour la confiance qu'ils m'ont accordée. Ils m'ont dirigé tout au long de cette étude et m'ont donné les grands axes de recherche. Je les remercie aussi pour leur disponibilité, leur gentillesse et leur sensibilité.*

*J'adresse mes remerciements les plus respectueux à monsieur Amar BOUAZZOUNI, professeur à l'UMMTO, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance.*

*Je remercie aussi monsieur Kamel BELAÏD, maître-assistant à l'UMMTO, qui m'a fait l'honneur d'accepter d'être l'examineur de ce présent travail.*

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements ainsi que ma grande gratitude et reconnaissance envers tous mes enseignants avec lesquels j'ai passé des années riches en enseignement pendant mon parcours universitaire.*

*Mes remerciements s'adressent aussi à tous ceux qui m'ont aidé, de près ou de loin, à l'élaboration de ce travail.*



Résumé	
Dédicaces	
Remerciements	
Sommaire .....	<i>i</i>
Liste des figures .....	<i>v</i>
Liste des tableaux .....	<i>ix</i>

<b>Introduction générale</b> .....	<b>10</b>
------------------------------------	-----------

<b>Chapitre I :</b>	<b>Etude bibliographique</b>
---------------------	------------------------------

---

I.1	Introduction .....	14
I.2	Vibrations des structures mécaniques .....	14
I.3	Notion de la mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER) .....	14
I.3.1	Définition de rupture .....	15
I.3.2	Modes de rupture .....	16
I.3.3	Facteur d'intensité de contraintes .....	16
I.3.4	Taux de restitution d'énergie de GRIFFITH .....	17
I.4	Bibliographie des méthodes d'identification d'endommagements .....	18
I.4.1	Méthodes basées directement sur l'utilisation des paramètres modaux .....	19
I.4.1.1	Méthode basée sur la variation des fréquences naturelles .....	19
I.4.1.2	Méthode basée sur les déformées modales .....	23
I.4.2	Méthodes basées sur l'information obtenues via les paramètres modaux .....	23
I.4.2.1	Méthode basée sur les courbures modales .....	23
I.4.2.2	Méthode basée sur l'énergie de déformation modale .....	25
I.4.2.3	Méthode basée sur la flexibilité dynamique .....	27
I.4.2.4	Méthode basée sur l'amortissement .....	29
I.4.3	Méthodes dans le domaine des fréquences (Frequency Reponse Function (FRF)) ....	30
I.4.3.1	Description théorique de la FRF .....	30
I.4.3.2	Extension du MAC pour la Fonction de la Réponse en Fréquence .....	31
I.4.3.3	Méthode basée sur les courbures de FRF .....	32
I.4.4	Méthode basée sur les forces modales résiduelles .....	33
I.5	Conclusion .....	33

## Chapitre II : Méthode des éléments finis

---

II.1	Introduction .....	35
II.1.1	Notations .....	35
II.1.2	Enoncé d'un problème de mécanique .....	36
II.1.3	Forme différentielle du problème .....	36
II.1.4	Forme intégrale faible du problème .....	38
II.1.5	Equivalence avec le principe des travaux virtuels (PTV) .....	40
II.1.6	Discrétisation du problème – Matrices élémentaires de masse et de raideur .....	40
II.1.7	Assemblage – Matrices globales de masse et de raideur .....	42
II.2	Application de la méthode des éléments finis .....	43
II.2.1	Élément fini de barre unidimensionnel .....	43
II.2.1.1	Approximation des déplacements .....	44
II.2.1.2	Approximation des déformations .....	45
II.2.1.3	Approximation des contraintes .....	46
II.2.1.4	Matrices élémentaires de raideur et de masse .....	46
II.2.2	Élément fini de barre bidimensionnel .....	47
II.2.3	Élément fini de barre tridimensionnel .....	49
II.2.3.1	Conditions aux limites .....	51
II.2.4	Modèle d'une poutre plane en flexion seule .....	52
II.2.5	Modélisation d'un élément de poutre plane basé sur l'hypothèse d'Euler-Bernoulli ...	53
II.2.5.1	Approximation des déplacements .....	54
II.2.5.2	Approximation des déformations .....	55
II.2.5.3	Approximation des contraintes .....	55
II.2.5.4	Matrice élémentaires de raideur et de masse par rapport au plan local ( $xy$ ) .....	55
II.2.5.5	Matrices élémentaires de raideur et de masse par rapport au plan global ( $XY$ ) .....	57
II.3	Conclusion .....	58

## Chapitre III : Modèles de structures poutres endommagées

---

III.1	Introduction .....	61
III.2	Modélisation d'un élément fini de poutre endommagée .....	61
III.2.1	Matrices élémentaires de rigidité des sous-éléments sains I et II .....	62
III.2.2	Matrice élémentaire de rigidité du sous-élément fini III (fissure) .....	62
III.2.2.1	Démarche du calcul de la matrice de flexibilité du sous-élément fissuré III .....	62
III.2.2.2	Matrice élémentaire de rigidité du sous-élément fissuré III .....	65
III.2.3	Matrice élémentaire totale de l'élément poutre endommagé .....	65

III.3	Modèles de poutres endommagées étudiés dans ce présent travail .....	65
III.3.1	Modèle de poutre endommagée proposé par J. K. Sinha <i>et al.</i> .....	65
III.3.1.1	Modélisation de la fissure .....	66
III.3.1.2	Matrice de rigidité élémentaire d'un élément poutre endommagée .....	68
III.3.2	Modèle de poutre endommagée proposé par M. H. F. Dado <i>et al.</i> .....	69
III.3.2.1	Equations de mouvement d'une poutre (portique) non endommagée .....	69
III.3.2.2	Matrice de rigidité locale de la partie III fissurée .....	71
III.3.3	Modèles de poutres endommagées d'Ostachowicz et Krawkczuk, et Dimarogonas et Paipetis .....	74
III.3.4	Modèle basé sur la réduction de la rigidité E d'un élément poutre .....	77
III.4	Conclusion .....	78

## Chapitre IV : Méthodes d'identification d'endommagements

---

IV.1	Introduction .....	80
IV.2	Méthode basée sur les courbures modales .....	80
IV.2.1	Indicateur d'endommagement de la forme des modes .....	80
IV.2.2	Indicateur d'endommagements de la forme des pentes modales (Mode shape slope (MSS) damage index) .....	81
IV.2.3	Indicateurs d'endommagements de la forme des courbures modales (FCM) .....	81
IV.2.3.1	Indicateur d'endommagements DMC (Difference in Mode shape Curvature) .....	81
IV.2.3.2	Indicateur d'endommagements NCDF (Normalized Curvature Damage Factor) .....	82
IV.3	Méthode basée sur les forces modales résiduelles (FRM) .....	83
IV.3.1	Force modale résiduelle .....	83
IV.3.2	Indicateur d'endommagement $Ind_{\alpha}$ .....	85
IV.4	Méthode basée sur la fonction de la réponse fréquentielle (FRF) .....	86
IV.4.1	Formulation des équations de mouvement .....	87
IV.4.2	Indicateur d'endommagements $\beta$ .....	89
IV.4.3	Amélioration de la méthode .....	91
IV.5	Conclusion .....	94

## Chapitre V : Application et test numérique

---

V.1	Introduction .....	96
V.2	Modèle de poutre saine choisi .....	96
V.3	Matrices élémentaires .....	97
V.3.1	Matrices élémentaires d'un élément sain .....	97

V.3.2	Matrices élémentaires d'un élément endommagé.....	97
V.4	Analyse modale .....	99
V.5	Validation de la modélisation par éléments finis (MEF) de la poutre saine .....	99
V.6	Etude comparative des modèles poutres endommagées en termes de fréquences .....	102
V.6.1	Cas d'une seule fissure .....	102
V.6.1.1	Variation de la profondeur de la fissure .....	102
V.6.1.2	Changement de conditions aux limites .....	104
V.6.1.3	Changement de matériau .....	105
V.6.2	Cas de deux fissures .....	106
V.7	Etude comparative des modèles poutres endommagées en termes de méthodes d'identification d'endommagements .....	108
V.7.1	Cas d'une seule fissure .....	109
V.7.1.1	Poutre endommagée encastree-libre en Aluminium .....	109
V.7.1.2	Poutre endommagée encastree-encastree en Aluminium .....	117
V.7.1.3	Poutre endommagée en Aluminium simplement appuyée .....	124
V.7.2	Cas de deux fissures .....	131
V.7.2.1	Poutre endommagée encastree-libre en Aluminium .....	131
V.7.2.2	Poutre endommagée encastree-encastree en Aluminium .....	138
V.7.2.3	Poutre endommagée en Aluminium simplement appuyée .....	145
V.8	Conclusion .....	151
 <b>Conclusion générale</b> .....		153
 <b>Références bibliographiques</b> .....		155
 <b>Annexe A</b> .....		160
 <b>Annexe B</b> .....		161

**Chapitre I**

**Figure I.1-** Modes de rupture. .... 16  
**Figure I.2-** Contraintes au voisinage d'une fissure en fonction des coordonnées polaires..... 17  
**Figure I.3-** Accroissement d'une fissure. .... 18

**Chapitre II**

**Figure II.1-** Structure étudiée..... 36  
**Figure II.2-** Modèle d'un élément barre. .... 43  
**Figure II.3-** Fonctions de forme linéaire..... 45  
**Figure II.4-** Élément fini de barre bidimensionnel dans le système de coordonnées locales et globales. .... 47  
**Figure II.5-** Élément fini de barre dans l'espace..... 50  
**Figure II.6-** Modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli en flexion seule. .... 53  
**Figure II.7-** Élément fini de poutre dans le plan local ( $xy$ ) et global ( $XY$ )..... 57

**Chapitre III**

**Figure III.1-** Modélisation d'un élément fini de poutre endommagé. .... 61  
**Figure III.2-** Modélisation des sous-éléments sains (I et II) et de sous-élément fissuré III. .... 63  
**Figure III.3-** Zoom sur le sous-élément III (fissure)..... 63  
**Figure III.4-** Dimensionnement de la section droite de la poutre et de la fissure..... 64  
**Figure III.5-** Modèle poutre à plusieurs fissures. .... 66  
**Figure III.6-** Variation linéaire de la rigidité en flexion ( $EI$ ) d'aspect triangulaire utilisée par J. K. Sinha *et al* pour modéliser la fissure dans l' $e^{\text{ème}}$  élément fini de poutre. .... 67  
**Figure III.7-** Modèle d'une poutre endommagée proposé par M. H. F. Dado *et al.* .... 69  
**Figure III.8-** Déplacements et rotations des deux parties saines I et II au niveau de la fissure..... 71  
**Figure III.9-** Dimensionnement de la section droite endommagée. .... 72  
**Figure III.10-** Modèle poutre endommagée proposé par Ostachowicz et Krawkczuk, et Dimarogonas et Paipetis..... 75

## Chapitre IV

<b>Figure IV.1-</b> Localisation des éléments endommagés 3, 4 et 9 en appliquant l'indicateur d'endommagements $\beta(1,i)$ utilisé par les auteurs [61] .....	91
<b>Figure IV.2-</b> Localisation des éléments endommagés 2 et 4 en appliquant l'indicateur d'endommagements $\beta(1,i)$ utilisé par les auteurs [61] .....	92
<b>Figure IV.3-</b> Elément de poutre et ses degrés de liberté .....	93
<b>Figure IV.4-</b> Localisation des éléments endommagés 3, 4 et 9 en utilisant l'indicateur d'endommagements amélioré $\text{Ind } \beta$ .....	93

## Chapitre V

<b>Figure V.1-</b> Modélisation d'un élément fini poutre travaillant en flexion pure.....	96
<b>Figure V.2-</b> Exemple de discrétisation d'une poutre en 11 éléments finis. ....	96
<b>Figure V.3-</b> Modélisation d'une extrémité flexible d'une poutre par deux ressorts. ....	100
<b>Figure V.4-</b> Variation de la profondeur $a$ dans le cas d'une seule fissure. ....	102
<b>Figure V.5-</b> Variation de la profondeur $a_2$ de la deuxième fissure. ....	106

### Cas d'une seule fissure

#### Poutre encastree-libre en Aluminium discrétisée en 27 éléments

<b>Figure V.6-</b> Elément endommagé 9, $a = 4 \text{ mm}$ , $x = 596 \text{ mm}$ .....	110
<b>Figure V.7-</b> Elément endommagé 9, $a = 8 \text{ mm}$ , $x = 596 \text{ mm}$ .....	111
<b>Figure V.8-</b> Elément endommagé 9, $a = 12 \text{ mm}$ , $x = 596 \text{ mm}$ .....	112
<b>Figure V.9-</b> Elément endommagé 1, $a = 8 \text{ mm}$ , $x = 35 \text{ mm}$ .....	113
<b>Figure V.10-</b> Elément endommagé 14, $a = 8 \text{ mm}$ , $x = 916 \text{ mm}$ .....	114
<b>Figure V.11-</b> Elément endommagé 27, $a = 8 \text{ mm}$ , $x = 1798 \text{ mm}$ .....	115

#### Poutre encastree-encastree en Aluminium discrétisée en 27 éléments

<b>Figure V.12-</b> Elément endommagé 9, $a = 4 \text{ mm}$ , $x = 596 \text{ mm}$ .....	117
<b>Figure V.13-</b> Elément endommagé 9, $a = 8 \text{ mm}$ , $x = 596 \text{ mm}$ .....	118
<b>Figure V.14-</b> Elément endommagé 9, $a = 12 \text{ mm}$ , $x = 596 \text{ mm}$ .....	119
<b>Figure V.15-</b> Elément endommagé 1, $a = 8 \text{ mm}$ , $x = 35 \text{ mm}$ .....	120
<b>Figure V.16-</b> Elément endommagé 14, $a = 8 \text{ mm}$ , $x = 916 \text{ mm}$ .....	121
<b>Figure V.17-</b> Elément endommagé 27, $a = 8 \text{ mm}$ , $x = 1798 \text{ mm}$ .....	122

#### Poutre en Aluminium simplement appuyée discrétisée en 27 éléments

<b>Figure V.18-</b> Elément endommagé 9, $a = 4 \text{ mm}$ , $x = 596 \text{ mm}$ .....	124
<b>Figure V.19-</b> Elément endommagé 9, $a = 8 \text{ mm}$ , $x = 596 \text{ mm}$ .....	125
<b>Figure V.20-</b> Elément endommagé 9, $a = 12 \text{ mm}$ , $x = 596 \text{ mm}$ .....	126

<b>Figure V.21-</b> Elément endommagé 1, $a = 8 \text{ mm}$ , $x = 35 \text{ mm}$ .....	127
<b>Figure V.22-</b> Elément endommagé 14, $a = 8 \text{ mm}$ , $x = 916 \text{ mm}$ .....	128
<b>Figure V.23-</b> Elément endommagé 27, $a = 8 \text{ mm}$ , $x = 1798 \text{ mm}$ .....	129

### Cas de deux fissures

#### Poutre encastree-libre en Aluminium

<b>Figure V.24-</b> n <sup>bre</sup> d'éléments 27, éléments endommagés 4 et 10, $a_1 = 8 \text{ mm}$ , $x_1 = 237 \text{ mm}$ , $a_2 = 4 \text{ mm}$ , $x_2 = 644 \text{ mm}$ .....	131
<b>Figure V.25-</b> n <sup>bre</sup> d'éléments 27, éléments endommagés 4 et 15, $a_1 = 12 \text{ mm}$ , $x_1 = 237 \text{ mm}$ , $a_2 = 8 \text{ mm}$ , $x_2 = 983 \text{ mm}$ .....	132
<b>Figure V.26-</b> n <sup>bre</sup> d'éléments 27, éléments endommagés 4 et 24, $a_1 = 12 \text{ mm}$ , $x_1 = 237 \text{ mm}$ , $a_2 = 4 \text{ mm}$ , $x_2 = 1595 \text{ mm}$ .....	133
<b>Figure V.27-</b> n <sup>bre</sup> d'éléments 37, éléments endommagés 5 et 14, $a_1 = 8 \text{ mm}$ , $x_1 = 237 \text{ mm}$ , $a_2 = 4 \text{ mm}$ , $x_2 = 644 \text{ mm}$ .....	134
<b>Figure V.28-</b> n <sup>bre</sup> d'éléments 37, éléments endommagés 5 et 20, $a_1 = 12 \text{ mm}$ , $x_1 = 237 \text{ mm}$ , $a_2 = 8 \text{ mm}$ , $x_2 = 983 \text{ mm}$ .....	135
<b>Figure V.29-</b> n <sup>bre</sup> d'éléments 37, éléments endommagés 5 et 33, $a_1 = 12 \text{ mm}$ , $x_1 = 237 \text{ mm}$ , $a_2 = 4 \text{ mm}$ , $x_2 = 1595 \text{ mm}$ .....	136

#### Poutre encastree-encastree en Aluminium

<b>Figure V.30-</b> n <sup>bre</sup> d'éléments 27, éléments endommagés 4 et 10, $a_1 = 8 \text{ mm}$ , $x_1 = 237 \text{ mm}$ , $a_2 = 4 \text{ mm}$ , $x_2 = 644 \text{ mm}$ .....	138
<b>Figure V.31-</b> n <sup>bre</sup> d'éléments 27, éléments endommagés 4 et 15, $a_1 = 12 \text{ mm}$ , $x_1 = 237 \text{ mm}$ , $a_2 = 8 \text{ mm}$ , $x_2 = 983 \text{ mm}$ .....	139
<b>Figure V.32-</b> n <sup>bre</sup> d'éléments 27, éléments endommagés 4 et 24, $a_1 = 12 \text{ mm}$ , $x_1 = 237 \text{ mm}$ , $a_2 = 4 \text{ mm}$ , $x_2 = 1595 \text{ mm}$ .....	140
<b>Figure V.33-</b> n <sup>bre</sup> d'éléments 37, éléments endommagés 5 et 14, $a_1 = 8 \text{ mm}$ , $x_1 = 237 \text{ mm}$ , $a_2 = 4 \text{ mm}$ , $x_2 = 644 \text{ mm}$ .....	141
<b>Figure V.34-</b> n <sup>bre</sup> d'éléments 37, éléments endommagés 5 et 20, $a_1 = 12 \text{ mm}$ , $x_1 = 237 \text{ mm}$ , $a_2 = 8 \text{ mm}$ , $x_2 = 983 \text{ mm}$ .....	142
<b>Figure V.35-</b> n <sup>bre</sup> d'éléments 37, éléments endommagés 5 et 33, $a_1 = 12 \text{ mm}$ , $x_1 = 237 \text{ mm}$ , $a_2 = 4 \text{ mm}$ , $x_2 = 1595 \text{ mm}$ .....	143

#### Poutre en Aluminium simplement appuyée

<b>Figure V.36-</b> n <sup>bre</sup> d'éléments 27, éléments endommagés 4 et 10, $a_1 = 8 \text{ mm}$ , $x_1 = 237 \text{ mm}$ , $a_2 = 4 \text{ mm}$ , $x_2 = 644 \text{ mm}$ .....	145
<b>Figure V.37-</b> n <sup>bre</sup> d'éléments 27, éléments endommagés 4 et 15, $a_1 = 12 \text{ mm}$ , $x_1 = 237 \text{ mm}$ , $a_2 = 8 \text{ mm}$ , $x_2 = 983 \text{ mm}$ .....	146

<b>Figure V.38-</b> n <sup>bre</sup> d'éléments 27, éléments endommagés 4 et 24, $a_1 = 12 \text{ mm}$ , $x_1 = 237 \text{ mm}$ , $a_2 = 4 \text{ mm}$ , $x_2 = 1595 \text{ mm}$ .....	147
<b>Figure V.39-</b> n <sup>bre</sup> d'éléments 37, éléments endommagés 5 et 14, $a_1 = 8 \text{ mm}$ , $x_1 = 237 \text{ mm}$ , $a_2 = 4 \text{ mm}$ , $x_2 = 644 \text{ mm}$ .....	148
<b>Figure V.40-</b> n <sup>bre</sup> d'éléments 37, éléments endommagés 5 et 20, $a_1 = 12 \text{ mm}$ , $x_1 = 237 \text{ mm}$ , $a_2 = 8 \text{ mm}$ , $x_2 = 983 \text{ mm}$ .....	149
<b>Figure V.41-</b> n <sup>bre</sup> d'éléments 37, éléments endommagés 5 et 33, $a_1 = 12 \text{ mm}$ , $x_1 = 237 \text{ mm}$ , $a_2 = 4 \text{ mm}$ , $x_2 = 1595 \text{ mm}$ .....	150

<b>Tableau. 1-</b> Propriétés géométriques et mécaniques des trois poutres étudiées. ....	100
<b>Tableau. 2-</b> Comparaison entre les fréquences propres mesurées et calculées dans le cas d'une poutre saine flexible-libre en Aluminium. ....	100
<b>Tableau. 3-</b> Comparaison entre les fréquences propres mesurées et calculées dans le cas d'une poutre saine encastree- encastree en Aluminium. ....	101
<b>Tableau. 4-</b> Comparaison entre les fréquences propres mesurées et calculées dans le cas d'une poutre saine encastree-encastree en Acier. ....	101
<b>Tableau. 5-</b> Comparaison entre les fréquences propres mesurées et celles calculées pour les modèles de poutres endommagées flexibles-libres en Aluminium dans le cas d'une seule fissure. ....	103
<b>Tableau. 6-</b> Comparaison entre les fréquences mesurées et celles calculées pour les modèles de poutres endommagées encastrees-encastrees en Aluminium dans le cas d'une seule fissure. ....	104
<b>Tableau. 7-</b> Comparaison entre les fréquences mesurée et celles calculées pour les modèles de poutres endommagées encastrees-encastrees en Acier dans le cas d'une seule fissure. ....	105
<b>Tableau. 8-</b> Comparaison entre les fréquences mesurées et celles calculées pour les modèles de poutres endommagées encastrees-encastrees en Aluminium dans le cas de deux fissures. ....	107

---

## INTRODUCTION GENERALE

---

La surveillance de l'état de santé des structures (ou *SHM*, pour *Structural Health Monitoring*) en lien avec l'identification des dommages dans les structure, est particulièrement développée par des communautés scientifiques et techniques au cours des dernières décennies. Cette situation concerne la conception, le développement et l'implémentation de techniques pour la détection, la localisation et l'estimation d'endommagements ou de changements dans une structure existante. En effet, cette surveillance est cruciale car une défaillance imprévue dans une structure peut causer aussi bien une catastrophe économique et une perte de vies humaines.

Les dix dernières années ont vu une augmentation rapide de la quantité de recherches portant sur la *SHM* (*Structural Health Monitoring*) à cause de l'augmentation des données et des moyens de calculs. Une vaste revue sur les méthodes de surveillance peut être trouvée dans la littérature.

L'objectif de la *SHM* est de surveiller en temps réel ou à intervalles réguliers l'état de santé d'une structure en détectant des endommagements dans des éléments constituant une structure. Parmi les systèmes et les ouvrages nécessitant une inspection régulière et une surveillance fréquente, on peut citer les plateformes pétrolières, les ponts et les bâtiments, les avions ou les véhicules spatiaux et plus récemment les parcs d'éoliennes.

Ces ouvrages sont constamment soumis à des agressions environnementales ou des phénomènes naturels extrêmes (tremblement de terre, Tsunami, vent violent, houle, augmentation et diminution de la température, trafic autoroutier, etc.), entraînant un vieillissement de leurs éléments (fatigue) ou de leurs matériaux constitutifs, sous l'action de leur fonctionnement normal, de l'évolution de leurs conditions d'exploitation ou des chargements exceptionnels.

Afin de pouvoir surveiller l'état de santé des structures, deux catégories de méthodes d'identification d'endommagements non destructives sont utilisées : la première catégorie comprend des méthodes locales destinées à fournir des informations sur une région locale de la structure. Généralement, ce sont des méthodes expérimentales visuelles exigeant que le voisinage de l'endommagement soit connu a priori et que la partie à inspecter de la structure soit facilement accessible. Parmi ces méthodes on peut citer le contrôle par rayons X, la radiographie, les ultrasons, les émissions acoustiques, la méthode des courants Foucault, etc. La deuxième catégorie comprend des méthodes globales pour surveiller l'état d'une structure plus complexe, ce sont des méthodes destinées à fournir des informations sur le comportement mécanique d'une structure en utilisant des mesures réalisées à partir d'un ensemble de capteurs dispersés dans la structure pour obtenir des

informations globales sur les changements des caractéristiques vibratoires. Il n'est pas nécessaire que les capteurs soient situés à proximité du site d'endommagement.

Evidemment, ces deux approches (locale et globale) sont complémentaires et le choix optimal de la méthode dépend fortement de la nature du problème. L'inspection régulière de l'état des structures permet de détecter des défauts éventuels et d'assurer la fiabilité de ces structures pour l'usage quotidien.

Dans ce présent mémoire, nous nous limiterons à l'étude de certaines méthodes globales pour la détection d'endommagements dans les structures. L'idée générale de ces méthodes est que la variation des propriétés physiques (rigidité, masse et amortissement) entraînent une variation des caractéristiques dynamiques de la structure (fréquences de résonances, coefficient d'amortissement et déformées modales). De ce fait, les modifications pouvant intervenir sur les propriétés physiques ou mécaniques doivent être détectables au travers des changements des paramètres modaux (fréquences et déformées modales).

La présence d'endommagement ou d'une fissure provoque une variation locale de la rigidité de la structure, qui se reporte sur l'ensemble du comportement mécanique de la structure. La réduction dans la rigidité réduit les fréquences et affecte les déformées modales, c'est-à-dire augmente la flexibilité. À partir de la réponse dynamique mesurée sur le système, l'extraction des caractéristiques est le processus d'identification des propriétés sensibles permettant de distinguer entre les états sains et endommagés de la structure. L'extraction de la fréquence naturelle et la forme du mode d'une structure vibrante (analyse modale) peuvent être réalisées en utilisant des équipements et des instruments modernes. Les données dynamiques modales et structurelles peuvent être ensuite utilisées pour la surveillance de l'état et de la durée de vie opérationnelle d'une structure sans qu'elle soit détériorée.

L'objectif de ce travail est de faire, en premier lieu, une étude comparative de cinq modèles de fissuration existant dans la littérature en comparant leurs fréquences naturelles obtenues analytiquement par rapport aux fréquences naturelles obtenues expérimentalement. Et, en second lieu, une étude comparative de ces modèles de fissuration en les appliquant sur trois méthodes d'identification d'endommagements. Cette étude a été menée en faisant varier les différents paramètres caractérisant la fissure (profondeur, position et nombre de fissure) et ceux caractérisant la structure poutre endommagée (longueur, matériau, conditions aux limites, nombre d'éléments...).

Pour ce faire, nous avons structuré le mémoire de sorte qu'il comporte une introduction, cinq chapitres et une conclusion générale :

- Le chapitre I présente une étude bibliographique constituée principalement d'une bibliographie de quelques méthodes d'identification d'endommagements présentés dans la littérature.
- Le chapitre II rappelle la méthode des éléments finis et le développement d'un modèle mathématique d'un élément fini de poutre d'Euler-Bernoulli utilisé dans ce présent travail.
- Le chapitre III présente les modèles de fissuration existant dans la littérature à savoir le modèle de J. K. Sinha *et al*, M.H.F. Dado *et al*, Ostachowicz et Krawkczuk, Dimarogonas et Paipetis et le modèle basé sur la réduction de la rigidité E.
- Le chapitre IV présente trois méthodes d'identification d'endommagements qui seront appliquées avec les modèles de fissuration évoqués dans le chapitre III.
- Le chapitre V porte sur une application numérique de ces méthodes de détection de défauts avec les cinq modèles de fissuration de structures poutres endommagées.
- Enfin, ce travail sera clôturé par une conclusion générale.

*CHAPITRE I :*

*ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE*

---

## **I.1 Introduction :**

Durant la conception et la fabrication d'une structure mécanique, certains paramètres de départ sont imposés (poids, durée de vie, prix, etc.). Le problème consiste ensuite à déterminer l'état d'une structure soumise à des sollicitations (forces extérieures, déplacements imposés, température, vitesses, etc.) dont nous souhaitons connaître l'état finale de cette pièce (déplacements, contraintes, température, fréquences propres, endommagements, etc.). La résolution de ce problème fait souvent appel aux notions de résistance des matériaux, la mécanique linéaire élastique de la rupture, la mécanique des milieux continus et la dynamique des structures.

## **I.2 Vibrations des structures mécaniques :**

L'analyse statique donne des résultats importants sur la résistance des structures soumises à des sollicitations extérieures. En outre, l'analyse dynamique de ces structures s'avère indispensable pour contrôler ses vibrations car ces dernières sont :

1. A l'origine de la rupture de pièces mécaniques d'une structure notamment la rupture par fatigue en dépassant la contrainte élastique.
2. La source des défauts de fabrication lors de l'usinage des pièces mécaniques.

L'analyse de ces vibrations dans les structures mécaniques, doit ainsi porter sur les points essentiels suivants :

1. L'environnement vibratoire (les forces extérieures).
2. La structure elle-même.
3. La réponse de la structure suite à l'application des forces extérieures.

L'étude du comportement vibratoire d'une structure présente, dans la plupart des cas, deux étapes principales :

1. Vibrations libres : détermination des caractéristiques dynamiques propres de la structure (fréquences propres et modes propres de vibrations).
2. Vibrations forcés : Analyse fréquentielle ou temporelle de la réponse de la structure suite à l'application des forces extérieures.

## **I.3 Notion de la mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER) :**

La rupture est un problème auquel l'homme aura à faire face aussi longtemps qu'il construira des édifices ou fabriquera des structures. Ce problème est actuellement plus crucial avec le

développement de structures complexes liées aux progrès technologiques. Les avancées dans la connaissance de la mécanique de la rupture permettent aujourd'hui et plus précisément depuis le milieu du 20<sup>ème</sup> siècle, de mieux prévenir le risque de la rupture [1].

On distingue deux catégories de rupture des structures :

- Soit une négligence dans la conception, dans la construction ou dans l'utilisation de la structure.
- Soit l'utilisation d'un nouveau matériau ou d'un nouveau procédé, qui peut provoquer une rupture inattendue.

Dans le premier cas, le risque de la rupture peut être évité dès lors que la structure est bien dimensionnée avec un choix de matériaux adaptés et que les chargements sont correctement évalués.

Dans le deuxième cas, la prévention de la rupture est plus délicate. Lorsqu'on utilise un nouveau matériau ou un nouveau procédé, il y a souvent un certain nombre de facteurs que le concepteur ne maîtrise pas toujours car la mise en œuvre de nouvelles techniques, bien qu'elle procure des avantages, conduit inévitablement à des problèmes potentiels.

Un exemple bien connu du deuxième cas est la rupture de ce qu'on appelait les bateaux de la liberté pendant la deuxième guerre mondiale. Ces bateaux, dont la coque était assemblée par soudage et non par rivetage, coûtaient moins chers et étaient fabriqués plus rapidement. Ce changement de procédé de fabrication qui constituait un progrès indéniable, conduisait cependant à des ruptures catastrophiques qui se développaient dans les joints de soudure.

Aujourd'hui, la plupart des bateaux sont assemblés par soudage mais le progrès des connaissances et l'utilisation des doubles coques en aciers plus adaptés permettent de mieux maîtriser ce risque de rupture.

### **I.3.1 Définition de la rupture :**

Le mécanisme de la rupture est un processus mécanique produisant au sein d'un matériau une discontinuité locale de matière appelée *fissure*. Il est usuel de parler d'initiation de la rupture et de propagation de la rupture. Par rapport au facteur temps.

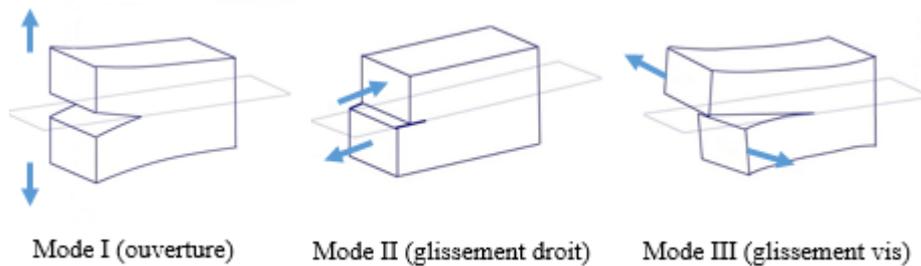
On distingue deux types de rupture :

1. Rupture fragile : la rupture fragile est caractérisée par l'absence de déformation plastique macroscopique, et donc par la propagation très rapide possible des fissures (consommation d'énergie faible).

2. Rupture ductile : la rupture ductile semble liée essentiellement à la présence d'inclusion ou de précipités. Dans ce mode de rupture, la déformation plastique macroscopique est en général importante (consommation d'énergie grande).

### I.3.2 Modes de rupture :

La propagation d'une fissure peut se faire suivant trois modes chargement. Elle peut aussi se faire suivant des modes mixtes qui les combinent tous les trois. La figure (I.1) illustre les trois modes de rupture.



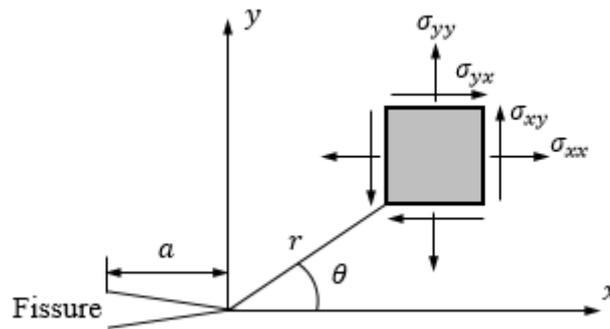
**Figure I.1-** Modes de rupture.

- Mode I : les surfaces de la fissure se déplacent perpendiculairement l'une par rapport à l'autre, c'est le mode par ouverture.
- Mode II : les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan, et dans une direction perpendiculaire au front de fissure. Il est appelé aussi mode par glissement droit.
- Mode III : les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction parallèle au front de fissure, c'est le mode de glissement vis.

Le mode I est considéré comme le plus dangereux en raison de l'ouverture par traction qui favorise l'initiation et la propagation des fissures. C'est le type le plus répandu dans le cas des matériaux fragiles. Par conséquent, il est le plus étudié.

### I.3.3 Facteur d'intensité de contraintes :

Lorsqu'un corps fissuré est sollicité par un champ de force il se produit au voisinage de la fissure une très grande concentration de contraintes. Dans ces conditions qui représentent d'un point de vue pratique la réalité des pièces et structures, les théories de l'élasticité permettent d'exprimer les contraintes proches du front d'une fissure (figure I.2) par une série de Taylor en Coordonnées polaires.



**Figure I.2-** Contraintes au voisinage d'une fissure en fonction des coordonnées polaires.

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \dots + \dots \quad (\text{I.1})$$

négligeable

$\sigma_{ij}$  est le tenseur des contraintes au voisinage de la pointe de la fissure,  $K_I$  représente le facteur d'intensité de contraintes en mode I défini par IRWIN,  $f_{ij}(\theta)$  est une fonction dépendant de l'angle  $\theta$ .

IRWIN a cherché une expression pouvant définir le champ de contraintes au voisinage de la fissure en tenant compte de la zone plastique par l'accroissement de la fissure. Il suggère que la fissure devient instable et se propage lorsque le facteur d'intensité de contraintes  $K_I$  atteint une valeur critique  $K_{Ic}$  appelée ténacité qui caractérise quantitativement la résistance d'un matériau à la propagation brutale d'une fissure en mode I. Il énonça ainsi le critère de contrainte par la relation :

$$K_{Ic} = \sigma_c \cdot Y \cdot \sqrt{\pi a} \quad (\text{I.2})$$

$Y$  représente un coefficient de forme, c'est une fonction qui dépend de la géométrie de la structure et de la longueur de la fissure, il est donné pour les principales pièces par des tables. Dans le cas d'une éprouvette à section droite rectangulaire en flexion trois points, il est donné comme suit :

$$Y = 1.93 - 3.07 \left(\frac{a}{h}\right) + 14.53 \left(\frac{a}{h}\right)^2 - 25.11 \left(\frac{a}{h}\right)^3 + 25.80 \left(\frac{a}{h}\right)^4 \quad (\text{I.3})$$

Avec  $a$  est la longueur de la fissure et  $h$  la hauteur de la poutre.

### I.3.4 Taux de restitution d'énergie de GRIFFITH :

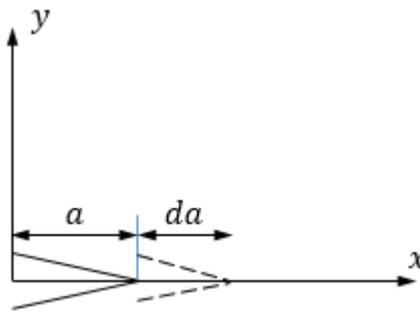
En se basant sur des considérations thermodynamiques GRIFFITH a mis en évidence le fait que la rupture est un phénomène consommateur d'énergie, car pour augmenter la surface d'une fissure et pour la faire progresser d'une longueur unité, il faut fournir une certaine énergie  $G$ , ce qui correspond

à la décroissance de l'énergie potentielle totale  $U_p$  pour passer d'une configuration initiale avec une longueur de fissure  $a$  à une autre où la fissure est propagée d'un accroissement  $da$  (figure I.3) :

$$\begin{cases} G = \frac{\partial U_p}{\partial A} \\ U_p = U_e + U_{ext} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U_e = \frac{1}{2} \int_V \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} dV \\ U_{ext} = \int_D f \cdot u \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Où  $U_e$  représente l'énergie de déformation élastique,  $U_{ext}$  l'énergie potentielle des forces extérieures et  $\partial A$  représente l'incrément de surface correspondant à l'accroissement de longueur  $da$ .

En utilisant le champ des contraintes et la loi de comportement élastique linéaire, il est possible de relier le taux de restitution d'énergie  $G$  avec les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$ .



**Figure I.3-** Accroissement d'une fissure.

#### I.4 Bibliographie des méthodes d'identification d'endommagements :

La capacité de surveiller et de détecter une structure endommagée pour assurer la sécurité des usagers est un enjeu très important en génie mécanique et en génie civile. Il existe plusieurs méthodes locales non destructives d'évaluation de l'endommagement telles que le contrôle par rayons X, la radiographie, les ultrasons, les émissions acoustiques, la méthode des courants Foucault, etc. Toutes ces techniques exigent que la proximité du dommage soit connue et que la partie de la structure à ausculter soit facilement accessible. Le besoin de méthodes globales d'identification d'endommagements pouvant être appliquées à des structures complexes a conduit au développement et à la recherche de méthodes examinant les changements des caractéristiques vibratoires de la structure [2].

Plusieurs développements réalisés dans les années 1970 et au début des années 1980 sont utilisés dans l'industrie pétrolière offshore. Plus tard, les méthodes de détection d'endommagement à partir des réponses vibratoires sont approuvées et sont très utilisées pour de nombreux types de structures. En

particulier, ces méthodes sont souvent appliquées dans le domaine du génie mécanique et du génie civil.

Selon Rytter [3], l'identification d'endommagements peut être classée en quatre niveaux :

- Niveau 1 : Détection de la présence de l'endommagement.
- Niveau 2 : Localisation de l'endommagement.
- Niveau 3 : Quantification de l'endommagement.
- Niveau 4 : Evolution de l'endommagement.

Jusqu'à présent, la plupart des méthodes d'identification d'endommagements basées sur la réponse vibratoire ne permettent que des identifications de niveau 1, 2 et 3. Dans ce présent mémoire, on ne s'intéresse qu'à l'identification d'endommagements de niveau 1.

Dans ce qui va suivre, nous allons présenter quelques méthodes d'identification d'endommagements actuelles proposées dans la littérature, à savoir :

1. Méthodes basées directement sur l'utilisation des paramètres modaux :
  - Méthode basée sur la variation des fréquences naturelles.
  - Méthode basée sur les déformées modales.
2. Méthodes basées sur l'information obtenues via les paramètres modaux :
  - Méthode basée sur les courbures modales (FCM).
  - Méthode basée sur l'énergie de déformation modale.
  - Méthode basée sur la flexibilité dynamique.
  - Méthode basée sur l'amortissement.
3. Méthodes dans le domaine des fréquences (Frequency Response Function (FRF)).
4. Méthode basée sur les forces résiduelles modales (FRM).

#### **I.4.1 Méthodes basées directement sur l'utilisation des paramètres modaux :**

##### **I.4.1.1 Méthode basée sur la variation des fréquences naturelles :**

La variation des fréquences naturelles peut être considérée comme l'une des méthodes prédominantes de détection d'endommagements dans les procédures d'évaluation structurelle. Lorsqu'un endommagement existe dans une structure, la rigidité est réduite et par conséquent la diminution des fréquences propres du système peut être observée. L'un des avantages de cette technique de détection est que la mesure des fréquences peut être effectuée rapidement et facilement. De plus, la connaissance du comportement dynamique global des systèmes non endommagés est très

facile à obtenir en utilisant des développements analytiques ou des modèles éléments finis ; ce qui permet de choisir convenablement les points de mesure pour non seulement une détection rapide et efficace des changements de fréquence mais également l'identification de l'emplacement et de la gravité de l'endommagement. Cependant, la difficulté est que les fréquences peuvent être facilement influencées par des variations de l'environnement comme la température ou l'humidité ce qui pose un problème pour la détection de l'endommagement des structures réelles. Selon S.G. Creed [4], il est nécessaire que le changement des fréquences propres causé par l'endommagement soit supérieur à 5% pour faire confiance aux résultats de détection. Cependant, des changements significatifs des seules fréquences n'impliquent pas systématiquement l'existence d'un endommagement puisque dans certains cas, on a observé en une seule journée des variations des fréquences dues aux conditions ambiantes de plus de 5% pour des ponts en béton ou en acier [5].

D'après Doebling *et al.* [6], le premier article qui a proposé de détecter les endommagements en utilisant la mesure des vibrations a été écrit par Lifshitz et Rotem [7]. Ils ont utilisé la variation des fréquences naturelles via des changements dans les modules dynamiques pour détecter les endommagements dans les élastomères. Hearn et Testa [8] ont démontré que la variation de la  $i^{\text{ème}}$  fréquence naturelle peut être approximée par :

$$\Delta w_i^2 = \frac{(\epsilon_N(\varphi_i))^T \Delta K_n (\epsilon_N(\varphi_i))}{\varphi_i^T M \varphi_i} \quad (I.5)$$

Où  $M$  est la matrice globale de masse,  $\varphi_i$  représente le  $i^{\text{ème}}$  mode propre et  $\epsilon_N(\varphi_i)$  est le vecteur de déformation calculé à partir des modes propres.  $\Delta K_n$  est la matrice de raideur réduite due à la présence de l'endommagement. L'expression précédente suppose que l'endommagement ne change pas la matrice de masse. Hearn et Testa ont également démontré que le rapport de la variation des fréquences  $\frac{\Delta w_i^2}{\Delta w_j^2}$  pour deux modes  $i$  et  $j$  est indépendant de la gravité des endommagements et donc d'une fonction de la position de la fissure seulement. Ainsi, ce résultat permet d'identifier l'emplacement des endommagements. Hasan [9] a illustré cette propriété pour une poutre endommagée sur une fondation élastique.

De nombreux autres chercheurs ont tenté de détecter des dommages dans les structures en utilisant des changements dans les fréquences naturelles. Salawu a proposé un examen intensif dans [10]. Certains chercheurs à l'instar de M. H. F. Dado [11] ont comparé les fréquences naturelles des structures saines et endommagées (et la diminution des fréquences associée).

Par exemple, les fréquences naturelles normalisées qui définissent le rapport entre la fréquence naturelle endommagée et la fréquence naturelle saine de la structure peuvent être données comme suit :

$$NNF_i = \frac{w_i^{end}}{w_i^s} \quad (I.6)$$

Où  $w_i^s$  et  $w_i^{end}$  représentent, respectivement, les pulsations propres de la structures saine et celle endommagée.

Autres chercheurs, comme Y. Lee *et al.* [12] et J. Sinou *et al.* [13], ont proposé le pourcentage de variation des fréquences naturelles comme suit :

$$\% C_i = 100 \times \frac{w_i^s - w_i^{end}}{w_i^s} \quad (I.7)$$

Dans les deux cas, pour pouvoir détecter la présence d'endommagements, les fréquences propres de la structure saine doivent être soigneusement estimées afin de pouvoir montrer avec précision si les fréquences mesurées sont plus faibles que prévu. On peut noter que le pourcentage de la variation des fréquences naturelles peut être très faible et inférieur à 1% pour de petites fissures ou des endroits spécifiques de la fissure. Ainsi, les incertitudes sur les fréquences naturelles des structures saines peuvent masquer la faible quantité de variation de fréquence. Les résultats ont indiqué que la fissure a un faible effet si elle est située près d'un nœud des modes de vibration. Une forte diminution du facteur  $\% C_i$  est montrée si la fissure est localisée où le moment de flexion du  $i^{ème}$  mode est plus grand.

Une méthode similaire à celle ci-dessus consiste à estimer la gravité et l'emplacement de l'endommagement en ne considérant que les fréquences des structures endommagées (sans comparaison avec les fréquences des structures saines). Dans ce cas, la détection et l'identification des fissures nécessitent la connaissance des propriétés du matériau (par exemple le module d'Young  $E$  et la densité volumique  $\rho$ ) estimées à partir des fréquences naturelles saine. Cette dernière approche peut être considérée comme équivalente aux procédures utilisant les facteurs  $NNF$  et  $\% C$  définis précédemment, ces deux facteurs ne sont pas affectés par les paramètres des propriétés du matériau ou des incertitudes sur le module d'Young  $E$  et la densité volumique  $\rho$ . Cependant, les fréquences saines sont utilisées et les propriétés du matériau sont implicitement considérées.

Sinou [14] a défini un autre indicateur basé sur les changements dans le rapport des fréquences. Il est défini comme suit :

$$\% \Psi_{i,j}^{end} = 100 \times \left( \frac{w_i^s}{w_j^s} - \frac{w_i^{end}}{w_j^{end}} \right) \quad (I.8)$$

Où  $w_i^s$  et  $w_i^{end}$  correspondent, respectivement, à la  $i^{\text{ème}}$  pulsation de la structure saine et celle endommagée. Un des avantages de ce facteur  $\% \Psi_{i,j}^{end}$  est que le rapport des fréquences pour les structures saines est généralement connu pour des structures usuelles telles que les poutres. Par exemple, dans le cas d'une poutre simplement appuyée, cet indicateur peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\% \Psi_{2\alpha-a,2\beta-b}^{end} = 100 \times \left( \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 - \frac{w_{2\alpha-a}^{end}}{w_{2\beta-b}^{end}} \right) \quad (I.9)$$

Avec  $a$  et  $b$  sont égaux à 0 ou 1,  $\alpha \in N^*$  et  $\beta \in N^*$ . Les pulsations  $w_{2\alpha-a}$  (ou  $w_{2\beta-b}$ ) sont associées aux déformées modales verticales si  $2\alpha - a$  (ou  $2\beta - b$ ) sont des nombres impairs et si  $2\alpha - a$  (ou  $2\beta - b$ ) sont des nombres pairs, les pulsations  $w_{2\alpha-a}$  (ou  $w_{2\beta-b}$ ) sont associées aux déformées modales horizontales. Dans ce cas, les facteurs  $\% \Psi_{2\alpha-a,2\beta-b}^{end}$  n'ont besoin que de la connaissance des pulsations de la poutre endommagée et ne changent pas avec les variations des propriétés du matériau comme le module d'Young et la densité. Dans le cas général (poutres usuelles ou des structures plus complexes), le facteur  $\% \Psi_{i,j}^{end}$  indique l'effet relatif de l'endommagement pour les  $i^{\text{ème}}$  et  $j^{\text{ème}}$  modes ; si  $\% \Psi_{i,j}^{end}$  est supérieur à 0, on peut conclure que la  $i^{\text{ème}}$  pulsation du  $i^{\text{ème}}$  mode est plus affecté par l'endommagement que la  $j^{\text{ème}}$  pulsation du  $j^{\text{ème}}$  mode, et vice versa.

Messina *et al.* [15] ont proposé l'indicateur "Damage Location Assurance Criterion (DLAC)" en fonction de la variation des fréquences naturelles :

$$DLAC(i) = \frac{|\Delta w_A^T \Delta w_B(i)|^2}{(\Delta w_A^T \Delta w_A)(\Delta w_B(i)^T \Delta w_B(i))} \quad (I.10)$$

Où  $\Delta w_A$  est le vecteur variation des fréquences expérimentales et  $\Delta w_B$  le vecteur variation des fréquences théoriques endommagées situées à la  $i^{\text{ème}}$  position. Les valeurs du  $DLAC$  varient entre 0 et 1. Une valeur de 0 n'indique aucune corrélation et une valeur de 1 indique une correspondance exacte.

### I.4.1.2 Méthode basée sur les déformées modales :

Les déformées modales représentent la description spatiale de l'amplitude de chaque fréquence résonante. Il existe plusieurs techniques d'identification d'endommagement basées directement sur des déformées modales ou leurs dérivées [2].

Allemang et Brown [16] ont présenté une méthode, appelée "Modal Assurance Criterion (MAC)" se basant sur la comparaison entre 2 suites de déformées modales correspondant à 2 états différents, pour détecter l'endommagement. Le coefficient  $MAC$  est considéré comme l'indice de similarité entre 2 modes. Supposons que  $\varphi^A$  de taille  $n \times m_A$  et  $\varphi^B$  de taille  $n \times m_B$  représentent 2 collections des déformées modales correspondant aux 2 états différents  $A$  et  $B$  où  $n$  est le nombre de degré de liberté.  $m_A$  et  $m_B$  sont, respectivement, le nombre des modes à considérer de l'état  $A$  et  $B$ . Le coefficient  $MAC$  est définie par :

$$MAC_{j,k} = \frac{|\sum_{i=1}^n \varphi_{i,j}^A \varphi_{i,k}^B|^2}{\sum_{i=1}^n (\varphi_{i,j}^A)^2 \cdot \sum_{i=1}^n (\varphi_{i,k}^B)^2} \quad (\forall j = 1, \dots, m_A, \forall k = 1, \dots, m_B) \quad (I.11)$$

La valeur  $MAC_{j,k}$  peut être utilisée comme un indicateur d'endommagement. Lorsque le coefficient  $MAC$  est égal à 1, les deux modes sont parfaitement corrélés ; au contraire lorsque le coefficient  $MAC$  est égal à 0, les deux modes n'ont aucune corrélation.

Chez Lieven et Ewin [17], dans le cas où  $m_A = m_B$ , les coefficients "Coordinate Modal Assurance Criterion (CoMAC)" sont utilisés pour localiser l'endroit où les déformées modales ne sont pas corrélées :

$$CoMAC_i = \frac{|\sum_{j=1}^m \varphi_{i,j}^A \varphi_{i,j}^B|^2}{\sum_{j=1}^m (\varphi_{i,j}^A)^2 \cdot \sum_{j=1}^m (\varphi_{i,j}^B)^2} \quad (\forall i = 1, \dots, m) \quad (I.12)$$

L'utilisation de ces deux techniques pour l'identification d'endommagements a donné de bons résultats dans certains cas. Cependant, ces techniques sont principalement appliquées sur des données numériques et tendent aujourd'hui à être remplacées par d'autres méthodes plus sensibles.

## I.4.2 Méthodes basées sur l'information obtenues via les paramètres modaux :

### I.4.2.1 Méthode basée sur les courbures modales :

Plutôt que d'utiliser directement les déformées modales pour obtenir des informations sur l'endommagement, une autre façon est d'étudier leurs dérivées secondes ou les courbures modales. Pour le cas d'une poutre, la relation entre la courbure et le moment fléchissant en un point s'écrit :

$$v''(x) = \frac{M(x)}{EI(x)} \quad (\text{I.13})$$

Où  $v(x)$  est le déplacement transversal.

Les courbures modales peuvent être calculées à partir des déformées modales par la formule suivante :

$$\varphi_j''(i) = \frac{\varphi_{(i+1)} - 2\varphi_j(i) + \varphi_j(i-1)}{l^2} \quad (\text{I.14})$$

Où  $j$  est le numéro du mode,  $i$  le numéro du nœud et  $l$  la distance entre deux nœuds.

Plusieurs études ont confirmé que la courbure modale est un indicateur plus sensible que les coefficients *MAC* et *CoMAC* des déformées.

Pandey *et al.* [18] ont défini l'indicateur "Mode Shape Curvature (MSC)" comme suit :

$$MSC_i = \sum_j |(\varphi_{i,j}^{endommagé})'' - (\varphi_{i,j}^{sain})''| \quad (\text{I.15})$$

Ho et Ewins [19] ont proposé d'autres indicateurs d'endommagements basés sur les courbes modales tels que : Mode Shape Amplitude Comparison (MSAC), Mode Shape Slope (MSS) et Mode Shape Curvature Square (MSCS) définis, respectivement, comme suit :

$$MSAC_i = \sum_j |\varphi_{i,j}^{endommagé} - \varphi_{i,j}^{sain}| \quad (\text{I.16})$$

$$MSS_i = \sum_j |((\varphi_{i,j}^{endommagé})')^2 - ((\varphi_{i,j}^{sain})')^2| \quad (\text{I.17})$$

$$MSCS_i = \sum_j |((\varphi_{i,j}^{endommagé})'')^2 - ((\varphi_{i,j}^{sain})'')^2| \quad (\text{I.18})$$

Ho et Ewins ont démontré que les indicateurs précédents servent de bons indicateurs pour la détection d'endommagements. Cependant, de fausses détections d'endommagements peuvent être observées aux nœuds modaux ou lorsque l'endommagement est proche des appuis ou aux extrémités encastées. L'un des principaux inconvénients de l'utilisation des courbures modales en tant qu'indicateurs d'endommagement est alors la qualité des mesures et des incertitudes aux limites qui peuvent affecter de manière drastique les méthodes basées sur les déformés modales et leurs dérivés.

Abdel Wahab et De Roeck [20] ont légèrement modifié l'indicateur *MSC* (Mode Shape Curvature) pour détecter les endommagements dans des poutres simplement appuyées. Les structures

contiennent des endommagements à différents endroits. Ils ont proposé le facteur d'endommagement "Curvature Damage Factor (CDF)", que nous avons choisi pour la détection d'endommagements dans ce mémoire, comme suit :

$$CDF = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| (\varphi_i^{endommagé})'' - (\varphi_i^{sain})'' \right| \quad (I.19)$$

Où  $N$  est le nombre de modes à considérer. En utilisant les données mesurées sur un pont en béton, ils ont montré que les courbures modales des modes inférieurs sont plus précises que celles des plus élevées pour la détection d'endommagements. Même si la détection de plusieurs endommagements peut être difficile avec les courbures modales classiques à partir des résultats d'un seul mode, les auteurs ont prouvé que le facteur  $CDF$  permet une identification claire de ces endommagements.

Les courbes modales ont été appliquées également par Parloo *et al.* [21] pour différents types d'endommagements sur un pont d'autoroute. Les auteurs ont démontré que seuls les endommagements les plus graves sont identifiés en raison des incertitudes, du bruit de mesure et des conditions ambiantes. Ils ont conclu que les courbures modales ne peuvent pas être utilisées dans des cas pratiques pour la détection de petits endommagements ou dans un état précoce.

Dutta et Talukdar [22] ont étudié les variations dans les fréquences naturelles, les déformées modales et les courbures modales entre les structures saines et endommagées pour des ponts continus contenant des pièces endommagées à différents endroits. Ils ont utilisé le facteur  $CDF$  précédemment défini par Abdel Wahab et De Roeck [20]. Ils ont démontré qu'une meilleure identification d'endommagements est obtenue en considérant les courbures modales au lieu des déformées modales qui sont moins sensibles aux endommagements. Ils ont également noté qu'un nombre adéquat de modes est nécessaire lorsque plusieurs endommagements sont présents.

#### **I.4.2.2 Méthode basée sur l'énergie de déformation modale :**

De nombreux chercheurs ont développé différentes techniques de détection d'endommagements basées sur les paramètres modaux. Parallèlement à ces méthodes, il existe des approches énergétiques dont l'objectif est de distinguer les éléments de structure qui possèdent une raideur plus faible et donc une énergie de déformation modale (MSE sigle anglais pour Modal Strain Energy) plus importante que celle des autres éléments [23].

La méthode de détection d'endommagement basée à la fois sur les changements de la forme du mode de déformation et sur le changement de la fréquence de résonance a été proposée par Dong *et*

al. [24]. La différence entre les structures endommagées et non endommagées a été calculée en considérant l'indicateur  $\Delta\Phi_i$  qui est donné par :

$$\Delta\Phi_i = \left( \frac{w_i^s}{w_i^{end}} \right)^2 \Phi_i^{end} - \Phi_i^s \quad (\text{I.20})$$

Où  $w_i^s$  et  $w_i^{end}$  sont, respectivement, les pulsations du  $i^{\text{ème}}$  mode de la structure saine et celle endommagée.  $\Phi_i^s$  et  $\Phi_i^{end}$  sont, respectivement, la  $i^{\text{ème}}$  forme de mode de déformation de la structure saine et endommagée.

Stubbs *et al.* [25] ont proposé une autre méthode d'identification d'endommagements en considérant la diminution de l'énergie de déformation modale entre deux degrés de liberté de la structure. Pour illustrer cette méthode, considérons une poutre de type Euler-Bernoulli, élastique linéaire, divisée en  $n$  éléments.

Pour un mode propre  $\varphi_j(x)$  considéré, les expressions des énergies de déformation modale de la poutre pour s'écrit :

$$U_j = \int_0^L EI(x) \left( \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (\text{I.21})$$

Et la contribution de l'élément  $i$  à l'énergie de déformation modale du mode  $j$  peut s'écrire :

$$U_{ij} = \int_{L_i}^{L_{i+1}} EI(x_i) \left( \frac{\partial^2 \varphi_j(x_i)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (\text{I.22})$$

Où  $EI(x)$  et  $EI(x_i)$  sont, respectivement, les rigidités en flexion de la poutre et de l'élément  $i$ ,  $L_i$  et  $L_{i+1}$  étant les abscisses des nœuds définissant l'élément  $i$  avec  $L_i \leq x_i \leq L_{i+1}$ .

Le rapport de l'énergie de déformation modale de l'élément  $i$  par rapport à celle de la poutre s'écrit :

$$F_{ij} = \frac{U_{ij}}{U_j} \quad (\text{I.23})$$

En faisant l'hypothèse que la rigidité en flexion ( $EI$ ) est constante sur toute la longueur de l'élément, le rapport de la rigidité en flexion entre le  $i^{\text{ème}}$  élément endommagé et sain s'écrit comme suit :

$$\frac{(EI)_i^{(d)}}{(EI)_i} \approx \frac{\left( \int_{L_i}^{L_{i+1}} (\varphi_j''^{(d)}(x_i))^2 dx + \int_0^L (\varphi_j''^{(d)}(x))^2 dx \right) / \left( \int_0^L (\varphi_j''^{(d)}(x))^2 dx \right)}{\left( \int_{L_i}^{L_{i+1}} (\varphi_j''(x_j))^2 dx + \int_0^L (\varphi_j''(x))^2 dx \right) / \left( \int_0^L (\varphi_j''(x))^2 dx \right)} \quad (\text{I.24})$$

Les auteurs introduisent l'indicateur d'endommagements  $\beta_{ij}$  :

$$\beta_{ij} = \frac{f_{ij}^{(d)}}{f_{ij}} \quad \text{avec} \quad f_{ij} = \left( \int_{L_i}^{L_{i+1}} (\varphi_j''(x_i))^2 dx + \int_0^L (\varphi_j''(x))^2 dx \right) / \left( \int_0^L (\varphi_j''(x))^2 dx \right) \quad (\text{I.25})$$

Avec  $f_{ij}^{(d)}$  et  $f_{ij}$  sont, respectivement, les fractions d'énergie de déformation modale pour le  $j^{\text{ème}}$  mode de vibration de la structure endommagée et saine.

Pour  $n$  modes différents, ils introduisent l'indicateur d'endommagement  $\beta_j$  :

$$\beta_j = \frac{\sum_{i=1}^n f_{ij}^{(d)}}{\sum_{i=1}^n f_{ij}} \quad (\text{I.26})$$

Des études expérimentales réalisées par Alvandi et Crémona [26] ont confirmé la capacité de cette méthode énergétique. Ils ont trouvé que la technique était stable avec des mesures bruitées et qu'elle était plus efficace que les méthodes précédentes. Cependant, ils ont conclu qu'elle présentait des difficultés à détecter et à localiser les endommagements lorsqu'ils sont simultanés et complexes, ou proches des appuis.

Par ailleurs, cette méthode présente certaines limites. Par exemple les nœuds modaux peuvent créer de faux endommagements détectés ou, parfois, ne pas détecter des zones endommagées. Lorsque le défaut est proche des appuis, la détection des endommagements n'est plus précise. Certains problèmes peuvent être améliorés en utilisant la somme des indicateurs provenant de chacun des modes propres (Eq. (I.26)), mais les résultats de cette méthode dépendent beaucoup du nombre de modes utilisés.

Petro et *al.* [27] ont testé la méthode sur des poutres en aluminium avant son application sur des ponts. Cette méthode a été également étudiée par Parloo et *al.* [28] pour l'identification des endommagements. Il a été constaté que la méthode ne procure pas une détection robuste dans le cas de faibles endommagements.

#### I.4.2.3 Méthode basée sur la flexibilité dynamique :

L'idée de cette méthode est d'utiliser la matrice de flexibilité pour estimer le changement de la structure. Comme la matrice de flexibilité est définie comme l'inverse de la matrice de rigidité, chaque colonne représente le déplacement causé par une force d'unité appliquée à un degré de liberté. La matrice de flexibilité (ou de souplesse) peut être estimée à partir des modes propres normalisés par rapport à la matrice de masse ( $\varphi^T M \varphi = I$ ), et les fréquences propres correspondantes :

$$S = \varphi \Omega^{-1} \varphi^T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i^2} \varphi_i \varphi_i^T \quad (\text{I.27})$$

Où  $w_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  pulsation propre de la structure.  $\Omega$  est la matrice diagonale des valeurs propres représentant la matrice diagonale des rigidités modales donnée par :

$$\Omega = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_n) \quad (\text{I.28})$$

$\varphi_i$  représente  $i^{\text{ème}}$  mode propre (forme de mode) et  $\varphi$  est la matrice des modes propres donnée par :

$$\varphi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_n] \quad (\text{I.29})$$

En considérant l'expression (I.27), nous constatons qu'avec l'augmentation de la pulsation, la contribution modale de la matrice de flexibilité diminue, c'est-à-dire qu'en augmentant le nombre de fréquences, la matrice de flexibilité converge rapidement. L'identification d'endommagements en utilisant la matrice de flexibilité est plus sensible avec le changement des modes basses fréquences, c'est-à-dire en utilisant les premiers modes de vibration de la structure.

Pandey [29] a présenté également la variation de flexibilité entre l'état sain et endommagé comme un paramètre sensible à la détection d'endommagements. Les résultats numériques et expérimentaux ont montré que l'estimation de la présence d'un endommagement peut être obtenue à partir des trois premiers modes de la structure.

Typiquement, l'endommagement est détecté en comparant la matrice de flexibilité obtenue par les modes de la structure saine et celle de la structure endommagée.

La différence de la matrice de flexibilité entre l'état sain et l'état endommagé est donnée par :

$$\Delta S = S - S^{end} \quad (\text{I.30})$$

Le maximum de chaque colonne de la matrice  $\Delta S$  est déterminé et la valeur maximale des maxima permet d'identifier la détection de l'endommagement.

Mayer [30] a utilisé le changement de flexibilité à partir des fréquences expérimentales pour localiser l'endommagement au niveau du pont I40.

Alvandi et Crémona [31] ont utilisé le changement de flexibilité pour détecter et identifier des défauts dans une poutre simplement supportée. Ils l'ont également appliquée sur diverses données

expérimentales comme celle du pont I40. Ils ont trouvé que la technique n'est pas performante lorsqu'il y a plusieurs endommagements ou lorsqu'ils sont proches des extrémités.

#### I.4.2.4 Méthode basée sur l'amortissement.

Il semble naturel de s'attendre à ce qu'un indicateur intéressant pour la détection d'endommagements soit les changements d'amortissement et les effets dissipatifs dus au frottement entre les surfaces de fissures.

Modena *et al.* [32] ont indiqué que l'un des avantages de l'utilisation des changements d'amortissement est que des fissures indétectables en utilisant des changements de fréquences naturelles (dus à des incertitudes ou à une faible diminution des fréquences) peuvent entraîner des changements importants du facteur d'amortissement. En général, il est admis que l'augmentation de la sévérité de la fissure augmente le facteur d'amortissement.

Cependant, Salane et Baldwin [33] ont étudié l'influence de l'endommagement sur les coefficients d'amortissement. Leurs conclusions furent que ceux-ci ne pouvaient pas constituer des indicateurs fiables parce qu'ils pouvaient augmenter, puis diminuer. L'amortissement a été défini comme un paramètre instable sur la variabilité naturelle des paramètres modaux. Malgré tout, d'autres études tendent à confirmer l'utilité de se servir de l'amortissement comme un indicateur de l'intégrité de la structure.

Kyriazoglou *et al.* [34] ont proposé la mesure de la capacité spécifique d'amortissement (Specific Damping Capacity (SDC)) pour la détection d'endommagements dans les matériaux composites. Le facteur SDC est défini par :

$$SDC = \frac{\Delta U}{U} \quad (I.31)$$

Où  $\Delta U$  et  $U$  sont, respectivement, l'énergie dissipée dans un cycle et l'énergie totale stockée dans ce cycle.

Panteliou *et al.* [35] ont montré que le facteur d'amortissement augmente avec l'augmentation de la profondeur de la fissure. Ils ont dit que l'identification de la fissure en utilisant le changement de facteur d'amortissement a l'avantage d'être relativement insensible aux conditions aux limites par rapport aux décalages dans les fréquences naturelles. Cependant, il semble qu'une précision relativement confiante des changements dans le facteur d'amortissement puisse être difficile à obtenir pour les petites fissures en raison des incertitudes et des conditions expérimentales.

De la même façon, Leonard *et al.* [36] ont indiqué que la valeur d'amortissement modal d'une structure endommagée dépend des amplitudes de vibration qui induisent le mécanisme d'ouverture ou de fermeture de la fissure. Pour une poutre encastree-libre, ils ont démontré que l'amortissement modal diminue lorsque les vibrations des amplitudes sont trop faibles pour générer une fissure ouverte. Lorsque l'ouverture et la fermeture de la fissure introduit des effets de contact, l'amortissement modal est plus important pour un grand nombre de modes. Par conséquent, l'utilisation de la variation de l'amortissement modal pour détecter les endommagements semble difficile en raison de la dépendance de l'amortissement modal à l'amplitude de la vibration. De plus, des incertitudes et des changements dans l'amortissement modal peuvent être observés en raison de l'élévation de la température.

### I.4.3 Méthodes dans le domaine des fréquences (Frequency Response Function (FRF)) :

La limitation des méthodes basées sur les changements des fréquences propres, des modes propres, des courbures modales et de l'énergie de déformation modale réside dans le fait qu'il est nécessaire d'extraire les caractéristiques modales des mesures avec une bonne précision.

Cependant, des méthodes classiques d'analyse modale expérimentale exploitent les Fonctions de Réponse en Fréquence (FRF) qui nécessitent la connaissance de l'excitation. Cette technique est basée sur le changement de la FRF entre deux états de la structure. De nombreuses méthodes basées sur la FRF sont utilisées pour l'identification d'endommagements, nous présenterons ici deux parmi elles à savoir : méthode basée sur l'extension du MAC pour la FRF et celle basée sur les courbures de la FRF.

#### I.4.3.1 Description théorique de la FRF :

L'équation du mouvement d'une structure discrétisée en éléments finis est souvent exprimée par :

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (\text{I.32})$$

Où  $M$   $C$  et  $K$  sont, respectivement, les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité de la structure.  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  et  $\ddot{x}(t)$  représentent, respectivement, les valeurs de déplacements, de vitesse et d'accélération.

Dans le cas d'une excitation harmonique, la force est exprimée par :

$$f(t) = F_j e^{i\omega t} \delta_m^j \quad (\text{I.33})$$

Où  $w$  est la pulsation propre,  $F_j$  est l'amplitude de la force d'excitation,  $j$  est l'indice du degré de liberté où la force est appliquée, et  $\delta_m^j$  est la distribution (ou l'impulsion) de Dirac (=1 pour  $m = j$ , 0 sinon). La réponse peut être considérée comme étant :

$$x_{(t)} = X e^{iwt} \quad (\text{I.34})$$

L'équation (I.32) peut être ainsi réécrite comme suit :

$$(K - w^2 M + iwC)X = F \quad (\text{I.35})$$

Par conséquent, la relation entre la réponse  $X_{(w)}$  et l'excitation  $F_{(w)}$  à chaque fréquence  $w$  est donnée par :

$$X_{(w)} = H_{(w)} \cdot F_{(w)} \quad (\text{I.36})$$

Où  $H_{(w)}$  définit la matrice de transfert du système, ou FRF, et est égale à :

$$H_{(w)} = (K - w^2 M + iwC)^{-1} \quad (\text{I.37})$$

La relation entre la réponse au  $i^{\text{ème}}$  ddl et l'excitation appliquée au  $j^{\text{ème}}$  ddl définit la fonction de réponse en fréquence individuelle,  $H_{ij}(w)$ , qui est donnée par :

$$H_{ij}(w) = \frac{X_i(w)}{F_j(w)} \quad (\text{I.38})$$

#### I.4.3.2 Extension du MAC pour la Fonction de la Réponse en Fréquence :

Comme décrit précédemment, la rigidité et l'amortissement d'une structure sont influencés par la présence d'un endommagement. La fonction de transfert de la structure endommagée peut donc être utilisée comme un indicateur d'endommagement. Une extension du critère *MAC*, vu précédemment, pour la FRF a été proposée par Heylen et Lammens [37], le critère d'endommagements *FRAC* (Frequency Response Assurance Criterion) utilisé pour indiquer la présence d'un endommagement est donnée par :

$$FRAC_{ij}(w) = \frac{|H_{ij}(w) - \overline{H}_{ij}^{end}|^2}{H_{ij}(w) \cdot H_{ij}^{end} \cdot \overline{H}_{ij}(w) \cdot \overline{H}_{ij}^{end}} \quad (\text{I.39})$$

Où  $H_{ij}(w)$  et  $\overline{H}_{ij}(w)$  sont, respectivement, la FRF (fonction complexe) et son conjugué de la structure saine,  $H_{ij}^{end}$  et  $\overline{H}_{ij}^{end}$  sont, respectivement, respectivement, la FRF (fonction complexe) et son conjugué de la structure endommagée.

Dans ce cas, l'excitation est appliquée au  $j^{\text{ème}}$  ddl et la fonction de réponse est mesurée au  $i^{\text{ème}}$  ddl. La valeur de  $FRAC_{ij}$  varie entre 0 et 1. Si la valeur de  $FRAC_{ij}$  est égale à 1, la structure n'est pas endommagée. Plus l'endommagement est sévère, plus la valeur de  $FRAC_{ij}$  est faible.

### I.4.3.3 Méthode basée sur les courbures de FRF :

Cette technique de détection d'endommagement est une extension de l'approche de Pandey *et al.* [38] sur la courbure des déformées modales appliquée sur la FRF pour une bande de fréquence donnée. La courbure de la réponse en fréquence peut être estimée en utilisant l'approximation de la différence finie centrée :

$$H_j''(i) = \frac{H_j''(i+1) - 2H_j''(i) + H_j''(i-1)}{h^2} \quad (\text{I.40})$$

Où  $H_{ij}$  est la fonction de réponse en fréquence mesurée au  $i^{\text{ème}}$  ddl pour une excitation appliquée au  $j^{\text{ème}}$  ddl pour une fréquence donnée  $w$  et  $h$  est le pas, supposé constant, entre deux points de mesure (deux nœuds). La différence absolue entre la courbure de réponse en fréquence de la structure saine et de la structure endommagée pour une bande de fréquence donnée  $w = [w_{\text{initiale}}, w_{\text{finale}}]$  est exprimée alors par :

$$\Delta H_j''(i) = \sum_{w=w_{\text{initiale}}}^{w_{\text{finale}}} \left| (H_j''(i))^{\text{end}} - H_j''(i) \right| \quad (\text{I.41})$$

Sampaio, Maia et Silvia [39] ont développé et appliqué cette méthode sur le pont I40. Les résultats ont montré son efficacité pour la détection et la localisation des endommagements. L'avantage de la méthode est qu'elle ne nécessite pas d'analyse modale afin d'identifier les fréquences ou les modes propres, ce qui est le cas de beaucoup d'autres méthodes de détection. L'application de cette méthode sur des données numériques a fourni de bons résultats. Cependant, avec des données expérimentales, les résultats sont moins satisfaisants. Les auteurs ont conclu que la méthode n'est pas fiable pour certains petits défauts (par exemple les fissures).

Palacz et Krawkczuk [40] ont utilisé la courbure de réponse en fréquence pour la détection d'endommagements dans des poutres consoles. Ils ont démontré que plus le nombre de capteurs est élevé plus la localisation du défaut est précise. De plus, ils ont indiqué que les erreurs introduites dans la courbure de réponse en fréquence n'affectent pas la détection des endommagements.

#### **I.4.4 Méthode basée sur les forces modales résiduelles :**

En générale, la théorie de base de la méthode d'identification d'endommagements basée sur les forces modales résiduelles commence par le problème aux valeurs propres d'une structure endommagée où les vecteurs forces modales résiduelles sont obtenus et qu'on peut utiliser comme indicateur d'endommagement dans des structures.

Ricles et Kosmatka [41] ont utilisé les forces résiduelles pour identifier l'emplacement et la gravité des endommagements. En combinant les données modales mesurées avec le modèle structurel associé, ils ont appliqué les vecteurs forces résiduelles pour déterminer l'emplacement possible des endommagements.

Sheinman [42] a proposé des vecteurs de force résiduelle modifiés pour détecter les endommagements.

Baruh et Ratan [43] ont également utilisé les forces résiduelles pour détecter les endommagements dans les structures treillis et poutres. En se basant sur les matrices de masse et de rigidité de la structure et des données modales de test (fréquences naturelles et formes de mode), ils ont calculé le vecteur de forces résiduelles de chaque mode. Le résultat est que si le bruit est inférieur à 10%, cette méthode peut détecter les endommagements avec précision.

Liu et Yang [44] ont utilisé la matrice de forme de mode et la matrice de force résiduelle pour déterminer le nombre d'éléments endommagés et localisé les éléments de dommage par la matrice de localisation des dommages. Et les étendues de dégâts peuvent être facilement obtenues.

#### **I.5 Conclusion :**

Dans ce chapitre, un aperçu général sur les méthodes d'identification d'endommagements dans les structures a été présenté. Ce domaine de recherche est très actif et le nombre de publications d'articles continue de croître. En faisant une recherche dans le répertoire scientifique, journaux et bibliothèque concernant l'endommagement dans les structures, on obtient un nombre important d'articles présentant de différentes méthodes d'identification d'endommagements. En outre, une analyse d'année en année des données recueillies montre en effet une tendance exponentielle à l'augmentation des travaux publiés. Cette augmentation se poursuivra dans un avenir prévisible, car les techniques numériques et expérimentales sont encore améliorées et incorporées dans des méthodes déjà existantes ou dans de nouvelles méthodes.

## *CHAPITRE II :*

### *METHODE DES ELEMENTS FINIS*

---

## I.1 Introduction :

La méthode des éléments finis est une méthode de résolution approchée d'équations aux dérivées partielles. D'une manière plus humoristique, il s'agit de remplacer un problème compliqué, pour lequel à priori on ne connaît pas de solution, par un problème plus simple que l'on sait résoudre. D'une manière pratique, la méthode est en grande majorité des cas mise en œuvre via des codes de calcul informatiques. Ces outils de calcul sont aujourd'hui largement utilisés dans l'industrie.

L'objectif de la méthode est de déterminer des fonctions inconnues telles que les fonctions déplacements, contraintes ou déformations, dépendant du temps. On parle du "champs" de déplacement, de contraintes ou de déformation pour indiquer qu'il y a autant de fonctions inconnues que de points différents. Un champ de fonction regroupe une infinité de fonctions inconnues. Alors, la connaissance du champ est équivalente à celle d'une infinité de scalaires correspondant aux valeurs de la fonction en chaque point. Étant donné que l'infini est difficile à atteindre, nous allons utiliser une méthode de discrétisation pour simplifier le problème. La méthode retenue consiste à rechercher une solution approchée aux fonctions inconnues sous forme d'une somme finie de fonctions connues pondérées par des coefficients inconnus à déterminer.

Dans ce qui suit, nous adopterons les hypothèses suivantes :

- Les déplacements et les déformations sont petits.
- Le comportement du matériau est élastique et linéaire.
- Le matériau est homogène et isotrope.

### I.1.1 Notations :

La structure (Figure **II.1**) sera notée  $V$ . La frontière de  $V$  sera notée  $S$ .

Le déplacement  $\vec{u}_d$  est imposé sur la partie  $S_u$ .

Les efforts surfaciques  $\vec{F}_d$  sont imposés sur la partie  $S_d$ .

Les efforts volumiques  $\vec{f}_d$  sont imposés sur  $V$ .

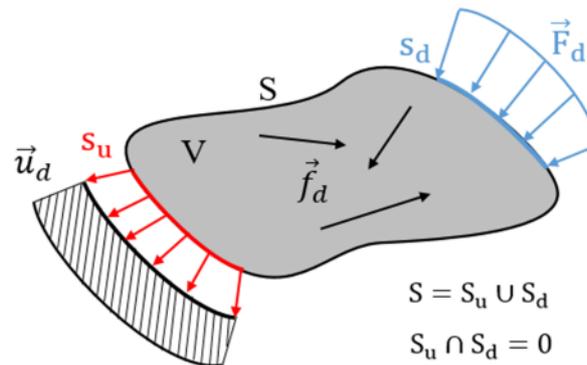


Figure I.1- Structure étudiée.

### I.1.2 Enoncé d'un problème de mécanique :

Le problème consiste en général à déterminer l'état d'une structure soumise à des sollicitations.

La structure est caractérisée par :

- Sa géométrie.
- Un ou plusieurs matériaux.

Elle est soumise à des sollicitations :

- Des efforts volumiques ou surfaciques.
- Des déplacements imposés (nuls ou non nuls).
- Des températures, des flux de chaleur, ...
- Des vitesses, ...

On souhaite connaître :

- Les déplacements en tout point.
- Les déformations et les contraintes en tout point.
- La température.
- Les fréquences propres.
- etc.

### I.1.3 Forme différentielle du problème :

Résoudre un problème en élasticité linéaire consiste à chercher un champ de déplacements [45] :

$$\vec{u}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, t)} = \begin{cases} u_{(x, y, z, t)} \\ v_{(x, y, z, t)} \\ w_{(x, y, z, t)} \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Tel que :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = \rho \ddot{u}_{(x,y,z,t)} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = \rho \ddot{v}_{(x,y,z,t)} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = \rho \ddot{w}_{(x,y,z,t)} \end{cases} \Leftrightarrow \rho \ddot{\vec{u}} = \overrightarrow{\text{div}}(\vec{\sigma}) + \vec{f} \quad (\text{II.2})$$

Où  $\vec{\sigma}$  et  $\vec{f}$  sont, respectivement, le tenseur des contraintes et les forces de volume.  $\rho$  est la densité volumique et  $\ddot{\vec{u}}$  est le champ des accélérations.

Avec la vérification :

- Des relations cinématiques :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.3})$$

- Des conditions aux limites cinématiques :

$$\vec{u}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t)} = \vec{u}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t)}^d \quad (\text{II.4})$$

Avec :

$$\vec{u}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t)}^d = \begin{cases} u_{(x,y,z,t)}^d \\ v_{(x,y,z,t)}^d \\ w_{(x,y,z,t)}^d \end{cases} \text{ est le champ de déplacement imposé sur la frontière } S_u \text{ (Figure II.1).}$$

- Des conditions aux limites statiques :

$$\sigma_{ij(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t)} n_{j(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = F_{i(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t)}^d \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z = F_x^d \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z = F_y^d \\ \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z = F_z^d \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Avec  $F^d$  sont les force surfaciques imposées sur la frontière  $S_d$  (Figure II.1).

- Des conditions initiales à l'instant  $t = t_0$  :

$$\begin{cases} u_{(x,y,z,t_0)} \\ v_{(x,y,z,t_0)} \\ w_{(x,y,z,t_0)} \end{cases} = \begin{cases} u_{(x,y,z)} \\ v_{(x,y,z)} \\ w_{(x,y,z)} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{u}_{(x,y,z,t_0)} \\ \dot{v}_{(x,y,z,t_0)} \\ \dot{w}_{(x,y,z,t_0)} \end{cases} = \begin{cases} \dot{u}_{(x,y,z)} \\ \dot{v}_{(x,y,z)} \\ \dot{w}_{(x,y,z)} \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Avec  $\dot{u}$ ,  $\dot{v}$  et  $\dot{w}$  sont les composantes du champ des vitesses.

– La loi de comportement ou loi constitutive :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (\text{II.7})$$

Avec  $\{\sigma\}$  et  $\{\varepsilon\}$  sont, respectivement, les vecteurs champs de contraintes et de déformations,  $[D]$  est la matrice des coefficients élastiques.

#### I.1.4 Forme intégrale faible du problème :

Pour résoudre le problème différentiel nous utilisons la méthode des résidus pondérés qui est la base mathématique de la méthode des éléments finis.

Soit le vecteur  $\vec{r} = \rho \ddot{\vec{u}}_{app} - \overrightarrow{div}(\vec{\sigma}) - \vec{f} = 0$ , le résidu est défini par l'erreur sur l'équation (II.2).

Soit un vecteur  $\vec{P}_{(M)}$  dont ces composantes sont des fonctions<sup>1</sup> dites de pondération, quelconques et définies sur le domaine  $V$ . La méthode des résidus pondérés consiste à annuler l'erreur commise sur le résidu, en la rendant orthogonale, selon un produit scalaire précis, au vecteur  $\vec{P}_{(M)}$ .

#### Remarque :

$M$  est un point appartenant au volume  $V$ .  $\vec{u}_{app}$  est le champ de déplacement approché au champ de déplacement  $\vec{u}$ . Dans ce qui suit, on notera  $\vec{u}_{app}$  par  $\vec{u}$ .

Multiplions le résidu  $\vec{r}$  par le vecteur quelconque  $\vec{P}$  puis intégrons sur le domaine  $V$  :

$$\begin{aligned} \forall \vec{P}, \quad & \int_V \vec{P}^T (\rho \ddot{\vec{u}} - \overrightarrow{div}(\vec{\sigma}) - \vec{f}) dV = 0 \quad (\text{formulation forte}) \\ \Rightarrow & \int_V \vec{P}^T \rho \ddot{\vec{u}} dV - \int_V \vec{P}^T \overrightarrow{div}(\vec{\sigma}) dV - \int_V \vec{P}^T \vec{f} dV = 0 \quad (\text{II.8}) \\ \Rightarrow & \int_V \vec{P}^T \rho \ddot{\vec{u}} dV = \int_V \vec{P}^T \overrightarrow{div}(\vec{\sigma}) dV + \int_V \vec{P}^T \vec{f} dV \end{aligned}$$

Intégrons par partie la quantité  $\int_V \vec{P}^T \overrightarrow{div}(\vec{\sigma}) dV$  :

$$\int_V \vec{P}^T \overrightarrow{div}(\vec{\sigma}) dV = \int_V \text{div}(\vec{P}^T \vec{\sigma}) dV - \int_V \vec{\sigma} : \overrightarrow{grad}_s^T(\vec{P}) dV \quad (\text{II.9})$$

<sup>1</sup> Ces fonctions sont appelées aussi *fonctions test* ou *fonctions de poids*.

En appliquant le théorème de la divergence (ou théorème d'Ostrogradsky<sup>2</sup>), il vient :

$$\int_V \vec{P}^T \overrightarrow{\text{div}}(\vec{\sigma}) dV = \int_S \vec{P}^T \vec{\sigma} \vec{n} dS - \int_V \vec{\sigma} : \overline{\text{grad}}_s(\vec{P}) dV \quad (\text{II.10})$$

Avec :  $\overline{\text{grad}}_s^T(\vec{P}) = \overline{\text{grad}}_s(\vec{P})$  : Partie symétrique du tenseur gradient du déplacement quelconque.

En portant l'expression (II.10) dans l'équation (II.8), il vient :

$$\int_V \vec{P}^T \rho \ddot{\vec{u}} dV = - \int_V \vec{\sigma} : \overline{\text{grad}}_s(\vec{P}) dV + \int_V \vec{P}^T \vec{f} dV + \int_S \vec{P}^T \vec{\sigma} \vec{n} dS \quad (\text{II.11})$$

$$\Rightarrow \int_V \vec{P}^T \rho \ddot{\vec{u}} dV = - \int_V \vec{\sigma} : \overline{\text{grad}}_s(\vec{P}) dV + \int_V \vec{P}^T \vec{f} dV + \int_{S_u} \vec{P}^T \vec{\sigma} \vec{n} dS + \int_{S_d} \vec{P}^T \vec{\sigma} \vec{n} dS \quad (\text{II.12})$$

Sur la frontière  $S_u$ , le champ  $\vec{\sigma} \vec{n}$  est inconnu.

Utilisons les conditions aux limites sur la frontière  $S_d$  :

$$\forall M \in S_d, \vec{\sigma} \vec{n} = \vec{T}_d \quad (\text{II.13})$$

En pratique, pour simplifier le calcul de l'équation intégrale (II.12), nous utiliserons des fonctions de pondération cinématiquement admissibles à valeur nulle sur la frontière  $S_u$  de telle façon que :

$$\forall M \in S_u, \vec{P}_{(M)} = \vec{0} \Rightarrow \int_{S_u} \vec{P}^T \vec{\sigma} \vec{n} dS = \vec{0} \quad (\text{II.14})$$

Compte tenu de ces choix, nous obtenons la forme intégrale faible du problème :

$$\int_V \vec{P}^T \rho \ddot{\vec{u}} dV = - \int_V \vec{\sigma} : \overline{\text{grad}}_s(\vec{P}) dV + \int_V \vec{P}^T \vec{f} dV + \int_{S_d} \vec{P}^T \vec{T}_d dS \quad (\text{II.15})$$

Les conditions aux limites en déplacement restent à vérifier :  $\forall M \in S_u, \vec{u} = \vec{u}_d$ .

<sup>2</sup> Théorème d'Ostrogradsky :  $\int_V \text{div}(\vec{A}) dV = \int_S \vec{A}^T \vec{n} dS$ .

### I.1.5 Equivalence avec le principe des travaux virtuels (PTV) :

Pour tout déplacement virtuel  $\delta u$  à tout instant  $t$  d'un système matériel, on a l'énoncé du PTV : *Le travail virtuel des quantités d'accélération ( $\delta A$ ) égal au travail virtuel des efforts intérieurs et extérieurs ( $\delta W$ ) avec :*

$$\begin{aligned}\delta A &= \int_V \delta \vec{u}^T \rho \ddot{\vec{u}} dV \\ \delta W &= - \int_V \bar{\sigma} : \overline{\text{grad}}_s(\delta \vec{u}) dV + \int_V \delta \vec{u}^T \vec{f} dV + \int_S \delta \vec{u}^T \vec{T}_a dS\end{aligned}\quad (\text{II.16})$$

Avec  $\overline{\text{grad}}_s(\delta \vec{u})$  est la partie symétrique du tenseur gradient des déplacements virtuels.

Du fait des relations déplacements - déformations  $\delta \bar{\varepsilon} = \overline{\text{grad}}(\delta \vec{u})$ , la forme intégrale faible d'un problème d'élasticité s'écrit finalement :

Trouver le champ de déplacement (Eq II.1) tel que :

$$\begin{aligned}\int_V \delta \vec{u}^T \rho \ddot{\vec{u}} dV &= - \int_V \bar{\sigma} : \delta \bar{\varepsilon} dV + \int_V \delta \vec{u}^T \vec{f} dV + \int_S \delta \vec{u}^T \vec{T} dS \quad (\delta \vec{u} \equiv \vec{P}) \\ \forall \delta \vec{u}, \quad \delta \vec{u} &= \vec{0}\end{aligned}\quad (\text{II.17})$$

Avec la vérification ;

- Des relations cinématiques (Eq II.3).
- Des conditions aux limites (Eqs II.4 et II.5).
- Des conditions initiales à l'instant  $t = t_0$  (Eq II.6).
- La loi de comportement ou loi constitutive (Eq II.7).

### I.1.6 Discrétisation du problème – Matrices élémentaires de masse et de raideur :

En supposant que les travaux virtuels des actions extérieures sont nuls, l'expression du PTV établie en (II.17) se réduit à :

$$\int_V \delta \vec{u}^T \rho \ddot{\vec{u}} dV + \int_V \bar{\sigma} : \delta \bar{\varepsilon} dV = 0 \quad (\text{II.18})$$

Ainsi, Pour pouvoir discrétiser cette forme intégrale, nous utiliserons sur chaque élément, occupant un domaine élémentaire  $V_e$ , les approximations suivantes :

- Approximation nodales des déplacements :

$$\{u_{(M)}\} = [N_{(M)}]\{u_e\} \quad (\text{II.19})$$

- Approximation du champ de déformations :

$$\{\varepsilon_{(M)}\} = [L_{(M)}][N_{(M)}]\{u_e\} = [B_{(M)}]\{u_e\} \quad (\text{II.20})$$

- Approximation du champ de contraintes :

$$\{\sigma_{(M)}\} = [D_{(M)}]\{\varepsilon_{(M)}\} = [D_{(M)}][B_{(M)}]\{u_e\} \quad (\text{II.21})$$

Avec :

M : un point quelconque de l'élément.

$[N_{(M)}]$  : matrice des fonctions de forme.

$\{u_e\}$  : vecteur déplacement nodale.

$[B_{(M)}]$  : matrice d'opérateurs différentiels appliqués aux fonction de forme.

$[L]$  : matrice des opérateurs différentiels donnée comme suit :

$$\text{cas 3D : } [L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{cas 2D : } [L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{cas 1D : } [L] = \frac{\partial}{\partial x}$$

En injectant les relations (II.19), (II.20) et (II.21) dans l'équation (II.18), il vient :

Le premier terme :

$$\begin{aligned} \int_{V_e} \delta \vec{u}^T \rho \ddot{\vec{u}} dV_e &= \int_{V_e} \{\delta u_e\}^T [N_{(M)}]^T \rho [N_{(M)}] \{\ddot{u}_e\} dV_e \\ &= \{\delta u_e\}^T \int_{V_e} [N_{(M)}]^T \rho [N_{(M)}] dV_e \{\ddot{u}_e\} \\ &= \{\delta u_e\}^T [M_e] \{\ddot{u}_e\} \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Avec :

$$[M_e] = \int_{V_e} [N_{(M)}]^T \rho [N_{(M)}] dV_e, \quad \text{matrice élémentaire de masse} \quad (\text{II.23})$$

Le second terme :

$$\begin{aligned} \int_{V_e} \bar{\sigma} : \delta \bar{\varepsilon} dV_e &= \{\delta u_e\}^T \int_{V_e} [B_{(M)}]^T [D_{(M)}] [B_{(M)}] dV_e \{u_e\} \\ &= \{\delta u_e\}^T [K_e] \{u_e\} \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Avec :

$$[K_e] = \int_{V_e} [B_{(M)}]^T [D_{(M)}] [B_{(M)}] dV_e, \quad \text{matrice élémentaire de raideur} \quad (\text{II.25})$$

En reportant les résultats obtenus dans l'équation (II.18), nous obtenons une équation matricielle de la forme :

$$\forall V_e, \quad [M_e] \{\ddot{u}_e\} + [K_e] \{u_e\} = 0 \quad (\text{II.26})$$

### I.1.7 Assemblage – Matrices globales de masse et de raideur :

L'assemblage des matrices élémentaires de masse  $[M_e]$  et de raideur  $[K_e]$  s'effectue selon les mêmes règles. Ces règles sont définies par sommation des termes correspondant au travail virtuel calculé pour chaque élément :

$$\sum_{e=1}^{ne} \{\delta u_e\}^T [M_e] \{\ddot{u}_e\} = \{\delta U\}^T [M] \{\ddot{U}\} \quad (\text{II.27})$$

$$\sum_{e=1}^{ne} \{\delta u_e\}^T [K_e] \{u_e\} = \{\delta U\}^T [K] \{U\} \quad (\text{II.28})$$

Avec  $[M]$  et  $[K]$  sont les matrices globales de masse et de raideur,  $\{U\}$  et  $\{\ddot{U}\}$  sont, respectivement, le vecteur global des déplacements nodaux et le vecteur global des accélérations nodales.

Cette opération traduit simplement que l'énergie (travail) associée au domaine étudié est la somme des énergies élémentaires des sous domaines. Cela consiste à ranger dans une matrice globale les termes des matrices élémentaires.

## I.2 Application de la méthode des éléments finis :

### I.2.1 Élément fini de barre unidimensionnel :

Considérons un élément de barre ne travaillant qu'en traction-compression, c'est-à-dire ne transmettant que l'effort normal (Figure II.2.a). Les nœuds notés d'une manière générale  $i$  et  $j$  sont pris aux extrémités de l'élément. La longueur de l'élément est  $l_e$ . L'axe local  $x$  est pris dans la direction axiale de l'élément dont l'origine se situe au nœud  $i$ . Dans le système de coordonnées locales, il n'y a qu'un seul degré de liberté (ddl) à chaque nœud de l'élément, c'est-à-dire le déplacement axial. Par conséquent, il existe au total deux ddl pour l'élément, c'est-à-dire :  $n_{ddl} = 2$  (Figure II.2.b). Noter que dans ce cas de barre unidimensionnel, l'axe local des abscisses  $x$  est confondu avec l'axe global  $X$ .

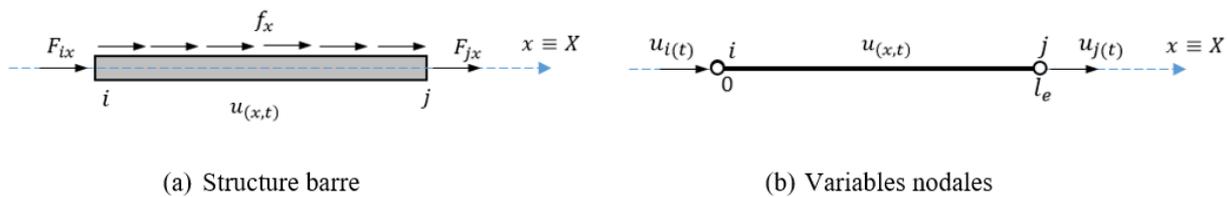


Figure I.2- Modèle d'un élément barre.

#### Hypothèses :

Considérons les hypothèses suivantes :

- Petits déplacements.
- Petites déformations.
- Section droite avant déformation reste droite après déformation.
- Milieu isotope homogène élastique.

Formules acquises dès les modules de MMC et de RDM :

Relation déplacement-déformation :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = u_{,x} \quad (\text{II.29})$$

Loi de comportement :

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad (\text{II.30})$$

### I.2.1.1 Approximation des déplacements :

Nous avons deux variables nodales qui sont les déplacements nodaux  $u_{i(t)}$  et  $u_{j(t)}$ , donc nous chercherons une approximation polynomiale linéaire à deux paramètres d'approximation  $a_{1(t)}$  et  $a_{2(t)}$ :

$$u_{(x,t)} = a_{1(t)} + a_{2(t)}x = \langle 1 \quad x \rangle \begin{Bmatrix} a_{1(t)} \\ a_{2(t)} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

Avec  $x$  est l'abscisse d'un point quelconque le long de l'élément barre considéré.

Les deux paramètres  $a_{1(t)}$  et  $a_{2(t)}$  sont déterminés comme suit :

$$\begin{aligned} \text{à } x = 0, \quad u_{(0,t)} &= u_{i(t)} = a_{1(t)} \\ \text{à } x = l_e, \quad u_{(l_e,t)} &= u_{j(t)} = a_{1(t)} + a_{2(t)}l_e \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Mettons l'équation (II.32) sous formes matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u_{i(t)} \\ u_{j(t)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{1(t)} \\ a_{2(t)} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

Inversons l'équation (II.33) :

$$\begin{Bmatrix} a_{1(t)} \\ a_{2(t)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l_e \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_{i(t)} \\ u_{j(t)} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

Reportons l'équation (II.34) dans l'approximation générale des déplacements (Eq II.20) :

$$\begin{aligned} u_{(x,t)} &= \langle 1 \quad x \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l_e \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_{i(t)} \\ u_{j(t)} \end{Bmatrix} \\ \Rightarrow u_{(x,t)} &= \left[ 1 - \frac{x}{l_e} \quad \frac{x}{l_e} \right] \begin{Bmatrix} u_{i(t)} \\ u_{j(t)} \end{Bmatrix} = [N(x)] \{u_e(t)\} \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

La matrice des fonctions de forme est alors obtenue sous la forme :

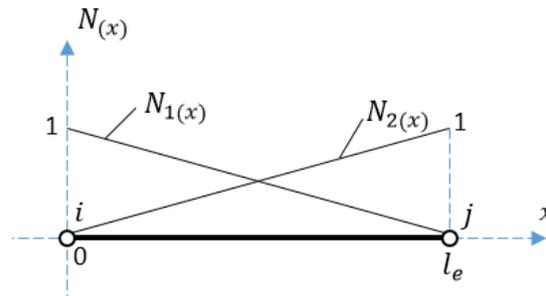
$$[N(x)] = [N_1(x) \quad N_2(x)] \quad (\text{II.36})$$

Où les fonctions de forme pour un élément barre peut être écrites comme suit :

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - \frac{x}{l_e} & \text{avec } N_1(0) &= 1 \text{ et } N_1(l_e) = 0 \\ N_2(x) &= \frac{x}{l_e} & \text{avec } N_2(0) &= 0 \text{ et } N_2(l_e) = 1 \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

Nous avons obtenu deux fonctions de forme, car, nous avons deux degrés de liberté dans l'élément barre. La représentation graphique de ces fonctions de forme linéaire est illustrée dans la figure **II.3**. Il est clairement montré que  $N_i$  donne la forme de la contribution du déplacement nodal au nœud  $i$ ,

et c'est pourquoi elle est appelée une fonction de forme. Dans ce cas, les fonctions de forme varient linéairement à travers l'élément, et on les appelle des *fonctions de forme linéaire*.



**Figure I.3-** Fonctions de forme linéaire.

Finalement, nous obtenons l'approximation nodale de la fonction des déplacements axiaux  $u_{(x,t)}$  suivante :

$$u_{(x,t)} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l_e} & \frac{x}{l_e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i(t)} \\ u_{j(t)} \end{Bmatrix} = u_{i(t)} + \frac{u_{j(t)} - u_{i(t)}}{l_e} x \quad (\text{II.38})$$

Qui indique clairement que le déplacement dans l'élément varie linéairement. L'élément est donc appelé un *élément linéaire*.

### I.2.1.2 Approximation des déformations :

Dans un élément fini de barre, il n'y a qu'une seule composante de contrainte  $\sigma_x$ , et la déformation correspondante peut être obtenue par :

$$\varepsilon_{(x,t)} = \frac{\partial u_{(x,t)}}{\partial x} = \frac{u_{j(t)} - u_{i(t)}}{l_e} \quad (\text{II.39})$$

Qui est un résultat direct de la différenciation de l'équation. (II.38) par rapport à  $x$ . Notez que la déformation dans l'équation (II.39) est une valeur constante dans l'élément.

L'équation (II.39) peut être aussi obtenue comme suit :

$$\varepsilon_x = [B_{(x)}] \{u_e\} \quad (\text{II.40})$$

Avec  $[B_{(x)}]$  est la matrice des opérateurs différentiels appliqués aux fonctions de forme qui est donnée comme suit :

$$[B_{(x)}] = [L_{(x)}][N_{(x)}] = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l_e} & \frac{x}{l_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_e} & \frac{1}{l_e} \end{bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

### I.2.1.3 Approximation des contraintes :

En remplaçant l'équation (II.40) dans l'équation (II.30), nous obtenons l'approximation des contraintes comme suit :

$$\sigma_x = E[B_{(x)}]\{u_e\} = E \frac{(u_j(t) - u_i(t))}{l_e} \quad (\text{II.42})$$

### I.2.1.4 Matrices élémentaires de raideur et de masse :

Une fois que la matrice  $[B_{(x)}]$  est obtenue, la matrice élémentaire de raideur pour les éléments de barres unidimensionnels peut être obtenue comme suit :

$$[K_e] = \int_{V_e} [B_{(x)}]^T [D_{(M)}] [B_{(x)}] dV_e = \int_0^{l_e} \left( \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_e} \\ \frac{1}{l_e} \end{bmatrix} EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_e} & \frac{1}{l_e} \end{bmatrix} \right) dx \quad (\text{II.43})$$

Après calcul, la matrice élémentaire de raideur pour un élément barre unidimensionnel est donnée comme suit :

$$[K_e] = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.44})$$

Où  $A$  est la section droite de l'élément barre. Noter que la matrice constante des coefficients élastiques  $[D_{(M)}]$  se réduit au module élastique d'Young  $E$ . Il est noté aussi que la matrice de rigidité des éléments barres comme représentée dans l'équation (II.44) est symétrique.

La matrice élémentaire de masse peut être également obtenue par la formulation suivante :

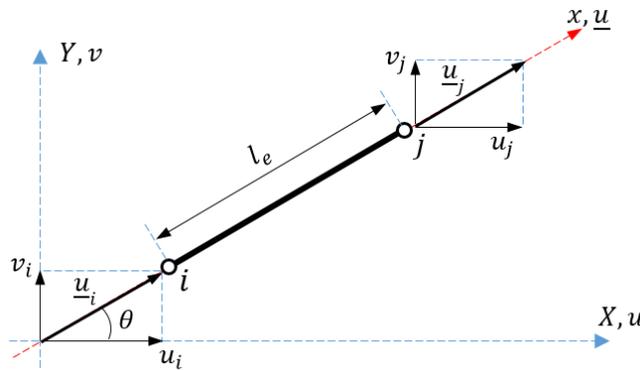
$$[M_e] = \int_{V_e} [N_{(x)}]^T \rho [N_{(x)}] dV_e = \int_0^{l_e} \left( \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l_e} \\ \frac{x}{l_e} \end{bmatrix} \rho A \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l_e} & \frac{x}{l_e} \end{bmatrix} \right) dx \quad (\text{II.45})$$

Après calcul, la matrice élémentaire de masse pour les éléments finis de barres unidimensionnels est donnée comme suit :

$$[M_e] = \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.46})$$

### I.2.2 Élément fini de barre bidimensionnel :

Soient  $\underline{u}_i$  et  $\underline{u}_j$  les déplacements axiaux des nœuds  $i$  et  $j$  dans le système de coordonnées locales  $xyz$  et soient  $[K_e]$  et  $[M_e]$  les matrices élémentaires de raideur et de masse de dimensions  $2 \times 2$  exprimées dans la base locale et données, respectivement, par les équations (II.44) et (II.46) ; les déplacements nodaux et les matrices élémentaires de raideur et de masse dans le système de coordonnées globales  $XY$  peuvent être construits comme suit [46] :



**Figure I.4-** Élément fini de barre bidimensionnel dans le système de coordonnées locales et globales.

$$\begin{aligned} \underline{u}_i &= u_i \cos\theta + v_i \sin\theta \\ \underline{u}_j &= u_j \cos\theta + v_j \sin\theta \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

L'équation II.36 peut se mettre sous forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \underline{u}_i \\ \underline{u}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (\text{II.48})$$

Ou sous forme plus compacte :

$$\{\underline{u}_e\} = [T]\{u_e\} \quad (\text{II.49})$$

Où  $[T]$  est la matrice de passage du système de coordonnées locales au système de coordonnées globales, donnée par :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.50})$$

Dans lequel on pose :

$$\begin{aligned} l_{ij} &= \cos\theta = \cos(x, X) = \frac{X_j - X_i}{l_e} \\ m_{ij} &= \sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(x, Y) = \frac{Y_j - Y_i}{l_e} \\ l_e &= \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

Avec :

$l_{ij}$  désigne le cosinus directeur entre la ligne  $ij$  et la direction globale X.

$m_{ij}$  désigne le cosinus directeur entre la ligne  $ij$  et la direction globale Y.

$(X_i, Y_i)$  et  $(X_j, Y_j)$  sont, respectivement, les coordonnées globales des nœuds  $i$  et  $j$ .

$l_e$  est la longueur de l'élément  $ij$ .

La matrice élémentaire de raideur  $[K_e]$  dans le système de coordonnées globales est donnée comme suit :

$$[K_e] = [T]^T [\underline{K}_e] [T] = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & -l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} \\ l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} & -m_{ij}^2 \\ -l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} & l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} \\ -l_{ij}m_{ij} & -m_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.52})$$

Et celle de la masse est donnée comme suit :

$$[M_e] = [T]^T [\underline{M}_e] [T] = \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 2l_{ij}^2 & 2l_{ij}m_{ij} & l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} \\ 2l_{ij}m_{ij} & 2m_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 \\ l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & 2l_{ij}^2 & 2l_{ij}m_{ij} \\ l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 & 2l_{ij}m_{ij} & 2m_{ij}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.53})$$

### Remarque :

1. Pour calculer la matrice élémentaire  $[K_e]$  d'un élément barre bidimensionnel possédant un seul degré de liberté dans le repère local et deux dans le repère global, on doit, pour envisager ce changement de base, exprimer la matrice élémentaire de raideur  $[\underline{K}_e]$  établie en (II.44) sous forme d'une matrice 4 x 4. Pour ce faire, on reprend l'expression de

$[K_e]$  établie en (II.44) et on rajoute deux lignes et deux colonnes de zéros associées aux déplacements  $v_i$  et  $v_j$ .

Nous avons alors :

$$[K_e] = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_i \\ \underline{u}_j \end{pmatrix} = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (u_i) \\ (v_i) \\ (u_j) \\ (v_j) \end{pmatrix} \quad (\text{II.54})$$

Le changement de base est alors possible en posant :

$$[K_e] = [T]^T [\underline{K}_e] [T] \quad \text{avec} \quad [T] = \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix} \quad (\text{II.55})$$

On retrouve alors la forme générique (II.52) de la matrice de rigidité  $[K_e]$  en repère global :

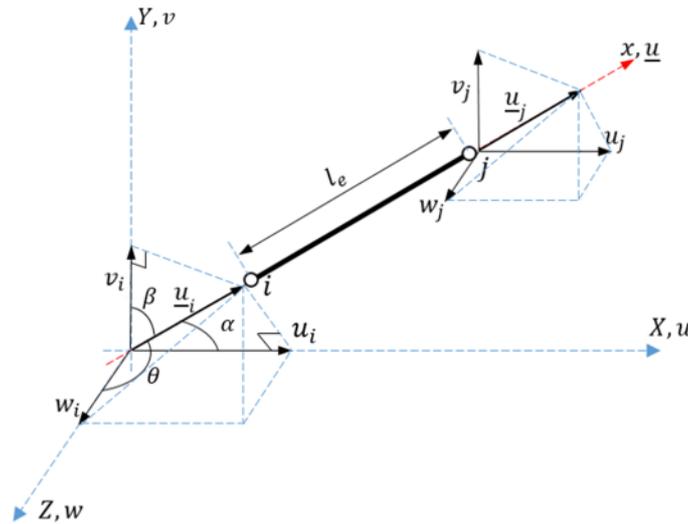
$$[K_e] = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & -l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} \\ l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} & -m_{ij}^2 \\ -l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} & l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} \\ -l_{ij}m_{ij} & -m_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.56})$$

2. Lors de l'analyse dynamique d'une structure plane formée de barres unidimensionnelles et bidimensionnelles, certains chercheurs ne travaillent pas avec la matrice élémentaire de masse établie en (II.53), ils adoptent le plus souvent celle qui est donnée comme suit :

$$[M_e] = \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.57})$$

### I.2.3 Élément fini de barre tridimensionnel :

Le déplacement local d'un nœud dans l'espace devrait comporter trois composantes dans les directions globales X, Y et Z. Par exemple, le déplacement local  $\underline{u}_i$  du  $i^{\text{ème}}$  nœud aura trois composantes désignés par  $u_i$ ,  $v_i$  et  $w_i$ , comme le montre la figure **II.5** [47].



**Figure I.5-** Élément fini de barre dans l'espace.

D'une manière similaire que précédemment, le vecteur des déplacements locaux par rapport au système de coordonnées globales est donné comme suit :

$$\{\underline{u}_e\} = [T]\{u_e\} \tag{II.58}$$

Où :

$$\{u_e\}^T = \{u_i, v_i, w_i, u_j, v_j, w_j\} \tag{II.59}$$

Et  $[T]$  est la matrice de transformation pour l'élément de treillis, donnée comme suit :

$$[T] = \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} \end{bmatrix} \tag{II.60}$$

Dans lequel :

$$\begin{aligned} l_{ij} &= \cos\alpha = \cos(x, X) = \frac{X_j - X_i}{l_e} \\ m_{ij} &= \cos\beta = \cos(x, Y) = \frac{Y_j - Y_i}{l_e} \\ n_{ij} &= \cos\theta = \cos(x, Z) = \frac{Z_j - Z_i}{l_e} \end{aligned} \tag{II.61}$$

$$l_e = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}$$

La matrice élémentaire de raideur dans le système de coordonnées globales pour les éléments de barres tridimensionnels est donnée comme suit :

$$[K_e] = [T]^T [\underline{K}_e] [T]$$

$$= \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & l_{ij}n_{ij} & -l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} & -l_{ij}n_{ij} \\ l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 & m_{ij}n_{ij} & -l_{ij}m_{ij} & -m_{ij}^2 & -m_{ij}n_{ij} \\ l_{ij}n_{ij} & m_{ij}n_{ij} & n_{ij}^2 & -l_{ij}n_{ij} & -m_{ij}n_{ij} & -n_{ij}^2 \\ -l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} & -l_{ij}n_{ij} & l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & l_{ij}n_{ij} \\ -l_{ij}m_{ij} & -m_{ij}^2 & -m_{ij}n_{ij} & l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 & m_{ij}n_{ij} \\ -l_{ij}n_{ij} & -m_{ij}n_{ij} & -n_{ij}^2 & l_{ij}n_{ij} & m_{ij}n_{ij} & n_{ij}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.62})$$

Et celle de la masse est donnée comme suit :

$$[M_e] = [T]^T [\underline{M}_e] [T]$$

$$= \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 2l_{ij}^2 & 2l_{ij}m_{ij} & 2l_{ij}n_{ij} & l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & l_{ij}n_{ij} \\ 2l_{ij}m_{ij} & 2m_{ij}^2 & 2m_{ij}n_{ij} & l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 & m_{ij}n_{ij} \\ 2l_{ij}n_{ij} & 2m_{ij}n_{ij} & 2n_{ij}^2 & l_{ij}n_{ij} & m_{ij}n_{ij} & n_{ij}^2 \\ l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & l_{ij}n_{ij} & 2l_{ij}^2 & 2l_{ij}m_{ij} & 2l_{ij}n_{ij} \\ l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 & m_{ij}n_{ij} & 2l_{ij}m_{ij} & 2m_{ij}^2 & 2m_{ij}n_{ij} \\ l_{ij}n_{ij} & m_{ij}n_{ij} & n_{ij}^2 & 2l_{ij}n_{ij} & 2m_{ij}n_{ij} & 2n_{ij}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.63})$$

Noter que les matrices  $[K_e]$  et  $[M_e]$  ont la dimension 6 x 6.

### Remarque :

Lors de l'analyse dynamique d'une structure formée de barres tridimensionnelles (3D), certains chercheurs ne travaillent pas avec la matrice élémentaire de masse établie en (II.63), ils adoptent le plus souvent celle qui est donnée comme suit :

$$[M_e] = \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.64})$$

#### I.2.3.1 Conditions aux limites :

La matrice de rigidité  $[K_e]$  est généralement singulière, car toute la structure peut effectuer des mouvements d'un corps rigide. Ces mouvements sont contraints par des déplacements imposés nuls ou non nuls. En pratique, les structures formées de barres 2D ou 3D sont fixées d'une manière ou d'une autre au sol ou à une structure principale fixe à plusieurs nœuds. Lorsqu'un nœud est fixé, le

déplacement de ce nœud doit être nul. Cette condition limite de déplacement fixe peut être imposée sur l'équation lors de la résolution d'un problème.

#### I.2.4 Modèle d'une poutre plane en flexion seule :

Soit une poutre plane sollicitée dans son plan moyen et ne travaillant qu'en flexion dans le plan global ( $XY$ ) supposé initialement confondu avec le plan local ( $xy$ ) (Figure **II.6.a**).

Considérons les hypothèses suivantes :

- Hypothèse d'Euler-Bernoulli :

Les déformations axiales de la ligne neutre sont négligées et les déformations dues aux efforts tranchants ( $T_y = \int_S \sigma_{xy} dS$  et  $T_z = \int_S \sigma_{xz} dS$ ) sont négligés.

- Hypothèse de Navier-Bernoulli :

Les sections initialement planes et perpendiculaires à la fibre moyenne restent planes et perpendiculaires à la fibre moyenne pendant la déformation. Par conséquent la section droite suit le mouvement d'un corps rigide.

- Hypothèse des petits déplacements :

$$\vec{u}_{(M)} = \vec{u}_{(G)} + \vec{\varphi} \wedge \overrightarrow{GM} \quad (\text{Figure II.6.c})$$

$$\text{avec } \vec{\varphi} = \overrightarrow{rot}(\vec{u}_{(G)}), \quad \vec{u}_{(G)} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{GM} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où } \vec{u}_{(M)} = \begin{pmatrix} -y \frac{\partial v}{\partial x} \\ v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Hypothèse des petites déformations :

$$\bar{\varepsilon} = \overline{\overline{grad}_s}(\vec{u}_{(M)}) \quad \text{avec} \quad \overline{\overline{grad}_s}(\vec{u}_{(M)}) = \begin{pmatrix} -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & -\frac{\partial v}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Avec  $\overline{\overline{grad}_s}(\vec{u}_{(M)})$  est la partie symétrique du tenseur gradient des déplacements.

- Milieu isotope homogène élastique :

$$\text{Loi de comportement } \sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}.$$

En intégrant les contraintes sur la section en tenant compte de :

$$\int_S y dS = 0 \quad \text{et} \quad I_z = \int_S \sigma_{xy} dS$$

Nous obtenons la loi de comportement intégrée des poutres :  $M_{fz} = EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

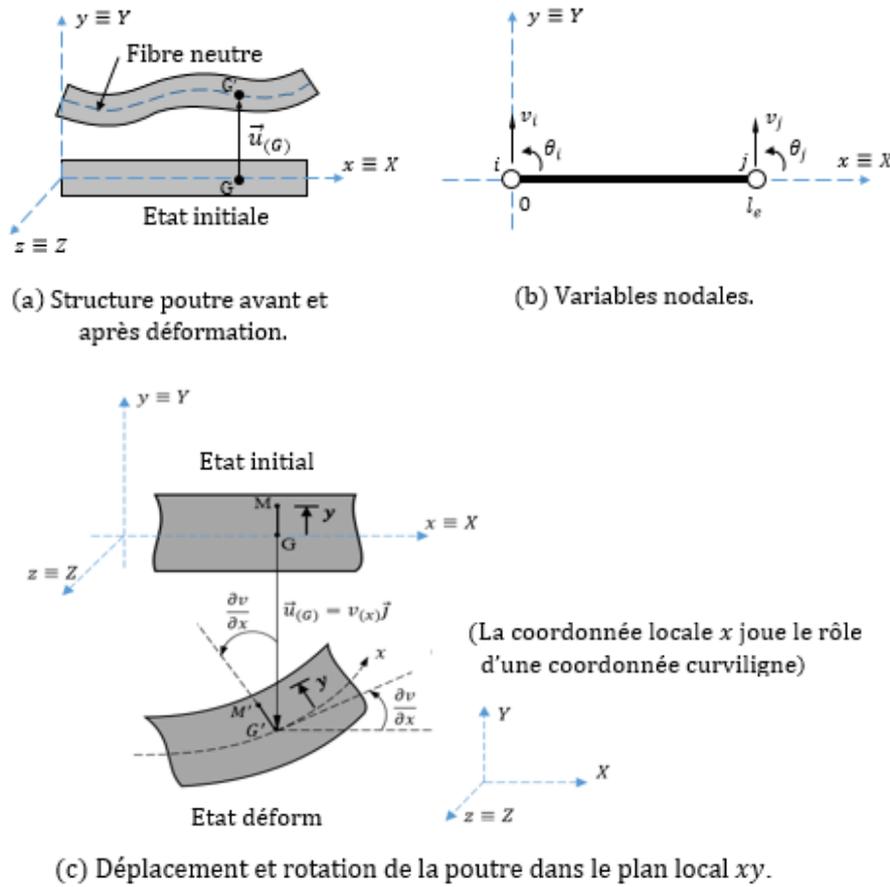


Figure I.6- Modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli en flexion seule.

### I.2.5 Modélisation d'un élément de poutre plane basé sur l'hypothèse d'Euler-Bernoulli :

Un élément de poutre droite ne travaillant qu'en flexion est un élément qui est principalement soumis à des charges transversales. La forme déformée de cet élément est décrite par un déplacement transversal ( $v_{(x,t)}$ ) et une pente (la rotation  $\theta_{(x,t)} = \frac{\partial v_{(x,t)}}{\partial x}$ ). Par conséquent, le déplacement transversal et la rotation à chaque extrémité de l'élément de la poutre sont traités comme des degrés de liberté inconnus.

Considérons un élément de poutre de longueur  $l_e$  dans le plan  $(XY)$ , comme le montre la figure **II.6.b**. Les quatre degrés de liberté dans le système de coordonnées locales  $(xy)$  sont désignés par  $v_{i(t)}$ ,  $\theta_{i(t)}$ ,  $v_{j(t)}$  et  $\theta_{j(t)}$ .

### I.2.5.1 Approximation des déplacements :

Nous avons quatre variables nodales qui sont les déplacements nodaux transversaux  $v_{i(t)}$  et  $v_{j(t)}$ , et les rotations au niveau des nœuds  $\theta_{i(t)}$  et  $\theta_{j(t)}$ , donc nous chercherons une approximation polynomiale cubique à quatre paramètres d'approximation  $a_{1(t)}$ ,  $a_{2(t)}$ ,  $a_{3(t)}$  et  $a_{4(t)}$ :

$$v_{(x,t)} = a_{1(t)} + a_{2(t)}x + a_{3(t)}x^2 + a_{4(t)}x^3 \quad (\text{II.65})$$

Sous forme vectorielle :

$$v_{(x,t)} = \langle 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \rangle \begin{Bmatrix} a_{1(t)} \\ a_{2(t)} \\ a_{3(t)} \\ a_{4(t)} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.66})$$

Pour déterminer les paramètres  $a_{1(t)}$ ,  $a_{2(t)}$ ,  $a_{3(t)}$  et  $a_{4(t)}$ , nous allons appliquer les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{à } x = 0, \quad v_{(0,t)} &= v_{i(t)} = a_{1(t)} \\ \frac{\partial v_{(0,t)}}{\partial x} &= \theta_{i(t)} = a_{2(t)} \\ \text{à } x = l_e, \quad v_{(l_e,t)} &= v_{j(t)} = a_{1(t)} + a_{2(t)}l_e + a_{3(t)}l_e^2 + a_{4(t)}l_e^3 \\ \frac{\partial v_{(0,t)}}{\partial x} &= \theta_{j(t)} = a_{2(t)} + 2a_{3(t)}l_e + 3a_{4(t)}l_e^2 \end{aligned} \quad (\text{II.67})$$

Ecrivons l'équation (II.57) sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} v_{i(t)} \\ \theta_{i(t)} \\ v_{j(t)} \\ \theta_{j(t)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l_e & l_e^2 & l_e^3 \\ 0 & 2l_e & 0 & 3l_e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{1(t)} \\ a_{2(t)} \\ a_{3(t)} \\ a_{4(t)} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.68})$$

En inversant l'équation (II.68) nous trouverons le vecteur des paramètres d'approximation  $\{a_{i(t)}\}$  ( $i = 1 \dots 4$ ), puis en remplaçant dans l'approximation générale (Eq II.66), nous aboutissons à l'approximation nodale suivante :

$$v_{(x,t)} = [N_{(x)}]\{v_{e(t)}\} \quad (\text{II.69})$$

Avec :

$$[N_{(x)}] = [N_{1(x)} \quad N_{2(x)} \quad N_{3(x)} \quad N_{4(x)}] \quad (\text{II.70})$$

Dans lequel les fonctions de forme sont données comme suit :

$$\begin{aligned} N_{1(x)} &= 1 - \frac{3x^2}{l_e^2} + \frac{2x^3}{l_e^3} & N_{3(x)} &= \frac{3x^2}{l_e^2} - \frac{2x^3}{l_e^3} \\ N_{2(x)} &= x - \frac{2x^2}{l_e} + \frac{x^3}{l_e^2} & N_{4(x)} &= -\frac{x^2}{l_e} + \frac{x^3}{l_e^2} \end{aligned} \quad (\text{II.71})$$

D'où finalement la fonction des déplacements transversaux  $v_{(x,t)}$  est approximée à :

$$v_{(x,t)} = \left\{ 1 - \frac{3x^2}{l_e^2} + \frac{2x^3}{l_e^3} \quad x - \frac{2x^2}{l_e} + \frac{x^3}{l_e^2} \quad \frac{3x^2}{l_e^2} - \frac{2x^3}{l_e^3} \quad -\frac{x^2}{l_e} + \frac{x^3}{l_e^2} \right\} \begin{Bmatrix} v_{i(t)} \\ \theta_{i(t)} \\ v_{j(t)} \\ \theta_{j(t)} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.72})$$

### I.2.5.2 Approximation des déformations :

En vertu de l'hypothèse des petites déformations vue précédemment, la déformation axiale des fibres de la poutre (à part la fibre moyenne) est donnée comme suit :

$$\varepsilon_{xx} = -y \frac{\partial^2 v_{(x)}}{\partial x^2} = -y \frac{\partial^2 [N_{(x)}]}{\partial x^2} \{v_{e(t)}\} = [B_{(x)}] \{v_{e(t)}\} \quad (\text{II.73})$$

Avec :

$$\begin{aligned} [B_{(x)}] &= \frac{\partial [B_{(x)}]}{\partial x} = \frac{\partial^2 [N_{(x)}]}{\partial x^2} \\ &= -\frac{y}{l_e^3} [(12x - 6l_e) \quad l_e(6x - 4l_e) \quad -(12x - 6l_e) \quad l_e(6x - 2l_e)] \end{aligned} \quad (\text{II.74})$$

Dans lequel  $y$  désigne la distance qui sépare la fibre moyenne et les autres fibres de la poutre.

### I.2.5.3 Approximation des contraintes :

L'état de contrainte uni-axial des fibres est donné comme suit :

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = E [B_{(x)}] \{v_{e(t)}\} \quad (\text{II.75})$$

### I.2.5.4 Matrices élémentaires de raideur et de masse par rapport au plan local (xy) :

Une fois que la matrice  $[B_{(x)}]$  est obtenue, la matrice élémentaire de raideur est donnée comme suit :

$$\begin{aligned}
[K_e] &= \int_{V_e} [B(x)]^T [D(M)] [B(x)] dV_e = E \int_0^{l_e} \left( \int_{S_e} dS_e \right) [B(x)]^T [B(x)] dx \\
&= \frac{E}{l_e^6} \left( \int_{S_e} y^2 dS_e \right) \int_0^{l_e} \begin{Bmatrix} (12x - 6l_e) \\ l_e(6x - 4l_e) \\ -(12x - 6l_e) \\ l_e(6x - 2l_e) \end{Bmatrix} \{ (12x - 6l_e) \quad l_e(6x - 4l_e) \quad -(12x - 6l_e) \quad l_e(6x - 2l_e) \} dx
\end{aligned} \tag{II.76}$$

Après intégration, la matrice élémentaire de raideur pour un élément de poutre en flexion seule dans le plan local ( $xy$ ) est donnée comme suit :

$$[K_e] = \frac{EI_z}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \tag{II.77}$$

Où  $I_z = \int_{S_e} y^2 dS_e$  est le moment d'inertie de la section droite.

La matrice élémentaire de masse :

$$\begin{aligned}
[M_e] &= \int_{V_e} [N(x)]^T \rho [N(x)] dV \\
&= \rho A \int_0^{l_e} \left( \begin{Bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{Bmatrix} \{ N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x) \} \right) dx
\end{aligned} \tag{II.78}$$

Avec  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$ ,  $N_3(x)$  et  $N_4(x)$  sont données par les équations (II.71).

Après calcul analytique, la matrice élémentaire de masse est donnée comme suit :

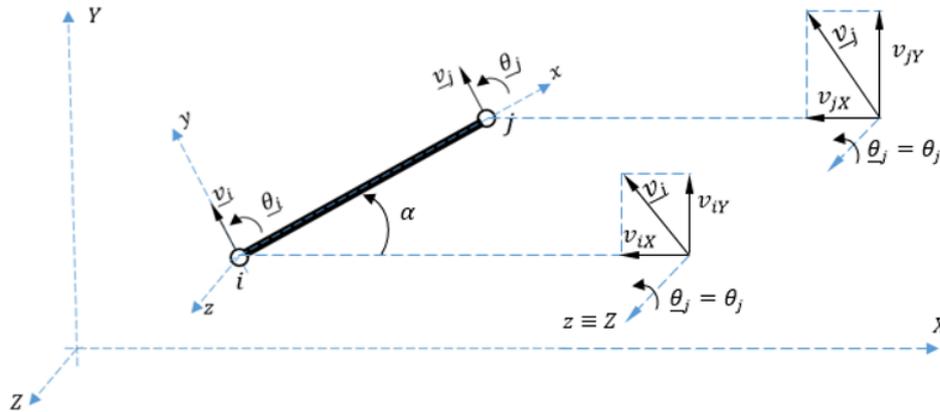
$$[M_e] = \frac{\rho A l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ 22l_e & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ 54 & 13l_e & 156 & -22l_e \\ -13l_e & -3l_e^2 & -22l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \tag{II.79}$$

Où  $A$  est la section droite de l'élément poutre et  $\rho$  sa densité volumique.

**Remarque :**

Pour la flexion dans le plan  $(xz)$ , il suffit de changer la rigidité en flexion  $EI_z$  en rigidité  $EI_y$  et de modifier, du fait de la prise en compte du sens de rotation de  $z$  vers  $x$ , le signe des termes associés aux rotations  $\theta_y$ .

**I.2.5.5 Matrices élémentaires de raideur et de masse par rapport au plan global  $(XY)$  :**



**Figure I.7-** Élément fini de poutre dans le plan local  $(xy)$  et global  $(XY)$ .

Le vecteur des variables nodales  $(\{\underline{v}_{e(t)}\})$  dans le plan local  $(xy)$  s'exprime dans le plan global  $(XY)$  comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \underline{v}_i \\ \underline{\theta}_i \\ \underline{v}_j \\ \underline{\theta}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{iX} \\ v_{iY} \\ \theta_i \\ v_{jX} \\ v_{jY} \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (II.80)$$

Sous forme :

$$\{\underline{v}_{e(t)}\} = [T]\{v_{e(t)}\} \quad (II.81)$$

Avec :

$$[T] = \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (II.82)$$

Dans lesquels :

$$\begin{aligned}
l_{ij} &= \cos(y, X) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha = -\frac{Y_j - Y_i}{l_e} \\
m_{ij} &= \cos(y, Y) = \cos \alpha = \frac{X_j - X_i}{l_e} \\
l_e &= \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}
\end{aligned} \tag{II.83}$$

Où  $\alpha$  est l'angle entre l'axe local  $x$  et l'axe global  $X$ , comme le montre la figure **II.7**.

**Remarque :**

Comme l'axe local  $z$  est confondu avec l'axe global  $Z$  les rotations  $\underline{\theta}_i$  et  $\underline{\theta}_j$  dans le plan local  $(xy)$  sont, respectivement, les mêmes que les rotations  $\theta_i$  et  $\theta_j$  dans le plan global  $(XY)$  d'où l'apparition de « 1 » dans la matrice de passage  $[T]$ .

Ainsi la matrice élémentaire de rigidité  $[K_e]$  dans le plan global  $(XY)$  est donnée comme suit:

$$\begin{aligned}
[K_e] &= [T]^T [\underline{K}_e] [T] \\
&= \frac{EI_z}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12l_{ij}^2 & 12l_{ij}m_{ij} & 6l_e l_{ij} & -12l_{ij}^2 & -12l_{ij}m_{ij} & 6l_e l_{ij} \\ 12l_{ij}m_{ij} & 12m_{ij}^2 & 6l_e m_{ij} & -12l_{ij}m_{ij} & -12m_{ij}^2 & 6l_e m_{ij} \\ 6l_e l_{ij} & 6l_e m_{ij} & 4l_e^2 & -6l_e l_{ij} & 6l_e m_{ij} & 2l_e^2 \\ -12l_{ij}^2 & -12l_{ij}m_{ij} & -6l_e l_{ij} & 12l_{ij}^2 & 12l_{ij}m_{ij} & -6l_e l_{ij} \\ -12l_{ij}m_{ij} & -12m_{ij}^2 & 6l_e m_{ij} & 12l_{ij}m_{ij} & 12m_{ij}^2 & -6l_e m_{ij} \\ 6l_e l_{ij} & 6l_e m_{ij} & 2l_e^2 & -6l_e l_{ij} & -6l_e m_{ij} & 4l_e^2 \end{bmatrix} \tag{II.84}
\end{aligned}$$

Avec  $[\underline{K}_e]$  est la matrice élémentaire de raideur dans le plan local  $(xy)$  donnée par l'équation (II.77).

De même, la matrice élémentaire de masse  $[M_e]$  dans le plan globale  $(XY)$  s'obtient en utilisant la relation  $[M_e] = [T]^T [\underline{M}_e] [T]$  avec  $[\underline{M}_e]$  est donnée par l'équation (II.79) et  $[T]$  par l'équation (II.82).

### I.3 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté essentiellement les formulations élémentaires et globales des matrices de raideur et de masse que nous avons utilisé dans le code de programmation MATLAB pour une analyse modale des structures poutres d'Euler-Bernoulli. Le développement élémentaire consiste à déterminer une fonction de forme qui assure le passage du problème continu au problème discret en représentant les déplacements de l'élément en fonction des déplacements nodaux, puis, à calculer, pour chaque élément, ses caractéristiques élémentaires : matrice de rigidité, matrice de masse etc. La formulation globale consiste à chercher, pour la structure complète, l'expression matricielle du principe des travaux virtuels en fonction des déplacements inconnus pour chaque nœud

de la structure. Ceci nécessite l'assemblage des caractéristiques élémentaires (matrice de rigidité, matrice de masse...) de tous les éléments. Ainsi, nous aboutissons à un système d'équations linéaires qui régissent le comportement statique et dynamique de la structure.

## *CHAPITRE III :*

### *MODELES DE STRUCTURES POUTRES ENDOMMAGEES*

---

### III.1 Introduction :

De nombreux travaux de recherche ont été réalisés au cours des dernières décennies sur la modélisation et l'évaluation des endommagements présents dans les structures. Ce domaine en croissance rapide constitue une base pour la conception, la surveillance de la santé et la gestion de la durée de vie d'une structure. Aujourd'hui, l'ordinateur permet de modéliser, d'évaluer et de quantifier l'endommagement présent au niveau d'une structure. C'est un outil important pour la prédiction ou l'explication des endommagements dans une grande variété de structures d'ingénierie mécanique ou civil. La présence d'une fissure dans une structure affecte directement sa rigidité en augmentant sa flexibilité et son amortissement qui affecte donc la forme des modes et les valeurs propres. Ce problème a mené les chercheurs à se concentrer sur le calcul de la matrice de rigidité d'une structure endommagée afin de simuler la présence ou non d'un endommagement et d'estimer l'ampleur des dégâts qu'une fissure puisse causer sur la structure.

### III.2 Modélisation d'un élément fini de poutre endommagée :

Pour une bonne représentation, nous allons considérer la fissure comme un sous-élément dans un élément de poutre endommagée, mais en réalité cette fissure est considérée comme un nœud.

Soit un élément fini de poutre de section droite rectangulaire de largeur  $b$ , de hauteur  $h$  et de longueur  $l_e$  comportant une fissure de profondeur  $a$  située à une position  $x$  le long de la longueur  $l_e$ . L'élément poutre est discrétisé en deux sous-éléments fins sains continus déconnectés I de longueur  $l_{e1}$  et II de longueur  $l_{e2}$  couplés par un sous-élément (nœud) représentant la fissure de longueur infiniment petite, comme le montre la figure (III.1) [48].

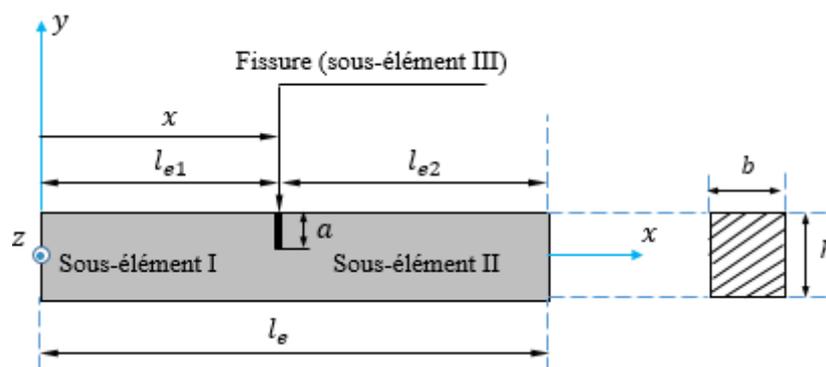


Figure III.1- Modélisation d'un élément fini de poutre endommagée.

### III.2.1 Matrices élémentaires de rigidité des sous-éléments sains I et II :

Rappelons que la relation entre le vecteur forces nodales  $\{F_e\}$  et le vecteur des déplacements nodaux  $\{u_e\}$  s'écrit comme suit :

$$\{F_e\} = [K_e]\{u_e\} \quad (\text{III.1})$$

Supposons que la matrice élémentaire de rigidité  $[K_e]$  d'un élément fini de poutre sain est sous forme :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_{23} & k_{33} & 0 & -k_{26} & k_{36} \\ k_{14} & 0 & 0 & k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{25} & -k_{26} & 0 & k_{22} & -k_{23} \\ 0 & k_{26} & k_{36} & 0 & -k_{23} & k_{33} \end{bmatrix}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (\text{III.2})$$

En fait, d'une manière générale, la matrice élémentaire de rigidité  $[K_e]$  est donnée selon le type de la structure considérée (barre, poutre 3D, poutre d'Euler-Bernoulli, poutre de Timoshenko...).

Ainsi comme les deux sous-éléments I et II de la poutre endommagée sont considérés comme deux éléments sains déconnectés, leurs matrices élémentaires de rigidité s'écrivent comme suit :

$$[K_e^I] = \begin{bmatrix} [K_{11}^I] & [K_{12}^I] \\ [K_{21}^I] & [K_{22}^I] \end{bmatrix}_{6 \times 6}, \quad [K_e^{II}] = \begin{bmatrix} [K_{11}^{II}] & [K_{12}^{II}] \\ [K_{21}^{II}] & [K_{22}^{II}] \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (\text{III.3})$$

### III.2.2 Matrice élémentaire de rigidité du sous-élément fini III (fissure) :

En vertu du principe de St venant, la présence d'une fissure dans une structure influe sur le champ de déplacements (déformations) et donc sur le champ de contraintes en augmentant la flexibilité locale au voisinage de la fissure. Il est démontré expérimentalement que la flexibilité d'une structure fissurée dépend de la profondeur de la fissure ( $C = f(a)$ ). La matrice de rigidité du sous-élément III est calculée en utilisant sa matrice de flexibilité  $[C_e^f]$  qui est l'inverse de la matrice de rigidité.

#### III.2.2.1 Démarche du calcul de la matrice de flexibilité du sous-élément fissuré III :

Dans la vie réelle, il existe différentes formes de fissures. Ici, nous allons considérer le cas simple d'une fissure ayant la forme 'V'. Les figures (III.2) et (III.3) représentent un élément fini de poutre ayant cette fissure de profondeur maximale 'a' et de profondeur  $a_n$  à la  $n^{\text{ème}}$  section droite réduite au niveau de la fissure [49].

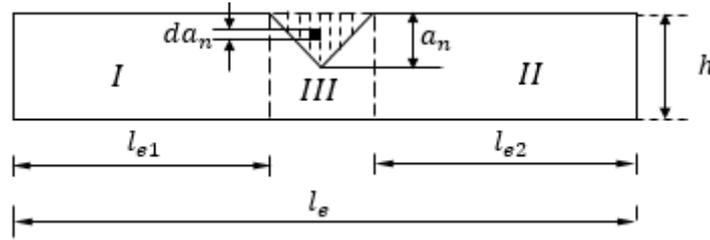


Figure III.2- Modélisation des sous-éléments sains (I et II) et de sous-élément fissuré III.

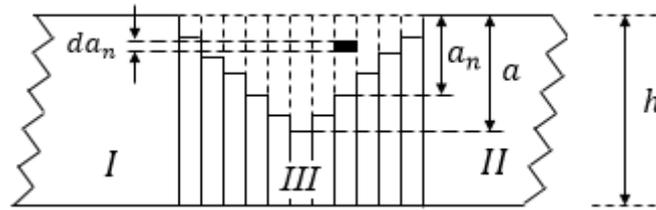


Figure III.3- Zoom sur le sous-élément III (fissure).

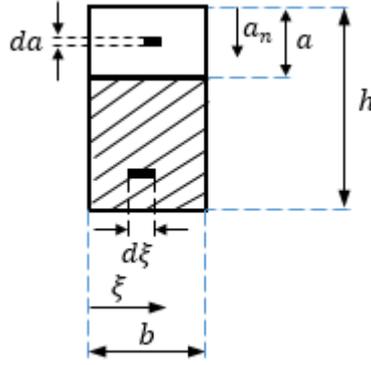
L'énergie de déformation élastique due à la fissure est donnée comme suit :

$$U_e = \int_0^{a_n} G_{(a_n)} da_n \tag{III.4}$$

Où  $da_n$  est l'accroissement de la fissure et  $G_{(a_n)}$  est la densité d'énergie de déformation, appelée aussi le taux de restitution d'énergie de déformation de Griffith, donnée par :

$$G(a_n) = \frac{1}{E} \int_0^b \left( \left( \sum_{i=1}^6 (K_I)_n \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^6 (K_{II})_n \right)^2 + (1 + \nu) \left( \sum_{i=1}^6 (K_{III})_n \right)^2 \right) d\xi \tag{III.5}$$

Avec  $K_I, K_{II}$  et  $K_{III}$  sont, respectivement, les facteurs d'intensité de contraintes en mode I, II et III qui dépendent de la contrainte appliquée, de la géométrie de la pièce et de la taille de la fissure,  $E' = E$  pour les contraintes planes et  $E' = \frac{E}{(1-\nu)}$  pour les déformations planes avec  $E$  et  $\nu$  sont le module d'Young et le coefficient de poisson.  $b$  est la largeur de la section droite et  $d\xi$  sa variation le long de l'axe  $z$ , comme le montre la figure (III.4).



**Figure III.4-** Dimensionnement de la section droite de la poutre et de la fissure.

En vertu du théorème de Gastigliano, le déplacement additionnel est donné comme suit :

$$u_i = \frac{\partial U_e}{\partial P_i} = \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial P_i} \int_0^{a_n} \int_0^b \left( \left( \sum_{i=1}^6 (K_{Ii})_n \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^6 (K_{IIi})_n \right)^2 + (1 + \nu) \left( \sum_{i=1}^6 (K_{IIIi})_n \right)^2 \right) d\xi da_n \quad (\text{III.6})$$

Avec  $P_i$  est la force dans la direction du déplacement.

En général, la matrice de flexibilité d'un élément fissuré est donnée, sous forme indicielle, par :

$$(c_{ij})_n = \frac{\partial u_i}{\partial P_j} = \frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial P_j \partial P_i} \int_0^{a_n} \int_0^b \left( \left( \sum_{i=1}^6 (K_{Ii})_n \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^6 (K_{IIi})_n \right)^2 + (1 + \nu) \left( \sum_{i=1}^6 (K_{IIIi})_n \right)^2 \right) d\xi da_n \quad (\text{III.7})$$

Où les coefficients  $(c_{ij})_n$  sont appelés *les complaisances de la fissure* au niveau de la  $n^{\text{ème}}$  section droite réduite,  $P_j$  est la force qui cause la déformation et  $P_i$  est la force dans la direction de la déformation.

Cet intégral est calculé par plusieurs méthodes approximatives telles que la méthode de quadrature de Gauss, la méthode des moindres carrés, etc.

En général, une fissure est soumise à six types de chargement : trois forces et trois moments le long des directions x, y et z. Par conséquent, la matrice de complaisances de la fissure  $[c_{ij}]$  aura 36 composantes qui sont disposés dans une matrice de 6 x 6. Cette matrice est symétrique en raison de la propriété de réciprocité de la matrice de flexibilité.

Supposons ici que la matrice de flexibilité du sous-élément fissuré ait la forme suivante :

$$[C_e^f] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (\text{III.8})$$

### III.2.2.2 Matrice élémentaire de rigidité du sous-élément fissuré III :

Ainsi la matrice de rigidité du sous-élément fissuré III est obtenue en inversant sa matrice de flexibilité :

$$[K_e^{III}] = \begin{bmatrix} [C_e^f]^{-1} & -[C_e^f]^{-1} \\ -[C_e^f]^{-1} & [C_e^f]^{-1} \end{bmatrix}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} [K_{11}^{III}] & [K_{12}^{III}] \\ [K_{21}^{III}] & [K_{22}^{III}] \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (\text{III.9})$$

### III.2.3 Matrice élémentaire totale de l'élément poutre endommagé :

Finalement la matrice élémentaire de raideur totale de l'élément poutre endommagé est obtenue par l'assemblage des matrices élémentaires de rigidité  $[K_e^I]$ ,  $[K_e^{II}]$  et  $[K_e^{III}]$  :

$$[K_e^f] = \begin{bmatrix} [K_{11}^I] & [K_{12}^I] & [0] & [0] \\ [K_{21}^I] & [K_{22}^I] + [K_{11}^{III}] & [K_{12}^{III}] & [0] \\ [0] & [K_{21}^{III}] & [K_{22}^{III}] + [K_{11}^{II}] & [K_{12}^{II}] \\ [0] & [0] & [K_{12}^I] & [K_{12}^{II}] \end{bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

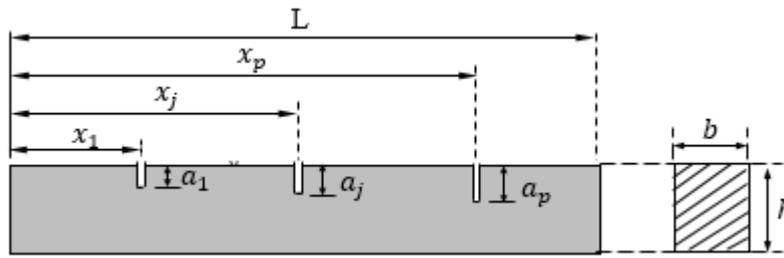
## III.3 Modèles de poutres endommagées étudiés dans ce présent travail :

De nombreux auteurs ont présenté des travaux qui consistent à définir la rigidité d'une structure endommagée. Parmi eux, nous avons choisi les modèles proposés par : J. K. Sinha *et al.* [50], M.H.F. Dado *et al.* [51], Ostachowicz et Krawkczuk [52] et celui proposé par Dimarogonas et Paipetis [53]. A la fin de ce chapitre, nous présenterons une autre approche simple pour modéliser une structure endommagée qui est basée sur la réduction de la rigidité E d'un élément fini.

### III.3.1 Modèle de poutre endommagée proposé par J. K. Sinha *et al.* :

En se basant sur le concept de Christide et Barr [54], J. K. Sinha *et al.* [50] ont utilisé la variation linéaire de la rigidité en flexion (EI) pour modéliser la fissure. Puis, ils ont calculé la matrice de rigidité d'un élément poutre fissurée en utilisant la matrice de rigidité de l'élément poutre sain et la matrice de rigidité endommagée due à la fissure.

Soit une poutre simple travaillant en flexion pure ayant plusieurs fissures le long de sa longueur L, comme le montre la figure (III.5). On suppose que les fissures ont une profondeur uniforme sur toute la largeur  $b$  de la poutre et que celles-ci n'influent pas sur sa masse.



**Figure III.5-** Modèle poutre à plusieurs fissures.

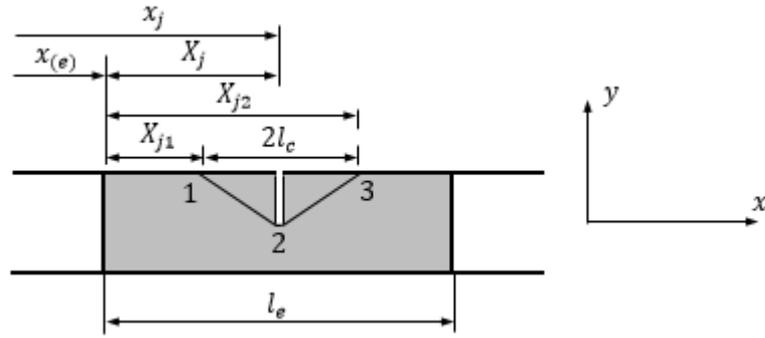
### III.3.1.1 Modélisation de la fissure :

La présence d'une fissure dans la poutre augmente la flexibilité locale au voisinage de cette fissure. La forme réelle de cette augmentation de flexibilité est assez compliquée. Mais, elle est approximée par la variation de la flexibilité locale. En réalité, l'axe neutre de la poutre changera au voisinage de la fissure, mais cela ne sera pas considéré ici. Christide et Barr [54] ont considéré l'effet d'une fissure dans une poutre continue à section droite rectangulaire et ont calculé la rigidité en flexion ( $EI$ ) qui varie exponentiellement allant de la section droite non fissurée à celle fissurée :

$$EI_{(x)} = \frac{EI}{1 + Ce^{\left(-\frac{2\alpha|x-x_j|}{h}\right)}} \quad (\text{III.11})$$

Où  $C = \frac{(I-I_{cj})}{I_{cj}}$ ,  $I = \frac{bh^3}{12}$  et  $I_{cj} = \frac{b(h-a_j)^3}{12}$  sont, respectivement, le moment quadratique des zones non fissurées et celui au niveau de la  $j^{\text{ème}}$  fissure.  $b$  et  $h$  sont la largeur et la hauteur de la poutre.  $x$  est la position d'un point le long de la poutre et  $x_j$  est la position de la  $j^{\text{ème}}$  fissure.  $\alpha$  est une constante que Christide et Barr [54] ont estimé expérimentalement et vaut 0.667. L'inclusion de la réduction de la rigidité de Christide et Barr dans un modèle élément fini d'une structure poutre est compliquée car la flexibilité n'est pas locale à un ou deux éléments, et par conséquent, l'intégration requise pour produire la matrice de rigidité de la poutre doit être effectuée numériquement chaque fois que la position de la fissure change.

En se basant sur le principe de Christide et Barr, J. K. Sinha *et al.* [50] utilisent une forme simplifiée où la variation de la rigidité en flexion ( $EI$ ) est linéaire allant de la position de la pointe de fissure entièrement ouverte vers les deux côtés de la longueur effective  $l_c$  où commence la diminution de la rigidité (le triangle  $\widehat{123}$  dans figure III.6). La longueur effective  $l_c$  sera déterminée.



**Figure III.6-** Variation linéaire de la rigidité en flexion ( $EI$ ) d'aspect triangulaire utilisée par J. K. Sinha *et al.* pour modéliser la fissure dans l' $e^{\text{ème}}$  élément fini de poutre.

La rigidité en flexion  $EI_{e(x)}$  de l'élément poutre proche de la fissure est donné par :

$$EI_{e(x)} = \begin{cases} EI - E(I - I_{cj}) \frac{(X - X_{j1})}{(X_j - X_{j1})} & \text{si } X_{j1} \leq X \leq X_j \\ EI_0 - E(I - I_{cj}) \frac{(X_{j2} - X)}{(X_{j2} - X_j)} & \text{si } X_j \leq X \leq X_{j2} \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

Où  $X$  est la position d'un point appartenant à la zone où la rigidité est réduite ( $X_{j1} \leq X \leq X_{j2}$ ) ;  $X_j$  est la position locale de la  $j^{\text{ème}}$  fissure dans l' $e^{\text{ème}}$  élément ;  $X_{j1} = X_j - l_c$  et  $X_{j2} = X_j + l_c$  sont les positions de chaque côté de la fissure où commence la réduction de la rigidité ('1' et '3' dans la figure III.6).

Il reste à déterminer la longueur effective  $l_c$  de la réduction de la rigidité due à la fissure. Une approche consiste à rendre l'intégrale de la réduction de la rigidité dans les équations (III.11) et (III.12) égales. Étant donné que la plupart de la flexibilité est locale dans les deux cas, alors, pour les modes où la courbure est faible près de la réduction de la rigidité et en s'assurant que ces intégrales sont égales, il se produira des changements de fréquence naturelle égaux. Les intégrales sont :

$$\text{de l'équation (III.11)} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (EI - EI_{(x)}) dx = EI \frac{h}{\alpha} \log(1 + C) \approx EI \frac{hC}{\alpha} \quad (\text{III.13})$$

$$\text{de l'équation (III.12)} \Rightarrow \int_{X_{j1}}^{X_{j2}} (EI - EI_{e(x)}) dX = EI l_c \frac{C}{1 + C} \approx EI l_c C$$

Ainsi, une bonne approximation pour la longueur effective  $l_c$  est :

$$l_c = \frac{h}{\alpha} = 1.5h \quad (\text{III.14})$$

On remarque que la longueur effective de la réduction de rigidité ne dépend pas de la profondeur de la fissure, mais elle dépend uniquement de la hauteur de la poutre.

### III.3.1.2 Matrice de rigidité élémentaire d'un élément poutre endommagé :

La poutre endommagée, ne travaillant qu'en flexion simple dans un seul plan, est modélisée en considérant les théories d'Euler-Bernoulli. Chaque nœud de l'élément poutre a deux degrés de liberté, à savoir, le déplacement en translation et la rotation en flexion. Considérons une  $j^{\text{ème}}$  fissure situé à une position  $x_j$  dans l' $e^{\text{ème}}$  élément poutre, comme le montre la figure (III.6). On suppose que la réduction de la rigidité n'affecte qu'un seul élément. Si la réduction de la rigidité s'étend sur plus d'un élément, l'approche suivante peut être facilement étendue sur tous les éléments. La matrice de rigidité de l' $e^{\text{ème}}$  élément poutre fissuré peut être écrite comme suit :

$$[K_e^f] = [K_e] - [K_{cj}] \quad (\text{III.15})$$

Où  $[K_e]$  est la matrice de rigidité de l' $e^{\text{ème}}$  élément sain et  $[K_{cj}]$  est la réduction de la matrice de rigidité due à la  $j^{\text{ème}}$  fissure. Cette réduction de rigidité  $[K_{cj}]$  doit être obtenue en fonction de la position et de la profondeur de la fissure. La matrice de rigidité de l' $e^{\text{ème}}$  endommagé est obtenue en utilisant l'intégration habituelle basée sur la variation de la rigidité en flexion :

$$[K_e^f] = \int_0^{l_e} EI_{e(x)} \{N_{(x)}\}^T \{N_{(x)}\} dX \quad (\text{III.16})$$

Où les fonctions de forme  $\{N_{(x)}\}$ , sont celles d'un élément poutre standard d'Euler-Bernoulli données comme suit :

$$\{N_{(x)}\} = \left\{ 1 - \frac{3X^2}{l_e^2} + \frac{2X^3}{l_e^3} \quad X - \frac{2X^2}{l_e} + \frac{X^3}{l_e^2} \quad \frac{3X^2}{l_e^2} - \frac{2X^3}{l_e^3} \quad -\frac{X^2}{l_e} + \frac{X^3}{l_e^2} \right\} \quad (\text{III.17})$$

$l_e$  est la longueur du l' $e^{\text{ème}}$  élément.

En utilisant les équations (III.12), (II.15), (III.16) et (III.17), la matrice de réduction de rigidité  $[K_{cj}]$  pour une poutre travaillant en flexion seule est donnée comme suit :

$$[K_{cj}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & -k_{11} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & -k_{12} & k_{24} \\ -k_{11} & -k_{12} & k_{11} & -k_{14} \\ k_{14} & k_{24} & -k_{14} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

Les coefficients  $k_{11}, k_{12}, k_{14}, k_{22}, k_{24}$  et  $k_{44}$  sont donnés dans l'annexe A. De même pour la matrice de réduction de rigidité  $[K_{cj}]$ , elle peut être construite pour d'autres fissures. Ces matrices

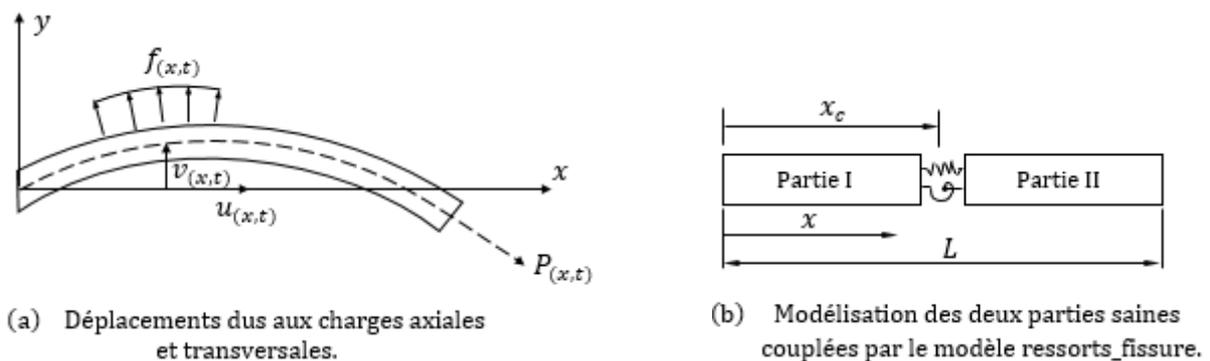
élémentaires sont ensuite assemblées dans la matrice de rigidité globale de la structure poutre. Les matrices élémentaires pour les éléments barres d'une structure treillis et ceux d'une structure portique sont données dans l'annexe A.

### III.3.2 Modèle de poutre endommagée proposé par M. H. F. Dado *et al* :

M. H. F. Dado *et al.* [51] ont étudié le comportement vibratoire d'une poutre (portique) encadrée-libre fissurée portant à son extrémité libre une masse concentrée d'inertie rotative modélisant l'effet d'inertie de rotation de la poutre. Ils ont couplé les vibrations transversales et axiales de la poutre par une flexibilité locale de la partie endommagée au niveau de la fissure qui est modélisé par deux ressorts : un ressort hélicoïdal de traction-compression et un ressort rotatif. La matrice de flexibilité locale de la partie endommagée est modélisée en utilisant la relation (III.7). Ils ont constaté que le couplage entre les vibrations transversales et axiales était faible pour les deux premiers modes pour les valeurs modérées du rapport de profondeur de la fissure (profondeur normalisée de la fissure). Plus ce rapport de profondeur de la fissure est élevé, plus il y a un fort couplage entre les modes.

Ici, l'étude se fait en négligeant l'effet d'inertie de rotation due à la masse concentrée ajoutée à l'extrémité libre de la poutre.

La poutre considérée est encadrée-libre d'une section droite rectangulaire modélisée par deux parties continues non endommagées couplées par la matrice de flexibilité de la partie endommagée au niveau de la fissure, comme le montre la figure (III.7.b).



**Figure III.7-** Modèle d'une poutre endommagée proposé par M. H. F. Dado *et al.*

#### III.3.2.1 Equations de mouvement d'une poutre (portique) non endommagée :

En générale et en négligeant les charges réparties  $f(x,t)$ , l'équation différentielle qui régit le mouvement longitudinal d'une poutre non endommagée peut être exprimée comme suit :

$$EA \frac{\partial^2 u_{(x,t)}}{\partial x^2} - \bar{m} \frac{\partial^2 u_{(x,t)}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III.20})$$

Et l'équation différentielle qui régit le mouvement transversal est donnée comme suit :

$$EI \frac{\partial^4 v_{(x,t)}}{\partial x^4} - \bar{m} \frac{\partial^2 v_{(x,t)}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III.21})$$

Où  $u_{(x,t)}$  et  $v_{(x,t)}$  sont, respectivement, le déplacement axial et transversal d'un point le long de la poutre, comme le montre la figure (III.7.a).  $\bar{m} = \rho A$  est la masse par unité de longueur (kg/m),  $E$  est le module de Young (N/m<sup>2</sup>) et  $I$  est le moment d'inertie de la section droite (m<sup>4</sup>).

En utilisant la technique de séparation des variables, les solutions dans le domaine spatial pour les deux équations différentielles précédentes sont données comme suit :

$$\frac{\partial^2 u_{(x)}}{\partial x^2} + \frac{w^2 \bar{m}}{EA} u_{(x)} = 0 \quad (\text{III.22})$$

$$\frac{\partial^4 v_{(x)}}{\partial x^4} + \frac{w^2 \bar{m}}{EI} v_{(x)} = 0 \quad (\text{III.23})$$

Posons :

$$k_u^2 = \frac{w^2 \bar{m} L^2}{EA} \quad (\text{III.24})$$

$$k_v^4 = \frac{w^2 \bar{m} L^4}{EI} \quad (\text{III.25})$$

Où  $L$  est la longueur de la poutre et  $w$  sa fréquence naturelle.

Les solutions générales pour les équations (III.22) et (III.23) sont :

$$u_{(x)} = C_1 \cos(k_u \bar{x}) + C_2 \sin(k_u \bar{x}) \quad (\text{III.26})$$

$$v_{(x)} = C_3 \cos(k_v \bar{x}) + C_4 \sin(k_v \bar{x}) + C_5 \cosh(k_v \bar{x}) + C_6 \sinh(k_v \bar{x}) \quad (\text{III.27})$$

Où  $\bar{x} = \frac{x}{L}$  est l'abscisse d'un point de la poutre normalisée à sa longueur  $L$ .

Considérons le modèle poutre endommagée schématisé dans la figure (III.7.b). Les déplacements axiaux et transversaux de la partie I ( $0 \leq x \leq x_c$ ) peuvent être donnés, en utilisant les équations (III.26) et (III.27), comme suit :

$$u_{1(x)} = A_1 \cos(k_u \bar{x}) + A_2 \sin(k_u \bar{x}) \quad (\text{III.28})$$

$$v_{1(x)} = A_3 \cos(k_v \bar{x}) + A_4 \sin(k_v \bar{x}) + A_5 \cosh(k_v \bar{x}) + A_6 \sinh(k_v \bar{x}) \quad (\text{III.29})$$

Et pour la partie II ( $x_c \leq x \leq L$ ) sont donnés comme suit :

$$u_{2(x)} = A_7 \cos(k_u \bar{x}) + A_8 \sin(k_u \bar{x}) \quad (\text{III.30})$$

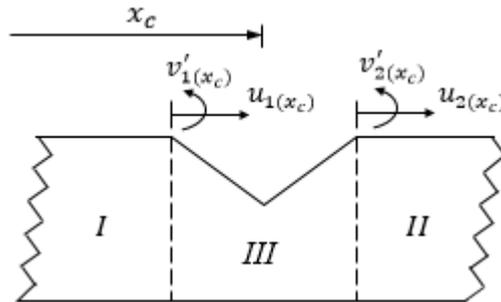
$$v_{2(x)} = A_9 \cos(k_v \bar{x}) + A_{10} \sin(k_v \bar{x}) + A_{11} \cosh(k_v \bar{x}) + A_{12} \sinh(k_v \bar{x}) \quad (\text{III.31})$$

### III.3.2.2 Matrice de rigidité locale de la partie III fissurée :

L'équation qui régit le comportement statique de la partie endommagée de la poutre (au niveau de la fissure) est donnée comme suit :

$$\begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2(x_c)} - u_{1(x_c)} \\ v'_{2(x_c)} - v'_{1(x_c)} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

Où  $u_{1(x_c)}$ ,  $u_{2(x_c)}$ ,  $v'_{1(x_c)}$  et  $v'_{2(x_c)}$  sont, respectivement, les déplacements axiaux et les rotations de la partie endommagée III (Figure III.8),  $k_{ij}$  sont les éléments de la matrice de rigidité de la partie endommagée III qui sera déterminée en connaissant la matrice de la flexibilité locale.



**Figure III.8-** Déplacements et rotations de la partie endommagée III.

La charge  $P$  et le moment fléchissant  $M$  sont donnés pour les deux parties non endommagées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} EAu'_{(x_c)} \\ EIv''_{(x_c)} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.33})$$

La présence d'une fissure transversale de profondeur  $a$  cause une matrice de flexibilité locale dont la dimension dépend des degrés de liberté considérés dans le problème. Dans le cas des charges axiales et de flexion, la taille de la matrice de flexibilité est de  $2 \times 2$ , car chaque côté de la partie endommagée

III a deux degrés de liberté où les éléments hors-diagonaux de la matrice sont considérés comme des éléments de couplage dans la matrice de flexibilité.

Le taux de restitution d'énergie de déformation élastique  $G$  établie en (III.5) se réduit à :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_{IP} + K_{IM})^2 \quad (\text{III.34})$$

Où  $\nu$  est le coefficient de Poisson et  $E$  est le module d'Young.  $K_{IP}$  et  $K_{IM}$  sont, respectivement, les facteurs d'intensité de contrainte du mode I de déformation (l'ouverture de la fissure) pour la force axiale  $P$  et le moment de flexion  $M$ . Pour garantir le mode d'ouverture de la fissure, on suppose que la poutre est pré-chargée par son propre poids. L'amplitude de la vibration est supposée être bien inférieure à l'ouverture de fissure due au pré-chargement. Les facteurs d'intensité de contraintes de la mécanique de rupture sont donnés comme suit :

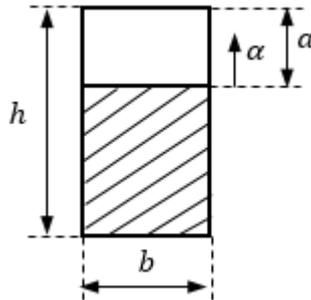
$$K_{IP} = \frac{P}{bh} \sqrt{\pi\alpha} F_1 \quad (\text{III.35})$$

$$K_{IM} = \frac{6M}{bh^2} \sqrt{\pi\alpha} F_2 \quad (\text{III.36})$$

Où  $b$  et  $h$  sont les dimensions de la section droite et  $\alpha$  est la profondeur de la fissure comme représenté sur la figure (III.9). Les fonctions  $F_1$  et  $F_2$ , appelées facteurs de correction, dépendent de la géométrie de la fissure et de la poutre. Ces fonctions sont approximées, comme proposé par Ewalds et Wnahi [55], à :

$$F_1 = \sqrt{\frac{2 \tan(\frac{\pi\alpha}{2})}{\pi\alpha}} \left( \frac{0.752 + 2.02\alpha + 0.37(1.0 - \sin(\frac{\pi\alpha}{2}))^3}{\cos(\frac{\pi\alpha}{2})} \right) \quad (\text{III.37})$$

$$F_2 = \frac{1.99 - \alpha(1 - \alpha)(2.15 - 3.39\alpha + 2.7\alpha^2)}{\sqrt{\pi}(1 + 2\alpha)(1 - \alpha)^{3/2}} \quad (\text{III.38})$$



**Figure III.9-** Dimensionnement de la section droite endommagée.

Pour une tranche rectangulaire de largeur unité, les complaisances axiales de traction, du couplage traction-flexion et celles de la flexion sont définies, respectivement, telles que proposées par Dimarogonas et Papadopoulos [56], comme suit :

$$c_{11} = \frac{\partial^2}{\partial P^2} \int_0^a G d\alpha \quad (\text{III.39})$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{\partial^2}{\partial P \partial M} \int_0^a G d\alpha \quad (\text{III.40})$$

$$c_{22} = \frac{\partial^2}{\partial M^2} \int_0^a G d\alpha \quad (\text{III.41})$$

Où  $a$  est la profondeur maximale de la fissure comme il est montré sur la figure (III.9).

En posant les paramètres sans dimension  $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{h}$  et  $\bar{a} = \frac{a}{h}$ , les éléments de la matrice de flexibilité locale (complaisances) finals peuvent être écrits comme suit :

$$c_{11} = \frac{2\pi h(1 - \nu^2)}{EA} \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} F_1^2(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} \quad (\text{III.42})$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{\pi h^2(1 - \nu^2)}{EI} \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} F_1(\bar{\alpha}) F_2(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} \quad (\text{III.43})$$

$$c_{22} = \frac{6\pi h(1 - \nu^2)}{EI} \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} F_2^2(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} \quad (\text{III.44})$$

Où  $A = bh$  et  $I = \frac{bh^3}{12}$  sont l'aire de la section droite et son moment d'inertie.

Les intégrales dans les équations. (III.42), (III.43) et (III.44) sont évalués numériquement en utilisant la méthode de quadrature 16 points. Les résultats sont donnés comme suit :

$$c_{11} = \frac{2\pi h(1 - \nu^2)}{EA} (0.005777459 + 0.1010004\bar{a} - 4.137205\bar{a}^2 + 35.37731\bar{a}^3 - 89.41206\bar{a}^4 + 83.65015\bar{a}^5) \quad (\text{III.45})$$

$$c_{12} = \frac{\pi h^2(1 - \nu^2)}{EI} (0.002143934 + 0.0384199\bar{a} - 1.171652\bar{a}^2 + 12.8375\bar{a}^3 - 32.61926\bar{a}^4 + 31.34015\bar{a}^5) \quad (\text{III.46})$$

$$c_{22} = \frac{6\pi h(1 - \nu^2)}{EI} (0.000537323 + 0.026002454\bar{a} - 0.1846979\bar{a}^2 + 4.526204\bar{a}^3 - 11.76326\bar{a}^4 + 11.64832\bar{a}^5) \quad (\text{III.47})$$

Finalement la matrice de rigidité utilisée dans l'équation (III.32) est donnée comme suit :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{III.48})$$

Où  $k_{11} = \frac{c_{22}}{\Delta}$ ,  $k_{12} = \frac{-c_{12}}{\Delta}$ ,  $k_{22} = \frac{c_{11}}{\Delta}$  et  $\Delta = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$ .

En général, une fissure est soumise à six types de chargement : trois forces et trois moments le long des directions x, y et z. Par conséquent, la matrice de complaisances de la fissure  $[c_{ij}]$  aura 36 composantes qui sont disposés dans une matrice de 6 x 6.

Shpli et Dado ont calculé la matrice de rigidité pour les éléments barres d'une structure treillis, les éléments poutres ne travaillant qu'en flexion seule et pour les éléments d'une structure portique. Ces modèles sont présentés dans l'annexe B. Ces équations ont été établies en considérant un élément fini contenant une fissure de profondeur  $a$  située à une distance  $x$  à partir du premier nœud de l'élément fini considéré. L'élément fini fissuré a été modélisé comme deux éléments finis sains couplés par un élément d'une flexibilité locale, ce qui représente l'effet de la fissure. Ces modèles sont en fonction des complaisances de la partie endommagée, de la position de la fissure et des propriétés mécanique et géométrique de l'élément. En outre, ces modèles sont réduits aux matrices de rigidité des éléments finis sains si la complaisance des fissures est nulle. Si les complaisances de la partie endommagée approche l'infini, c-à-d la matrice de rigidité est nulle, cela correspond à un élément complètement endommagé.

Si ces modèles éléments finis sont utilisés pour la modélisation d'une structure fissurée, la matrice de rigidité globale de la structure peut être écrite en fonction de la profondeur de la fissure et de son emplacement :

$$K = K_{(a,x)} \quad (\text{III.49})$$

Où  $a$  et  $x$  sont les vecteurs de profondeurs des fissure et leurs emplacements dans le système de coordonnées locales de l'élément.

### III.3.3 Modèles de poutres endommagées d'Ostachowicz et Krawkczuk, et de Dimarogonas et Paipetis :

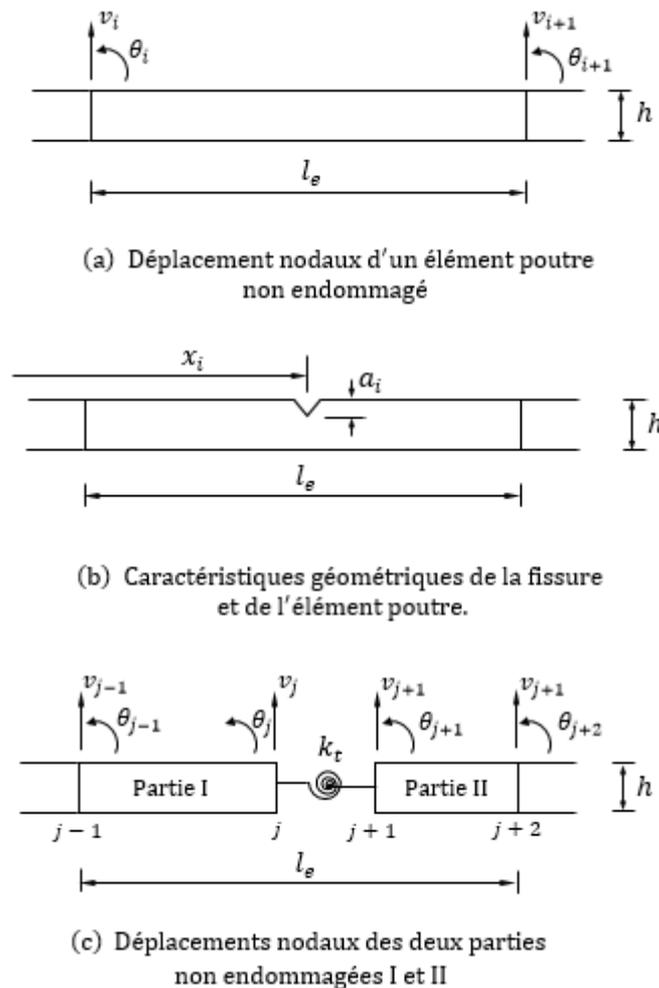
Ostachowicz et Krawkczuk [52] ont remplacé la section droite fissurée, d'une poutre travaillant en flexion seule, par un ressort rotatif de torsion sans masse. Ils ont obtenu les relations entre la rigidité réduite et la taille de la fissure d'une poutre à section rectangulaire par la diminution de

l'énergie de déformation élastique exprimée en fonction du facteur d'intensité de contrainte, puis ils ont calculé la constante du ressort rotatif de torsion représentant la section fissurée.

Dimarogonas et Paipetis [53] ont calculé la constante du ressort rotatif de torsion d'une poutre à section droite rectangulaire à partir du taux de restitution d'énergie de déformation élastique.

Pour donner une idée sur les modèles de poutres endommagées proposés par ces auteurs, considérons une poutre non endommagée de longueur totale  $L$  et de hauteur  $h$  travaillant en flexion pure et basée sur les théories d'Euler-Bernoulli.

La figure (III.10.a) représente l'un des éléments finis sains de longueur  $l_e$  de cette poutre. Les figures (III.10.b) et (III.10.c) représentent la modélisation de l'élément poutre endommagé (fissuré). La partie endommagée au niveau de la fissure, de profondeur normalisée  $\bar{a}_i = a_i / h$  et d'un emplacement normalisé  $\bar{x}_i = x_i / L$ , est modélisée par un ressort rotatif sans masse reliant les deux parties non endommagées I et II.



**Figure III.10-** Modèle poutre endommagée proposé par Ostachowicz et Krawkczuk, et Dimarogonas et Paipetis.

Les différents vecteurs déplacements nodaux sont donnés comme suit :

$$\{v_e\}^T = \{v_i, \theta_i, v_{i+1}, \theta_{i+1}\} \text{ vecteur déplacement de l'élément poutre sain} \quad (\text{III.50})$$

$$\{v_e\}_I^T = \{v_{j-1}, \theta_{j-1}, v_j, \theta_j\} \text{ vecteur déplacement de la partie I} \quad (\text{III.51})$$

$$\{v_e\}_{II}^T = \{v_{j+1}, \theta_{j+1}, v_{j+2}, \theta_{j+2}\} \text{ vecteur déplacement de la partie II} \quad (\text{III.52})$$

La forme matricielle du problème pour l'une des deux parties non endommagées de l'élément poutre est donnée comme suit [57] :

$$[M_e]\{\ddot{v}_e\} + [K_e]\{v_e\} = \{F_e\} \quad (\text{III.53})$$

Avec  $[K_e]$  et  $[M_e]$  sont, respectivement, les matrices élémentaires de rigidité et de masse données comme suit :

$$[K_e] = \frac{EI_z}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.54})$$

$$[M_e] = \frac{\rho A l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ 22l_e & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ 54 & 13l_e & 156 & -22l_e \\ -13l_e & -3l_e^2 & -22l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.55})$$

$\{v_e\}$  est donnée par (III.50),  $\{F_e\}$  est le vecteur force nodale.

Lorsque le ressort rotatif de torsion sans masse relie le nœud  $j$  et le nœud  $j + 1$ , les déplacements du nœud  $j$  et du nœud  $j + 1$  sont identique, c'est-à-dire  $v_j = v_{j+1}$ . Quant aux rotations  $\theta_j$  et  $\theta_{j+1}$  sont différentes et sont couplées par la matrice de rigidité de la partie endommagée au niveau de la fissure, cette matrice est donnée comme suit :

$$[K_f] = \begin{bmatrix} k_t & -k_t \\ -k_t & k_t \end{bmatrix} \quad (\text{III.56})$$

$k_t$  est la constante de torsion de la section fissurée que, selon la mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER), Ostachowicz et Krawkczuk [52] l'avaient défini comme suit :

$$k_t = \frac{bh^2E}{72\pi\bar{a}^2F_1(\bar{a})} \quad (\text{III.57})$$

Où  $b$  et  $h$  sont, respectivement, la largeur et la hauteur de la section droite de la poutre,  $F_1(\bar{a})$  est une fonction géométrique de la poutre et de la profondeur de la fissure (coefficient de forme) donnée comme suit :

$$F_1(\bar{a}) = 0.6384 - 1.035\bar{a} + 3.7201\bar{a}^2 - 5.1773\bar{a}^3 + 7.553\bar{a}^4 - 7.332\bar{a}^5 + 2.4909\bar{a}^6 \quad (\text{III.58})$$

Dimarogonas et Paipetis [53] ont défini la constante  $k_t$  à partir du taux de restitution d'énergie de déformation élastique comme suit :

$$k_t = \frac{EI}{5.346hF_2(\bar{a})} \quad (\text{III.59})$$

Avec  $F_2(\bar{a})$  est donnée comme suit :

$$F_2(\bar{a}) = 1.8624\bar{a}^2 - 3.95\bar{a}^3 + 16.375\bar{a}^4 - 37.226\bar{a}^5 + 76.81\bar{a}^6 - 126.9\bar{a}^7 + 172\bar{a}^8 - 143.97\bar{a}^9 + 66.56\bar{a}^{10} \quad (\text{III.60})$$

Les matrices  $[K_e]$ ,  $[M_e]$  et  $[K_f]$  sont ensuite assemblées pour former les matrices globales de rigidité  $[K]$  et de masse  $[M]$ .

Ainsi l'équation de mouvement de la structure poutre devient :

$$[M]\{\dot{V}\} + [K]\{V\} = \{F_{(t)}\} \quad (\text{III.61})$$

Avec  $\{V\}$  est le vecteur déplacement nodal global et  $\{F_{(t)}\}$  le vecteur force nodal global.

### III.3.4 Modèle basé sur la réduction de la rigidité E d'un élément poutre :

Quand un endommagement est présent dans une structure poutre, la matrice de rigidité globale  $[K]$  de la structure saine change. Soit  $[K_e^f]_j$  la matrice de rigidité élémentaire du  $j^{\text{ème}}$  élément endommagé (fissuré). Une autre approche simple consiste à réduire la rigidité E d'un élément sain :

$$[K_e^f]_j = ((1 - \bar{a}_j)E) * [K_e]'_j \quad (\text{III.62})$$

Avec  $\bar{a}_j = a/h$  représente la profondeur normalisée de la  $j^{\text{ème}}$  fissure.  $a$  et  $h$  sont, respectivement, la profondeur de la fissure et la hauteur de la poutre.  $[K_e]'_j$  peut être calculée à l'aide d'un modèle éléments finis de poutre, elle est donnée comme suit :

$$[K_e]_j = \begin{bmatrix} \frac{12I}{l_e^3} & \frac{6I}{l_e^2} & -\frac{12I}{l_e^3} & \frac{6I}{l_e^2} \\ \frac{6I}{l_e^2} & \frac{4I}{l_e} & -\frac{6I}{l_e^2} & \frac{2I}{l_e} \\ -\frac{12I}{l_e^3} & -\frac{6I}{l_e^2} & \frac{12I}{l_e^3} & -\frac{6I}{l_e^2} \\ \frac{6I}{l_e^2} & \frac{2I}{l_e} & -\frac{6I}{l_e^2} & \frac{4I}{l_e} \end{bmatrix} \quad (\text{III.63})$$

Avec  $I$  est le moment d'inertie de la section droite de la poutre.

#### III.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté, en tout, cinq approches pour modéliser une structure endommagée à savoir : l'approche de J. K. Sinha *et al.* [50], l'approche de M.H.F. Dado *et al* [51], d'Ostachowicz et Krawkczuk [52], de Dimarogonas et Paipetis [53] et enfin celui qui consiste à réduire la raideur  $E$  d'un élément poutre. Dans notre étude, nous traitons, comme exemple, une poutre basée uniquement sur les théories d'Euler-Bernoulli ne travaillant qu'en flexion seule dans un plan. Dans le dernier chapitre de ce mémoire, ces modèles seront comparés en faisant varier à la fois les différents paramètres caractérisant la structure poutre, l'endommagement et les méthodes d'identification d'endommagements choisies pendant notre recherche.

## *CHAPITRE IV :*

### *METHODES D'IDENTIFICATION D'ENDOMMAGEMENTS*

---

### IV.1 Introduction :

En raison de leur importance pratique, le problème d'identification d'endommagements dans les structures a fait l'objet d'une enquête approfondie et de nombreuses méthodes ont été proposées. L'analyse vibratoire, en vue d'une maintenance prédictive et préventive, s'avère un outil pertinent utilisé depuis quelques décennies pour connaître "l'état de santé" d'une structure ou d'un équipement industriel. Son emploi vise à servir trois niveaux d'analyse, à savoir : la surveillance, le diagnostic et le suivi de l'état d'endommagement. Dans ce chapitre, nous allons présenter trois méthodes basées sur des données vibratoires (paramètres modaux) pour la détection d'endommagements dans des structures poutre basées sur les théories d'Euler-Bernoulli. Ces méthodes choisies sont : la méthode basée sur la forme des courbures modales (FCM), la méthode basée sur la fonction de la réponse fréquentielle (FRF), sur laquelle nous avons apporté une amélioration, et la méthode basée sur les forces résiduelles modales (FRM).

### IV.2 Méthode basée sur les courbures modales :

De nombreuses études ont étudié les effets des endommagements sur les déformées modales, les pentes modales et les courbures modales correspondantes. Ces études montrent que les courbures modales sont beaucoup plus intéressantes que les déformées modales et les pentes modales en termes de sensibilité aux endommagements et peuvent être utilisées pour la détection de ces derniers. Dans cette méthode, nous allons présenter, en premier lieu, l'indicateur d'endommagement des déformées modales et celui des pentes modales puis plus particulièrement l'indicateur d'endommagement des courbures modales, plus précisément l'indicateur *NCDF* (voir le paragraphe **IV.2.4.2**) qui sera appliqué pour la détection d'endommagements dans le dernier chapitre de ce mémoire.

#### IV.2.1 Indicateur d'endommagement de la forme des modes :

Le plus simple est l'indicateur d'endommagements de la forme des modes (Mode Shape (MS) damage index). Il représente la différence entre les formes de mode de la structure poutre saine et celle endommagée [58] :

$$\Delta v_i = |v_i^d - v_i| \quad (IV.1)$$

Où  $v_i^d$  et  $v_i$  sont, respectivement, la forme des modes (ou déformées modales) de la structure poutre saine et celle endommagée,  $i$  désigne le nombre de noeuds ou le point mesuré.

La forme des modes mesurées expérimentalement sont inévitablement altérées par le bruit de mesure. Ce bruit introduit des perturbations locales dans la forme du mode qui peut conduire à des

pics trompeurs dans la forme de la pente modale et dans la forme de la courbure modale. Ces pics trompeurs peuvent être interprétés à tort comme des endommagements en masquant les vrais pics induits par les endommagements et conduire ainsi à une détection fausse. Pour surmonter ce problème, il a été proposé de calculer la somme des indicateurs d'endommagements de chaque mode.

Pour résumer les résultats pour tous les modes, l'indicateur est proposé comme suit :

$$MS_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Delta v_{i,j} \quad (\text{IV.2})$$

Où  $n$  est le nombre de modes considéré.

#### IV.2.2 Indicateur d'endommagements de la forme des pentes modales (Mode shape slope (MSS) damage index) :

Cet algorithme utilise la variation de la forme des pentes modales :

$$\Delta v'_i = |v_i^d - v'_i| \quad (\text{IV.3})$$

L'approximation centrée de la dérivée de la déformée modale afin d'obtenir la forme des pentes modales pour une poutre saine est donnée comme suit :

$$v'_i = \frac{(v_{i+1} - v_{i-1})}{2l_e} \quad (\text{IV.4})$$

Où  $l_e$  est la longueur de l'élément fini. Même procédure est appliquée pour l'obtention de la forme des pentes modales pour la poutre endommagée. Ainsi, pour  $n$  modes, l'indicateur d'endommagements de la forme des pentes modales (Mode Shape Slope (MSS) damage index) est donné par :

$$MSS_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Delta v'_{i,j} \quad (\text{IV.5})$$

#### IV.2.3 Indicateurs d'endommagements de la forme des courbures modales (FCM) :

##### IV.2.3.1 Indicateur d'endommagements DMC (Difference in Mode shape Curvature) :

Comme l'indicateur de la forme des modes et celui de la forme des pentes modales sont imprécis sur la détection d'endommagements, il fallait étudier la forme des courbures modales pour trouver un meilleur compromis pour la détection d'endommagement. Effectivement, l'indicateur d'endommagement des courbures modales s'avère plus sensible aux endommagements. La présence

d'endommagements dans une poutre produit une réduction de sa rigidité. Cette réduction de rigidité conduit à une augmentation de la grandeur de la courbure telle qu'elle est définie ainsi :

$$v'' = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (\text{IV.6})$$

Où  $M$  est le moment fléchissant,  $E$  est le module de Young et  $I$  est le moment d'inertie de la section droite de la poutre.

Dans cet algorithme, l'emplacement d'endommagements est évalué par la différence entre la forme des courbures modales de la poutre saine et celle endommagée :

$$\Delta v'_i = |v'_i{}^d - v''_i| \quad (\text{IV.7})$$

La forme des courbures modales sont calculées à partir de la forme des modes (ou déformées modales) en utilisant l'approximation centrée des différences finies [59] :

$$v''_i = \frac{(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}))}{l_e^2} \quad (\text{IV.8})$$

Où  $i$  désigne le nombre de nœuds et  $l_e$  la longueur de l'élément,  $v$  la forme de mode normalisée. La différence entre la forme des courbures modales (Difference in Mode shape Curvature (DMC)) de la poutre saine et celle endommagée est donnée comme suit :

$$DMC_{i,j} = |v'_{i,j}{}^d - v''_{i,j}| \quad (\text{IV.9})$$

Où  $i$  désigne le nombre de nœuds et  $j$  représente le nombre de modes.

La forme des courbures modales de la poutre fissurée changera de façon remarquable à l'endroit de la fissure. En traçant la différence de la forme des courbures modales (DMC), on trouvera un pic au niveau de l'élément fissuré indiquant l'existence d'une fissure.

#### IV.2.3.2 Indicateur d'endommagements NCDF (Normalized Curvature Damage Factor) :

Pour un nombre de modes supérieurs, l'indicateur DMC affiche, en plus du pic élevé, des pics plus ou moins élevés à différentes positions non endommagé. Une autre remarque qui a été observée est que l'indicateur DMC devient zéro à la position de la fissure pour certains modes. Ces phénomènes peuvent nous induire en erreur pendant la procédure d'identification. Pour obtenir un meilleur résultat, un indicateur nommé Curvature Damage Factor (CDF) est introduit :

$$CDF_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n DMC_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |v'_{i,j} - v''_{i,j}| \quad (IV.10)$$

Où  $n$  est le nombre de modes et  $i$  est le nombre de nœuds.

Cependant, l'effet de cet indicateur est toujours insatisfaisant. Cela peut affaiblir la contribution des premiers modes de vibration car le DMC pour les modes supérieurs peut être beaucoup plus grand que celui des modes inférieurs. Par conséquent, une modification est effectuée en normalisant l'indicateur CDF comme suit :

$$NCDF = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n NDMC_j \quad (IV.11)$$

Où  $NCDF$  est le vecteur indicateur normalisé du vecteur  $CDF$  (Normalized CDF vector) de tous les nœuds pour chaque mode,  $NDMC_j$  est l'indicateur  $DMC$  normalisé de tous les nœuds pour chaque mode donnée par :

$$NDMC_j = \frac{DMC_j}{\|DMC_{i,j}\|_2} \quad (IV.12)$$

Où  $DMC_j$  est l'indicateur  $DMC$  pour chaque mode et  $\|DMC_{i,j}\|_2$  est la 2-norme du  $DMC_{i,j}$ ,  $i$  et  $j$  désignent, respectivement, le nombre de nœuds et le nombre de modes. Grâce à cette modification, les pics trompeurs diminuent doucement et deviennent presque plats.

### IV.3 Méthode basée sur les forces modales résiduelles (FRM) :

Lorsqu'il existe un endommagement potentiel dans une structure, un déséquilibre va se produire en raison de la substitution d'un élément fini sain par un élément fini endommagé. Les forces résiduelles modales sont obtenues à partir de l'équation aux valeurs propres. Ces forces modales résiduelles peuvent être utilisées comme indicateur d'endommagements. Pour détecter les endommagements, la force résiduelle modale est ensuite exprimée par un indicateur d'endommagements.

#### IV.3.1 Force modale résiduelle :

Pour une structure saine, les fréquences naturelles et les formes de mode doivent satisfaire le problème aux valeurs propres [60] :

$$([K]_s - \lambda_i [M]_s) \{\varphi\}_i = 0 \quad \text{avec } i = 1, \dots, n \quad (IV.13)$$

Où  $[K]_s$  et  $[M]_s$  sont, respectivement, les matrices globales de rigidité et de masse de la structure saine.  $\lambda_i = \omega_i^2$  sont les valeurs propres avec  $\omega_i$  et  $\{\varphi\}_i$  sont, respectivement, la  $i^{\text{ème}}$  fréquence naturelle et le  $i^{\text{ème}}$  mode de la structure saine.  $n$  est le nombre total des modes obtenus pour la structure saine.

Supposons, dans ce cas, que la matrice globale de masse change après endommagement, les équations aux valeurs propres qui caractérisent la structure endommagée sont données comme suit :

$$([K]_f - \lambda_{fi}[M]_f)\{\varphi\}_{fi} = 0 \quad \text{avec } i = 1, \dots, n \quad (\text{IV.14})$$

Où  $[K]_f$  et  $[M]_f$  sont, respectivement, les matrices de rigidité et de masse de la structure endommagée.  $\lambda_{fi} = \omega_{fi}^2$  sont les valeurs propres avec  $\omega_{fi}$  et  $\{\varphi\}_{fi}$  sont, respectivement, la  $i^{\text{ème}}$  pulsation naturelle et le  $i^{\text{ème}}$  mode de la structure endommagée.

Supposons que les matrices de rigidité et de masse de la structure endommagée sont définies, respectivement, comme suit :

$$[K]_f = [K]_s + [\Delta K] \quad (\text{IV.15})$$

$$[M]_f = [M]_s + [\Delta M] \quad (\text{IV.16})$$

Où  $[\Delta K]$  et  $[\Delta M]$  sont, respectivement, les réductions des matrices de rigidité et de masse dus à l'endommagement.

En remplaçant les équations (IV.15) et (IV.16) dans l'équation (IV.14), le problème aux valeurs propres pour la structure endommagée peut être écrit comme suit :

$$([K]_s - \lambda_{fi}[M]_s)\{\varphi\}_{fi} = -([\Delta K] - \lambda_{fi}[\Delta M])\{\varphi\}_{fi} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{IV.17})$$

Le côté droit de l'équation (III.17) est défini comme le vecteur force modale résiduelle pour le  $i^{\text{ème}}$  mode de la structure endommagée et désigné comme suit :

$$\{R\}_i = -([\Delta K] - \lambda_{fi}[\Delta M])\{\varphi\}_{fi} \quad (\text{IV.18})$$

Ce vecteur traduit le déséquilibre résultant de la substitution des modèles éléments finis sains par les modèles éléments finis endommagés.

Le côté gauche de l'équation (IV.17) est connu, qui est la force modale résiduelle. Il est clair que la force modale résiduelle sera égale à zéro uniquement si  $\lambda_{fi}$  et  $\{\varphi\}_{fi}$  sont égaux aux valeurs de base saines  $\lambda_i$  et  $\{\varphi\}_i$ . Les régions potentiellement endommagées dans la structure correspondent à des

degrés de liberté qui ont de grandes grandeurs dans les forces modales résiduelles  $\{R\}_i$ , ce qui peut aider à localiser des endommagements.

### IV.3.2 Indicateur d'endommagement $Ind_\alpha$ :

Si des changements dans les caractéristiques dynamiques d'une structure sont effectués pour l'identification d'endommagements, il faut avoir un modèle numérique adéquat capable de prédire les changements observés. Il est sans doute que la méthode des éléments finis est le meilleur choix pour établir le modèle analytique d'une structure. Dans le contexte des éléments finis discrétisés, les endommagements dans une structure peuvent être représentés simplement par une diminution de la rigidité des éléments élémentaire. Dans ce sens, l'indice d'endommagement est appelé indice d'endommagement élémentaire.

Afin de détecter la présence d'un endommagement pour chaque élément potentiellement endommagé, l'indice d'endommagement du  $j^{\text{ème}}$  élément est exprimé comme la variation fractionnée de la rigidité d'un élément :

$$\Delta[K]_j^e = [K]_{sj}^e - [K]_{fj}^e = \alpha_j [K]_{sj}^e \quad (\text{IV.19})$$

Où  $[K]_{sj}^e$  et  $[K]_{fj}^e$  sont, respectivement, les matrices élémentaires de rigidité du  $j^{\text{ème}}$  élément sain et du  $j^{\text{ème}}$  élément endommagé,  $[\Delta K]_j^e$  est la réduction de la rigidité du  $j^{\text{ème}}$  élément. La valeur positive de  $\alpha_j \in [0,1]$  indiquera une perte de la rigidité de l'élément. Quand  $\alpha_j = 0$  le  $j^{\text{ème}}$  élément n'est pas endommagé et lorsque  $\alpha_j = 1$  la rigidité du  $j^{\text{ème}}$  élément est complètement détériorée.

Si la masse de la structure est supposée constante après endommagement et que la rigidité de l'élément endommagé est définie comme la fraction de la rigidité de l'élément sain, c'est-à-dire :

$$[\Delta M] = 0 \quad (\text{IV.20})$$

$$[\Delta K]_j^e = \alpha_j [K]_{sj}^e \quad \text{avec } j = 1, \dots, m \quad (\text{IV.21})$$

Où l'indice  $j$  représente le  $j^{\text{ème}}$  élément alors que  $m$  est le nombre d'élément. Ainsi, le vecteur de force modale résiduelle (IV.17) du  $i^{\text{ème}}$  mode peut être écrit comme suit :

$$\{R\}_i = [\Delta K] \{\varphi\}_{fi} = \{\Delta F\}_i = [\{F\}_1^e \quad \{F\}_2^e \quad \dots \quad \{F\}_m^e]_i \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}_i = [F]_i \{\alpha\} \quad (\text{IV.22})$$

Les équations (IV.22) peuvent être écrites sous la forme compacte suivante :

$$\{R\} = [F]\{\alpha\} \quad (IV.23)$$

Où les coefficients de la matrice  $[F]$  sont donnés comme suit :

$$\{F\}_{ij} = [K]_{sj}^e \{\varphi\}_{fij}^e \quad (IV.24)$$

$\{F\}_{ij}$  est en fait le vecteur force nodale du  $i^{\text{ème}}$  mode du  $j^{\text{ème}}$  élément par rapport aux coordonnées globales. Les vecteurs force modale résiduelle  $\{R\}_i$  dans l'équation (IV.23) proviennent des équations (IV.17) :

$$\{R\}_i = -([K]_s - \lambda_{fi}[M]_s)\{\varphi\}_{fi} \quad (IV.25)$$

Chaque ligne du vecteur  $\{R\}_i$  représente un degré de liberté du modèle numérique de la structure correspondant au  $i^{\text{ème}}$  mode de vibration. Un endommagement est matérialisé par un changement dans un élément et, par conséquent, une modification du degré de liberté associé.

Les équations d'endommagement (IV.23) peuvent être réécrites d'une manière détaillée comme suit :

$$\begin{bmatrix} \{F\}_{11} & \{F\}_{11} & \dots & \{F\}_{1m} \\ \{F\}_{21} & \{F\}_{22} & \dots & \{F\}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \{F\}_{n1} & \{F\}_{n2} & \dots & \{F\}_{nm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{R\}_1 \\ \{R\}_2 \\ \vdots \\ \{R\}_n \end{Bmatrix} \quad (IV.26)$$

Où  $n$  est le nombre de modes alors que  $m$  est le nombre d'éléments.

En multipliant l'équation (IV.23) par  $[F]^{-1}$ , il vient :

$$\{\alpha\} = \{R\}[F]^{-1} \quad (IV.27)$$

Ainsi l'indicateur normalisé utilisé pour détecter les endommagements est donné comme suit :

$$Ind_{\alpha} = \frac{\{\alpha\}}{\max(\{\alpha\})} \quad (IV.28)$$

#### IV.4 Méthode basée sur la fonction de la réponse fréquentielle (FRF) :

La détection d'endommagements dans des structures à l'aide de données sur les tests de vibration a été accueillie par de nombreux chercheurs au cours des dernières décennies. La plupart des méthodes proposées encore utilisent des paramètres modaux extraits en construisant des indicateurs basés sur ces paramètres, mais peu de documents sont rédigés traitant l'application des fonctions de la réponse fréquentielle (FRF) dans la détection d'endommagements. Les méthodes de base localisent

l'emplacement et la gravité des endommagements en minimisant la différence entre la FRF mesurée et la FRF calculée, qui est un type de méthode de mise à jour ou d'optimisation du modèle.

Nous allons présenter, au premier lieu, la méthode présentée par les auteurs [61]. Puis, en second lieu, nous présenterons l'amélioration que nous avons apportée sur cette méthode.

#### IV.4.1 Formulation des équations de mouvement :

Comme indiqué auparavant, la présence d'endommagements dans une structure modifient leurs caractéristiques dynamiques. Ceci est caractérisé par des changements dans les paramètres modaux, c'est-à-dire les fréquences modales, les valeurs d'amortissement et la forme de mode associé à chaque fréquence modale. Des changements se produisent également dans certains paramètres de la structure, tels que la masse, l'amortissement, la rigidité et la matrice de flexibilité.

Les équations de mouvement d'une structure à  $n$  degré de liberté et des coefficients d'amortissement visqueux peuvent être exprimées, d'une manière générale, par [61] :

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (\text{IV.29})$$

Où  $[M]$ ,  $[C]$  et  $[K]$  sont, respectivement, les  $n \times n$  matrices de masse, d'amortissement et de rigidité. Si nous supposons à l'entrée du système une excitation harmonique, la force d'excitation et le déplacement peuvent être exprimés, respectivement, comme suit :

$$\{f(t)\} = \{F(w)\}e^{j\omega t} \quad (\text{IV.30})$$

$$\{x(t)\} = \{X(w)\}e^{j\omega t} \quad (\text{IV.31})$$

Avec  $w$  est la pulsation (ou fréquence) d'excitation.

En remplaçant les équations (IV.30) et (IV.31) dans l'équation (IV.29), il vient :

$$([K] - w^2[M] + j\omega[C])\{X(w)\}e^{j\omega t} = \{F(w)\}e^{j\omega t} \quad (\text{IV.32})$$

En exprimant, la sortie en fonction de l'entrée, nous obtenons l'expression suivante :

$$\{X(w)\} = ([K] - w^2[M] + j\omega[C])^{-1}\{F(w)\} \quad (\text{IV.33})$$

De l'équation (IV.33), la matrice des fonctions de réponse en fréquence (FRF) est définie comme suit :

$$[H(w)] = ([K] - w^2[M] + j\omega[C])^{-1} \quad (\text{IV.34})$$

D'où l'équation (IV.33) peut être réécrite comme suit :

$$\{X_{(w)}\} = [H_{(w)}]\{F_{(w)}\} \quad (\text{IV.35})$$

Dans l'équation (IV.34), si l'amortissement est négligé, la matrice FRF  $[H_{(w)}]$  du modèle élément fini sain et la matrice FRF  $[H(w)]_T$  du test sont données, respectivement, comme suit :

$$[H_{(w)}] = ([K] - w^2[M])^{-1} \quad (\text{IV.36})$$

$$[H(w)]_T = ([K]_T - w^2[M])^{-1} \quad (\text{IV.37})$$

En réorganisant l'équation (IV.39), nous obtenons :

$$[K]_T = [H]_T^{-1} + w^2[M] \quad (\text{IV.38})$$

Cependant, il est extrêmement difficile d'obtenir  $[H]_T^{-1}$  car nous ne pouvons pas mesurer toutes les FRF, et le processus d'inversion crée des problèmes indépendants. Par conséquent, une nouvelle méthode est nécessaire pour localiser le point endommagée en utilisant seulement quelques ensembles de tests.

De l'équation (IV.38), il vient :

$$[H(w)]_T([K]_T - w^2[M]) = [I] \quad (\text{IV.39})$$

L'équation (IV.39) peut être réécrite, d'une manière détaillée, comme suit :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} H_{11}(w) & H_{12}(w) & \dots & H_{1n}(w) \\ H_{21}(w) & H_{22}(w) & \dots & H_{2n}(w) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ H_{n1}(w) & H_{n2}(w) & \dots & H_{nn}(w) \end{bmatrix}_T \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}_T \\ & = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & w_i^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11}(w) & H_{12}(w) & \dots & H_{1n}(w) \\ H_{21}(w) & H_{22}(w) & \dots & H_{2n}(w) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ H_{n1}(w) & H_{n2}(w) & \dots & H_{nn}(w) \end{bmatrix}_T + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \end{aligned} \quad (\text{IV.40})$$

#### IV.4.2 Indicateur d'endommagements $\beta$ :

Comme nous l'avons indiqué précédemment, l'indicateur d'endommagements que nous allons présenter ici est obtenu par les auteurs [61] et une amélioration sera donnée à la fin de ce chapitre.

De l'équation (IV.34), si l'amortissement est négligé et que la matrice de masse est supposée constante après endommagement, la matrice des FRF de la structure saine et celles de la structure endommagée sont données, respectivement, comme suit :

$$[H(w)] = ([K] - w^2[M])^{-1} \quad (IV.41)$$

$$[H(w)]_T = ([K]_T - w^2[M])^{-1} \quad (IV.42)$$

La différence entre la matrice de rigidité de la structure saine et celle de la structure endommagée représente la réduction de rigidité donnée ainsi :

$$[\Delta K] = [K] - [K]_T = [H]^{-1} - [H]_T^{-1} \quad (IV.43)$$

En multipliant l'équation (IV.43) par  $[H]_T$ , il vient :

$$[H]_T[\Delta K] = [H]_T[H]^{-1} - [I] \quad (IV.44)$$

L'équation (IV.44) peut être réécrite aussi, d'une manière détaillée, comme suit :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} H_{11}(w) & H_{12}(w) & \dots & H_{1n}(w) \\ H_{21}(w) & H_{22}(w) & \dots & H_{2n}(w) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ H_{n1}(w) & H_{n2}(w) & \dots & H_{nn}(w) \end{bmatrix}_T \begin{bmatrix} \Delta K_{11} & \Delta K_{12} & \dots & \Delta K_{1n} \\ \Delta K_{21} & \Delta K_{22} & \dots & \Delta K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta K_{n1} & \Delta K_{n2} & \dots & \Delta K_{nn} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} H_{11}(w) & H_{12}(w) & \dots & H_{1n}(w) \\ H_{21}(w) & H_{22}(w) & \dots & H_{2n}(w) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ H_{n1}(w) & H_{n2}(w) & \dots & H_{nn}(w) \end{bmatrix}_T \begin{bmatrix} H_{11}(w) & H_{12}(w) & \dots & H_{1n}(w) \\ H_{21}(w) & H_{22}(w) & \dots & H_{2n}(w) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1}(w) & H_{n2}(w) & \dots & H_{nn}(w) \end{bmatrix}^{-1} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \end{aligned} \quad (IV.45)$$

Considérons les matrices élémentaires de rigidité et de masse d'un élément poutre suivantes :

$$[K_e] = \frac{EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (IV.46)$$

$$[M_e] = \frac{\rho A l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ 22l_e & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ 54 & 13l_e & 156 & -22l_e \\ -13l_e & -3l_e^2 & -22l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (IV.47)$$

Où  $E, I, l_e$  sont, respectivement, le module de Young, le moment d'inertie de la section droite de la poutre et la longueur de l'élément poutre.  $\rho$  et  $A$  sont, respectivement, la densité volumique et l'aire de la section transversale. Séparons la valeur  $EI$  de l'équation (IV.46) pour réduire le nombre de variables et pour maintenir la signification physique de la matrice de rigidité :

$$[K_e] = EI \left( \frac{1}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \right) = EI[K'_e] \quad (\text{IV.48})$$

Où  $[K]_e$  peut être calculé à l'aide d'un modèle éléments finis de poutre.

Si une valeur existe dans la  $i^{\text{ème}}$  colonne du côté droit de l'équation (IV.45), alors la valeur de correspondant à la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice de la réduction de rigidité  $[\Delta K]$  sera changée. La valeur  $[K'_e]$  dans l'équation (IV.48) est connue ; Seules les valeurs  $EI$  sont inconnues. Ainsi, l'équation (IV.45) devient :

$$([H]_T)_{xn} * [K']_{(:,i)} * \Delta(EI) = ([H]_T)_{xn} * ([H]_{(:,i)})^{-1} - [I]_{(x,i)} \quad (\text{IV.49})$$

Où  $([H]_T)_{xn}$  est la matrice FRF obtenue à partir du test et  $([H]_{(:,i)})^{-1} = ([K] - w^2[M])_{(:,i)}^{-1}$ .

Posons les valeurs connues du côté gauche de l'équation (III.49) comme suit :

$$\alpha(x, i) = ([H]_T)_{xn} * [K]_{(:,i)} \quad (\text{IV.50})$$

Et les valeurs connues du côté droit comme suit :

$$\beta(x, i) = ([H]_T)_{xn} * ([H]_{(:,i)})^{-1} - [I]_{(x,i)} \quad (\text{IV.51})$$

Alors la variation de la rigidité de l'état sain à l'état endommagé de la structure poutre est donnée comme suit :

$$\Delta(EI) = \frac{\beta(x, i)}{\alpha(x, i)} \quad (\text{IV.52})$$

Avec  $x$  est le nombre de fréquences d'excitation et  $i$  est le nombre de degré de liberté.

Pendant la simulation et pour identifier les endommagements dans une poutre encastree-libre, Les auteurs [61] ont utilisé le modèle de fissuration basé sur la réduction de la rigidité  $E$  pour calculer les matrices élémentaires de rigidité des éléments endommagés, donc de la matrice de rigidité globale  $[K]_T$  du test utilisée dans l'équation (IV.42) afin d'obtenir la matrice FRF. Ils ont supposé également que le moment d'inertie  $I$  est constant, il reste donc que la variation de rigidité  $\Delta E$  qu'ils l'ont calculé.

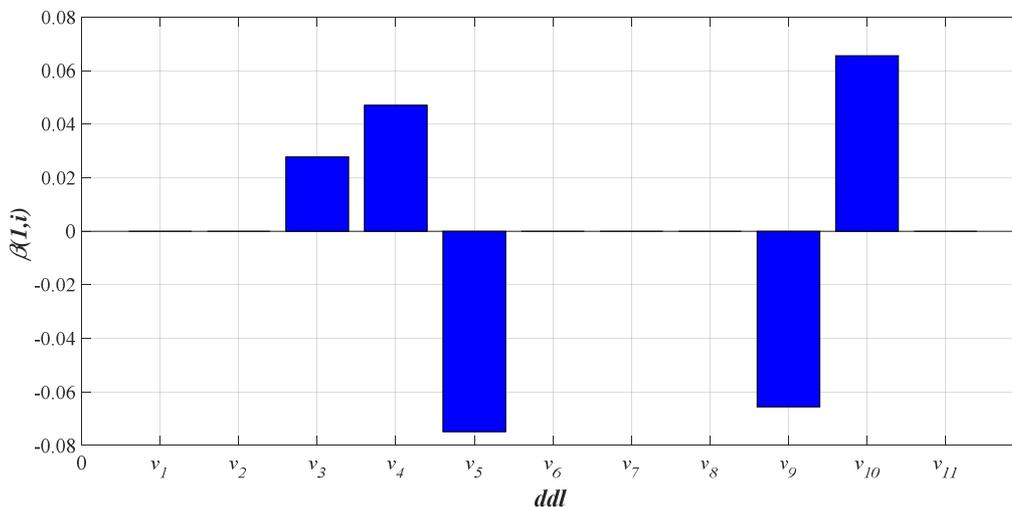
Afin de localiser et quantifier les endommagements, les auteurs ont utilisé uniquement la première ligne de la matrice indicatrice  $\beta(x, i)$ , c'est à dire  $\beta(1, i)$ , comme indicateur d'endommagements.

Dans notre cas, nous allons améliorer cet indicateur d'endommagements en ne s'intéressant qu'à leur détection.

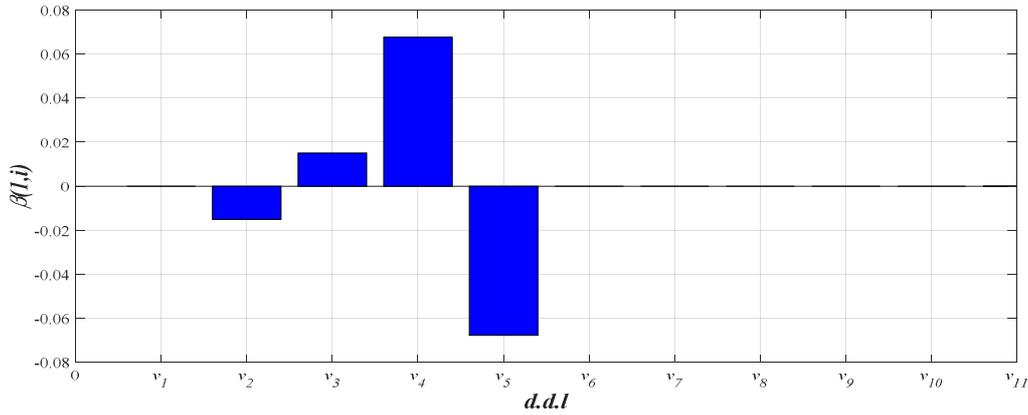
#### IV.4.3 Amélioration de la méthode :

Parmi les méthodes utilisées pour la localisation des défauts cités dans ce chapitre, nous avons proposé d'apporter une amélioration concernant l'indicateur d'endommagements proposé par les auteurs [61] basé sur la fonction de la réponse fréquentielle (FRF). L'application de cette méthode, comme elle est présentée par les auteurs [61], ne donne pas souvent de bons résultats sur certains cas de figures, plus particulièrement, à plusieurs endommagements. La représentation nodale de cette méthode rend l'interprétation des résultats incertaine.

A titre d'exemple, cette méthode de détection d'endommagements est appliquée sur deux poutres similaires encastées-libres de longueur  $L= 30$  in, de module de Young  $E = 3 \times 10^7$  psi, le moment d'inertie  $I = 0.0833$  in<sup>4</sup>, la section droite  $A = 1$  in<sup>2</sup> et la masse volumique  $\rho = 0.00073$  lb s<sup>2</sup>/in. Pour la première poutre, les auteurs ont réduit la raideur  $E$  des éléments 3 ,4 et 9 de 33 %. Pour la deuxième poutre, nous allons endommager les éléments 2 et 4 avec le même taux d'endommagement. Les résultats obtenus sont comme suit :



**Figure IV.1-** Localisation des éléments endommagés 3, 4 et 9 en appliquant l'indicateur d'endommagements  $\beta(1, i)$  utilisé par les auteurs [61].



**Figure IV.2-** Localisation des éléments endommagés 2 et 4 en appliquant l'indicateur d'endommagements  $\beta(1,i)$  utilisé par les auteurs [61].

Nous constatons dans la figure (IV.1) que les valeurs de l'indicateur  $\beta(1,i)$  proposé par les auteurs [61], sont dominante sur tous les nœuds appartenant aux éléments endommagés. Par contre, dans la figure (IV.2), avec deux endommagements, nous constatons que les valeurs de l'indicateur  $\beta(1,i)$  sont dominante sur les quatre nœuds appartenant aux éléments 2, 3 et 4. Ce qui fait une incertitude sur l'élément 3 qui n'est pas endommagé. L'idée d'une amélioration de cet indicateur est développée ci-dessous.

En suivant la même procédure que la méthode précédente jusqu'à l'établissement de l'équation (IV.51) :

$$\beta(x, i) = ([H]_T)_{xn} * ([H]_{(:,i)})^{-1} - [I]_{(x,i)} \quad (\text{IV.53})$$

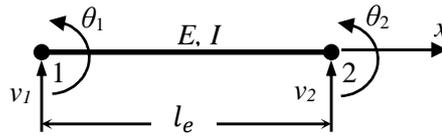
La localisation des endommagements jusque-là, se fait uniquement par rapport à la première fréquence d'excitation. Pour pallier toutes les fréquences d'excitation, nous allons proposer un autre indicateur d'endommagement sous la forme suivante :

$$Ind_{\beta_1} = \left| \sum_{j=1}^x \beta(j, i) \right| \quad (\text{IV.54})$$

$$= \{Ind_{\beta_1}(v_1) \quad Ind_{\beta_1}(\theta_1) \quad Ind_{\beta_1}(v_2) \quad Ind_{\beta_1}(\theta_2) \quad \cdots \quad Ind_{\beta_1}(v_n) \quad Ind_{\beta_1}(\theta_n)\}$$

Chaque élément endommagé est représenté par les déplacements des deux nœuds qui le définissent. Les déplacements des éléments endommagés sont les seuls à être non nuls. Dans le cas de la poutre en flexion, on a représenté les éléments endommagés par le déplacement  $v$  et la rotation  $\theta$  (Figure IV.3).

En écrivant cet indicateur en fonction des ddl de chaque élément de poutre, nous obtenons :



**Figure IV.3-** Elément de poutre et ses degrés de liberté.

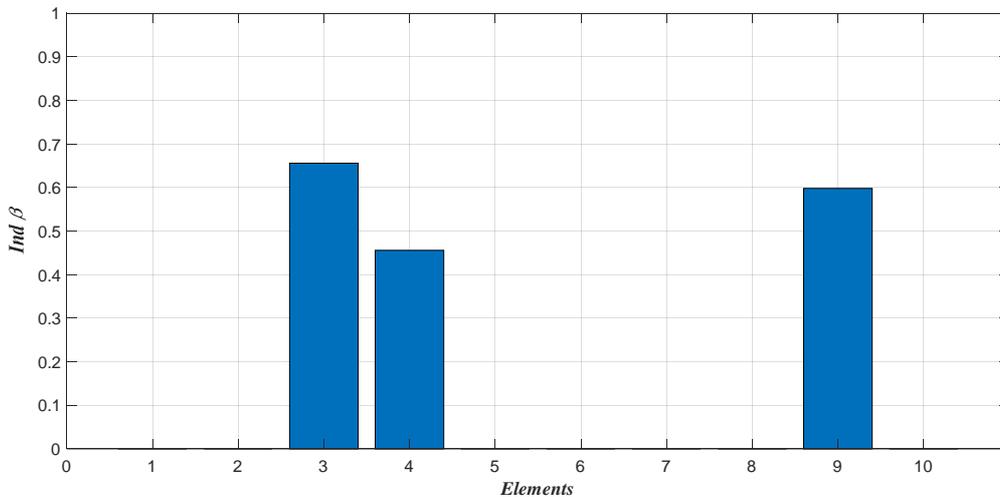
$$Ind_{\beta 2} = \begin{bmatrix} Ind_{\beta 1}(v_1) & Ind_{\beta 1}(\theta_1) & Ind_{\beta 1}(v_2) & Ind_{\beta 1}(\theta_2) \\ Ind_{\beta 1}(v_2) & Ind_{\beta 1}(\theta_2) & Ind_{\beta 1}(v_3) & Ind_{\beta 1}(\theta_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Ind_{\beta 1}(v_{n-1}) & Ind_{\beta 1}(\theta_{n-1}) & Ind_{\beta 1}(v_n) & Ind_{\beta 1}(\theta_n) \end{bmatrix}$$

Le nouvel indicateur d'endommagement qui nous permet de passer à la représentation en élément est donné comme suit :

$$Ind_{\beta} = \left( \frac{\sum_1^m (Ind_{\beta 2})}{m} \right)_{(1 \times n)} \tag{IV.55}$$

Avec  $n$  est le nombre de ddl de la structure et  $m = 4$  est le nombre de ddl d'un l'élément poutre.

Ci-dessous, nous allons appliquer ce nouvel indicateur sur le même cas test présenté plus haut :



**Figure IV.4-** Localisation des éléments endommagés 3, 4 et 9 en utilisant l'indicateur d'endommagements amélioré  $Ind_{\beta}$ .

Les résultats obtenus avec ce nouvel indicateur sont présentés sur la figure (IV.4). Nous constatons que la localisation est parfaite et les éléments endommagés sont bien le 3<sup>ème</sup>, 4<sup>ème</sup> et le 9<sup>ème</sup> élément.

**IV.5 Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons présenté trois méthodes pour l'identification d'endommagements dans des structures à savoir : la méthode basée sur la forme des courbures modales (FCM), la méthode

basée sur les forces résiduelles modales (FRM) et la méthode basée sur la fonction de la réponse fréquentielle (FRF) pour laquelle nous avons apporté des modifications afin de permettre une meilleure localisation de défauts. Dans le chapitre suivant, ces méthodes seront appliquées avec les modèles poutres endommagées vus dans le chapitre précédent.

*CHAPITRE V :*

*APPLICATION ET TEST NUMERIQUE*

---

## V.1 Introduction :

Dans ce dernier chapitre, nous allons appliquer les différents problèmes abordés dans les chapitres précédents. Nous allons tout d'abord valider le programme de notre modélisation par éléments finis (MEF) de la structure poutre saine en comparant nos résultats à la littérature. Puis nous allons faire une étude comparative des cinq modèles de poutres endommagées en comparant les fréquences naturelles de ces modèles par rapport aux fréquences naturelles expérimentales. Ensuite, nous allons faire une étude comparative de ces modèles de fissuration en les appliquant sur trois méthodes d'identification d'endommagements.

Tous les calculs sont obtenus à l'aide du code de calcul MATLAB en faisant varier les différents paramètres caractérisant la structure poutre et ceux des endommagements.

## V.2 Modèle de poutre saine choisi :

L'élément fini de poutre développé est basé sur les théories d'Euler-Bernoulli utilisant comme variables nodales la flèche et sa dérivée première. Comme nous ne considérons que les vibrations de flexion pure autour de l'axe  $z$ , chaque nœud de cet élément fini possède 2 degrés de liberté à savoir un déplacement transversal  $v$  selon l'axe  $y$  et une rotation  $\theta$  autour de l'axe  $z$  (Figure V.1). Nous avons modélisé les structures poutres étudiées en plusieurs éléments finis à l'aide du code de calcul Matlab. La figure V.2 montre l'exemple d'une poutre discrétisée en 11 éléments.

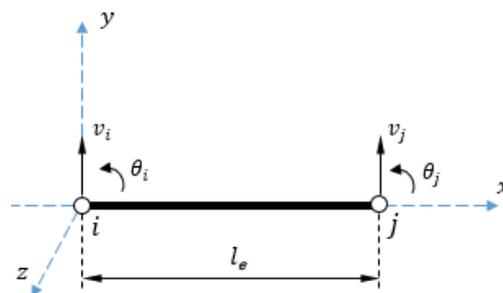


Figure V.1- Modélisation d'un élément fini poutre travaillant en flexion pure.

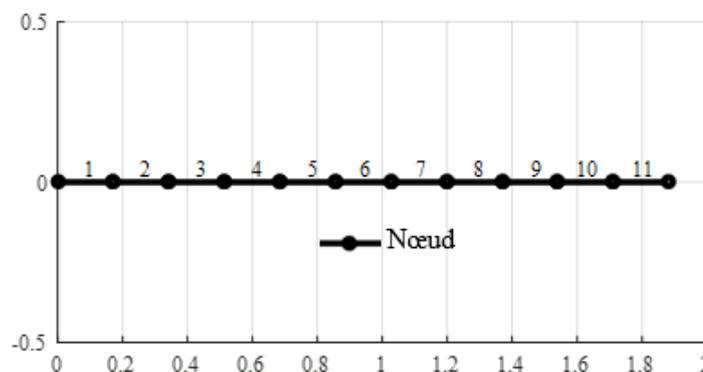


Figure V.2- Exemple de discrétisation d'une poutre en 11 éléments finis.

### V.3 Matrices élémentaires :

#### V.3.1 Matrices élémentaires d'un élément sain :

Les matrices élémentaires de raideur et de masse des éléments de poutres saines utilisées sont définies comme suit :

$$[K_e] = \frac{EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

$$[M_e] = \frac{\rho A l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ 22l_e & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ 54 & 13l_e & 156 & -22l_e \\ -13l_e & -3l_e^2 & -22l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

#### V.3.2 Matrices élémentaires d'un élément endommagé :

Les cinq matrices élémentaires de raideur des modèles poutres endommagées utilisées sont données comme suit :

1. Modèle de J. K. Sinha *et al.* [50]:

$$[K_e^{end}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & -k_{11} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & -k_{12} & k_{24} \\ -k_{11} & -k_{12} & k_{11} & -k_{14} \\ k_{14} & k_{24} & -k_{14} & k_{44} \end{bmatrix}$$

Dans lequel :

$$k_{11} = \frac{12E(I - I_{cj})}{l_e^4} \left[ \frac{2l_c^3}{l_e^2} + 3l_c \left( \frac{2X_j}{l_e} - 1 \right)^2 \right]$$

$$k_{12} = \frac{12E(I - I_{cj})}{l_e^3} \left[ \frac{l_c^3}{l_e^2} + l_c \left( 2 - \frac{7X_j}{l_e} + \frac{6X_j^2}{l_e^2} \right) \right]$$

$$k_{14} = \frac{12E(I - I_{cj})}{l_e^3} \left[ \frac{l_c^3}{l_e^2} + l_c \left( 1 - \frac{5X_j}{l_e} + \frac{6X_j^2}{l_e^2} \right) \right]$$

$$k_{22} = \frac{12E(I - I_{cj})}{l_e^2} \left[ \frac{3l_c^3}{l_e^2} + 2l_c \left( \frac{3X_j}{l_e} - 2 \right)^2 \right]$$

$$k_{24} = \frac{12E(I - I_{cj})}{l_e^2} \left[ \frac{3l_c^3}{l_e^2} + 2l_c \left( 2 - \frac{9X_j}{l_e} + \frac{9X_j^2}{l_e^2} \right) \right]$$

$$k_{44} = \frac{12E(I - I_{cj})}{l_e^2} \left[ \frac{3l_c^3}{l_e^2} + 2l_c \left( \frac{3X_j}{l_e} - 1 \right)^2 \right]$$

Avec  $I = \frac{bh^3}{12}$  et  $I_{cj} = \frac{b(h-a_j)^3}{12}$  sont, respectivement, le moment quadratique des zones non fissurées et celui au niveau de la  $j^{\text{ème}}$  fissure.  $b$  et  $h$  sont la largeur et la hauteur de la poutre.  $l_e$  la longueur de l'élément.  $l_c = 1.5h$  est la longueur effective.

2. Modèle de M.H.F. Dado *et al.* [51] :

$$[K_e^{end}] = \frac{6EI}{\Delta} \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{12}]^T & [k_{22}] \end{bmatrix}$$

Avec :

$$[k_{11}] = \begin{bmatrix} 6(l_e + cEI) & 3(l_e^2 + 2xcEI) \\ 3(l_e^2 + 2xcEI) & 2(l_e^3 + 3x^2cEI) \end{bmatrix}$$

$$[k_{12}] = \begin{bmatrix} -6(l_e + cEI) & 3(l_e^2 + 2(l_e - x)cEI) \\ -3(l_e^2 + 2xcEI) & (l_e^3 + 6x(l_e - x)cEI) \end{bmatrix}$$

$[k_{12}]^T$  est la transposée de  $[k_{12}]$

$$[k_{22}] = \begin{bmatrix} 6(l_e + cEI) & -3(l_e^2 + 2(l_e - x)cEI) \\ -3(l_e^2 + 2(l_e - x)cEI) & 2(l_e^3 + 3(l_e - x)^2cEI) \end{bmatrix}$$

$$\Delta = 9(l_e^2 + 2xcEI)(l_e^2 + 2(l_e - x)cEI) - 6(l_e + cEI)(l_e^3 + 2x(l_e - x)cEI).$$

Où  $E$  est le module de Young,  $I$  est le moment d'inertie de la section droite de l'élément et  $l_e$  sa longueur,  $x$  est la position de la fissure dans les coordonnées locales de l'élément et  $c$  est la complaisance des fissures donnée par :

$$c = \frac{6h}{EI} (1.98\bar{a}^2 - 3.277\bar{a}^3 + 14.251\bar{a}^4 - 31.08\bar{a}^5 + 62.79\bar{a}^6 - 102.171\bar{a}^7 + 146.404\bar{a}^8 - 127.69\bar{a}^9 + 61.504\bar{a}^{10}). \quad \text{Avec } \bar{a} = \frac{a}{h}, \quad a \text{ représente la profondeur de la fissure.}$$

3 et 4. Modèle d'Ostachowicz et Krawkczuk [52], et celui de Dimarogonas et Paipetis [53] :

$$[K_e^{end}] = \frac{EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 + k_t & -6l_e & 2l_e^2 - k_t \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 - k_t & -6l_e & 4l_e^2 + k_t \end{bmatrix}$$

$$\text{Pour celui d'Ostachowicz et Krawkczuk : } k_t = \frac{bh^2E}{72\pi\bar{a}^2F_1(\bar{a})}$$

$$\text{Avec } F_1(\bar{a}) = 0.6384 - 1.035\bar{a} + 3.7201\bar{a}^2 - 5.1773\bar{a}^3 + 7.553\bar{a}^4 - 7.332\bar{a}^5 + 2.4909\bar{a}^6$$

Pour celui de Dimarogonas et Paipetis :  $k_t = \frac{EI}{5.346hF_2(\bar{a})}$

$$\text{Avec } F_2(\bar{a}) = 1.8624\bar{a}^2 - 3.95\bar{a}^3 + 16.375\bar{a}^4 - 37.226\bar{a}^5 + 76.81\bar{a}^6 - 126.9\bar{a}^7 + 172\bar{a}^8 - 143.97\bar{a}^9 + 66.56\bar{a}^{10}.$$

5. Modèle de réduction de la raideur E :

$$[K_e^f]_j = ((1 - \bar{a}_j)E) * [K_e]'_j$$

Avec  $\bar{a}_j = a/h$  représente la profondeur normalisée de la  $j^{\text{ème}}$  fissure.  $a$  et  $h$  sont, respectivement, la profondeur de la fissure et la hauteur de la poutre.  $[K_e]'_j$  est donnée comme suit :

$$[K_e]'_j = \begin{bmatrix} \frac{12I}{l_e^3} & \frac{6I}{l_e^2} & -\frac{12I}{l_e^3} & \frac{6I}{l_e^2} \\ \frac{6I}{l_e^2} & \frac{4I}{l_e} & -\frac{6I}{l_e^2} & \frac{2I}{l_e} \\ -\frac{12I}{l_e^3} & -\frac{6I}{l_e^2} & \frac{12I}{l_e^3} & -\frac{6I}{l_e^2} \\ \frac{6I}{l_e^2} & \frac{2I}{l_e} & -\frac{6I}{l_e^2} & \frac{4I}{l_e} \end{bmatrix}$$

#### V.4 Analyse modale :

Les paramètres modaux d'un mode  $i$ , pour les structures poutres saines et endommagées, sont identifiés par une simple résolution de l'équation aux valeurs propres suivante :

$$(K - w_i^2 M)\varphi_i = 0$$

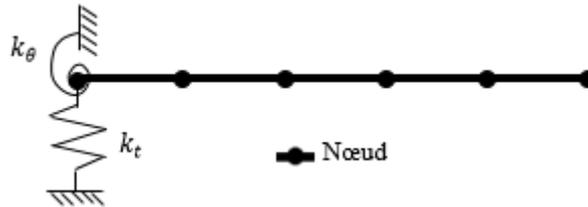
Avec  $w_i$  est la pulsation propre du  $i^{\text{ème}}$  mode  $\varphi_i$  d'où les fréquences propres correspondant sont données par  $f_i = \frac{w_i}{2\pi}$ .

#### V.5 Validation de la modélisation par éléments finis (MEF) de la poutre saine :

Pour valider notre modélisation par éléments finis, nous avons utilisé trois types de poutres retrouvées dans la littérature [50] dont leurs propriétés géométriques et mécaniques sont présentées dans le tableau 1. Pour cela, nous avons comparé les fréquences propres obtenues par notre modélisation à celles retrouvées dans la littérature [50]. Les résultats de la comparaison sont présentés dans les tableaux 2, 3 et 4.

Ces structures poutres étudiées sont choisies de telle sorte que les conditions aux limites des poutres 2 et 3 sont encastées – encastées et flexible – libre pour la poutre 1.

Pour le cas particulier d'une extrémité flexible, la structure est accrochée à deux ressorts de traction-compression et de rotation. Les rigidités  $k_t = 26.5 \text{ MN/m}$  et  $k_\theta = 150 \text{ KNm/rad}$  de ces ressorts ont été choisies en utilisant les données modales de la poutre saine afin de produire un modèle élément fini valable.



**Figure V.3-** Modélisation d'une extrémité flexible d'une poutre par deux ressorts.

	<b>Poutre 1</b>	<b>Poutre 2</b>	<b>Poutre 3</b>
Condition aux limites	flexible-libre	Encastrée-Encastrée	Encastrée-Encastrée
Matériau	Aluminium	Aluminium	Acier
Module de Young $E$	$69.79 \text{ GN/m}^2$	$69.79 \text{ GN/m}^2$	$203.91 \text{ GN/m}^2$
Densité volumique $\rho$	$2600 \text{ Kg/m}^3$	$2600 \text{ Kg/m}^3$	$7800 \text{ Kg/m}^3$
Coefficient de poisson $\nu$	0.33	0.33	0.33
Longueur $L$	$996 \text{ mm}$	$1832 \text{ mm}$	$1330 \text{ mm}$
Largeur $b$	$50 \text{ mm}$	$50 \text{ mm}$	$25.3 \text{ mm}$
Hauteur $h$	$25 \text{ mm}$	$25 \text{ mm}$	$25.3 \text{ mm}$
Raideurs aux limites	$k_t = 26.5 \text{ MN/m}$ $k_\theta = 150 \text{ KNm/rad}$		

**Tableau. 1-** Propriétés géométriques et mécaniques des trois poutres étudiées.

**Poutre 1 :** saine en Aluminium flexible-libre discrétisée en **16 éléments**.

$L = 996 \text{ mm}$					
MEF [50]				MEF (présent travail)	
Mode	Mesurées (Hz)	Calculées (Hz)	Erreur (%)	Calculées (Hz)	Erreur (%)
1	20,000	19,902	0,490	19,900	0,502
2	124,500	124,543	0,035	124,531	0,025
3	342,188	345,507	0,970	345,716	1,028
4	664,375	664,317	0,009	665,762	0,196

**Tableau. 2-** Comparaison entre les fréquences propres mesurées et calculées dans le cas d'une poutre saine flexible-libre en Aluminium.

**Poutre 2** : saine en Aluminium encastrée- encastrée discrétisée en **27 éléments**.

$L = 1832 \text{ mm}$					
MEF [50]			MEF (présent travail)		
Mode	Mesurées (Hz)	Calculées (Hz)	Erreur (%)	Calculées (Hz)	Erreur (%)
1	40,000	39,789	0,527	39,670	0,826
2	109,688	109,680	0,007	109,351	0,307
3	215,000	215,018	0,008	214,376	0,290
4	355,000	355,440	0,124	354,385	0,173

**Tableau. 3-** Comparaison entre les fréquences propres mesurées et calculées dans le cas d'une poutre saine encastrée- encastrée en Aluminium.**Poutre 3** : saine en Acier encastrée- encastrée discrétisée en **20 éléments**.

$L = 1330 \text{ mm}$					
MEF [50]			MEF (présent travail)		
Mode	Mesurées (Hz)	Calculées (Hz)	Erreur (%)	Calculées (Hz)	Erreur (%)
1	75,313	75,171	0,188	75,171	0,189
2	207,188	207,212	0,012	207,214	0,013
3	406,250	406,225	0,006	406,242	0,002
4	667,813	671,536	0,557	671,611	0,569

**Tableau. 4-** Comparaison entre les fréquences propres mesurées et calculées dans le cas d'une poutre saine encastrée-encastrée en Acier.

Afin de valider notre modélisation par éléments finis, nous avons comparé les fréquences calculées des poutres saines à celles mesurées expérimentalement [50] en faisant varier les différents paramètres à savoir : le nombre d'éléments, le type de matériau, la longueur des poutres et les conditions aux limites.

Nous constatons dans les tableaux 2,3 et 4 que les fréquences calculées sont très satisfaisantes comparativement à celles mesurées [50] avec une erreur moyenne qui varie entre 0,193 à 0,437, ce qui nous permet de conclure que notre modélisation par éléments finis est validée.

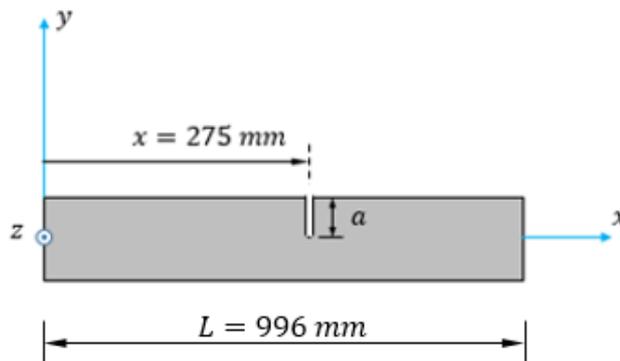
## V.6 Etude comparative des modèles poutres endommagées en termes de fréquences :

Les tableaux 5, 6, 7 et 8 présentent, respectivement, les fréquences propres mesurées [50] et celles calculées pour les cinq modèles de poutres endommagées à savoir le modèle de J. K. Sinha *et al.* [50], M.H.F. Dado *et al.* [51], Ostachowicz et Krawkczuk [52], Dimarogonas et Paipetis [53], ainsi que le modèle qui est basé sur la réduction de la rigidité  $E$  d'un élément poutre. Ces modèles sont mis à l'épreuve en faisant varier les différents paramètres de la poutre et de l'endommagement.

### V.6.1 Cas d'une seule fissure :

#### V.6.1.1 Variation de la profondeur de la fissure :

Le tableau.5 présente les fréquences propres mesurées [50] et calculées des modèles poutres endommagées flexibles-libres en fonction de la variation de la profondeur de la fissure (de 4 à 12  $mm$ ). Les caractéristiques géométriques et mécaniques de chaque modèle sont les mêmes que la poutre 1 (voir le tableau.1). La position  $x = 275\text{ mm}$  reste constante pendant la variation de la profondeur. La profondeur  $a$  de la fissure est donnée par le tableau 5.



**Figure V.4-** Variation de la profondeur  $a$  dans le cas d'une seule fissure.

**Poutre 1** : endommagée en Aluminium flexible-libre discrétisée en **16 éléments**.

$a = 4 \text{ mm}$ à la position $x = 275 \text{ mm}$ , $L = 996 \text{ mm}$											
Mode	Mesurée [50]	Réduction de E	Erreur (%)	Dado <i>et al.</i>	Erreur (%)	Sinha <i>et al.</i>	Erreur (%)	Dimarogonas et Paipetis	Erreur (%)	Ostachowicz et Krawkczuk	Erreur (%)
1	20,000	19,896	0,519	20,268	1,341	19,892	0,542	20,718	3,591	19,900	0,502
2	124,250	124,525	0,221	125,249	0,804	124,517	0,215	126,086	1,478	124,531	0,226
3	340,813	345,647	1,418	353,633	3,761	345,557	1,392	364,370	6,912	345,716	1,439
4	662,813	665,728	0,440	669,651	1,032	665,665	0,430	674,201	1,718	665,762	0,445
$a = 8 \text{ mm}$ à la position $x = 275 \text{ mm}$ , $L = 996 \text{ mm}$											
Mode	Mesurée [50]	Réduction de E	Erreur (%)	Dado <i>et al.</i>	Erreur (%)	Sinha <i>et al.</i>	Erreur (%)	Dimarogonas et Paipetis	Erreur (%)	Ostachowicz et Krawkczuk	Erreur (%)
1	19,750	19,893	0,723	20,132	1,932	19,886	0,689	20,551	4,056	19,900	0,757
2	124,063	124,518	0,367	124,997	0,753	124,508	0,359	125,762	1,370	124,531	0,377
3	336,875	345,578	2,583	350,642	4,087	345,447	2,545	360,235	6,934	345,716	2,624
4	662,313	665,694	0,511	668,125	0,877	665,598	0,496	672,264	1,502	665,762	0,521
$a = 12 \text{ mm}$ à la position $x = 275 \text{ mm}$ , $L = 996 \text{ mm}$											
Mode	Mesurée [50]	Réduction de E	Erreur (%)	Dado <i>et al.</i>	Erreur (%)	Sinha <i>et al.</i>	Erreur (%)	Dimarogonas et Paipetis	Erreur (%)	Ostachowicz et Krawkczuk	Erreur (%)
1	19,000	19,889	4,681	20,003	5,281	19,883	4,645	20,344	7,072	19,900	4,734
2	123,000	124,512	1,229	124,757	1,428	124,502	1,221	125,365	1,923	124,531	1,245
3	326,563	345,508	5,801	347,916	6,539	345,378	5,761	355,352	8,816	345,716	5,865
4	660,313	665,660	0,810	666,762	0,977	665,555	0,794	670,026	1,471	665,762	0,825

**Tableau. 5-** Comparaison entre les fréquences propres mesurées et celles calculées pour les modèles de poutres endommagées flexibles-libres en Aluminium dans le cas d'une seule fissure.

### V.6.1.2 Changement de conditions aux limites :

Dans cette partie, nous allons changer les conditions aux limites, la longueur de la poutre, le nombre d'éléments et la position de la fissure en gardant les mêmes valeurs de la profondeur de la fissure.

#### Poutre 2 : endommagée en Aluminium encastree-encastree discretisée en 27 éléments.

$a = 4 \text{ mm}$ à la position $x = 595 \text{ mm}$ , $L = 1832 \text{ mm}$											
Mode	Mesurée [50]	Réduction de E	Erreur (%)	Dado <i>et al.</i>	Erreur (%)	Sinha <i>et al.</i>	Erreur (%)	Dimarogonas et Paipetis	Erreur (%)	Ostachowicz et Krawkczuk	Erreur (%)
1	39,688	37,589	5,290	37,715	4,971	37,587	5,293	37,863	4,598	37,590	5,287
2	109,063	103,605	5,005	105,141	3,596	103,591	5,018	107,066	1,831	103,618	4,992
3	215,000	203,130	5,521	203,795	5,212	203,125	5,523	204,564	4,854	203,136	5,518
4	354,688	335,792	5,328	337,318	4,897	335,775	5,332	339,004	4,422	335,805	5,324
$a = 8 \text{ mm}$ à la position $x = 595 \text{ mm}$ , $L = 1832 \text{ mm}$											
Mode	Mesurée [50]	Réduction de E	Erreur (%)	Dado <i>et al.</i>	Erreur (%)	Sinha <i>et al.</i>	Erreur (%)	Dimarogonas et Paipetis	Erreur (%)	Ostachowicz et Krawkczuk	Erreur (%)
1	39,375	37,588	4,540	37,671	4,327	37,586	4,544	37,812	3,969	37,590	4,534
2	108,125	103,591	4,193	104,604	3,256	103,571	4,211	106,396	1,599	103,618	4,168
3	214,688	203,125	5,386	203,570	5,178	203,117	5,390	204,280	4,848	203,136	5,381
4	353,438	335,778	4,997	336,787	4,711	335,755	5,003	338,389	4,258	335,805	4,989
$a = 12 \text{ mm}$ à la position $x = 595 \text{ mm}$ , $L = 1832 \text{ mm}$											
Mode	Mesurée [50]	Réduction de E	Erreur (%)	Dado <i>et al.</i>	Erreur (%)	Sinha <i>et al.</i>	Erreur (%)	Dimarogonas et Paipetis	Erreur (%)	Ostachowicz et Krawkczuk	Erreur (%)
1	39,063	37,586	3,780	37,627	3,676	37,585	3,784	37,746	3,372	37,590	3,771
2	105,938	103,578	2,228	104,069	1,765	103,559	2,245	105,541	0,374	103,618	2,190
3	214,375	203,119	5,251	203,346	5,145	203,112	5,254	203,922	4,876	203,136	5,243
4	350,625	335,765	4,238	336,255	4,099	335,742	4,245	337,600	3,715	335,805	4,227

**Tableau. 6-** Comparaison entre les fréquences propres mesurées et celles calculées pour les modèles de poutres endommagées encastrees-encastrees en Aluminium dans le cas d'une seule fissure.

### V.6.1.3 Changement de matériau :

Le tableau.7 présente les fréquences propres des modèles de poutres endommagées encadrées-encadrées en Acier en fonction de la variation de la profondeur d'une seule fissure.

#### Poutre 3 : endommagée en Acier encadrée- encadrée discrétisée en 20 éléments.

$a = 4 \text{ mm}$ à la position $x = 430 \text{ mm}$ , $L = 1330 \text{ mm}$											
Mode	Mesurées [50]	Réduction de E	Erreur (%)	Dado <i>et al.</i>	Erreur (%)	Sinha <i>et al.</i>	Erreur (%)	Dimarogonas et Paipetis	Erreur (%)	Ostachowicz et Krawczuk	Erreur (%)
1	74,688	75,167	0,642	75,578	1,192	75,163	0,636	76,064	1,843	75,171	0,646
2	205,625	207,179	0,756	211,286	2,753	207,136	0,735	216,671	5,372	207,214	0,773
3	405,625	406,232	0,150	407,410	0,440	406,216	0,146	408,544	0,720	406,242	0,152
4	666,250	671,557	0,797	677,803	1,734	671,497	0,788	684,902	2,800	671,611	0,805
$a = 8 \text{ mm}$ à la position $x = 430 \text{ mm}$ , $L = 1330 \text{ mm}$											
Mode	Mesurées [50]	Réduction de E	Erreur (%)	Dado <i>et al.</i>	Erreur (%)	Sinha <i>et al.</i>	Erreur (%)	Dimarogonas et Paipetis	Erreur (%)	Ostachowicz et Krawczuk	Erreur (%)
1	74,063	75,163	1,486	75,435	1,853	75,158	1,478	75,891	2,469	75,171	1,496
2	202,500	207,143	2,293	209,797	3,604	207,082	2,263	214,727	6,038	207,214	2,328
3	404,688	406,221	0,379	406,995	0,570	406,199	0,373	408,061	0,834	406,242	0,384
4	662,813	671,502	1,311	675,652	1,937	671,417	1,298	682,222	2,928	671,611	1,327
$a = 12 \text{ mm}$ à la position $x = 430 \text{ mm}$ , $L = 1330 \text{ mm}$											
Mode	Mesurées [50]	Réduction de E	Erreur (%)	Dado <i>et al.</i>	Erreur (%)	Sinha <i>et al.</i>	Erreur (%)	Dimarogonas et Paipetis	Erreur (%)	Ostachowicz et Krawczuk	Erreur (%)
1	72,813	75,160	3,223	75,294	3,407	75,154	3,215	75,672	3,927	75,171	3,238
2	197,188	207,107	5,030	208,372	5,672	207,048	5,000	212,343	7,686	207,214	5,085
3	403,125	406,211	0,766	406,595	0,861	406,187	0,760	407,476	1,079	406,242	0,773
4	655,938	671,448	2,364	673,550	2,685	671,367	2,352	678,895	3,500	671,611	2,389

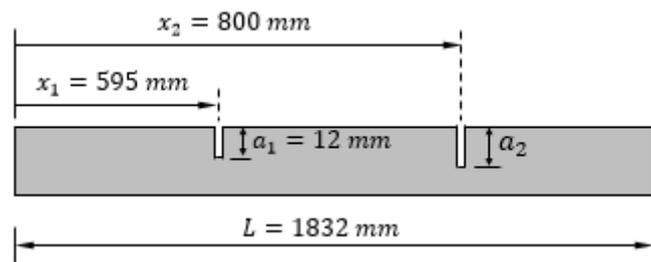
**Tableau. 7-** Comparaison entre les fréquences propres mesurée et celles calculées pour les modèles de poutres endommagées encadrées-encadrées en Acier dans le cas d'une seule fissure.

**V.6.2 Cas de deux fissures :**

A présent, nous allons introduire pour chaque modèle de poutre endommagée deux fissures. Les propriétés géométriques et mécaniques de chaque modèle de poutre endommagée sont les mêmes que la poutre 2 (voir tableau.1).

Les profondeurs et les positions des deux fissures sont données comme suit :

- Pour la fissure 1, la profondeur  $a_1 = 12 \text{ mm}$  et la position  $x_1 = 595 \text{ mm}$  restent constantes.
- La profondeur  $a_2$  de la fissure 2 varie de 4 à 12 mm et sa position  $x_2 = 800 \text{ mm}$  reste constante.



**Figure V.5-** Variation de la profondeur  $a_2$  de la deuxième fissure.

Le tableau.8 présente la comparaison entre les fréquences propres mesurées expérimentalement [50] et celles calculées pour les modèles poutres endommagées dans le cas de deux fissures.

$a_1 = 12 \text{ mm}$ à la position $x_1 = 595 \text{ mm}$ $a_2 = 4 \text{ mm}$ à la position $x_2 = 800 \text{ mm}$											
Mode	Mesurée [50]	Réduction de E	Erreur (%)	Dado <i>et al.</i>	Erreur (%)	Sinha <i>et al.</i>	Erreur (%)	Dimarogonas et Paipetis	Erreur (%)	Ostachowicz et Krawkczuk	Erreur (%)
1	38,750	37,583	3,012	38,020	1,885	37,578	3,026	38,642	0,280	37,590	2,994
2	105,938	103,573	2,232	104,589	1,273	103,550	2,254	106,893	0,901	103,618	2,190
3	213,750	203,104	4,981	204,969	4,108	203,083	4,991	207,349	2,995	203,136	4,966
4	350,000	335,728	4,078	340,669	2,666	335,665	4,096	348,734	0,362	335,805	4,056
$a_1 = 12 \text{ mm}$ à la position $x_1 = 595 \text{ mm}$ $a_2 = 8 \text{ mm}$ à la position $x_2 = 800 \text{ mm}$											
Mode	Mesurée [50]	Réduction de E	Erreur (%)	Dado <i>et al.</i>	Erreur (%)	Sinha <i>et al.</i>	Erreur (%)	Dimarogonas et Paipetis	Erreur (%)	Ostachowicz et Krawkczuk	Erreur (%)
1	38,437	37,579	2,231	37,882	1,443	37,573	2,249	38,472	0,092	37,590	2,204
2	105,938	103,569	2,236	104,406	1,447	103,544	2,260	106,633	0,656	103,618	2,190
3	212,813	203,089	4,569	204,403	3,952	203,062	4,582	206,685	2,879	203,136	4,547
4	349,063	335,690	3,831	339,073	2,862	335,611	3,854	346,437	0,752	335,805	3,798
$a_1 = 12 \text{ mm}$ à la position $x_1 = 595 \text{ mm}$ $a_2 = 12 \text{ mm}$ à la position $x_2 = 800 \text{ mm}$											
Mode	Mesurée [50]	Réduction de E	Erreur (%)	Dado <i>et al.</i>	Erreur (%)	Sinha <i>et al.</i>	Erreur (%)	Dimarogonas et Paipetis	Erreur (%)	Ostachowicz et Krawkczuk	Erreur (%)
1	37,500	37,576	0,202	37,744	0,650	37,569	0,185	38,253	2,009	37,590	0,240
2	105,625	103,564	1,951	104,222	1,329	103,540	1,974	106,300	0,639	103,618	1,900
3	210,000	203,075	3,298	203,835	2,936	203,049	3,310	205,837	1,982	203,136	3,269
4	345,625	335,653	2,885	337,516	2,346	335,578	2,907	343,604	0,585	335,805	2,841

**Tableau. 8-** Comparaison entre les fréquences propres mesurées et celles calculées pour les modèles de poutres endommagées encastées-encastées en Aluminium dans le cas de deux fissures.

Dans le cas d'une seule fissure, et pour comparer les fréquences propres obtenues analytiquement pour les cinq modèles de poutres endommagées à celles mesurées expérimentalement [50], nous avons utilisé trois poutres différentes. Cette étude a été faite en faisant varier la profondeur de la fissure, la position de la fissure, la longueur des poutres, le nombre d'éléments, le type de matériau et les conditions aux limites des poutres.

Nous avons constaté, dans le cas d'une poutre flexible-libre en Aluminium, que les fréquences calculées pour le modèle de Dimarogonas et Paipetis [53] sont relativement satisfaisantes comparativement aux fréquences mesurées avec une erreur moyenne de 4,12 %, mais, en revanche,

celles obtenues pour les quatre autres modèles sont très satisfaisantes avec une erreur moyenne qui varie entre 1,59 à 2,4 %. Dans le cas d'une poutre encastree-encastree en Aluminium, toutes les frequences propres obtenues pour les cinq modèles sont relativement proches aux frequences réelles mesurées avec une erreur comprise entre 3,559 et 4,653 %. Quant à une poutre encastree-encastree en Acier, il parait que le modèle de Dimagoronas et Paipetis [53] donne, encore une fois, une approximation pas très satisfaisante avec une erreur de 3,268 %, quant aux quatre autres modèles donne des résultats très satisfaisant avec une erreur moyenne qui varie entre 1,586 à 2,225 %.

Dans le cas de deux fissures, nous nous sommes limités à étudier uniquement une poutre encastree-encastree en Aluminium où nous avons introduit deux fissures dont le seul paramètre qui varie étant la profondeur de la deuxième fissure (voir tableau 8). Nous avons constaté que toutes les frequences propres calculées pour tous les modèles sont très satisfaisantes avec une erreur moyenne comprise entre 1,177 et 2,973 %.

### **V.7 Etude comparative des modèles poutres endommagées en termes de méthodes d'identification d'endommagements :**

Dans cette section, nous allons faire une étude comparative entre les modèles poutres endommagées appliqués sur trois méthodes d'identification d'endommagements. Ces modèles en question sont :

- Le modèle de J. K. Sinha *et al.* [50]
- Le modèle de M.H.F. Dado *et al.* [51]
- Le modèle d'Ostachowicz et Krawczuk. [52]
- Le modèle de Dimarogonas et Paipetis. [53]
- Et enfin celui qui est basé sur la réduction de la raideur  $E$  d'un élément poutre.

Les méthodes à appliquer avec ces modèles sont celles développées dans le chapitre IV, à savoir :

- La méthode basée sur la forme des courbures modales (FCM).
- La Méthode basée sur la fonction de la réponse fréquentielle (FRF) que nous avons amélioré.
- La méthode basée sur les forces résiduelles modales (FRM).

Cette étude se fait selon trois cas de conditions aux limites et pour chacun de ces cas, nous avons fait varier le nombre d'élément de la poutre, le nombre de fissures, la profondeur et la position des fissures.

**Remarque :**

Comme il est signalé précédemment, dans ce présent mémoire, ne nous intéressons qu'à l'identification d'endommagements de niveau 1, c'est-à-dire qu'à la détection de la présence d'un endommagement. Pour cela, lors de la programmation de ces méthodes d'identification sous MATLAB, nous nous sommes arrangés à ce que la détection des éléments fissurés se fait automatiquement en introduisant uniquement la position et la profondeur des fissures.

Dans le cas des méthodes FRF et FRM, la représentation est en éléments. Quant à la méthode FCM la représentation est nodale.

**V.7.1 Cas d'une seule fissure :**

Dans le cas d'une seule fissure, les cinq modèles de poutres endommagées étudiés sont discrétisés en 27 éléments, mais dans le cas de deux fissures, que nous verrons par suite, le nombre d'éléments change. Tout au long de cette étude, les propriétés géométriques et mécaniques de chacun des modèles sont les mêmes que la poutre 2 (voir tableau.1). Comme nous l'avons signalé précédemment, nous allons étudier ces modèles selon trois cas de conditions aux limites à savoir :

- Poutre endommagée **encastrée-libre** en Aluminium.
- Poutre endommagée **encastrée-encastrée** en Aluminium.
- Poutre endommagée en Aluminium **simplement appuyée** sur ces extrémités.

Pour chaque cas de conditions aux limites, nous avons fait varier la profondeur et la position de la fissure et pour chaque variation, nous avons appliqué les trois méthodes d'identification d'endommagements sur les modèles de poutres endommagées.

**V.7.1.1 Poutre endommagée encastrée-libre en Aluminium :****V.7.1.1.a Variation de la profondeur de la fissure :**

Dans cette partie, La position  $x = 596 \text{ mm}$  de la fissure reste fixe et la profondeur  $a$  varie de 4 à 12  $\text{mm}$ . Les figures **V.6**, **V.7** et **V.8**, ci-après, montrent ce scénario en appliquant les trois méthodes d'identifications d'endommagements sur les cinq modèles de fissuration.

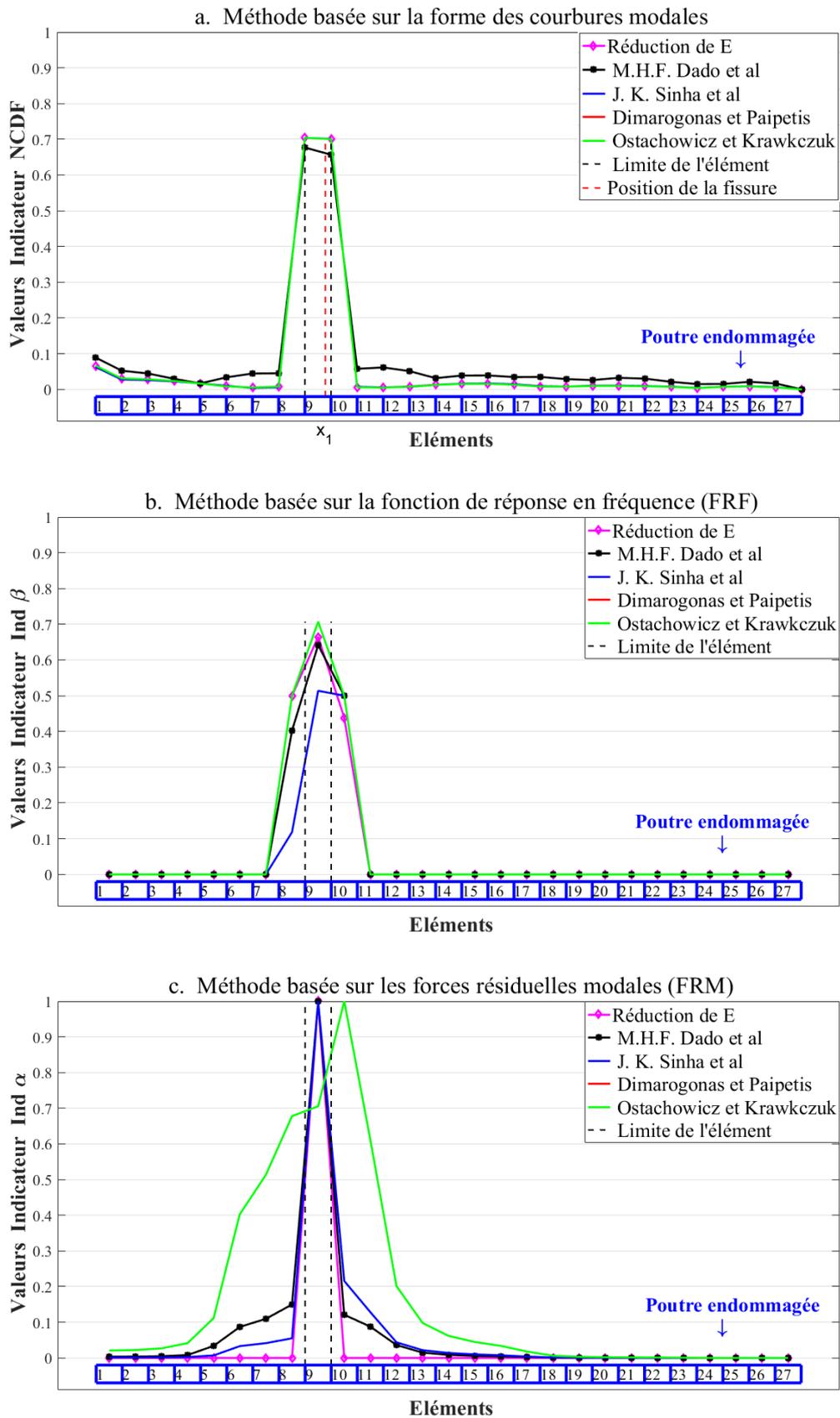


Figure V.6- Elément endommagé 9, fissure de profondeur  $a = 4 \text{ mm}$  à la position  $x = 596 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastée-libre en Aluminium.

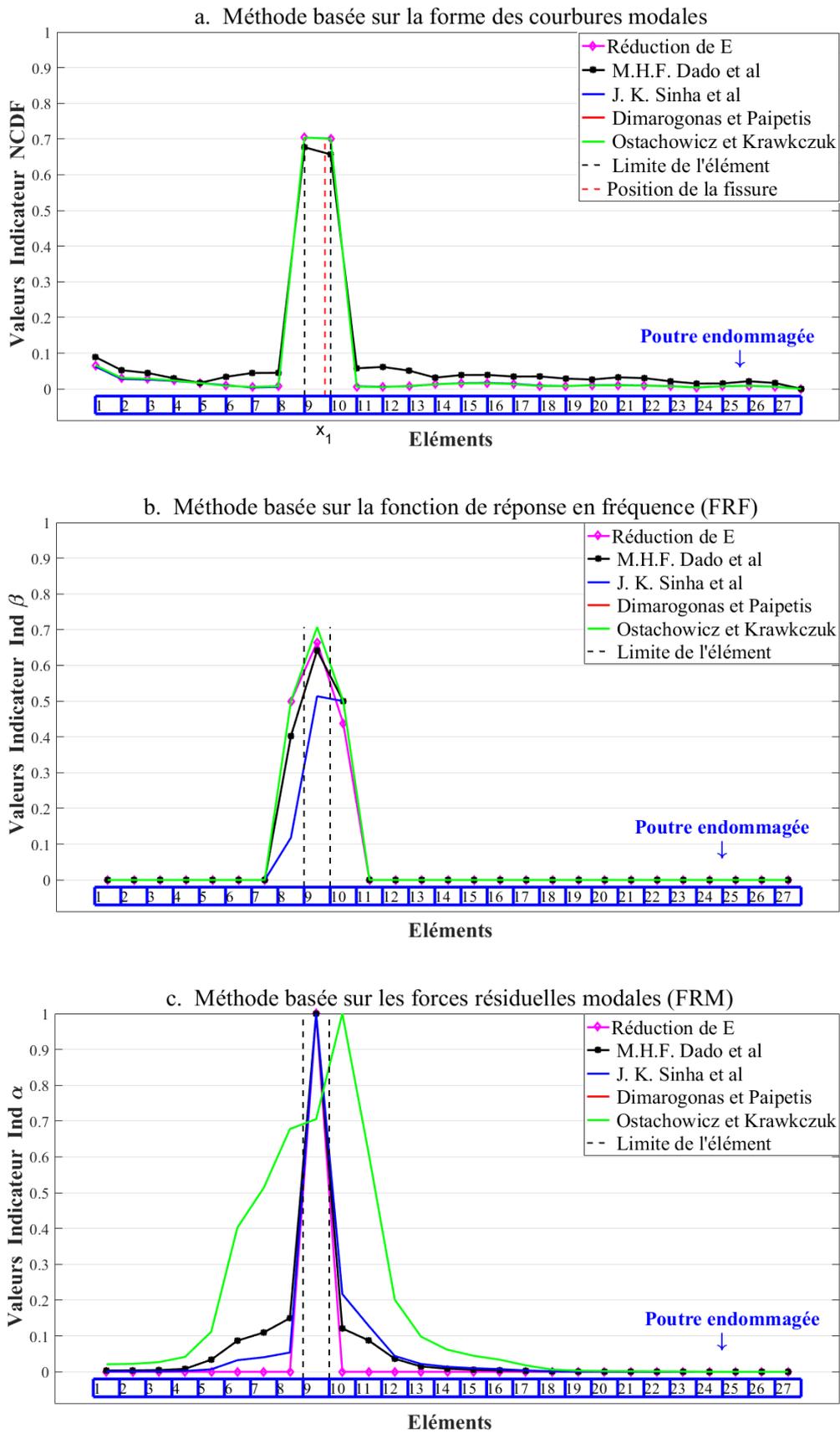


Figure V.7- Elément endommagé 9, fissure de profondeur  $a = 8 \text{ mm}$  à la position  $x = 596 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastée-libre en Aluminium.

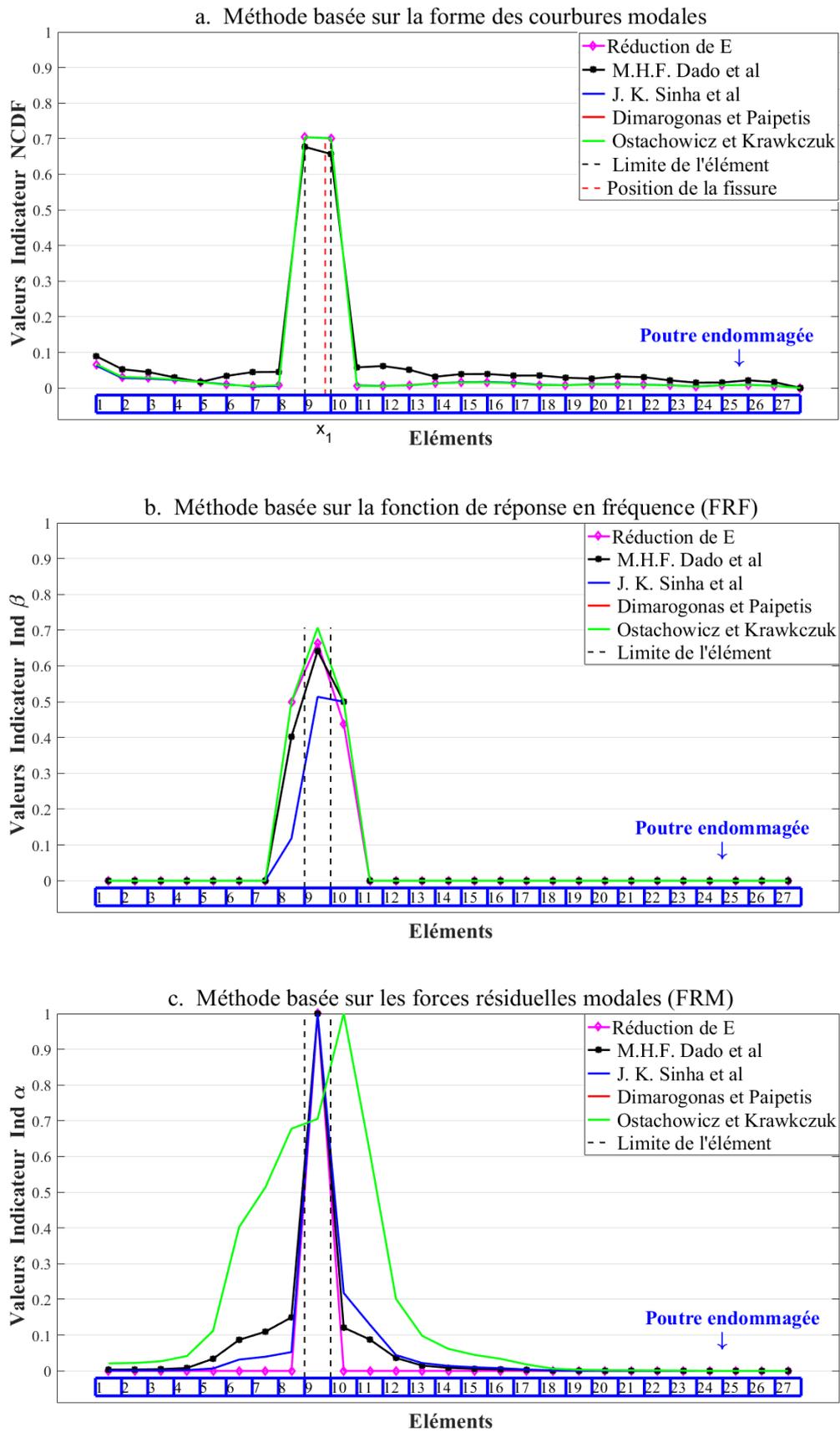
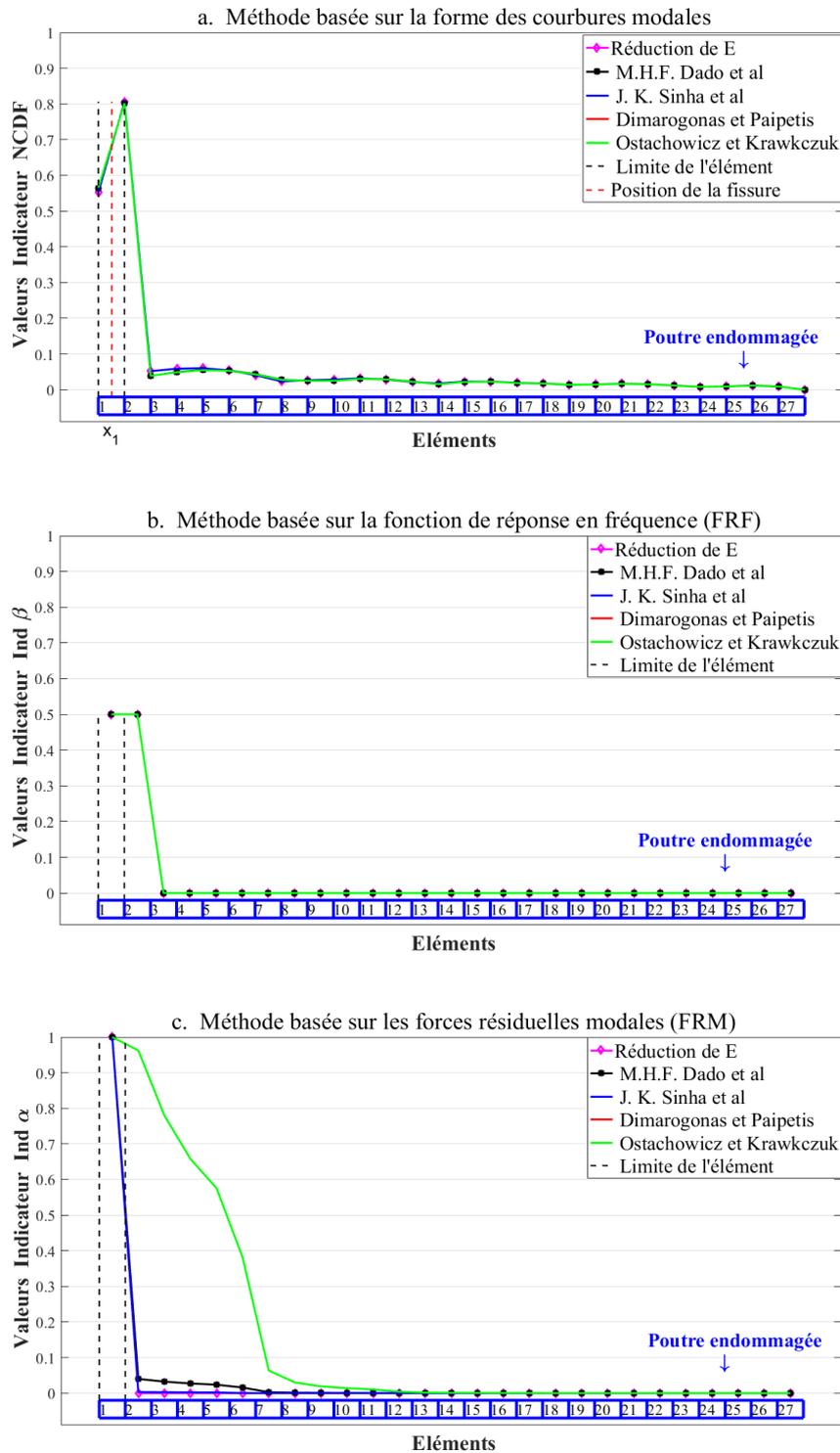


Figure V.8- Elément endommagé 9, fissure de profondeur  $a = 12 \text{ mm}$  à la position  $x = 596 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastree-libre en Aluminium.

**V.7.1.1.b Variation de la position de la fissure :**

Contrairement à l'étude précédente, c'est la profondeur  $a = 8 \text{ mm}$  qui reste fixe et nous avons fait varier la position  $x$  de la fissure de 35 à 1798 mm. Les figures V.9, V.10 et V.11 montrent cette variation.



**Figure V.9-** Elément endommagé 1, fissure de profondeur  $a = 8 \text{ mm}$  à la position  $x = 35 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastree-libre en Aluminium.

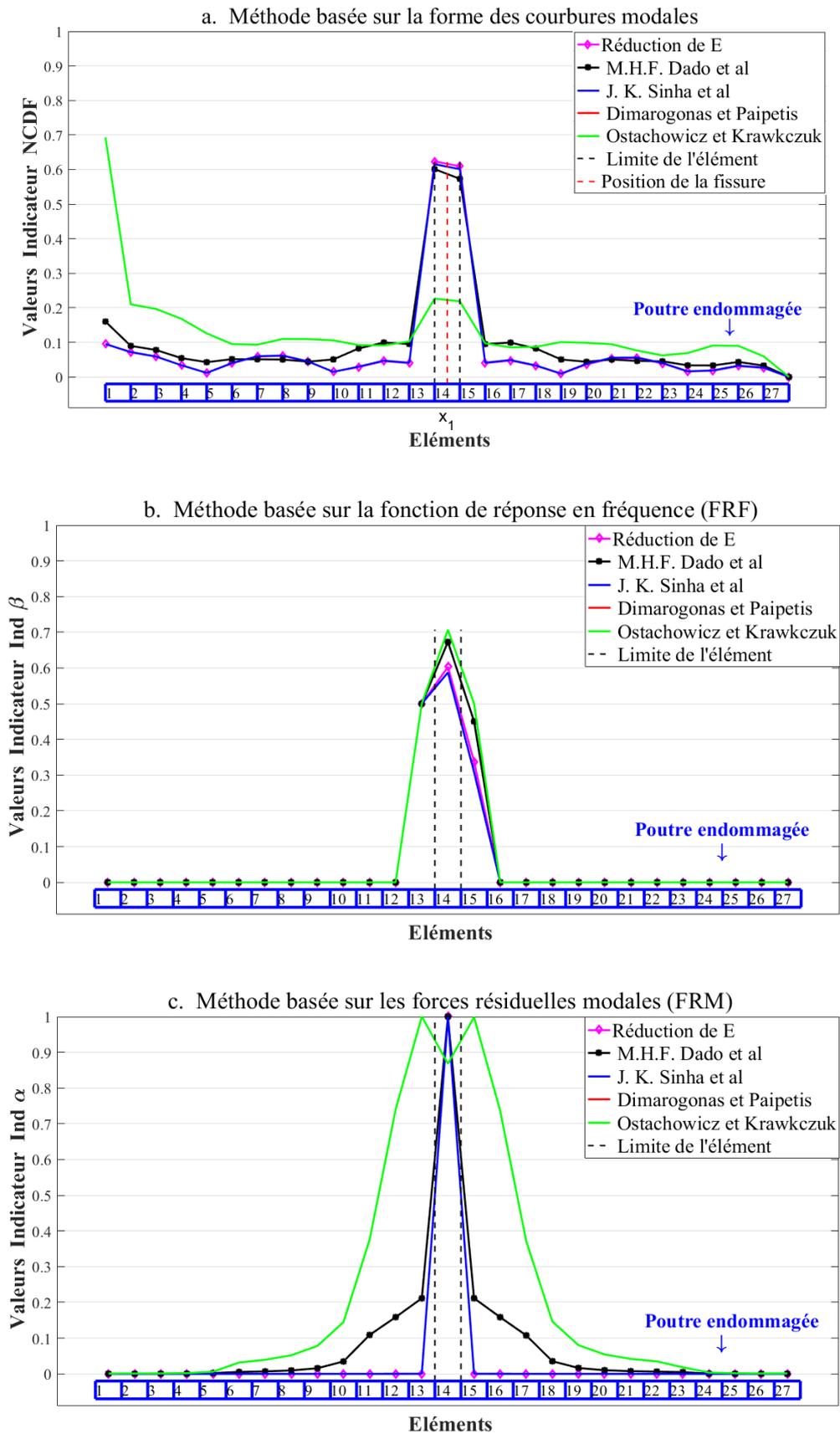
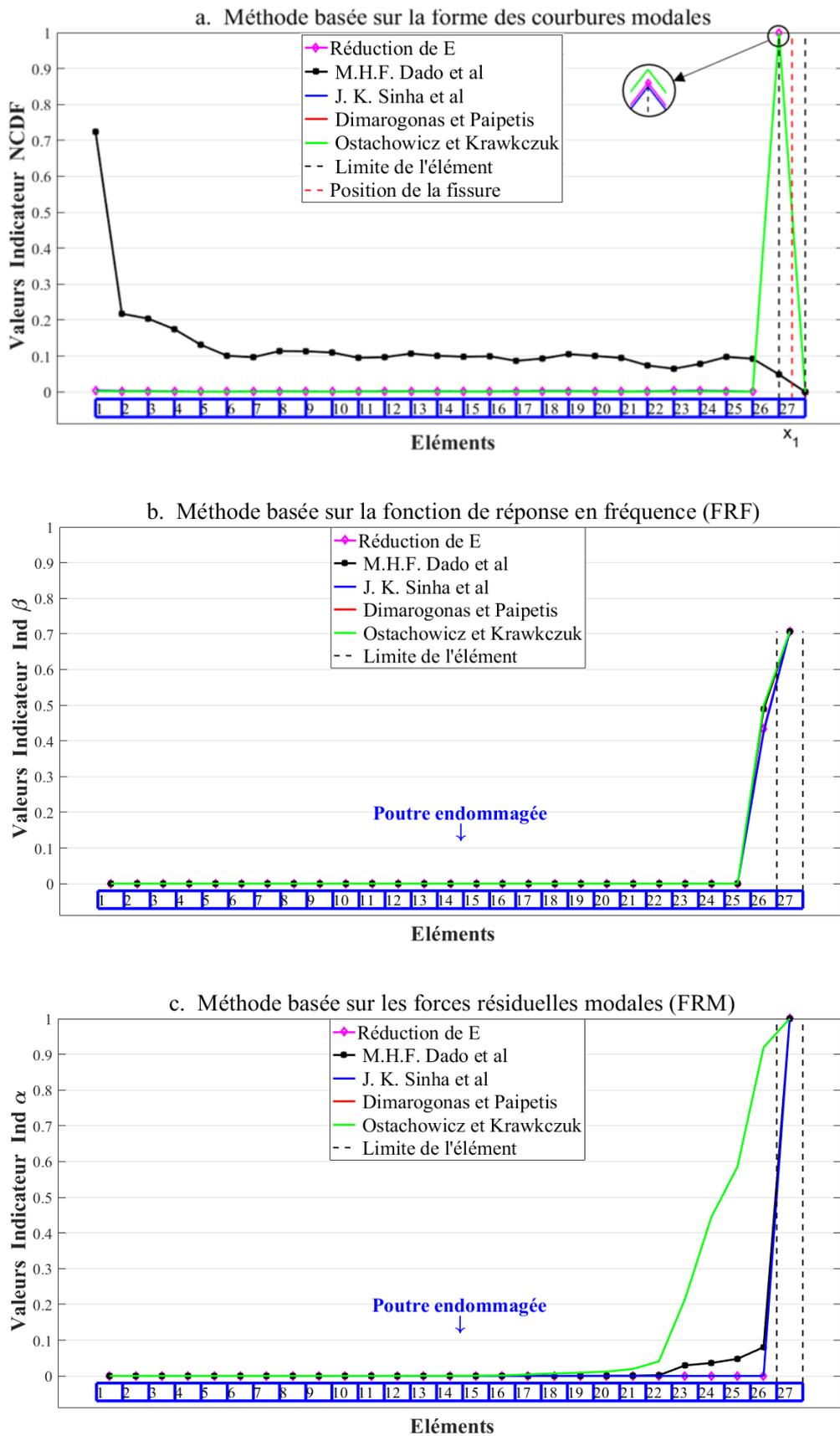


Figure V.10- Elément endommagé 14, fissure de profondeur  $a = 8 \text{ mm}$  à la position  $x = 916 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastée-libre en Aluminium.



**Figure V.11-** Elément endommagé 27, fissure de profondeur  $a = 8 \text{ mm}$  à la position  $x = 1798 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastée-libre en Aluminium.

Dans le cas d'une poutre en Aluminium avec des conditions aux limites **encastrée-libre**, et selon les résultats obtenus à travers les figures précédentes, nous pouvons constater ce qui suit :

- La variation de la profondeur de la fissure qui est comprise entre 16 à 48 % de la hauteur de la poutre ne perturbe pas la détection de la présence d'un endommagement sur les modèles de fissuration étudiés, en revanche, elle influe légèrement sur la valeur de l'indicateur utilisé.
- Comme il est montré sur les figures **V.6.c**, **V.7.c** et **V.8.c**, l'application de la méthode des forces résiduelles modales (FRM) sur le modèle d'Ostachowicz et Krawkczuk s'avère imprécise, puisque le pic indiquant l'élément endommagé se décale d'un élément, ce qui peut être considéré comme un pic trompeur. De plus, comme il est illustré sur la figure **V.10.c**, l'apparition de deux pics trompeurs, alors que normalement il ne devrait apparaître qu'un seul pic, peut nous induire en erreur lors de la détection. A noter que la seule détection réussie est celle de la fissure située aux environs de l'extrémité libre de la poutre (figure **V.11.c**). Cela nous permet de conclure que l'application de la méthode des forces résiduelles modales (FRM) sur le modèle de fissuration d'Ostachowicz et Krawkczuk, dans le cas d'une poutre encastrée-libre en Aluminium, n'est pas recommandée.

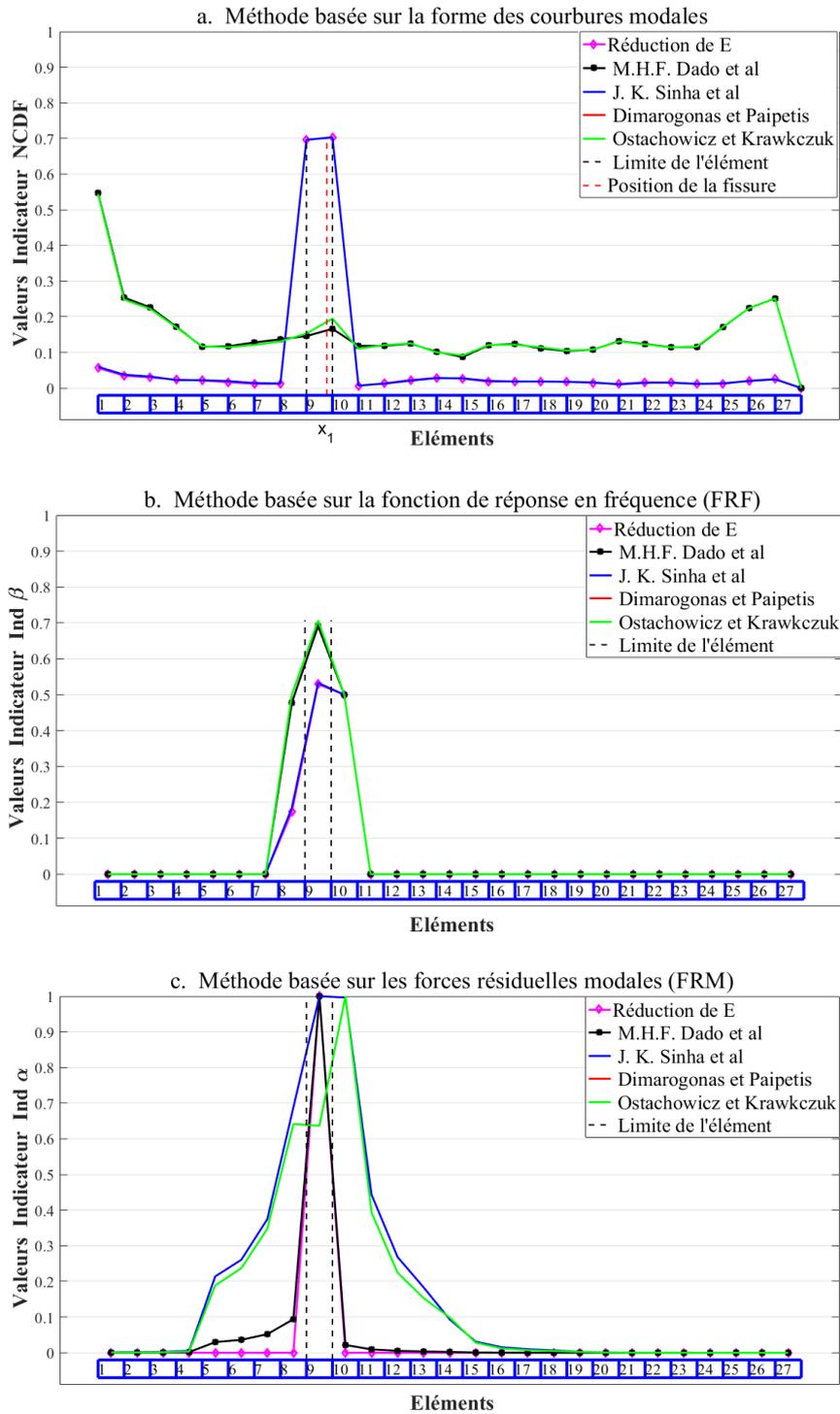
A l'exception du modèle d'Ostachowicz et Krawkczuk, cette méthode est très efficace sur les quatre autres modèles de fissuration et cela pour n'importe quelle position de la fissure le long de la poutre.

- Lorsque la fissure est proche de l'extrémité encastrée de la poutre, la détection de la présence de cette fissure en appliquant la méthode de la fonction de la réponse fréquentielle (FRF) sur les cinq modèles de fissuration n'est pas réussie, car le sommet plat des pics devrait se situer exactement au-dessus de l'élément endommagé (figure **V.9.b**). En revanche, lorsque la fissure s'éloigne de l'extrémité encastrée, cette méthode est très efficace sur tous les modèles et pour n'importe quelle position de la fissure le long de la poutre.
- La localisation d'un élément endommagé en appliquant la méthode de la forme des courbures modales (FCM) sur les cinq modèles de fissuration est très efficace, sauf pour une fissure située aux environs de l'extrémité libre de la poutre, cette méthode devient imprécise car les pics qui indiquent la présence d'un endommagement sont localisés au niveau d'un nœud, alors que la fissure est située au milieu de l'élément fissuré (figure **V.11.a**).

**V.7.1.2 Poutre endommagée encastée-encastée en Aluminium :**

Dans cette partie, nous avons effectué la même procédure que précédemment, c'est-à-dire, la même poutre et la même variation de la profondeur et de la position de la fissure, mais, les conditions aux limites changent.

**V.7.1.2.a Variation de la profondeur de la fissure :**



**Figure V.12-** Elément endommagé 9, fissure de profondeur  $a = 4 \text{ mm}$ , position  $x = 596 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastée-encastée en Aluminium.

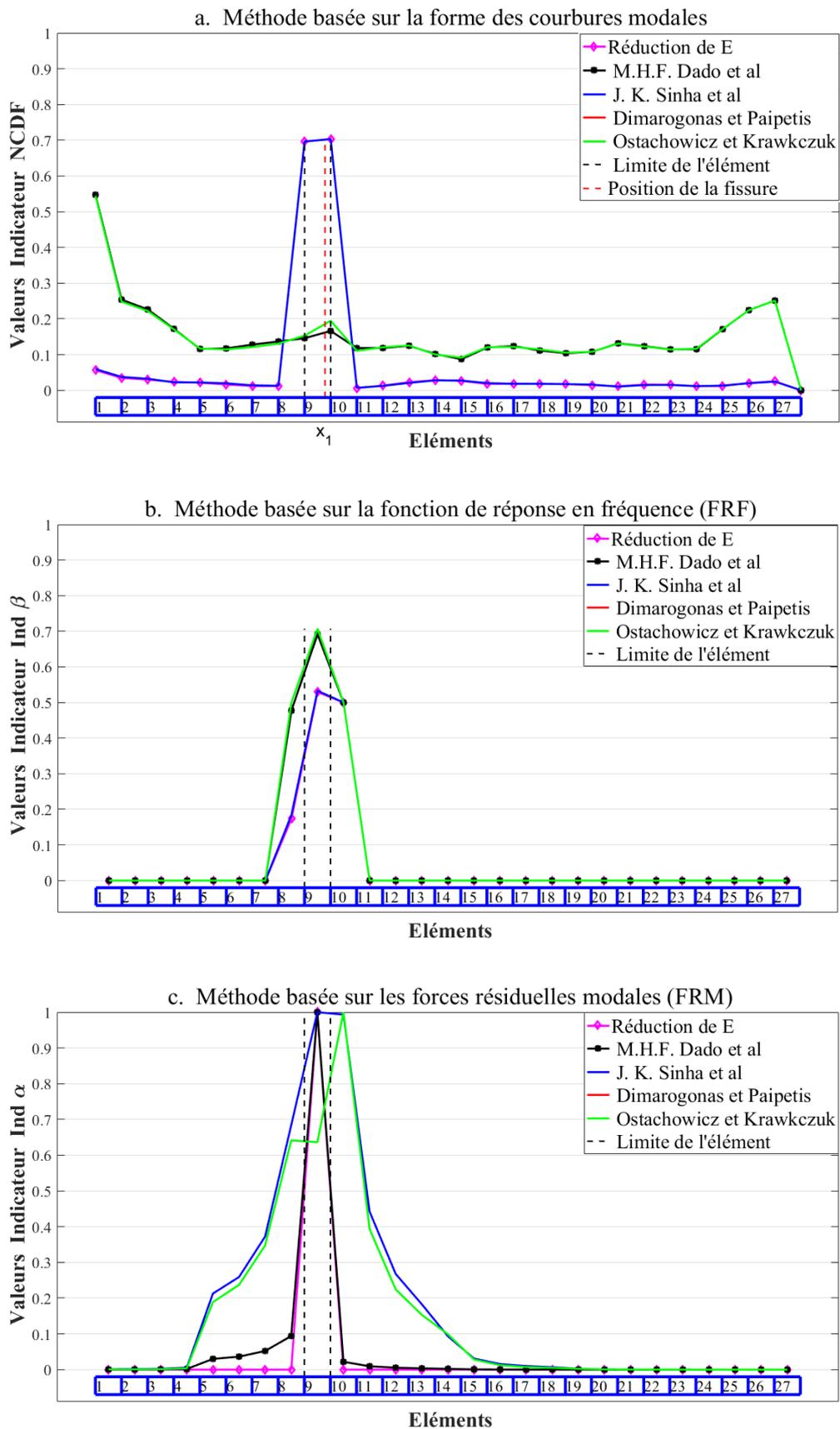


Figure V.13- Élément endommagé 9, fissure de profondeur  $a = 8 \text{ mm}$  à la position  $x = 596 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastée-encastée en Aluminium.

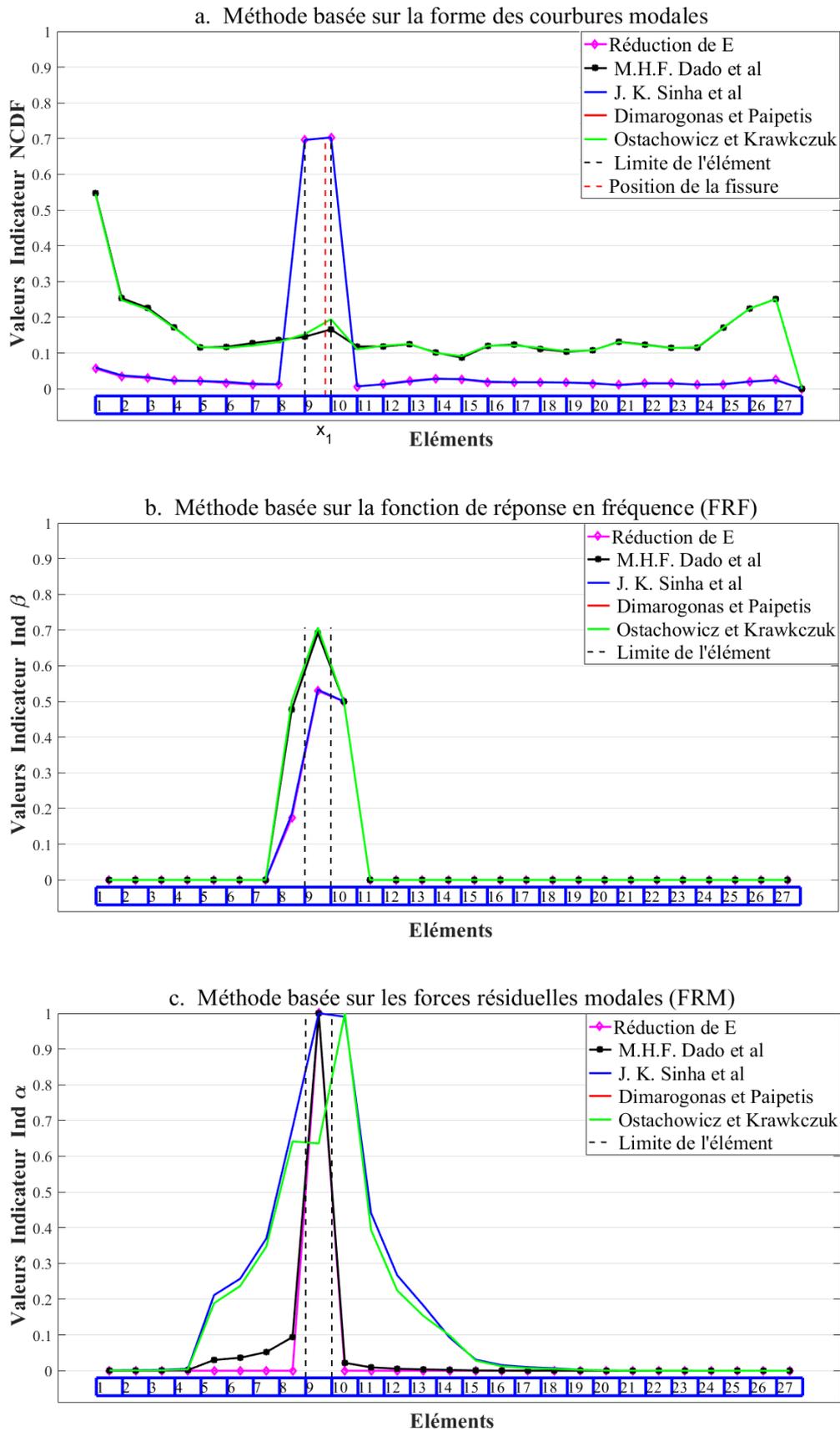


Figure V.14- Elément endommagé 9, fissure de profondeur  $a = 12 \text{ mm}$  à la position  $x = 596 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastée-encastée en Aluminium.

V.7.1.2.b Variation de la position de la fissure :

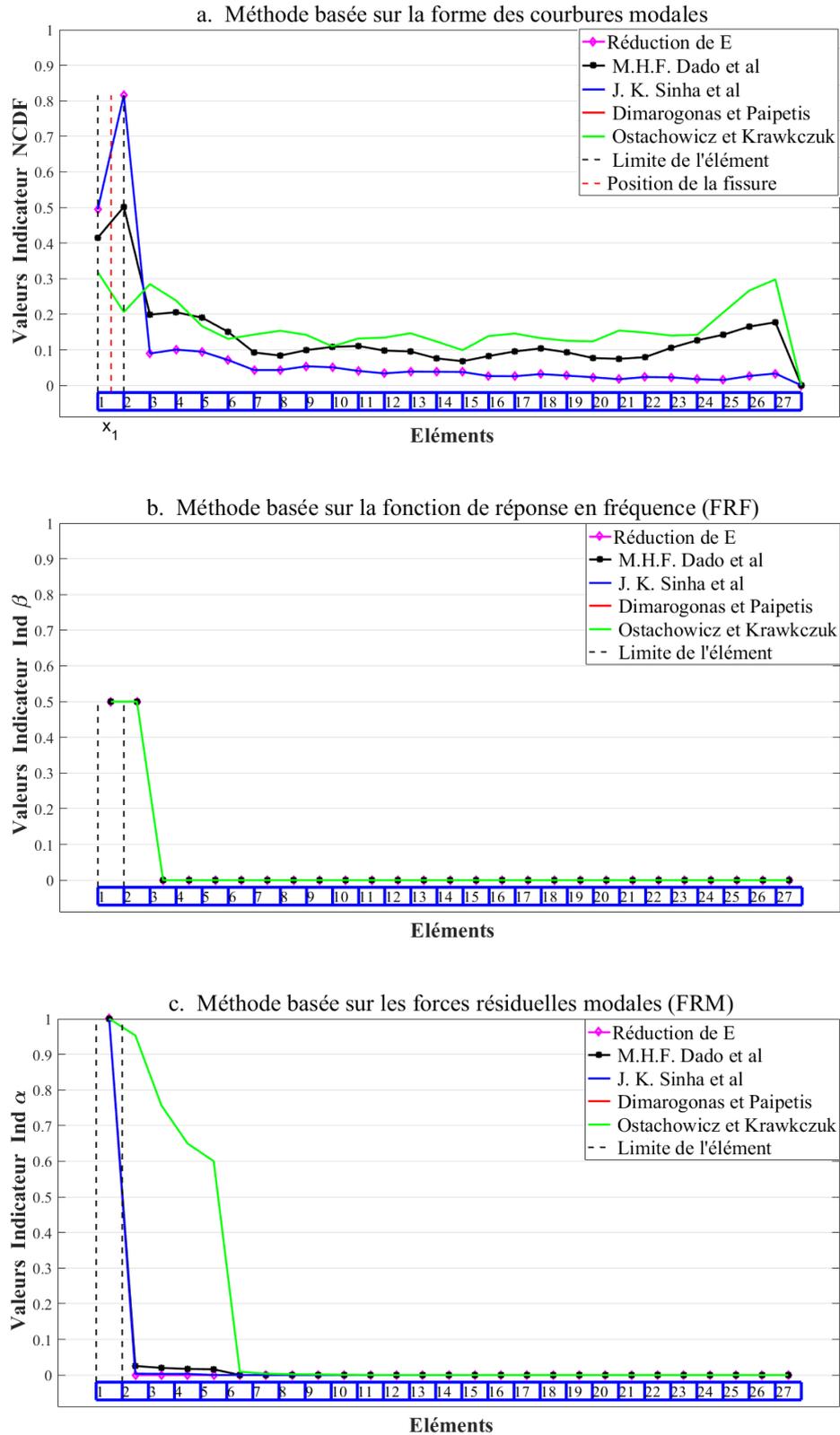
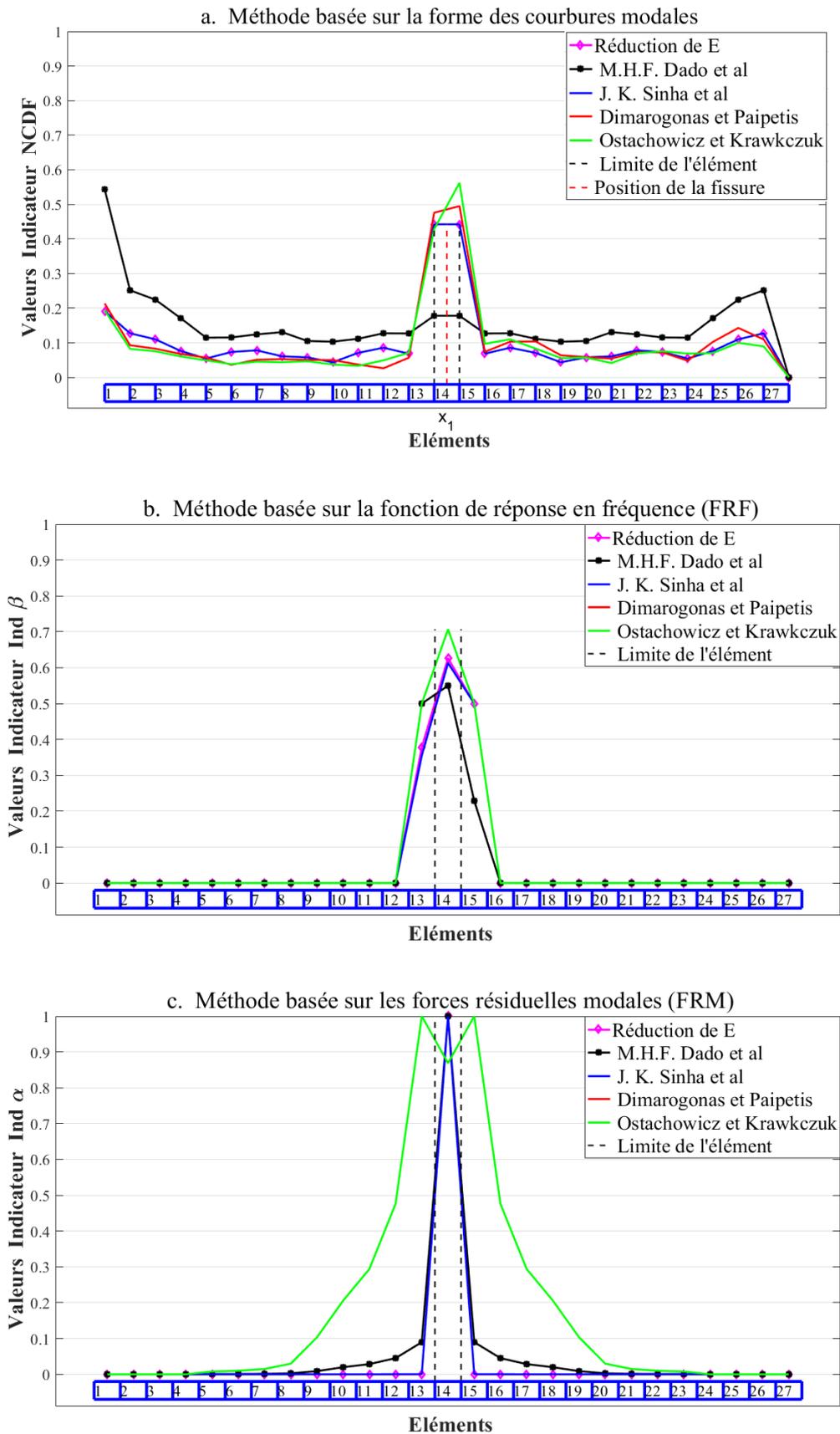


Figure V.15- Elément endommagé 1, fissure de profondeur  $a = 8 \text{ mm}$  à la position  $x = 35 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastrée-encastrée en Aluminium.



**Figure V.16-** Elément endommagé 14, fissure de profondeur  $a = 8 \text{ mm}$ , position  $x = 916 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastée-encastée en Aluminium.

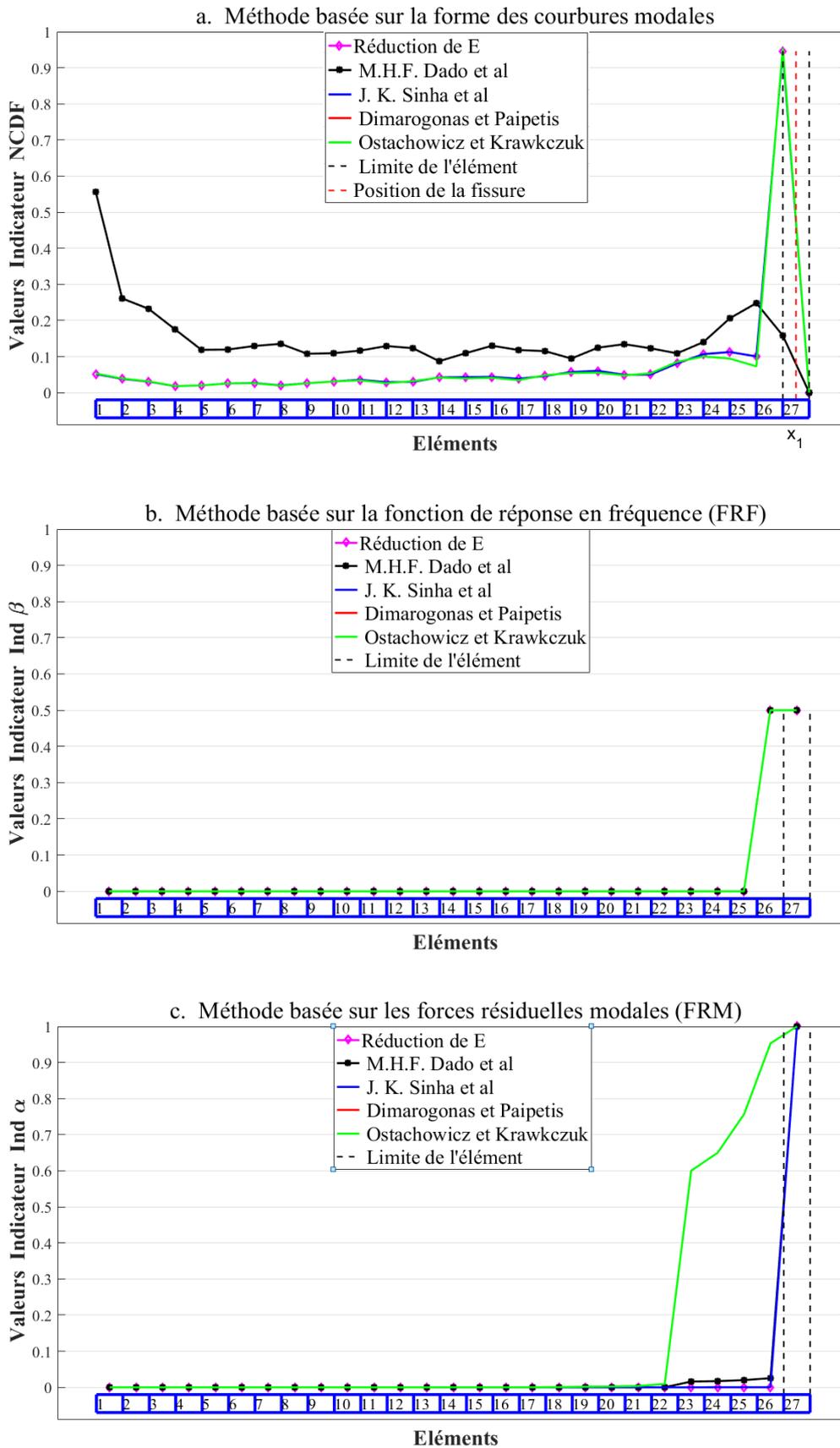


Figure V.17- Élément endommagé 27, fissure de profondeur  $a = 8 \text{ mm}$ , position  $x = 1798 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastée-encastée en Aluminium.

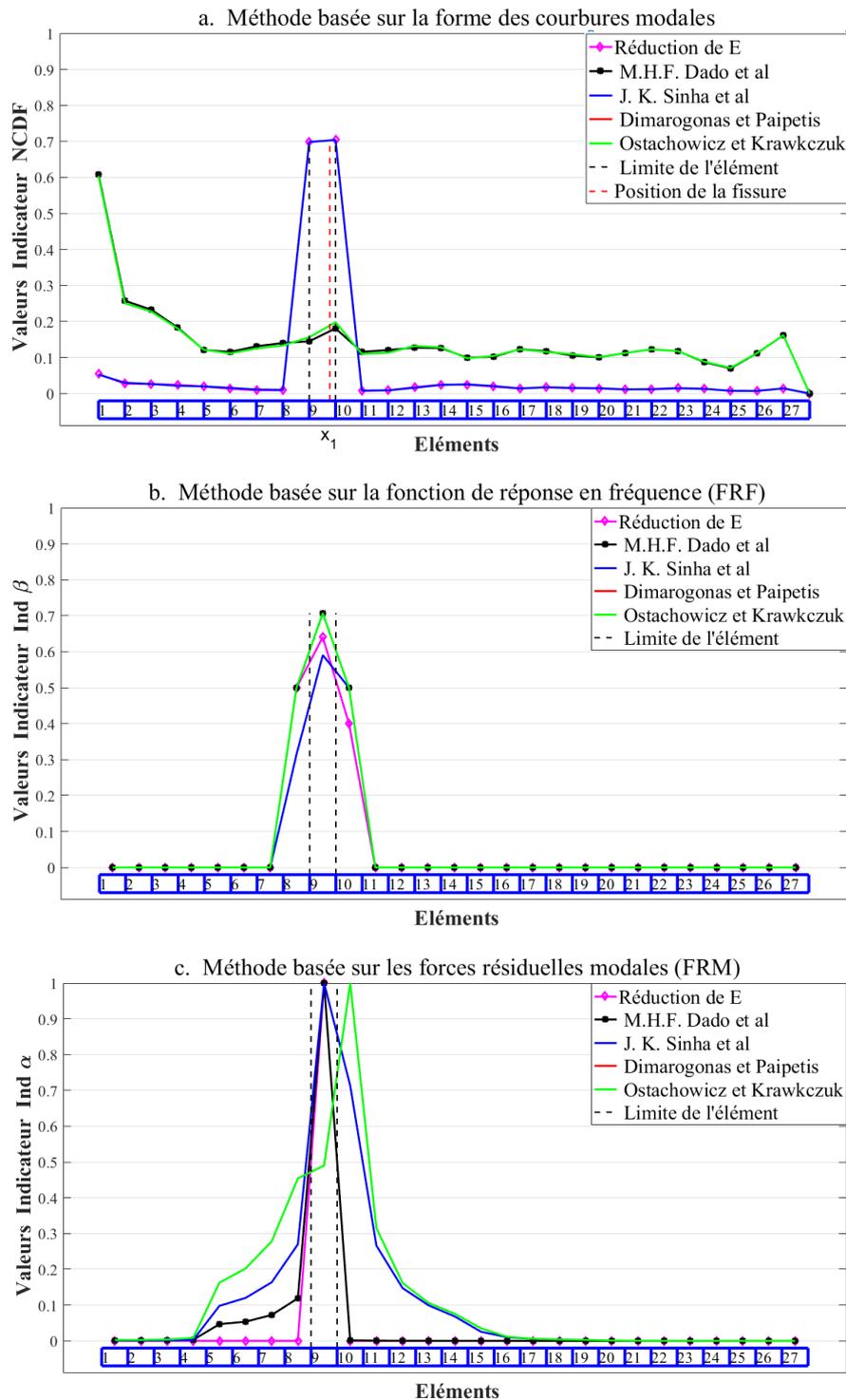
Dans le cas de la poutre **encastrée-encastrée** en Aluminium étudiée précédemment, nous pouvons constater, selon les résultats obtenus, ce qui suit :

- Comme dans le cas de la poutre encastrée-libre étudiée précédemment, la variation de la profondeur de la fissure qui est comprise entre 16 à 48 % de la hauteur de la poutre ne perturbe pas la détection de la présence d'un endommagement sur les modèles de fissuration. En revanche, elle influe légèrement sur la valeur de l'indicateur utilisé.
- La détection de la présence d'un endommagement en appliquant la méthode de la forme des courbures modales (FCM) sur le modèle de fissuration de M. H. F. Dado *et al.*, n'est pas très satisfaisante, car, la seule détection qui a été réalisée est lorsque la fissure se situe aux environs de l'extrémité encastrée gauche de la poutre, les figures **V.15.a**, **V.16.a** et **V.17.a** confirment ce constat. L'application de cette méthode n'est pas appropriée pour le modèle d'Ostachowicz et Krawczuk car la seule localisation d'un élément endommagé qui a réussi est lorsque la fissure se situe aux environs du milieu de la poutre. Les figures **V.15.a**, **V.16.a** et **V.17.a** montrent encore une fois le problème. A part le modèle de M. H. F. Dado *et al.* et celui d'Ostachowicz et Krawczuk, l'application de la méthode de la forme des courbures modales (FCM) sur les trois autres modèles de fissuration est très efficace. Cette méthode devient imprécise pour une fissure située aux environs de l'extrémité libre de la poutre, car, les pics qui indiquent la présence d'un endommagement sont situés exactement au niveau d'un nœud, alors que la fissure est située au milieu de l'élément fissuré (figure **V.17.a**).
- Comme dans le cas de la poutre encastrée-libre étudiée précédemment, il paraît que la méthode de la fonction de la réponse fréquentielle (FRF) ne détecte pas la présence d'un endommagement lorsque celui-ci est situé aux environs d'une extrémité encastrée de la poutre, et cela pour tous les modèles de fissuration. Cette remarque a été constatée sur les deux figures **V.15.b** et **V.17.b**. Par contre, cette méthode devient très efficace lorsque l'endommagement s'éloigne des deux extrémités de la poutre.
- Comme il est montré sur les figures **V.12.c**, **V.13.c** et **V.14.c**, l'application de la méthode des forces résiduelles modales (FRM) sur le modèle d'Ostachowicz et Krawczuk s'avère imprécise, car, le pic indiquant l'élément endommagé se décale d'un élément, ce qui peut être considéré comme un pic trompeur. De plus, comme il est illustré sur la figure **V.16.c**, l'apparition de deux pics trompeurs, or normalement il ne devrait apparaître qu'un seul pic, ce qui peut nous induire en erreur lors de l'opération de détection.

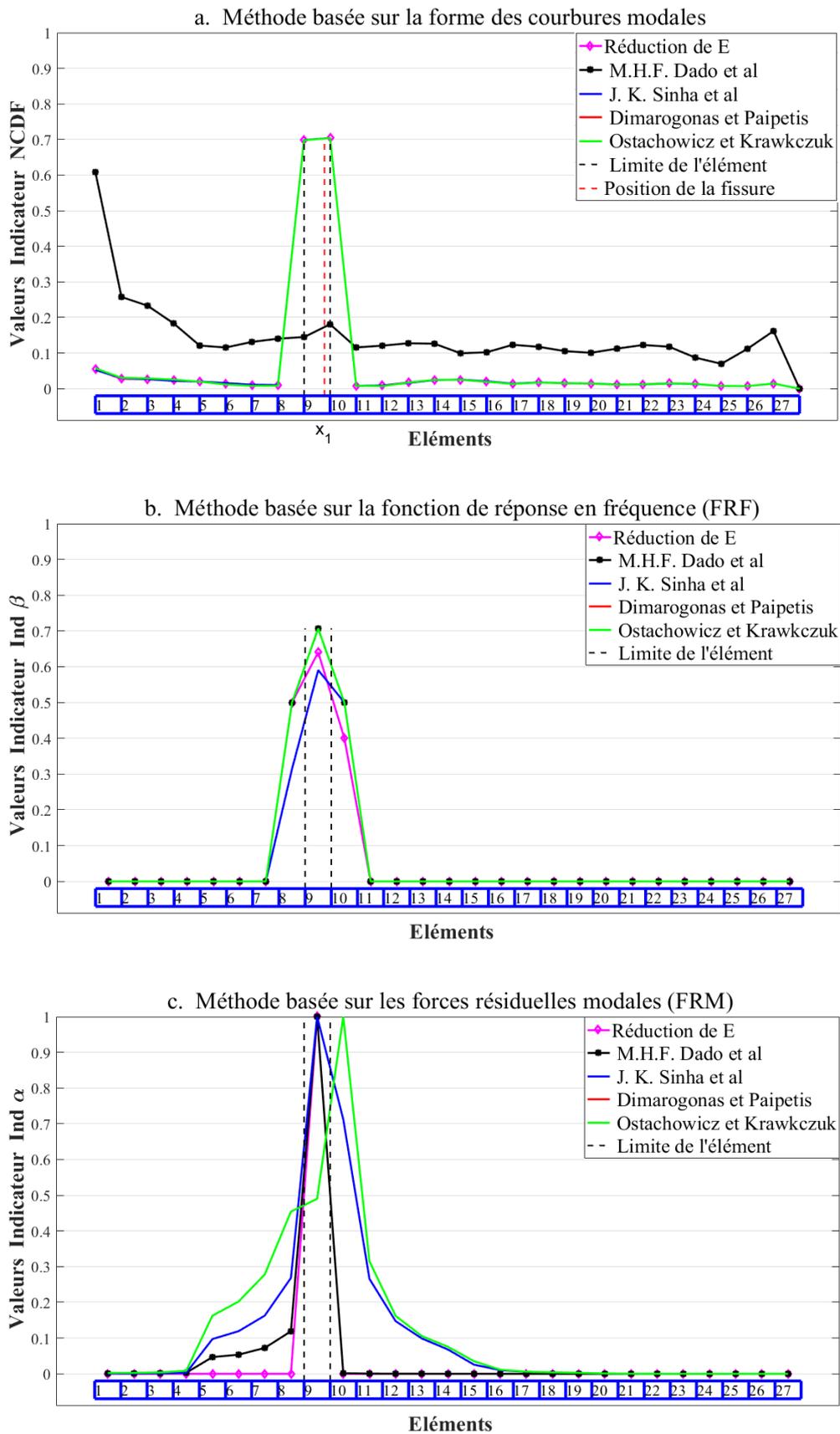
**V.7.1.3 Poutre endommagée en Aluminium simplement appuyée :**

Dans cette dernière partie, dans le cas d'une seule fissure, nous avons encore une fois utilisé les mêmes variations de profondeur et de position de la fissure que précédemment, mais, nous avons fait changer les conditions aux limites dont la poutre est simplement appuyée sur ces deux extrémités.

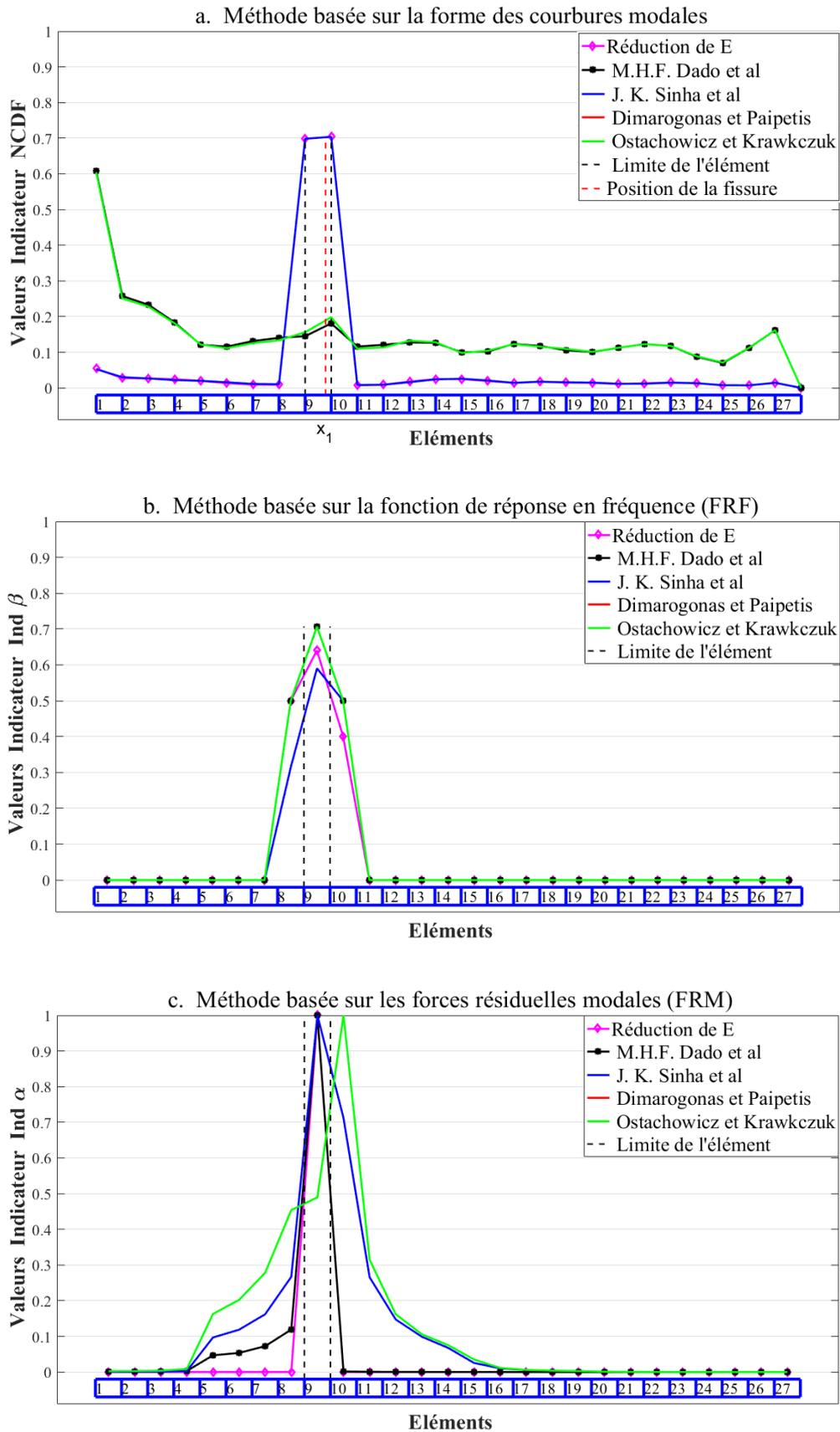
**V.7.1.3.a Variation de la profondeur de la fissure :**



**Figure V.18-** Élément endommagé 9, fissure de profondeur  $a = 4 \text{ mm}$ , position  $x = 596 \text{ mm}$ , cas d'une poutre simplement appuyée en Aluminium.



**Figure V.19-** Elément endommagé 9, fissure de profondeur  $a = 8 \text{ mm}$ ,  $x = 596 \text{ mm}$ , cas d'une poutre simplement appuyée en Aluminium.



**Figure V.20-** Elément endommagé 9, fissure de profondeur  $a = 12 \text{ mm}$ , position  $x = 596 \text{ mm}$ , cas d'une poutre simplement appuyée en Aluminium.

V.7.1.3.b Variation de la position de la fissure :

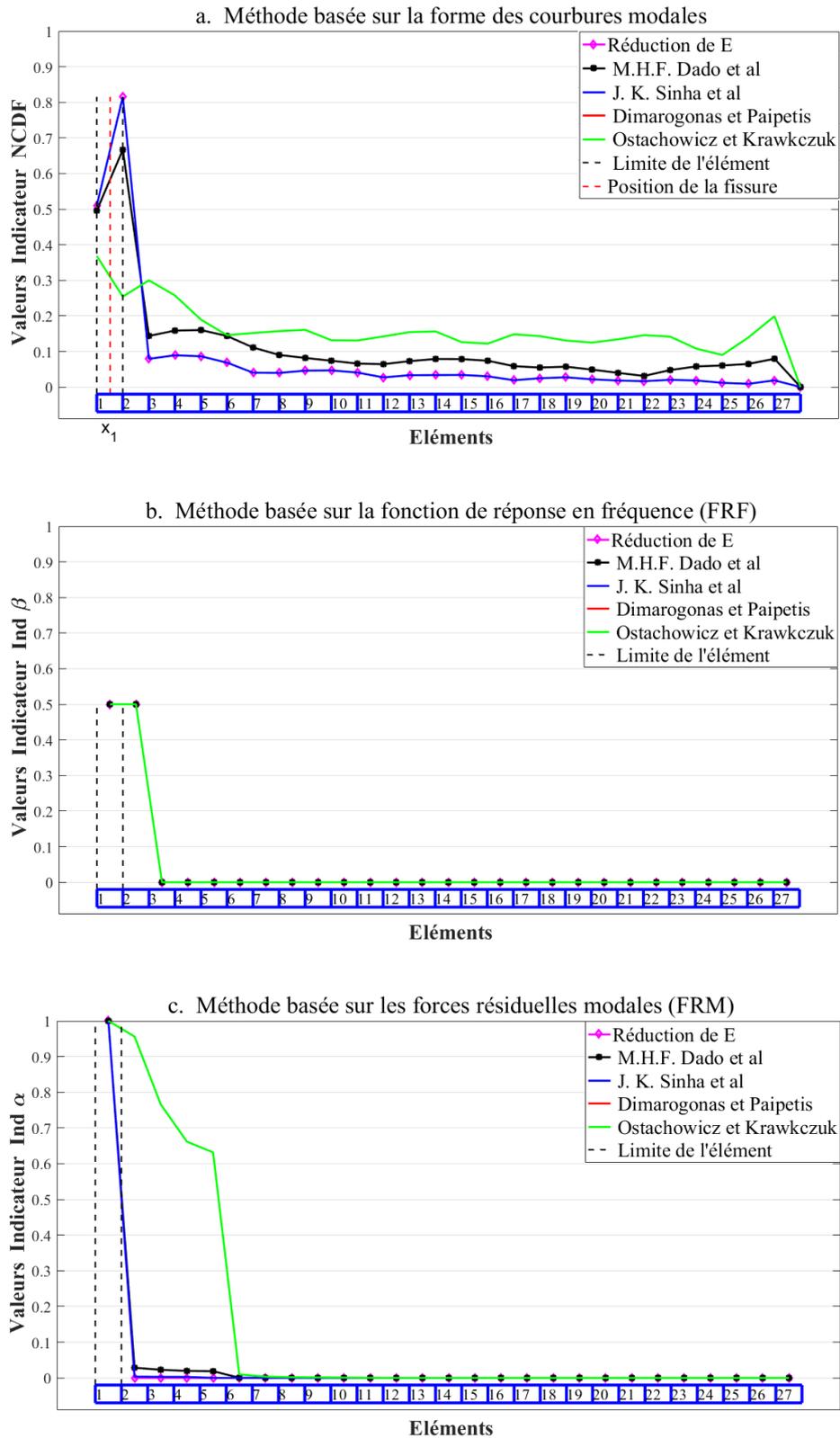


Figure V.21- Elément endommagé 1, fissure de profondeur  $a = 8 \text{ mm}$ , position  $x = 35 \text{ mm}$ , cas d'une poutre simplement appuyée en Aluminium.

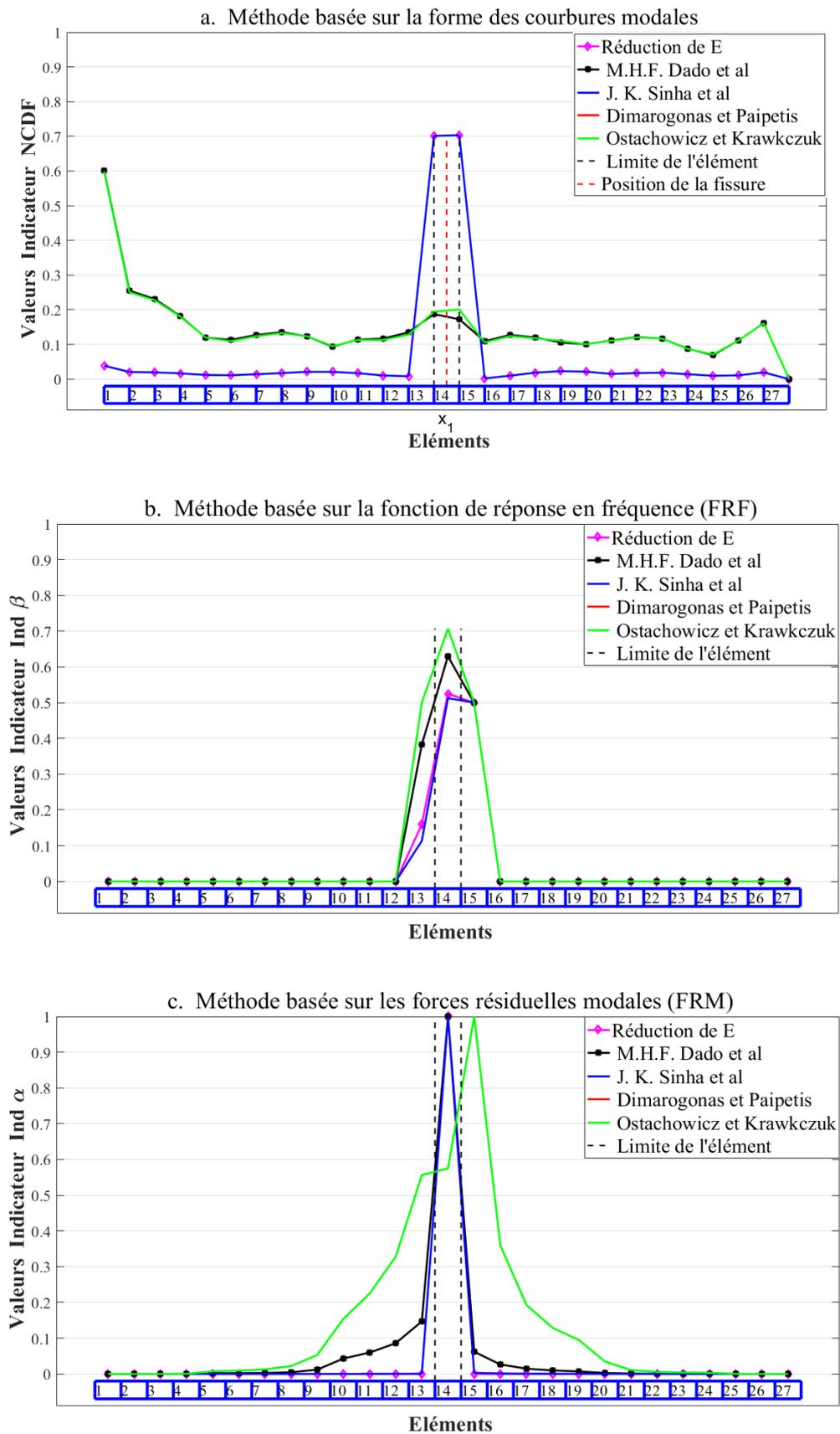


Figure V.22- Elément endommagé 14, fissure de profondeur  $a = 8 \text{ mm}$ , position  $x = 916 \text{ mm}$ , cas d'une poutre simplement appuyée en Aluminium.

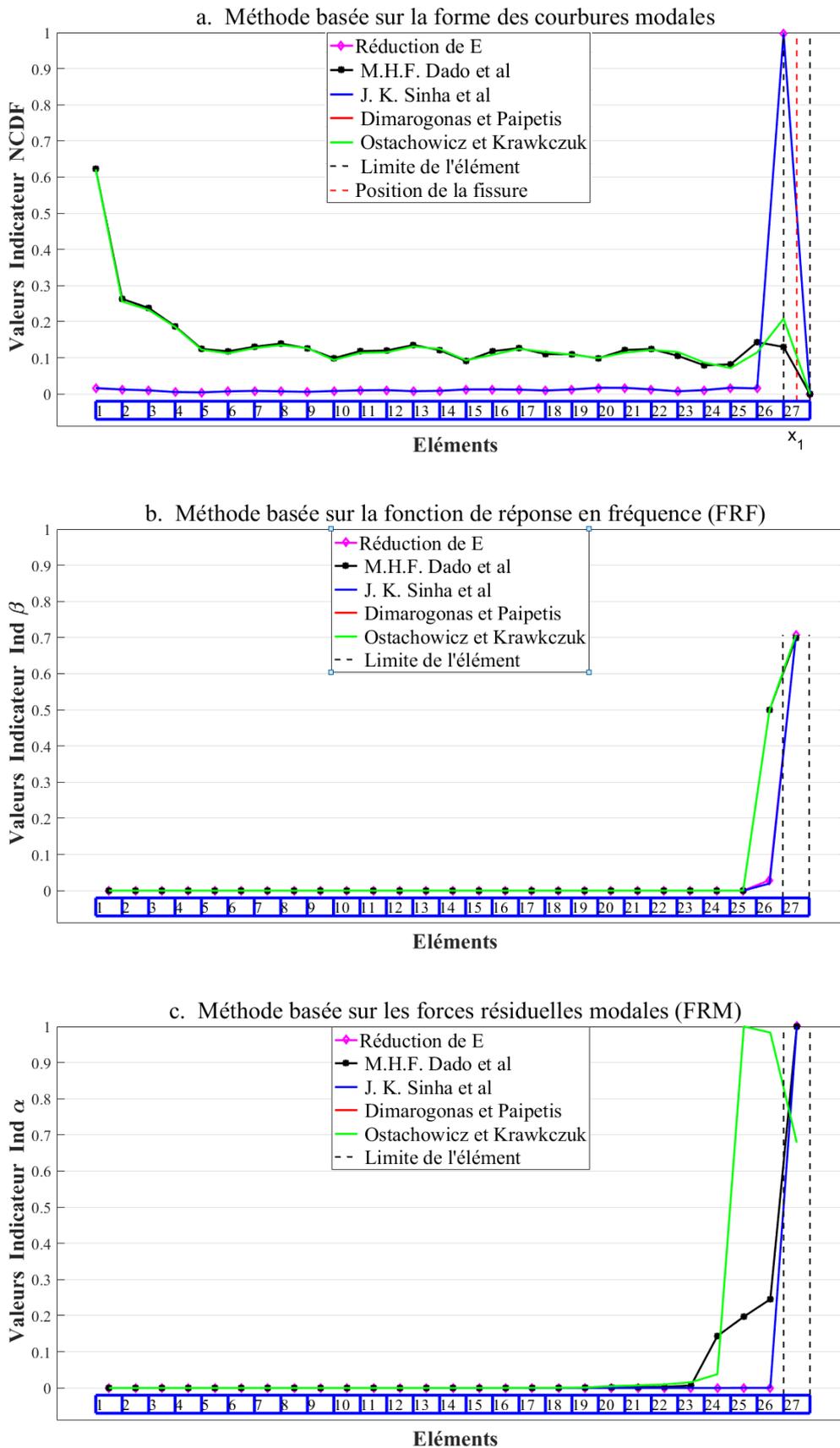


Figure V.23- Elément endommagé 27, fissure de profondeur  $a = 8 \text{ mm}$ , position  $x = 1798 \text{ mm}$ , cas d'une poutre simplement appuyée en Aluminium.

Dans le cas d'une poutre en Aluminium **simplement appuyée** étudiée précédemment, nous pouvons constater que :

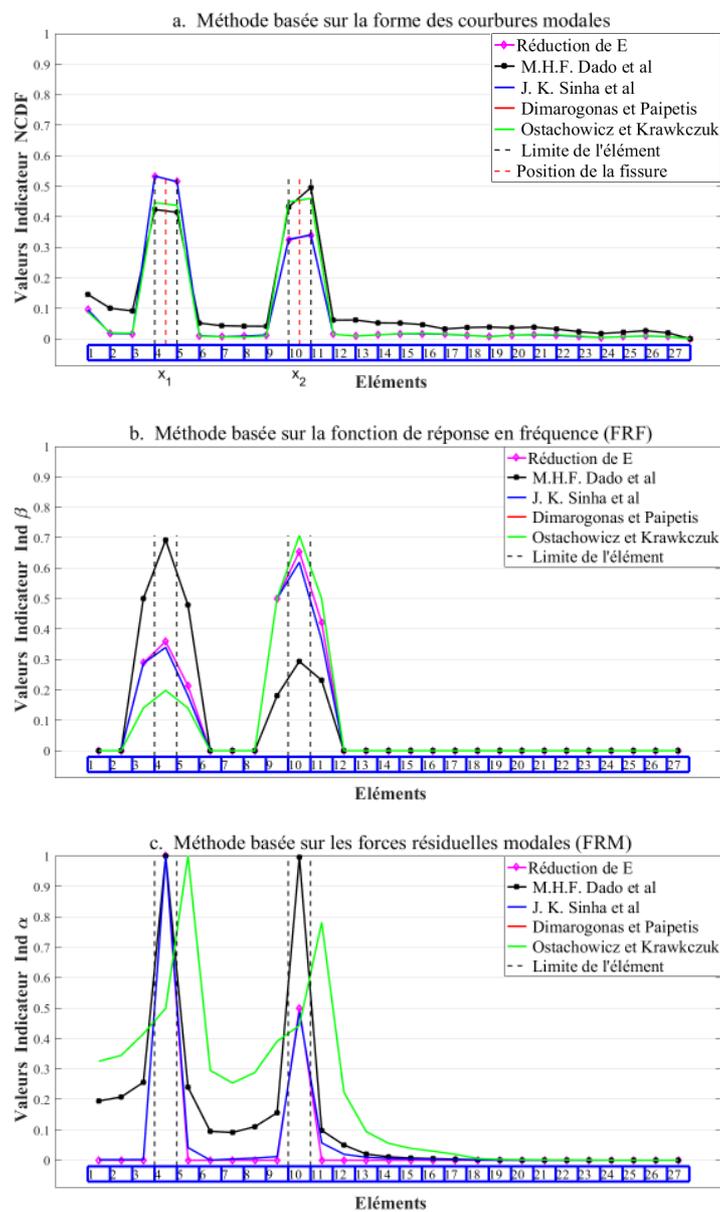
- L'application de la méthode de la forme des courbures modales (FCM) sur le modèle d'Ostachowicz et Krawkczuk dans ce cas de conditions aux limites n'est pas, encore une fois, satisfaisante, car, en faisant varier la profondeur et la position de la fissure, nous constatons qu'aucune localisation n'a eu lieu. La seule et unique localisation faite était celle illustrée dans la figure **V.19.a**. Nous avons aussi constaté que l'application de cette méthode sur le modèle de fissuration de M. H. F. Dado *et al.* n'est pas satisfaisante car, à l'instar du modèle d'Ostachowicz et Krawkczuk, la seule détection qui a eu lieu c'est lorsque la fissure est située aux environs de l'appui simple gauche de la poutre (figure **V.21.a**). Quant aux trois autres modèles, cette méthode est très efficace.
- La détection de la présence d'un endommagement en appliquant la méthode de la fonction de la réponse fréquentielle (FRF) sur les cinq modèles de fissuration est très efficace, sauf dans le cas où la fissure est proche de l'appui simple gauche de la poutre, cette méthode devient imprécise (figure **V.21.b**).
- Comme dans les deux cas de conditions aux limites étudiés précédemment, la détection de l'élément endommagé en appliquant la méthode des forces résiduelles modales (FRM) sur le modèle de fissuration d'Ostachowicz et Krawkczuk, en faisant varier la profondeur et la position de la fissure, n'est pas réalisée, car, nous avons remarqué que le pic indiquant l'élément endommagé est décalé d'un élément, ce qui peut être considéré comme un pic trompeur. Voir la figure **V.22.c**.

**V.7.2 Cas de deux fissures :**

Dans le cas de deux fissures, les propriétés géométriques et mécaniques de chacun des cinq modèles étudiés sont les mêmes que la poutre 2 (voir tableau.1). Cette étude se fait, en premier lieu, selon trois cas de conditions aux limites dont le seule paramètre qui reste fixe est la position de la 1<sup>ère</sup> fissure (237 mm). Tous les autres paramètres varient, à savoir la profondeur de la 1<sup>ère</sup> fissure (de 4 à 12 mm), la profondeur de la 2<sup>ème</sup> fissure (de 4 à 12 mm) et la position de la 2<sup>ème</sup> fissure (de 644 à 1595 mm), et pour chaque variation nous avons appliqué les trois méthodes d'identification d'endommagements sur les cinq modèles. Puis, en second lieu, nous avons refait la même procédure en faisant changer le nombre d'éléments de 27 à 37 éléments.

**V.7.2.1 Poutre endommagée encastree-libre en Aluminium :**

**V.7.2.1.a Variation de la position et de la profondeur de la 2<sup>ème</sup> fissure :**



**Figure V.24-** Nombre d'éléments 27, éléments endommagés 4 et 10,  $a_1 = 8 \text{ mm}$ ,  $x_1 = 237 \text{ mm}$ ,  $a_2 = 4 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 644 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastree-libre en Aluminium.

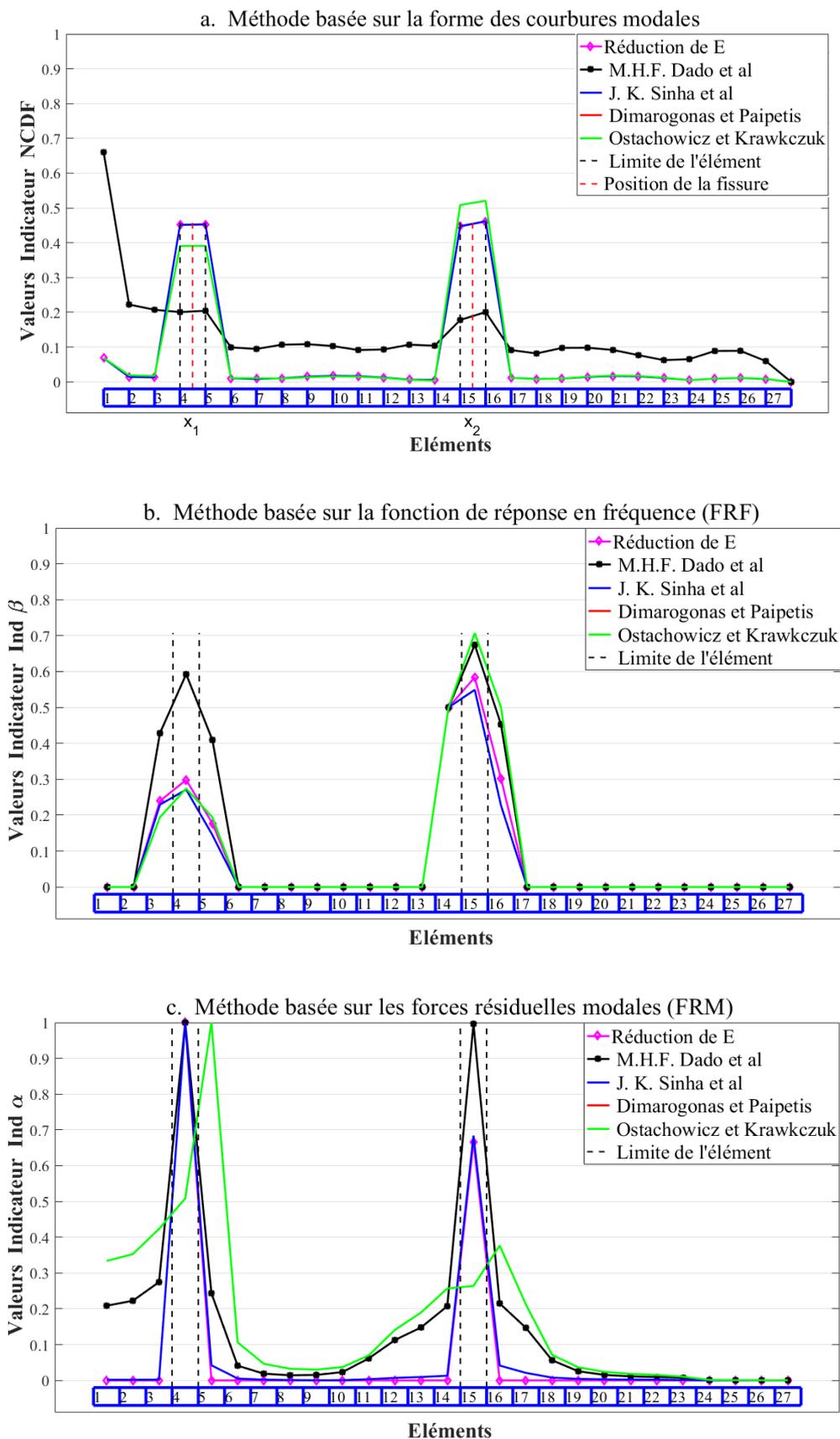


Figure V.25- Nombre d'éléments 27, éléments endommagés 4 et 15,  $a_1 = 12 \text{ mm}$ ,  $x_1 = 237 \text{ mm}$ ,  $a_2 = 8 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 983 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastée-libre en Aluminium.

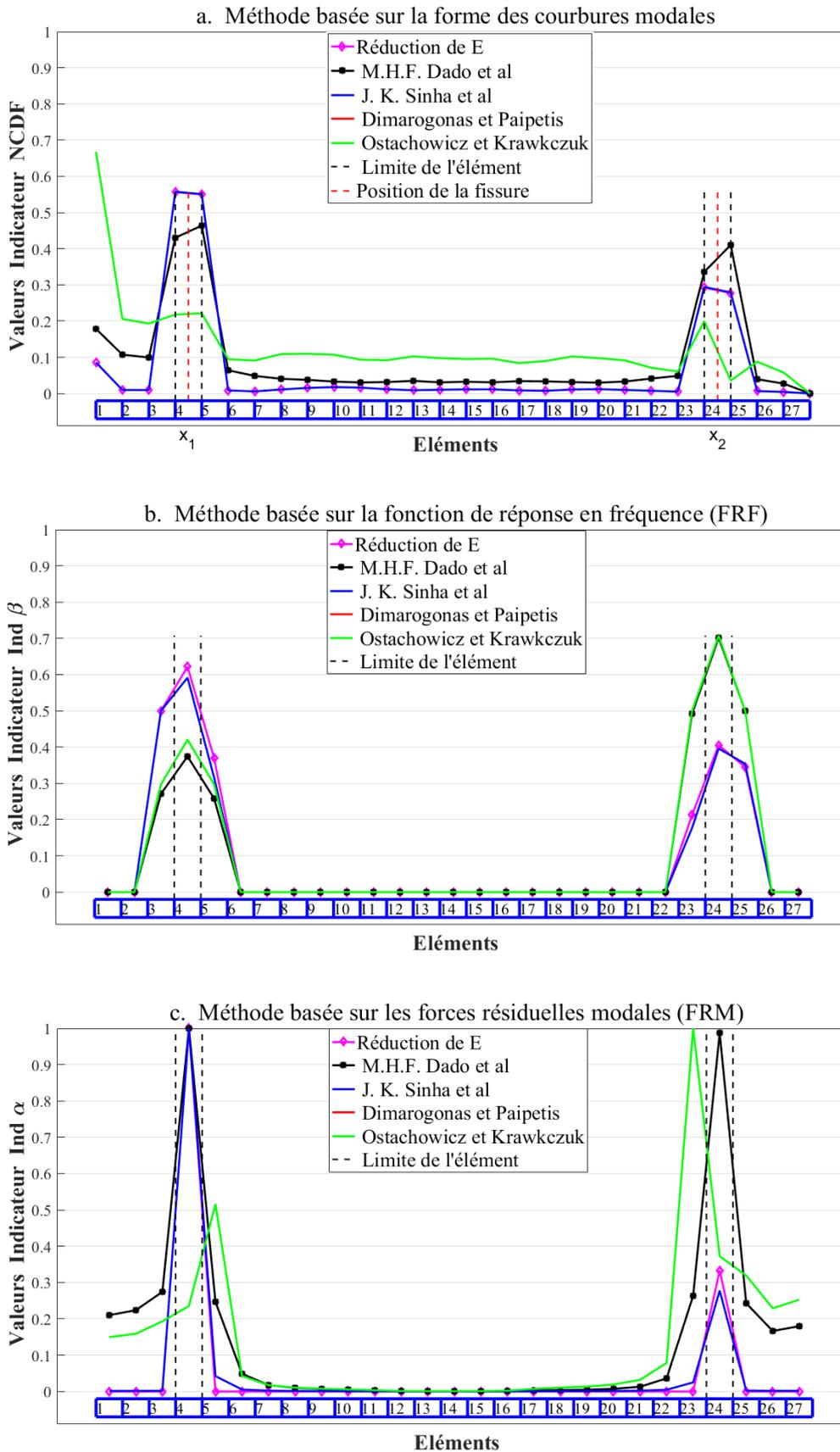


Figure V.26- Nombre d'éléments 27, éléments endommagés 4 et 24,  $a_1 = 12 \text{ mm}$ ,  $x_1 = 237 \text{ mm}$ ,  $a_2 = 4 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 1595 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastree-libre en Aluminium.

V.7.2.1.b Changement du nombre d'éléments :

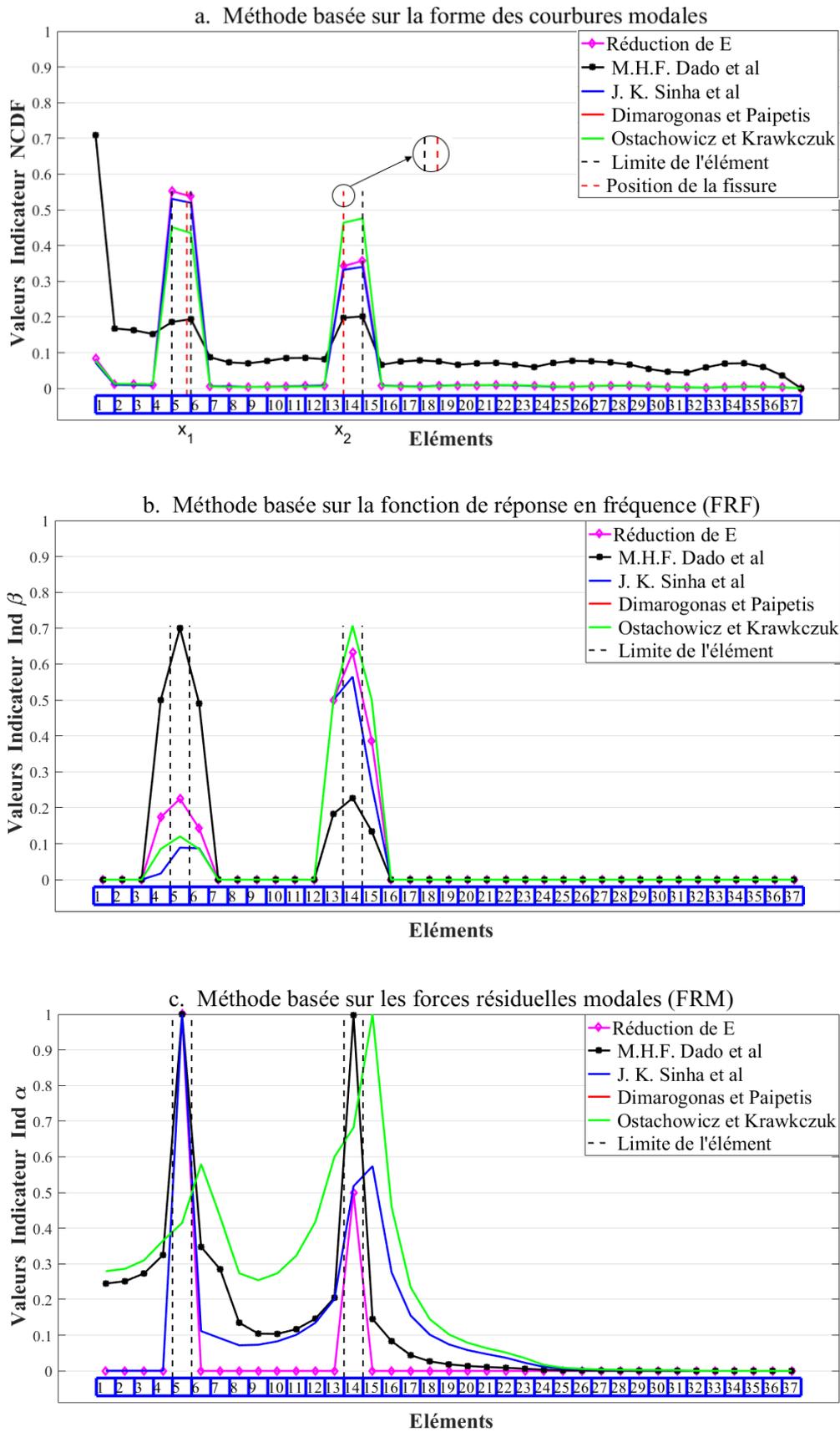
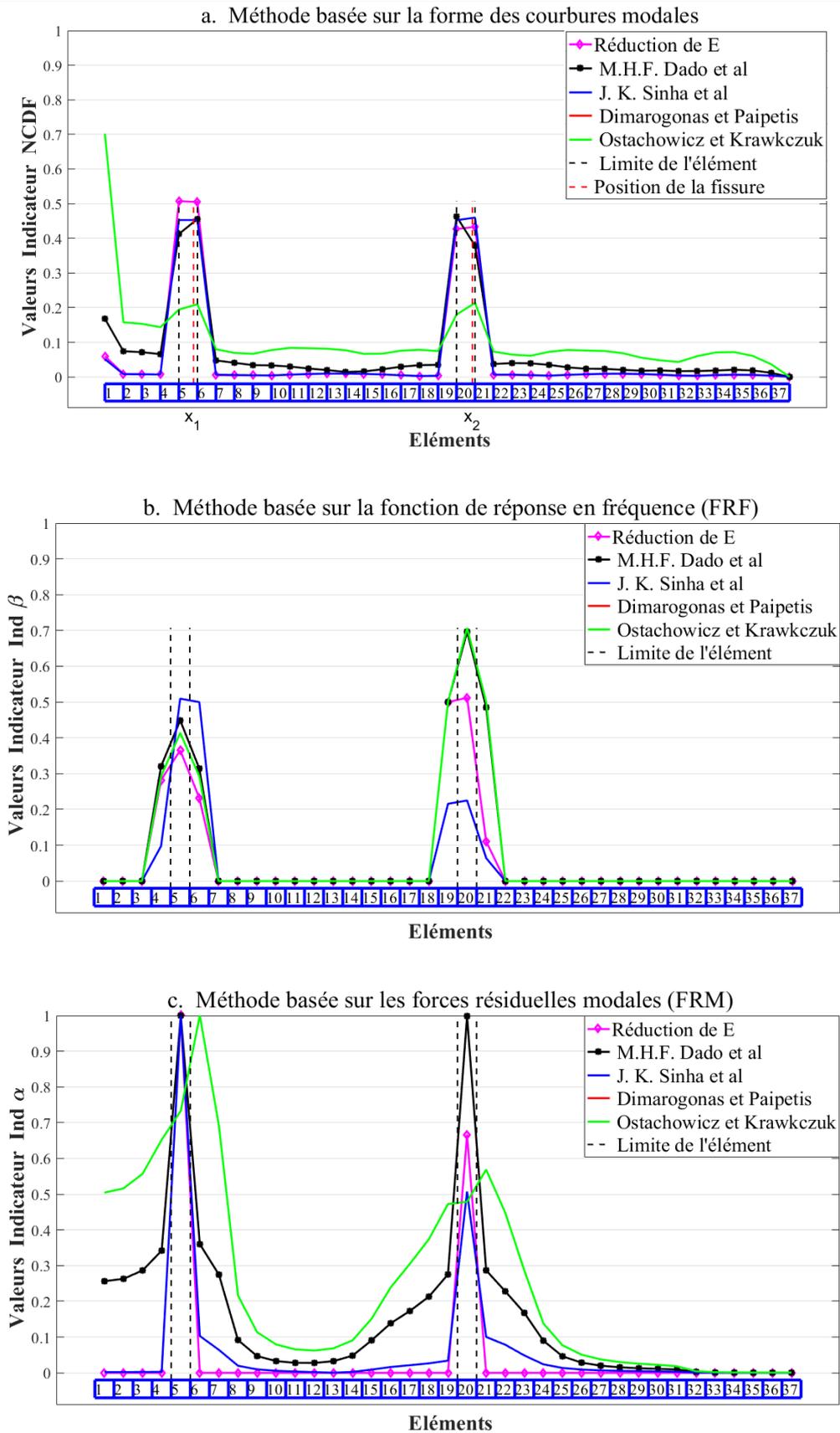
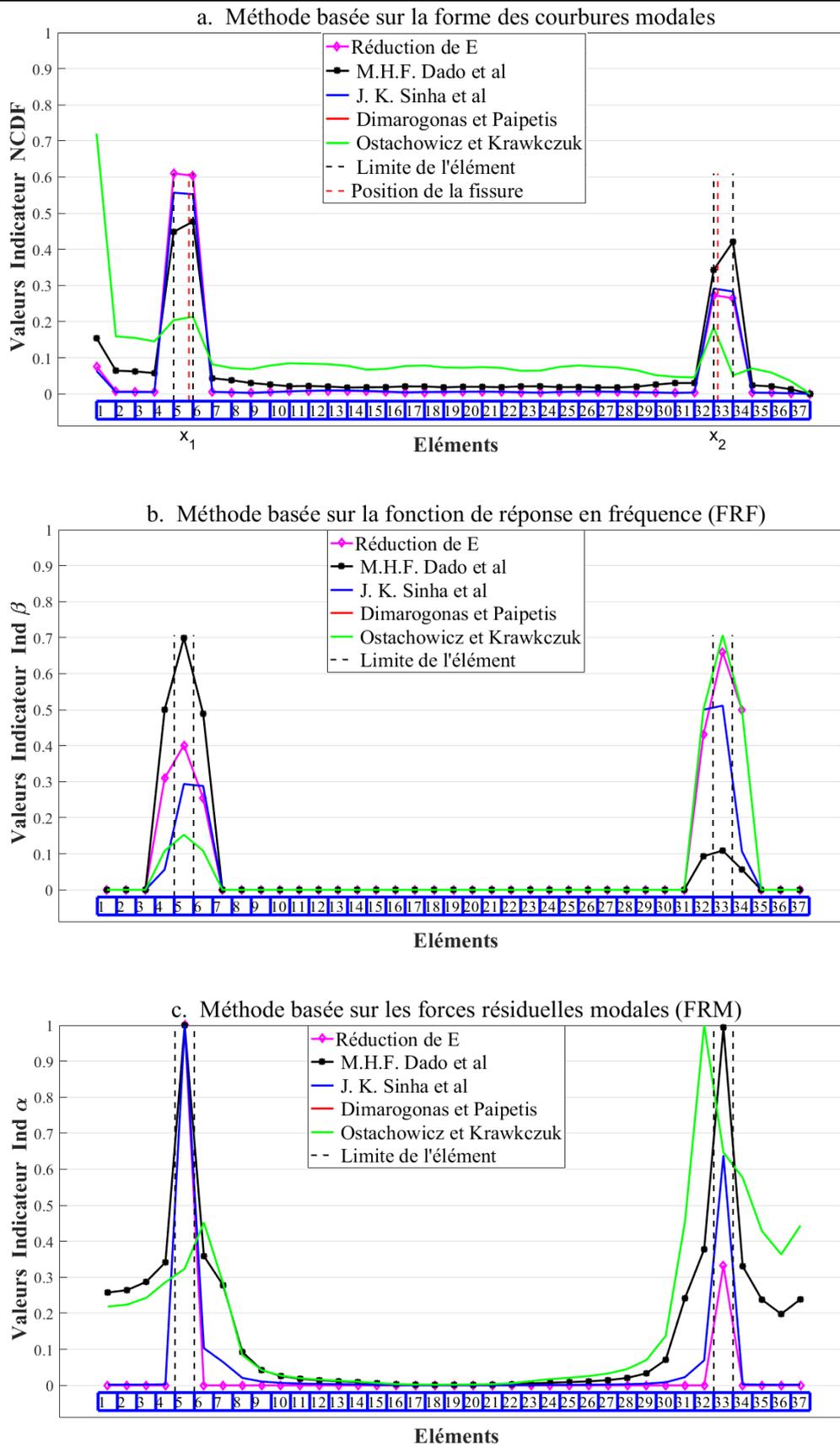


Figure V.27- Nombre d'éléments 37, éléments endommagés 5 et 14,  $a_1 = 8 \text{ mm}$ ,  $x_1 = 237 \text{ mm}$ ,  $a_2 = 4 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 644 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastree-libre en Aluminium.



**Figure V.28-** Nombre d'éléments 37, éléments endommagés 5 et 20,  $a_1 = 12 \text{ mm}$ ,  $x_1 = 237 \text{ mm}$ ,  $a_2 = 8 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 983 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastree-libre en Aluminium.



**Figure V.29-** Nombre d'éléments 37, éléments endommagés 5 et 33,  $a_1 = 12 \text{ mm}$ ,  $x_1 = 237 \text{ mm}$ ,  $a_2 = 4 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 1595 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastree-libre en Aluminium.

Pour le cas d'une poutre en Aluminium avec des conditions aux limites **encastrée-libre** où nous avons introduit deux fissures, nous constatons que :

- La variation des profondeurs des deux fissures ne perturbe pas la localisation des éléments endommagés, en revanche, elle influe sur les valeurs numériques des indicateurs utilisés.
- La détection des deux fissures en appliquant la méthode de la forme des courbures modales (FCM) sur le modèle de fissuration de M. H. F. Dado *et al.* semble rapidement convergente, car comme le montre les figures **V.24.a** et **V.27.a**, les deux pics indiquant les éléments endommagés sont mieux visualisés en utilisant seulement quelques éléments. Cela indique que la méthode FCM est rapidement convergente en l'appliquant sur le modèle de M. H. F. Dado *et al.* Par contre, en faisant varier la position de la 2<sup>ème</sup> fissure, la détection n'a pas eu lieu pour la 1<sup>ère</sup> fissure (figure **V.25.a**), cela nous permet de conclure que l'application de la méthode FCM sur le modèle de fissuration de M. H. F. Dado *et al.* n'est pas fiable. Nous avons aussi constaté que l'application de cette méthode sur le modèle de fissuration d'Ostachowicz et Krawkczuk n'est pas satisfaisante car lorsque la 2<sup>ème</sup> fissure se rapproche de l'extrémité libre de la poutre, la détection des éléments endommagés n'est pas précise (figures **V.26.a** et **V.26.a**). Quant aux trois autres modèles de fissuration, cette méthode est très efficace et elle est convergente.
- La détection des éléments endommagés en appliquant la méthode de la fonction de la réponse fréquentielle (FRF) sur les cinq modèles de fissuration s'avère très satisfaisante et cela pour n'importe quelle position des fissures, et nous avons remarqué que cette méthode est rapidement convergente.
- Comme dans le cas d'une seule fissure étudié précédemment, l'application de la méthode des forces résiduelles modales (FRM) sur le modèle d'Ostachowicz et Krawkczuk n'est pas fiable car les pics indiquant les éléments endommagés se décalent d'un élément, la figure **V.26.c** illustre cette fausse détection. Quant aux quatre autres modèles de fissuration, cette méthode a bien détecté la présence des deux fissures.

V.7.2.2 Poutre endommagée encastrée-encastrée en Aluminium :

V.7.2.2.a Variation de position et de profondeur de la 2<sup>ème</sup> fissure :

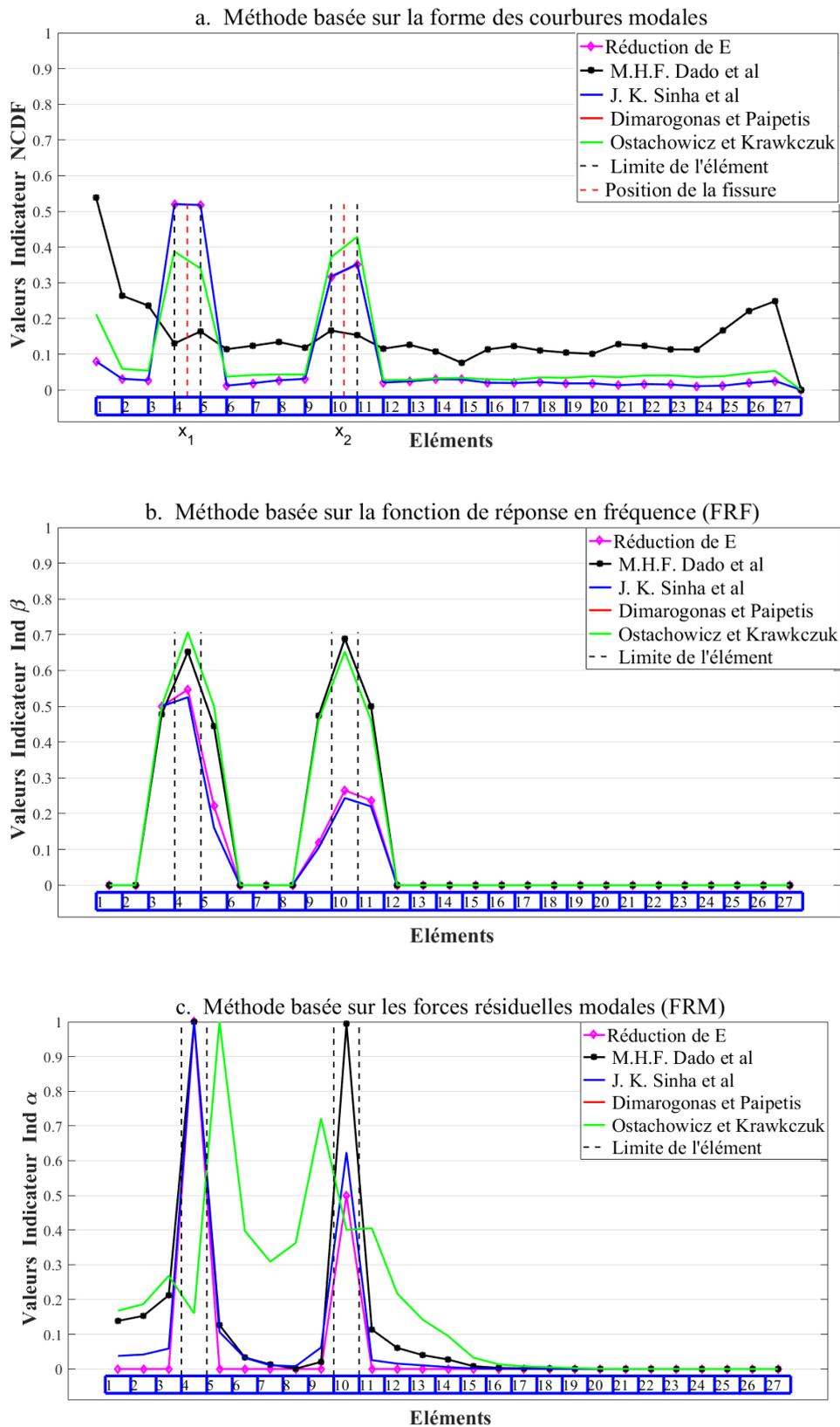


Figure V.30- Nombre d'éléments 27, éléments endommagés 4 et 10,  $a_1 = 8 \text{ mm}$ ,  $x_1 = 237 \text{ mm}$ ,  $a_2 = 4 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 644 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastrée-encastrée en Aluminium.

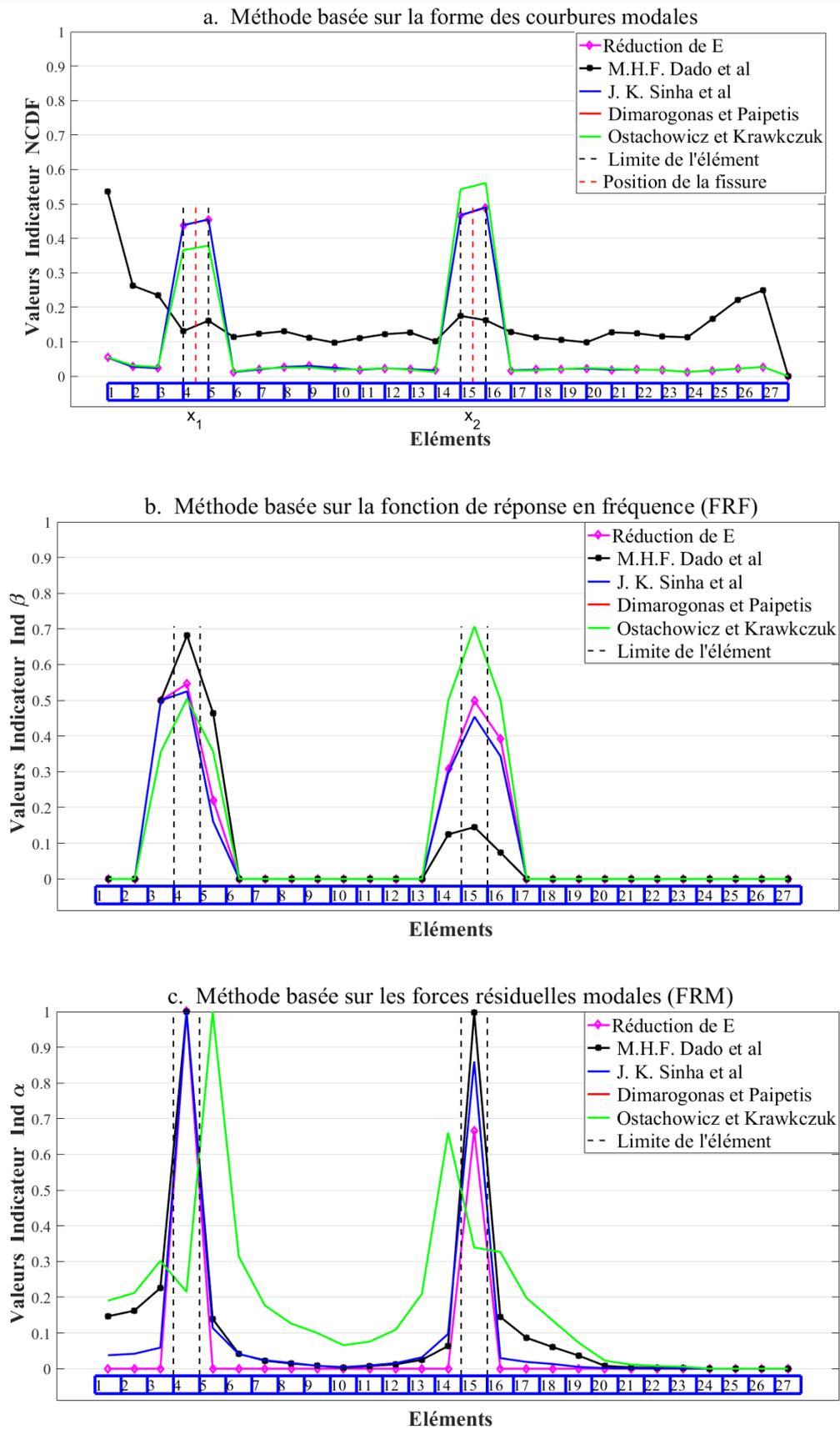


Figure V.31- Nombre d'éléments 27, éléments endommagés 4 et 15,  $a_1 = 12 \text{ mm}$ ,  $x_1 = 237 \text{ mm}$ ,  $a_2 = 8 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 983 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastée-encastée en Aluminium.

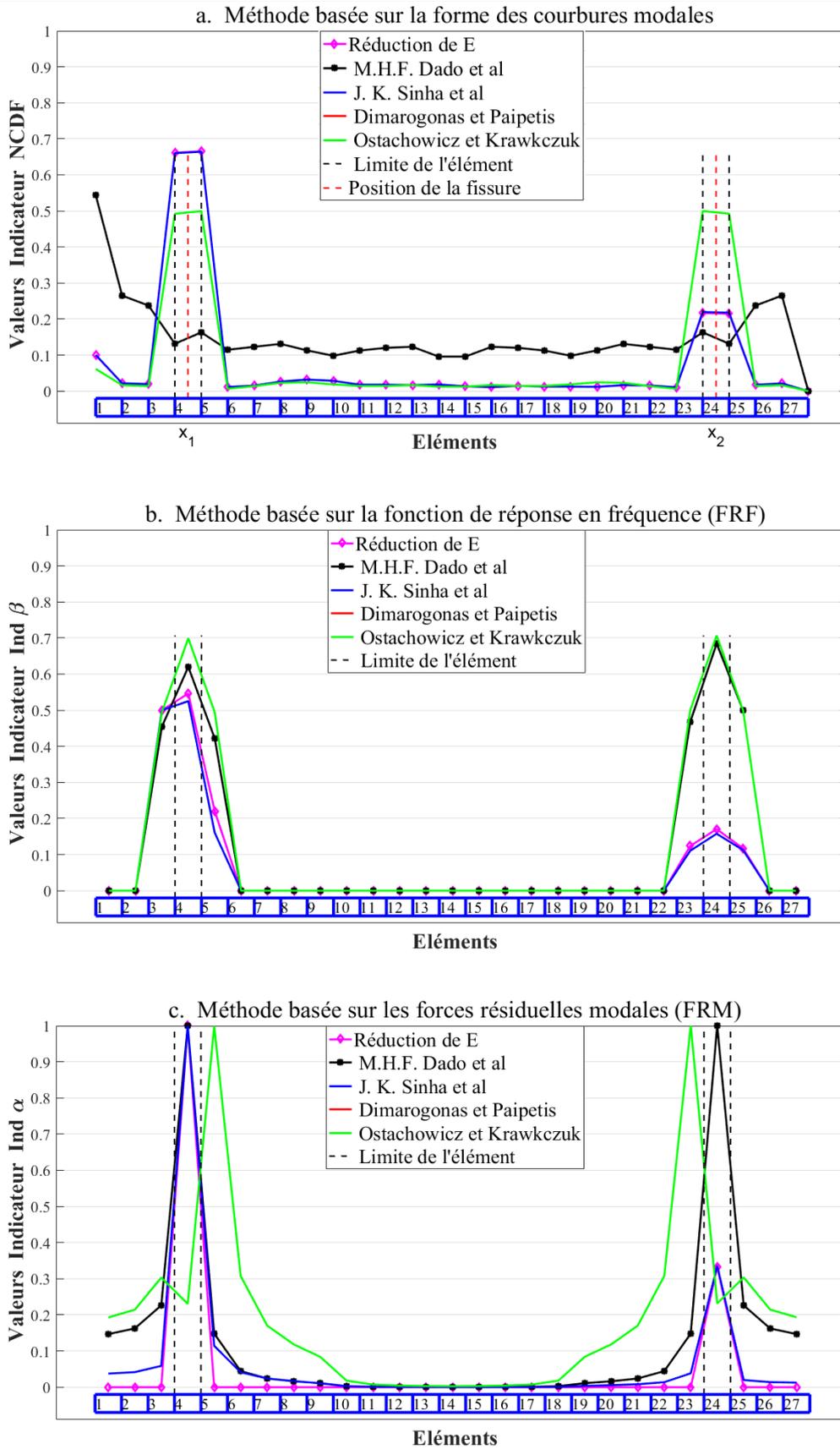


Figure V.32- Nombre d'éléments 27, éléments endommagés 4 et 24,  $a_1 = 12 \text{ mm}$ ,  $x_1 = 237 \text{ mm}$ ,  $a_2 = 4 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 1595 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastree-encastree en Aluminium.

V.7.2.2.b Changement du nombre d'éléments :

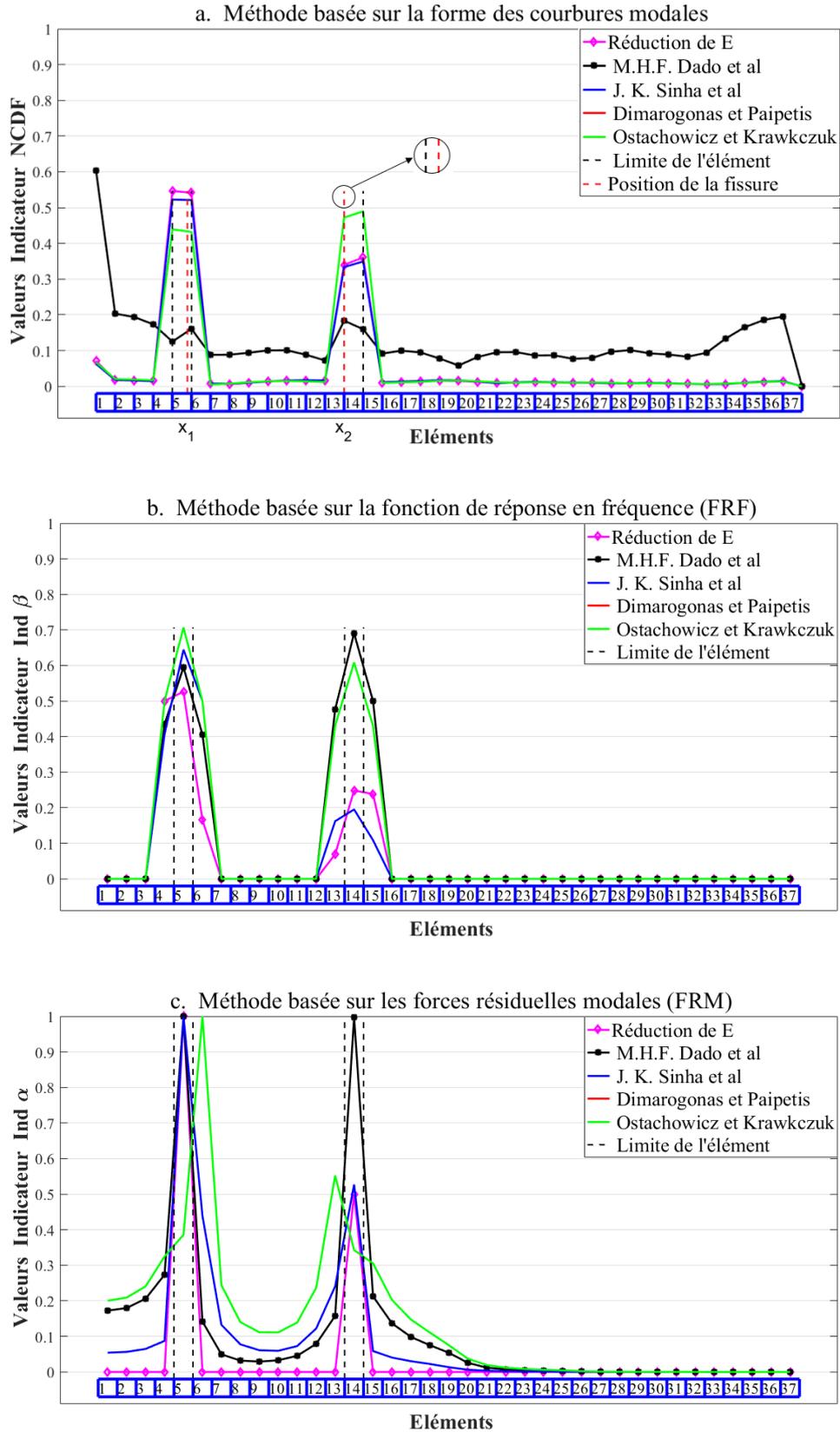


Figure V.33- Nombre d'éléments 37, éléments endommagés 5 et 14,  $a_1 = 8 \text{ mm}$ ,  $x_1 = 237 \text{ mm}$ ,  $a_2 = 4 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 644 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastrée-encastrée en Aluminium.

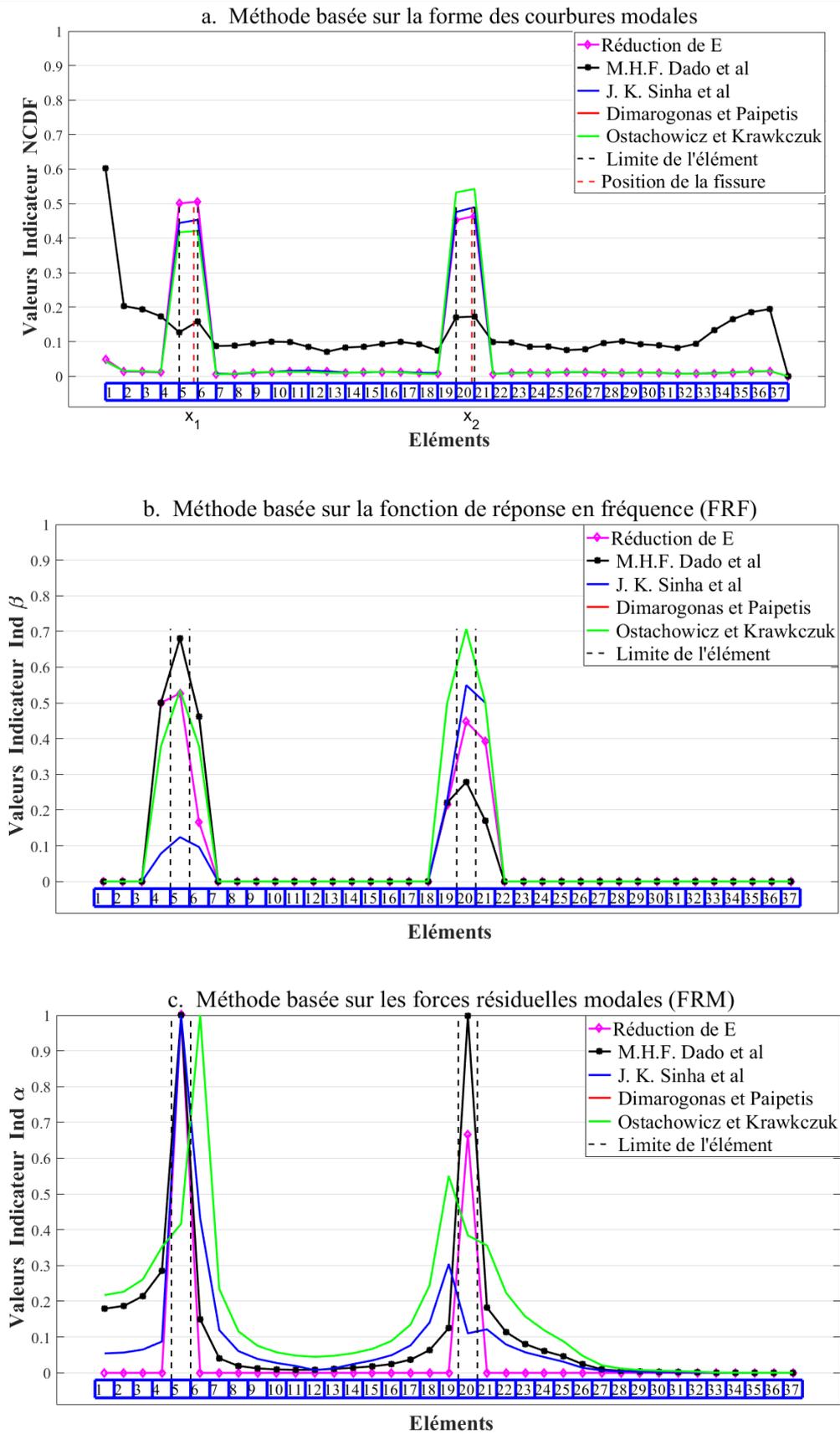


Figure V.34- Nombre d'éléments 37, éléments endommagés 5 et 20,  $a_1 = 12 \text{ mm}$ ,  $x_1 = 237 \text{ mm}$ ,  $a_2 = 8 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 983 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastée-encastée en Aluminium.

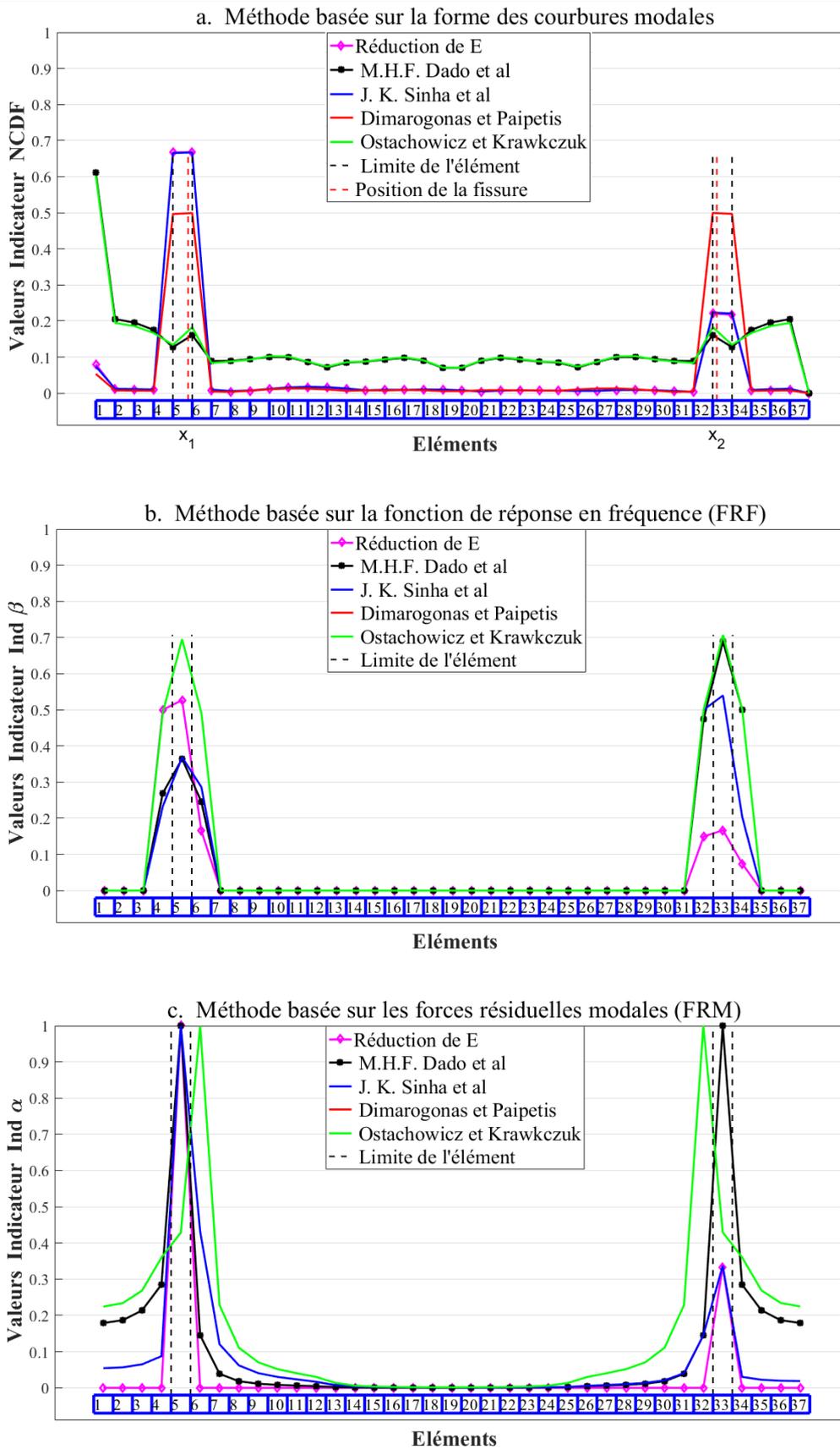


Figure V.35- Nombre d'éléments 37, éléments endommagés 5 et 33,  $a_1 = 12 \text{ mm}$ ,  $x_1 = 237 \text{ mm}$ ,  $a_2 = 4 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 1595 \text{ mm}$ , cas d'une poutre encastree-encastree en Aluminium.

Pour le cas de la poutre en Aluminium avec des conditions aux limites **encastrée-encastrée**, nous avons constaté les points suivants :

- Pour le modèle de fissuration de M. H. F. Dado *et al.*, nous n'avons constaté aucune détection en appliquant la méthode de la forme des courbures modales (FCM). Quant aux quatre autres modèles de fissuration, la détection des éléments endommagés en appliquant cette méthode est très efficace et elle est convergente pour tous les modèles.
- La détection des éléments endommagés en appliquant la méthode de la fonction de la réponse fréquentielle (FRF) sur les cinq modèles de fissuration s'avère très satisfaisante et cela pour n'importe quelle position des fissures, et nous remarquons que cette méthode est convergente.
- Comme dans le cas d'une seule fissure étudié précédemment, l'application de la méthode des forces résiduelles modales (FRM) sur le modèle d'Ostachowicz et Krawkczuk n'est pas satisfaisante car les pics indiquant les éléments endommagés, se décalent toujours d'un élément, illustré dans la figure **V.35.c**. Quant aux quatre autres modèles de fissuration, cette méthode a bien détecté la présence des deux fissures.

V.7.2.3 Poutre endommagée en Aluminium simplement appuyée :

V.7.2.3.a Variation de position et de profondeur de la 2<sup>ème</sup> fissure :

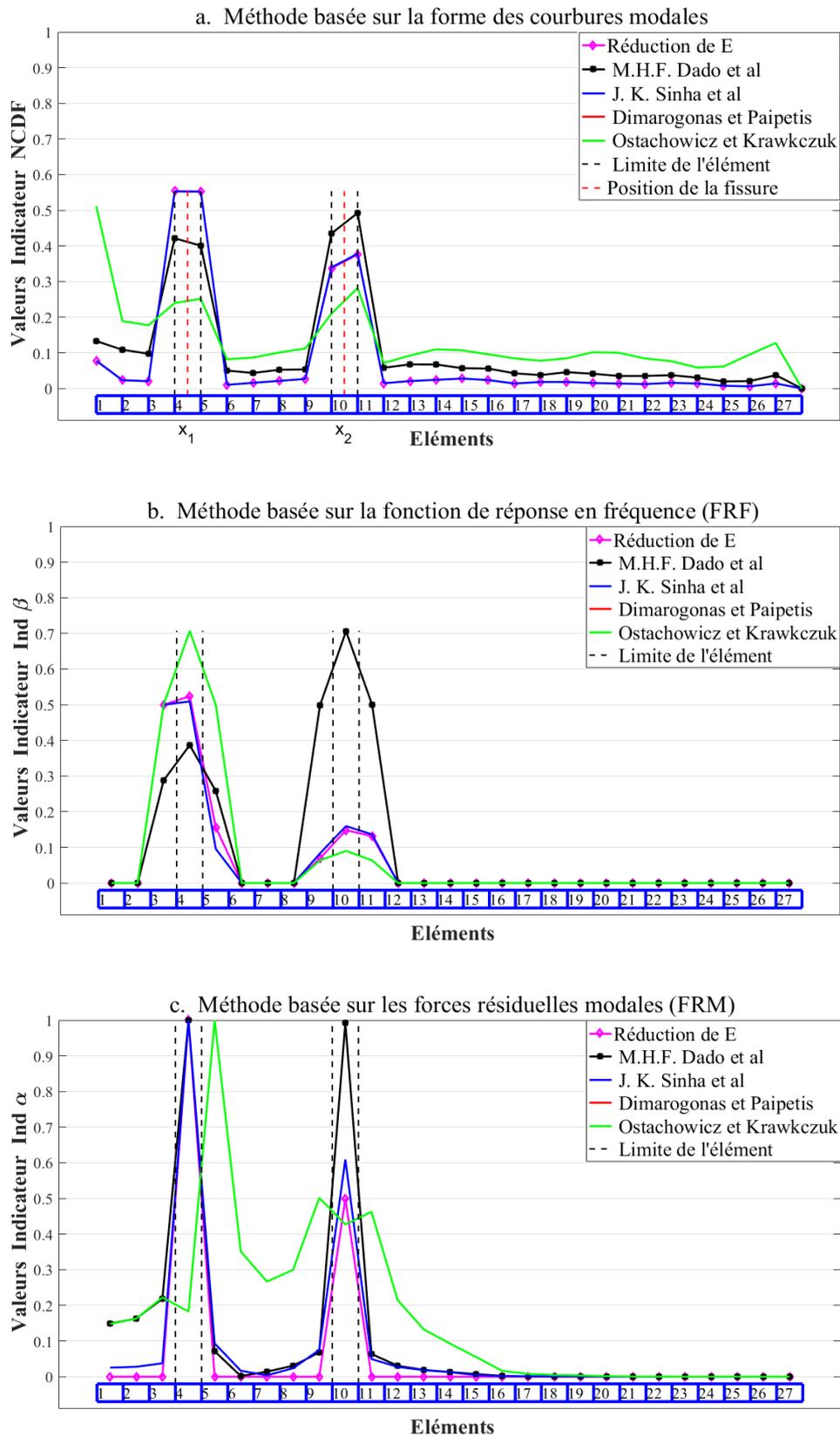
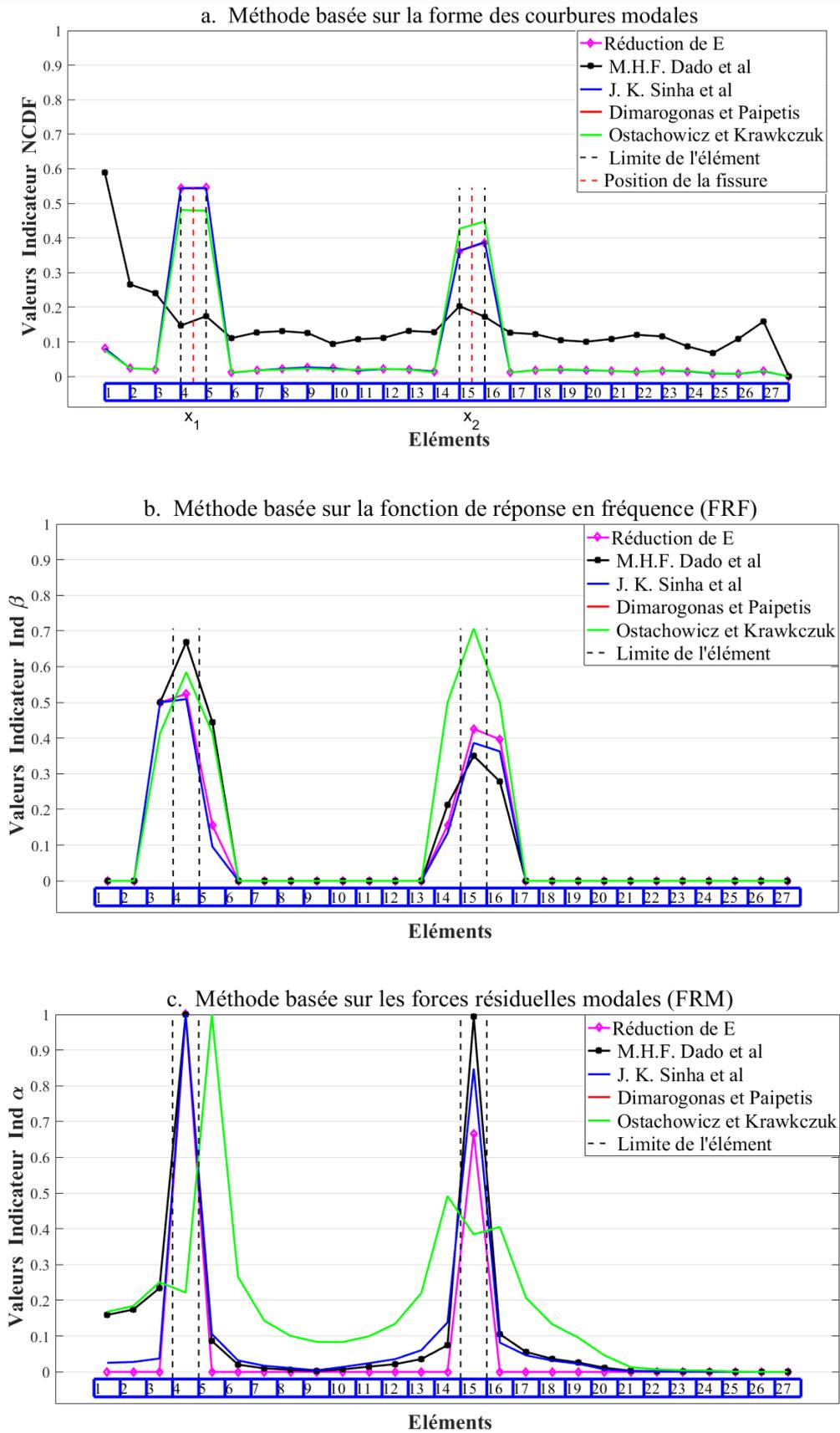


Figure V.36- Nombre d'éléments 27, éléments endommagés 4 et 10,  $a_1 = 8 \text{ mm}$ ,  $x_1 = 237 \text{ mm}$ ,  $a_2 = 4 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 644 \text{ mm}$ , cas d'une poutre en Aluminium simplement appuyée.



**Figure V.37-** Nombre d'éléments 27, éléments endommagés 4 et 15,  $a_1 = 12 \text{ mm}$ ,  $x_1 = 237 \text{ mm}$ ,  $a_2 = 8 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 983 \text{ mm}$ , cas d'une poutre en Aluminium simplement appuyée.

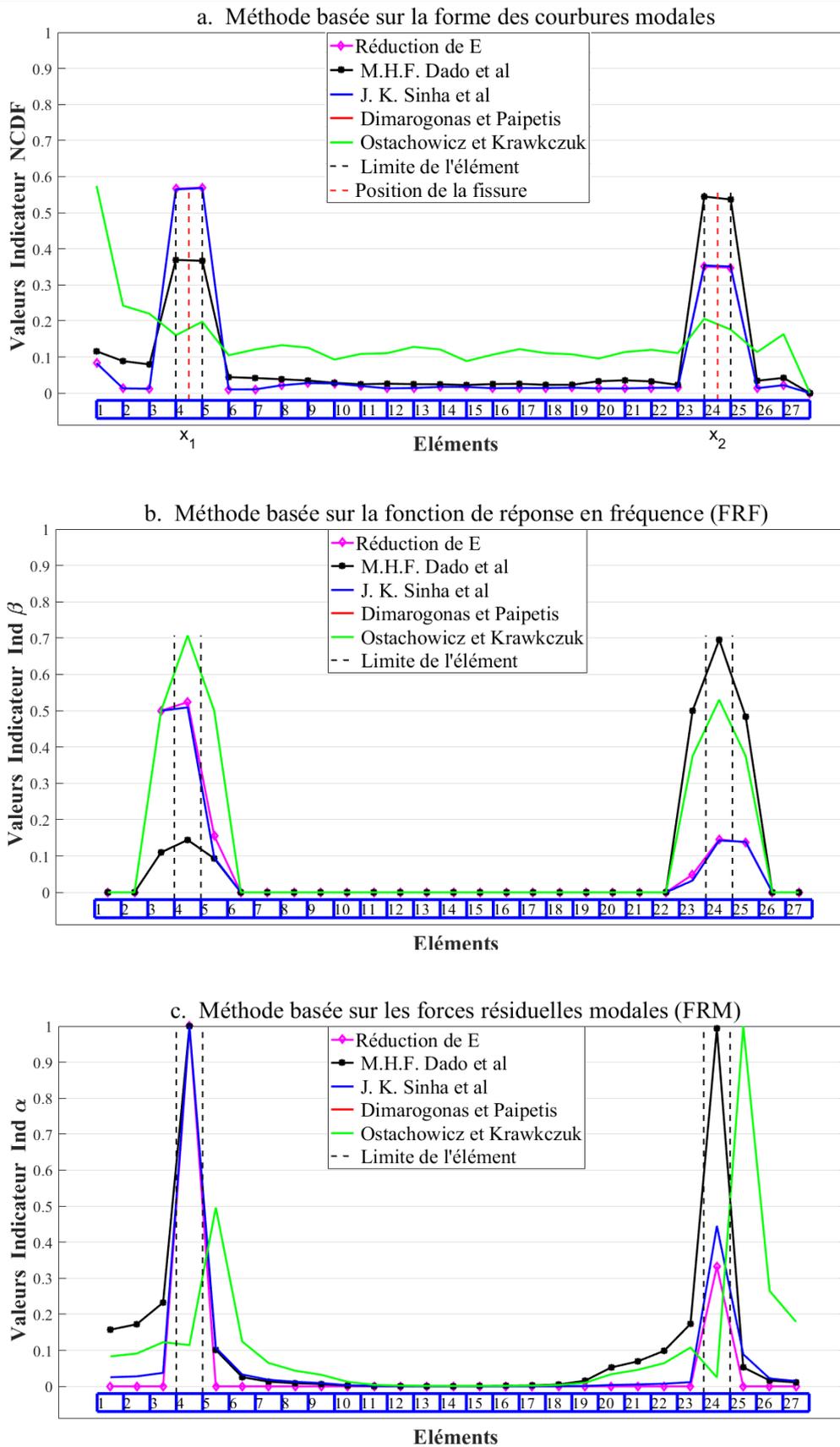


Figure V.38- Nombre d'éléments 27, éléments endommagés 4 et 24,  $a_1 = 12 \text{ mm}$ ,  $x_1 = 237 \text{ mm}$ ,  $a_2 = 4 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 1595 \text{ mm}$ , cas d'une poutre en Aluminium simplement appuyée.

V.7.2.3.b Changement du nombre d'éléments :

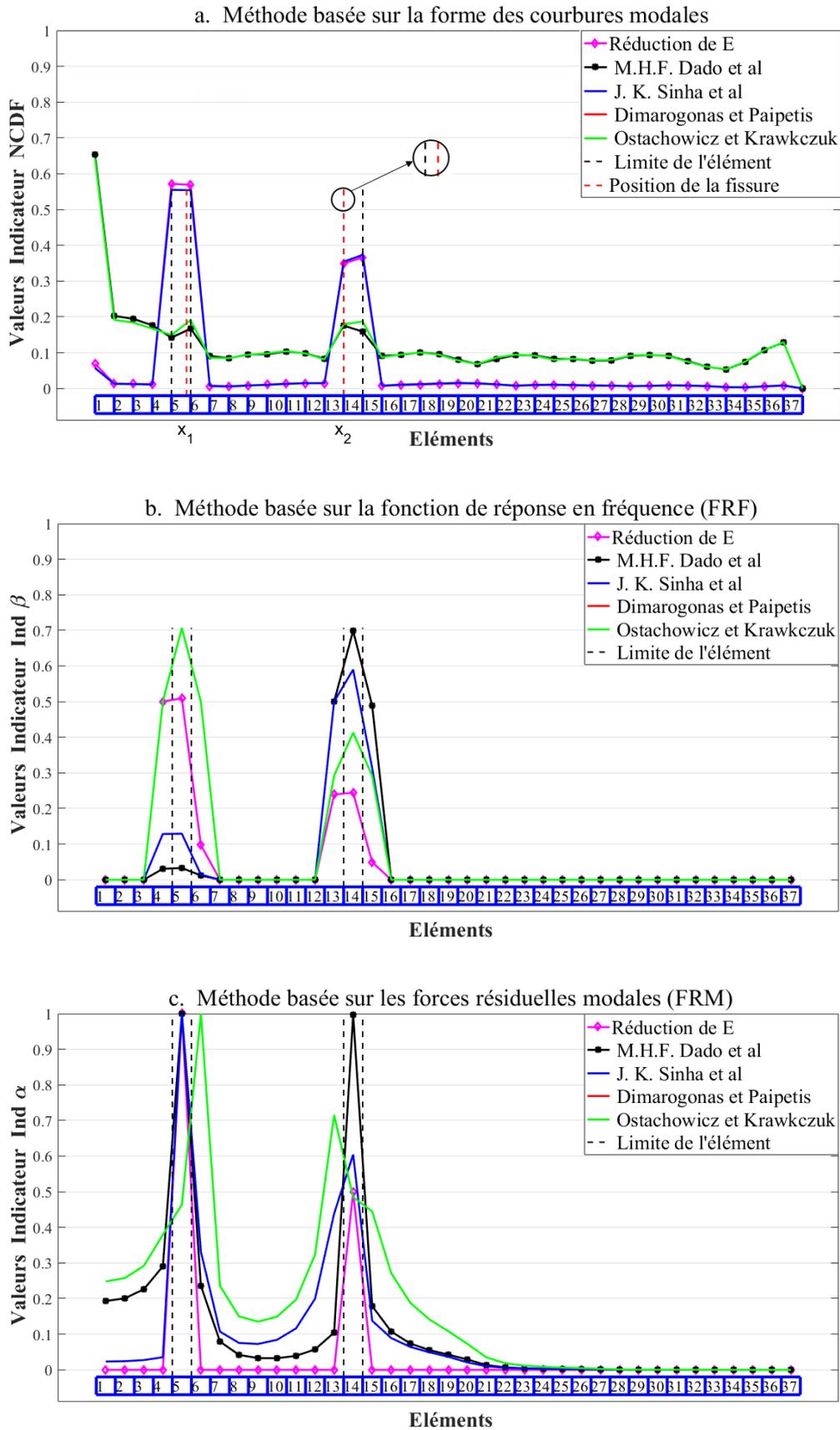
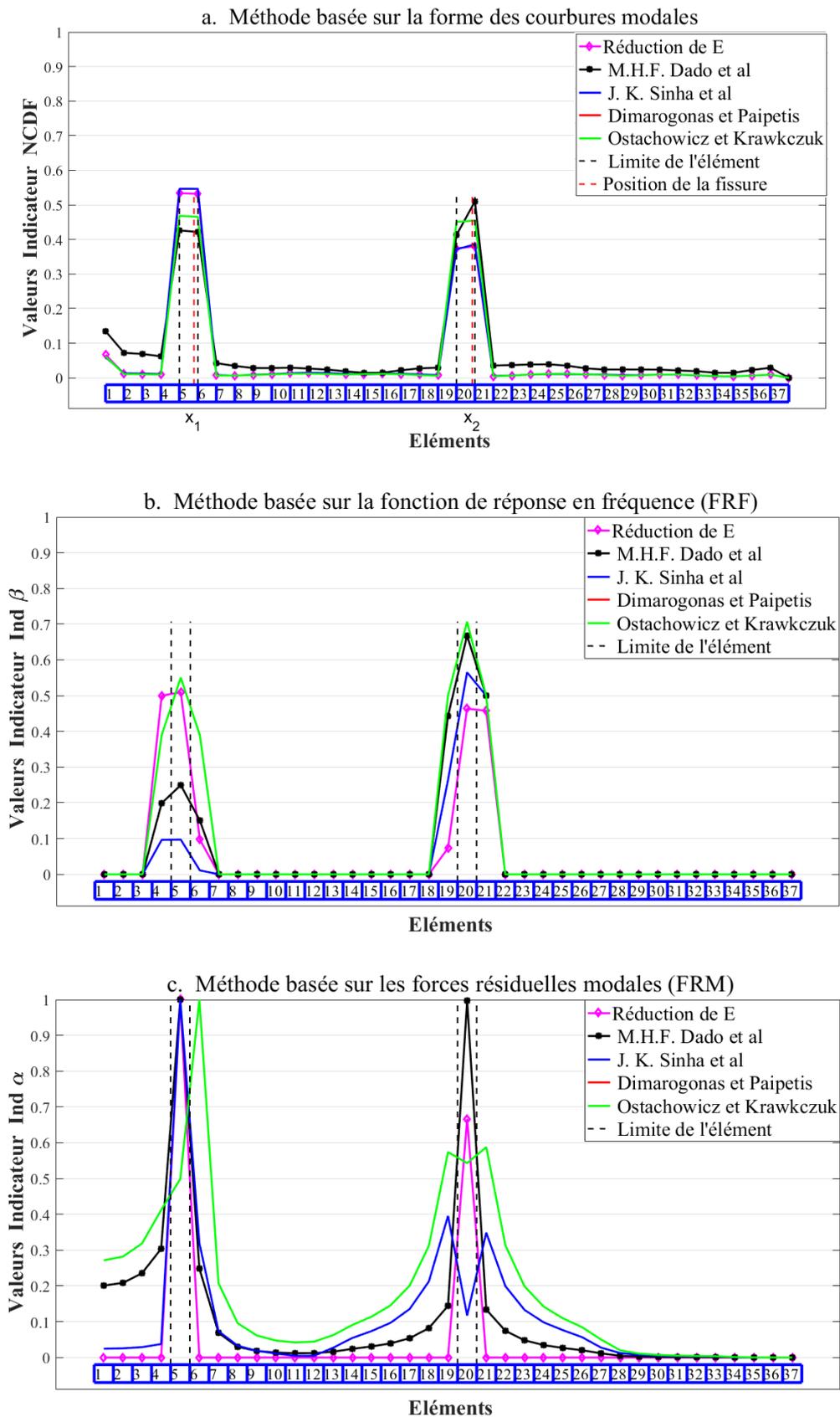
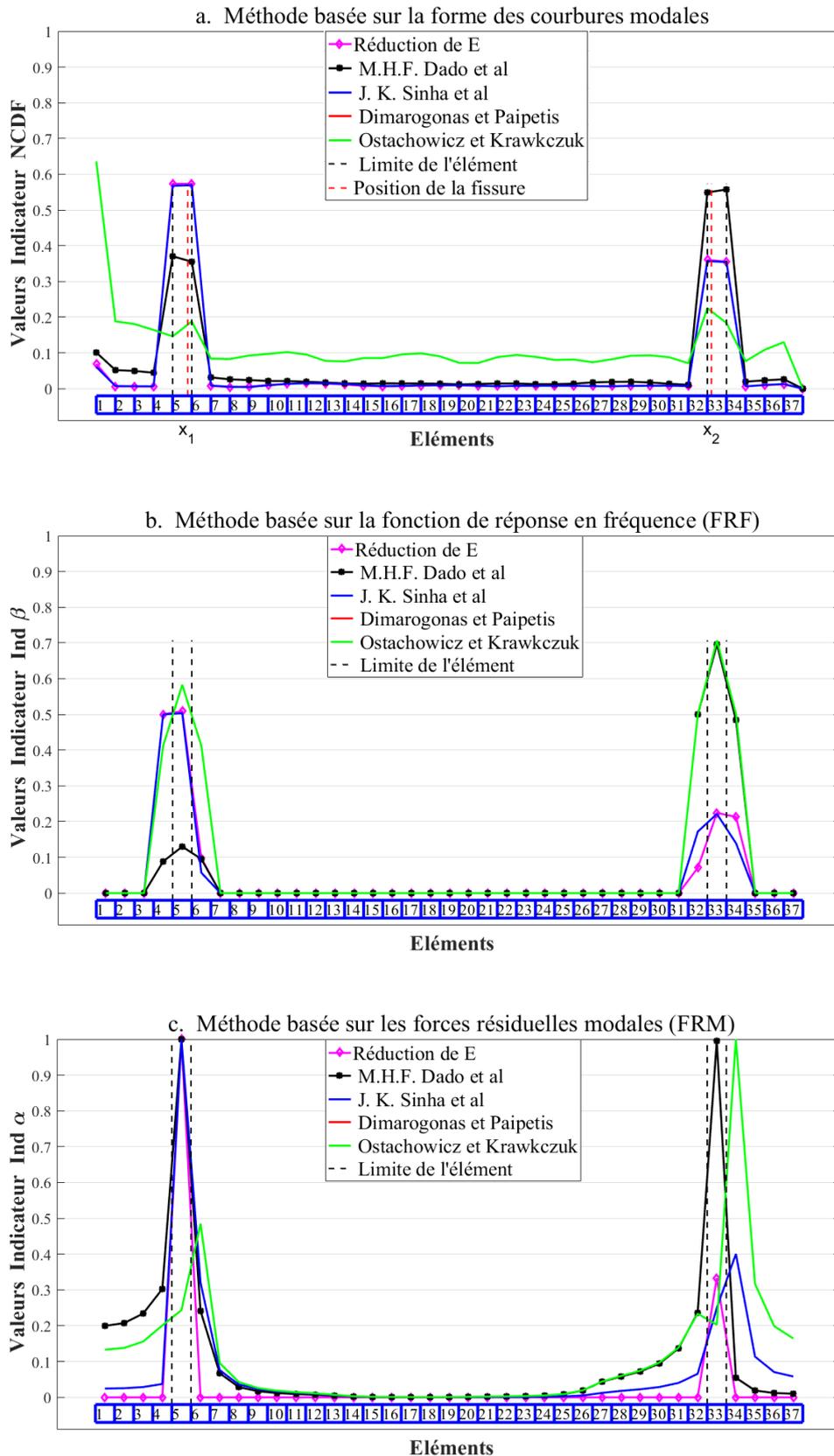


Figure V.39- Nombre d'éléments 37, éléments endommagés 5 et 14,  $a_1 = 8 \text{ mm}$ ,  $x_1 = 237 \text{ mm}$ ,  $a_2 = 4 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 644 \text{ mm}$ , cas d'une poutre en Aluminium simplement appuyée.



**Figure V.40-** Nombre d'éléments 37, éléments endommagés 5 et 20,  $a_1 = 12 \text{ mm}$ ,  $x_1 = 237 \text{ mm}$ ,  $a_2 = 8 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 983 \text{ mm}$ , cas d'une poutre en Aluminium simplement appuyée.



**Figure V.41-** Nombre d'éléments 37, éléments endommagés 5 et 33,  $a_1 = 12 \text{ mm}$ ,  $x_1 = 237 \text{ mm}$ ,  $a_2 = 4 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 1595 \text{ mm}$ , cas d'une poutre en Aluminium simplement appuyée.

Dans ce dernier cas d'étude de deux fissures et pour la poutre en Aluminium avec des conditions aux limites **appui simple-appui simple**, nous pouvons constater les points suivants :

Comme il est illustré sur les figures (V.36.a), (V.37.a) et (V.38.a), nous avons constaté que l'application de la méthode de la forme des courbures modales (FCM) sur le modèle de fissuration de M. H. F. Dado *et al.* et celui d'Ostachowicz et Krawkczuk n'est pas fiable encore une fois, car la détection de la présence des deux fissures en faisant varier la position de la 2<sup>ème</sup> fissure se fait uniquement à certains endroits de la poutre. Quant aux trois autres modèles cette méthode donne de bons résultats et nous remarquons que l'application de cette méthode sur ces trois modèles est convergente.

La localisation des éléments endommagés, en appliquant la méthode de la fonction de la réponse fréquentielle (FRF) sur les modèles de J. K. Sinha et celui qui est basé sur la réduction de la raideur E, n'est pas très précise, car les deux pics indiquant les éléments endommagés se trouvent exactement sur des nœuds (figures V.36.b, V.37.b et V.38.b). Quant aux trois autres modèles de fissuration, la localisation des deux fissures en appliquant cette méthode est très satisfaisante et elle est convergente.

L'apparition d'un pic décalé d'un élément au niveau de la 1<sup>ère</sup> fissure et deux pics trompeurs au niveau de la 2<sup>ème</sup> fissure, illustrés dans la figure V.36.c, rendent l'application de la méthode des forces résiduelles modales (FRM) sur le modèle d'Ostachowicz et Krawkczuk peu fiable. Quant aux quatre autres modèles de fissuration, cette méthode a bien localisé la présence des deux fissures.

## V.8 Conclusion :

En premier lieu, l'étude qui a été menée dans ce dernier chapitre de ce mémoire, nous a permis de calculer analytiquement les fréquences naturelles pour les quatre premiers modes de vibration de cinq modèles de poutres endommagées à savoir : le modèle de J. K. Sinha *et al.*, le modèle de M.H.F. Dado *et al.*, le modèle d'Ostachowicz et Krawkczuk, le modèle de Dimarogonas et Paipetis et celui qui est basé sur la réduction de la raideur E d'un élément poutre. Les fréquences calculées pour ces modèles de fissuration ont été, ensuite, comparées aux fréquences naturelles obtenues expérimentalement [50]. En faisant varier les différents paramètres caractérisant l'endommagement (sévérité, emplacement et nombre d'endommagements) et ceux caractérisant la poutre (longueur, type de matériau, conditions aux limites, nombre d'éléments...), nous avons constaté que les quatre premières fréquences propres calculées pour le modèle de fissuration de Dimarogonas et Paipetis ne sont pas très satisfaisantes comparativement aux fréquences naturelles réelles obtenues expérimentalement avec une erreur moyenne variant de 3,268 à 4,653 %. Quant aux fréquences propres des quatre autres modèles de fissuration sont très satisfaisante comparativement à celles obtenues expérimentalement avec une erreur moyenne qui varie entre 1,177 à 2,973 %.

En second lieu, nous avons testé ces modèles de fissuration sur des méthodes d'identification d'endommagements existant dans la littérature dont nous avons choisi trois méthodes qui sont : la méthode de la forme des courbures modales (FCM), la méthode de la fonction de réponse fréquentielle (FRF), que nous avons amélioré, et la méthode des forces résiduelles modales (FRM). En faisant varier les différents paramètres caractérisant l'endommagement (sévérité, emplacement et nombre d'endommagements) et ceux caractérisant la poutre (les conditions aux limites et le nombre d'éléments), nous avons constaté que :

La détection d'endommagements en appliquant la méthode de la forme des courbures modales (FCM) sur le modèle de fissuration de M. H. F. Dado *et al.* et celui d'Ostachowicz et Krawczuk n'est pas très satisfaisante, en revanche, cette méthode est très efficace sur les trois autres modèles de fissuration et tenant compte du nombre d'éléments utilisé, nous avons remarqué que l'application de cette méthode sur ces trois modèles de fissuration est rapidement convergente, sauf lorsque l'endommagement est proche d'une extrémité de la poutre, cette méthode n'est plus précise.

L'application de la méthode de la fonction de la réponse fréquentielle (FRF) que nous avons amélioré est très efficace sur tous les modèles de fissuration et elle est convergente, sauf dans certains cas de conditions aux limites où l'endommagement est situé à l'extrémité de la poutre, cette méthode devient imprécise. Nous avons aussi constaté que l'application de cette méthode sur le modèle de J. K. Sinha et celui qui est basé sur la réduction de la rigidité  $E$  d'un élément poutre n'est pas très précise dans certains cas de conditions aux limites.

L'application de la méthode des forces résiduelles modales (FRM) sur le modèle d'Ostachowicz et Krawczuk est peu fiable, car l'apparition d'un pic au niveau d'un élément sain et parfois deux pics trompeurs peuvent nous induire en erreur lors de la localisation des endommagements. Par contre, l'application de cette méthode sur les quatre autres modèles de fissuration est très efficace et elle est également convergente.

La détection d'endommagements dans des structures mécaniques vibrantes est une opération très importante car même si la zone endommagée est trop faible, elle peut mettre en danger l'intégrité et la fiabilité de la structure et son influence sur les caractéristiques dynamiques pourrait être importante.

Compte tenu de la fissure comme une forme importante de tels endommagements, sa modélisation est une étape délicate dans l'étude du comportement des structures endommagées. En connaissant la matrice de flexibilité des fissures, la poutre peut être modélisée à l'aide de théories de poutres d'Euler-Bernoulli ou de Timoshenko.

Dans ce présent travail, nous nous sommes intéressés à la modélisation des poutres endommagées basées sur les théories d'Euler-Bernoulli. Pour cela, nous avons étudié cinq modèles de poutres endommagées qui sont : le modèle de J. K. Sinha *et al.*, le modèle de M.H.F. Dado *et al.*, le modèle d'Ostachowicz et Krawkczuk, le modèle de Dimarogonas et Paipetis et le modèle basé sur la réduction de la raideur  $E$  d'un élément poutre.

L'étude de ces modèles de fissuration consiste, en premier lieu, à comparer leurs fréquences propres calculées analytiquement par rapport aux fréquences propres mesurées expérimentalement où nous avons constaté que le modèle de fissuration de Dimarogonas et Paipetis présente certains inconvénients.

En second lieu, ces modèles ont été appliqués sur trois méthodes d'identification d'endommagements à savoir : la méthode de la forme des courbures modales (FCM), la méthode de la fonction de la réponse fréquentielle (FRF) et la méthode des forces résiduelles modales (FRM). Nous avons constaté que le modèle de fissuration de M. H. F. Dado *et al.* et celui d'Ostachowicz et Krawkczuk ne répondent pas convenablement à la détection d'endommagements quand ils sont appliqués sur la méthodes FCM. Nous avons également constaté que l'application du modèle d'Ostachowicz et Krawkczuk sur la méthode FRM n'est pas fiable. Quant à l'application de la méthode FRF que nous avons amélioré est très efficace avec pratiquement tous les modèles que nous avons étudiés, sauf, dans certains cas où l'endommagement est situé au niveau des extrémités de la poutre, cette méthode devient imprécise.

En fin, nous pouvons conclure que tous ces modèles peuvent être appliqués sur toutes les méthodes basée sur la réponse fréquentielle, par contre certains d'entre eux ne sont pas convaincants sur les méthodes qui utilisent les déformées modales.

On peut dire aussi que les modèles présentés par les auteurs (J. K. Sinha *et al.*, M.H.F. Dado *et al.*, Ostachowicz et Krawkczuk, Dimarogonas et Paipetis et le modèle basé sur la réduction de la raideur

E) sont pratiquement convaincants pour simuler une fissure dans le cas de l'identification des structures endommagées.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

- [1] DJEBLOUN Youcef, *Etude de la rupture en mode I d'ouverture des matériaux composites*, Université Mohamed Khider, Biskra, 2004, pages 24-27.
- [2] Thi Thu Ha LE PETIT, *Contribution à la détection et à la localisation d'endommagements par des méthodes d'analyse dynamique des modifications structurales d'une poutre avec tension-Application au suivi des câbles du génie civil*, Université de PARIS-EST, 4 Avril 2014, pages 14-20.
- [3] A. Rytter. *Vibration based inspection of civil engineering structures*. PhD thesis, University of Aalborg, Denmark, 1993.
- [4] S.G. Creed, *Assessment of large engineering structures using data collected during in-service loading-Structural Assessment*, pages 55–62.]
- [5] A.E. Aktan, K.L. Lee, C. Chuntavan, and T. Aksel, *Modal testing for structural identification and condition assessment of constructed facilities*, In Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering, pages 462–462, 1994.
- [6] S. Doebling, C. Farrar, M. Prime, and D. Shevits, *Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics : A literature review*, Los Alamos National Laboratory, USA, 1996, pages 1–136.
- [7] J. Lifshitz and A. Rotem, *Determination of reinforcement unbonding of composites by a vibration technique*, Journal of Composite Materials, 1969, pages 412-423.
- [8] G. Hearn, and R. Testa, *Modal analysis for damage detection in structures*, Journal of Structural Engineering, 1991, pages 3042-3062.
- [9] W. Hasan, *Crack detection from the variation of the eigenfrequencies of a beam on elastic foundation*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 52, 1995, pages 409–421.
- [10] O. Salawu, *Detection of structural damage through changes in frequency : a review*, Engineering Structures, Vol. 19, 1997, pages 718–723.
- [11] M. H. F Dado, *A comprehensive crack identification algorithm for beams under different end conditions*, Applied Acoustics, Vol. 51, 1997, pages 381–398.
- [12] Y. Lee and M. Chung, *A study on crack detection using eigenfrequency test data*, Computers and Structures, Vol. 77, 2000, pages 327–342.
- [13] J. Sinou, and A. W. Lees, *Influence of cracks in rotating shafts*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 285, 2005, pages 1015–1037.
- [14] J. Sinou, *Numerical investigations of a robust identification of crack location and size in beams using only changes in ratio pulsations of the cracked beams*, Structural Engineering Mechanics, Vol. 25, 2007, pages 691–716.

- [15] A. Messina, I. Jones, and E. Williams, *Damage detection and localization using natural frequency changes*, In Proceedings of the 1st Conference on Identification, Cambridge, England, UK, Vol. 1, 1992, pages 67-76.
- [16] R.J. Allemang and D.L. Brown, *Correlation coefficient for modal vector analysis*, Proceedings of 1st International Modal Analysis Conference, 1983, pages 692-695.
- [17] N.A.J. Lieven and D.J. Ewin, *Spatial correlation of modespaces : the coordinate modal assurance criterion*, 6th International Modal Analysis Conference, 1988, pages 1063-1070.
- [18] A. Pandey, M. Biswas, and M. Samman, *Damage detection from changes in curvature mode shapes*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 145, 1991, pages 321-332.
- [19] Y. Ho, and D. Ewins, *On the structural damage identification with mode shapes*, In Proceedings of the European COST F3 Conference on System Identification and Structural Health Monitoring, Madrid, Spain, Vol. 1, 2000, pages 677-686.
- [20] M. Abdel Wahab, and G. De Roeck, *Damage detection in bridges using modal curvatures: application to a real damage scenario*, Journal of Sound and Vibration, 1999, Vol. 226, pages 217-235.
- [21] E. Parloo, P. Guillaume, and M.V. Overmeire, *Damage assessment using mode shape sensitivities*, Mechanical Systems and Signal Processing, 2003, Vol. 17, p. 499-518.
- [22] A. Dutta, and S. Talukdar, *Damage detection in bridges using accurate modal parameters*, Finite Elements in Analysis and Design, 2004, Vol. 40, pages, 287-304.
- [23] Désirée NAJM, *Quels capteurs de vibrations pour la surveillance de santé des structures mécaniques ?*, Université Paris-Est, 28 janvier 2015, pages 23-26.
- [24] C. Dong, P. Zhang, and W.F.T. Huang, *The sensitivity study of the modal parameters of a cracked beam*, Proceedings of 12th International Modal Analysis Conference, 1994, Vol. 1, pages 98-104.
- [25] N. Stubbs, J.T. Kim, and C.R. Farrar. *Field verification of a nondestructive damage localization and severity estimation algorithm*, In Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering, 1995, pages 210-210.
- [26] A. Alvandi, J. Bastien, C. Crémona, M. Jolin, *Evaluation d'endommagement par essais dynamiques*, colloque sur la progression de la recherche québécoise sur les ouvrages d'art, Université Laval, Quebec, Canada, 2005.
- [27] S.H. Petro En S., H. GangaRao, S. Venkatappa, *Damage detection using vibration measurement*, IMAC 15, 1997, pages 113-119.
- [28] E. Parloo, P. Guillaume, M.V. Overmeire, *Damage assessment using mode shape sensitivities*, Mechanical Systems and Signal Processing, 2003, Vol. 17, pages 499- 518.

- [29] A.K. Pandey, M. Biswas, *Damage detection in structures using changes in flexibility*, Journal of Sound and Vibration, 1994, Vol. 169, pages 3-17.
- [30] R. Mayes, *An experimental algorithm for detecting damage applied to the I-40 bridge over the Rio Grande*, IMAC 13, 1995, Vol.1, pages 219-225.
- [31] A. Alvandi, C. Cremona, *Assessment of vibration-based damage identification techniques*, Journal of Sound and Vibration, 2006, Vol. 292, pages 179-202.
- [32] C. Modena, D. Sonda, D. Zonta, *Damage localization in reinforced concrete structures by using damping measurements*, Proceedings of the International Conference on Damage Assessment of Structures, Dublin, Ireland, 1999, Vol.1, pages 132-141.
- [33] H.G. Salane, J.W. Baldwin, *Identification of modal properties of bridges*, ASCE J. Structural Engineering, 1990, Vol. 116, pages 2008-2021.
- [34] C. Kyriazoglou, B. L. Page, and F. Guild, *Vibration damping for crack detection in composite laminates*, Composites Part A : Applied Science and Manufacturing, 2004, Vol. 35, pages 945–953.
- [35] S. Panteliou, T. Chondros, V. Chondros, V. Argyrakis, and A. Dimarogonas, *Damping factor as an indicator of crack severity*, Journal of Sound and Vibration, 2001, Vol. 241, pages 235–245.
- [36] F. Leonard, J. Lanteigne, S. Lalonde, and Y. Turcotte, *Free-vibration behaviour of cracked cantilever beam and crack detection*, Mechanical Systems and Signal Processing, 2001, Vol. 15, pages 529–548.
- [37] W. Heylen, S. Lammens, P. Sas, *Modal analysis theory and testing*, Université de Louvain, Belgique, 1995.
- [38] A.K. Pandey, M. Biswas, M.M. Samman, *Damage detection from changes in curvature mode shapes*, Journal of Sound and Vibration, 1991, Vol. 145, pages 321-332.
- [39] [R.P.C. Sampaio, N.M.M Maia, J.M.M. Silva, *Damage detection using the frequency response function curvature method*, Journal of Sound and Vibration, 1999, Vol. 226, pages 1029-1042.
- [40] M. Palacz, M. Krawczuk, *Vibration parameters for damage detection in structures*, Journal of Sound and Vibration, 2002, Vol. 249, pages 999-1010.
- [41] J.M. Ricles, and J.B. Kosmatks, *Damage detection in elastic Structures using vibratory residual forces and weighted sensitivity*, AIAA Journal, 1992, Vol.30, pages 2310-2316.
- [42] I. Sheinman, *Damage detection and updating of stiffness and mass matrices using mode data*, Computers & Structures, 1996, Vol.59, pages 149-156.
- [43] H. Baruh, and S. Ratan, *Damage Detection in Flexible Structures*, Journal of Sound and Vibration, 1993, Vol. 166, pages 21-30.

- [44] J.K. Liu and Q.W. Yang, *A new structural damage identification method*, J. Sound Vib., 2006, Vol. 297, pages 694-703.
- [45] [Hervé Oudin, *Méthode des éléments finis*, HAL, Nantes, France, 26 mai 2011.
- [46] G. Lakshmi Narasaiah, *Finite Element Analysis*, BS Publications, Vikasnagar, Hyderabad, 2008, pages 92-94.
- [47] G. R. Liu, S. S. Quek , *The finite element method*, Butterworth-Heinemann, Oxford, England, 2003, pages 67-71.
- [48] LARBI Djedjiga, *Détection d'endommagements multiples dans les structures mécaniques par mesures vibratoires*, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, 2014-2015, pages 61-62, 67-71.
- [49] Ranjan Kumar Behera, *Fault diagnosis of inclined edge cracked cantilever beam using vibrational analysis and artificial intelligence techniques*, National Institute of Technology, Rourkela, Odisha, India, may 2014, pages 18-220.
- [50] J. K. Sinha et al, *Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data*, Journal of Sound and vibration, 2002, Vol. 251(1), pages 13-38.
- [51] M.H.F. Dado et al, *Coupled transverse and axial vibratory behaviour of cracked beam with end mass and rotary inertia*, Journal of Sound and Vibration, 2003, Vol. 261, pages 675–696.
- [52] W. M. Ostachowicz, M. Krawczuk, *Analysis of the effect of cracks on the Natural Frequencies of a Cantilever Beam*, Journal of Sound and Vibration, 1991, Vol. 150, pages 191–201.
- [53] A.D. Dimarogonas, S.A. Paipetis, *Analytical Methods in Rotor Dynamics*, Elsevier Applied Science, London, 1983.
- [54] S. Christides and A. D. S. Barr, *One dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams*, International Journal of Mechanical Science, 1984, Vol. 26, pages 639-648.
- [55] H.L. Ewalds, R.J.H. Wnahil, *Fracture mechanics*, Edward Arnold and Delftse Uitgevers Maatschappij, London, 1984.
- [56] A.D. Dimarogonas, C.A. Papadopoulos, *Vibration of cracked shafts in bending*, Journal of Sound and Vibration, 1983, Vol. 15, pages 439–444.
- [57] Jinhee Lee, *Identification of multiple cracks in a beam using vibration amplitudes*, Journal of Sound and Vibration, 2009, Vol. 326, pages 205-2012.
- [58] S. Rucevskis and M. Wesolowski, *Identification of damage in a beam structure by using mode shape curvature squares*, Shock and Vibration, 2010, Vol. 17, pages 601–610.
- [59] X.B Lu et al, *A two-step approach for crack identification in beam*, Journal of Sound and Vibration, 2013, Vol. 332, pages 282-293.

[60] Wei-Xin Ren and Danjiang Yu, *Structural damage identification using residual Modal Forces*, proceeding of IMAC-XXI : A conference on structural dynamics, February 3-6, Kissimmee, florida, USA, 2003.

[61] H.Y. Hwanga, C. Kimb, *Damage detection in structures using a few frequency response measurements*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 270, pages 1–14, 2004.

---

**Annexe A. Modèles éléments finis endommagés de J. K. Sinha *et al.* :**


---

**A.1.** Matrice de réduction de rigidité pour les éléments d'une structure treillis endommagée :

$$[K_{cj}] = \frac{E(A - A_c)}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec  $A$  est l'aire de la section droite non endommagée  $A_c = b(h - a)$  est l'aire de la section droite endommagée,  $b$  et  $h$  sont la largeur et la hauteur de l'élément et  $a$  est la profondeur de la fissure.

**A.2.** Matrice de réduction de rigidité pour les éléments d'une poutre endommagée travaillant en flexion pure :

$$[K_{cj}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & -k_{11} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & -k_{12} & k_{24} \\ -k_{11} & -k_{12} & k_{11} & -k_{14} \\ k_{14} & k_{24} & -k_{14} & k_{44} \end{bmatrix}$$

Dans lequel :

$$k_{11} = \frac{12E(I - I_{cj})}{l_e^4} \left[ \frac{2l_c^3}{l_e^2} + 3l_c \left( \frac{2X_j}{l_e} - 1 \right)^2 \right]$$

$$k_{12} = \frac{12E(I - I_{cj})}{l_e^3} \left[ \frac{l_c^3}{l_e^2} + l_c \left( 2 - \frac{7X_j}{l_e} + \frac{6X_j^2}{l_e^2} \right) \right]$$

$$k_{14} = \frac{12E(I - I_{cj})}{l_e^3} \left[ \frac{l_c^3}{l_e^2} + l_c \left( 1 - \frac{5X_j}{l_e} + \frac{6X_j^2}{l_e^2} \right) \right]$$

$$k_{22} = \frac{12E(I - I_{cj})}{l_e^2} \left[ \frac{3l_c^3}{l_e^2} + 2l_c \left( \frac{3X_j}{l_e} - 2 \right)^2 \right]$$

$$k_{24} = \frac{12E(I - I_{cj})}{l_e^2} \left[ \frac{3l_c^3}{l_e^2} + 2l_c \left( 2 - \frac{9X_j}{l_e} + \frac{9X_j^2}{l_e^2} \right) \right]$$

$$k_{44} = \frac{12E(I - I_{cj})}{l_e^2} \left[ \frac{3l_c^3}{l_e^2} + 2l_c \left( \frac{3X_j}{l_e} - 1 \right)^2 \right]$$

Où  $I = \frac{bh^3}{12}$  et  $I_{cj} = \frac{b(h-a_j)^3}{12}$  sont, respectivement, le moment quadratique des zones non fissurées et celui au niveau de la  $j^{\text{ème}}$  fissure,  $l_e$  est la longueur de l'élément,  $l_c = 1.5h$  et  $X_j$  est la position locale de la  $j^{\text{ème}}$  fissure.

**A.3.** Matrice de réduction de rigidité pour les éléments d'une structure portique endommagée :

$$[K_{cj}] = \begin{bmatrix} \frac{E(A - A_c)}{l_e} & 0 & 0 & -\frac{E(A - A_c)}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & k_{11} & k_{12} & 0 & -k_{11} & k_{14} \\ 0 & k_{12} & k_{22} & 0 & -k_{12} & k_{24} \\ -\frac{E(A - A_c)}{l_e} & 0 & 0 & \frac{E(A - A_c)}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{11} & -k_{12} & 0 & k_{11} & -k_{14} \\ 0 & k_{14} & k_{24} & 0 & -k_{14} & k_{44} \end{bmatrix}$$

## Annexe B. Modèles éléments finis endommagés de M.H.F. Dado *et al.* :

---

**B.1.** Matrice de rigidité pour les éléments d'une structure treillis endommagée :

$$[K_e^f] = \frac{EA}{l_e + EAc} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{2h}{EA} (3.9601\bar{a}^2 - 1.08786\bar{a}^3 + 37.297\bar{a}^4 - 67.3973\bar{a}^5 + 199.848\bar{a}^6 - 424.0371\bar{a}^7 + 883.025\bar{a}^8 - 938.075\bar{a}^9 + 601.704\bar{a}^{10}).$$

Où  $h$  est la hauteur de l'élément,  $\bar{a} = \frac{a}{h}$  est la profondeur normalisée de la fissure.

**B.2.** Matrice de rigidité pour les éléments d'une poutre endommagée travaillant en flexion pure :

$$[K_e^f] = \frac{6EI}{\Delta} \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{12}]^T & [k_{22}] \end{bmatrix}$$

Avec :

$$[k_{11}] = \begin{bmatrix} 6(l_e + cEI) & 3(l_e^2 + 2xcEI) \\ 3(l_e^2 + 2xcEI) & 2(l_e^3 + 3x^2cEI) \end{bmatrix}$$

$$[k_{12}] = \begin{bmatrix} -6(l_e + cEI) & 3(l_e^2 + 2(l_e - x)cEI) \\ -3(l_e^2 + 2xcEI) & (l_e^3 + 6x(l_e - x)cEI) \end{bmatrix}$$

$[k_{12}]^T$  est la transposée de  $[k_{12}]$

$$[k_{22}] = \begin{bmatrix} 6(l_e + cEI) & -3(l_e^2 + 2(l_e - x)cEI) \\ -3(l_e^2 + 2(l_e - x)cEI) & 2(l_e^3 + 3(l_e - x)^2cEI) \end{bmatrix}$$

$$\Delta = 9(l_e^2 + 2xcEI)(l_e^2 + 2(l_e - x)cEI) - 6(l_e + cEI)(l_e^3 + 2x(l_e - x)cEI).$$

$$c = \frac{6h}{EI} (1.98\bar{a}^2 - 3.277\bar{a}^3 + 14.251\bar{a}^4 - 31.08\bar{a}^5 + 62.79\bar{a}^6 - 102.171\bar{a}^7 + 146.404\bar{a}^8 - 127.69\bar{a}^9 + 61.504\bar{a}^{10}).$$

Où  $E$  est le module d'Young,  $I$  est le moment d'inertie de la section droite de l'élément et  $l_e$  sa longueur,  $x$  est l'emplacement de la fissure dans le système de coordonnées locales de l'élément et  $c$  est la complaisance des fissures.

**B.3. Matrice de rigidité pour les éléments d'une structure portique endommagée :**

$$[K_e^f] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\Delta = \frac{l_e^2}{3EI} \left[ (l_e^2 - 3x(l_e - x)) \left( c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31} + \frac{c_{33}l_e}{EA} \right) + \frac{l_e^3(l_e + c_{11}EA)}{4AIE^2} \right].$$

Où  $E$  est le module d'Young,  $A$  est l'aire de la section droite non endommagée,  $I$  est le moment d'inertie de la section droite de l'élément et  $l_e$  sa longueur,  $x$  est l'emplacement de la fissure dans le système de coordonnées locales et  $c$  est la complaisance des fissures.

Les matrices  $[k_{ij}]$  (3 x 3) de la matrice endommagée  $[K_e^f]$  sont données comme suit :

$[k_{11}] =$

$$\begin{bmatrix} \frac{l_e c_{33} (l_e^2 - 3x(l_e - x))}{3EI} - \frac{l_e^4}{12l_e^2 E^2} & \frac{-c_{13} l_e (2x - l_e)}{2EI} & \frac{-c_{13} l_e^2 (3x - 2l_e)}{6EI} \\ \frac{-c_{31} l_e (2x - l_e)}{2EI} & \frac{-c_{33} l_e}{EA} - (c_{11} c_{33} - c_{13} c_{31}) & \frac{-c_{33} l_e x}{EA} - x(c_{11} c_{33} - c_{13} c_{31}) \\ & \frac{l_e (l_e + c_{11} EA)}{2AIE^2} & \frac{l_e^2 (l_e + c_{11} EA)}{2AIE^2} \\ \frac{-c_{31} l_e^2 (3x - 2l_e)}{6EI} & \frac{-c_{33} l_e x}{EA} - x(c_{11} c_{33} - c_{13} c_{31}) & \frac{-c_{33} l_e x^2}{EA} - x^2(c_{11} c_{33} - c_{13} c_{31}) \\ & \frac{l_e^2 (l_e + c_{11} EA)}{2AIE^2} & \frac{l_e^3 (l_e + c_{11} EA)}{2AIE^2} \end{bmatrix}$$

$$[k_{12}] =$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} \frac{l_e c_{33}(l_e^2 - 3x(l_e - x))}{3EI} + \frac{l_e^4}{12EI^2} & \frac{c_{31}l_e(2x - l_e)}{2EI} & -\frac{c_{31}l_e^2(2x - l_e)}{6EI} \\ \frac{c_{31}l_e(2x - l_e)}{2EI} & \frac{c_{33}l_e}{EA} + (c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) + \frac{l_e(l_e + c_{11}EA)}{AIE^2} & \frac{-c_{33}l_e(l_e - x)}{EA} - (l_e - x)(c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) + \frac{l_e^2(l_e + c_{11}EA)}{2AIE^2} \\ \frac{c_{31}l_e^2(2x - l_e)}{6EI} & \frac{c_{33}l_e x}{EA} - x(c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) + \frac{l_e^2(l_e + c_{11}EA)}{2AIE^2} & \frac{-c_{33}x l_e(l_e - x)}{EA} - x(l_e - x)(c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) + \frac{l_e^3(l_e + c_{11}EA)^2}{2AIE^2} \end{array} \right]$$

$$[k_{21}] =$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} \frac{l_e c_{33}(l_e^2 - 3x(l_e - x))}{3EI} + \frac{l_e^4}{12EI^2} & \frac{c_{31}l_e(2x - l_e)}{2EI} & \frac{-c_{31}l_e^2(2x - l_e)}{6EI} \\ \frac{c_{31}l_e(2x - l_e)}{2EI} & \frac{c_{33}l_e}{EA} + (c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) + \frac{l_e(l_e + c_{11}EA)}{AIE^2} & \frac{-c_{33}l_e(l_e - x)}{EA} - (l_e - x)(c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) + \frac{l_e^2(l_e + c_{11}EA)}{2AIE^2} \\ \frac{c_{31}l_e^2(2x - l_e)}{6EI} & \frac{c_{33}l_e x}{EA} - x(c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) + \frac{l_e^2(l_e + c_{11}EA)}{2AIE^2} & \frac{-c_{33}l_e(l_e - x)}{EA} - x(l_e - x)(c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) + \frac{l_e^3(l_e + c_{11}EA)}{2AIE^2} \end{array} \right]$$

$$[k_{22}] =$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} \frac{-c_{33}(l_e^2 - 3x(l_e - x))}{3EA} - \frac{l_e^4}{12E^2I^2} & \frac{-c_{13}l_e(2x - l_e)}{2EI} & \frac{c_{13}l_e^2(3x - l_e)}{6EI} \\ -\frac{c_{13}l_e(2x - l_e)}{2EI} & -\frac{c_{33}l_e}{EA} - (c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) - \frac{l_e(l_e + c_{11}EA)}{AIE^2} & \frac{c_{33}l_e(l_e - x)}{EA} + (l_e - x)(c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) + \frac{l_e^2(l_e + c_{11}EA)}{2AIE^2} \\ \frac{c_{13}l_e^2(3x - l_e)}{6EI} & \frac{c_{33}l_e(l_e - x)}{EA} + (l_e - x)(c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) + \frac{l_e^2(l_e + c_{11}EA)}{2AIE^2} & \frac{-c_{33}l_e(l_e - x)^2}{EA} - x(l_e - x)(c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) - \frac{l_e^3(l_e + c_{11}EA)}{2AIE^2} \end{array} \right]$$

Où  $c_{11}$  est la complaisance de fissuration dans le mode de chargement axial (traction),  $c_{33}$  est la complaisance de fissuration dans le mode de chargement en flexion,  $c_{13}$  est la complaisance de fissuration du couplage traction-flexion,  $c_{31}$  est la complaisance de fissuration du couplage flexion-traction. Ces coefficients sont donnés comme suit :

$$c_{11} = \frac{2h}{EA} (3.9601\bar{a}^2 - 1.08786\bar{a}^3 + 37.297\bar{a}^4 - 67.3973\bar{a}^5 + 199.848\bar{a}^6 - 424.037\bar{a}^7 \\ + 883.025\bar{a}^8 - 938.075\bar{a}^9 + 601.704\bar{a}^{10}).$$

$$c_{33} = \frac{6h}{EI} (1.98\bar{a}^2 - 3.277\bar{a}^3 + 14.251\bar{a}^4 - 31.08\bar{a}^5 + 62.79\bar{a}^6 - 102.171\bar{a}^7 + 146.404\bar{a}^8 \\ - 127.69\bar{a}^9 + 61.504\bar{a}^{10}).$$

$$c_{13} = c_{31} = \frac{6}{EA} (1.98\bar{a}^2 - 1.91\bar{a}^3 + 15.919\bar{a}^4 - 34.823\bar{a}^5 + 83.282\bar{a}^6 - 152.564\bar{a}^7 \\ + 255.078\bar{a}^8 - 243.972\bar{a}^9 + 132.878\bar{a}^{10}).$$