

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI TIZI-OUZOU

Faculté du Génie de la Construction

Département de Génie Mécanique



THESE DE DOCTORAT ES SCIENCES

Présentée par

LATTARI Kamel

THEME

**ANALYSE STATIQUE ET DYNAMIQUE D'UN OUVRAGE
SUSPENDU LEGER ET SANS POUTRE DE RIGIDITE:
APPLICATION A UNE PASSERELLE PIETONNIERE
RIGIDIFIEE PAR CABLES PRECONTRAINTS**

Devant le jury composé de:

KACI Salah	Professeur	U.M.M.Tizi-Ouzou	Président
SADAOUI Arezki	Professeur	U.M.M.Tizi-Ouzou	Rapporteur
KHENNANE Amar	S. Lecturer	ADFA-UNSW	Co-rapporteur
BALI Abderrahim	Professeur	E.N.P. El-Harrach	Examineur
BILEK Ali	Professeur	U.M.M.Tizi-Ouzou	Examineur
ROURE Francesc	Professeur	UPC Barcelona	Examineur

Soutenue, le 19 septembre 2018

REMERCIEMENTS

A l'issue de cette présente étude, j'adresse mes remerciements à Dieu de m'avoir donné la chance et le courage d'aboutir au terme de cette recherche.

J'adresse aussi mes plus vifs remerciements, ma profonde reconnaissance et ma vive gratitude à Monsieur SADAoui Arezki de m'avoir proposé ce sujet et de m'avoir fait profiter de ses connaissances et de sa rigueur scientifique. Je remercie également Monsieur KHENNANE Amar pour sa précieuse collaboration.

Mes remerciements s'adressent aussi à Messieurs KACI Salah, BALI Abderrahim, BILEK Ali et ROURE Francesc pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'examiner ce travail.

RESUME

L'objectif de cette recherche consiste, en premier lieu, de développer une méthode de calcul analytique, simple mais suffisamment précise et fiable, permettant d'aborder le calcul statique et dynamique d'un ouvrage suspendu léger et sans poutre de rigidité qui se compose principalement d'une nappe de suspentes verticales réunissant un câble porteur et un câble de rigidité fixés en leurs extrémités à des massifs d'ancrage. Un tel système peut supporter éventuellement un tablier léger supposé dépourvu de rigidité propre appréciable pouvant dans le cas pratique être l'exemple d'une passerelle piétonnière très flexible dont l'implantation est très intéressante dans des sites d'attraction. En deuxième lieu, il s'agit de mettre en évidence, au moyen d'une analyse paramétrique appropriée, l'effet des paramètres principaux sur le comportement de la structure, et établir leurs valeurs critiques à partir desquelles la non-linéarité se révèle significative.

Les développements mathématiques sont présentés d'une manière succincte et exploitent fondamentalement l'approche qui assimile le comportement de la nappe des suspentes à celui d'un voile continu et inextensible. Sous l'action des charges statiques et thermiques, les fondements théoriques de la méthode, essentiellement non linéaire, sont basés sur l'équation des déplacements orthogonaux et la condition d'immobilité des extrémités des câbles solidaires des massifs d'ancrage. Les équations à caractère non linéaire décrivant les tractées ou les poussées dans les câbles, sont établies de façon à être résolues par la méthode de Newton-Raphson à double itération. Les sollicitations d'origine mécanique ainsi que les effets de changements de température liés aux agressions environnementales sont supposés appliqués dans le plan propre de la structure. Par analogie avec la théorie des ponts suspendus à poutre de rigidité, les câbles sont supposés prendre appuis sur les pylônes par l'intermédiaire de chariots de dilatation, afin qu'aucune réaction horizontale ne puisse s'exercer sur les pylônes.

Sous l'effet dynamique, la théorie linéaire en régime vibratoire libre a été adoptée. L'équation d'équilibre de mouvement vertical d'un élément différentiel dans la direction longitudinale de la structure et les équations des poussées engendrées dans les câbles sont linéarisées en négligeant les effets de second ordre liés aux grands déplacements. Cependant, seul le mouvement transversal vertical est considéré vu que la célérité des ondes de vibration longitudinales est généralement beaucoup moins importante que les ondes de vibration transversales. L'équation de mouvement ainsi obtenue a été résolue en considérant deux modes distincts ; un mode propre antisymétrique dans lequel les variations des poussées dans les câbles sont négligeables et un mode propre symétrique caractérisé par une équation transcendante dont découlent les fréquences propres de vibration symétriques.

La méthode de calcul est ensuite appliquée principalement à différents aspects de l'analyse d'une passerelle piétonnière rigidifiée par câbles précontraints en considérant différents types de charges et plusieurs niveaux distincts de variations de température susceptibles de se produire lors de la vie de l'ouvrage. Les résultats sont confrontés avec succès à ceux issus du logiciel ANSYS qui est un code essentiellement numérique basé sur la méthode des éléments finis dont le principe consiste de traiter la structure comme telle soit par modèle discret.

L'analyse paramétrique démontre le rôle stabilisateur du câble de rigidité où sans affecter significativement la hausse du poids propre de la travée, un choix adéquat de la cambrure et de la précontrainte initiale de réglage permet de réduire sensiblement la déformabilité à laquelle sont sujettes en majorité ce type de structures suspendues. Avec des valeurs relativement élevées de la cambrure, on pourrait réduire de façon appréciable (jusqu'à environ 60%) les déplacements et les variations des poussées par rapport à une cambrure quasi-rectiligne qui est la configuration généralement utilisée jusqu'ici en pratique. On met également en évidence que la non-linéarité observée est du type positif ou favorable et contribue à la rigidification du système.

ABSTRACT

The aim of this study is to develop a simple analytical method to help with the design of a lightweight cable system without a stiffening beam, like a bi-concave cable truss submitted to static and dynamic actions. The system consists of two main major cables anchored at their ends. Attached to the cables is a series of pin-ended hangers supporting a lightweight deck whose stiffness can be neglected. Such system, could form a very flexible pedestrian bridge, which can be located in a tourist attraction because of its architectural appeal.

The mathematical developments are presented in a succinct manner and based on the fundamental assumption that the hangers form a continuous inextensible diaphragm. Under thermal and static loading, two nonlinear equations describing the cable thrusts, which are the unknowns of the problem, were derived using orthogonal displacement functions subject to the boundary conditions of the cable ends at the anchorages. The mechanical loads as well as the effects of temperature changes were assumed to act only in the plane of the structure. By analogy with the theory of suspension bridges with a stiffening beam, the cables were supposed to take support on the pylons by means of roller supports such that no horizontal reaction can be exerted on the pylons.

Under the action of dynamic forces, the linear theory of free vibrations of a cable truss was adopted. The equation of vertical motion of a differential element of the structure in equilibrium, and the equations of the thrusts generated in the cables are linearized by neglecting the second-order effects related to large displacements. However, only vertical motion is considered since the velocity of the longitudinal vibration waves is generally much smaller than the vertical transverse waves. The resolution of the resulting equations leads to a transcendental equation giving rise to antisymmetric eigen modes and symmetric eigen modes from which the natural frequencies of vibration and the modal deformations are derived.

The derived method is then applied to different aspects of the analysis of a pedestrian bridge considering different types of loads, and different levels of temperature variations that may occur during the life of the structure. The results compare well with those from ANSYS, which is a commercial numerical code based on the finite element method. The developed method proved to be very reliable, efficient and accurate. The efficient contribution of the major stiffening cable parameters, the camber and the pre-tension, on the structure stability was also demonstrated. With relatively high values of the camber, one could appreciably reduce (up to about 60%) the displacements and the variations of the cable thrusts with respect to a quasi-rectilinear arching configuration which is mostly used in practice. It is also shown that the non-linearity observed is of the positive or favourable type and contributes to the stiffening of the system.

TABLE DES MATIERES

Remerciements.....	i
Résumé	ii
Abstract.....	iii
Table des matières	iv
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	xiii
Notations.....	xiv
Liste des abréviations	xx

Chapitre 1 : Introduction

1-1 Intérêt du Problème	01
1-2 Etat de la question	03
1-3 Objectifs de ce travail.....	07
1-4 Revue et critique des études antérieures	08
1-4-1 Approche par modèle discret	08
1-4-2 Approche par modèle continu	10
1-4-3 Critique de ces études	11
1-5 Cheminement du travail suivi	12

Chapitre 2 : Durabilité et vibrations des câbles de suspension

2-1 Généralités	15
2-2 Principe de fonctionnement et qualités exigées des câbles d'un ouvrage suspendu	16
2-2-1 Principe de fonctionnement de l'ouvrage	16
2-2-2 Câbles employés	17
2-2-3 Qualités exigées des câbles	18
2-3 Durabilité des câbles de précontrainte	20
2-3-1 Paramètres dont dépend la durabilité des câbles	20
2-3-2 Inventaire des facteurs de vieillissement des câbles	21
2-3-3 Effets des sollicitations mécaniques	24
2-3-4 Effets des sollicitations environnementales	26
2-3-5 Effets conjugués des sollicitations mécaniques et environnementales	27

2-3-6 Choix des matériaux	28
2-4 Vibrations des câbles	32
2-4-1 Paramètres aérodynamiques d'un câble	32
2-4-2 Phénomènes physiques engendrant des vibrations	36
2-4-3 Spécification contre les vibrations des câbles	41
2-5 Catégories des câbles de précontrainte	44
2-5-1 Catégorie MTP : câbles multi-torons parallèles	44
2-5-2 Catégorie MFP : câbles multi-fils parallèles	46
2-5-3 Catégorie TMC: câbles à torons multi-couches	47

Chapitre 3 : Analyse du comportement d'un câble seul et d'un système à treillis de câbles doublement inversés : revue des formulations théoriques de base

3-1 Généralités	49
-----------------------	----

Première partie : Analyse du comportement statique et dynamique d'un câble isolé de forme parabolique – revue et synthèse bibliographiques

3-2 Réponse statique d'un câble parabolique sous charges transversales	50
3-2-1 Sous l'action du poids propre	50
3-2-2 Sous l'action des charges appliquées	61
3-3 Réponse dynamique d'un câble parabolique en régime libre	71
3-3-1 Aperçu historique	71
3-3-2 Bases théoriques	73
3-3-3 Mouvement transversal horizontal	76
3-3-4 Mouvement vertical	77

Deuxième partie: Analyse du comportement d'un système symétrique à treillis constitués de câbles paraboliques biconvexes ou biconcaves

3-4 Réponse statique sous charges verticales	87
3-4-1 Equation d'équilibre d'un élément différentiel à treillis symétrique de câble	88
3-4-2 Sous l'action d'une charge ponctuelle	91
3-4-3 Sous l'action d'une charge uniformément répartie	93
3-4-4 Sous l'action d'un bloc de charge triangulaire	94
3-5 Réponse dynamique en régime libre ou théorie linéaire des vibrations libres d'un système symétrique à treillis de câbles paraboliques et biconvexes	98

3-5-1 Formulation lors des conditions initiales	99
3-5-2 Formulation de l'équation d'équilibre sous charges statiques	100
3-5-3 Formulation de l'équation de mouvement	101
3-5-4 Réponse dynamique en régime vibratoire libre	102

Chapitre 4: Développements théoriques de la méthode de calcul d'un ouvrage suspendu léger et sans poutre de rigidité appliquée à une passerelle piétonnière rigidifiée par câbles précontraints – effets statique et dynamique

4-1 Généralités	107
-----------------------	-----

Première partie: Analyse sous charges statiques d'origine mécanique ou thermique

4-2 Formes initiales d'équilibres	108
4-2-1 Câble de rigidité	110
4-2-2 Câble principal	110
4-3 Formes d'équilibre sous charge (s)	111
4-4 Equation de la déformée	111
4-5 Formulation des poussées dans les câbles	112
4-5-1 Equation servant de base de calcul de la poussée	112
4-5-2 Calcul des coefficients de longueur L_t et L_s	115
4-5-3 Application au cas d'un système vertical précontraint	116
4-6 Déformation des câbles	123
4-7 Efforts dans les suspentes	124
4-7-1 Traction concentrée	125
4-7-2 Traction répartie	125
4-8 Efforts dans les câbles	126
4-9 Coefficients associés à la transformation polynomiale des équations de poussées	128

Deuxième partie: Analyse dynamique en régime vibratoire libre

4-10 Formulation de l'équation élémentaire de mouvement	130
4-10-1 Lors du réglage initial	130
4-10-2 Sous l'action des surcharges d'intensité p	131
4-10-3 Sous l'action d'une vibration libre (v^*)	133
4-11 Equations des poussées des câbles sous forme linéarisée	134

4-11-1 Cas du câble de rigidité	134
4-11-2 Cas du câble porteur	135
4-12 Equation générale transcendante en régime vibratoire libre	136
4-12-1 Modes de vibration antisymétriques	137
4-12-2 Modes de vibration symétriques	138

Chapitre 5 : Expérimentations numériques, validations et analyses

5-1 Généralités	141
5-2 Organigramme général du programme de calcul BPCVER	141
5-3 Expérimentations numériques, validation et discussions des résultats	143
5-3-1 Description de la structure	145
5-3-2 Résultats numériques, validations et discussions	146
5-4 Analyse paramétrique	152
5-4-1 Paramètres principaux étudiés	152
5-4-2 Effet de la cambrure du câble de rigidité	154
5-4-3 Effet de la précontrainte H_1	162
5-4-4 Effet des variations de températures	164
5-5 Calcul des pulsations et des fréquences propres de vibration.....	172

Chapitre 6 : Conclusions générales

6-1 Rétrospective	178
6-2 Organisation du travail	180
6-3 Résultats obtenus	182
6-4 Recommandations futures	183

Références	185
------------------	-----

ANNEXE A : Organigramme de calcul des paramètres initiaux de la structure (ANSYS)..	188
-------------------------------------------------------------------------------------	-----

ANNEXE B : Organigramme du calcul statique sous charges verticales (ANSYS).....	189
---------------------------------------------------------------------------------	-----

ANNEXE C : Organigramme du calcul statique sous charges verticales suivies d'une variation de la température par le code ANSYS	190
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

ANNEXE D : Organigramme du calcul fréquentiel par le code ANSYS	191
-----------------------------------------------------------------------	-----

LISTE DES FIGURES

Figure 1-1: Vue du pont suspendu de Clifton en Angleterre	01
Figure 1-2: Structure de la toiture suspendue de la station du métro Erasme à Bruxelles ...	02
Figure 1-3: Pont Sidi M’Cid de Constantine	03
Figure 1-4: Pont routier Pierre-Laporte, Québec city	03
Figure 1-5: Pont du Golden Gate, San- Francisco ; Californie	04
Figure 1-6: Description d’un système vertical précontraint	05
Figure 1-7: Passerelle piétonnière suspendue rigidifiée par des câbles précontraints	06
Figure 1-8 : Vue du téléphérique de Renon, Italie	06
Figure 1-9 : Vue d’une télécabine entre Oued Koriche et Bouzaréah, Alger	07
Figure 1-10: Approche discrétisée par éléments finis	09
Figure 1-11: Approche par modèle continu	11
Figure 2-1 : Principe de fonctionnement d’un pont suspendu	17
Figure 2-2 : Chariot mobile en tête de pylône [27]	17
Figure 2-3: Faisceaux de torons parallèles et enroulés [28]	18
Figure 2-4: Transmission des efforts dans les câbles	19
Figure 2-5 : Fatigue induite par petits débattements	25
Figure 2-6 : Usure induite par petits débattements	25
Figure 2-7 : Facies de rupture par fatigue.....	25
Figure 2-8 : Rupture de gaine PEHD de type ESC	28
Figure 2-9 : Evolution du coefficient de traînée du cylindre en fonction du nombre de Reynolds de l’écoulement.....	33
Figure 2-10: Amortisseurs du pont de Normandie	41
Figure 2-11: Gaines profilées et aiguilles du pont de Normandie	42
Figure 2-12 : Détail d’un toron	45
Figure 2-13 : Schéma de principe d’un câble MTP à gaine individuelle	45
Figure 2-14 : Schéma de principe d’un câble MTP à gaine collective	45
Figure 2-15 : Coupe transversale d’un câble MFP	46

Figure 2-16 : Coupe transversale types des câbles TMC	48
Figure 2-17 : Câble TMC	48
Figure 3-1 : Comportement d'une parabole inextensible	52
Figure 3-2 : Câble dans ses positions extensible et inextensible	56
Figure 3-3 : Solution graphique d'une parabole élastique [32]	58
Figure 3-4 : Photo de ligne de transport d'énergie électrique.....	60
Figure 3-5 : Câble sous charge ponctuelle.....	62
Figure 3-6 : Emplacement du premier élément du tablier du pont de Bosphore [32].....	66
Figure 3-7 : Câble parabolique sous charge partiellement répartie.....	66
Figure 3-8 : Travée partiellement et complètement chargée	70
Figure 3-9 : Configuration du câble sous l'action d'un petit déplacement arbitraire	75
Figure 3-10 : Première composante longitudinale du mode antisymétrique [32].....	79
Figure 3-11 : Seconde composante longitudinale du mode antisymétrique	80
Figure 3-12 : Illustration graphique de la première solution non nulle de l'équation transcendante (3-54) ; [32].....	82
Figure 3-13 : Formes possibles de la première composante verticale du mode symétrique plan [32]	83
Figure 3-14 : Système à treillis de câbles de forme biconvexe.....	87
Figure 3-15 : Equilibre vertical d'un élément du treillis à câbles	88
Figure 3-16 : Forme parabolique des câbles	91
Figure 3-17 : Sous charge ponctuelle	92
Figure 3-18 : Sous charge uniforme	94
Figure 3-19 : Sous charge triangulaire	94
Figure 3-20a : Toiture d'une salle de sport.....	95
Figure 3-20b : Application complète de la charge sur la toiture	96
Figure 3-20c : Flèches du système sous la charge de la toiture	97
Figure 3-20d : Application partielle de la charge sur la toiture	97
Figure 3-21 : Equilibre différentiel d'un élément lors du réglage initial.....	99
Figure 3-22 : Equilibre statique d'un élément à treillis de câbles convexes.....	100

Figure 3-23 : Equation de mouvement en régime libre	101
Figure 4-1 : Conditions initiales des câbles	108
Figure 4-2 Déformation d'un élément de câble	112
Figure 4-3 : Système vertical précontraint.....	116
Figure 4-4 : Cas de charge particuliers sur une travée type.....	120
Figure 4-5 : Algorithme général de la méthode de Newton–Raphson à double itération	122
Figure 4-6 : Efforts dans les câbles	128
Figure 4-7 : Equilibre d'un élément lors du réglage initial de l'ouvrage	131
Figure 4-8 : Equilibre de l'élément en présence des surcharges (p)	132
Figure 4-9 : Equation générale de mouvement en vibration libre.....	134
Figure 5-1 : Organigramme de la méthode de calcul	143
Figure 5-2 : Vue en élévation de la structure suspendue	144
Figure 5-3 : Vue en profil de la structure suspendue	144
Figure 5-4 : Comparaison des résultats sous la charge répartie	150
Figure 5-5 : Comparaison des résultats sous la charge concentrée	150
Figure 5-6 : Comparaison des résultats obtenus sous la charge uniforme $p=4\text{kN/m}$ et la variation de température $\Delta T=20^\circ\text{C}$	151
Figure 5-7 : Maillage utilisé lors de la simulation avec ANSYS	151
Figure 5-8 : Disposition des charges des cas envisagées.....	153
Figure 5-8a : Déformée selon la disposition de charge adoptée dans le cas 1	155
Figure 5-8b : Variation de la flèche en fonction de la cambrure selon le cas1	155
Figure 5-8c : Variation de la poussée du câble supérieur en fonction de la cambrure pour différents niveaux de chargement selon le cas 1	156
Figure 5-8d : Variation de la poussée du câble de rigidité en fonction de la cambrure pour différents niveaux de chargement selon le cas 1	156
Figure 5-9a : Déformée selon la disposition de charge adoptée dans le cas 2	157
Figure 5-9b : Variation de la flèche en fonction de la cambrure selon le cas2	157
Figure 5-9c : Variation de la poussée du câble supérieur en fonction de la cambrure pour différents niveaux de chargement selon le cas 2	158

Figure 5-9d : Variation de la poussée du câble de rigidité en fonction de la cambrure pour différents niveaux de chargement selon le cas 2	158
Figure 5-10a : Déformée selon la disposition de charge adoptée dans le cas 3	159
Figure 5-10b : Variation de la flèche à mi-travée en fonction de la cambrure pour différents niveaux de chargement selon le cas 3	159
Figure 5-10c : Variation de la poussée du câble supérieur en fonction de la cambrure pour différents niveaux de chargement selon le cas 3	160
Figure 5-10d : Variation de la poussée du câble de rigidité en fonction de la cambrure pour différents niveaux de chargement selon le cas 3	160
Figure 5-11 : Variation de la flèche en fonction de la cambrure, pour des charges très élevées	161
Figure 5-12 : Variation de la poussée du câble de rigidité en fonction de la cambrure, pour des charges très élevées	161
Figure 5-13 : Variation de la poussée du câble supérieur en fonction de la cambrure, pour des charges très élevées	162
Figure 5-14 : Variation de la flèche en fonction de la précontrainte et de l'intensité des charges	163
Figure 5-15 : Evolution de la flèche en fonction des écarts élevés de température (positifs)	165
Figure 5-16 : Evolution de la flèche en fonction des écarts de températures cryogéniques (négatives)	166
Figure 5-17 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T = 0^\circ\text{C}$ (i.e $T = 20^\circ\text{C}$)	166
Figure 5-18 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T = + 10^\circ\text{C}$	167
Figure 5-19 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T = 30^\circ\text{C}$	167
Figure 5-20 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T = 40^\circ\text{C}$	168
Figure 5-21 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T = 50^\circ\text{C}$	168
Figure 5-22 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T = -10^\circ\text{C}$	169
Figure 5-23 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T = -20^\circ\text{C}$	169
Figure 5-24 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T = -30^\circ\text{C}$	170
Figure 5-25 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T = -40^\circ\text{C}$	170
Figure 5-26 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T = -50^\circ\text{C}$	171
Figure 5-27 : Evolution des flèches en fonction des variations de température	171
Figure 5-28 : Evolution des poussées en fonction des variations de température	172
Figure 5-29 : Forme du mode 1 (antisymétrique)	175

Figure 5-30 Forme du mode 2 (symétrique)	175
Figure 5-31 Forme du mode 3 (symétrique)	175
Figure 5-32 Forme du mode 4 (antisymétrique)	175
Figure 5-33 Forme du mode 5 (symétrique)	176
Figure 5-34 Forme du mode 6 (antisymétrique)	176
Figure 5-35 Forme du mode 7 (symétrique)	176
Figure 5-36 Forme du mode 8 (antisymétrique)	176
Figure 5-37 Forme du mode 9 (symétrique)	177
Figure 5-38 Forme du mode 10 (antisymétrique)	177

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2-1 : Catégories des câbles de précontrainte	44
Tableau 5-1 : Données géométriques et mécaniques du système type étudié	146
Tableau 5-2 : Résultats obtenus sous charges uniforme et concentrées.....	147
Tableau 5-3 : Résultats obtenus sous la charge uniforme complète appliquée conjointement avec la variation de température	147
Tableau 5-4 : Comparaison des résultats obtenus avec le code ANSYS : Surcharge uniforme complète seule ($p = 4 \text{ kN/m}$).....	148
Tableau 5-5 : Comparaison des résultats obtenus avec le code ANSYS : Sous la charge concentrée $P=15\text{kN}$	149
Tableau 5-6 : Comparaison des résultats obtenus avec le code ANSYS : Surcharge uniforme complète $p=4\text{kN/m} + \Delta T=20^\circ\text{C}$	149
Tableau 5-7 : Comparaison des résultats sous écarts de température variés	165
Tableau 5-8 : Les cinq premières fréquences du mode symétrique.....	174
Tableau 5-9 : Récapitulation des dix premières fréquences de vibration.....	174

NOTATIONS

Chapitre 2

A_{gt} : Allongement relatif sous charge maximale ;

B : Largeur du profil ;

$C_d (C_{f0})$: Coefficient de traînée ;

C_L : Coefficient de portance ;

D : Diamètre extérieur du câble ;

D_{pyl} : Dimension transversale de l'élément de structure engendrant les tourbillons ;

F_{amort} : Force d'amortissement par unité de longueur ;

F_d : Effort de traînée (statique) du vent sur un câble ;

$F_y(t)$: Effort transversal exercé par le vent sur le profil du câble ;

f_{rg} : Classe de résistance ;

$i(t)$: Angle d'incidence du vent sur le câble ;

m : Masse linéique du câble ;

N : Fréquence du détachement tourbillonnaire ;

N_n : Fréquence propre du mode « n » ;

R_e : Nombre de Reynolds ;

S_c : Nombre de Scrutton ;

S_t : Nombre de Strouhal d'un cylindre circulaire ;

S_{pyl} : Nombre de Strouhal de l'élément de structure engendrant les tourbillons ;

t : Variable temps ;

U : vitesse du vent ;

U_c : Vitesse critique du vent après l'élément de structure engendrant les tourbillons ;

V_c : Vitesse critique de vent à partir de laquelle il y a risque de galop ;

ρ : Masse volumique de l'air ;

ν : Viscosité cinématique ;

γ : Constante d'amortissement visqueux ;

$\frac{\partial y}{\partial t}$: Vitesse transversale du câble ;

ω_1 : Pulsation fondamentale du câble ;

ω_n : Pulsation propre du mode « n » du câble ;

ξ : Amortissement critique ;

δ : Décrément logarithmique des amplitudes de deux oscillations libres successives d'un câble ;

δ_{tot} : Amortissement total d'un câble ;

δ_i : Amortissement intrinsèque d'un câble ;

δ_a : Amortissement aérodynamique d'un câble ;

Ω : Pulsation d'excitation.

Chapitre 3

A et B : Coefficients à déterminer par les CAL ;

A_c : Section transversale du câble ;

b : Distance entre les câbles et le centre du système au niveau des appuis ;

d : Distance entre les câbles et le centre du système à mi-travée ;

E_c : Module d'élasticité du câble ;

f : Flèche à mi-travée du câble ;

f^* : Rapport entre la variation de la flèche Δf sur la flèche f ;

g : Accélération de pesanteur (9.81m/s^2) ;

H : Composante horizontale de la tension T (poussée) ;

h : Variation de la poussée dans le câble ;

\tilde{h} : Constante représentant la variation de la poussée ;

ΔH : Variation de la poussée engendrée dans le câble suite à son allongement ;

H^* : Rapport entre la variation de la poussée ΔH et la poussée H ;

H_1 : Poussée dans le câble inférieur ;

h_1 : Variation de la poussée dans le câble inférieur ;

H_2 : Poussée dans le câble supérieur ;

h_2 : Variation de la poussée dans le câble supérieur ;

i : nombre imaginaire où $i^2 = -1$;

ℓ : Longueur horizontale de la travée du câble ;

L : Longueur du câble ;

L_e : Longueur virtuelle du câble ;

p : Intensité de la charge répartie ;

P : Intensité de la charge concentrée ;

P^* : Intensité de la charge concentrée définie par un coefficient multiplicatif ;

p_0 : Intensité de la charge triangulaire ;

S : effort tranchant ;

T : Tension développée dans le câble ;

T_i : Période de vibration du câble ;

u : Déplacement horizontal d'un point quelconque du câble ;

$u(x,t)$, $v(x,t)$ et $w(x,t)$: Composantes longitudinale, transversale (verticale) et horizontale (perpendiculaire au plan vertical) du mouvement dynamique du câble ;

$\tilde{u}(x)$, $\tilde{v}(x)$, $\tilde{w}(x)$: Déformées modales correspondantes aux déplacements $u(x,t)$, $v(x,t)$ et $w(x,t)$ respectivement ;

v : Déplacement vertical d'un point quelconque du câble (déflexion);

v_* : Déflexion du câble définie par un coefficient multiplicatif ;

W : Poids linéique du câble ;

x_1 : Position de la charge concentrée ;
 x_2 et x_3 : Positions de la charge répartie ;
 $y(x)$: Equation géométriques initiales du câble ;
 λ : Paramètre caractérisant la géométrie et l'élasticité du câble ;
 2ε : Intervalle d'application de la charge concentrée ;
 β : Paramètre caractérisant les pulsations propres symétriques du câble ;
 τ : Tension supplémentaire engendrée par le mouvement du câble ;
 λ : Paramètre de IRVINE qui dépend de l'élasticité et de la géométrie du câble.

Chapitre 4

A_{ci} : Sections des câbles ;
 C_I : Constante qui dépend des caractéristiques géométriques et mécaniques des câbles ;
 E_{ci} : Module d'élasticité des câbles ;
 e : Fonction exponentielle ;
 f_i : Flèches à l'état initial relatives aux câbles supérieur et inférieur ;
 H : Paramètre définissant la somme des poussées ($H=H_0+H_1+h_0+h_1$);
 H_I : Précontrainte initiale ;
 H_0 : Poussée initiale dans le câble principale ;
 h_i : Variations des poussées ;
 h_0^*, h_I^* : Variation des poussées dans les câbles supérieur et inférieur respectivement dues au déplacement v_* ;
 ℓ : Portée de la travée principale ;
 L_s, L_t : Longueur modulée du câble vis-à-vis de l'étirage mécanique puis thermique ;
 L_c : Longueur du câble ;

ΔL_c : Changement de la longueur du câble ;
 L_c : Longueur virtuelle du câble ;
 n_i : Expressions géométriques initiales des câbles ;
 $n'_i, f'_i, \ell'_i, v'_i$: Paramètres relatifs aux travées haubanées ;
 p_i : Intensité de la $i^{\text{ème}}$ charge répartie verticale ;
 P_j : Intensité de la $j^{\text{ème}}$ charge concentrée verticale ;
 R_i : Composante verticale de la réaction d'appui sur le pylône due à la dénivelée ;
 T_s : Traction concentrée ;
 T_{ci} : Efforts totaux dans les câbles ;
 u, v : Déplacements selon les directions X et Y ;
 v_i : Déflexions des câbles ;
 V_c : Composante verticale de la réaction d'appui sur le pylône sans la dénivelée ;
 v_* : Déplacement vertical de nature dynamique ;
 \ddot{v}_* : Dérivée seconde de la fonction de déplacement v_* ;
 \tilde{v}_* : Déformée modale ;
 x, y, s : Coordonnées rectangulaires et abscisse curviligne ;
 x_j : Abscisse de la charge P_j ;
 x_i : Abscisse de la charge p_i ;
 ω' : Poids linéique horizontal total de l'ouvrage ;
 ω_l : Densité de réaction due à la pré-tension du câble de rigidité sur la nappe des suspentes ;
 ω_0 : Densité du poids total de l'ouvrage ;
 μ_1, μ_0, μ' : Moments fléchissants produits par ω_l, ω_0 et ω' respectivement ;
 μ, ν_s : Moments fléchissants dans une poutre droite isostatique dus aux surcharges et à une partie des surcharges transmises au câble porteur respectivement ;

α : Abscisse relative de la charge concentrée ;
 α_t : Coefficient de dilatation thermique du matériau ;
 α_1, α_2 : Abscisses relatives délimitant la charge répartie ;
 β : Paramètre caractérisant les pulsations propres du câble ;
 θ_i : Angle d'inclinaison de la corde des câbles par rapport à l'horizontale ;
 τ : Variation linéique de la longueur du câble due à la variation de température ;
 σ : Densité de traction dans les suspentes (par unité de longueur horizontale) ;
 Δ_0, Δ_l : Termes correctifs des équations des poussées ;
 ζ_s, ζ_t : Coefficient de longueur total du câble dû aux sollicitations mécaniques et thermiques ;
 ε : Intervalle d'application de la charge concentrée ;
 $\psi_j, \varphi_i, F(\psi_j, \varphi_i)$: Fonctions des charges appliquées ;
 ω : Pulsation propre de vibration.

Les quantités apparaissant dans les textes du chapitre 4, pourvues d'indices « 0 » et « 1 » sont définies respectivement par rapport au câble principal et au câble de rigidité.

LISTE DES ABREVIATIONS

CAL : Conditions aux limites ;

ESC : Contraintes résiduelles et environnement (environmental stress cracking) ;

MFP : Câble multi-fils parallèles ;

MTP : Câble multi-torons parallèles ;

PEHD : Polyéthylène à haute densité ;

TMC : Câble à torons multi-couches ;

TBR : Très basse relaxation ;

XOY : Système de coordonnées orthonormées .

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1-1 Intérêt du problème

Les structures suspendues par câbles telles que les constructions traditionnelles des types ponts et tentes sont connues depuis les civilisations les plus anciennes. Cependant, comme la plupart de ces structures suspendues exigent des matériaux à haute résistance, il a fallu attendre la révolution industrielle où le fer est devenu abondant pour que ces structures deviennent réalisables. Ainsi, ont apparu très vite et particulièrement en Angleterre divers ponts suspendus impressionnants ayant déjà des travées assez considérables comme celui de Clifton (fig. 1-1) enjambant la vallée de l'Avon, construit vers 1900, dont la portée principale est de 214 m.



Figure 1-1: Vue du pont suspendu de Clifton en Angleterre, UK

Les ponts suspendus se sont par la suite développés durant le 19^{ème} siècle, et l'accroissement des portées devient réellement possible grâce à l'avènement technologique de l'acier. Les méthodes de calcul ont été alors raffinées, et graduellement il s'est avéré qu'une étude exacte doit tenir compte des non-linéarités géométriques de la structure i.e. les équations d'équilibre doivent être écrites dans la configuration déformée et non par rapport à

la configuration d'équilibre initiale. Cette méthode qui fait appel à la théorie de second ordre a connu un développement considérable [1,2] de sorte que nous pouvons considérer, à l'heure d'aujourd'hui, la théorie des ponts suspendus comme relativement exacte.

Ce n'est toutefois pas le cas des structures de toitures suspendues qui sont plutôt relativement récentes. Leur apparition ne remonte guère qu'au début du siècle écoulé, et leur développement n'a réellement commencé que depuis les années quarante environ. Les constructions de ce type se distinguent essentiellement des ponts suspendus usuels par leur poids propre pratiquement insignifiant, poids propre qui au contraire, avec la présence d'un tablier et des poutres de rigidité, un facteur primordial dans la stabilité. Ce type de structure est donc très légère, généralement en forme de résilles (à configuration plane ou spatiale) composées de réseaux de câbles qui se prolongent jusqu'aux ancrages sur les fondations qui, d'appuis sur le sol, se transforme en lest. La figure 1-2 montre les câbles de contreventement d'une ossature métallique de la station de métro Erasme, Bruxelles, devant être couverte d'une toile tendue. Sur la photo de gauche, les câbles n'ont pas été complètement tendus. La photo de droite montre comment ces mêmes câbles peuvent être accrochés en tête de pile.



Figure 1-2: Structure de la toiture suspendue de la station du métro Erasme à Bruxelles

1-2 Etat de la question

L'utilisation des systèmes par câbles dans la construction constitue tant sur le plan architectural que technique une évolution conceptuelle importante dans l'art de construire. Leurs avantages, permettant à la fois d'augmenter la portée et de réduire le poids propre, répondent d'une manière radicale au problème longtemps posé dans la réalisation des grandes portées qui sont requises par les constructions civiles et industrielles aussi bien que par les constructions des ouvrages de ponts suspendus usuels indispensables pour franchir des vallées (fig. 1-3), des rivières (fig. 1-4) et des bras de mer (fig. 1-5) d'une ampleur considérable [3,4,5,6].



Figure 1-3: Pont Sidi M'Cid de Constantine surplombant les gorges à 175 m de Rhumel ;
Année : 1910-1912 ;
Longueur : 164 m ;
Largeur : 5.75 m

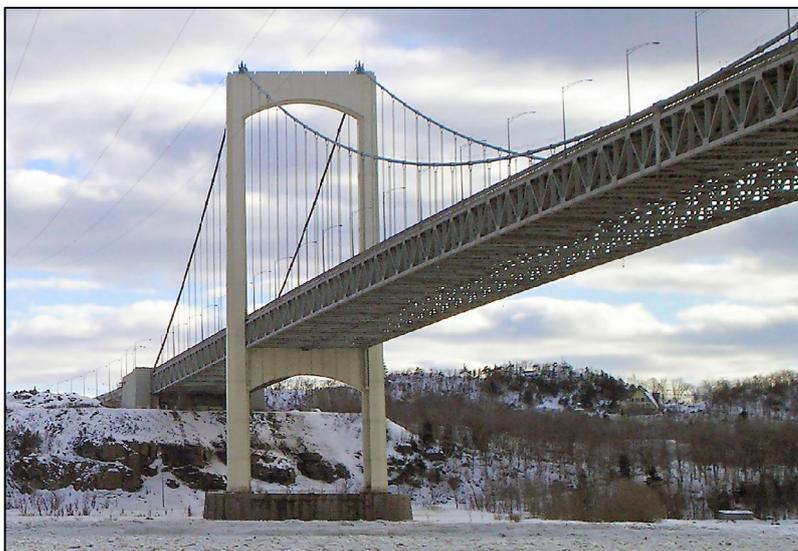


Figure 1-4: Pont routier Pierre-Laporte, Québec city ;
Longueur totale : 1041 m ;
Portée principale: 668 m ;
Hauteur totale: 116 m ;
Année : 1966-1970



Figure 1-5: Pont du Golden Gate, San-Francisco ; Californie ; Longueur totale : 2737 m ; Portée principale: 1280m ; Hauteur: 230 m ;

Ces systèmes réputés légers emploient comme principal élément le câble dont l'équilibre des charges est réalisé uniquement par des efforts de traction pure, développés parallèlement à la fibre moyenne du câble. Cela signifie qu'aucune rigidité flexionnelle ou de compression n'est attribuée au système par opposition aux structures classiques formées de portiques ou de treillis. De cette caractéristique découle la nécessité pratique de mise en tension préalable à toute utilisation, et dont l'effet joue un rôle extrêmement important dans la stabilité des structures correspondantes dont le poids propre demeure particulièrement faible. Cette pré-tension ou précontrainte, représente la charge qu'il est nécessaire d'intégrer initialement à une résille pour qu'en cas de surcharge, l'un quelconque des éléments de cette résille ne risque d'être virtuellement comprimé i.e l'élément doit être tendu.

On ne peut cependant faire abstraction de la vulnérabilité de ce type de structures aux agressions environnementales (pluie, vent, rayonnement ultra-violet, cycles de gel-dégel, variations thermiques, etc.) ou aux problèmes de stabilité liés principalement au flottement et à la résonance, qui doivent à priori recevoir une grande attention. En effet, les effets de fatigue dus à l'action dynamique des charges comme le vent par exemple ou les sollicitations purement d'origine environnementales dues aux variations de température liées au changement climatique peuvent constituer un des facteurs importants du vieillissement des différents éléments clés porteurs (câbles, haubans, suspentes...) et qui risquent d'affecter à terme sérieusement la durabilité entière de la construction. L'étude du comportement dynamique que sous l'action des actions thermiques devient par conséquent importante à laquelle, en outre, il faut considérer la non linéarité géométrique qui joue un rôle significatif dans un système léger et aussi déformable qu'est le système à câble [3,4,5].

Le système auquel nous allons nous intéresser dans le cadre de ce travail consiste en un système plan vertical à câbles précontraints, de courbures inversées, équivalent à un pont suspendu dont les poutres de rigidité sont remplacées par des câbles auxiliaires précontraints appelés câbles de rigidité. Comme représenté sur la figure 1-6, ce système se compose principalement d'une nappe de suspentes verticales réunissant deux câbles principaux à savoir le câble porteur ou principal et le câble tendeur ou de rigidité qui sont fixés en leurs extrémités à des massifs d'ancrage. Deux systèmes de ce type peuvent supporter un tablier léger que nous pouvons supposer dépourvu de rigidité propre appréciable. Ce qui peut nous permettre de songer dans le cas pratique à une passerelle piétonnière très flexible (fig. 1-7) dont l'implantation sera très intéressante dans des sites d'attraction ou à un ouvrage connu sous le nom de catérail assurant le passage d'un wagonnet accroché à un rail solidaire du système de suspension.

Il est également possible de songer, mais à un degré moindre, à l'usage comme moyen de transport en commun à l'exemple de téléphérique (bicâble, fig. 1-8) ou de télécabine (monocâble, fig. 1-9) fortement appréciés et notamment privilégiés ces derniers temps en Algérie ; à l'image de celui actuellement en construction dans la ville de Tizi-ouzou devant relier la gare modale de Bouhinoun au mont de Redjaouna. Ce mode de transport par câbles aérien est généralement utilisé pour gravir un relief pentu et très accidenté ou franchir une dépression géographique (vallée, voie d'eau, montagne dans les stations de ski ou encore en milieu urbain pour la desserte d'un terrain communal au relief difficile) dans le but de se soustraire à des contraintes topographiques.

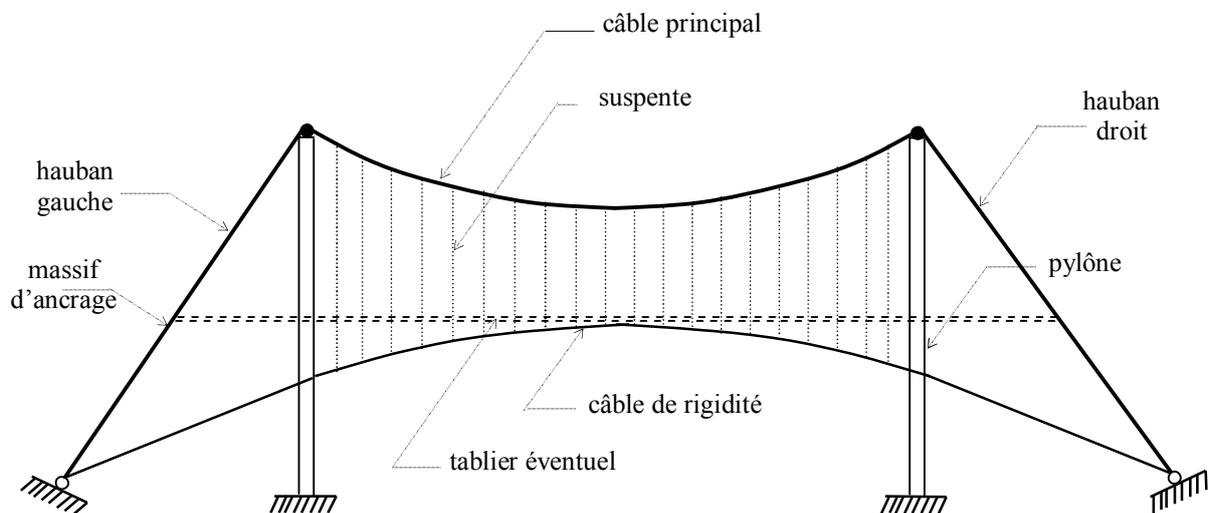


Figure 1-6: Description d'un système vertical précontraint



Figure 1-7: Passerelle piétonnière suspendue rigidifiée par des câbles précontraints



Figure 1-8 : Vue du téléphérique de Renon, Italie



Figure 1-9 : Vue d'une télécabine entre Oued Koriche et Bouzaréah, Alger

1-3 Objectifs de ce travail

Les réseaux à câbles dont sont composés les structures suspendues sont essentiellement des systèmes discrets, et peuvent être traités comme tels soit par la méthode des éléments finis. Cependant, si le nombre de câbles dans le réseau devient élevé, il est possible d'approximer le réseau par un système continu conduisant à une méthode d'analyse de nature analytique. Par suite, la modélisation mathématique d'un réseau à câble peut s'effectuer par l'approche fondamentale qui assimile le comportement de la nappe des suspentes verticales à un voile continu et inextensible [6,7,8]. Les équations à caractère non linéaire résultantes décrivant les tractées ou les poussées dans les câbles s'établissent de façon à être résolues numériquement par itérations successives. Par ailleurs, il y a lieu de mentionner que le comportement caractéristique des systèmes suspendus est en général fondamentalement non linéaire; cela signifie d'une autre manière que les équations d'équilibre fondamentales de mouvement doivent être formulées par référence à la configuration non déformée [9].

Le but principal de ce travail consiste à développer une méthode d'analyse simple, mais suffisamment précise et fiable, permettant d'aborder le calcul statique et dynamique d'un ouvrage suspendu léger sans poutre de rigidité, telle une passerelle suspendue rigidifiée par câbles précontraints. A ceci vont se greffer deux autres objectifs complémentaires aussi importants que la méthode elle-même. Le premier est de mettre en évidence, à travers une

analyse paramétrique appropriée, l'effet de certains paramètres sur le comportement de la structure comme la cambrure et la pré-tension du câble de rigidité. Le deuxième consiste à établir les valeurs critiques des paramètres les plus influents à partir desquels la non linéarité du système se révèle significative suivant des critères admis.

1-4 Revue et critique des études antérieures

La littérature sur les concepts de base des structures suspendues légères remonte à l'architecte allemand F. Otto qui, à travers ses publications, a su révéler l'attrait et l'importance de ces structures, que Schleyer [10] est venu appuyer plus tard par sa théorie de la membrane appliquée aux réseaux à câbles. Ensuite, Massimo [11] et Möllman [12] ont donné une nouvelle stimulation à ce thème en introduisant la notion de discrétisation de la structure, devenant désormais un domaine de recherche continue.

Les réseaux à câbles dont sont composées ces structures suspendues sont essentiellement des systèmes discrets, et peuvent être traités comme tels. Cependant, si le nombre de câbles dans le réseau est élevé, il est possible d'approximer le réseau par un système continu. Par conséquent, la modélisation mathématique d'un réseau à câbles peut s'effectuer suivant ces deux approches distinctes conduisant à des méthodes de calcul numérique ou analytique dont nous allons subséquemment faire brièvement le point sur l'état actuel des recherches. Il est, en outre, à rappeler que le comportement caractéristique des systèmes suspendus en général est fondamentalement non linéaire signifiant, en d'autres termes, que les équations d'équilibre fondamentales doivent être formulées par référence à la configuration déformée.

1-4-1 Approche par modèle discret

La structure réelle est simulée par un ensemble d'éléments interconnectés à un nombre fini de points nodaux sur lesquels le chargement est supposé concentré (fig. 1-10). La compatibilité géométrique et l'équilibre aux nœuds se traduisent par un système d'équations algébriques à caractère non linéaire dont la résolution fait appel à des méthodes itératives appropriées. Une attention particulière doit être cependant apportée au risque d'une « compression » (ou détente) éventuelle d'un élément au cours du procédé itératif. Il faut alors, dans ce cas, annuler simplement la rigidité de l'élément en question ainsi que son effort de « compression » correspondant avant de passer au cycle d'itération suivant. Si le nombre

d'éléments « comprimés » est assez élevé, l'instabilité de la structure devient évidemment inévitable.

En 1971, une mise au point des méthodes d'analyse numérique des structures légères a été faite au cours d'un symposium [13], tenu au Japon sur les structures prétendues présentant une revue détaillée et une évaluation précise de tout ce qui a été fait dans ce domaine. Les méthodes proposées sont générales et leur application est suivie la plupart du temps de vérifications expérimentales dans le cas des très grandes constructions. Les hypothèses admises mettent en jeu essentiellement les points suivants :

- Connaissance de la forme initiale ;
- Propriétés élastiques du matériau ;
- Faible rapport à vide flèche/portée, où la portée représente la distance horizontale entre les points d'accrochage. Cela suppose une structure aux tensions initiales élevées, de sorte que le tronçon de câble reliant deux nœuds consécutifs est quasi rectiligne.

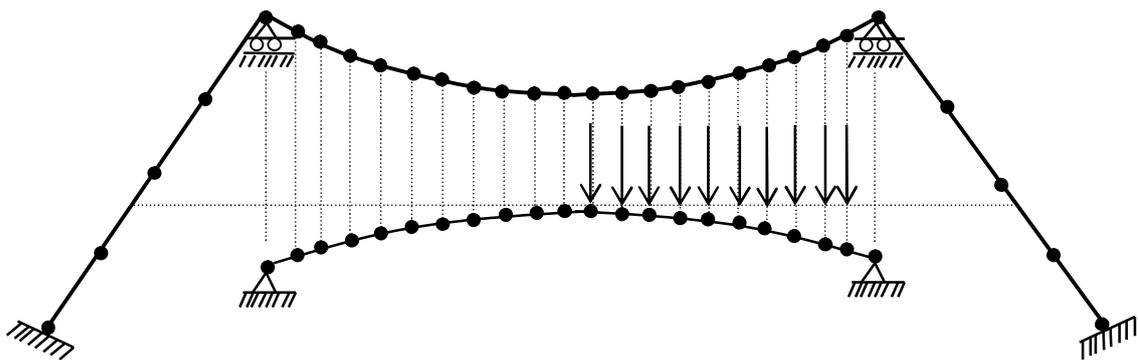


Figure 1-10: Approche discrétisée par éléments finis

Soulignons toutefois qu'il existe des procédés plus généraux qui introduisent mieux le comportement physique de la structure en faisant allusion particulièrement à la courbure de l'élément de câble [4,12,14,15] et au comportement élasto-plastique des matériaux utilisés. Peu d'intérêt cependant semble être accordé à l'élasto-plasticité, vu la possibilité d'une exploitation optimale du matériau en traction pure, qui permet une valeur élevée du rapport résistance/poids de la structure. La détermination exacte de la forme initiale demeure cependant onéreuse [3], notamment pour des configurations géométriques complexes. Selon

Krishna [16], en raison de la longueur et de la lourdeur inouïe des calculs nécessaires à cet égard, un choix judicieux des valeurs initiales des coordonnées est parfois meilleur que toute approche mathématique approfondie.

1-4-2 Approche par modèle continu

Un système à l'origine discret forme, lorsque ses éléments sont suffisamment rapprochés, un milieu quasi continu. Apriori, une telle situation ne peut se produire que lorsque les charges sont elles-mêmes continues, donc réparties le long du câble. Dans de telles conditions, une structure en résille est assimilable à une membrane incapable d'absorber des efforts de cisaillement ou de compression. La figure 1-11 montre la discontinuité réelle de la membrane qui établit une différence de fait avec la parfaite continuité admise dans la théorie classique. La formulation mathématique se caractérise généralement par des systèmes d'équations aux dérivées partielles, intégrales ou intégro-différentielles. Tel que mentionné précédemment, le document F. Otto peut constituer une excellente référence de base pour l'étude des systèmes continus de réseaux de câbles. Les théories qui y sont présentées, ont été mieux élaborées ultérieurement par Tottenham et William [17] ; elles rejoignent justement par certaines hypothèses la théorie usuelle de la membrane dans le traitement des coques. Le réseau de câbles est assimilé à une plaque très mince réduite à son feuillet moyen dont l'état de contrainte reflète seulement la traction.

Encore plus récemment, des approches de nature analytique exploitant fondamentalement l'hypothèse de la continuité parfaite de la nappe des suspentes en les assimilant à un voile continu et inextensible, sont rapportées par Chen et al. [7] et Kmet et Kokorudova [18] en vue de l'analyse statique des systèmes suspendus type passerelle rigidifiée par câbles précontraints dont les charges sont verticales et appliquées dans son propre plan. Les fondements théoriques utilisés se limitent aux considérations suivantes :

- poids total de l'ouvrage nul au moment du réglage initial ;
- absence des haubans d'ancrage ;
- chargement réparti uniquement, appliqué soit sur la totalité ou la moitié du tablier ;
- aucune possibilité éventuelle d'une simultanéité de charges réparties et ni présence quelconque de charges concentrées sur le tablier.

Par ailleurs, nous citons une autre théorie dite des structures hyperstatiques d'ordre infini, élaborée à l'origine par Courbon [19] pour l'étude des systèmes tels que les poutres solidarées par des suspentes infiniment rapprochées et les ponts à poutres multiples. L'état d'équilibre de la structure est déterminé au moyen des équations de la statique dès que l'on connaît les densités des réactions exercées par les suspentes ou les organes de liaison entre groupes de poutres. Cette méthode, plutôt adéquate sous l'action des charges horizontales, se base de façon fondamentale sur le principe de superposition dans l'évaluation des coefficients d'influence qu'exige le calcul des réactions. Elle présuppose donc la linéarité de fonctionnement dans le domaine d'intégration, en particulier la linéarité statique que rendent possible les petites déformations.

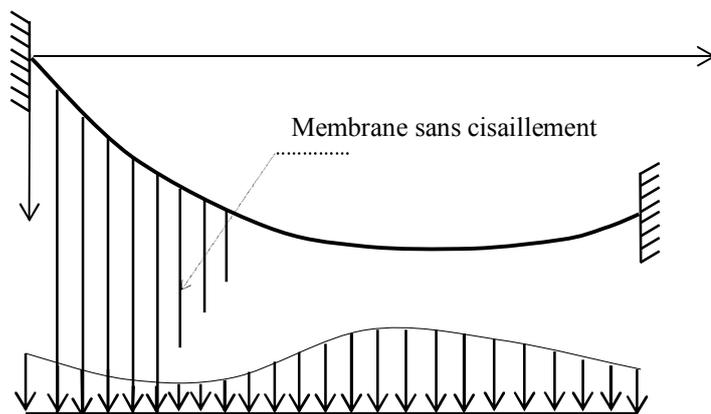


Figure 1-11: Approche par modèle continu

1-4-3 Critique de ces études

Il ressort que le modèle continu ne peut refléter d'une manière exacte une structure discontinue à l'origine. De plus, pour des cas de géométries et de conditions aux limites complexes, les équations analytiques obtenues sont souvent impuissantes à apporter une solution précise. Par conséquent, seules les méthodes numériques comme la méthode des éléments finis se présentent comme rigoureuses pour la simulation des structures résillées.

Cependant, il apparaît fréquemment un désavantage sur le plan pratique, car on est amené à traiter un grand nombre d'équations non-linéaires, ce qui exige des moyens considérables. A ce propos, quelques simplifications que nous énumérons ci-après sont proposées qui se révèlent utiles pour une analyse préliminaire de la structure.

- Négliger les déplacements horizontaux : dans un système à câbles, les déplacements horizontaux sont habituellement petits par rapport aux translations verticales. Siev et Eidelman [20] suggèrent qu'ils soient alors négligés réduisant alors de trois à un le nombre de degrés de liberté d'un nœud. Cette simplification se justifie dans les systèmes où le rapport flèche/travée demeure faible.
- Négliger les termes non-linéaires : la réponse d'un réseau de câbles est fondamentalement non linéaire. Cependant, quand les charges sont faibles, la courbe charge-déplacement prend une allure quasi linéaire [21]. Il est donc possible, dans ce cas, d'ignorer les termes non linéaires et d'éviter ainsi le cycle itératif de la solution [20,22].
- Groupement de câbles: la procédure suivante peut se réaliser dans le cas d'un réseau constitué d'un très grand nombre de câbles où un certain nombre de câbles peuvent être regroupés pour n'en former qu'un seul, ce qui, pour fin d'analyse réduit le nombre de nœuds. On montre que, pour des treillis de câbles, cette modélisation moins fine donne des résultats nettement acceptables [23].

1-5 Cheminement du travail suivi

Le travail présenté dans cette thèse sera organisé en 6 chapitres dont le présent premier chapitre en guise d'introduction est consacré essentiellement à la nature de la problématique et de la question des structures suspendues légères ainsi à la description des objectifs fixés. Plusieurs points seront abordés dont la revue des méthodes de calcul antérieures qui mettent en relief la modélisation mathématique des réseaux à câbles qui peut s'effectuer suivant deux approches distinctes, soit par modèle continu qui assimile le comportement de la nappe des suspentes à un voile continu et inextensible soit par modèle discret qui considère la structure en tant que telle i.e discontinue à l'origine.

Le chapitre deux, expose les conditions de durabilité et des vibrations des câbles dans le but de mettre en relief la vulnérabilité des agressions environnementales et les vibrations résultantes qui peuvent par le phénomène de fatigue endommager à terme les câbles et par conséquent mettre en péril complètement la stabilité de l'ouvrage. Tout d'abord, nous

analyserons les conséquences des facteurs de vieillissement des câbles et le choix des matériaux constitutifs de base qui permettent d'obtenir la durabilité requise. Nous rappellerons ensuite les paramètres aérodynamiques des câbles où seront présentés succinctement les différents phénomènes physiques susceptibles de donner lieu à des vibrations. Enfin, nous décrirons quelques actions permettant de combattre ces vibrations.

Le chapitre suivant se rapportera à la revue d'une manière approfondie et commentée des formulations théoriques décrivant le comportement statique et dynamique d'un câble seul et d'un système à treillis de câbles doublement inversés dont les courbures peuvent être convexe ou concave. Bien que l'étude soit principalement théorique, des exemples d'illustration seront apportés dans le but de comprendre les fondements mathématiques de base des méthodes de calcul qui sont parfois assez laborieuses à cause du problème des grands déplacements qu'il faut en tenir compte dans la formulation mathématique. Les câbles sont principalement supposés ancrés solidement à des massifs d'ancrage et dont la géométrie est décrite par une parabole du deuxième degré.

Le chapitre quatre, aura trait à l'exposé des fondements théoriques de base de la méthode de calcul d'un système vertical précontraint sans poutre de rigidité en utilisant l'approche fondamentale qui assimile le comportement de la nappe des suspentes à celui d'un voile continu et inextensible. Sous charges statiques et thermiques, les équations à caractère non linéaire décrivant les tractées dans les câbles sont établies de façon à être résolues par la méthode de Newton-Raphson à double itération. On suppose de plus, par analogie avec la théorie des ponts suspendus à poutre de rigidité, que les câbles reposent sur les pylônes par l'intermédiaire de chariots de dilatation, afin qu'aucune réaction horizontale ne puisse s'exercer sur les pylônes. Sous l'action dynamique, la théorie linéaire en régime vibratoire libre sera adoptée afin de dériver l'équation d'équilibre de mouvement vertical d'un élément différentiel et les équations des poussées résultantes engendrées dans les câbles en négligeant les effets de second ordre liés aux grands déplacements. Cependant, seul le mouvement transversal vertical sera considéré à cause de la vitesse des ondes de vibration longitudinales qui est généralement beaucoup moins importante que les ondes de vibration transversales. La résolution des équations qui en résultent conduit à des modes propres antisymétriques et à des modes propres symétriques, ces derniers sont obtenus via une équation type transcendante. Les fréquences propres de vibration et les déformées modales seront obtenues par analogie au cas d'un câble parabolique.

L'avant dernier chapitre sera consacré à l'implémentation numérique et à l'analyse des résultats où dans un premier temps nous décrirons le programme de la méthode ainsi établie par des applications numériques portant sur l'analyse d'un ouvrage type de pont suspendu léger et sans poutre de rigidité soumis à l'action de charges verticales suivies d'une variation de température appliquées dans le plan général du système. Dans un deuxième temps, nous effectuerons une analyse paramétrique appropriée afin de mettre en évidence certains paramètres clés les plus influents sur le comportement de la structure comme la cambrure et la pré-tension du câble de rigidité tout en portant attention à la non-linéarité qui pourrait se révéler simultanément. Enfin dans un troisième temps, nous montrerons comment évaluer les pulsations et les fréquences propres de vibration selon que le système est en mode de vibration antisymétrique ou symétrique.

Nous terminerons en guise du dernier chapitre par une conclusion générale suivie par quelques recommandations pour l'amélioration et la poursuite de ce travail.

CHAPITRE 2

DURABILITE ET VIBRATIONS DES CABLES DE SUSPENSION

2-1 Généralités

Ce chapitre analyse les conditions de la durabilité et des vibrations des câbles de suspension qui sont les éléments clés pour la stabilité des ouvrages suspendus. C'est dans le but de mettre en relief la vulnérabilité des agressions liées à l'environnement et les oscillations dynamiques qui en résultent pouvant, si elles ne sont pas maîtrisées, endommager les câbles en fatigue et par conséquent mettre en danger complètement la stabilité de l'ouvrage. Mentionnons, toutefois, qu'il y a peu ou pas d'organes accessoires dans un ouvrage suspendu contrairement à la plupart des autres structures usuelles. Chacun a un rôle à jouer, et un désordre ou une anomalie de fonctionnement, d'apparence mineure, peut à terme entraîner sinon la ruine, du moins des désordres graves dans la structure principale.

La présentation s'articule principalement sur deux parties dont la première comporte l'inventaire et les conséquences des facteurs de vieillissement des câbles ainsi que le choix des matériaux de base qui permettent d'obtenir la qualité et la durabilité requises. La seconde partie rappelle les paramètres aérodynamiques des câbles et présente, de façon succincte, les différents phénomènes physiques qui sont susceptibles de donner lieu à des vibrations des câbles ou de l'ouvrage dans son ensemble. Nous terminerons enfin par la description de quelques actions permettant de combattre ces vibrations.

Notons par ailleurs que ce chapitre s'inspire profondément sur le document de travail établi par SETRA, en novembre 2001, intitulé : Haubans, recommandations de la commission interministérielle de la précontrainte [24] et sur les articles de Virlogeux et al. [25,26] qui détaillent les phénomènes aérodynamiques responsables des vibrations des câbles ou des haubans et de leur résistance à la fatigue afin de formuler des mesures correctives.

2-2 Principe de fonctionnement et qualités exigées des câbles d'un ouvrage suspendu

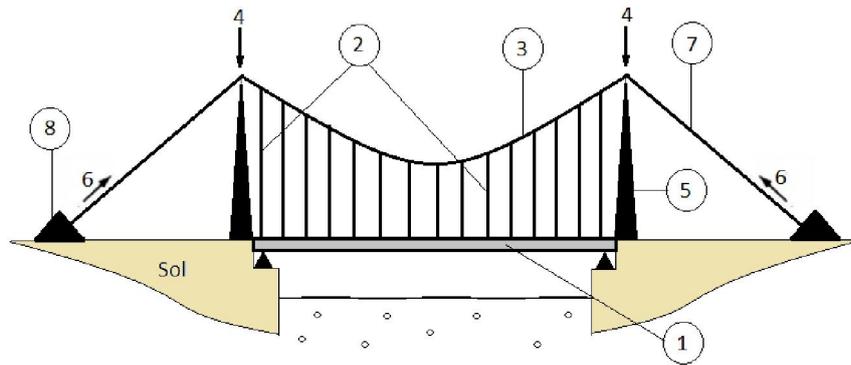
Soit la structure d'un pont suspendu classique schématisé sur la figure 2-1 qui se compose principalement d'un tablier, des suspentes, des câbles porteurs, des haubans et des pylônes.

2-2-1 Principe de fonctionnement de l'ouvrage

Le principe de fonctionnement de l'ouvrage est tel que le tablier assure la continuité de la voie portée et la répartition de charges, les suspentes généralement verticales supportent le tablier et transmettent les efforts aux câbles porteurs disposés en sa partie supérieure. Les câbles porteurs qui sont souvent de forme parabolique, assurent la fonction porteuse principale de l'ouvrage où les efforts se décomposent généralement en une réaction verticale absorbée par les pylônes, et à un effort de tension transmis par les câbles de retenue ou d'ancrage qui sont amarrés sur des massifs d'ancrage très rigides.

Dans le cas général, les câbles de retenue ou simplement appelés haubans, situés entre les ancrages et les pylônes, ne supportent pas de charge verticale. C'est selon ce schéma qu'ont été construits la plupart des ponts suspendus de moyenne portée ayant une seule travée comme le pont de Sidi M'Cid à Constantine. Dans certains cas, les suspentes verticales sont complétées par des haubans inclinés afin de réduire les déformations du tablier et de limiter les effets de la torsion. Le passage des charges sur l'ouvrage, du fait de l'augmentation des efforts internes, entraîne un allongement élastique des câbles porteurs et de retenue.

Le plus fréquemment, les pylônes en maçonnerie ou en béton, sont encastrés à leur base et le câble prend appui par l'intermédiaire de selles (ou chariots) munis de galets [27] de roulement, permettant le déplacement du point d'application de la réaction verticale en tête du pylône, en réduisant au maximum les efforts horizontaux (fig.2-2). Dans un certain nombre d'autres cas, les pylônes, en acier ou en béton, sont articulés à leur base ; les câbles sont alors solidarisés aux pylônes et les déplacements sont rendus possibles par l'inclinaison de ces derniers. Enfin, dans le cas des pylônes souples, la flexibilité est suffisante pour supporter sans dommage les déformations des câbles.



1 : Tablier ; 2 : Suspentes ; 3 : Câbles ; 4 : Réaction verticale ; 5 : Pylônes
6 : Effort de tension ; 7 : Câbles de retenue ; 8 : Massifs d'ancrage

Figure 2-1 : Principe de fonctionnement d'un pont suspendu

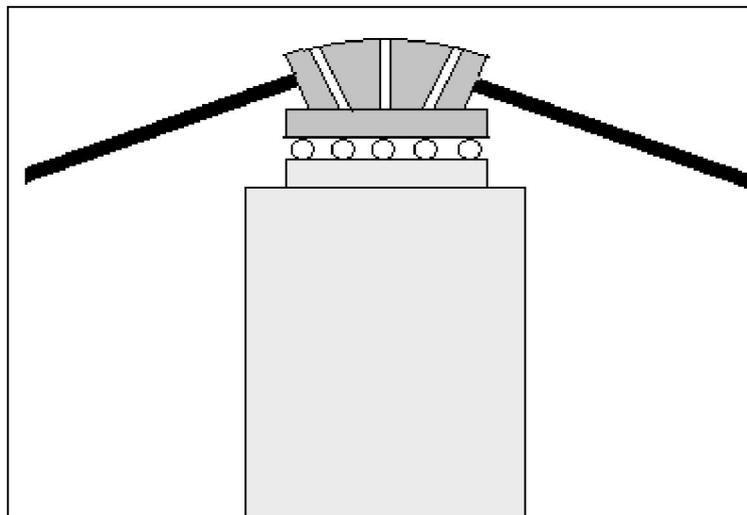


Figure 2-2 : Chariot mobile en tête de pylône [27]

2-2-2 Câbles employés

Les câbles les plus employés dans les ouvrages suspendus sont constitués de faisceaux de torons de précontrainte qui sont formés comme représentés sur la figure 2-3 par des fils d'acier enroulés hélicoïdalement autour d'un fil central appelé âme, en plusieurs couches de pas inversés. Le faisceau est généralement contenu dans une gaine métallique ou en polyéthylène injectée au coulis de ciment. Les câbles ainsi obtenus ont une très haute limite d'élasticité atteignant plusieurs fois celle de l'acier traditionnel de charpente métallique. Chaque toron peut contenir des centaines de fils et atteindre des limites de rupture de plusieurs centaines de tonnes. Le module d'élasticité intrinsèque du câble est plus petit que

celui du matériau en acier à cause de l'enroulement des fils en hélice où une valeur de 170000MPa n'est pas rare. On parle ainsi de câbles à torons parallèles lorsque les faisceaux sont constitués d'un ensemble de torons alignés. Quand ils sont constitués d'un ensemble de torons enroulés autour d'une âme centrale métallique ou textile, on parle alors de cordages. Les cordages possèdent un module d'élasticité intrinsèque encore plus faible, qui peut être inférieur à 140000 MPa.

Comme sera décrite plus en détail ultérieurement, la protection individuelle des torons parallèles a été toutefois progressivement complétée et améliorée durant les deux dernières décennies en raison principalement de la nécessité de réduire le coefficient de trainé engendré par l'action du vent. A l'heure actuelle, il est possible de dire que les câbles constitués d'un faisceau de torons parallèles individuellement protégés, logé dans une gaine continue se sont techniquement imposés dans la vie pratique, une technologie qui combine à la fois des fonctions aérodynamiques, esthétiques et de protection contre les effets de l'environnement.

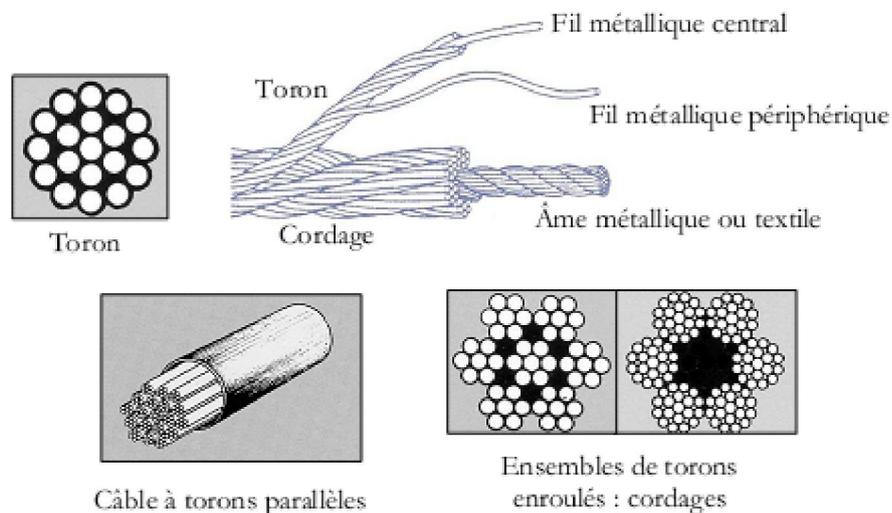


Figure 2-3: Faisceaux de torons parallèles et enroulés [28]

2-2-3 Qualités exigées des câbles

En raison de leur nature et de leur mode d'installation dans le domaine pratique, les câbles employés dans la technologie des ouvrages suspendus, sont souvent comparés, et parfois même confondus, avec les câbles de précontrainte utilisés dans les ponts précontraints en béton. Cependant, bien que technologiquement proches, leur nature et leur fonctionnement sont totalement différents.

2-2-3-1 Surtensions développées dans les câbles

La tension longitudinale développée dans les câbles de précontrainte d'un pont en béton précontraint, soit le cas par exemple d'un pont type à encorbellement successif, s'exerce directement sur le tablier et dépend peu des charges appliquées. Les câbles de précontrainte peuvent donc être considérablement tendus lors de leur mise en œuvre. A l'opposé, les câbles d'un ouvrage suspendu par exemple ceux d'un pont haubané, sont les éléments tendus de la structure triangulée constituée par le tablier, le pylône et les haubans. Dans cette configuration, la tension des câbles équilibre sensiblement les charges verticales s'exerçant sur le tablier et varie de manière importante avec les charges d'exploitation (fig.2-4). Cette tension est réglée lors de l'installation de l'ouvrage pour optimiser le moment fléchissant dans le tablier.

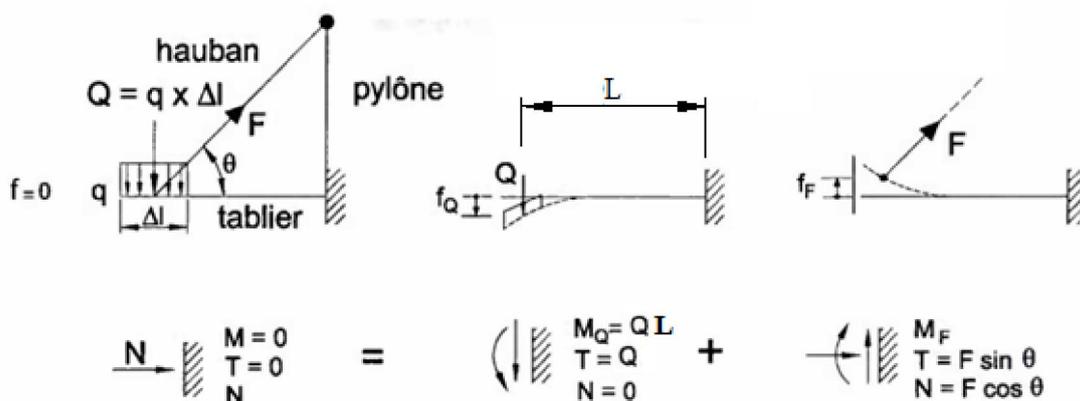


Figure 2-4: Transmission des efforts dans les câbles

2-2-3-2 Charges de fatigue

Les charges d'exploitation induisent des variations de tension dans les câbles de précontrainte. De même, les effets du vent peuvent générer des vibrations des câbles et de la structure. Ces chargements répétés, même de faibles intensités, peuvent endommager par fatigue la capacité de résistance de l'acier des câbles.

L'analyse de la résistance à la fatigue des câbles doit prendre en considération deux aspects à savoir i) les contraintes de traction pure dues aux charges d'exploitation, et dont l'amplitude est bien plus grande que pour les câbles de précontrainte des ponts en béton ii) les

contraintes de flexion au droit des ancrages, dues principalement aux vibrations des haubans et de la structure ; ces contraintes sont négligeables dans les ponts en béton.

2-2-3-3 Agressions environnementales

Contrairement aux câbles de précontrainte des ponts en béton, ceux des ouvrages suspendus sont directement exposés aux agressions de l'environnement. Parmi les différentes agressions qui seront abordées dans la section subséquente, citons entre autres, la pluie, le vent, les rayons ultra-violet et le phénomène du cycle de gel-dégel.

2-3 Durabilité des câbles de précontrainte

La notion de durabilité des ouvrages suspendus est complexe à définir avec précision car elle dépend en réalité de tous les éléments constitutifs de l'ouvrage où il convient d'y porter une attention particulière. C'est du fait que, contrairement à la plupart des autres structures, il y a peu ou pas d'organes accessoires dans un pont suspendu. Chacun a un rôle à jouer, et un désordre ou une anomalie de fonctionnement, d'apparence mineure, peut à terme entraîner sinon la ruine, du moins des désordres graves dans la structure principale.

Cette section analyse les conditions de la durabilité des câbles de précontrainte et comporte l'inventaire des facteurs de vieillissement des câbles, les conséquences de l'action combinée de ces facteurs et le choix des matériaux. Cependant, illustrons d'abord les différents paramètres dont dépend la durabilité des câbles de précontrainte.

2-3-1 Paramètres dont dépend la durabilité des câbles

Néanmoins, selon les recommandations françaises de la commission interministérielle de la précontrainte sur les haubans [24], la durabilité dépend au moins des paramètres suivants :

- conception générale de l'ouvrage ;
- conditions de service ;
- dimensions de l'ouvrage ;
- environnement (naturel ou industriel, terrestre ou marin, etc.)

Cependant les câbles, qui constituent les éléments clés de la stabilité des ouvrages suspendus, doivent offrir les meilleures garanties opérationnelles. L'analyse de leur durabilité doit être menée très sérieusement lors de la conception initiale de l'ouvrage. Les câbles restent néanmoins les éléments les plus vulnérables de la structure et, il subsiste une part d'aléa dans l'appréciation de leur durabilité. En outre, on ne peut exclure toute possibilité d'accident de la route qui les endommagerait. C'est pourquoi la conception des câbles de précontrainte doit permettre leur remplacement rapide et sans conséquences nuisibles à l'ouvrage ni au trafic. Toutes les dispositions de protection doivent garantir des possibilités d'inspection, de réglage et de maintenance, afin d'atteindre la durée de vie souhaitée ou de déterminer la nécessité de son remplacement.

2-3-2 Inventaire des facteurs de vieillissement des câbles

2-3-2-1 Sollicitations mécaniques

Les sollicitations statiques et dynamiques qui concernent directement les câbles se résument par les points suivants :

- variations d'effort normal liées aux charges d'exploitation ;
- rotation du tablier au droit de l'ancrage des suspentes et des haubans : amplitude importante, de l'ordre de quelques milliradians en fonction de la raideur du tablier, et fréquence faible (fraction de hertz) directement liée à la fréquence du trafic de poids lourds ou de trains sur l'ouvrage. Ces rotations entraînent une flexion des câbles près de leur ancrage.
- Flexions des câbles liées au vent, à la pluie ou à l'action combinée des deux; vibrations de faible amplitude et de fréquence importante, avec un très grand nombre de cycles.
- Flexion statique liée aux erreurs de positionnement des suspentes et des câbles d'ancrage, dont l'origine est le défaut de perpendicularité de la suspente par rapport à sa face d'appui sur l'ouvrage.

2-3-2-2 Sollicitations purement environnementales

Les agressions environnementales sur l'ouvrage et sur les câbles doivent être caractérisées spécifiquement pour chaque projet, afin de mettre en place des solutions capables d'y résister. On peut notamment citer :

- la pluie ;
- le vent et le vent de sable ;
- le soleil (rayonnement ultra-violet, chaleur de rayonnement infrarouge)
- les variations thermiques, globales ou différentielles au sein des composants ;
- le froid et ses conséquences (givre, glace, etc. selon la situation géographique) ;
- les projections d'eau provenant de la chaussée, et en période hivernale les projections d'eau salée voire le brouillard salin jusqu'à 5 ou 6 m de hauteur ;
- l'atmosphère, par l'oxygène de l'air ou les atmosphères particulièrement agressives d'origine naturelle (bord de mer) ou industrielle de certains sites ;
- les agressions diverses : oiseaux, rongeurs, vandalisme, chocs divers provenant de chargements instables sur les véhicules, etc.
- les incendies de véhicules sur l'ouvrage.

2-3-2-3 Sollicitations provisoires de construction

Il s'agit à la fois :

- des sollicitations de manutention et de mise en place : blessure, déformation excessive, etc. contre lesquelles il faut protéger les câbles par des dispositifs adaptés et des outils bien étudiés ;
- des contraintes mécaniques résultant d'un état statique provisoire en phase de construction : surchargement liés à certaines phases d'exécution, etc.

Les vérifications réglementaires sont communément effectuées pour les éléments structurels en phase de construction, mais il convient également d'assurer l'intégrité des éléments de protection (revêtement métallique, gaine, etc.)

2-3-2-4 Incendie à proximité des câbles

Les incendies de véhicule sur la voie publique sont des phénomènes courants. De tels incendies ont périodiquement lieu sur ou sous des ouvrages d'art. L'action du feu est complexe à définir, et l'élévation de température provoquée par un incendie dépend en particulier du confinement et de l'apport de matières inflammables. Contrairement aux tunnels, les ponts sont bien ventilés donc relativement peu exposés à de fortes élévations de température en cas de feu. L'incendie d'un camion citerne transportant des hydrocarbures pourrait toutefois évoquer une élévation de température significative de l'ouvrage.

Sur un pont suspendu, on peut craindre l'incendie d'un camion près des câbles. Un tel incendie conduira à des conséquences graves et fatales car la stabilité de la structure sera dangereusement affectée en cas de la rupture d'un câble porteur. Certains ouvrages sont toutefois implantés dans des environnements particuliers, par exemple à proximité d'un dépôt de carburant ou d'une raffinerie de pétrole, où la circulation de camions citernes transportant des hydrocarbures est assez fréquente. Dans ce cas, il peut être justifié d'améliorer la résistance au feu des câbles, pour éviter de perdre des armatures en cas d'incendie. Il convient alors de:

- faciliter l'évacuation des matières inflammables sur le tablier par des bouches d'évacuation implantées avec une fréquence suffisante. Ces bouches comportent ou non une récupération des produits d'écoulement, en fonction de l'environnement ;
- limiter l'apport de matières inflammables, en préférant une protection individuelle des armatures à l'injection générale du câble par des produits pétroliers (certains de ces matériaux d'injection, comme les brais époxy sont plus dangereux que d'autres) ;
- retarder l'élévation de température au niveau des armatures, pendant un délai correspondant à l'extinction du feu, i.e une ou deux heures au plus. Il existe des matériaux d'isolation développés dans ce but comme les coulis de ciment remplissant les vides entre torons individuellement protégés et l'enveloppe externe du câble, ou couverture intumescente.

2-3-3 Effets des sollicitations mécaniques

Si les sollicitations statiques sur les câbles sont bien appréhendées par l'analyse physique et numérique, les sollicitations dynamiques font plutôt l'objet d'une analyse statistique et/ou probabiliste appuyée sur des résultats d'essais. Les plus complexes sont des combinaisons d'efforts dynamiques de traction et de flexion et dont les effets peuvent être simulés par des essais de laboratoire.

Dans toutes les zones de contacts, les sollicitations dynamiques entraînent des phénomènes tribologiques [29] de type fatigue induite par petits débattements (fig.2-5) et usure induite par petits débattements (fig.2-6). Le mouvement relatif des pièces en contact (fig.2-7), même de très faible amplitude (quelques microns), entraîne une abrasion avec production de débris dont les conséquences sont multiples :

- accroissement des jeux et pénétration de débris dans les joints de grains ;
- oxydation des débris, coulures de rouille dans le cas de l'acier ;
- mise en pression des débris dans l'interface ;
- dislocation et amorce de fissures de fatigue.

L'analyse de ces phénomènes nécessite un examen détaillé des conditions de contact :

- amplitude et fréquence des mouvements ;
- effort normal de contact ;
- nature des matériaux en contact ;
- conditions de protection ou de lubrification.

Pour tous les assemblages autorisant de petits déplacements relatifs, liés par exemple aux variations de contrainte dans les câbles, il est nécessaire de traiter le contact : traitement de surface, incorporation d'un matériau d'interface ou d'un lubrifiant, etc.

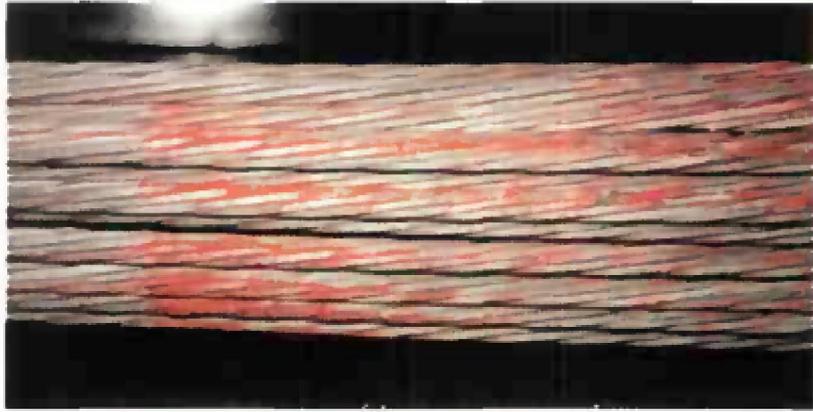


Figure 2-5 : Fatigue induite par petits débattements

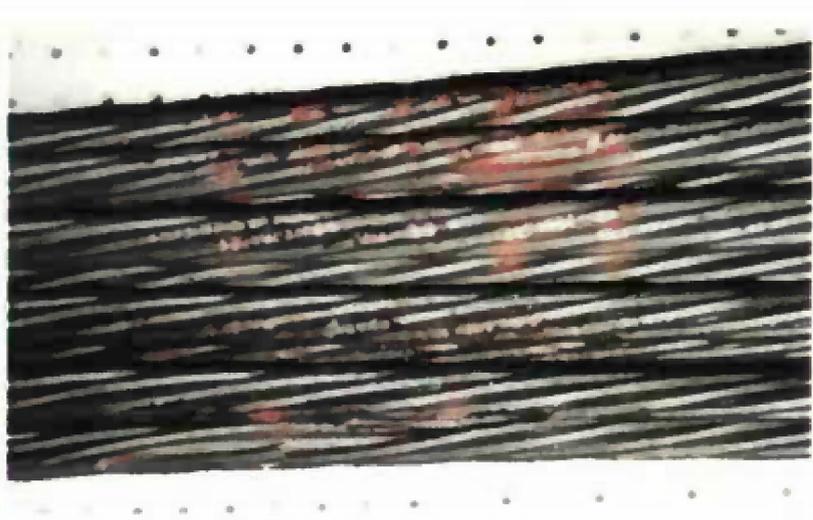


Figure 2-6 : Usure induite par petits débattements

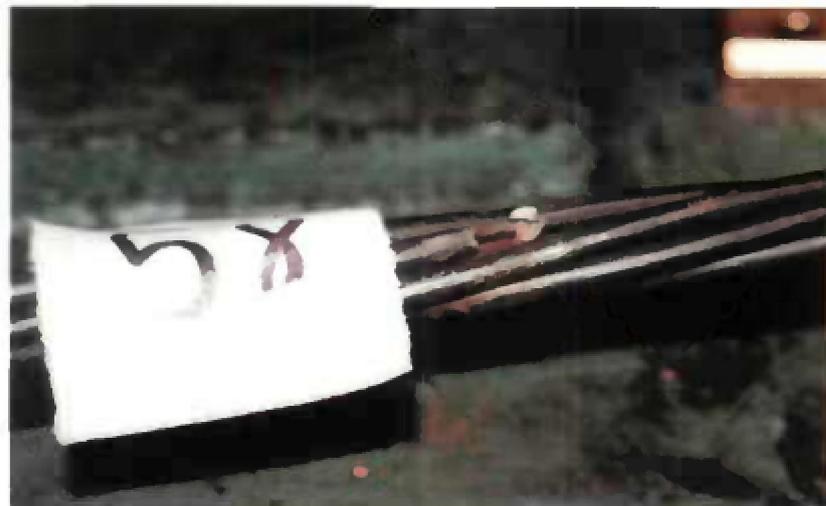


Figure 2-7 : Facies de rupture par fatigue

2-3-4 Effets des sollicitations environnementales

Une analyse exhaustive dépasse largement le cadre de ce travail et l'on se borne aux quelques exemples suivants :

2-3-4-1 Eau : L'oxydation est le principal problème des structures en acier. Les câbles, étant constitués d'un grand nombre de fils de faible diamètre, sont donc vulnérables à la corrosion. En outre, l'eau n'a pas les mêmes effets selon qu'elle est sous forme de pluie, de condensation ou d'éclaboussures :

- La pluie combinée au vent engendre des phénomènes d'instabilité vibratoire ;
- La corrosion de l'acier par l'eau est plus ou moins intense selon les éléments agressifs dissous dans l'eau (dérivés du soufre dans l'atmosphère, dérivés chlorés des sels de déverglaçage, etc.).
- Le temps d'exposition doit être pris en compte : l'accumulation d'eau stagnante dans une enceinte non drainée engendre une sollicitation permanente, critique pour les dispositifs d'étanchéité. Au contraire, l'eau de ruissellement renouvelle les éléments agressifs consommables (oxygène dissous) et peut s'avérer plus nocive. Il faut donc protéger de l'arrivée d'eau en confinant ou en drainant selon les cas.

2-3-4-2 Soleil : l'action du soleil agit par son rayonnement :

- Le rayonnement ultraviolet dégrade les chaînes de polymères et rend les matières plastiques fragiles, en catalysant des réactions de photolyse ou de photo-oxydation ;
- Le rayonnement infrarouge (chaleur) chauffe les composants des câbles, protégés ou non, et engendre des sollicitations thermo-mécaniques.

2-3-4-2 Vent : l'action du vent est source de sollicitations dynamiques sur les câbles. Il agit également sur les polymères, en accélérant l'évaporation des agents protecteurs contre le rayonnement ultraviolet. Enfin, l'action abrasive des vents de sable est parfois déterminante.

2-3-5 Effets conjugués des sollicitations mécaniques et environnementales

Bornons nous aux exemples suivants :

2-3-5-1 Usure et eau

La fatigue et l'usure induites par petits débattements produisent dans l'interface du contact un troisième corps constitué des débris de l'abrasion. Dans le cas de l'acier, il s'agit de l'oxyde de fer (rouille). Le ruissellement de l'interface produit des coulures, toujours désagréables sur le plan esthétique, mais cela n'est pas la conséquence la plus grave. Le lavage du troisième corps provoque sa régénération, accroît le jeu, facilite la circulation d'eau, entraîne sur le métal mis à nu une corrosion par solubilisation et donc une dégradation plus rapide.

C'est un des modes de ruine des câbles de ponts à torons multicouches, au niveau des contacts ponctuels entre couches de fils croisés, quand aucun produit de remplissage n'est prévu. Des problèmes similaires peuvent se produire au niveau des selles de ponts à haubans.

2-3-5-2 Contraintes résiduelles et environnement

Sur les polyoléfines, le phénomène ESC (environmental stress cracking) est maintenant très connu [29]. Il peut se produire sur des câbles préfabriqués, protégés par des gaines en polyéthylène mal formulées et enroulées sur des bobines de diamètre très faible. Suivons cet exemple de pathologie observée sur des câbles gainés de polyéthylène à haute densité (PEHD) et injectés au coulis de ciment, après seulement une dizaine d'année de service :

- Lors de l'enroulement, le toronnage des câbles entraîne une certaine torsion, si bien que la gaine est soumise à un cumul torsion et flexion.
- Le dépassement de la limite élastique du PEHD (limite d'écoulement) entraîne sur la bobine des déformations permanentes irréversibles qui donneront à la gaine déroulée un tracé hélicoïdal.

- Le cumul de ces contraintes résiduelles et de celles de service (flexion du câble, dilatation gênée en cas d'injection au coulis de ciment) peut provoquer des fissures de surfaces qui se propagent par fatigue.
- L'eau peut alors pénétrer dans le câble et s'infiltrer jusqu'à l'acier par les inévitables fissures de retrait du coulis de ciment.
- La respiration des fissures étant une zone de fatigue et de l'usure induites par petits débats, la corrosion de l'acier progresse jusqu'à la rupture du câble (fig.2-8).

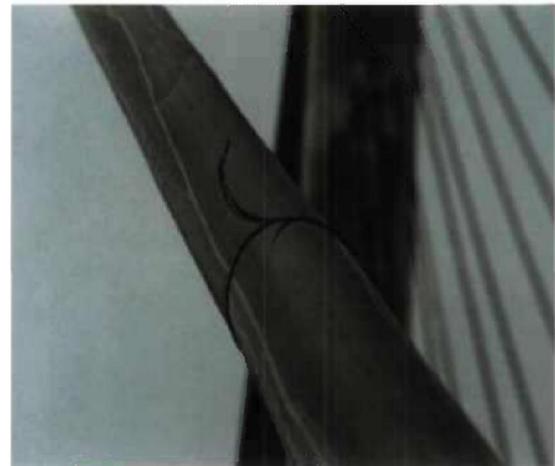


Figure 2-8 : Rupture de gaine PEHD de type ESC

2-3-6 Choix des matériaux

Ce choix concerne non seulement les matériaux de base, en général définis par les sollicitations mécaniques, mais aussi les techniques de mise en œuvre, les traitements à cœur ou en surface et la formulation particulière permettant d'obtenir la durabilité requise. Les exemples ci-dessous fournissent quelques bases de jugement.

2-3-6-1 Câbles et autres pièces en acier

Le choix de l'acier des câbles et de leur mode d'élaboration est étroitement lié à la tenue en fatigue axiale sous 2 millions de cycles. Dans le cas de structures légères, les câbles sont soumis à une amplitude de contrainte importante et il convient, là aussi, d'être vigilant au choix du type de câble. C'est pourquoi la catégorie B des normes des fils ou torons est systématiquement choisie.

La résistance à 2 millions de cycles de fatigue axiale n'est cependant pas une garantie suffisante de durabilité, en particulier pour les produits comportant des contacts interfils non protégés vis-à-vis des phénomènes tribologiques. Le choix de l'acier du toron doit donc être associé à un traitement des contacts permettant de se prémunir des phénomènes FIP et UIP (traitement de surface et lubrification, combiné à une protection anticorrosion). Le choix de torons galvanisés est souvent recommandé car la galvanisation est le seul procédé industriel qui a largement fait ses preuves en la matière.

Quant aux autres pièces comme les têtes d'ancrage, les organes de transfert et les dispositifs d'ancrage (mors ou manchon), le choix de l'acier doit être guidé par une analyse semblable à celle des câbles, tenant compte de leurs spécificités de forme et de fonction. La durabilité de ces organes dépend aussi :

- de leur mode d'élaboration (forge, fonderie, laminage) ;
- des traitements subis (thermique, thermo-chimique, de surface) ;
- de la combinaison de matériaux différents, en évitant les incompatibilités.

Il convient enfin de détecter et d'exclure tout défaut (fissures, porosités, soufflures, tapures, etc.) par des exigences sur le processus de fabrication et des contrôles adéquats (radiographie, ultrasons, ressuage, etc.).

2-3-6-2 Matières plastiques

Des matières plastiques sont utilisées sur les câbles. Les plus courantes sont les polyoléfinés, et les gaines de PEHD en particulier. Il convient d'analyser avec soin, et de manière spécifique à chaque matériau, le vieillissement de ces matières plastiques.

- Gaines extérieures en PEHD

La principale cause de vieillissement des gaines en PEHD exposées au soleil est la photoxydation des chaînes de polymères, donnant lieu à la formation de carbonyles, puis à la perte des propriétés mécaniques du PEHD. Il convient donc de formuler le PEHD avec des agents antioxydants et anti-ultraviolets pour obtenir des gaines de durabilité suffisante. Le noir de carbone permet par exemple d'absorber les ultraviolets, à condition que sa dispersion soit homogène. Il est remplacé par d'autres agents chimiques dans les gaines de couleur. L'efficacité de ces agents doit être analysée par des essais de vieillissement accéléré qui sont basés sur l'étude de l'endommagement physico-chimique du matériau en prenant compte l'agressivité de l'environnement où sera placée la gaine (intensité du rayonnement ultraviolet en fonction de la situation géographique de l'ouvrage) et les facteurs accélérateurs (température, vent, etc.).

- Torons gainés

Une analyse particulière est nécessaire pour les gaines de torons individuellement gainés, où le PEHD est directement en contact de l'acier. Le rôle de l'interface acier-PEHD est primordial : l'action différentielle de la chaleur sur l'acier et le PEHD, par suite de la différence des coefficients de dilatation thermique, doit être prise en compte dans la conception du système de câblage. Un matériau d'interface est indispensable, qui sert généralement aussi à colmater les vides inter fils du toron.

2-3-6-3 Peinture de la partie courante des torons multicouches

Le vieillissement des systèmes de protection par peinture affecte à la fois i) l'aspect et la tenue de la couleur, justifiant des exigences sur le pigment ii) la protection anticorrosion et la tenue mécanique, justifiant le choix de la résine.

Comme pour toutes les structures métalliques, la qualité de la préparation de surface est capitale pour la durabilité de la peinture. Le recours au grenailage est admis seulement lorsque des dispositions garantissent l'absence de grains dans le câble en fin d'opération. Il convient d'apporter aussi un grand soin à la protection des assemblages mécaniques mobiles ou semi-mobiles. En effet, la présence de grains dans le câble ou les assemblages pourrait

compromettre sérieusement leur tenue en fatigue. Sur la peinture, comme pour les matières plastiques, la combinaison des contraintes mécaniques et d'agressions environnementales entraîne une accélération du vieillissement. Cela doit être pris en compte dans le mode opératoire d'application initiale de la peinture, avant ou après la mise en tension des câbles, ainsi que lors de l'opération de renouvellement de la peinture.

2-3-6-4 Besoin de remplaçabilité

L'analyse de la durabilité doit être menée très sérieusement lors de la conception initiale de l'ouvrage. Comme il subsiste malgré tout une part d'aléas dans l'appréciation du vieillissement futur, il est indispensable de prévoir des câbles remplaçables et facilement visitables. La remplaçabilité est conditionnée par le mode d'accrochage du câble sur la structure. En particulier, les assemblages des organes de protection dans la zone d'ancrage doivent être réversibles plutôt que permanents (filetage au lieu de la soudure).

L'examen et le diagnostic des câbles, par des méthodes directes ou indirectes, visuelles, dynamiques ou acoustiques imposent les dispositions technologiques suivantes :

- possibilités d'ouvertures d'accès à l'examen visuel ou au prélèvement d'éléments en vue d'un contrôle de vieillissement ;
- protections supportant les démontages répétés ;
- mise en place de systèmes de mesure interrogeables à distance en permanence.

2-4 Vibrations des câbles

Lorsqu'ils sont soumis à une excitation périodique, les câbles de précontrainte peuvent, dans certaines conditions, accumuler de l'énergie et osciller avec des amplitudes importantes. Ces oscillations mettent rarement l'ouvrage en danger [30], mais elles sont inquiétantes pour les usagers et peuvent, si elles ne sont pas maîtrisées, endommager ces câbles par fatigue. Les causes de vibration des câbles peuvent être classées en deux types:

- Déplacement des ancrages, sous l'effet des charges du trafic ou du vent agissant sur l'ouvrage (tablier, pylônes) ;
- Les effets du vent agissant directement sur les câbles.

Le risque de vibrations des câbles doit être pris en considération lors de la conception de l'ouvrage. Si des instabilités imprévues se produisent sur un ouvrage achevé, un diagnostic précis est nécessaire pour prendre des mesures correctives adaptées [31]. Dans cette section, il s'agit d'abord de rappeler les paramètres aérodynamiques d'un câble, puis de présenter d'une façon succincte, les phénomènes physiques pouvant engendrer des vibrations et enfin de décrire les actions permettant de combattre ces vibrations.

2-4-1 Paramètres aérodynamiques d'un câble

2-4-1-1 Trainée d'un câble

L'effort de trainée (statique) du vent sur un câble est donnée par:

$$F_d = \frac{l}{2} \rho U^2 D C_d \quad (2-1)$$

où ρ est la densité de l'air ($\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$ dans les conditions normales de température et de pression), U est la vitesse du vent, D le diamètre extérieur du câble et C_d le coefficient de trainée appelé C_{f0} dans l'Eurocode 1. Dans le cas classique des gaines circulaires, la valeur du coefficient de trainée dépend de la vitesse du vent, ou plus précisément du nombre de Reynolds R_e :

$$R_e = \frac{UD}{\nu} \quad (2-2)$$

où ν est la viscosité cinématique de l'air ($\nu=15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ dans les conditions normales de température et de pression).

Comme le montre le diagramme ci-dessous (fig.2-9), on observe trois domaines pour la valeur de C_d :

- Pour des faibles valeurs de R_e , dans le domaine subcritique, C_d est relativement élevé, de l'ordre de 1.2 ;
- dans le domaine supercritique, au dessus d'une valeur critique du nombre de Reynolds variant de $2 \cdot 10^5$ à $8 \cdot 10^5$ selon la rugosité de la gaine, le coefficient de trainée chute à 0.5 ou 0.6 ;
- pour des valeurs plus élevées de R_e , dans le domaine hypercritique, le coefficient de trainée croît pour atteindre un palier qui dépend à nouveau de la rugosité.

Dans la plupart des ouvrages, les câbles se trouvent dans le domaine supercritique pour les valeurs extrêmes de la vitesse du vent, et l'on adopte généralement une valeur de 0.7 pour le coefficient C_d afin de couvrir l'évolution de la rugosité des gaines dans le temps, avec le dépôt de poussière et l'altération des matériaux.

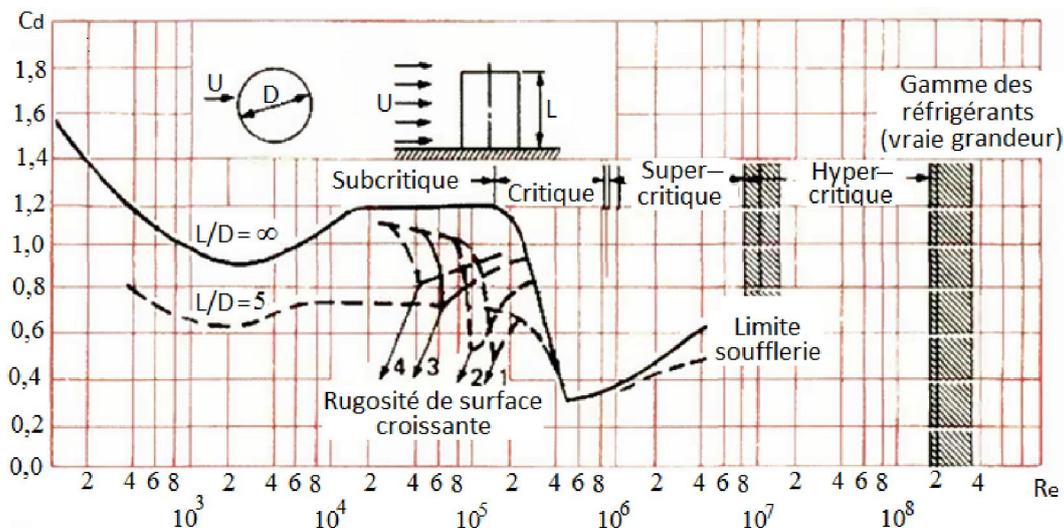


Figure 2-9 : Evolution du coefficient de trainée du cylindre en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement

2-4-1-2 Amortissement d'un câble

L'amortissement d'un câble provient de frottements internes entre les éléments constitutifs du câble ou des ancrages; il est caractérisé par plusieurs paramètres. Dans les équations de la dynamique, la force d'amortissement par unité de longueur peut être modélisée à partir d'une constante d'amortissement visqueux notée γ et de la vitesse de déplacement transversal du câble (y), donnée par la relation :

$$F_{amort} = -\gamma \frac{\partial y}{\partial t} \quad (2-3)$$

Si l'on désigne par m la masse linéique du câble et ω_1 sa pulsation fondamentale, l'amortissement rapporté au critique ξ est défini par :

$$\xi = \frac{\gamma}{2m\omega_1} \quad (2-4)$$

Enfin, on définit par décrement logarithmique d'un câble le logarithme du rapport, que l'on note δ , des amplitudes de deux oscillations libres successives (A_n et A_{n+1}).

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} \quad (2-5)$$

L'amortissement rapporté au critique ξ étant naturellement faible pour un câble, on montre que $\delta=2\pi\xi$ pour des oscillations d'amplitudes modérées.

L'amortissement total d'un câble est la somme de son amortissement intrinsèque et de l'amortissement aérodynamique : $\delta_{tot} = \delta_i + \delta_a$. Ce dernier augmente avec la vitesse du vent, si bien que les problèmes de vibrations liés à une insuffisance d'amortissement sont souvent plus critiques pour des vents modérés que pour des vents extrêmes. L'amortissement intrinsèque δ_i d'un câble provient des frottements internes entre armatures constitutives du câble et entre pièces constitutives de l'ancrage. Il dépend donc fortement de la technologie employée pour l'élaboration du câble et l'on suggère de prendre les ordres de grandeurs suivants :

- Câbles multi-torons parallèles (MTP) protégés individuellement : $\delta_i=0.9$ à 1.2% ;
- Câbles multi-fils parallèles (MFP) et multi-torons parallèles protégés collectivement par un produit souple: $\delta_i=0.6$ à 1.8% ;
- Câbles multi-fils parallèles (MFP) et multi-torons parallèles (torons nus) injectés au coulis de ciment: $\delta_i=0.05$ à 0.1% ;
- Câbles torons multi-couches (TMC): $\delta_i =0.3$ à 0.6% en fonction du produit de colmatage.

L'amortissement décroît généralement lorsque la longueur du câble augmente, puisque les frottements localisés aux ancrages se diluent sur une plus grande portée. En outre, les frottements internes du hauban peuvent générer des problèmes de fatigue ou d'usure nuisibles à la résistance des câbles. L'amortissement aérodynamique provient du frottement du câble sur l'air, ou plus exactement de la vitesse relative du câble en vibration par rapport à l'écoulement du vent. Pour un déplacement relatif du câble dans la direction du vent, l'amortissement aérodynamique (décrément logarithmique) du mode n vaut :

$$\delta_a = \frac{\rho \pi U D C_d}{m \omega_n} \quad (2-6)$$

Où m est la masse linéique du câble et ω_n la pulsation propre du mode n. Pour un déplacement relatif du câble orthogonal à la direction du vent, l'amortissement aérodynamique (décrément logarithmique) du mode n vaut :

$$\delta_a = \frac{\rho \pi U D C_d}{2m \omega_n} \quad (2-7)$$

On remarque que l'amortissement aérodynamique est deux fois plus faible que pour des vibrations dans un plan vertical (i.e perpendiculaire à la direction du vent) que pour des vibrations transversales (selon la direction du vent).

2-4-2 Phénomènes physiques engendrant des vibrations

2-4-2-1 Détachement tourbillonnaire (vortex shedding)

Ce phénomène est assez classique, et qui se produit lorsqu'un écoulement fluide rencontre un obstacle non profilé, le sillage présente des tourbillons de Von Karman, tournant dans un sens puis dans l'autre. Ces tourbillons sont dus au détachement de la couche limite de l'écoulement autour de l'obstacle, et s'accompagnant d'une force transversale périodique sur l'obstacle.

La fréquence du détachement tourbillonnaire (N) est donnée par le nombre de Strouhal (St) donnée par la relation :

$$N = \frac{US_t}{D} \quad (2-8)$$

où U est la vitesse du vent et D le diamètre extérieur du câble. Pour un cylindre circulaire, le nombre de Strouhal St vaut 0.20.

Pour une vitesse de vent déterminée, l'échappement tourbillonnaire peut donc exciter un mode propre de vibration du câble. Toutefois, on s'aperçoit que la vitesse du vent permettant d'exciter les premiers modes d'un câble ($N < 2\text{Hz}$) est assez faible, de l'ordre de quelques mètres par seconde ; l'énergie d'un tel vent est très limitée. En outre, des phénomènes complexes d'amortissement liés à l'échappement tourbillonnaire limitent les amplitudes des vibrations ainsi engendrées à une portion du diamètre du câble. C'est pourquoi ce phénomène ne constitue pas généralement un danger pour les câbles.

2-4-2-2 Effet de sillage (wake galloping)

Il existe plusieurs effets de sillage différents, désignant tous l'action sur un câble des tourbillons de Von Karman créés par un obstacle en amont de l'écoulement. Les câbles d'un ouvrage suspendu peuvent se trouver dans le sillage d'un élément de structure. Les turbulences provoquées par l'élément de structure peuvent exciter la vibration du mode n des câbles si le vent possède la vitesse critique suivante :

$$U_c = \frac{N_n D_{pyl}}{S_{pyl}} \quad (2-9)$$

où S_{pyl} et D_{pyl} sont le nombre de Strouhal et la dimension transversale de l'élément de structure engendrant les tourbillons. L'obstacle créant les tourbillons peut être un câble. C'est le cas lorsque le vent est quasiment parallèle à l'axe de l'ouvrage : les câbles amont pourraient alors provoquer l'excitation des câbles aval. Cependant, du fait de la fréquence de l'échappement tourbillonnaire sur un câble, et des distances entre câbles, ce phénomène ne peut pas se produire pour des vitesses de vent importantes, et ne présente donc pas de danger réel.

2-4-2-3 Action du vent turbulent (buffeting)

Le vent turbulent a une action dynamique sur les câbles, de même que sur toute structure souple. Ces effets dépendent de la vitesse du vent, de l'intensité de la turbulence, et des paramètres aérodynamiques des câbles. Ils peuvent être appréhendés en calculant la réponse des câbles au vent turbulent, à l'aide de logiciels spécialisés, après une caractérisation adéquate du vent sur le site.

L'amplitude des vibrations augmente avec la vitesse du vent, mais cet effet n'est pas dangereux par lui-même. En effet, contrairement aux phénomènes d'instabilité qui peuvent engendrer des vibrations de grande amplitude sous des vitesses de vent très modérées, la réponse au vent turbulent n'atteint des amplitudes extrêmes que sous des vents exceptionnels et engendre peu de phénomènes de fatigue. En outre, l'amortissement aérodynamique des câbles, ainsi que la tension relativement élevée sous charges permanentes limite les vibrations.

2-4-2-4 Galop (galloping)

Le galop désigne une instabilité aéroélastique qui peut se produire pour certaines structures élastiques mal profilées placées dans un écoulement laminaire. Cette instabilité, normalement régie par l'analyse des écoulements non stationnaires, peut être mise en évidence par une analyse quasi-stationnaire.

Considérons par exemple un profil se déplaçant transversalement au vent avec une vitesse $y'(t)$, la vitesse du vent étant U . Alors, le vent attaque le profil avec un angle d'incidence $i(t) = -\tan^{-1} \frac{y'(t)}{U}$, et pour des petits angles, l'effort transversal exercé par le vent sur le profil est de la forme :

$$F_y(t) = \frac{-I}{2} \rho U^2 B \left[\frac{\partial C_L}{\partial i} + C_d \right] \frac{y'(t)}{U} \quad (2-10)$$

Où C_L et C_d sont respectivement les coefficients de portance et de trainée du profil, mesurés dans le référentiel du vent et B la largeur du profil. Le comportement du profil dans l'écoulement est celui d'un oscillateur linéaire dont l'amortissement (terme en y') est de la forme :

$$\gamma = 2m\xi\omega_l + \frac{I}{2} \rho U B \left[\frac{\partial C_L}{\partial i} + C_d \right] \quad (2-11)$$

Pour certains profils (portance à forte dérivée négative), le terme entre crochets peut être suffisamment négatif pour que l'amortissement total de l'oscillateur soit négatif, conduisant alors à une instabilité aéroélastique appelée galop. Par raison de symétrie, la portance d'un cylindre circulaire est nulle pour tout angle d'incidence, si bien que l'écoulement du vent autour d'un câble circulaire ne peut pas engendrer de phénomène de galop, y compris pour des vents obliques.

Cependant, des développements théoriques, fondés sur des résultats expérimentaux japonais, prétendent établir une corrélation entre le risque de galop et le nombre de Scrutton S_c :

$$S_c = \frac{m\xi}{\rho D^2} \quad (2-12)$$

D'après ces recherches, il n'y aurait pas de risque de galop pour des vitesses de vent inférieures à la vitesse critique :

$$V_c = 35 D N_n \sqrt{S_c} \quad (2-13)$$

où N_n est la fréquence propre du mode n . En revanche, des phénomènes de galop sont possibles dès que le profil du câble présente une certaine asymétrie susceptible d'engendrer des efforts de portance. C'est le cas par exemple d'un faisceau de torons parallèles rangés selon une disposition hexagonale et sans gaine générale. Les torons multi-couches à fils extérieurs circulaires peuvent également produire des phénomènes de galop, sous certaines conditions de pas d'enroulement. Enfin un dépôt de glace sur un câble modifie la forme aérodynamique du câble et peut engendrer une instabilité, à l'exemple des lignes électriques.

2-4-2-5 Phénomène pluie + vent (rain-wind induced vibrations)

L'excitation combinée pluie+vent est un phénomène qui fut mis en évidence par des chercheurs japonais dont le premier fut Y. Hikami. Sous certaines conditions de vent, et par temps de pluie, l'eau qui descend le long de la surface du câble s'organise selon deux filets d'eau, l'un en équilibre stable en fibre inférieure du câble, et l'autre en équilibre instable en fibre supérieure. Ce dernier est placé à l'angle d'azimut où s'équilibrent les effets de la gravité, de la capillarité et du vent.

La présence de ces filets d'eau modifie le profil aérodynamique du câble. De plus, le mouvement oscillant du filet d'eau supérieur provoque des efforts aérodynamiques variables, qui engendrent une instabilité du câble. L'amplitude des vibrations du câble sous excitation combinée pluie+vent peut atteindre plusieurs mètres.

L'instabilité pluie+vent a été observée dans les conditions suivantes :

- L'intensité de la pluie est sans importance, sauf en cas de pluie trop abondante pour permettre aux filets d'eau de se former.
- Le vent doit être oblique, avec un angle d'azimut compris entre 30 et 80 °, et tend à soulever les câbles considérés. L'instabilité pluie+vent se développe pour des vitesses de vent modérées, compris entre 8 et 15 m/s. Il semblerait que la turbulence du vent limite le phénomène, sans doute parce qu'elle empêche l'organisation des filets d'eau.
- Le diamètre des gaines est sans importance mais leur état de surface joue un grand rôle. L'instabilité pluie+vent a été observée sur des gaines en acier peint, en acier inoxydable ou en PEHD. Si la surface est trop lisse, le filet d'eau

supérieur ne peut pas se former, mais l'augmentation de la rugosité liée au dépôt de la poussière sur le câble permet à l'instabilité pluie+vent de s'établir.

- Les oscillations les plus couramment observées ont une fréquence de 1.0 à 3.0 Hz et sont verticales.

2-4-2-6 Excitation paramétrique

La vibration des câbles peut être provoquée par le déplacement périodique de leurs ancrages, et donc par des oscillations de l'ouvrage engendrées par l'action du vent sur le tablier ou les pylônes ou par l'action du trafic. Un déplacement périodique quelconque d'un ancrage peut être décomposé en déplacement transversal, d'une part, et déplacement longitudinal, d'autre part. Le déplacement transversal d'un ancrage peut engendrer un phénomène de résonance classique. La réponse du câble présente une amplitude maximale lorsque la pulsation d'excitation correspond à une pulsation propre ; cette amplitude est limitée par l'amortissement du câble. Cependant, le déplacement longitudinal d'un ancrage peut donner lieu à un phénomène de résonance paramétrique, qui s'apparente à une instabilité, lorsque la pulsation d'excitation est double de la pulsation propre du câble. L'amplitude de la réponse ne dépend pas de l'amortissement du câble.

L'excitation paramétrique est responsable de vibration de grande amplitude, pouvant atteindre plusieurs mètres, y compris pour des vents modérés. Elle est d'autant plus à craindre lorsque la structure est mal profilée (tabliers bi-poutres notamment). Le déplacement des ancrages du tablier est généralement prépondérant, mais certains pylônes non contreventés pourraient se déplacer sous l'action du vent et engendrer une résonance paramétrique.

2-4-2-7 Respiration des torons (rattling)

Lorsque les câbles sont constitués d'un faisceau ouvert de torons (câbles MTP individuellement protégés sans gaine générale, faisceau de câbles TMC) des interactions aérodynamiques se produisent entre torons. Les torons périphériques s'éloignent et se rapprochent périodiquement du faisceau, choquant les torons centraux et engendrant finalement une vibration d'ensemble du câble.

Ces mouvements, dénommés souvent respiration des torons, produisent un bruit de claquement violent et désagréable. Ils sont évités en plaçant des colliers de serrage à intervalles réguliers sur le faisceau de torons, ou mieux, en logeant ce faisceau dans une gaine générale. Dans ce dernier cas, la gaine générale interdit toute action directe du vent sur les torons. Lorsque les torons sont individuellement protégés, la gaine n'est habituellement pas injectée et repose simplement sur le faisceau de torons.

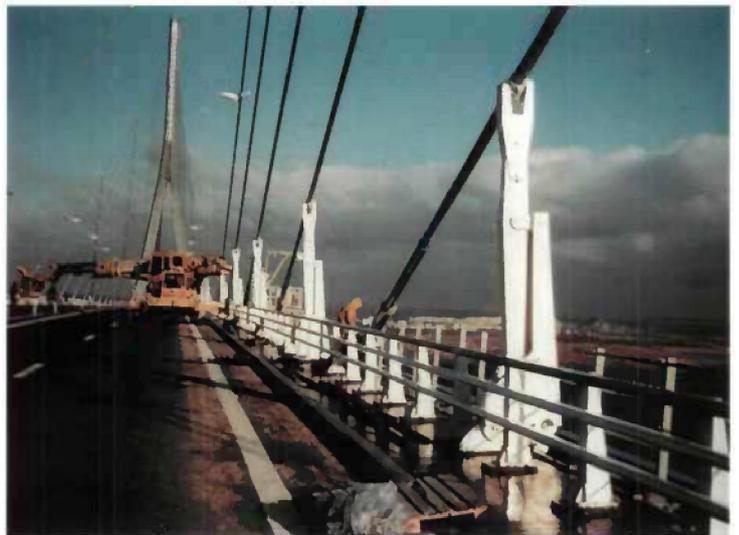
Si des vibrations importantes se produisent pour une autre raison, par exemple l'action du vent turbulent, il est possible que l'accélération verticale du câble dépasse celle de la gravité, si bien que la gaine pourra décoller du faisceau de torons. Les vibrations de grande amplitude peuvent ainsi s'accompagner d'un claquement sonore de la gaine sur le faisceau de torons, sans gravité pour le câble, mais désagréable pour le voisinage.

2-4-3 Spécification contre les vibrations des câbles

La littérature révèle l'existence de nombreuses actions pratiques employées pour limiter ou éviter les vibrations des câbles. Ces actions sont de trois types (fig.2-10 et 2-11): amortisseurs, profilage du câble et mise en place d'aiguilles.



a) amortisseur interne



b) amortisseur externe

Figure 2-10: Amortisseurs du pont de Normandie



Figure 2-11: Gains profilées et aiguilles du pont de Normandie

Cependant, la complexité des phénomènes physiques en jeu ne permet pas toujours d'anticiper le risque de vibration des câbles. Inversement, les contraintes économiques empêchent de spécifier des actions correctives superflues. Les règles suivantes constituent un compromis.

- L'instabilité pluie+vent doit systématiquement être prévenue dès la conception, par des gaines de câbles profilées. L'incidence économique de cette mesure préventive est négligeable, et les actions correctives sont beaucoup plus délicates.
- Les risques de vibration augmentent avec la longueur des câbles. Les câbles courts, mesurant moins de 70 à 80 m, ne présentent généralement pas de risque, sauf celui d'une résonance paramétrique en cas d'ouvrage particulièrement instable (tablier mal profilé et souple). Il n'est généralement pas nécessaire de prévoir des amortisseurs pour ces câbles.
- Pour les câbles longs, à partir de 80 m, la mise en place d'amortisseurs pour obtenir un décrétement logarithmique supérieur à 3% est recommandée. On peut éventuellement se dispenser d'amortisseurs pour les haubans si les travées de rive présentent des portées suffisamment courtes pour empêcher tout déplacement important des ancrages.

- Il convient d'anticiper dès la conception le risque de résonance paramétrique par une étude détaillée des modes propres de la structure et des câbles : rapport des pulsations propres et déplacement des ancrages concernés pour chaque mode. On s'efforce d'éviter les chevauchements de pulsation, c'est-à-dire les situations où la pulsation d'excitation Ω est proche de la pulsation propre ω_n ou $0.2\omega_n$ (à 20% près). En cas de besoin, on peut utiliser des aiguilles pour décaler la pulsation propre du câble.
- Pour des raisons de confort visuel des usagers, il convient de limiter l'amplitude de vibration en s'inspirant du critère suivant : sous un vent modéré, de vitesse 15 m/s (vent jamais quasiment dépassé) l'amplitude de vibration des câbles ne doit pas dépasser 10 cm.

2-5 Catégories des câbles de précontrainte

Les câbles de précontrainte utilisés dans les ouvrages suspendus sont constitués de diverses armatures en acier. Comme déjà mentionné précédemment, on peut en distinguer trois catégories en fonction des armatures élémentaires utilisées (fils ou torons) ainsi récapitulées dans le tableau ci-dessous [31]:

Abréviation	Désignation	Armatures en acier revêtu
MTP	Multi-torons parallèles	Torons de précontrainte T15.2 ou T15,7 gainés individuellement ou collectivement
MFP	Multi-fils parallèles	Fils ronds boutonnés gainés collectivement
TMC	Torons multi-couches	Fils ronds et/ou fils profilés

Tableau 2-1 : Catégories des câbles de précontrainte

2-5-1 Catégorie MTP : câbles multi-torons parallèles

Les câbles multi-torons sont constitués de torons parallèles, ancrés individuellement (fig.2-12) dont les torons sont protégés par un dépôt métallique et une gaine injectée individuelle (fig.2-13) ou collective (fig.2-14). Les armatures des câbles MTP possèdent les caractéristiques suivantes :

- diamètre nominal : 15.2 mm (toron T15.2) ou 15.7 mm (toron T15.7) ;
- section résistante nominale : 140 mm² ou 150 mm² respectivement ;
- masse linéique nominale du toron nu : 1.086 kg/m ou 1.172 kg/m respectivement ;
- revêtement de protection d'un dépôt métallique de zinc ou d'un alliage zinc et aluminium normalisé compris entre 190 et 350 g/m² (épaisseur moyenne de 26 à 40 µm environ) ;
- classe de résistance f_{rg} 1770 ou 1860 MPa ;
- allongement relatif sous charge maximale A_{gt} supérieur ou égal à 3.5% ;
- module d'élasticité du faisceau de torons parallèles est de l'ordre de 190 GPa ;
- très basse relaxation (TBR) : inférieure ou égale à 2.5 % à 1000 h sous 0.7 F_m (20°C) ;
- tenue en fatigue : 2 millions de cycles avec une contrainte maximale de 0.45 f_{rg} et une variation de contrainte de 300 MPa ;

- Coefficient de traction déviée inférieur ou égale à 26%.

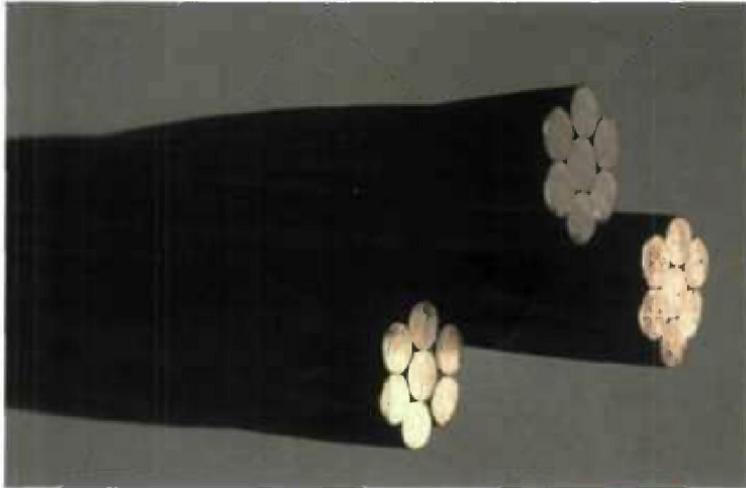


Figure 2-12 : Détail d'un toron

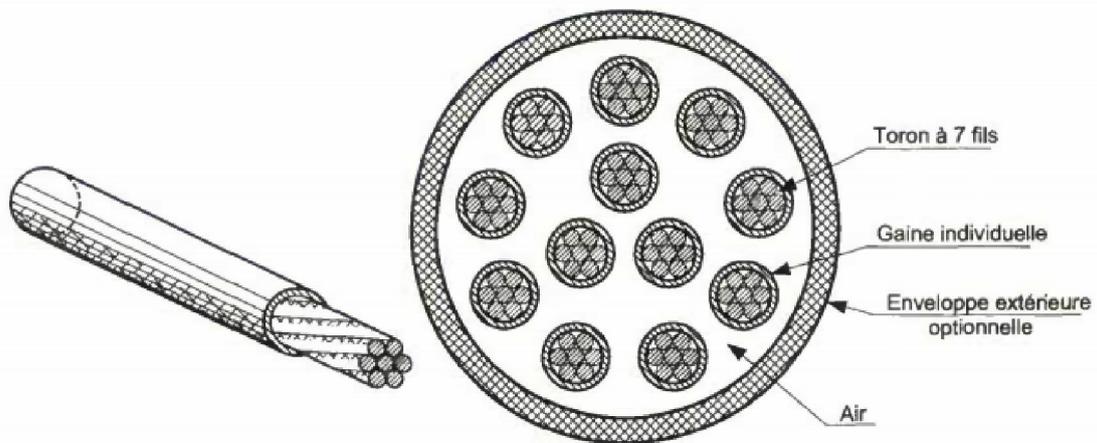


Figure 2-13 : Schéma de principe d'un câble MTP à gaine individuelle

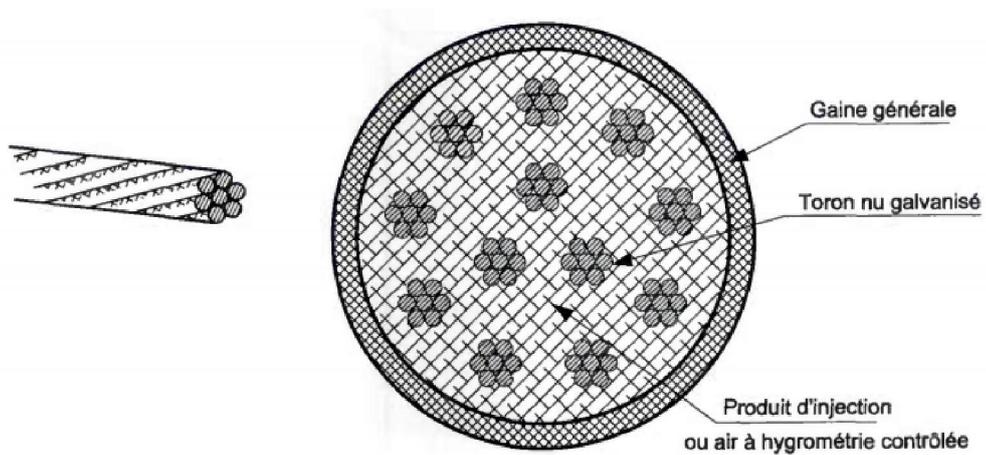


Figure 2-14 : Schéma de principe d'un câble MTP à gaine collective

2-5-2 Catégorie MFP : câbles multi-fils parallèles

Les armatures des câbles MFP sont des fils lisses revêtus (fig. 2-15) et ayant les caractéristiques suivantes :

- diamètre nominal : 7 mm ;
- section résistante nominale : 38.5 mm²;
- masse linéique nominale d'un fil de 7 mm : 0.301kg/ml;
- revêtement de protection d'un dépôt métallique de zinc ou d'un alliage zinc et aluminium normalisé compris entre 190 et 350 g/m² (épaisseur moyenne de 26 à 50 µm environ) ;
- classe de résistance f_{rg} 1670 ou 1770 MPa ;
- allongement relatif sous charge maximale A_{gt} supérieur ou égal à 3.5% ;
- module d'élasticité du faisceau de fil de 7 mm de l'ordre de 200 GPa ;
- très basse relaxation (TBR) : inférieure ou égale à 2.5 % à 1000 h sous 0.7 F_m (20°C) ;
- tenue en fatigue : 2 millions de cycles avec une contrainte maximale de 0.45 f_{rg} et une variation de contrainte de 300 MPa.

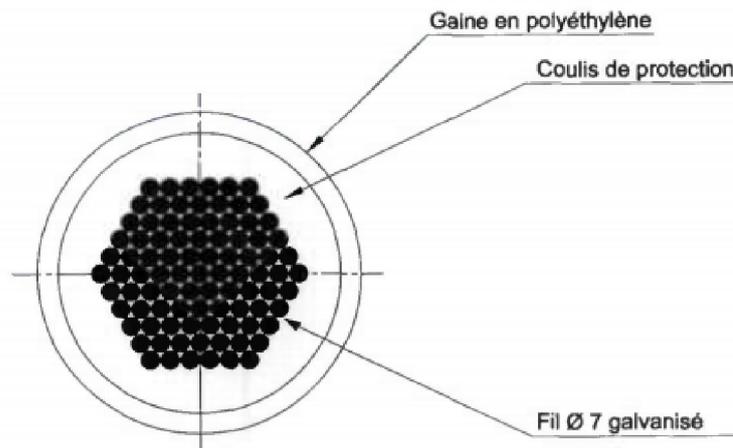


Figure 2-15 : Coupe transversale d'un câble MFP

2-5-3 Catégorie TMC: câbles à torons multi-couches

Les câbles à torons multi-couches sont constitués d'un ou plusieurs câbles monotorons dont le schéma de principe est illustré sur la figure 2-16. Un câble monotoron multi-couches est formé de fils élémentaires enroulés en hélice autour d'un fil d'âme, en plusieurs couches successives. Ces couches sont généralement à pas inversés, ce qui engendre des contacts interfilaires ponctuels, ou au contraire enroulées avec le même pas et des fils de diamètre choisis pour obtenir des contacts interfilaires linéiques.

Le diamètre extérieur d'un TMC dépend du nombre de couches et des diamètres des fils élémentaires; ils varient sur demande de 20 à 150 mm et la composition de chaque type de câble est définie de façon spécifique pour chaque projet. Les fils élémentaires peuvent être ronds ou profilés. Les fils profilés sont utilisés sur certains câbles pour réaliser les couches extérieures (2 à 4 couches de fils profilés emboîtés) ; les couches intérieures étant réalisées avec des fils ronds : ce type de câble est appelé câble clos.

Les fils extérieurs profilés ont été développés par la construction mécanique pour améliorer l'étanchéité des câbles, mais aussi pour répondre à la nécessité mécanique d'une surface extérieure cylindrique, apte à passer sur des poulies. A l'origine, ils étaient surtout destinés aux câbles de téléphériques et remontés mécaniques, puis leur usage a été étendu aux structures de génie civil et off-shore.

Les fils élémentaires ronds et profilés des câbles TMC sont des fils revêtus destinés avant tout aux câbles porteurs fixes pour les structures de bâtiment et de génie civil (fig. 2-17), et présentent les caractéristiques suivantes:

- diamètre nominal des fils ronds ou hauteur nominale des fils profilés compris entre 2 et 8 mm ;
- revêtement de protection d'un dépôt métallique de zinc ou d'un alliage zinc-aluminium, de classe A au minimum ;
- classe de résistance f_{rg} des fils 1570, 1670 MPa ou 1860 MPa;
- allongement relatif total après rupture supérieur à 4% ou bien allongement relatif sous charge maximale A_{gt} supérieur à 3.5%;

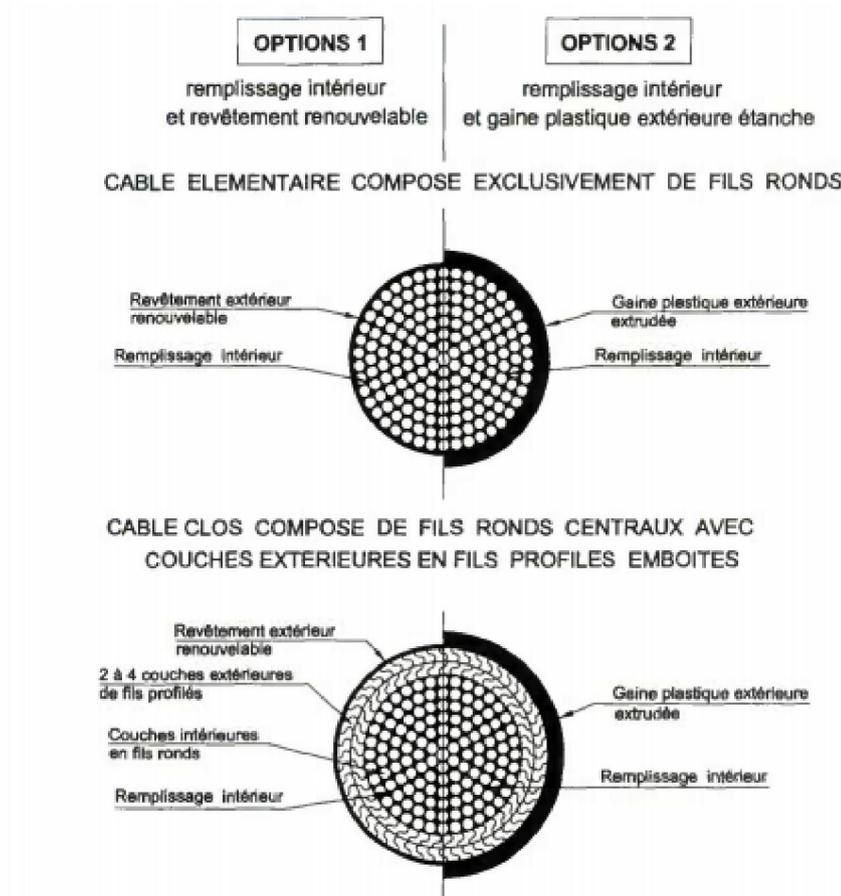


Figure 2-16 : Coupe transversale types des câbles TMC



Figure 2-17 : Câble TMC

CHAPITRE 3

ANALYSE DU COMPORTEMENT D'UN CÂBLE SEUL ET D'UN SYSTEME A TREILLIS DE CÂBLES DOUBLEMENT INVERSES

3-1 Généralités

Dans ce chapitre, nous allons d'abord passer en revue d'une manière approfondie le comportement statique et dynamique d'un câble suspendu seul librement accroché à ses extrémités et ensuite d'un système à treillis de câbles doublement inversés qui sont supposés ancrés solidement dans des massifs d'ancrage. La géométrie des câbles est fondamentalement admise, par hypothèse, de la forme d'une parabole de deuxième degré. Soulignons par ailleurs que ce chapitre prend largement comme référence les travaux réalisés par Max Irvine [32] portant sur l'analyse statique et dynamique des systèmes simples à câbles applicables pour la couverture des structures de toitures de grandes surfaces.

Les autres hypothèses simplificatrices communément admises sont telles que le câble employé comme élément porteur principal possède une section transversale uniforme et fait d'un matériau hookien dont la densité est constante en n'importe quel point du câble. Les expansions et les contractions ainsi que les effets de Poisson qui se développent dans la section transversale sont supposés négligeables. On ignore également la rigidité flexionnelle du câble c'est-à-dire, en d'autre terme, d'admettre un comportement parfaitement flexible du câble ; ce qui revient en langage structural à énoncer que, tout au long d'un câble, le moment fléchissant est nul. Il s'ensuit que la résultante des efforts développés dans chaque point du câble est tangentielle au profil du câble et agit au centre de gravité de la section transversale au point considéré. En outre, pour des raisons de simplicité, chaque extrémité du câble est supposée ancrée dans des supports rigides et qui, dans la plupart du temps sauf indication contraire, sont tous supposés situés au même niveau i.e sans dénivellation d'appuis. Par ailleurs, la géométrie d'un câble dont sa forme est assimilée initialement à une forme parabolique, plutôt que sa forme exacte dite chaînette ou caténaire, impose que le rapport flèche/travée soit relativement petit.

Première partie : Analyse du comportement statique et dynamique d'un câble isolé de la forme parabolique – revue et synthèse bibliographiques

Dans les développements théoriques qui vont suivre, le rapport flèche/travée doit être de l'ordre de 1/8 ou moins correspondant à des câbles relativement tendus (ou peu profonds). C'est de sorte que les chainettes soient fortement aplaties pour pouvoir les assimiler, dans l'état initial, réellement à des paraboles. A priori, un câble qui ne satisfait pas cette exigence, ne va décrire exactement une forme parabolique. En pratique, de tels câbles sont rarement conçus pour reprendre des charges transversales.

3-2 Réponse statique d'un câble parabolique sous charges transversales

Dans cette section, trois cas de charges les plus rencontrés en pratique seront considérés à savoir le poids propre du câble, une charge ponctuelle quelconque et une surcharge partiellement répartie par mètre horizontal du câble. Une équation de troisième degré obtenue dans chaque cas de charge, à caractère essentiellement non linéaire, servant au calcul de la poussée ou de la tractée dans le câble est dérivée en exploitant fondamentalement l'équation dite des déplacements orthogonaux et la condition d'immobilité des extrémités du câble qui sont supposées solidaires à des massifs d'ancrage. Bien que l'étude soit principalement théorique, des exemples d'illustration seront apportés dans le but de comprendre les fondements théoriques des méthodes de calcul qui sont parfois assez laborieuses.

3-2-1 Sous l'action du poids propre

3-2-1-1 Aperçu historique

La littérature révèle que c'est Galilée [33], pour la première fois au début du 17^{ème} siècle, qui a examiné la forme de la courbe que prend un câble suspendu, uniforme, inextensible et accroché librement à ses extrémités soumis à l'action de son poids propre. Apparemment, il n'a pas pu aller plus loin que de constater une similarité entre la courbe obtenue et une parabole. Cette courbe est évidemment, bien connue aujourd'hui, sous le nom de chainette ou caténaire. La solution du problème a été publiée, en 1691, par un éminent groupe de géomètres composé de James Bernoulli, de son frère John, Leibnitz et Huygens

[33]. Plusieurs autres problèmes caténaux ont été ensuite poursuivis par James Bernoulli, y compris sa première tentative de tenir compte des effets de l'extensibilité du câble. Par la suite, les investigations dans ce domaine ont été effectuées par d'autres chercheurs. La plus intéressante d'entre-elles est, peut-être, la chaînette sous résistance uniforme, dans laquelle la section transversale du câble se modifie pour permettre à la contrainte de rester invariable le long de son profil. La solution est obtenue par Gilbert [33], en 1826, en relation avec la conception par l'ingénieur Telford du pont suspendu du détroit de Menai, dans les pays de Galle, au royaume uni.

En dépit des premières réflexions de Galilée ainsi rapportées par Max Irvine, il est surprenant qu'il ait fallu bien plus de 100 ans plus tard après la découverte de la chaînette que fut découverte la solution simple parabolique du profil du câble. En 1794, encore une fois lors de la conception d'un pont suspendu réalisé à Leningrad, Fuss [33] a démontré que, si le poids propre du câble est supposé réparti par mètre horizontal de la travée plutôt que le long de son profil, le câble prend bien une forme parabolique du second degré. Depuis, la parabole reçoit une grande attention non seulement à cause de la simplicité des calculs qu'elle procure, mais aussi à cause de nombreuses situations pratiques comme dans le cas des ponts suspendus du fait qu'une bonne partie des surcharges appliquées agissent uniformément répartie le long de la travée. Cependant, dans tous les travaux antérieurs au milieu du 19^{ème} siècle, à l'exception de ceux de Bernoulli mentionnés ci-dessus, aucune allusion n'est faite à l'extensibilité que ces câbles en possèdent. Par conséquent, le concept d'un câble élastique a reçu peu d'attention jusqu'à 1858, quand Rankine publia une solution approchée de l'augmentation de la flèche lorsqu'un câble parabolique, inextensible et suspendu à ses extrémités permet de subir des déformations. Suivi ensuite, en 1891, par Routh [33] pour des solutions de caténaire élastique plus difficiles.

3-2-1-2 Théorie classique du câble pesant non extensible ou de la parabole inextensible

C'est l'étude du cas limite classique d'un câble dépourvu d'élasticité (câble parabolique inextensible) qui permet d'isoler dans le comportement réel d'un câble les effets de grands déplacements c'est-à-dire les effets de la modification de la géométrie du profil. Dans cette section, on va s'intéresser donc à un câble complètement inextensible de poids linéique W dont on fait varier la tension T suivant la corde du câble.

Considérons un câble de forme parabolique, uniforme et inextensible, suspendu librement à ses extrémités et soumis à l'action de son poids propre dont la géométrie est représentée sur la figure 3-1a. A cause du rapport $f/l=1/8$ ou moins, la charge peut être supposée uniformément répartie par mètre horizontal de la travée. L'équation d'équilibre vertical selon l'axe y ($\sum F_y = 0$) d'un élément du câble (fig.3-1b) permet:

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = -W \quad (3-1)$$

Où T est la tension développée dans le câble, W est son poids propre par unité de longueur du câble et dy/ds est le sinus de l'angle d'inclinaison que fait l'élément du câble avec l'axe des x.

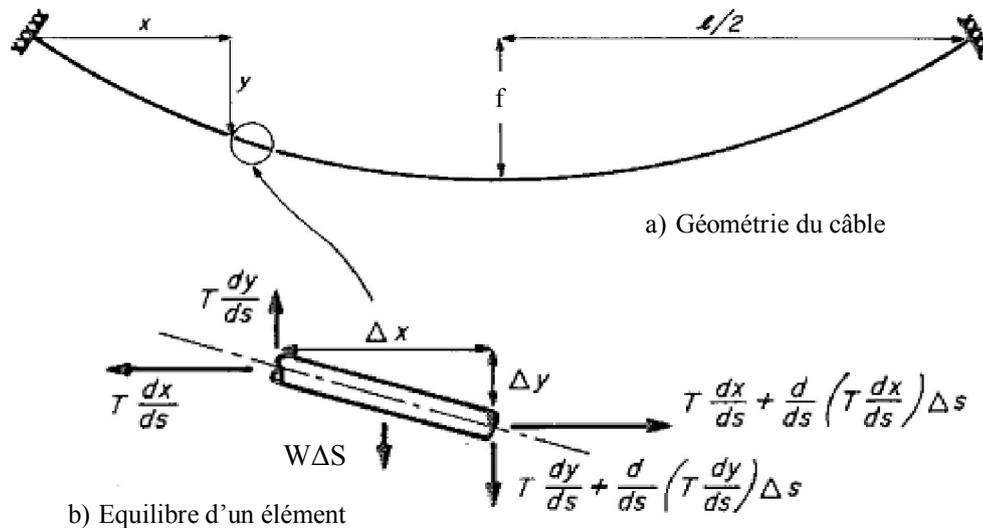


Figure 3-1: Comportement d'une parabole inextensible

L'équilibre des forces selon l'axe x ($\sum F_x = 0$) permet aussi d'écrire puisque il n'y a aucune charge horizontale appliquée:

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) = 0$$

On déduit directement après intégration de cette dernière relation:

$$T \frac{dx}{ds} = \text{Cste} (=H) \quad (3-2)$$

Où H représente la composante horizontale de la tension T du câble qui est constante partout en n'importe quel point et dx/ds est le cosinus de l'angle d'inclinaison de l'élément du câble; Par conséquent, en tenant compte de la relation (3-2) et de la règle de transformation d'une fonction différentielle soit $dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx$ et $d^2 y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx^2$, l'équation 3-1 permet d'écrire :

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = -W \frac{ds}{dx} \quad (3-3a)$$

Tenant compte du fait que $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$, il est possible d'écrire finalement :

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = -W \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3-3b)$$

Notons que lorsque W est constant, la solution de l'équation (3-3b) est bien connue sous le nom de chaînette ou caténaire. En effet, la modélisation la plus fine d'un câble pesant tendu entre ses deux ancrages ayant un poids linéique uniforme est ainsi naturellement assimilable à une chaînette ou caténaire. Cependant, d'un point de vue strictement théorique, le poids linéique W d'un câble en place n'est pas tout à fait uniforme, puisque sa tension varie avec l'altitude et que le câble présente donc une certaine variation de section, due à une variation d'allongement. Toutefois, cet effet est tout à fait négligeable, et l'on peut utiliser avec confiance les formules analytiques classiques données ci-après pour évaluer de façon rigoureuse les caractéristiques du profil comme la flèche maximale, inclinaison des tangentes aux extrémités, longueur développée, etc. La modélisation en chaînette permet surtout d'apprécier l'effet de grands déplacements sur la rigidité axiale effective d'un câble.

Lorsqu'on suppose de plus dans la formule (3-3a) que Wds/dx est constant, le profil du câble prend une forme d'une parabole qui constitue le résultat fondamental trouvé par Fuss [32]. Cependant, pour un câble aplati (f/l très petit) dont le poids propre est par unité de

longueur, la pente du profil du câble est petite et, par suite $ds \approx dx$. L'équilibre d'un tel élément de câble est exactement donné par la relation :

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = -W \quad (3-4)$$

Pour un système de coordonnées montré sur la figure 3-1 et en moyennant les conditions aux limites soit $y(x=0)=0$, $y(x=\ell)=0$, la solution de cette équation différentielle est une parabole dont la déflexion peut se mettre sous la forme :

$$y = \frac{W \ell^2}{2H} \left\{ \frac{x}{\ell} - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right\} \quad (3-5)$$

Soit f la valeur de la flèche à $x = \ell/2$, et ainsi la composante horizontale de la tension du câble s'écrit :

$$H = \frac{W \ell^2}{8f} \quad (3-6)$$

Ainsi, la tension à n'importe quel point du câble est donnée par la relation :

$$T = H \frac{ds}{dx} = H \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3-7)$$

Qui est au fait peu différente de sa composante horizontale H . Par ailleurs, à l'aide des équations (3-5) et (3-6), on convient souvent d'écrire l'équation de la déflexion sous la forme :

$$y = \frac{4f}{\ell^2} x(\ell - x) \quad (3-8)$$

Cependant, la solution n'est pas complète. Par exemple, si seulement W et ℓ sont connus, H ne peut pas être déterminée sauf si f est connue. Dans de telles situations, la

longueur L du câble doit être préalablement connue, et alors la flèche peut-être trouvée. La longueur du câble peut-être évaluée.

Soit avec : $L = \int_0^{\ell} ds$; $ds = dx \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{4f}{\ell^2}(\ell - 2x)$, il s'ensuit :

$$L = \int_0^{\ell} \left[1 + \left\{ \frac{4f}{\ell^2}(\ell - 2x) \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx \quad (3-9)$$

L'intégrale peut-être évaluée exactement mais il convient avec une précision assez suffisante de développer en série binomiale la relation (3-9) et ensuite intégrer terme par terme, conduisant à :

$$L = \ell \left\{ 1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f}{\ell} \right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{f}{\ell} \right)^4 + \dots \right\} \quad (3-10)$$

C'est une équation du second degré en fonction de f/ℓ et sa résolution conduit à :

$$\left(\frac{f}{\ell} \right)^2 \approx \frac{5}{24} \left\{ \left(1 + \frac{18}{5} \left(\frac{L - \ell}{\ell} \right) \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} \quad (3-11)$$

Ainsi, en général, si w et ℓ sont connus, il est nécessaire de spécifier uniquement une des trois variables (H,f,L) dans le but d'obtenir la solution complète.

3-2-1-3 Théorie du câble extensible

Dans beaucoup de situations, l'accroissement de la flèche, d'un câble accroché à ses extrémités suite de son étirage ou de son allongement, est d'une importance pratique moindre. Elle peut être négligée en toute sécurité pour des câbles en acier ayant des portées allant jusqu'à 100 m. Cependant, lorsque les portées sont plus importantes, la situation devient très différente. En effet, la flèche d'un câble en acier de longue portée soit de l'ordre de 1000 m, peut facilement atteindre 1 m ou plus comme dans le cas des ponts suspendus quand les câbles sont librement attachés à leurs extrémités. Dans de tels cas, il est impératif de calculer la flèche avec plus de rigueur.

La théorie du câble extensible ou parfois dite de la parabole élastique que nous allons présenter dans ce qui suit, est à l'origine proposée pour la première fois par Routh puis améliorée par Irvine [32,33]. Le principe consiste de mettre en relation la géométrie du câble dans sa nouvelle position d'équilibre suite à son allongement en fonction de la variation de la poussée engendrée dans le câble.

Considérons une longueur sans contrainte L d'un câble inextensible (éq.3-10) ayant une flèche donnée f comme montré sur la figure 3-2. Quand le câble est suspendu entre deux appuis, à une certaine distance $l(<L)$, celui-ci s'étire naturellement ; les appuis sont supposés situés au même niveau. La flèche s'accroît alors de $f+\Delta f$ et la composante horizontale H de la tension du câble (éq. 3-6) diminue d'une quantité ΔH et se réduit à $H-\Delta H$; ΔH étant la poussée engendrée dans le câble suite à son extensibilité. Un point $P(x,y)$ du câble dans sa position inextensible passe à un autre point $P'(x+u,y+v)$ dans la nouvelle position extensible du câble; Les quantités u et v étant les fonctions de déplacement respectivement horizontal et vertical que nous supposons petits.

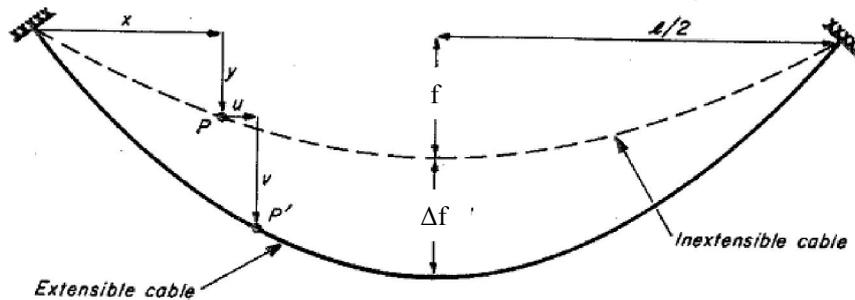


Figure 3-2: Câble dans ses positions extensible et inextensible

Les conditions d'équilibre des forces verticales agissant sur un élément du câble dans sa nouvelle position déformée par analogie à l'équation (3-4) permettent d'écrire :

$$(H - \Delta H) \frac{d^2(y+v)}{dx^2} = -W \quad (3-12)$$

La résolution de cette équation différentielle en tenant compte des conditions aux limites, conduit à l'équation parabolique suivante en posant $H^* = \frac{\Delta H}{H}$:

$$y + v = \frac{1}{(1-H^*)} \frac{W\ell^2}{2H} \left\{ \frac{x}{\ell} - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right\} \quad (3-13)$$

En substituant l'équation (3-5) dans l'équation (3-13), cela permettra d'écrire pour la déflexion additionnelle :

$$v = \frac{H^*}{(1-H^*)} \frac{W\ell^2}{2H} \left\{ \frac{x}{\ell} - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right\} \quad (3-14)$$

Par suite, le taux d'augmentation de la flèche, noté par $f^* = \frac{\Delta f}{f}$ conduirait à :

$$f^* = \frac{H^*}{1-H^*} \quad (3-15)$$

Dans le but d'évaluer (H^*), il est nécessaire de recourir à l'équation des déplacements orthogonaux servant au calcul de la poussée. La formulation générale de cette équation sera dérivée au chapitre subséquent. Dans ce contexte, il est alors possible d'écrire:

$$\frac{(H - \Delta H)}{E_c A_c} \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 = \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (3-16)$$

E_c et A_c représentent respectivement le module d'élasticité et la section transversale du câble. Sachant que les déplacements u et v sont nuls aux extrémités du câble, dy/dx et dv/dx sont continues le long de sa travée, l'intégration par partie de la relation (3-16) conduirait à :

$$\frac{(H - \Delta H)L_e}{E_c A_c} = - \left(\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \int_0^\ell v dx \quad (3-17)$$

où L_e est une longueur virtuelle du câble définie par : $L_e = \int_0^\ell \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 dx \approx \ell \left\{ 1 + 8 \left(\frac{f}{\ell} \right)^2 \right\}$.

Après substitution, intégration et réarrangement, on peut obtenir l'équation cubique suivante :

$$(1-H^*)^3 = \frac{\lambda^2}{24} (2H^* - H^2) \quad (3-18)$$

où $\lambda^2 = \left(\frac{W\ell}{H}\right)^2 \frac{\ell}{\left(\frac{H L_e}{E_c A_c}\right)}$ est un paramètre fondamental qui caractérise le câble dans son état

inextensible. Il prend en compte les effets de la géométrie initiale et de l'élasticité du câble.

L'équation (3-18) peut être résolue d'une manière standard, mais ici une solution graphique convient parfaitement. La figure (3-3) montre que H^* doit être compris intuitivement et logiquement entre $0 < H^* < 1$.

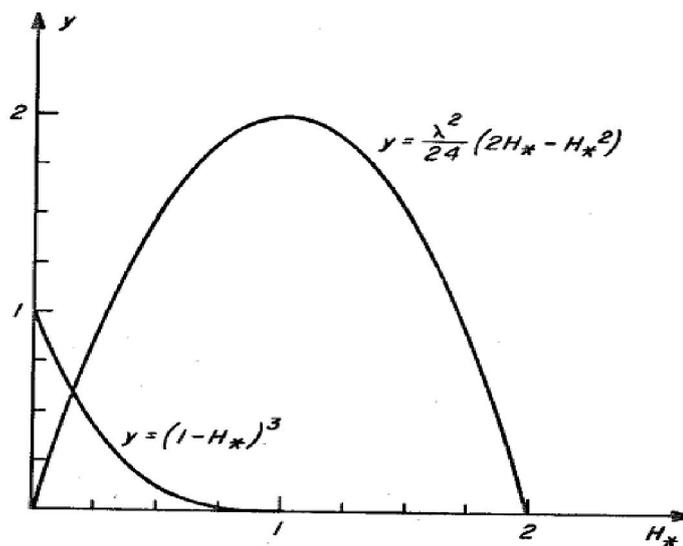


Figure 3-3 : Solution graphique d'une parabole élastique [32]

Considérons maintenant deux limites pour λ^2 :

a) λ^2 grand (>100)

Cette situation correspond à la plupart des câbles ayant un rapport f/ℓ petit. L'équation (3-18) devient alors : $1 - 3H^* \approx \frac{\lambda^2}{12} H^*$, à partir de laquelle il est possible de déduire les relations approximatives de Rankine :

$$H^* \approx \frac{1}{3 + \frac{\lambda^2}{12}} \quad (3-19a)$$

$$f^* \approx \frac{I}{2 + \frac{\lambda^2}{12}} \quad (3-19b)$$

Notons comme rapportée par Pugsley [34], cette dernière relation peut être réarrangée et écrite sous la forme suivante:

$$f^* \approx \frac{I}{\frac{\lambda^2}{12} \left\{ 1 - \frac{32}{15} \left(\frac{f}{\ell} \right)^2 \right\}}$$

Exemple #1 : Considérons un câble d'un pont suspendu de longue portée dont les propriétés du câble sont : $\ell=915 \text{ m}$; $W = 4.4 \text{ kN/m}$; $E_C = 180 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$; $A_C = 0.161 \text{ m}^2$; f/ℓ (géométrie initiale) = $1/12$. Calculons f^* .

Nous avons: $\lambda^2 = 2000 \gg 100$. Par conséquent, les relations (3-19) conduiront à: $H^* \approx 1/170$, $f^* \approx 1/169$ et par conséquent, $\Delta f = 0.455 \text{ m}$. Comparativement, la théorie de Rankine donne $f^* \approx 1/164$.

b) λ^2 petit ($\ll 1$)

Cette situation peut bien correspondre aux câbles aplatis (dans lesquels $W\ell/H$ petit) et/ou les cas extensibles (dans lesquels E_C est petit). Cependant, quelques précautions sont à prendre en considérant les limites des équations (3-13) ou (3-14) lorsque λ^2 s'approche de zéro. Dans de tels cas:

$$H^* \approx 1 - \left(\frac{\lambda^2}{24} \right)^{1/3} \quad (3-20a)$$

$$\frac{f + \Delta f}{\ell} \approx \frac{\sqrt[3]{3}}{4} \left\{ \frac{W L_e}{H} \frac{H}{E_c A_c} \right\}^{1/3} \quad (3-20b)$$

Trois cas bien distincts peuvent être ici observés à savoir i) si $W\ell/H$ est petit et E_C est grand, $\Delta f \rightarrow 0$ comme prévu. C'est le cas d'un câble en acier aplati et tendu ii) si pour certains câbles $W\ell/H$ et E_C sont les deux petits, alors $\Delta f \rightarrow$ vers une quantité finie iii) si $W\ell/H$ est dans

l'ordre de l'unité et E_C est grand, alors $\Delta f \rightarrow \infty$. Les deux derniers cas sont d'une importance pratique mineure. En effet, le troisième cas par exemple n'a réellement aucun sens dans la mesure où l'hypothèse de la petitesse des déflexions additionnelles sur lesquelles la procédure de calcul est basée, se trouve exagérément violée.

Mentionnons enfin que la théorie de la parabole élastique est employée primordialement dans les ponts suspendus en phase de construction ou dans la réalisation des lignes aériennes de transport de l'énergie électrique (fig.3-4). Les résultats donnés par les relations (3-19) peuvent s'appliquer avec confiance. Cependant, dans les autres situations pratiques, les allongements des câbles peuvent être négligés.



Figure 3-4: Photo de ligne de transport d'énergie électrique

3-2-2 Sous l'action des charges appliquées

Le comportement d'un câble suspendu sous l'action des charges appliquées est analysé, pour la première fois, par James Bernoulli vers la fin du 17^{ème} siècle juste après la découverte de la caténaire. Il a examiné la réponse d'une caténaire sous une force concentrée en se basant uniquement sur les principes géométriques, procédure très d'actualité à cette époque. C'est en 1796 que Fuss [33] a établi les équations générales d'équilibre, en coordonnées cartésiennes, d'un élément de câble sous l'action de n'importe quel type de force. Plus tard, aux environs du milieu du 19^{ème} siècle, plusieurs travaux sont apparus en liaison étroite avec la conception des ponts suspendus où sont analysés les câbles paraboliques pesants sous divers types de charges appliquées. Rankine, en 1858, met notamment en exergue la réponse non linéaire des câbles et que la non linéarité est du type favorable c'est-à-dire les déplacements augmentent moins vite que les augmentations des charges. Les effets sont amplement analysés et commentés dans le livre de Pugsley [34]. Plus récemment, avec l'avènement des moyens informatiques des solutions numériques sont apportées. Par exemple, O'Brien [35] a montré l'utilisation de plusieurs techniques dans la résolution des problèmes de câbles des ponts suspendus.

3-2-2-1 Sous charge ponctuelle

Supposons que la forme d'un câble, dans sa position suspendue libre, est donnée par la parabole d'équation suivante où sont tenus compte les effets initiaux dus à l'élasticité du câble:

$$y = \frac{W\ell^2}{2H} \left\{ \frac{x}{\ell} - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right\} \quad (3-21)$$

Considérons une charge ponctuelle d'intensité P appliquée à une distance x_1 de l'appui gauche, comme montré sur la figure 3-5. En admettant que les déplacements du câble sont petits de telle façon que les pentes de la déformée demeurent petites, la condition d'équilibre vertical à une section courante du câble permet d'écrire :

$$i) \quad \text{Pour } 0 \leq x \leq x_1 : \quad (H + \Delta H) \frac{d(y+v)}{dx} = P \left(1 - \frac{x_1}{\ell}\right) + \frac{W\ell}{2} \left(1 - \frac{2x}{\ell}\right)$$

où v est la déflexion additionnelle verticale du câble et ΔH est la composante horizontale de la tension développée dans le câble sous l'effet de la charge ponctuelle appliquée. Le terme de droite est analogue à la force de cisaillement qui se produit dans une poutre isostatique sous l'action du poids propre uniformément répartie par mètre horizontal de la travée et sous la charge appliquée.

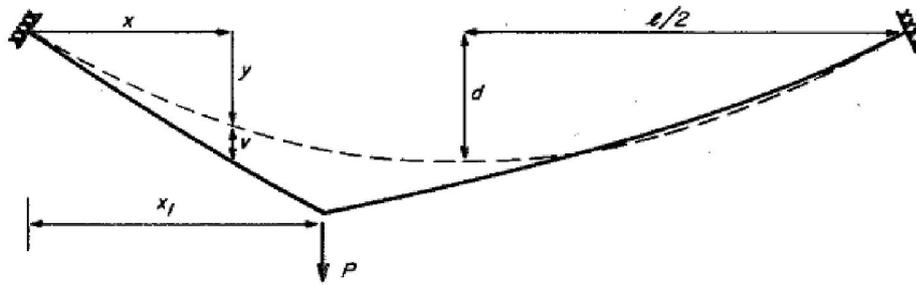


Figure 3-5: Câble sous charge ponctuelle

Il vient par conséquent,

$$(H + \Delta H) \frac{dv}{dx} = P \left(1 - \frac{x_1}{\ell}\right) - \Delta H \frac{dy}{dx} \quad (3-22)$$

Semblablement, on peut également obtenir:

ii) pour $x_1 \leq x \leq \ell$:

$$(H + \Delta H) \frac{dv}{dx} = -P \frac{x_1}{\ell} - \Delta H \frac{dy}{dx} \quad (3-23)$$

En intégrant les équations (3-22) et (3-23) et en faisant satisfaire les conditions aux limites, on peut obtenir les équations suivantes pour la déflexion verticale additionnelle du câble :

i) pour $0 \leq x \leq x_1$:

$$v_* = \frac{1}{1 + \Delta H^*} \left\{ \left(1 - \frac{x_1}{\ell}\right) \frac{x}{\ell} - \frac{\Delta H^*}{P^*} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \right) \right\} \quad (3-24)$$

ii) pour $x_1 \leq x \leq \ell$:

$$v_* = \frac{1}{1 + \Delta H^*} \left\{ \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{x_1}{\ell} - \frac{\Delta H^*}{P^*} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \right) \right\} \quad (3-25)$$

$$\text{où } v_* = \frac{v}{\left(\frac{P\ell}{H}\right)} ; \Delta H^* = \frac{\Delta H}{H} ; P^* = \frac{P}{W\ell}$$

Evaluons maintenant ΔH^* pour trouver la solution complète du problème en faisant appel à l'équation de la poussée dans le câble. On peut ainsi écrire en gardant les termes de second ordre :

$$\frac{\Delta H L_e}{E_c A_c} = \int_0^\ell du + \int_0^\ell \frac{dy}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx$$

Puisque dy/dx est une fonction continue le long de la travée et, u et v sont nuls aux appuis, l'expression ci-dessus peut se réduire à :

$$\frac{\Delta H L_e}{E_c A_c} = \frac{W}{H} \int_0^\ell v dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (3-26)$$

Sous la charge ponctuelle, dv/dx est discontinue au point d'application de la charge et, le dernier terme ci-dessus, après intégration par partie, conduit à :

$$\frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{dv}{dx} v \Big|_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} + \frac{d^2 v}{dx^2} \int_0^{x_1} v dx + \frac{d^2 v}{dx^2} \int_{x_1}^\ell v dx \right\}$$

Soit en remplaçant ce résultat dans l'équation (3-26) en tenant compte des équations (3-24) et (3-25), et après intégration, il est possible d'obtenir l'équation adimensionnelle suivante en fonction de ΔH^* :

$$2\Delta H^* (1 + \Delta H^*)^2 = \lambda^2 \left\{ \left(\left(\frac{x_1}{\ell} \right) - \left(\frac{x_1}{\ell} \right)^2 \right) (P^* + P^{*2}) - \frac{\Delta H^*}{12} (2 + \Delta H^*) \right\}$$

Cette équation peut être réécrite sous la forme cubique standard :

$$\Delta H^{*3} + \left(2 + \frac{\lambda^2}{24}\right)\Delta H^{*2} + \left(1 + \frac{\lambda^2}{12}\right)\Delta H^* - \frac{\lambda^2}{2} \left\{ \left(\frac{x_1}{\ell}\right) - \left(\frac{x_1}{\ell}\right)^2 \right\} P^* (1 + P^*) = 0 \quad (3-27)$$

L'équation est de la forme $z^3 + az^2 + bz - c = 0$ où a,b,c sont des quantités réelles positives et possède une seule racine positive réelle qui sera retenue comme la solution pour l'inconnue recherchée ΔH^* . Pour un problème donné, il est clair que ΔH^* ne dépend pas seulement de P^* et de x_1/ℓ , mais aussi du paramètre λ^2 qui prend en compte la géométrie et l'élasticité du câble. On peut aussi montrer sans peine, pour des valeurs données de P^* et de λ^2 , que ΔH^* est maximum pour $x_1 = \ell/2$. Les variables P^* et λ^2 peuvent prendre des valeurs grandes ou petites sous réserve que la pente de la déflexion du câble demeure petite.

Il est possible de linéariser cette théorie générale en négligeant tous les termes de second ordre qui apparaissent dans les équations différentielle d'équilibre ainsi que dans l'équation de la poussée du câble. Par suite, il faut laisser de coté les termes $\Delta H \frac{dv}{dx}$ et $\frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$ qui apparaissent respectivement dans les équations (3-22) et (3-26). Ainsi, les équations (3-24) et (3-25) deviennent:

i) pour $0 \leq x \leq x_1$:

$$v_* = \left\{ \left(1 - \frac{x_1}{\ell}\right) \frac{x}{\ell} - \frac{\Delta H^*}{P^*} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \right) \right\} \quad (3-28a)$$

ii) pour $x_1 \leq x \leq \ell$:

$$v_* = \left\{ \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{x_1}{\ell} - \frac{\Delta H^*}{P^*} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \right) \right\} \quad (3-28b)$$

Et l'équation de la poussée du câble se réduit à :

$$\frac{\Delta H L_e}{E_c A_c} = \frac{W}{H} \int_0^{\ell} v dx \quad (3-29)$$

Après substitution, intégration et réarrangement, on peut obtenir la solution linéarisée pour ΔH^* qui est exprimée sous la forme suivante:

$$\Delta H^* = \frac{1}{\left(1 + \frac{12}{\lambda^2}\right)} 6P^* \left\{ \left(\frac{x_1}{\ell}\right) - \left(\frac{x_1}{\ell}\right)^2 \right\} \quad (3-30)$$

Habituellement, la solution linéarisée est acceptable pour des valeurs petites de P^* . En effet, si λ^2 est grand, P^* doit être supérieur à une valeur de l'ordre 10^{-1} pour avoir une marge d'erreur de 10%. Si λ^2 est petit, des valeurs importantes pour P^* sont tolérables. En pratique, les petites valeurs de λ^2 correspondent aux câbles aplatis. Par contre, les valeurs élevées de λ^2 reflètent les câbles plutôt inextensibles ayant un rapport flèche/travée de l'ordre de 1/8. Pour des câbles tendus, λ^2 doit être très petit devant 1 ($\ll 1$), et on peut remarquer que l'équation (3-30) donne $\Delta H^* \rightarrow 0$. Pour des câbles tels ceux utilisés dans les ponts suspendus où le rapport flèche/travée est de l'ordre de 1/10, on peut voir que pour $\lambda^2 \gg 1$:

$$\Delta H^* \rightarrow 6P^* \left\{ \left(\frac{x_1}{\ell}\right) - \left(\frac{x_1}{\ell}\right)^2 \right\}.$$

Illustrons maintenant l'application de ces théories au moyen de l'exemple ci-après.

Exemple #2 : *Considérons l'emplacement du premier élément à mi-travée d'un pont suspendu comme lors de la réalisation du pont de Bosphore (fig. 3-6a). On demande de calculer la valeur de la déflexion au milieu de la travée et la valeur de la poussée ainsi induite sous l'action de la charge. Les propriétés du câble dans sa position libre suspendu : $\ell = 915 \text{ m}$; $W = 4.4 \text{ kN/m}$; $E_C = 180 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$; $A_C = 0.161 \text{ m}^2$; f/ℓ (géométrie initiale) = $1/12$; P (poids du segment du tablier à soulever, par câble) = 890 kN (fig. 3-6b).*

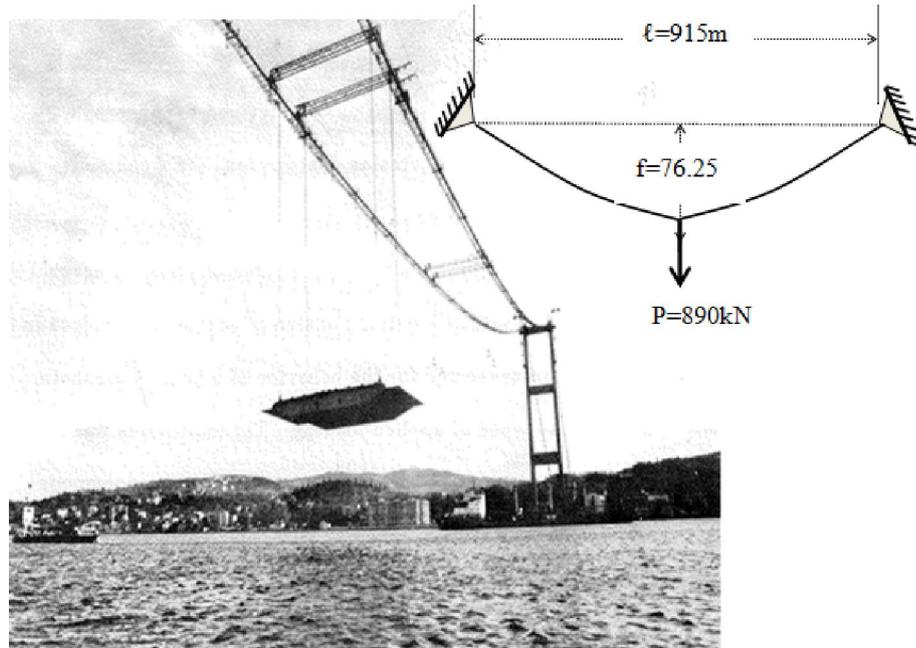


Figure 3-6: Emplacement du premier élément du tablier du pont de Bosphore [32]

Nous avons, $\lambda^2 = 2000$; $x_1/\ell=0.5$; $P^*=0.221$. L'équation cubique à résoudre devient (éq.3-27): $\Delta H^{*3} + 85.5\Delta H^{*2} + 168\Delta H^* - 67.5 = 0$. La résolution conduit à $\Delta H^* = 0.343$ qui par comparaison à la théorie linéaire donne $\Delta H^* = 0.33$. Cependant, cette quasi-parfaite concordance du résultat avec la théorie exacte est trompeuse. En effet, pour ce problème, la relation entre la poussée induite dans le câble et la charge appliquée apparaît essentiellement linéaire mais entre la déflexion additionnelle et la charge, la relation est non linéaire. On enregistre au milieu de la travée $v^*=0.0415$ (éq.3-24) à partir duquel $v=5.6\text{m}$.

3-2-2-2 Sous charge partiellement répartie

Soit une charge partiellement répartie, d'intensité p par unité de longueur de la travée, appliquée sur un intervalle quelconque de coordonnées $x=x_2$ et $x=x_3$ d'un câble suspendue à ses extrémités comme montré sur la figure 3-7.

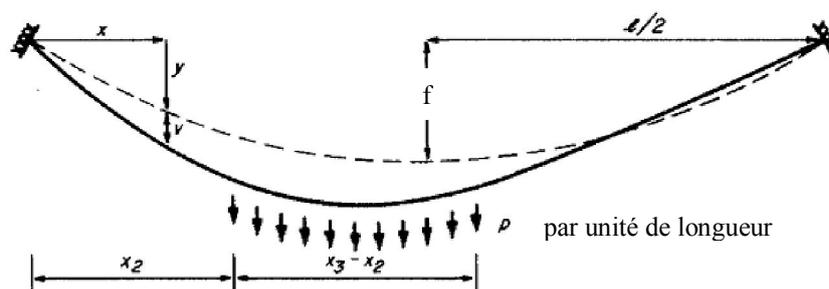


Figure 3-7: Câble parabolique sous charge partiellement répartie

Exploitions encore une fois l'analogie qui existe avec une poutre simplement appuyée comme le cas de la section précédente sous la charge ponctuelle. La condition d'équilibre vertical à une section courante du câble d'abscisse x à partir de l'appui gauche entraîne :

i) Pour $0 \leq x \leq x_2$:

$$(H + \Delta H) \frac{dv}{dx} = p\ell \left\{ \left(\frac{x_3}{\ell} - \frac{x_2}{\ell} \right) - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right) \right\} - \Delta H \frac{dy}{dx} \quad (3-31a)$$

ii) Pour $x_2 \leq x \leq x_3$:

$$(H + \Delta H) \frac{dv}{dx} = p\ell \left\{ \left(\frac{x_3}{\ell} - \frac{x}{\ell} \right) - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right) \right\} - \Delta H \frac{dy}{dx} \quad (3-31b)$$

iii) Pour $x_3 \leq x \leq \ell$:

$$(H + \Delta H) \frac{dv}{dx} = p\ell \left\{ -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right) \right\} - \Delta H \frac{dy}{dx} \quad (3-31c)$$

Après intégration et ajustement avec les conditions aux limites, on peut obtenir les expressions suivantes, sous forme adimensionnelle, pour la déflexion verticale du câble :

i) Pour $0 \leq x \leq x_2$:

$$v_* = \frac{I}{I + \Delta H^*} \left[\left\{ \left(\frac{x_3}{\ell} - \frac{x_2}{\ell} \right) - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right) \right\} \left(\frac{x}{\ell} \right) - \frac{\Delta H^*}{p^*} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x}{\ell} \right) - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right) \right] \quad (3-32a)$$

ii) Pour $x_2 \leq x \leq x_3$:

$$v_* = \frac{I}{I + \Delta H^*} \left[\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 + \left(\frac{x_3}{\ell} \right) \left(\frac{x}{\ell} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right) \frac{x}{\ell} \right\} - \frac{1}{2} \frac{\Delta H^*}{p^*} \left(\left(\frac{x}{\ell} \right) - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right) \right] \quad (3-32b)$$

iii) Pour $x_3 \leq x \leq \ell$:

$$v_* = \frac{I}{I + \Delta H^*} \left[\frac{I}{2} \left\{ \left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right\} \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) - \frac{\Delta H^*}{p^*} \frac{I}{2} \left(\left(\frac{x}{\ell} \right) - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right) \right] \quad (3-32c)$$

$$\text{Où } v_* = \frac{v}{\left(\frac{p\ell^2}{H} \right)} ; \Delta H^* = \frac{\Delta H}{H} ; p^* = \frac{p}{W}$$

L'expression de la variation de la composante horizontale de la tension du câble, ΔH , peut être également déduite à partir de l'équation du câble, et qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\Delta H L_e}{E_c A_c} = - \int_0^\ell \left(\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2 v}{dx^2} \right) v dx \quad (3-33)$$

Après substitution des équations (3-32) dans l'équation (3-33), intégration et réarrangement de tous les termes, l'équation adimensionnelle cubique suivante peut être obtenue :

$$\Delta H^{*3} + \left(2 + \frac{\lambda^2}{24} \right) \Delta H^{*2} + \left(1 + \frac{\lambda^2}{12} \right) \Delta H^* - \frac{\lambda^2}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{x_3}{\ell} \right)^3 + \frac{1}{3} \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^3 \right\} p^* - \frac{\lambda^2}{2} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{x_3}{\ell} \right)^3 + \frac{2}{3} \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^3 - \left(\frac{x_3}{\ell} \right) \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right)^2 \right\} p^{*2} = 0 \quad (3-34)$$

Cette équation générale est de la forme $z^3 + az^2 + bz - c = 0$ où a,b,c sont des quantités réelles positives, et qui selon la règle des signes de Descartes, elle possède une seule racine positive réelle. Cette racine est la solution recherchée pour l'inconnue ΔH^* . Il est possible de montrer que lorsque l'intervalle chargé de longueur (x_3-x_2) est petit et $p(x_3-x_2)$ devient fini de telle sorte qu'il tend vers une charge concentrée, que l'équation (3-34) se réduit à l'équation (3-27) obtenue sous la charge ponctuelle appliquée sur le câble. En outre, on peut aussi montrer que si p^* et λ^2 sont données, ΔH^* est maximum lorsque le chargement est disposé symétriquement par rapport au centre de la travée. Par ailleurs, soulignons que la théorie ainsi présentée prend en compte les termes du second ordre. Elle peut s'appliquer par exemple pour

le calcul des ponts suspendus en phase de construction lors du montage du tablier partiellement ou totalement. Dans ce contexte, l'utilisation de la théorie générale non linéaire est essentielle vu que le poids du tablier est souvent plusieurs fois important que celui des câbles et accessoires, et que λ^2 est grand.

Exemple #3: On demande d'évaluer la poussée et la déflexion engendrées dans les câbles du pont suspendu en phase de la construction décrit dans l'exemple #2. Particulièrement, il faut calculer la composante horizontale de la tension dans le câble et la déflexion à mi-travée selon les deux cas de charges suivants : a) tablier disposé sur la moitié centrale de la travée b) tablier disposé sur l'ensemble de la travée. On suppose négligeable la rigidité flexionnelle du tablier lors de la phase de construction et que le poids réparti du tablier est de $5.84 \times 10^4 \text{ N/m}$ par câble.

a) Tablier placé sur la moitié centrale de la travée (fig.3-8a)

Nous avons : $p=5.84 \times 10^4 \text{ N/m}$; $\lambda^2 = 2000$; $x_2/\ell=0.25$; $x_3/\ell=0.75$; $p^*=13.3$. L'équation cubique à résoudre s'écrit (éq.3-34): $\Delta H^{*3} + 85.5\Delta H^{*2} + 168\Delta H^* - 8.95 = 0$, laquelle donne comme solution: $\Delta H^* = 8.9$. La déflexion à mi-travée s'élève à : $v^*=0.00102$; $v=8.3\text{m}$. Notons que si les câbles sont inextensibles et les termes de second ordre sont négligés dans l'équation de la poussée du câble, alors $\Delta H^* = 9.17$ qui est une valeur assez proche de celle issue de la théorie générale de calcul. Cependant, les câbles sont extensibles. En fait, sous l'action de ce chargement, la longueur du câble subit une variation qui peut être estimée par la relation suivante:

$$\Delta L \approx \Delta H \frac{H\ell}{E_c A_c} \left(1 + \frac{16}{3} \left(\frac{f}{\ell} \right)^2 \right) \quad (3-35)$$

Ce qui donne numériquement, $\Delta L \approx 1.75\text{m}$ valeur très loin d'être négligeable. Cependant, la théorie inextensible donne pourtant des résultats acceptables ; c'est du fait que les deux termes dans l'équation de la poussée du câble à savoir $\frac{\Delta H L_e}{E_c A_c}$ et $\frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx$ sont approximativement égaux dans ce cas.

b) Tablier placé sur toute la travée (fig.3-8b)

Nous avons : $p^*=13.3$; $\lambda^2 = 2000$; $x_2/\ell=0$; $x_3/\ell=1.0$. L'équation cubique est alors $\Delta H^{*3} + 85.5\Delta H^{*2} + 168\Delta H^* - 17 = 0$ qui donne comme solution: $\Delta H^* = 12.35$. En comparaison à la théorie inextensible, celle-ci conduirait à $\Delta H^* = p^*=13.3$. La déflexion à mi-travée donne: $v^*=0.00067$ soit $v=5.43$ m. Par conséquent, en plaçant la charge sur la totalité de la travée, la flèche du pont passera de la valeur de 76.25 m à 81.7 m. Chaque câble va subir une variation de longueur (allongement) $\Delta L \approx 2.42$ m à partir de sa longueur initiale. Le câble subit une déformation $\frac{\Delta L}{L} = 0.0026$ (=2.6‰) qui est beaucoup plus petit que le taux d'augmentation de la flèche $\frac{\Delta f}{f} = 0.071$ (=7.1‰).

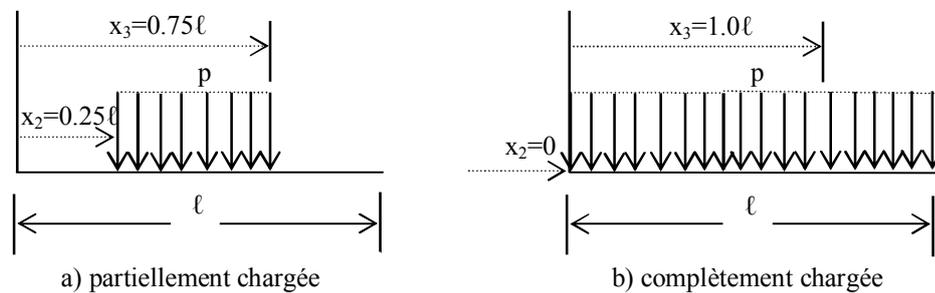


Figure 3-8 : Travée partiellement et complètement chargée

3-3 Réponse dynamique d'un câble parabolique en régime libre

Nous allons nous intéresser dans cette section à l'analyse du comportement vibratoire en régime libre d'un câble parabolique uniforme ayant une travée quelconque soit en l'absence de toute excitation extérieure d'origine force ou déplacement. La théorie qui sera présentée ci-après est d'une importance pratique capitale afin de comprendre les fondements de la méthode de calcul d'un système vertical à câbles précontraints qui sera dérivée dans le chapitre subséquent. L'équation transcendante permettant de calculer les périodes propres du câble sera établie en exploitant fondamentalement, pour des raisons de simplicité des calculs qu'elle engendre, l'hypothèse liée à la linéarisation de l'équation de la poussée c'est-à-dire en négligeant les effets de second ordre. Cependant, nous allons d'abord donner un bref aperçu historique dans le but de mieux mettre en relief le contexte de la question.

3-3-1 Aperçu historique

Durant la première moitié du 18^{ème} siècle, quelques éléments de la théorie de vibration d'une corde tendue fixée à ses deux extrémités, ont été apportés par Taylor, D'Alembert, Euler et Bernoulli [36]. En 1732, Bernoulli [37] examina les oscillations transversales d'un câble uniforme fixé à l'une de ses extrémités et suspendu par effet de gravité. Le même problème avait été aussi discuté par Euler [37], en 1781, soit approximativement cinquante années plus tard. Bernoulli et Euler ont donné la solution des fréquences de vibration sous la forme de séries infinies connues actuellement par la fonction de Bessel d'ordre 0 du type 1.

Cependant, à cette époque, la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles était encore juste à ses débuts, et l'analyse était considérablement centrée plutôt sur les systèmes discrets que sur les systèmes continus. A titre d'exemple, en 1788, Lagrange [38], avait obtenu une solution pour les vibrations d'une barre inextensible fixée à ses deux extrémités, sans masse, dans laquelle des masses discrètes ont été suspendues. Les équations générales de mouvement des systèmes discrets étaient pour la première fois avancées par Lagrange en 1760. La plus importante contribution à la théorie de vibration des câbles datait de 1820 quand Poisson [38] avait publié un article où sont présentées les équations générales différentielles sous forme cartésienne de mouvement d'un élément de câble sous l'action d'un système de forces généralisées. Ces équations dynamiques étaient analogues aux équations statiques présentées par Fuss, en 1796, que Poisson avait utilisé pour améliorer les solutions

obtenues auparavant pour un câble vertical et une corde tendue. Ainsi, en 1820, des solutions linéarisées assez correctes avaient été élaborées pour les vibrations libres des câbles uniformes ayant des géométries en forme de caténaire. A l'exception des travaux de Lagrange sur les systèmes discrets équivalents, aucun résultat n'avait été donné pour les vibrations libres des câbles dont le rapport flèche/travée tendait vers zéro ou infini.

En 1851, Rohrs [39] avait obtenu une solution approximative, assez appréciable, pour les vibrations verticales symétriques d'un câble suspendu uniforme où le rapport flèche/travée était relativement petit. La solution utilisait une forme simplifiée des équations générales de Poisson soit au premier ordre, et une autre équation dite de continuité de la chaîne. On supposait que la chaîne était inextensible de manière que l'équation de continuité ne dépende que des considérations liées à la compatibilité géométrique. Routh [38], en 1868, donna une solution exacte pour les vibrations symétriques verticales (en associant le mouvement longitudinal) d'un câble inextensible et hétérogène suspendu en forme de cycloïde. Il avait montré que la solution se réduisait à celle d'un câble uniforme lorsque le rapport flèche/travée devient petit. Routh avait aussi obtenu une solution exacte pour les vibrations antisymétriques d'un câble cycloïde en associant le mouvement longitudinal.

A ce stade, la question semble avoir été laissée en hibernation jusqu'au 1941 quand Rannie et Von Karman [32], indépendamment, dérivèrent la solution pour les vibrations libres, symétriques et antisymétriques d'un câble inextensible formé de trois travées. Dans le travail effectué en 1941, Vincent [40] avait étendu les résultats de Rannie et de Von Karman en introduisant les effets de l'élasticité du câble pour analyser le mouvement vertical symétrique. Cependant, il n'avait pas examiné la nature de la solution obtenue et, par conséquent, il semble n'avoir pas fait remarquer l'effet substantiel que l'élasticité du câble engendre sur les résultats. Une théorie semi-empirique pour le calcul des fréquences naturelles des trois premiers modes plans d'un câble suspendu uniforme a été avancée par Pugsley en 1949. Il avait démontré l'application des résultats en effectuant une expérimentation sur des câbles dont le rapport flèche/travée variait entre 1/10 à 1/4. En admettant que le câble est uniforme et inextensible, Saxon et Cochr, [41], en 1953, effectuèrent une contribution majeure à la théorie de vibration des câbles dans le plan. Ils avaient obtenus des solutions qui effectivement se réduisaient à des résultats déjà connus pour des câbles inextensibles à faible rapport flèche/travée et pour lesquels des solutions asymptotiques donnaient de bons résultats pour des rapports flèche/travée élevés. L'un des aspects les plus intéressants des

développements ultérieurs de la théorie des vibrations verticales symétriques d'un câble suspendu est qu'il n'y a pas de théories qui ont cherché à expliquer réellement lorsque le rapport flèche/travée se réduit à zéro. Pour des petits rapports flèche/travée, les théories antérieures qui sont dérivées sur la base de l'hypothèse liée à l'inextensibilité du câble, montrent que le premier mode symétrique dans le plan, principalement dans le cas du mouvement vertical, se produit à une fréquence qui est contenue dans la première solution non nulle. Comme sera montré ultérieurement, elle sera donnée par l'équation transcendante de la forme $\tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) = \frac{\beta\ell}{2}$ à savoir $(\beta\ell)_1 \approx 2.86\pi$ où $\beta = \sqrt{\frac{m\omega^2}{H}}$; où m est la masse par unité de longueur du câble, H est la composante horizontale de la tension du câble sous charge statique, ω est la fréquence naturelle circulaire ($\omega = \frac{2\pi}{T}$) de vibration et ℓ est la longueur de la travée; T étant la période de vibration correspondante du câble.

Cependant, il est connu depuis longtemps que la fréquence du premier mode symétrique de vibration transversale d'une corde tendue est contenue dans la première solution donnée par l'équation $\cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) = 0$, à savoir $(\beta\ell)_1 = \pi$. Cette différence, d'ordre de 300%, ne peut pas être résolue par les analyses antérieures basées sur l'hypothèse de l'inextensibilité. L'inextensibilité est un concept qui nécessite d'être employé par beaucoup de précaution du fait qu'il n'y a pas de câble ou de chaîne réellement inextensible. Clairement, une corde tendue doit s'allonger quand elle vibre en mode symétrique, bien que des analyses standards souvent sous estiment ce point. Egalement, un câble qui possède un très petit rapport de flèche/travée doit s'allonger quand il vibre en mode de mouvement vertical symétrique. Cette question sera développée plus en profondeur dans les paragraphes qui suivent.

3-3-2 Bases théoriques

Considérons de nouveau comme indiqué dans le paragraphe 3-2-1, un câble parabolique uniforme chargé sous l'action de son poids propre (W) dont sa position d'équilibre statique après déplacement demeure dans son propre plan vertical ; le câble étant

en outre admis librement appuyé à ses extrémités et sans présence de dénivellation d'appuis. Son profil géométrique est décrit par l'équation (3-5), que nous réécrivons sous la forme :

$$y = \frac{mg\ell^2}{2H} \left\{ \frac{x}{\ell} - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right\} \quad (3-36)$$

où $m (=W/g)$ est la masse par unité de longueur du câble et g représente l'accélération due à la pesanteur ($=9.81 \text{ m/s}^2$).

Si nous soumettons maintenant le câble à un petit déplacement quelconque à partir de sa position d'équilibre statique (fig. 3-9), les petites vibrations qui en résultent se décomposent généralement en trois composantes à savoir i) mouvement longitudinal, u ii) mouvement transversal vertical, v iii) mouvement transversal horizontal, w . Ainsi, l'équilibre dynamique d'un élément de câble permet d'écrire les conditions suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ (T + \tau) \left(\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial s} \right) \right\} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3-37a)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ (T + \tau) \left(\frac{dy}{ds} + \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right\} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - mg \quad (3-37b)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ (T + \tau) \frac{\partial w}{\partial s} \right\} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3-37c)$$

où u et v sont les composantes du mouvement dans le plan respectivement dans les sens longitudinal et vertical, w est la composante du mouvement perpendiculaire au plan vertical du câble, τ est la tension supplémentaire engendrée par le mouvement. Les composantes du mouvement u , v et w ainsi que la tension τ sont des fonctions dépendantes simultanément des coordonnées et du temps.

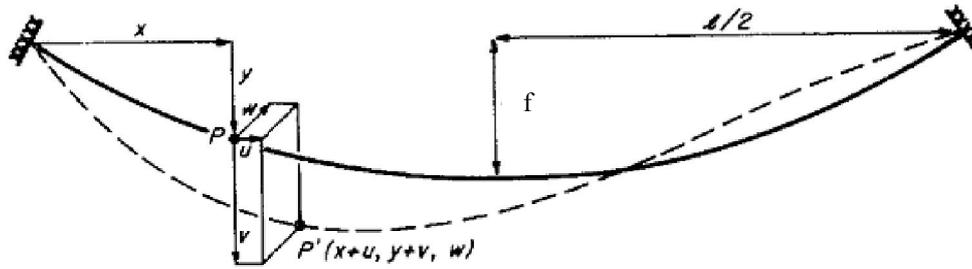


Figure 3-9 : Configuration du câble sous l'action d'un petit déplacement arbitraire

Les équations (3-37) peuvent être simplifiées pour des problèmes manuels en développant chaque équation tenant compte des conditions liées à la position d'équilibre statique et en négligeant les termes de second ordre. En plus, comme l'analyse est valable uniquement pour des câbles avec un rapport flèche/travée de l'ordre de 1/8 ou moins, la composante longitudinale du mouvement de ces équations s'avère d'une moindre importance et peut donc être négligée. Par conséquent, les équations d'équilibre du mouvement d'un élément infinitésimal de câble de longueur dx se réduisent à :

$$H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + h \frac{d^2 y}{dx^2} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3-38)$$

$$H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3-39)$$

où h étant la composante additionnelle de la tension induite dans le câble et qui est une fonction dépendante du temps seul. Par ailleurs, l'équation de la poussée du câble sous sa forme linéarisée, qui ne dépend que de l'élasticité et de la compatibilité géométrique d'un élément de câble, permet d'écrire :

$$\frac{h}{E_c A_c} \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3-40)$$

L'équation de la poussée du câble complète la solution pour le mouvement vertical symétrique. Elle permet également le calcul du mouvement longitudinal. Par conséquent, les équations (3-38), (3-39) et (3-40) forment les équations linéarisées du problème. Notons en outre que le mouvement transversal horizontal est complètement découplée du mouvement

dans le plan vu qu'il n'y a pas, au premier ordre, de force de tension additionnelle dans le câble. Ce qui, selon Irvine [32], est en accord avec l'expérience où dans une chaîne ou une caténaire le seul mode de vibration facile à obtenir est le premier mode d'oscillation. Par suite, au premier ordre, une excitation dynamique ne possédant pas de composante dans le plan entraînera seulement un mouvement transversal horizontal, et vice versa. Par ailleurs, Vu les restrictions adoptées sur la géométrie du câble, c'est bien la composante verticale du mouvement qui est la plus déterminante quand le câble vibre dans le mode plan. L'amplitude qui correspond à la composante longitudinale est toujours substantiellement inférieure par rapport à celle du mouvement vertical. De ce fait, un mode symétrique plan peut être défini comme étant l'un des modes dans lequel la composante verticale du mode est symétrique, et vice versa. Dans beaucoup de situations pratiques, les composantes longitudinales modales sont d'une moindre importance et par conséquent, les composantes verticales modales peuvent être désignées comme modes plans. Dans ce qui suit à cause de la simplicité d'analyse qu'il procure, nous allons d'abord considérer le mouvement transversal horizontal.

3-3-3 Mouvement transversal horizontal

En écrivant $w(x, t) = \tilde{w}(x) e^{i\omega t}$, sachant que $i^2 = -1$, l'équation (3-39) peut se mettre sous la forme :

$$H \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} + m\omega^2 \tilde{w} = 0 \quad (3-41)$$

où ω représente la fréquence circulaire naturelle de vibration. La solution générale de l'équation différentielle (3-41) est $\tilde{w} = A \sin \beta x + B \cos \beta x$ où $\beta^2 = \frac{m\omega^2}{H}$; A et B étant des constantes à déterminer par les conditions de frontière i.e $\tilde{w}(x=0) = \tilde{w}(x=\ell) = 0$, le coefficient B étant alors égal à zéro, il est possible de trouver les fréquences naturelles de vibration données par :

$$\omega_n = \frac{n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{H}{m}} \quad n=1,2,3 \dots \quad (3-42)$$

où $n=1,2,3 \dots$ signifie le premier, deuxième, troisième, etc. mode respectivement. Les modes sont données par la relation :

$$\tilde{w}_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad n=1,2,3 \quad (3-43)$$

La fréquence du premier mode transversal horizontal (i.e $n=1$) constitue la plus faible fréquence naturelle pour un câble quelconque ayant une forme parabolique.

3-3-4 Mouvement vertical

Ainsi définis précédemment, les modes antisymétriques plans sont constitués des composantes verticales antisymétriques et des composantes longitudinales symétriques, tandis que les modes symétriques plans sont constitués des composantes verticales symétriques et des composantes longitudinales antisymétriques. Dans le premier cas, au premier ordre, on admet qu'aucune tension additionnelle n'est générée lors du mouvement du câble à l'opposé du deuxième cas où il faut bien la prendre en considération.

3-3-4-1 Modes antisymétriques plan

Puisque au premier ordre la composante horizontale de la tension dans le câble est par hypothèse nulle, en posant $v(x,t) = \tilde{v}(x)e^{i\omega t}$, l'équation (3-38) comme dans l'équation (3-39) pour le mouvement horizontal devient:

$$H \frac{d^2 \tilde{v}}{dx^2} + m\omega^2 \tilde{v} = 0 \quad (3-44)$$

L'équation de la poussée (3-40) ne dépend alors que de la compatibilité géométrique d'un élément de câble qui, après avoir substitué $u(x,t) = \tilde{u}(x)e^{i\omega t}$, s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{d\tilde{v}}{dx} = 0 \quad (3-45)$$

Conjointement avec les conditions aux limites $\tilde{v}(x=0) = \tilde{v}(x = \frac{\ell}{2}) = 0$, ces deux dernières relations sont suffisantes pour obtenir les fréquences naturelles et les composantes modales recherchées des modes antisymétriques.

On peut aisément montrer que les fréquences naturelles sont données par la relation suivante :

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{H}{m}} \quad n=1,2,3 \dots \quad (3-46)$$

où $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \dots$ représentent respectivement les fréquences naturelles de la première, deuxième, troisième, etc. des modes antisymétriques plans. Les composantes modales correspondantes des modes antisymétriques sont données par :

$$\tilde{v}_n(x) = A_n \sin \frac{2n\pi}{\ell} x \quad n=1,2,3 \dots \quad (3-47)$$

Les composantes longitudinales du mouvement dans ces modes peuvent être retrouvées en considérant la relation (3-45) tout en remarquant que ces composantes sont symétriques puisque $\frac{dy}{dx} = 0$ au milieu de la travée. Les composantes modales du mouvement longitudinale sont alors données par :

$$\tilde{u}_n(x) = -\frac{dy}{dx} \tilde{v}_n(x) - \frac{W}{H} \int_0^x \tilde{v}_n(x) dx \quad (3-48)$$

où $W (=mg)$ étant le poids par unité de longueur du câble. En effet, à partir de la relation (3-45), nous avons pour une composante n : $\frac{d\tilde{u}_n}{dx} = -\frac{dy}{dx} \frac{d\tilde{v}_n}{dx}$. Après intégration, nous aurons:

- D'une part :

$$\int_0^x \frac{d\tilde{u}_n}{dx} dx = \tilde{u}_n \Big|_0^x = \tilde{u}_n(x) - \tilde{u}_n(0) \quad \text{où } \tilde{u}_n(0) = 0$$

- d'autre part, une intégration par partie donne :

$$\int_0^x \frac{dy}{dx} \frac{d\tilde{v}_n(x)}{dx} dx = \frac{dy}{dx} \tilde{v}_n(x) + \frac{W}{H} \int_0^x \tilde{v}_n(x) dx$$

Si par ailleurs, on remplace la relation (3-47) dans (3-48), il est possible après intégration et réarrangements d'obtenir l'expression du mode longitudinal antisymétrique que nous présentons sous la forme suivante :

$$\tilde{u}_n(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{W\ell}{H} \right) A_n \left\{ \left(1 - \frac{2x}{\ell} \right) \sin \frac{2n\pi}{\ell} x + \frac{1}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{\ell} x \right) \right\} \quad n=1,2,3\dots \quad (3-49)$$

où comme indiqué déjà précédemment, A_n étant l'amplitude de la nième composante du mode antisymétrique vertical. Il est clair que les amplitudes des composantes longitudinales deviennent très petites lorsque le câble est presque quasi rectiligne ($\frac{f}{\ell} \approx 1$) du fait que

$$\frac{W\ell}{H} = \frac{8f}{\ell}. \quad \text{Notons cependant que les composantes longitudinales ont certaines propriétés particulières. Le maximum de la première composante se produit au quart de la travée et non à mi-travée (fig. 3-10) ainsi que la pente et le déplacement sont bien nuls au milieu de la travée pour la deuxième composante (fig. 3-11).$$

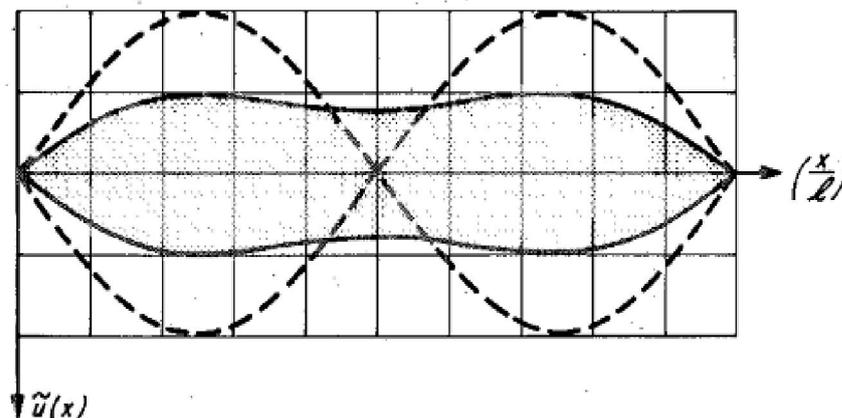


Figure 3-10: Première composante longitudinale du mode antisymétrique [32]

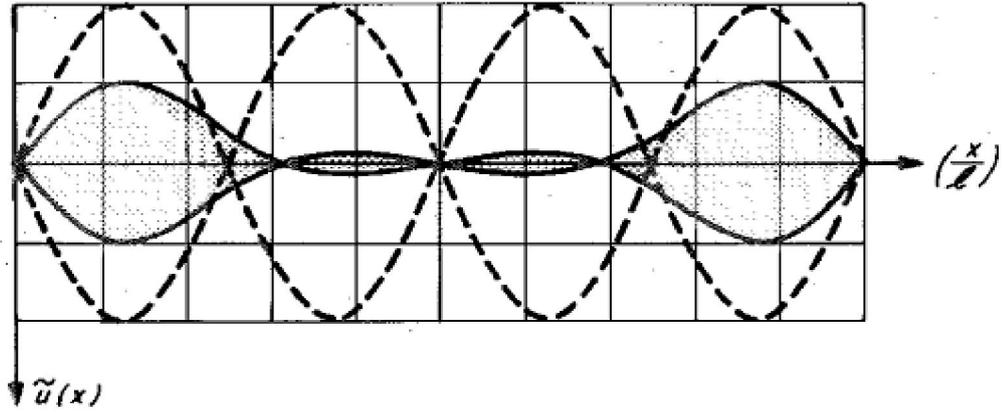


Figure 3-11: Seconde composante longitudinale du mode antisymétrique [32]

3-3-4-2 Modes symétriques plan

Il s'agit ici de tenir compte de la force de tension additionnelle générée lors de la vibration du câble. Procédons par analogie aux modes antisymétriques mais en posant $v(x,t) = \tilde{v}(x)e^{i\omega t}$, $h(t) = \tilde{h}e^{i\omega t}$ en sachant que $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{W}{H}$. La relation (3-38) devient donc:

$$H \frac{d^2\tilde{v}}{dx^2} + m\omega^2\tilde{v} = \frac{W}{H}\tilde{h} \quad (3-50)$$

Par ailleurs, en substituant $u(x,t) = \tilde{u}(x)e^{i\omega t}$ dans l'équation de la poussée du câble (3-40), on obtient :

$$\frac{\tilde{h}}{E_c A_c} \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 = \frac{d\tilde{u}}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{d\tilde{v}}{dx} \quad (3-51)$$

A l'aide des conditions aux limites $\tilde{v}(0) = \tilde{v}(\ell) = 0$ et $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(\ell) = 0$, ces deux dernières relations suffisent pour déterminer les fréquences naturelles et les composantes modales des modes symétriques dans le plan.

La solution de la relation (3-50) à l'aide ainsi des conditions aux limites est de la forme suivante :

$$\frac{\tilde{v}(x)}{\left(\frac{W\ell^2}{H}\right)} = \frac{\tilde{h}}{H} \frac{1}{(\beta\ell)^2} \left\{ 1 - \tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \sin \beta x - \cos \beta x \right\} \quad (3-52)$$

où la valeur de $(\beta\ell)$ spécifie la composante particulière modale (symétrique) verticale. Considérons maintenant la relation (3-51) qui devient après intégration par partie en tenant compte des conditions aux limites :

$$\frac{\tilde{h}L_e}{E_c A_c} = \frac{W}{H} \int_0^\ell \tilde{v}(x) dx \quad (3-53)$$

La substitution de la relation (3-53) dans (3-52) en cherchant à éliminer la tension additionnelle \tilde{h} nous conduira à l'équation transcendante suivante qui permet d'obtenir les fréquences naturelles de vibration des modes symétriques plans.

$$\tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) = \frac{\beta\ell}{2} - \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\beta\ell}{2}\right)^3 \quad (3-54)$$

où $\lambda^2 = \left(\frac{W\ell}{H}\right)^2 \frac{\ell}{\left(\frac{H L_e}{E_c A_c}\right)}$, paramètre déjà définis précédemment qui dépend essentiellement

de l'élasticité et de la géométrie du câble. L'équation (3-54) est très importante pour la théorie de vibration des câbles dont les solutions sont fondamentalement en fonction du paramètre λ^2 . Soulignons par ailleurs que les valeurs propres recherchées du problème sont hautement non linéaires en fonction de λ^2 . A la figure 3-12 où nous illustrons quelques solutions de l'équation transcendante (3-54) où nous notons particulièrement les trois cas suivants :

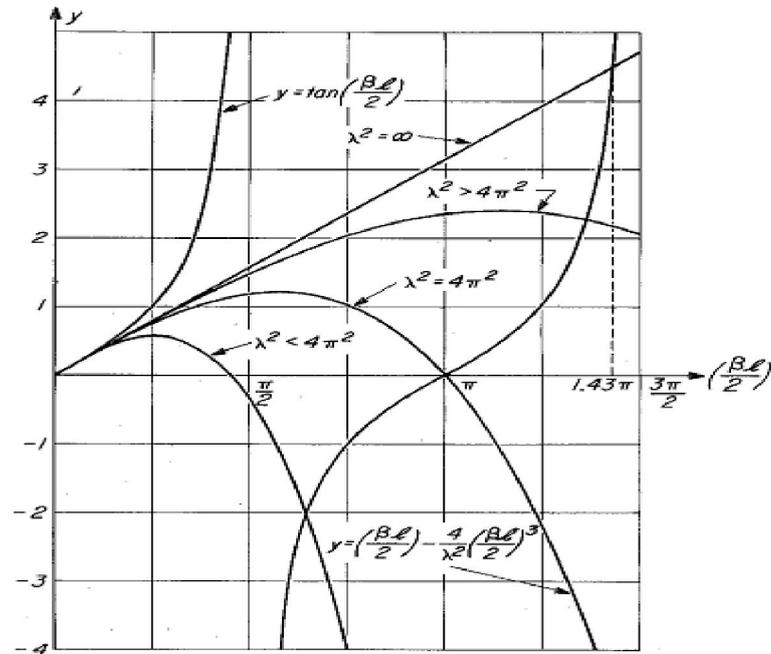


Figure 3-12: Illustration graphique de la première solution non nulle de l'équation transcendante (3-54) ; [32]

- i) λ^2 grand ($=\infty$) ; c'est le cas d'un câble inextensible où l'équation (3-54) se réduit à :

$$\tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) = \frac{\beta\ell}{2} \quad (3-55)$$

Cette équation apparaît également dans d'autres branches de la mécanique par exemple dans le cas du flambement avec flexion d'une barre articulée à une extrémité et encastree à l'autre ou comme dans le cas du flambement avec torsion d'une barre entièrement encastree à ses deux extrémités. Les deux premières solutions de l'équation (3-55) sont $(\beta\ell)_{1,2} = 2.86\pi$ et 4.92π . Les autres solutions sont de la forme $(\beta\ell)_n \approx (2n+1)\pi$ où $(\beta\ell)_n$ contient les fréquences du nième mode symétrique vertical plan d'une barre inextensible.

- ii) Rapport flèche/travée petit ($=0$). Dans ce cas, le câble prend une configuration quasi rectiligne où la valeur de λ^2 est très petite qui découle directement via la relation $\frac{W\ell}{H} = \frac{8f}{\ell}$.

L'équation transcendante (3-54) se réduit alors à :

$$\tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) = -\infty \quad (3-56)$$

où les valeurs $(\beta\ell)_n = (2n-1)\pi$; $n=1,2,3 \dots$ forment les solutions du nième mode vertical symétrique d'une barre tendue.

iii) D'autres valeurs limites de λ^2 se produisent au voisinage de $4\pi^2$ où nous avons pour le mouvement vertical plan : si $\lambda^2 < 4\pi^2$ (fig.3-13a), la première fréquence du mode symétrique est inférieure à la première fréquence du mode antisymétrique vertical ; Si $\lambda^2 = 4\pi^2$ (fig.3-13b), la première fréquence du mode symétrique est égale à la première fréquence du mode antisymétrique et si $\lambda^2 > 4\pi^2$ (fig.3-13c) la première fréquence du mode symétrique est supérieure à la première fréquence du mode antisymétrique.

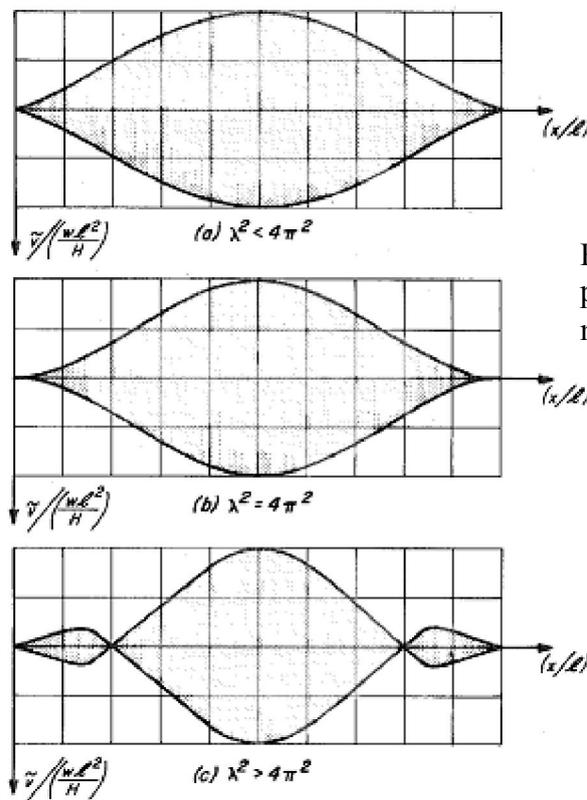


Figure 3-13: Formes possibles de la première composante verticale du mode symétrique plan [32]

Quant enfin pour les composantes modales longitudinales, elles peuvent être retrouvées à partir de l'équation (3-51) soit :

$$\frac{\tilde{h}}{E_c A_c} \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 = \frac{d\tilde{u}}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{d\tilde{v}}{dx} \quad (3-57)$$

Et par conséquent :

$$\tilde{u}(x) = \frac{\tilde{h}}{E_c A_c} \int_0^x \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 dx - \frac{dy}{dx} \tilde{v}(x) - \frac{W}{H} \int_0^x \tilde{v}(x) dx \quad (3-58)$$

Les composantes longitudinales sont antisymétriques puisque les deux équations données ci-dessus montrent que le déplacement longitudinal et la pente du câble sont toujours respectivement nul et non nulle au milieu de la travée. Après substitution dans l'équation (3-52) et intégration, il est possible d'obtenir la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}(x)}{\left(\frac{W\ell^2}{H} \right)} = & \left(\frac{W\ell}{H} \right) \frac{\tilde{h}}{H} \frac{1}{(\beta\ell)^2} \left\{ \frac{(\beta\ell)^2}{\lambda^2} \frac{L_x}{L^e} - \frac{1}{2} \left(1 - 2 \left(\frac{x}{\ell} \right) \right) \left(1 - \tan \left(\frac{\beta\ell}{2} \right) \sin \beta x - \cos \beta x \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{(\beta\ell)} \left((\beta x) - \tan \left(\frac{\beta\ell}{2} \right) (1 - \cos \beta x) - \sin \beta x \right) \right\} \end{aligned} \quad (3-59)$$

où le paramètre de longueur L_x est défini comme suit :

$$L_x = \ell \left[\frac{x}{\ell} + 24 \left(\frac{f}{\ell} \right)^2 \left\{ \frac{x}{\ell} - 2 \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{x}{\ell} \right)^3 \right\} \right] \quad (3-60)$$

Comme dans le cas des composantes modales des modes symétriques, la nature antisymétrique longitudinale des modes dépend des valeurs caractéristiques du paramètre λ^2 .

Exemple #4: Déterminons les deux premières périodes de vibration des modes symétriques plans pour le pont de longue portée de Bosphore ($\ell=915$ m) en considérant les deux situations suivantes :

- i) Les câbles sont dans leur position libre ;
- ii) Quand le tablier est complètement mis en en place.

i) Câbles dans leur position libre

Nous avons d'après l'exemple # 2, $\lambda^2 = 2000 \gg 4\pi^2$. L'équation transcendante (3-54) devient dans ce cas : $\tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) = \frac{\beta\ell}{2} - \frac{4}{500}\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)^3$ dont les deux premières solutions diffèrent très peu des valeurs obtenues pour un câble inextensible i.e: $(\beta\ell)_{1,2} = 2.86\pi, 4.92\pi$. Par conséquent, d'après la formule

$$\beta_n = \omega_n \sqrt{\frac{m}{H}} \Rightarrow \omega_n \ell = (\beta\ell)_n \sqrt{\frac{H}{m}} \text{ où } \omega_n = \frac{2\pi}{T_n}, m = \frac{W}{g} \text{ et } g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

Il est possible d'écrire pour le mode 1 :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{(\beta\ell)_1}{\ell} \sqrt{\frac{H}{m}} = \frac{2.86\pi}{915} \sqrt{\frac{6039 \times 9.81}{4.4}} = 1.139 \text{ rad/s} \\ \Rightarrow T_1 &= \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{1.139} = 5.5 \text{ s} \\ \Rightarrow f_1 &= \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{T_1} = 0.181 \text{ Hz} \end{aligned}$$

De la même façon pour le mode 2 soit en écrivant :

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{(\beta\ell)_2}{\ell} \sqrt{\frac{H}{m}} = \frac{4.92\pi}{915} \sqrt{\frac{6039 \times 9.81}{4.4}} = 1.96 \text{ rad/s} \\ \Rightarrow T_2 &= \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{1.96} = 3.2 \text{ s} \\ \Rightarrow f_2 &= \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{T_2} = 0.31 \text{ Hz} \end{aligned}$$

ii) Quand le tablier est complètement achevé soit en supportant une charge répartie d'intensité $p = 58.4 \text{ kN/m}$

Dans ce cas, nous avons $\lambda^2 = 187 > 4\pi^2$. L'équation transcendante (3-54) devient alors:

$$\tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) = \frac{\beta\ell}{2} - \frac{4}{47}\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)^3 \text{ à partir de laquelle il est possible de trouver comme solutions}$$

$(\beta\ell)_{1,2} = 2.86\pi, 4.24\pi$. Notons que la première solution n'a pratiquement pas changé comparativement à celle issue de la théorie inextensible. Ce qui n'est cependant pas le cas pour les modes 2 et supérieurs, où les solutions changent d'une manière appréciable à cause principalement de l'augmentation de la flèche du câble qui est de l'ordre 71% d'après l'exemple # 3 où $\Delta f = 5.43 \text{ m}$.

Pour le mode 1 :

$$\omega_1 = \frac{(\beta\ell)_1}{\ell} \sqrt{\frac{H}{m}} = \frac{2.86\pi}{915} \sqrt{\frac{80500 \times 9.81}{62.8}} = 1.011 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{1.011} = 5.7 \text{ s}$$

$$\Rightarrow f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{T_1} = 0.175 \text{ Hz}$$

Pour le mode 2:

$$\omega_2 = \frac{(\beta\ell)_2}{\ell} \sqrt{\frac{H}{m}} = \frac{4.24\pi}{915} \sqrt{\frac{80500 \times 9.81}{62.8}} = 1.632 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{1.96} = 3.85 \text{ s}$$

$$\Rightarrow f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{T_2} = 0.259 \text{ Hz}$$

Deuxième partie: Analyse du comportement d'un système symétrique à treillis constitués de câbles paraboliques biconvexes ou biconcaves

Considérons un système à treillis de câbles ayant une forme biconvexe comme schématisé sur la figure 3-14, fixé à ses extrémités A et B, à des massifs d'ancrages rigides. Les câbles porteurs principaux constitués des câbles supérieur et inférieur sont supposés reliés par une nappe de suspentes verticales très rapprochées entre-elles de façon à pouvoir assimiler la nappe à un voile continu et inextensible. Les axes des ordonnées y_1 et y_2 servent à décrire respectivement la géométrie des câbles inférieur et supérieur; L'axe des x étant considéré au centre du système.

Nous proposons ci-dessous d'analyser la réponse dynamique de ce système en régime libre mais d'abord donnons un aperçu de son comportement sous l'action des charges statiques c'est-à-dire appliquées de façon lente pour pouvoir annuler tout effet d'une accélération dynamique sensible éventuelle.

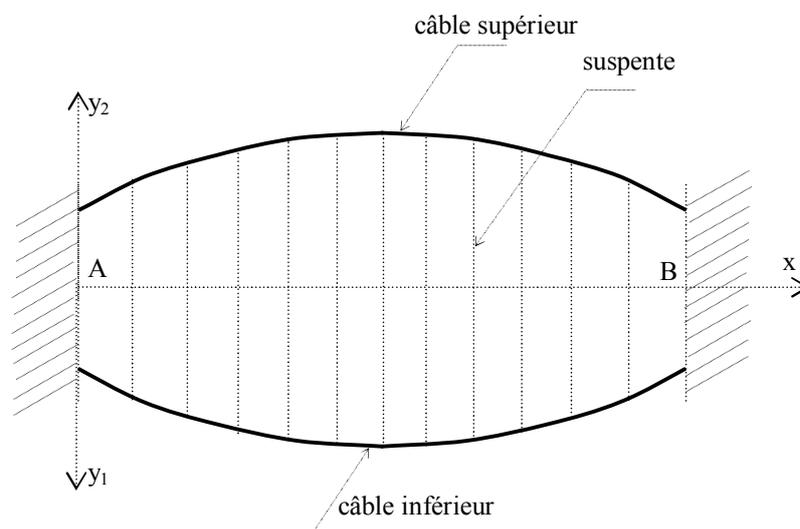


Figure 3-14 : Système à treillis de câbles de forme biconvexe

3-4 Réponse statique sous charges transversales

Découpons à une section d'abscisse x le système à treillis de câble ainsi décrit ci-haut, verticalement chargé, et considérons la partie gauche comme indiquée sur la figure 3-15. Les forces H_1 et H_2 représentent les composantes horizontales des forces de traction respectivement des câbles inférieur et supérieur et sont dites poussées par analogie avec les

ponts suspendus avec poutre de rigidité. Elles sont dues à la mise en tension initiale lors du réglage de l'ouvrage soit en l'absence de surcharges préalablement appliquées sur le système. Sous l'action des surcharges, le système subit un déplacement vertical v et les poussées engendrées alors dans les câbles deviennent H_1+h_1 et H_2-h_2 qui sont constantes d'une extrémité à l'autre des câbles.

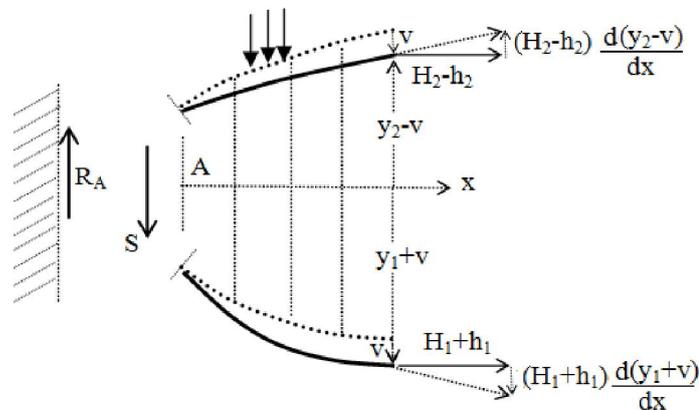


Figure 3-15 : Equilibre vertical d'un élément du treillis à câbles

Soulignons que le fonctionnement caractéristique de ce système quand la forme des câbles est convexe, si les charges appliquées sont par exemple descendantes, est tel que le câble inférieur travaille en surtension ($h_1 > 0$) et le câble supérieur en détension ($h_2 < 0$) ; c'est pourquoi le signe négative adopté dans le câble supérieur.

3-4-1 Equation d'équilibre d'un élément différentiel à treillis symétrique de câbles

L'équilibre vertical de l'élément du treillis à câbles nous conduit à écrire la relation suivante :

$$(H_1 + h_1) \frac{d(y_1 + v)}{dx} - (H_2 - h_2) \frac{d(y_2 - v)}{dx} = S \quad (3-61)$$

Soit en l'absence des surcharges, cette relation se réduit à :

$$H_1 \frac{d y_1}{dx} = H_2 \frac{d y_2}{dx} \quad (3-62)$$

où S exprime l'effort tranchant à l'origine soit égale, en vertu du principe de l'action et de la réaction, à la réaction R_A qui s'exerce au niveau de l'appui A . Par suite, le développement de la relation (3-61) en tenant compte de (3-62) nous conduit à la relation suivante :

$$(H_1 + H_2) \frac{dv}{dx} + (h_1 - h_2) \frac{dv}{dx} + h_1 \frac{dy_1}{dx} + h_2 \frac{dy_2}{dx} = S \quad (3-63)$$

Par ailleurs, l'équation de base permettant d'exprimer la poussée dans le câble, par analogie à la relation (3-26) dans le cas d'un câble parabolique seul, appliquée respectivement pour le câble supérieur et le câble inférieur, nous permet d'écrire les expressions suivantes :

$$\frac{h_1 L_{e1}}{E_{c1} A_{c1}} = \int_0^\ell \frac{dy_1}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (3-64a)$$

$$\frac{h_2 L_{e2}}{E_{c2} A_{c2}} = \int_0^\ell \frac{dy_2}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (3-64b)$$

où A_{c1} et A_{c2} sont respectivement les aires des câbles supérieur et inférieur, et L_{e1} et L_{e2} sont les paramètres virtuels de longueur de ces câbles spécifiés par : $L_{e1,2} = \int_0^\ell \left(\frac{ds_{1,2}}{dx} \right)^3 dx$. Notons que les équations (3-63) et (3-64) sont assez suffisantes pour la résolution du problème c'est-à-dire la détermination des poussées h_1 , h_2 et la déflexion v .

Supposons que :

$$H_1 = H_2 = H_0 ; A_{c1} = A_{c2} = A_c \quad (3-65)$$

L'égalité des poussées initiales de réglage H_1 et H_2 implique que $y_1 = y_2$. Cela entraîne la symétrie du système à treillis par rapport à l'axe des x . Conjointement avec l'égalité des aires des câbles, cela implique également que $h_1 = h_2 = h$. Ainsi avec ces conditions, le terme non linéaire dans l'équation (3-63) à savoir $(h_1 - h_2)$ s'annule. Par conséquent, la relation (3-63) devient:

$$2H_0 \frac{dv}{dx} + 2h \frac{dy}{dx} = S \quad (3-66)$$

Les équations des câbles (3-64a) et (3-64b) se réduisent à l'unique relation suivante en négligeant le terme du second ordre $\frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$:

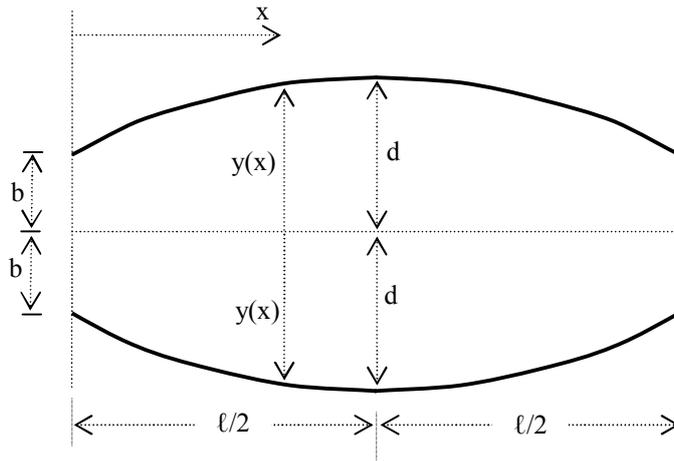
$$\frac{hL_e}{E_c A_c} = \int_0^\ell \frac{dy}{dx} \frac{dv}{dx} dx \quad (3-67)$$

Notons que les relations (3-66) et (3-67) sont linéaires et s'appliquent également pour un treillis de forme concave mais symétrique par rapport à l'axe longitudinal. Supposons maintenant que la géométrie de chacun des câbles (fig.3-16) est décrite par une parabole de second degré où il est possible de remarquer qu'elle s'applique aussi bien pour la forme concave que convexe:

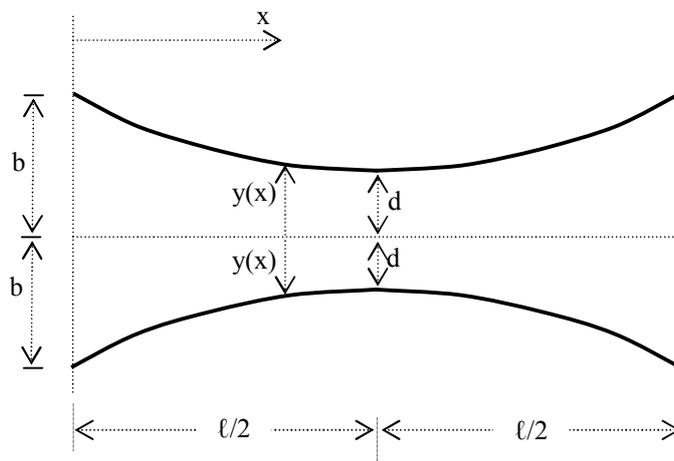
$$y = b \left\{ 1 + 4 \left(\frac{d-b}{b} \right) \left[\frac{x}{\ell} - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right] \right\} \quad (3-68)$$

Les quantités $2b$ et $2d$ représentent respectivement les espacements entre les câbles au niveau des appuis et au centre du système. Nous admettons en outre : $\left\| \frac{d-b}{\ell} \right\| \leq \frac{1}{8}$.

Examinons maintenant quelques résultats sous l'action d'une charge ponctuelle, d'une charge uniformément répartie et d'une charge en bloc triangulaire ; la procédure d'analyse étant similaire à celle présentée précédemment pour le calcul d'un câble parabolique seul.



a) forme biconvexe



b) forme biconcave

Figure 3-16 : Forme parabolique des câbles

3-4-2 Sous l'action d'une charge ponctuelle (fig. 3-17)

$$0 \leq x \leq x_1 :$$

$$v_* = \left\{ \left(I - \frac{x_1}{\ell} \right) \frac{x}{\ell} - \frac{h^*}{P^*} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right) \right\} \quad (3-69a)$$

$$x_1 \leq x \leq \ell :$$

$$v_* = \left\{ \left(I - \frac{x}{\ell} \right) \frac{x_1}{\ell} - \frac{h^*}{P^*} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right) \right\} \quad (3-69b)$$

$$h^* = \frac{l}{\left(1 + \frac{12}{\lambda^2}\right)} 6P^* \left\{ \frac{x_l}{l} - \left(\frac{x_l}{l}\right)^2 \right\} \quad (3-69c)$$

$$\text{où } v_* = \frac{v}{\left(\frac{Pl}{2H_0}\right)} ; \quad h^* = \frac{h}{H_0} ; \quad P^* = \frac{1}{2} \frac{Pl}{8(d-b)H_0} ; \quad \lambda^2 = \left\{ \frac{8(d-b)}{l} \right\}^2 \frac{l}{\frac{H_0 L_e}{E_c A_c}}$$

Notons que P^* est négative si le treillis à câbles est biconcave i.e si $b > d$. Lorsque P^* est négative, h^* est aussi négative ; ce qui signifie que le câble inférieur travaille en détension.

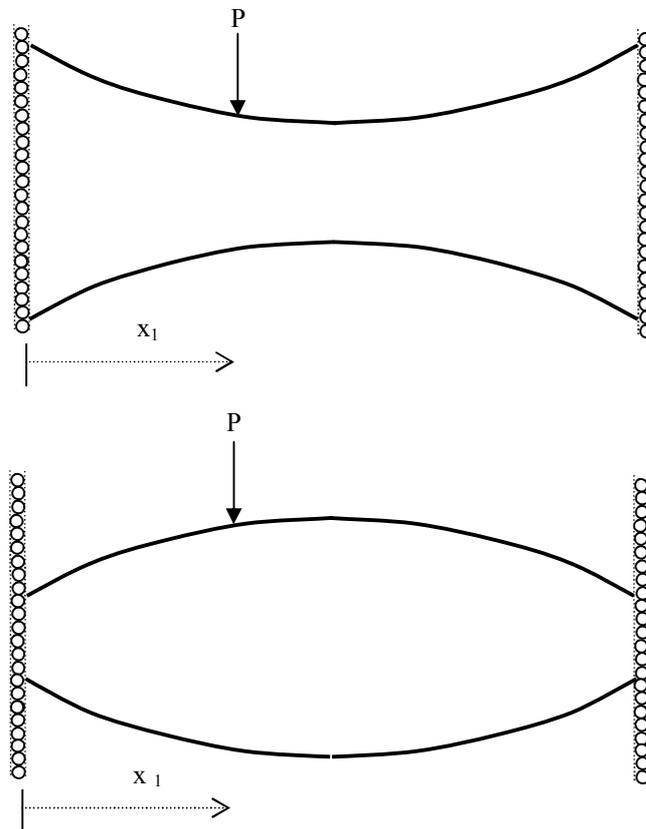


Figure 3-17 : Sous charge ponctuelle

3-4-3 Sous l'action d'une charge uniformément répartie (fig. 3-18)

$0 \leq x \leq x_2$:

$$v_* = \left\{ \left(\frac{x_3}{\ell} - \frac{x_2}{\ell} \right) - \frac{I}{2} \left(\left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right) \right\} \left(\frac{x}{\ell} - \frac{h^*}{p_*} \frac{I}{2} \left(\left(\frac{x}{\ell} \right) - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right) \right) \quad (3-70a)$$

$x_2 \leq x \leq x_3$:

$$v_* = \left[\left\{ -\frac{I}{2} \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 + \left(\frac{x_3}{\ell} \right) \left(\frac{x}{\ell} \right) - \frac{I}{2} \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 - \frac{I}{2} \left(\left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right) \frac{x}{\ell} \right\} - \frac{I}{2} \frac{h^*}{p_*} \left(\left(\frac{x}{\ell} \right) - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right) \right] \quad (3-70b)$$

$x_3 \leq x \leq \ell$:

$$v_* = \frac{I}{2} \left\{ \left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right\} \left(1 - \frac{x}{\ell} - \frac{h^*}{p_*} \frac{I}{2} \left(\left(\frac{x}{\ell} \right) - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right) \right) \quad (3-70c)$$

Où

$$h^* = \frac{I}{\left(1 + \frac{12}{\lambda^2} \right)} 6 p_* \left\{ \frac{I}{2} \left[\left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right] - \frac{I}{3} \left[\left(\frac{x_3}{\ell} \right)^3 - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^3 \right] \right\} \quad (3-70d)$$

$$v_* = \frac{v}{\left(\frac{p \ell^2}{2 H_0} \right)} ; \quad h^* = \frac{h}{H_0} ; \quad p_* = \frac{I}{2} \frac{p \ell^2}{8(d-b)H_0}$$

NB : Quand particulièrement la charge est totalement répartie sur la travée i.e $x_2=0$ et $x_3=\ell$, les équations ci-dessus conduisent à :

$$v_* = \frac{I}{2} \left(1 - \frac{h^*}{p_*} \right) \left[\frac{x}{\ell} - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right] \quad (3-70e)$$

$$h^* = \frac{p_*}{\left(1 + \frac{12}{\lambda^2} \right)} \quad (3-70f)$$

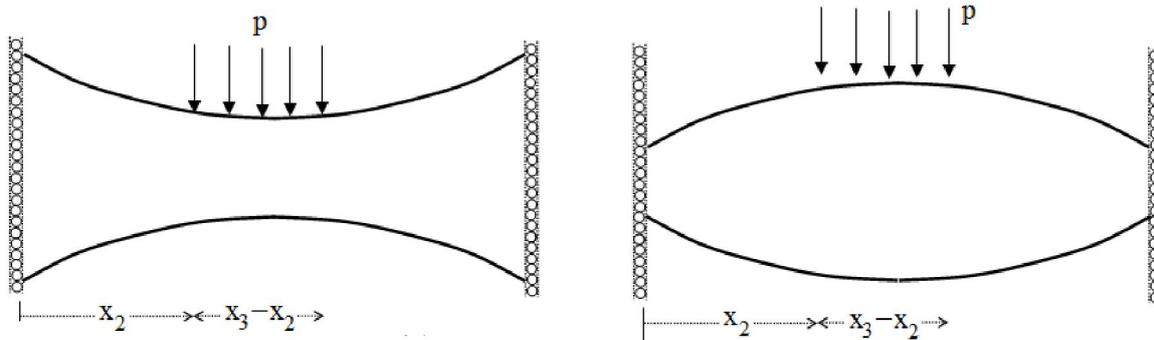


Figure 3-18 : Sous charge uniforme

3-4-4 Sous l'action d'un bloc de charge triangulaire (fig. 3-19)

$$0 \leq x \leq \frac{\ell}{2}$$

$$v_* = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{8} - \left(\frac{1-x}{2-\ell} \right)^3 \right\} - \frac{h^*}{p_*} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{x}{\ell} \right) - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right\} \quad (3-71a)$$

$$h^* = \frac{\frac{3}{8} p_*}{\left(1 + \frac{12}{\lambda^2} \right)} \quad (3-71b)$$

où $v_* = \frac{v}{\left(\frac{p_0 \ell^2}{2H_0} \right)}$; $h^* = \frac{h}{H_0}$; $p_* = \frac{p_0 \ell^2}{8(d-b)H_0}$

où p_0 est l'intensité maximale de la charge répartie ;

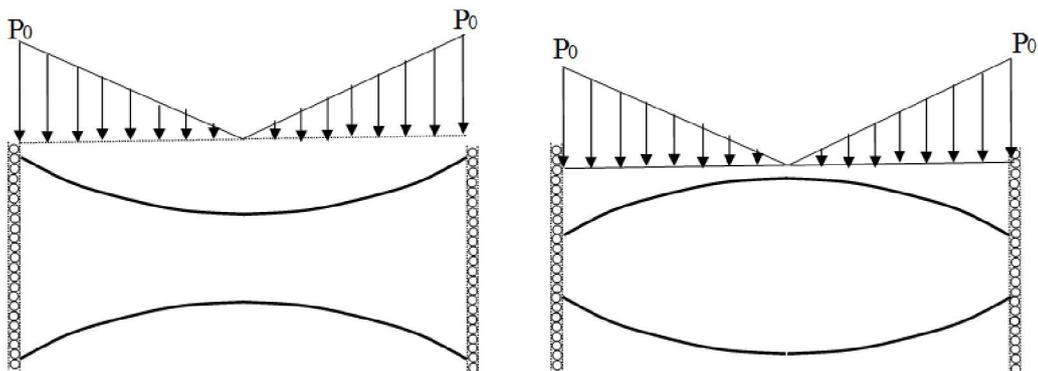


Figure 3-19 : Sous charge triangulaire

Exemple #5: Soit une arène de sport de $(61 \times 122) \text{ m}^2$ en plan dont la toiture doit être supportée par une série de systèmes en treillis à câbles paraboliques biconcaves disposés dans le sens de la petite portée comme indiqué sur la figure 3-20. Les données du problème sont: $\ell = 61 \text{ m}$, $b = 3.05 \text{ m}$, $d = 0.61 \text{ m}$, $E_C = 104 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$, $A_C = 3.22 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, $H_0 = 1110 \text{ kN}$. On demande de calculer sous les conditions de charges suivantes la poussée dans les câbles et la flèche enregistrée à mi-travée. a) sous la charge de toiture de 5.83 kN/m b) sous la charge de neige de 5.83 kN/m couvrant la première moitié de la travée.

- Calcul de L_e

$$L_e = \ell \left\{ 1 + 8 \left(\frac{f}{\ell} \right)^2 \right\} = 61 \left\{ 1 + 8 \left(\frac{2.44}{61} \right)^2 \right\} = 61.78 \text{ m}$$

- Calcul de λ^2

$$\lambda^2 = \left\{ \frac{8(d-b)}{\ell} \right\}^2 \frac{\ell}{\frac{H_0 L_e}{E_C A_C}} = \left\{ \frac{8(0.61 - 3.05)}{61} \right\}^2 \frac{61}{\frac{1110 \times 61.78}{104 \times 10^6 \times 3.22 \times 10^{-3}}} = 30.5$$

- Calcul de p_*

$$p_* = \frac{1}{2} \frac{p \ell^2}{8(d-b)H_0} = \frac{1}{16} \frac{5.83 \times 61^2}{(0.61 - 3.05)1110} = -0.5 \text{ Valeur négative à cause de la forme}$$

biconcave du système.

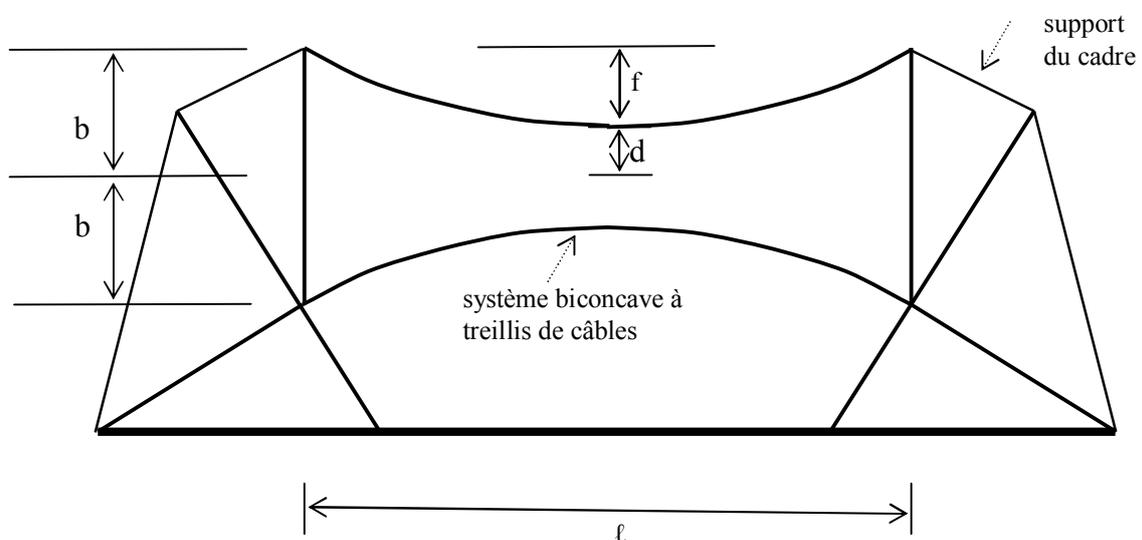


Figure 3-20a : Toiture d'une salle de sport

a) Sous la charge de toiture après son emplacement complète (fig.3-20b)

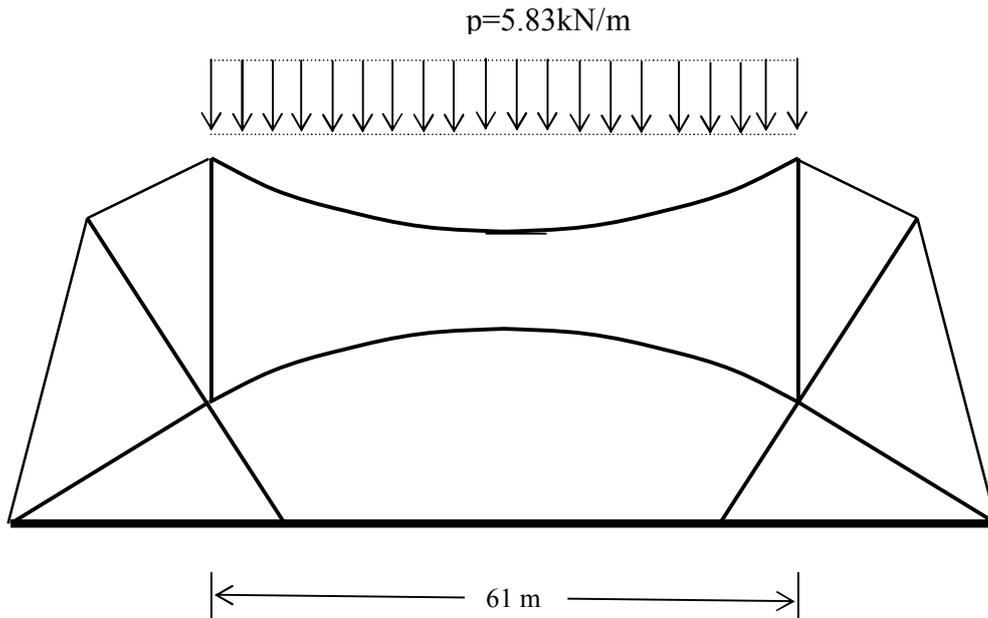


Figure 3-20b: Application complète de la charge sur la toiture

En considérant l'équation (3-70f), nous aurons :

$$h^* = \frac{p^*}{\left(1 + \frac{12}{\lambda^2}\right)} = \frac{-0.5}{\left(1 + \frac{12}{30.5}\right)} = -0.358$$

- Le câble supérieur subit une surtension :

$$H_2 = H_0 - h_2 = H_0 - H_0 h^* = 1110 + (1110 \times 0.358) = 1508.29 \text{ kN}$$

- Le câble inférieur subit une détension :

$$H_1 = H_0 + h_1 = H_0 + H_0 h^* = 1110 - (1110 \times 0.358) = 711.7 \text{ kN}$$

En considérant l'équation (3-70e), nous aurons :

$$v_*\left(x = \frac{\ell}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h^*}{p^*}\right) \left[\frac{x}{\ell} - \left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0.258}{0.5}\right) \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = 0.0355$$

$$\Rightarrow v = v_* \left(\frac{p \ell^2}{2H_0} \right) = 0.0355 \times \left(\frac{5.83 \times 61^2}{2 \times 1110} \right) = 0,347 \text{ m}$$

Par suite, la flèche du câble supérieur augmente de 2.44 m à 2.79 m ($2.44 + 0.347$) tandis que celle du câble inférieur diminue de 2.44 m à 2.09 m ($2.44 - 0.347$) comme le montre la figure.3-20c. Il est également possible de dire que la flèche du câble supérieur diminue de 0.61 m à 0.26 m ($0.61 - 0.347$) et celle du câble inférieur augmente de 0.61 m à 0.96 m ($0.61 + 0.347$).

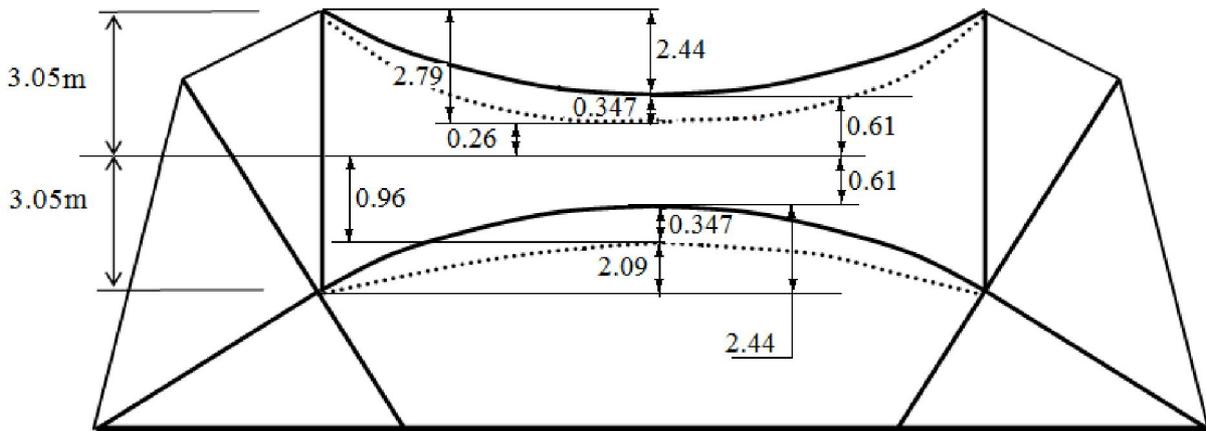


Figure 3-20c : Flèches du système sous la charge de toiture

b) Sous la charge partielle appliquée sur la moitié gauche de la toiture (fig.3-20d)

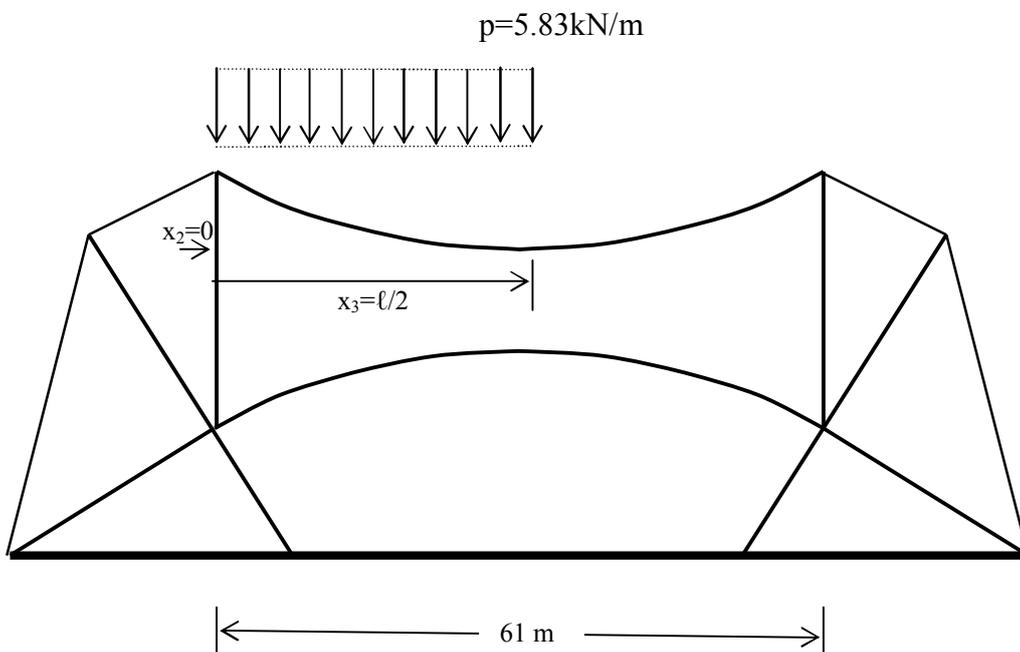


Figure 3-20d: Application partielle de la charge sur la toiture

Les équations (3-70) avec $x_2=0$ et $x_3=\ell/2$, nous conduisent à :

$$h^* = \frac{1}{\left(1 + \frac{12}{30.5^2}\right)} 6 \times (-0.5) \times \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 \right] \right\} = -0.179$$

$$v_* \left(x = \frac{\ell}{2} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 0 \right\} \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{(-0.179)}{(-0.5)} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) = 0.0177$$

$$\Rightarrow v \left(x = \frac{\ell}{2} \right) = v_* \left(\frac{p\ell^2}{2H_0} \right) = 0.0177 \times \left(\frac{5.83 \times 6I^2}{2 \times 1110} \right) = 0,173m$$

Par conséquent, avec la charge de neige, les poussées dans les câbles deviennent par superposition :

- câble supérieur (surtension) :

$$H_2 = H_0 - H_0 h^* = H_0 - H_0 (h_{Toit}^* + h_{neige}^*) = 1110 + 1110 \times (0.358 + 0.179) = 1706kN$$

- câble inférieur (détension) :

$$H_1 = H_0 + H_0 h^* = H_0 + H_0 (h_{Toit}^* + h_{neige}^*) = 1110 - 1110 \times (0.358 + 0.179) = 513.93kN$$

Par suite, la flèche du câble supérieur passe de 2.79 m à 2.96 m (2.79 + 0.173) alors que la flèche du câble inférieur diminue de 2.09 m à 1.92 m (2.09 - 0.173).

3-5 Réponse dynamique en régime libre ou théorie linéaire des vibrations libres d'un système symétrique à treillis de câbles paraboliques et biconvexes

Considérons à nouveau le système à treillis, comme dans le cas de la section précédente, dont les câbles sont paraboliques et biconvexes. Le système est d'abord soumis à l'action d'une charge uniformément répartie d'intensité p suivie d'une petite perturbation dynamique libre. Nous proposons, par analogie à un câble parabolique isolé, de formuler l'équation de mouvement vertical et l'équation transcendante correspondante qui régit le comportement dynamique en régime libre d'un système symétrique biconvexe à treillis de câbles de forme parabolique. Cependant, nous formulons d'abord l'équation d'équilibre dans les conditions de

réglage initial et sous l'action de charge statique. Notons que nous nous limitons au mode vertical vu qu'il est considérablement plus important que le mode de vibration horizontal.

3-5-1 Formulation lors des conditions initiales

Si H_1 et H_2 sont les poussées engendrées respectivement dans les câbles inférieur et supérieur, la condition d'équilibre des forces verticales ($\sum f_{y_i} = 0$) qui agissent sur un élément différentiel de longueur dx (fig.3-21) permet d'écrire :

$$\frac{d}{dx}(H_2 \frac{dy_2}{dx}) = \frac{d}{dx}(H_1 \frac{dy_1}{dx}) \quad (3-72)$$

Les variables y_1 et y_2 sont les ordonnées respectives qui décrivent la géométrie des câbles inférieur et supérieur en référence à l'axe des x qui est considéré au centre du système. Si $y_1 = y_2$ i.e les câbles sont supposés disposés symétriquement par rapport à l'axe longitudinal, sachant que les composantes horizontales des forces de traction dans les câbles H_1 et H_2 sont constantes partout d'un point à un autre des câbles, le développement de la relation (3-72) conduit à la relation suivante qui caractérise l'état initial de l'ouvrage :

$$H_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} = H_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} \quad (3-73)$$

Soit en tenant compte de la disposition symétrique des câbles, cela permet de déduire :

$$H_1 = H_2 \quad (3-74)$$

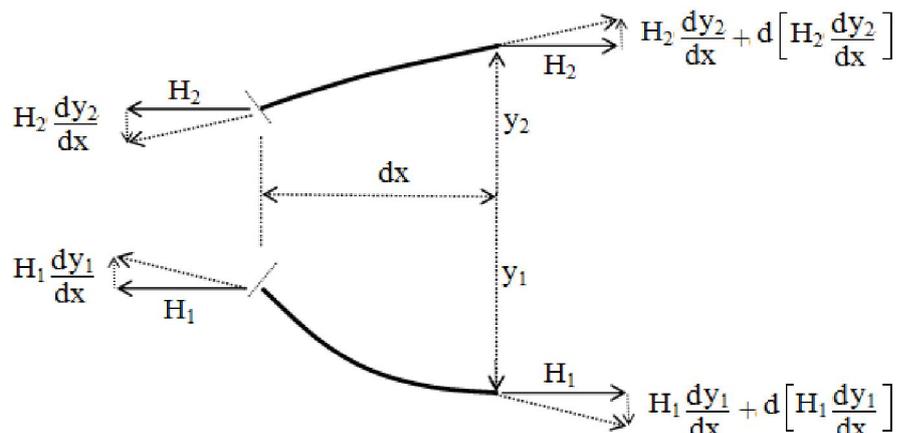


Figure 3-21 : Equilibre différentiel d'un élément lors du réglage initial

3-5-2 Formulation de l'équation d'équilibre sous l'action des charges statiques

Supposons que maintenant l'élément différentiel de la figure (3-21) subit un déplacement vertical v_0 en présence d'une charge répartie d'intensité p et désignons par h_1 et h_2 les poussées additionnelles engendrées respectivement dans les câbles inférieur et supérieur. En tenant compte du fait que dans un système à treillis dont les câbles sont disposés d'une manière biconvexe, le câble supérieur travaille en détension et le câble inférieur en surtension, les composantes horizontales de tension dans les câbles deviennent alors (H_1+h_1) et $(H_2 - h_2)$ et sont constantes tout au long des câbles.

La condition d'équilibre des forces verticales ($\sum f_{yi} = 0$) qui agissent sur l'élément différentiel de la figure 3-22 permet d'écrire :

$$\frac{d}{dx} \left[(H_2 - h_2) \frac{d(y_2 - v_0)}{dx} \right] - \frac{d}{dx} \left[(H_1 + h_1) \frac{d(y_1 + v_0)}{dx} \right] - p = 0 \quad (3-75)$$

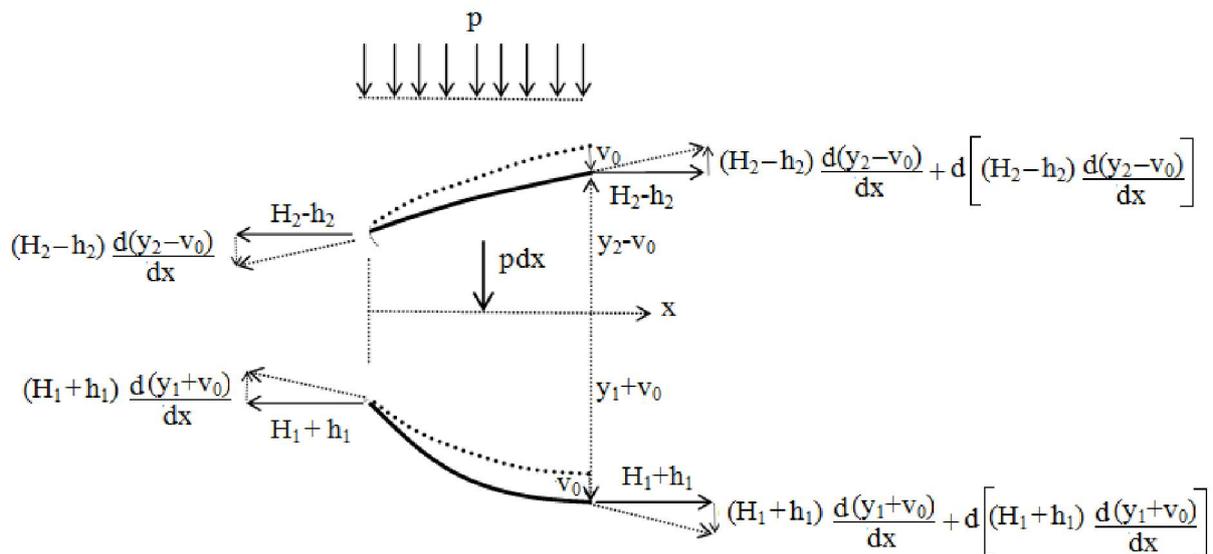


Figure 3-22 : Equilibre statique d'un élément à treillis de câbles convexes

Si nous posons en vertu de la symétrie du système que:

$$H_2 = H_1 = H_0 ; h_2 = h_1 = h_0 ; y_2 = y_1 = y_0 \quad (3-76)$$

et en tenant compte de la relation des conditions initiales (3-73), le développement de la relation d'équilibre vertical (3-75) nous conduit à la relation suivante qui caractérise la condition d'équilibre statique d'un élément différentiel d'un système à treillis symétrique dont les câbles sont paraboliques et biconvexes :

$$2H_0 \frac{d^2 v_0}{dx^2} + 2h_0 \frac{d^2 y_0}{dx^2} = -p \quad (3-77)$$

3-5-3 Formulation de l'équation de mouvement

Supposons encore une fois que l'élément différentiel de la figure 3-22 vient de subir, en plus de la charge statique uniformément répartie d'intensité p , un déplacement vertical v suite à l'action d'une perturbation dynamique libre d'origine quelconque. Le bilan des forces ainsi appliquées sont récapitulées sur la figure 3-23 où nous désignons par h la force horizontale additionnelle dans les câbles du fait de la symétrie du système à treillis et par m la masse par unité de longueur qui est sujette à la force d'inertie dont l'accélération dynamique est notée \ddot{v} .

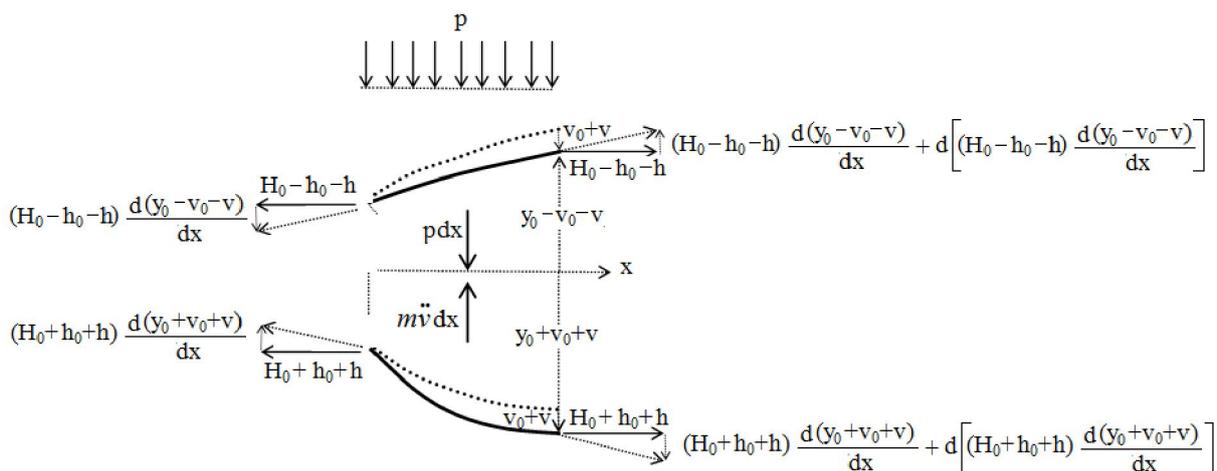


Figure 3-23 : Equation de mouvement en régime libre

La somme de toutes les forces verticales ($\sum f_{yi} = 0$) qui agissent sur l'élément nous permet d'écrire en divisant chaque terme par dx :

$$(H_0 + h_0 + h) \frac{d^2(y_0 - v_0 + v)}{dx^2} \quad (3-78)$$

Le développement de chaque terme différentiel et en tenant compte de la relation (3-73) liée au réglage initial de l'ouvrage et de la relation (3-77) liée à la présence de la charge statique uniformément répartie d'intensité p , permet d'obtenir l'équation recherchée suivante qui régit le comportement dynamique en régime libre d'un système à treillis dont les câbles sont symétriques et biconvexes:

$$2H_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2h \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} = m\ddot{v} \quad (3-79)$$

Notons que cette équation aux dérivées partielles (eq.3-79) est essentiellement linéaire et elle diffère fondamentalement de l'équation qui régit le comportement vibratoire du câble parabolique. Elle ne dépend pas en outre des variables h_0 et v_0 en relation avec le comportement statique en raison de la symétrie adoptée du système.

3-5-4 Réponse dynamique en régime vibratoire libre

Afin de résoudre l'équation aux dérivées partielles (eq.3-79), nous posons $v(x,t) = \tilde{v}(x) e^{i\omega t}$, $h(t) = \tilde{h} e^{i\omega t}$ où ω étant la fréquence circulaire de vibration. Ecrivons de plus à partir de la relation (3-68) : $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{8(d-b)}{\ell^2}$. En substituant ces quantités dans l'équation (3-79), on obtient :

$$2H_0 \frac{d^2 \tilde{v}}{dx^2} + m\omega^2 \tilde{v} = 2\tilde{h} \frac{8(d-b)}{\ell^2} \quad (3-80)$$

Par ailleurs, la linéarisation de l'équation du câble permet d'écrire:

$$\frac{\tilde{h}L_e}{E_c A_c} = \frac{8(d-b)}{\ell^2} \int_0^\ell \tilde{v} dx \quad (3-81)$$

Comme dans le cas du câble parabolique, nous allons considérer deux cas à savoir a) un mode antisymétrique de vibration dont résulte un nombre de modes impairs le long de la travée. Dans ce cas, il faut prendre la variable \tilde{h} nulle. b) un mode symétrique de vibration dont résulte un nombre de modes pairs de nœuds internes le long de la travée où dans ce cas la variable \tilde{h} est non nulle.

3-5-2-1 Modes de vibration antisymétriques

Puisque au premier ordre la poussée additionnelle h engendrée dans les câbles par l'action de la vibration dynamique est par hypothèse nulle, l'équation (3-80) se réduit à:

$$2H_0 \frac{d^2 \tilde{v}}{dx^2} + m\omega^2 \tilde{v} = 0 \quad (3-82)$$

Les conditions aux limites que cette équation doit satisfaire pour chaque mode antisymétrique sont : $\tilde{v}(x=0) = \tilde{v}(x=\frac{\ell}{2}) = 0$. On peut aisément montrer que les fréquences naturelles des modes de vibration sont données par :

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{2H_0}{m}} \quad n=1,2,3 \dots \quad (3-83)$$

où $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \dots$ représentent respectivement les fréquences naturelles de la première, deuxième, troisième, etc. des modes antisymétriques plans où une similitude étant évidente avec le cas d'un câble parabolique seul :

$$\tilde{v}_n(x) = A_n \sin \frac{2n\pi}{\ell} x \quad n=1,2,3 \dots \quad (3-84)$$

3-5-2-2 Modes de vibration symétriques

Quand le système à treillis vibre dans le mode vertical symétrique, des raccourcissements et des allongements se produisent dans les câbles dont la conséquence

est $\tilde{h} \neq 0$. Il faut dans ce cas, résoudre complètement l'équation non homogène (3-80) avec les conditions aux limites: $\tilde{v}(0) = \tilde{v}(\ell) = 0$. La solution est de la forme suivante :

$$\frac{\tilde{v}(x)}{8(d-b)} = \frac{\tilde{h}}{H_0} \frac{1}{(\beta\ell)^2} \left\{ 1 - \tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \sin \beta x - \cos \beta x \right\} \quad (3-85)$$

où $\beta^2 = \frac{m\omega^2}{2H_0}$. Conjointement avec l'équation du câble (3-81), l'élimination de la variable \tilde{h}

conduirait à l'équation transcendante suivante, à partir de laquelle les fréquences des modes symétriques verticaux peuvent être obtenues :

$$\tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) = \frac{\beta\ell}{2} - \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\beta\ell}{2}\right)^3 \quad (3-86)$$

$$\text{où } \lambda^2 = \left\{ 8 \left(\frac{d-b}{\ell} \right) \right\}^2 \frac{\ell}{\left(\frac{H_0 L_e}{E_c A_c} \right)}$$

Par conséquent, l'équation (3-86) a la même forme que l'équation correspondante du câble parabolique bien que les paramètres β^2 et λ^2 soient définis différemment. Notons que i) si $\lambda^2 < 4\pi^2$, le premier mode vertical de vibrations est le même que le premier mode symétrique ii) si $\lambda^2 > 4\pi^2$, le premier mode vertical de vibration est le premier mode antisymétrique.

Exemple #6 : Calculer la période du premier mode symétrique de vibration pour l'arène de sport déjà décrite dans l'exemple précédent. Qu'en est-il de la période du premier mode antisymétrique ?

Nous avons : $\lambda^2 = 30.5 < 4\pi^2$. La résolution de l'équation transcendante (3-86) nous conduit à la première solution : $(\beta\ell)_1 = 1.84\pi$. Sachant que $\beta = \omega \sqrt{\frac{m}{2H_0}}$:

$$\omega_1 = \frac{(\beta\ell)_1}{\ell} \sqrt{\frac{2H_0}{m}} = \frac{1.84\pi}{61} \sqrt{\frac{2 \times 1110 \times 9.81}{5.83}} = 5.791 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5.791} = 1.08 \text{ s}$$

$$\Rightarrow f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{T_1} = 0.921 \text{ Hz}$$

Concernant le mode antisymétrique, nous avons pour $n=1$, à partir de la relation (3-83) :

$$\omega_1 = \frac{2n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{2H_0}{m}} = \frac{2\pi}{61} \sqrt{\frac{2 \times 1110 \times 9.81}{5.83}} = 6.295 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{6.295} = 1.0 \text{ s}$$

$$\Rightarrow f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{T_1} = 1.0 \text{ Hz}$$

CHAPITRE 4

DEVELOPPEMENTS THEORIQUES DE LA METHODE DE CALCUL D'UN OUVRAGE SUSPENDU LEGER ET SANS POUTRE DE RIGIDITE APPLIQUEE A UNE PASSERELLE PIETONNIERE RIGIDIFIEE PAR CABLES PRECONTRAINTS – EFFETS STATIQUE ET DYNAMIQUE

4-1 Généralités

Ce chapitre a pour but d'exposer les développements théoriques de base de la méthode de calcul d'un système vertical précontraint, tel que décrit dans le premier chapitre, en considérant les deux aspects statique et dynamique. La présentation comprend de ce fait deux parties distinctes dont la première se rapporte exclusivement à l'aspect statique de l'application des charges c'est-à-dire en admettant que les charges sont appliquées suffisamment lentement pour ne générer aucune accélération sensible dans la structure.

La deuxième partie est consacrée à l'analyse de l'ouvrage sous l'action de vibrations libres pouvant être le siège de l'application d'une petite perturbation dynamique d'origine quelconque. Les fondements mathématiques utilisés sont basés essentiellement sur l'approche fondamentale qui assimile le comportement de la nappe des suspentes à celui d'un voile continu et inextensible.

Les autres hypothèses qui délimitent les conditions de validité de la méthode sont les suivantes :

- câble parfaitement flexible : cela revient à énoncer en langage structural que, tout au long d'un câble en équilibre, le moment fléchissant est nul ;
- inextensibilité des suspentes signifiant que les déplacements verticaux respectifs du câble porteur disposé dans la partie supérieure de l'ouvrage, des suspentes et du câble de rigidité disposé en sa partie inférieure sont égaux ;
- câbles relativement tendus (peu profonds) correspondant à un rapport flèche/travée de l'ordre de 1/10 ou moins de sorte que les chaînettes fortement aplaties sont assimilables,

dans l'état initial, à des paraboles de 2^{ème} degrés ; il en découle que les densités de réaction sur les câbles sont uniformes sur l'horizontale, au moment du réglage ;

- variations de températures uniformes et constantes partout dans la structure.

Première partie: Analyse sous charges statiques d'origine mécanique ou thermique

Supposons qu'en l'absence de surcharge et à la température de réglage initiale, le réglage de l'ouvrage est tel que les câbles supérieur et inférieur soient soumis à des forces de traction de composantes horizontales respectives H_0 et H_1 . Ces forces, que par analogie avec les ponts suspendus avec poutre de rigidité qu'on appelle poussées, sont dues à la mise en tension initiale et au poids propre des éléments constitutifs de la structure, et sont constantes d'une extrémité à l'autre des câbles. Sous chargement, ou lorsque la température est différente de la température de réglage, les poussées deviennent H_0+h_0 et H_1+h_1 . Nous allons tout d'abord montrer, que lorsqu'on connaît les variations h_0 et h_1 des poussées, on peut calculer les déformations et les flèches en n'importe quel point des câbles. Le problème posé par l'étude d'un système à suspension revient alors à la détermination des poussées h_0 et h_1 . Les équations à caractère non linéaire décrivant les tractées dans les câbles sont établies de façon à être résolues par la méthode de Newton-Raphson à double itération. On admet de plus, par analogie avec la théorie des ponts suspendus à poutre de rigidité, que les câbles reposent sur les pylônes par l'intermédiaire de chariots de dilatation, afin qu'aucune réaction horizontale ne puisse s'exercer sur les pylônes.

4-2 Formes initiales d'équilibres

Attribuons, dans ce chapitre pour des fins de clarté, à tout paramètre relatif au câble supérieur l'indice 0, et au câble inférieur l'indice 1. Soit H_1 la poussée due à la pré-tension du câble inférieur ; la densité de réaction constante due à la mise en pré-tension de ce câble sur la nappe des suspentes s'élève à ω_s . Si ω' est le poids linéique horizontal total de l'ouvrage au moment du réglage, la densité de charge sur le câble supérieur de poussée H_0 est donnée par :

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega' \quad (4-1)$$

Les câbles décrivent des paraboles de flèches f_i ($i=1,0$), dont les équations rapportées à leurs cordes respectives CD, C'D' comme indiqué dans la figure 4-1, et suivant le sens positif de l'axe Y sont :

$$n_0 = \frac{4f_0}{\ell^2} x(\ell - x) \quad (4-2)$$

$$n_1 = -\frac{4f_1}{\ell^2} x(\ell - x) \quad (4-3)$$

L étant la portée de la travée considérée. Désignons par μ' le moment fléchissant produit par la densité de charge ω' dans la poutre droite isostatique sur appuis simples de portée ℓ , et par μ_1 le moment fléchissant dû à ω_1 . On obtient la figure d'équilibre d'un câble en écrivant que le moment fléchissant en tout point d'abscisse x du câble est nul, compte tenu des deux expressions précédentes.

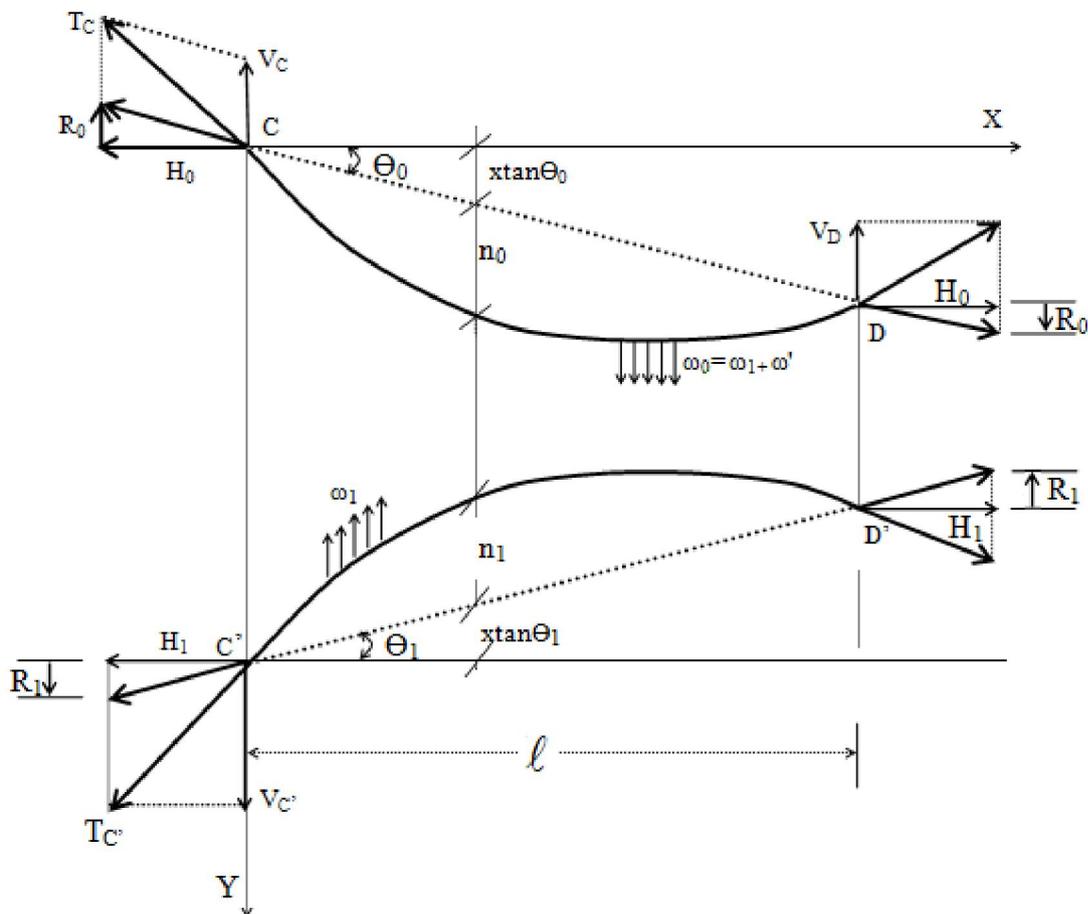


Figure 4-1 : Conditions initiales des câbles

4-2-1 Câble de rigidité

$$-\mu_1 + H_1(-n_1 + x \operatorname{tg} \theta_1) - R_1 x = 0 \quad (4-4)$$

car la réaction d'appui du câble sur le pylône C'C comprend, outre la réaction sur appuis simples, une réaction dirigée suivant C'D' de composantes horizontale H_1 et verticale R_1 . Comme on a visiblement $R_1 = H_1 \operatorname{tg} \theta_1$, l'équation précédente donne l'égalité :

$$H_1 n_1 = -\mu_1 \quad (4-5)$$

Il en résulte que :

$$n_1 = -\frac{\mu_1}{H_1} = -\frac{\omega_1 \ell^2}{2H_1} x(\ell - x) \quad (4-6)$$

En comparant avec (4-3), on voit que :

$$H_1 = \frac{\omega_1 \ell^2}{8f_1} \quad (4-7)$$

4-2-2 Câble principal

Par analogie avec le cas précédent, et à l'aide de l'équation (4-2), on obtient les expressions suivantes :

$$H_0 n_0 = \mu' + \mu_1 \quad (4-8)$$

$$H_0 = \frac{\omega_0 \ell^2}{8f_0} \quad (4-9)$$

4-3 Formes d'équilibre sous charge (s)

Supposons maintenant que la température vienne à varier, ou que des surcharges, pouvant comprendre des charges isolées ou des charges réparties sur tout ou partie de la travée, soient appliquées au tablier considéré, dépourvu de rigidité appréciable. Désignons par μ le moment fléchissant dû à ces surcharges dans la poutre droite sur appuis simples de portée ℓ , et par v_s le moment fléchissant qui se produirait dans cette même poutre sous l'action de la partie des surcharges transmise au câble principal par les suspentes. Les poussées dans les câbles deviennent respectivement (H_0+h_0) et (H_1+h_1) , et les câbles prennent des nouvelles figures d'équilibre respectives (n_0+v_0) et (n_1+v_1) , définies par les équations suivantes, analogues aux relations (4-4) à (4-9).

- Câble de rigidité :

$$(H_1 + h_1)(n_1 + v_1) = -\mu_1 + \mu - v_s \quad (4-10)$$

- Câble principal :

$$(H_0 + h_0)(n_0 + v_0) = \mu' + \mu_1 + v_s \quad (4-11)$$

4-4 Equation de la déformée

La nappe des suspentes étant assimilée à un voile continu et inextensible, à toute déformation $v(x)$ du câble principal, comptée à partir de l'état initial, correspond la même déformation $v(x)$ du câble de rigidité. Alors :

$$v = v_0 = v_1 \quad (4-12)$$

En vertu de cette relation, l'élimination de v_s entre les équations (4-10) et (4-11), compte tenu de l'état initial décrit par (4-5) et (4-8), conduit à l'expression de la déformée :

$$v = \frac{\mu - h_0 n_0 - h_1 n_1}{H} \quad (4-13)$$

où $H = H_0 + H_1 + h_0 + h_1$

Nous constatons que la détermination de la déformée v exige le calcul des variations h_0 et h_1 des poussées ; ce calcul constitue le problème principal de l'étude de ce système suspendu. Le fonctionnement caractéristique de ce système, si les charges appliquées sont par exemple descendantes, est tel que le câble porteur travaille en surtension ($h_0 > 0$) et le câble de rigidité en détension ($h_1 < 0$). L'expression de n_1 est donnée par la relation (4-3). La valeur négative de n_1 introduite dans la relation (4-13) révèle nettement l'influence stabilisatrice du câble de rigidité cambré. Cette influence sera mieux mise en lumière plus loin à travers une analyse paramétrique appropriée, mais elle laisse déjà entrevoir un rôle positif de la cambrure et la supériorité qu'elle donne par rapport au câble de rigidité rectiligne.

4-5 Formulation des poussées dans les câbles

On établit de façon générale l'équation fondamentale relative à un câble de travée quelconque en exploitant la condition d'immobilité des extrémités des câbles solidaires des ancrages en tenant compte de la configuration parabolique du câble. On en déduit directement les équations de détermination des poussées dans les câbles.

4-5-1 Equation servant de base de calcul de la poussée

Cette équation, dite également équation des déplacements orthogonaux, donne le déplacement horizontal du câble à l'extrémité de la travée, connaissant le déplacement horizontal à l'origine, la flèche v du câble, la variation de poussée h et la variation linéaire due à la température. Considérons x, y, s les coordonnées rectangulaires et l'abscisse curviligne d'un point du câble dans l'état initial (fig.4-2a). On a selon le système d'axes XY supposé rectangulaire :

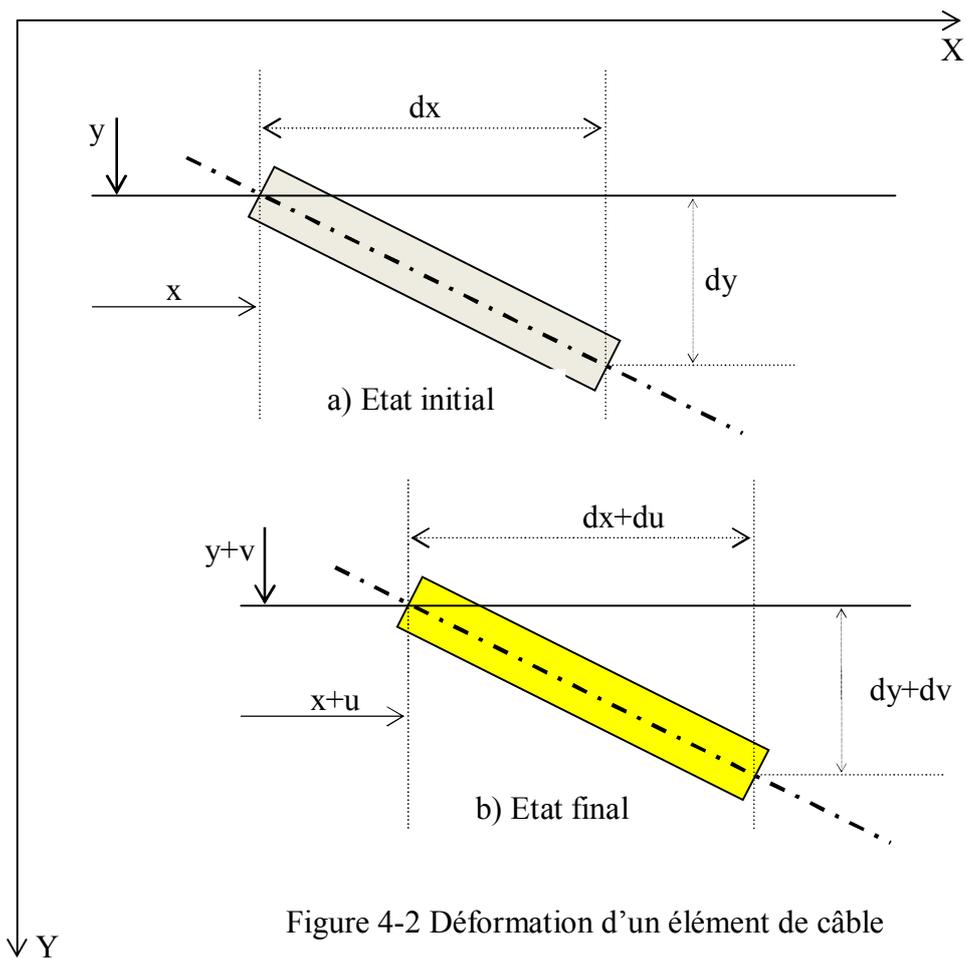
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (4-14)$$

Soient $x + u = x + \delta x$, $y + v = y + \delta y$, $s + \delta s$, les mêmes éléments dans le nouvel état d'équilibre en présence de surcharges et à la nouvelle température (fig.4-2b). Vu $\delta dx = d\delta x = du$, $\delta dy = d\delta y = dv$, on déduit conformément à la relation précédente :

$$dx du = ds \delta ds - dy dv - \frac{1}{2} [(dv)^2 + (du)^2 - (\delta ds)^2] \quad (4-15)$$

Il en résulte que :

$$\frac{du}{dx} = \frac{ds}{dx} \frac{\delta ds}{dx} - \frac{dy}{dx} \frac{dv}{dx} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \left(\frac{\delta ds}{dx} \right)^2 \right] \quad (4-16)$$



Cherchons maintenant à évaluer la variation de longueur δds qui comprend :

- un allongement élastique dû à l'accroissement h de la poussée :

$$\delta_1 ds = \frac{h}{E_c A_c} \left(\frac{ds}{dx} \right) ds \quad (4-17)$$

E_c et A_c désignant respectivement le module d'élasticité et la section du câble.

- une variation de la longueur due à la température :

$$\delta_2 ds = \tau ds \quad (4-18)$$

τ est la variation linéique due à la température qui se traduit par la relation suivante :

$$\tau = \alpha_t \Delta T \quad (4-19)$$

ΔT et α_t désignant respectivement la variation de température en °C et le coefficient de dilatation thermique du matériau en mm/(mm.°C).

Par conséquent :

$$\delta ds = \frac{h}{E_c A_c} \left(\frac{ds}{dx} \right) ds + \tau ds \quad (4-20)$$

La formule (4-16) devient alors :

$$\frac{du}{dx} = \frac{h}{E_c A_c} \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 + \alpha_t \Delta T \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 - \frac{dy}{dx} \frac{dv}{dx} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \left(\frac{\delta ds}{dx} \right)^2 \right] \quad (4-21)$$

L'intégration de cette équation d'une extrémité à l'autre de la travée donne :

$$\begin{aligned} \Delta u \Big|_0^\ell = & \int_0^\ell \frac{h}{E_c A_c} \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 dx + \int_0^\ell \alpha_t \Delta T \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 dx - \int_0^\ell \frac{dy}{dx} \frac{dv}{dx} dx - \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \left(\frac{\delta ds}{dx} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (4-22)$$

Pour de faibles déformations et des petits déplacements horizontaux du câble, les deux derniers termes de l'équation (4-22) deviennent négligeables. Si de plus, on considère les hypothèses suivantes :

- $\tau = \alpha_t \Delta T$ constante (uniforme partout dans toute la structure),

- $v(0) = v(\ell) = 0$ (ce qui traduit l'incompressibilité des pylônes et la fixité verticale des ancrages),
- Câble parabolique aplati, décrit par l'ordonnée y .

Une intégration par partie donne :

$$-\int_0^{\ell} \frac{dy}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^{\ell} \frac{d^2 y}{dx^2} v dx \quad (4-23a)$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \frac{d^2 v}{dx^2} v dx \quad (4-23b)$$

L'équation générale de base devient finalement :

$$\Delta u \Big|_0^{\ell} = \frac{h L_s}{E_c A_c} + \tau L_t + \int_0^{\ell} \frac{d^2 y}{dx^2} v dx + \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \frac{d^2 v}{dx^2} v dx \quad (4-24)$$

Les longueurs L_s et L_t étant définies par :

$$L_s = \int_0^{\ell} \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 dx \quad , \quad L_t = \int_0^{\ell} \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 dx \quad (4-25a)$$

L'équation (4-24) est l'équation dite des déplacements orthogonaux.

4-5-2 Calcul des coefficients de longueur L_t et L_s

De la figure 4-1, pour une parabole de flèche f et de longueur ℓ :

$$y = x \operatorname{tg} \theta + \frac{4f}{\ell^2} x (\ell - x)$$

en considérant l'élément $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$, on déduit en posant $U = \frac{4f}{\ell} \left(1 - 2\frac{x}{\ell}\right) \cos \theta$:

$$\cos^2 \theta \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 = 1 + 2U \sin \theta + U^2$$

On peut calculer alors aisément les développements en série de Taylor de $\left(\frac{ds}{dx}\right)^n$ et l'on parvient sans peine aux formules suivantes :

$$L_t = \ell \left[\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{16}{3} \left(\frac{f}{\ell}\right)^2 \right] \quad (4-25b)$$

$$L_s = \ell \left[\frac{1}{\cos^3 \theta} + 8 \left(\frac{f}{\ell}\right)^2 \frac{1 + \sin^2 \theta}{\cos \theta} + \frac{96}{5} \left(\frac{f}{\ell}\right)^4 \cos^5 \theta \dots \right] \quad (4-25c)$$

4-5-3 Application au cas d'un système vertical précontraint

Ce système est représenté sur la figure 4-3 dans lequel on attribue l'indice (') aux paramètres relatifs aux travées de haubanage. Le câble porteur est composé de la travée principale et de deux haubans reliés aux massifs d'ancrage. Le câble de rigidité est seulement constitué d'une travée principale s'appuyant éventuellement sur les pylônes. Une application directe de l'équation fondamentale des déplacements orthogonaux (4-24) à chaque câble donne l'expression recherchée de la poussée.

4-5-3-1 Câble porteur

Cherchons tout d'abord à développer les deux derniers termes de l'équation (4-24) pour chacune des parties du câble.

A- Travée principale : à l'aide de la relation (4-13), en tenant compte de la configuration parabolique des câbles décrite par les expressions (4-2) et (4-3) avec $y = n_0$, nous obtenons :

$$\int_0^\ell \frac{d^2 y}{dx^2} v dx = \frac{16}{3} \frac{f_0^2}{H \ell} h_0 - \frac{16}{3} \frac{f_0 f_1}{H \ell} h_1 - \frac{8 f_0}{H \ell^2} \int_0^\ell \mu dx \quad (4-26)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{d^2 v}{dx^2} v dx = -\frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{pv}{H} dx - \frac{8}{3} \ell \left(\frac{f_0 h_0 - f_1 h_1}{H \ell} \right)^2 + 4 \left(\frac{f_0 h_0 - f_1 h_1}{H^2 \ell^2} \right) \int_0^\ell \mu dx \quad (4-27)$$

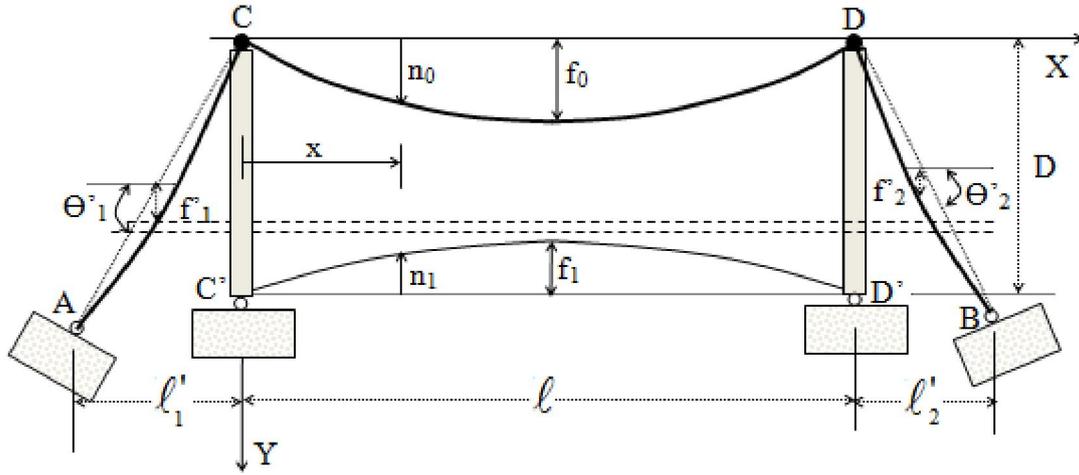


Figure 4-3 : Système vertical précontraint

Remarque : Dans l'expression (4-27), la surcharge linéique $p(x)$ est une fonction généralement continue. On peut généraliser pour un ensemble de charges concentrées P_j appliquées aux sections d'abscisses x_j , en remplaçant cet ensemble de charges concentrées par la densité de charge généralement continue :

$$p(x) = \begin{cases} \frac{P_j}{2\varepsilon} & \text{lorsque } x \text{ appartient à l'intervalle } (x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon) \\ 0 & \text{lorsque } x \text{ n'appartient pas à l'intervalle } (x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon) \end{cases}$$

Sachant que $\int_0^\ell p v dx = \sum_j \left(\frac{P_j}{2\varepsilon} \int_{x_j-\varepsilon}^{x_j+\varepsilon} dx \right) v_j = \sum_j (P_j v_j)$, l'équation (4-27) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{d^2 v}{dx^2} v dx = & -\frac{1}{2} \left[\int_0^\ell \frac{p v}{H} dx + \sum_j \left(\frac{P_j v_j}{H} \right) \right] - \frac{8}{3} \ell \left(\frac{f_0 h_0 - f_1 h_1}{H \ell} \right)^2 \\ & + 4 \left(\frac{f_0 h_0 - f_1 h_1}{H^2 \ell^2} \right) \int_0^\ell \mu dx \end{aligned} \quad (4-28)$$

B- Travées de haubanage: la formule (4-13) se réduit à :

$$v'_i = -\frac{h_0}{H_0 + h_0} n'_i \quad (4-29)$$

où l'indice (') est relatif à une travée quelconque d'un hauban ; avec $n'_i = \frac{4f'_i}{\ell'^2_i} x(\ell'_i - x)$, on

trouve:

$$\int_0^\ell \frac{d^2 y}{dx^2} v dx = \sum_{i=1}^2 \int_0^{\ell'_i} \frac{d^2 n'_i}{dx^2} v'_i dx = \frac{16}{3} \left(\frac{h_0}{H_0 + h_0} \right) \sum_{i=1}^2 \frac{f_i'^2}{\ell'_i} \quad (4-30)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{d^2 v}{dx^2} v dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_0^{\ell'_i} \frac{d^2 v'_i}{dx^2} v'_i dx = -\frac{8}{3} \left(\frac{h_0}{H_0 + h_0} \right)^2 \sum_{i=1}^2 \frac{f_i'^2}{\ell'_i} \quad (4-31)$$

En intégrant d'une extrémité A à l'autre B du câble, et à l'aide des développements (4-25) à (4-31) et de la condition déformationnelle des ancrages $\left(\Delta u \Big|_A^B = 0 \right)$, nous obtenons l'équation de la poussée du câble principal:

$$h_0 = \frac{I}{D_0} \left[\frac{8f_0}{\ell^2} \int_0^\ell \mu dx - H\tau \zeta_{t_0} - \frac{16f_0 f_1}{3\ell} h_1 - \Delta_0 \right] \quad (4-32)$$

avec la définition suivante des différents paramètres, Δ_0 étant un terme correctif:

$$\zeta_{t_0} = L_{t_0} + \sum_{i=1}^2 L'_{t_i} \quad , \quad \zeta_{s_0} = L_{s_0} + \sum_{i=1}^2 L'_{s_i} \quad (4-33)$$

$$D_0 = \frac{H \zeta_{s_0}}{E_{c0} A_{c0}} + \frac{16}{3} \left[\frac{f_0^2}{\ell} + \frac{H}{H_0 + h_0} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{f_i'^2}{\ell'_i} \right) \right] \quad (4-34)$$

$$\begin{aligned} \Delta_0 = & -\frac{1}{2} \left[\int_0^\ell p v dx + \sum_j (P_j v_j) \right] + 4 \left(\frac{f_0 h_0 - f_1 h_1}{H \ell^2} \right) \int_0^\ell \mu dx \\ & - \frac{8}{3} \left[\frac{(f_0 h_0 - f_1 h_1)^2}{H \ell} + H \left(\frac{h_0}{H_0 + h_0} \right)^2 \sum_{i=1}^2 \frac{f_i'^2}{\ell'_i} \right] \end{aligned} \quad (4-35)$$

C- Câble de rigidité

Si on reprend le processus de calcul précédent à l'aide des considérations suivantes :

- équation de la déformée (4-13),
 - définition de tout point du câble par $y=D+n_1$ où D est la distance verticale entre les points d'appuis et d'accrochage des câbles en tête et au pied du pylône (CC' ou DD'),
 - intégration le long du câble C'D' avec la condition déformationnelle $\Delta u = 0$ entre deux points de fixation,

on aboutit à la deuxième équation de poussée, correspondant au câble de rigidité :

$$h_1 = \frac{I}{D_1} \left[-\frac{8f_1}{\ell^2} \int_0^\ell \mu dx - H\tau \zeta_{t_1} + \frac{16f_0f_1}{3\ell} h_0 - \Delta_1 \right] \quad (4-36)$$

où les paramètres suivants sont définis par analogie avec les expressions (4-33) à (4-35) ; Δ_1 étant un terme correctif :

$$\zeta_{t_1} = L_{t_1} \quad , \quad \zeta_{s1} = L_{s1} \quad (4-37)$$

$$D_1 = \frac{H \zeta_{s1}}{E_{c1} A_{c1}} + \frac{16 f_1^2}{3\ell} \quad (4-38)$$

$$\Delta_1 = \Delta_0 + \frac{8}{3} H \left(\frac{h_0}{H_0 + h_0} \right)^2 \sum_{i=1}^2 \frac{f_i'^2}{\ell'_i} \quad (4-39)$$

4-5-3-2 Transformation des équations de poussées

Nous allons calculer $\int_0^{\ell} \mu dx$ pour un certain nombre de cas de surcharges. Pour alléger l'écriture, on pourra cependant, sans confusion possible supprimer les indices relatifs aux câbles.

1. Charge concentrée P à $x = \alpha \ell$ (fig.4-4a) :

$$\int_0^{\ell} \mu dx = \frac{\ell^2}{12} P \psi(\alpha) \quad (4-40a)$$

avec :

$$\psi(\alpha) = 6(\alpha - \alpha^2) \quad (4-40b)$$

2. Charge répartie uniforme p entre $x_1 = \alpha_1 \ell$ et $x_2 = \alpha_2 \ell$ (fig.4-4b) :

$$\int_0^{\ell} \mu dx = \frac{p\ell^3}{12} [\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1)] \quad (4-41a)$$

avec :

$$\varphi(\alpha) = 3\alpha^2 - 2\alpha^3 \quad (4-41b)$$

$$\int_{\alpha_1 \ell}^{\alpha_2 \ell} \mu dx = \int_0^{\ell} \mu dx - \left[\int_0^{\alpha_1 \ell} \mu dx + \int_{\alpha_2 \ell}^{\ell} \mu dx \right] = \frac{p\ell^3}{3} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \left[2\alpha_1 + \alpha_2 - \frac{3}{4} (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \right] \quad (4-42)$$

3. Sous la combinaison de charges concentrées et réparties :

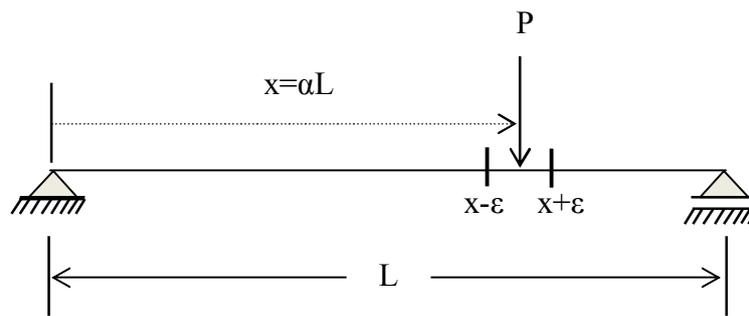
Sous n charges concentrées et m charges réparties, les expressions (4-40a) et (4-41a) peuvent se mettre sous les formes générales suivantes:

$$\int_0^{\ell} \mu dx = \frac{\ell^2}{12} F(\psi_j, \varphi_i) \quad (4-43)$$

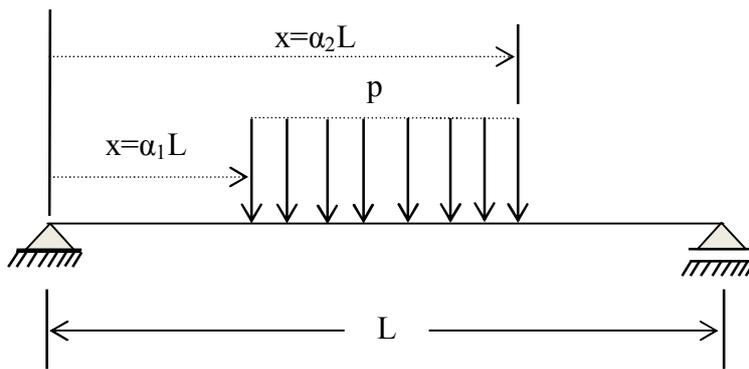
$$F(\psi_j, \varphi_i) = \sum_{j=1}^n P_j \psi(\alpha_j) + \sum_{i=1}^m [p_i \ell (\varphi(\alpha_2^i) - \varphi(\alpha_1^i))] \quad (4-44)$$

$$\int_{\alpha_1^i \ell}^{\alpha_2^i \ell} \mu dx = \frac{\ell^3}{12} \sum_{i=1}^m p_i (\alpha_2^i - \alpha_1^i)^2 - \frac{3}{4} (\alpha_2^i + \alpha_1^i)^2 + f(p_1, p_2, \dots) \quad (4-45)$$

où $f(p_1, p_2, \dots)$ étant un terme qui dépend de la simultanéité de charges uniformes.



a) Charge concentrée



b) Charge uniforme

Figure 4-4 : Cas de charge particuliers sur une travée type

En fonction de (4-40) et (4-41), le terme correctif Δ_0 peut s'écrire par exemple d'une manière plus explicite pour une seule gamme de charges ($i=j=1$) :

$$\begin{aligned}
\Delta_0 = & -\frac{\ell^3}{6H} \left\{ p_i^2 (\alpha_2^i - \alpha_1^i)^2 \left[(2\alpha_1^i + \alpha_2^i) - \frac{3}{4} (\alpha_1^i + \alpha_2^i)^2 \right] \right\} \\
& + \frac{2\ell}{3H} (f_0 h_0 - f_1 h_1) \left\{ p_i [\varphi(\alpha_2^i) - \varphi(\alpha_1^i)] \right\} - \frac{8}{3} \left[\frac{(f_0 h_0 - f_1 h_1)^2}{H\ell} + H \left(\frac{h_0}{H_0 + h_0} \right)^2 \sum_{i=1}^2 \frac{f_i'^2}{\ell_i'} \right] \\
& - \left(\frac{P_j v_j}{2} \right) + \frac{(f_0 h_0 - f_1 h_1)}{3H} P_j \psi(\alpha_j) \tag{4-46}
\end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans les équations (4-32) et (4-36), on parvient à la nouvelle forme suivante des équations de poussée plus facilement utilisable :

$$h_0 = \frac{I}{D_0} \left[\frac{2}{3} f_0 F(\psi_j, \varphi_i) - H\tau \zeta_{t_0} - \frac{16 f_0 f_1}{3\ell} h_1 - \Delta_0 \right] \tag{4-47a}$$

$$h_1 = \frac{I}{D_1} \left[-\frac{2}{3} f_1 F(\psi_j, \varphi_i) - H\tau \zeta_{t_1} + \frac{16 f_0 f_1}{3\ell} h_0 - \Delta_1 \right] \tag{4-47b}$$

Le système d'équations ainsi obtenu est non linéaire; les inconnues sont les variations de poussée h_0 et h_1 . On utilise pour la résolution la méthode itérative de Newton-Raphson dans le cas d'une double itération [42,43]. L'algorithme général de la méthode est illustré sur la figure 4-5 où il s'agit de résoudre un système d'équations $F_x(x,y)$ et $F_y(x,y)$ en se fixant à priori la solution initiale et les pas d'incrémentations. Cependant, comme dans tous les processus itératifs, un mauvais choix des solutions approchées initiales peut engendrer soit une divergence, soit une convergence vers une solution erronée.

Afin de contourner cette difficulté, nous proposons de prendre comme solutions initiales du problème, les parties principales de h_0 et h_1 données par (4-47) sans les termes correctifs Δ_0 et Δ_1 , avec $h_0 = h_1 = 0$ au départ.

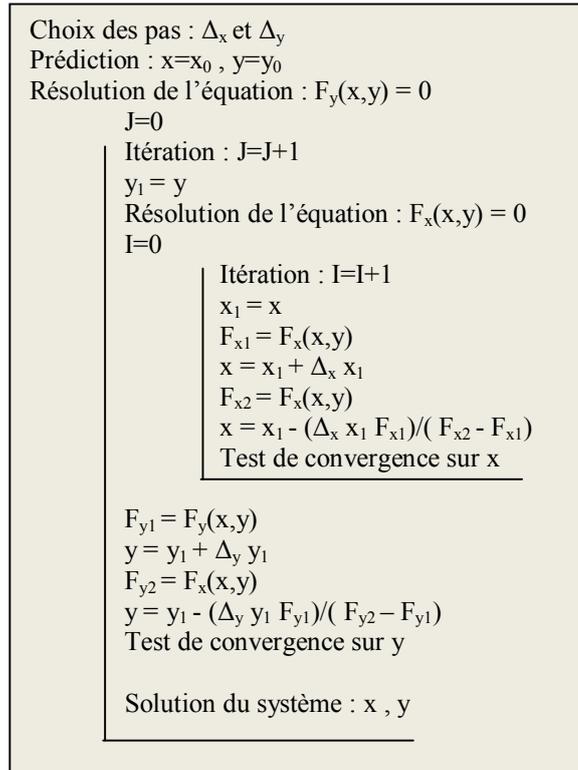


Figure 4-5 : Algorithme général de la méthode de Newton–Raphson à double itération

Pour ce faire, nous devons transformer encore une fois les équations (4-47) sous une forme polynômiale. Ainsi, une multiplication de chaque équation par le facteur « D » correspondant, suivie d'un changement de signe du second membre, et un réarrangement adéquat de tous les termes en fonction de la puissance des variables conduisent aux fonctions polynômiales suivantes :

$$\begin{aligned}
 F_{h_0}(h_0, h_1) = & a_2 h_0^5 + pa_1 h_0^4 + 2a_2 h_1 h_0^4 + pa_2 h_0^3 + a_2 h_1^2 h_0^3 + pa_3 h_0^2 \\
 & + pa_4 h_1^2 h_0^2 + pa_5 h_1^2 + pa_6 h_1 h_0^3 + pa_7 h_1^2 h_0 + pa_8 h_1 h_0^2 \\
 & + pa_9 h_1 h_0 + pa_{10} h_0 + pa_{11} h_1 + ca \equiv 0
 \end{aligned} \tag{4-48a}$$

$$\begin{aligned}
 F_{h_1}(h_0, h_1) = & b_1 h_1^3 + 2b_1 h_0 h_1^2 + b_1 h_1 h_0^2 + pb_3 h_1^2 + pb_4 h_0 + pb_5 h_0^2 \\
 & + pb_2 h_0 h_1 + pb_1 h_1 + cb \equiv 0
 \end{aligned} \tag{4-48b}$$

Les différents paramètres sont explicités dans la section 4-9. Notons que si les flèches à mi-portée respectives f_1 et f_2 relatives aux haubans d'ancrage ou des câbles de retenue sont négligeables comme dans le cas de la plupart des cas utilisés en pratique, l'équation (4-48a) peut se simplifier énormément et se mettre sous une forme polynomiale de 3^{ème} degré soit de la même forme que la deuxième équation (4-48b). C'est cette forme soit plus précisément avec $f_1 = f_2 = 0$, qui est traduite en langage d'ordinateur dont le programme s'intitule BPCVER.

4-6 Déformation des câbles

Considérons de nouveau la figure 4-1 où, si $\theta_0 \approx 0$, les coordonnées x, y d'un point quelconque du câble à l'état initial sont liées par la relation :

$$y = n \quad (4-49)$$

L'élément $ds = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx$ a pour expression, en négligeant dans le développement en série du radical, toute puissance de dn/dx au moins égale à la troisième :

$$ds = \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dn}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (4-50)$$

Par intégration, la longueur du câble L_c s'en déduit :

$$L_c = \ell + \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\frac{dn}{dx} \right)^2 dx \quad (4-51)$$

Soit ΔL_c la déformation que subit le câble entre l'état initial et l'état final et provenant de l'intégration des déformations élastiques et éventuellement des variations thermiques élémentaires. Par application de la formule précédente, il vient sous une flèche v (4-13) :

$$L_c + \Delta L_c = \ell + \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\frac{d(n+v)}{dx} \right)^2 dx \quad (4-52)$$

Par différence des relations (4-52) et (4-51), et en négligeant les termes du second ordre, on obtient :

$$\Delta L_c = \int_0^\ell \frac{dn}{dx} dv \quad (4-53)$$

Si dn/dx est continue, c'est-à-dire si la figure initiale du câble ne présente pas de points anguleux, l'intégration par partie donne, compte tenu de ce que v s'annule aux extrémités de l'intervalle $(0, \ell)$:

$$\Delta L_c = - \int_0^\ell \frac{d^2n}{dx^2} v dx \quad (4-54)$$

Une application de la relation précédente, intégrant les relations (4-2), (4-3), (4-13) et (4-43), fournit successivement pour chacun des câbles :

- Câble principal :

$$\Delta L_c = \frac{2}{3H} f_0 F(\psi_j, \varphi_i) + \frac{16f_0}{3H\ell} (-f_0 h_0 + f_1 h_1) \quad (4-55)$$

- Câble de rigidité :

$$\Delta L_c = - \frac{2}{3H} f_1 F(\psi_j, \varphi_i) + \frac{16f_1}{3H\ell} (f_0 h_0 - f_1 h_1) \quad (4-56)$$

4-7 Efforts dans les suspentes

Sous l'action d'une charge ponctuelle d'abscisse $\alpha \ell$ (fig.4-4a), le voile des suspentes supposé continu est soumis à deux sortes d'efforts i) une traction concentrée agissant dans la section d'abscisse $\alpha \ell$ et d'intensité T_s ii) une traction à répartition continue d'intensité σ par unité de longueur horizontale. Ces quantités se déduisent du moment fléchissant v_s déterminé dans la nappe des suspentes par l'introduction de la surcharge P sur la structure.

$$v_s = (H_0 + h_0)v + h_0 n_0 \quad (4-57)$$

et en tenant compte de (4-13) :

$$v_s = \left(\frac{H_0 + h_0}{H} \right) (\mu - h_0 n_0 - h_1 n_1) + h_0 n_0 \quad (4-58)$$

4-7-1 Traction concentrée

L'intensité T_s de la traction concentrée est égale à la discontinuité de l'effort tranchant dv_s/dx au droit de la section d'abscisse $\alpha \ell$. n_0 et n_1 étant des fonctions continues de x , on a simplement :

$$T_s = - \left(\frac{H_0 + h_0}{H} \right) \left[\left(\frac{d\mu}{dx} \right)_{\alpha+\varepsilon} - \left(\frac{d\mu}{dx} \right)_{\alpha-\varepsilon} \right] \quad (4-59)$$

soit :

$$T_s = \left(\frac{H_0 + h_0}{H} \right) P \quad (4-60)$$

4-7-2 Traction répartie

L'intensité de la traction répartie est :

$$\sigma = - \frac{d^2 v_s}{dx^2} \quad (4-61)$$

Soit, en remarquant que $d^2\mu/dx^2$ est identiquement nul pour une charge concentrée (μ est une fonction du premier ordre) :

$$\sigma = \frac{8}{H\ell^2} [h_0 f_0(H_1 + h_1) + h_1 f_1(H_0 + h_0)] \quad (4-62)$$

Cependant, même dans le cas de charges uniformes, le voile sera soumis généralement à des tractions réparties d'intensités variables ; en considérant la relation (4-61) et la figure 4-4b, on peut poser :

$$- \quad 0 < x < x_1 = \alpha_1 \ell$$

$$\sigma = \frac{\delta}{H\ell^2} [h_0 f_0(H_1 + h_1) + h_1 f_1(H_0 + h_0)] \quad (4-63)$$

$$- \quad x_1 = \alpha_1 \ell < x < x_2 = \alpha_2 \ell$$

$$\sigma = \frac{H_0 + h_0}{H} p + \frac{\delta}{H\ell^2} [h_0 f_0(H_1 + h_1) + h_1 f_1(H_0 + h_0)] \quad (4-64)$$

$$- \quad x_2 = \alpha_2 \ell < x < \ell$$

$$\sigma = \frac{\delta}{H\ell^2} [h_0 f_0(H_1 + h_1) + h_1 f_1(H_0 + h_0)] \quad (4-65)$$

Les relations (4-60) et (4-62) à (4-65) précisent quantitativement l'action du câble de rigidité en tant qu'organe répartiteur de charges. Cette action entraîne le travail simultané de toutes les suspentes de l'ouvrage, ce qui conduit en effet à en diminuer la section.

4-8 Efforts dans les câbles

La tangente en tout point de la figure d'équilibre du câble, après une flèche v , est par définition :

$$\tan \theta = \frac{d}{dx} (y + v) \quad (4-66)$$

En considérant l'équation de la flèche (4-13), cette dernière relation s'écrit :

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} + \frac{I}{H} \left[\frac{d\mu}{dx} + \frac{4}{\ell^2} (\ell - 2x)(f_1 h_1 - f_0 h_0) \right] \quad (4-67)$$

où θ est l'angle que fait un élément déformé du câble par rapport à l'horizontale.

L'expression de $d\mu/dx$ dépend du type de charge :

- cas d'une charge concentrée (fig. 4-4a) :

$$\frac{d\mu}{dx} = \begin{cases} P(1 - \alpha) & 0 < x < \alpha \ell \\ -P \alpha & \alpha \ell < x < \ell \end{cases} \quad (4-68)$$

- cas d'une charge uniforme (fig. 4-4b) :

$$\frac{d\mu}{dx} = \begin{cases} p\ell(\alpha_2 - \alpha_1)(1 - (\alpha_1 + \alpha_2)/2) & 0 < x < x_1 \\ p\ell(\alpha_2 - \alpha_1)(1 - (\alpha_1 + \alpha_2)/2) - p(x - \alpha \ell) & x_1 < x < x_2 \\ -p\ell(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2)/2 & x_2 < x < \ell \end{cases} \quad (4-69)$$

Alors, les efforts de tension dans les câbles en fonction de ces deux cas de charges, sont respectivement :

- **Câble porteur** : (fig.4-6a)

$$T_{c_0} = (H_0 + h_0) [1 + (\tan \theta)^2]^{1/2} \quad (4-70)$$

$$\tan \theta = -\frac{4f_0}{\ell^2} (\ell - 2x) + \frac{I}{H} \left[\frac{d\mu}{dx} + \frac{4}{\ell^2} (\ell - 2x)(f_1 h_1 - f_0 h_0) \right] \quad (4-71)$$

- **Câble de rigidité** : (fig.4-6b)

$$T_{c_1} = (H_1 + h_1) [1 + (\tan \theta)^2]^{1/2} \quad (4-72)$$

$$\tan \theta = -\frac{4f_1}{\ell^2}(\ell - 2x) + \frac{1}{H} \left[\frac{d\mu}{dx} + \frac{4}{\ell^2}(\ell - 2x)(f_1 h_1 - f_0 h_0) \right] \quad (4-73)$$

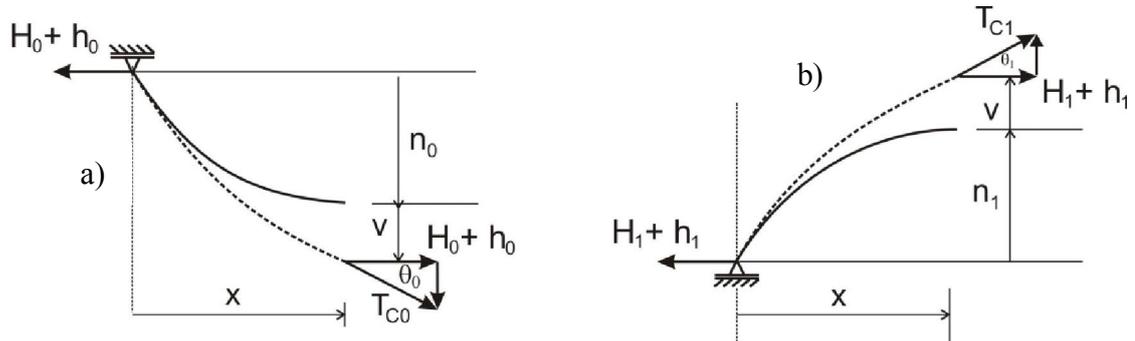


Figure 4-6 : Efforts dans les câbles

4-9 Coefficients associés à la transformation polynomiale des équations de poussées

La transformation en forme polynomiale du système d'équations (4-47) nécessite les écritures suivantes :

$$a_1 = H_0 + H_1 \quad ; \quad a_2 = \frac{\zeta_{s_0}}{E_c A_{c_0}} \quad ; \quad a_3 = \frac{16 f_0^2}{3\ell} \quad ; \quad a_4 = \frac{16}{3} \sum_{i=1}^2 \frac{f_i'^2}{\ell_i'} \quad ; \quad a_5 = \tau \zeta_{t_0}$$

$$a_6 = -b_4 = -\frac{16 f_0 f_1}{3\ell} \quad ; \quad a_7 = \frac{8}{3} \sum_{i=1}^2 \frac{f_i'^2}{\ell_i'} \quad ; \quad a_8 = b_6 = -\frac{8}{3\ell} \quad ; \quad a_9 = b_7 = \sum \frac{P_j}{3} \psi(\alpha_j)$$

$$a_{10} = b_5 = \sum \frac{2 p_i \ell}{3} [\varphi(\alpha_2^i) - \varphi(\alpha_1^i)] \quad ; \quad b_1 = \frac{\zeta_{s_1}}{E_c S_{c_1}} \quad ; \quad b_2 = -\frac{16 f_1^2}{3\ell} \quad ; \quad b_3 = \tau \zeta_{t_1}$$

$$ca_1 = -\frac{2}{3} \ell f_0 \sum p_i [\varphi(\alpha_2^i) - \varphi(\alpha_1^i)] - \frac{2}{3} f_0 \sum \frac{P_j \psi(\alpha_j)}{3}$$

$$ca_2 = cb_2 = -\frac{\ell^3}{6} \sum p_i^2 (\alpha_2^i - \alpha_1^i)^2 \left[(2\alpha_1^i + \alpha_2^i) - \frac{3}{4} (\alpha_1^i + \alpha_2^i)^2 \right] + f(p_i, p_j)^*$$

$$cb_1 = \frac{2}{3} f_1 \ell \sum p_i [\varphi(\alpha_2^i) - \varphi(\alpha_1^i)] + \frac{2}{3} f_1 \sum \frac{P_j \psi(\alpha_j)}{3}$$

L'indice * étant les termes dépendant du nombre des charges uniformes simultanées.

Si on substitue ces expressions dans les équations (4-47), après un réarrangement adéquat de tous les termes en fonction des puissances h_0 et h_1 , nous aboutissons aux fonctions polynomiales recherchées (4-48) ayant pour coefficients :

$$pa_1 = 2a_1a_2 + 2a_2H_0 + a_3 + a_4 + a_5 + a_7 + a_8f_0^2$$

$$pa_2 = a_2a_1^2 + H_0(4a_2a_1 + 2a_3 + a_4 + 2a_5 + 2a_8f_0^2) + a_2H_0^2 + a_3a_1 + 2a_4a_1 + ca_1 + 2a_1a_5 + a_{10}f_0 + P_jn_0 / 2 + a_9f_0 + 2a_7a_1$$

$$pa_3 = H_0(2a_2a_1^2 + 2a_4a_1 + 2ca_1 + 4a_1a_5 + 2a_{10}f_0 + P_jn_0 + 2a_9f_0) + H_0^2(2a_2a_1 + a_3 + a_5 + a_9f_0^2) + a_4a_1^2 + a_1ca_1$$

$$pa_4 = 2a_2H_0 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8f_1^2 ; pa_5 = H_0^2(a_5 + a_6 + a_8f_1^2)$$

$$pa_6 = 2a_2a_1 + 4H_0a_2 + a_3 + 2a_4 + 2a_5 + a_6 + 2a_8f_0f_1 + 2a_7$$

$$pa_7 = a_2H_0^2 + H_0(a_4 + 2a_5 + 2a_6 + 2a_8f_1^2)$$

$$pa_8 = H_0(4a_2a_1 + 2a_3 + 2a_4 + 4a_5 + 2a_6 + 2a_8f_0f_1) + 2a_2H_0^2 + 2a_4a_1 + ca_1 + 2a_1a_5 + a_6a_1 + a_{10}f_1 + \frac{P_jn_j}{2} + a_9f_1 + 2a_7a_1 + a_{10}f_1$$

$$pa_9 = H_0^2(2a_2a_1 + a_3 + 2a_5 + a_6 + 2a_8f_0f_1) + a_4a_1^2 + H_0(2a_4a_1 + 2ca_1 + 4a_1a_4 + 4a_1a_5 + 2a_6a_1 + 2a_{10}f_1 + P_jn_j + 2a_9f_1)$$

$$pa_{10} = H_0^2(a_2a_1^2 + a_3a_1 + ca_1 + 2a_1a_5 + a_{10}f_0 + \frac{P_jn_0^j}{2} + a_9f_0) + H_0(a_4a_1^2 + 2a_1ca_1 + 2a_5a_1^2 + 2a_1a_5 + 2ca_2 - P_jv_j + a_{10}f_1)$$

$$pa_{11} = H_0^2(ca_1 + 2a_1a_5 + a_6a_1 + a_9f_1 - \frac{P_jn_1^j}{2}) ; ca = H_0^2(a_1ca_1 + a_5a_1^2 + ca_2 - \frac{P_jv_j}{2})$$

$$pb_1 = b_1a_1^2 + b_2a_1 + cb_1 - b_5f_1 + 2b_3a_1 - b_7f_1 + \frac{P_jn_1^j}{2} ; pb_2 = 2a_1b_1 + b_2 + 2b_6f_0f_1 - 2b_3 + b_4$$

$$pb_3 = 2a_1b_1 + b_2 + b_6f_1^2 + b_3 ; pb_4 = b_5f_0 + b_7f_0 + cb_1 + 2b_3a_1 + a_1b_4 + \frac{P_jn_0^j}{2}$$

$$pb_5 = b_6f_0^2 + b_3 + b_4 ; cb = cb_2 + a_1cb_1 + b_3a_1^2 - \frac{P_jv_j}{2}$$

Deuxième partie: Analyse dynamique en régime vibratoire libre

Dans cette seconde partie, il est question de montrer comment aborder l'aspect dynamique en régime vibratoire libre d'un système vertical précontraint appliqué à l'exemple de la passerelle piétonnière sous charge statique présentée dans la première partie de ce chapitre. La démarche des calculs suit la même logique que dans la méthode exposée dans le chapitre précédent pour un système à treillis dont les câbles paraboliques et principalement biconvexes.

4-10 Formulation de l'équation élémentaire de mouvement

Découpons ainsi du système vertical précontraint de la figure 4-3, un élément infinitésimal de longueur dx initialement chargé sous l'action de son poids propre (w') et sous l'effet de la prétension du câble de rigidité (H_1) ; la notation adoptée étant inchangée par rapport à la démarche adoptée sous charges statiques. Proposons d'abord d'écrire la condition d'équilibre des forces verticales ($\sum f_{yi} = 0$) respective sous les trois situations de charge suivantes à savoir lors du réglage initial de l'ouvrage, sous les charges statiques (p) appliquées sur le tablier engendrant un déplacement vertical (v) et enfin en admettant une petite perturbation dynamique libre qui se traduit par un petit déplacement vertical (v^*) en tout point du système étudié.

4-10-1 Lors du réglage initial (fig.4-7)

La condition ($\sum f_{yi} = 0$) permet d'écrire :

$$\frac{d}{dx} \left((H_0) \frac{dn_0}{dx} \right) - \frac{d}{dx} \left((H_1) \frac{dn_1}{dx} \right) + w' = 0$$

Soit :

$$H_0 \frac{d^2 n_0}{dx^2} - H_1 \frac{d^2 n_1}{dx^2} + w' = 0 \quad (4-74)$$

Notons que le sens de la configuration parabolique du câble de rigidité (n_1) est considéré ici positif vers le haut (\uparrow) ; soit contrairement à la relation (4-3), son expression

ainsi devient : $n_1 = \frac{4f_1}{L^2}x(L-x)$ où nous pouvons vérifier que la relation (4-74) à l'aide des (4-2), (4-7) et (4-9) conduit bien à la relation (4-1).

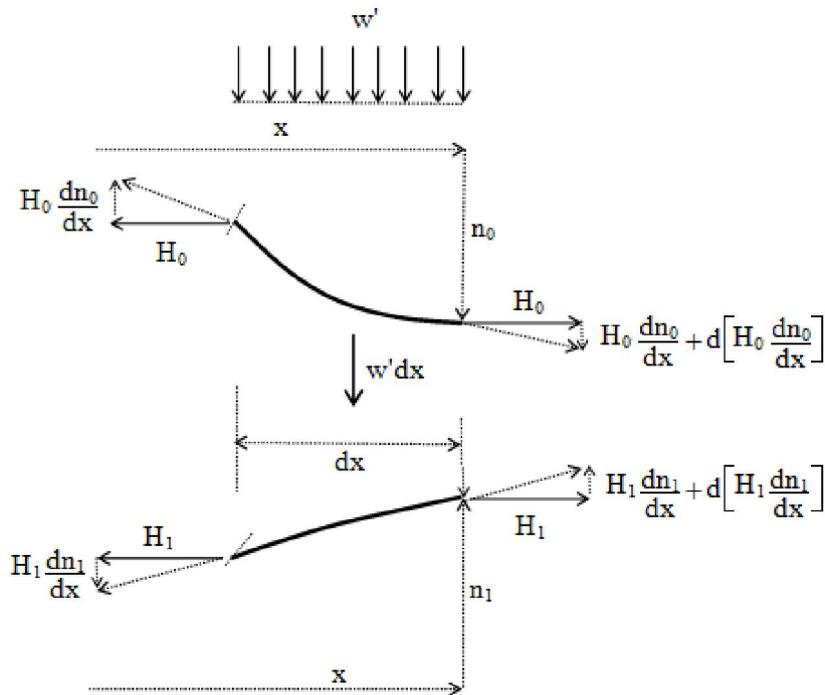


Figure 4-7 : Equilibre d'un élément lors du réglage initial de l'ouvrage

4-10-2 Sous l'action des surcharges d'intensité p (fig.4-8)

La condition ($\sum f_{yi} = 0$) permet d'écrire à son tour:

$$\frac{d}{dx} \left((H_0 + h_0) \frac{d(n_0 + v)}{dx} \right) - \frac{d}{dx} \left((H_1 - h_1) \frac{d(n_1 - v)}{dx} \right) + w' + p = 0$$

ce qui conduit à la relation suivante:

$$(H_0 + h_0) \frac{d^2(n_0 + v)}{dx^2} - (H_1 - h_1) \frac{d^2(n_1 - v)}{dx^2} + w' + p = 0$$

En développant cette dernière expression et en retranchant les conditions initiales i.e la condition (4-74), nous obtenons la relation suivante qui exprime la condition d'équilibre sous l'action des charges statiques (p):

$$(H_0 + h_0 + H_1 - h_1) \frac{d^2 v}{dx^2} + h_0 \frac{d^2 n_0}{dx^2} + h_1 \frac{d^2 n_1}{dx^2} = -p \quad (4-75)$$

Il est aussi possible de vérifier que cette relation est bien équivalente à l'équation de la déformée (4-13) en notant que $\mu'' = -p$ (dérivée seconde) puisque $\mu(x) = \frac{pLx}{2} - \frac{px^2}{2}$. Notons que par rapport à la notation adoptée dans cette section, l'équation (4-13) est ici de la forme :

$$v = \frac{\mu - h_0 n_0 - h_1 n_1}{H_0 + H_1 + h_0 - h_1}$$

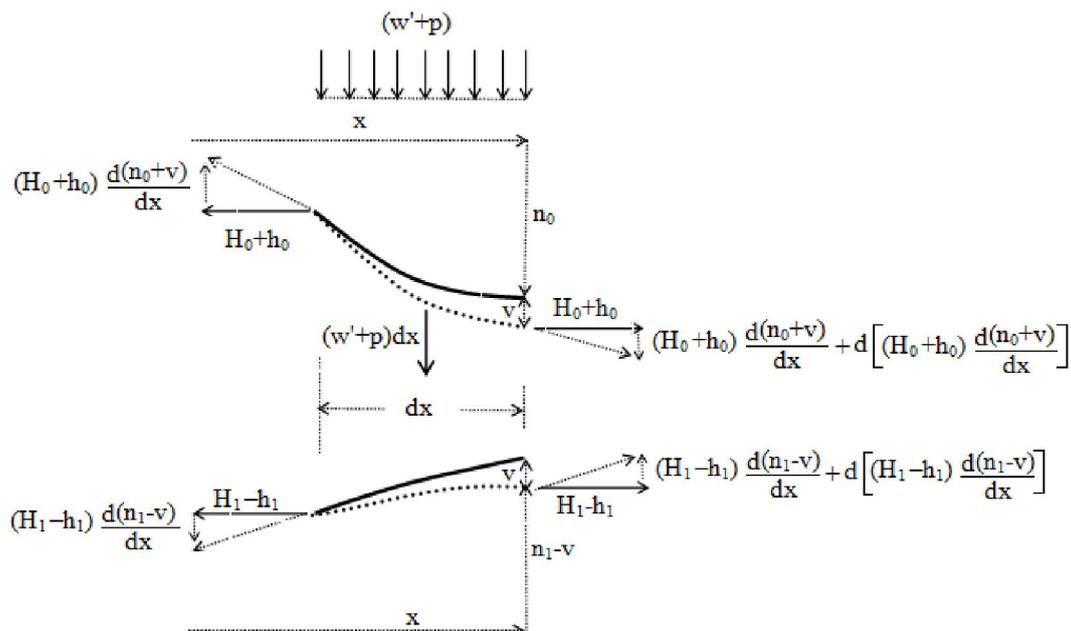


Figure 4-8 : Equilibre de l'élément en présence des surcharges (p)

4-10-3 Sous l'action d'une vibration libre (v_*)

Désignons par h_0^* et h_1^* les poussées additionnelles engendrées respectivement dans les câbles supérieur et inférieur dues à l'action du déplacement vertical (v_*), siège dans le système d'une perturbation dynamique en régime libre. Admettons en outre, dans un système vertical précontraint comme la passerelle piétonnière montrée dans la figure 4-3, que si les charges sont par exemple descendantes, le câble supérieur principal travaille en surtension ($h_0^* > 0$) et le câble inférieur de rigidité en détension ($h_1^* < 0$). Alors, le bilan des forces verticales ($\sum f_{yi} = 0$) ainsi indiquées sur la figure 4-9 permet d'écrire :

$$\frac{d}{dx} \left[(H_0 + h_0 + h_0^*) \frac{d(n_0 + v + v_*)}{dx} \right] - \frac{d}{dx} \left[(H_1 - h_1 - h_1^*) \frac{d(n_1 - v - v_*)}{dx} \right] + w' + p - m\ddot{v}_* = 0$$

où \ddot{v}_* , dérivée seconde de la fonction de déplacement v_* , étant l'accélération correspondante liée à la force d'inertie ($m\ddot{v}_*$) et m est la masse de l'élément. Cette dernière équation conduit à :

$$(H_0 + h_0 + h_0^*) \frac{d^2(n_0 + v + v_*)}{dx^2} - (H_1 - h_1 - h_1^*) \frac{d^2(n_1 - v - v_*)}{dx^2} + w' + p - m\ddot{v}_* = 0$$

qui après développement de chaque terme et en tenant compte des relations (4-74) et (4-75) liées respectivement au réglage initial et aux surcharges (statiques), nous obtenons l'équation générale de mouvement recherchée qui caractérise le comportement dynamique en régime libre d'un élément d'un système vertical précontraint. Cette équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$H^* \frac{d^2 v_*}{dx^2} + h_0^* \frac{d^2 n_0}{dx^2} + h_1^* \frac{d^2 n_1}{dx^2} + (h_0^* - h_1^*) \frac{d^2 v}{dx^2} - m\ddot{v}_* = 0 \quad (4-76)$$

où $H^* = H_0 + H_1 + h_0 - h_1 + h_0^* - h_1^*$

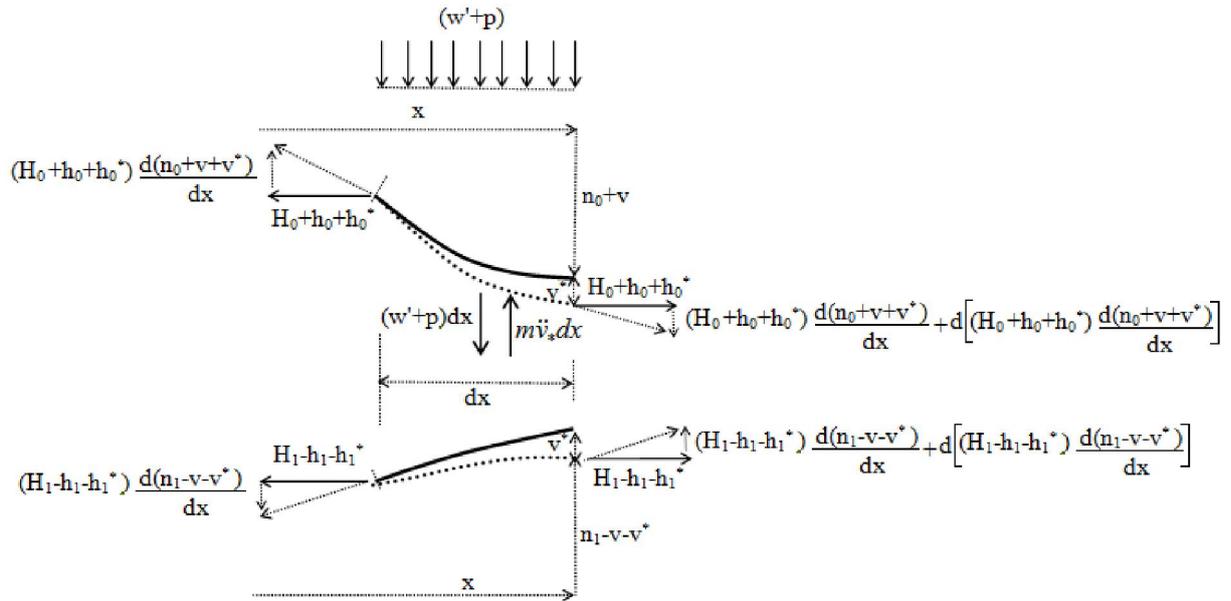


Figure 4-9 : Equation générale de mouvement en vibration libre

NB : Particulièrement, si le système vertical précontraint est géométriquement symétrique par rapport à l'axe des x (i.e situé à mi-distance entre les câbles supérieur et inférieur), et en posant : $h_0 = h_1 = h$; $h_0^* = h_1^* = h^*$ et $n_0 = n_1 = n$, alors l'équation de mouvement (4-76) se réduit à :

$$(H_0 + H_1) \frac{d^2 v_*}{dx^2} + 2h^* \frac{d^2 n}{dx^2} - m\ddot{v}_* = 0 \quad (4-77)$$

Cette équation est essentiellement linéaire et indépendante de l'état de déformation sous charges statiques.

4-11 Equations générales des poussées des câbles sous forme linéarisée

L'équation linéarisée des déplacements orthogonaux pour chacun des câbles, en présence de l'effet dynamique, permet d'écrire respectivement :

4-11-1 Cas du câble de rigidité

$$\frac{(h_l - h_l^*) L_{el}}{E_{cl} A_{cl}} = \int_0^l \frac{dn_l}{dx} \frac{d(v - v_*)}{dx} dx \quad (4-78)$$

soit avec $\frac{h_1 L_{e1}}{E_{c1} A_{c1}} = \int_0^\ell \frac{dn_1}{dx} \frac{dv}{dx} dx$, condition qui exprime l'état du câble sous charges statiques,

nous aurons :

$$\frac{h_1^* L_{e1}}{E_{c1} A_{c1}} = \int_0^\ell \frac{dn_1}{dx} \frac{dv_*}{dx} dx \quad (4-79a)$$

où par intégration par parties :

$$\frac{h_1^* L_{e1}}{E_{c1} A_{c1}} = - \int_0^\ell \frac{d^2 n_1}{dx^2} v_* dx \quad (4-79b)$$

où E_{c1} et A_{c1} sont respectivement le module d'élasticité et la section du câble de rigidité.

4-11-2 Cas du câble porteur

$$\frac{(h_0 + h_0^*) L_{e0}}{E_{c0} A_{c0}} = \int_0^\ell \frac{dn_0}{dx} \frac{d(v + v_*)}{dx} dx \quad (4-80)$$

soit avec $\frac{h_0 L_{e0}}{E_{c0} A_{c0}} = \int_0^\ell \frac{dn_0}{dx} \frac{dv}{dx} dx$, condition qui exprime l'état du câble sous charges statiques,

nous aurons :

$$\frac{h_0^* L_{e0}}{E_{c0} A_{c0}} = \int_0^\ell \frac{dn_0}{dx} \frac{dv_*}{dx} dx \quad (4-81a)$$

ou par intégration par parties :

$$\frac{h_0^* L_{e0}}{E_{c0} A_{c0}} = - \int_0^\ell \frac{d^2 n_0}{dx^2} v_* dx \quad (4-81b)$$

où E_{c0} et A_{c0} sont respectivement le module d'élasticité et la section du câble porteur.

Remarque: dans le cas particulièrement d'un système vertical précontraint symétrique, avec $h_0^* = h_1^* = h^*$; $h^* > 0$; $n_0 = n_1 = n$; $E_{c0} = E_{c1} = E_c$; $A_{c0} = A_{c1} = A_c$; $L_{e1} = L_{e0} = L_e$ (les haubans étant négligés), les relations (4-79) et (4-81) se réduisent à une seule équation :

$$\frac{h^* L_e}{E_c A_c} = \int_0^\ell \frac{dn}{dx} \frac{dv_*}{dx} dx \quad (4-82a)$$

où par intégration par parties :

$$\frac{h^* L_e}{E_c A_c} = - \int_0^\ell \frac{d^2 n}{dx^2} v_* dx \quad (4-82b)$$

4-12 Réponse dynamique en régime vibratoire libre

Afin de résoudre l'équation générale de mouvement (eq.4-76), quoique complexe, nous posons $v_*(x,t) = \tilde{v}_*(x) e^{i\omega t}$, $h_0^*(t) = \tilde{h}_0 e^{i\omega t}$, $h_1^*(t) = \tilde{h}_1 e^{i\omega t}$ où ω étant la fréquence circulaire de vibration. L'équation s'écrit alors :

$$\left[(H_0 + H_1 + h_0 - h_1) + (\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1) e^{i\omega t} \right] \frac{d^2 \tilde{v}_*}{dx^2} + \tilde{h}_0 \frac{d^2 n_0}{dx^2} + \tilde{h}_1 \frac{d^2 n_1}{dx^2} + (\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1) \frac{d^2 v}{dx^2} + m \omega^2 \tilde{v}_* = 0$$

Sachant qu'à partir des équations paraboliques des câbles : $\frac{d^2 n_0}{dx^2} = -\frac{8f_0}{\ell^2}$ et

$\frac{d^2 n_1}{dx^2} = -\frac{8f_1}{\ell^2}$, l'équation différentielle de mouvement s'écrit sous la forme suivante :

$$\left[(H_0 + H_1 + h_0 - h_1) + (\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1) e^{i\omega t} \right] \frac{d^2 \tilde{v}_*}{dx^2} + m \omega^2 \tilde{v}_* = \frac{8}{\ell^2} (\tilde{h}_0 f_0 + \tilde{h}_1 f_1) - (\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1) \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (4-83)$$

Dans ce cas, l'équation de mouvement est non homogène est clairement dépendante de l'état de déformation sous le chargement statique. La complexité vient du fait non seulement de la présence du second membre mais également de la racine complexe. Afin de simplifier sa résolution, nous suggérons d'abord, que la surcharge (p) soit appliquée simultanément avec le

poids propre de la structure ou en d'autres termes nous postulons que l'effet de la surcharge soit pris en considération par exemple lors du réglage initial. De ce fait, les poussées h_0 et h_1 sont incluses dans les valeurs de H_0 et de H_1 respectivement ; ce qui est de même pour la déformée (v) qui par hypothèse incluse dans les configurations initiales des câbles à savoir n_0 et n_1 . Par suite, l'équation (4-88) se réduit à :

$$\left[(H_0 + H_1) + (\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1) e^{i\omega t} \right] \frac{d^2 \tilde{v}_*}{dx^2} + m\omega^2 \tilde{v}_* = \frac{8}{\ell^2} (\tilde{h}_0 f_0 + \tilde{h}_1 f_1) \quad (4-84)$$

Les équations linéarisées des câbles (4.79b) et (4-81b) deviennent à leur tour :

$$\frac{\tilde{h}_1 L_{e1}}{E_{c1} A_{c1}} = \frac{8 f_1}{\ell^2} \int_0^\ell \tilde{v}_* dx \quad (4-85a)$$

$$\frac{\tilde{h}_0 L_{e0}}{E_{c0} A_{c0}} = \frac{8 f_0}{\ell^2} \int_0^\ell \tilde{v}_* dx \quad (4-85b)$$

Comme dans le cas du câble parabolique ou dans un système à treillis convexe, nous allons également considérer deux cas possibles de vibration à savoir i) un mode antisymétrique où il faut prendre $h_0^* = h_1^* = 0$ ii) un mode symétrique où dans ce cas h_0^* et h_1^* sont différents et non nuls.

4-12-1 Modes de vibration antisymétriques

Vu qu'au premier ordre, les poussées additionnelles h_0^* et h_1^* engendrées dans les câbles par l'action de la vibration dynamique sont par hypothèse nulles, alors l'équation de mouvement (4-84) devient:

$$(H_0 + H_1) \frac{d^2 \tilde{v}_*}{dx^2} + m\omega^2 \tilde{v}_* = 0 \quad (4-86)$$

Les conditions aux limites à satisfaire pour chaque mode antisymétrique sont:

$\tilde{v}(x=0) = \tilde{v}(x=\frac{\ell}{2}) = 0$. Les fréquences naturelles des modes de vibration sont données

par :

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{(H_0 + H_1)}{m}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4-87)$$

Les valeurs $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ représentent respectivement les fréquences naturelles de la première, deuxième, troisième, etc. des modes antisymétriques plans. Pour les modes antisymétriques, l'analogie étant évidente avec le cas d'un câble parabolique seul ou d'un système à treillis convexe :

$$\tilde{v}_*(x) = A_n \sin \frac{2n\pi}{\ell} x \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4-88)$$

4-12-2 Modes de vibration symétriques

Quand le système à treillis oscille dans un mode vertical symétrique, des raccourcissements et des allongements se produisent dans les câbles qui donnent lieu à des valeurs de poussées h_0^* et h_1^* différentes. Dans ce cas, il faut songer à résoudre complètement l'équation non homogène (4-84).

On peut facilement vérifier que l'expression suivante est bien la solution du problème puisque elle satisfait conjointement les conditions aux limites $\tilde{v}_*(0) = \tilde{v}_*(\ell) = 0$ et l'équation différentielle de mouvement (4-84) :

$$\tilde{v}_*(x) = \frac{\delta}{(\beta\ell)^2} \frac{(\tilde{h}_0 f_0 + \tilde{h}_1 f_1)}{(H_0 + H_1) + (\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1) e^{i\omega t}} \left[1 - \tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \sin \beta x - \cos \beta x \right] \quad (4-89)$$

avec:

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{m}{(H_0 + H_1) + (\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1) e^{i\omega t}}} \quad (4-90)$$

Par ailleurs, d'après l'équation (4-85b), nous avons pour le câble supérieur:

$$\tilde{h}_0 = \frac{8E_{c0} A_{c0} f_0}{L_{e0} \ell^2} \int_0^\ell \tilde{v}_* dx \quad (4-91)$$

D'autre part, le développement du terme $\int_0^\ell \tilde{v}_*(x) dx$ nous permet d'écrire :

$$\int_0^\ell \tilde{v}_*(x) dx = \frac{8}{(\beta\ell)^2} \frac{\ell(\tilde{h}_0 f_0 + \tilde{h}_1 f_1)}{(H_0 + H_1) + (\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1) e^{i\omega t}} \left[1 - \frac{2}{\beta\ell} \tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \right] \quad (4-92)$$

Exprimons maintenant la relation entre les tensions additionnelles \tilde{h}_0 et \tilde{h}_1 en considérant l'égalité entre les relations linéarisées des câbles (4-85) en éliminant le terme $\int_0^\ell \tilde{v}_*(x) dx$; cela nous conduit à:

$$\tilde{h}_1 = \tilde{h}_0 \frac{L_{e0} E_{c1} A_{c1} f_1}{L_{e1} E_{c0} A_{c0} f_0} = C_1 \tilde{h}_0 \quad (4-93)$$

où $C_1 = \frac{L_{e0} E_{c1} A_{c1} f_1}{L_{e1} E_{c0} A_{c0} f_0}$ est une constante qui dépend des caractéristiques géométriques et mécaniques des câbles.

Substituons maintenant dans la relation (4-91), l'expression (4-92) en tenant compte de la relation (4-93) nous pouvons obtenir l'équation transcendante recherchée, caractéristique des modes de vibration symétriques, que nous écrivons comme précédemment sous la forme :

$$\tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) = \frac{\beta\ell}{2} - \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\beta\ell}{2}\right)^3 \quad (4-94)$$

où

$$\lambda^2 = \frac{64(f_0^2 + C_1 f_0 f_1)}{\left[H_0 + H_1 + \tilde{h}_0 e^{i\omega t} - \tilde{h}_0 C_1 e^{i\omega t} \right] \frac{L_{e0} \ell}{E_0 S_{c0}}} \quad (4-95)$$

Notons que le terme qui contient la racine complexe n'est ici d'aucune signification physique puisque les solutions recherchées (qui sont les pulsations ou les fréquences propres) sont indépendantes du temps. Par suite, la relation (4-95) se réduit à :

$$\lambda^2 = \frac{64(f_0^2 + C_1 f_0 f_1)}{[H_0 + H_1] \frac{L_{e0} \ell}{E_0 S_{c0}}} \quad (4-96)$$

Par suite, l'équation transcendante (4-94) devient linéaire et peut être résolue numériquement (en appliquant l'algorithme de Newton Raphson de la figure 4-5) afin de trouver la valeur de β et ensuite déduire la pulsation propre (ω) correspondante via la relation (4-90) en omettant le terme contenant la racine complexe ; soit :

$$\omega = \beta \sqrt{\frac{H_0 + H_1}{m}} \quad (4-97)$$

Ayant déterminé ainsi les pulsations ou les fréquences propres, il est possible alors de déduire les poussées correspondantes dans les câbles (\tilde{h}_0, \tilde{h}_1) en considérant les relations (4-91), (4-92) et (4-93).

CHAPITRE 5

EXPERIMENTATIONS NUMERIQUES, VALIDATIONS ET ANALYSES

5-1 Généralités

Dans le cadre de ce chapitre, nous allons illustrer la méthode de calcul ainsi établie par des applications numériques portant sur l'analyse d'un ouvrage type de pont suspendu léger et sans poutre de rigidité soumis à l'action de charges verticales appliquées suivi d'une variation de température éventuelle. Les résultats nous serviront principalement d'étalon de référence théorique et seront comparés à ceux obtenus par le code ANSYS [44].

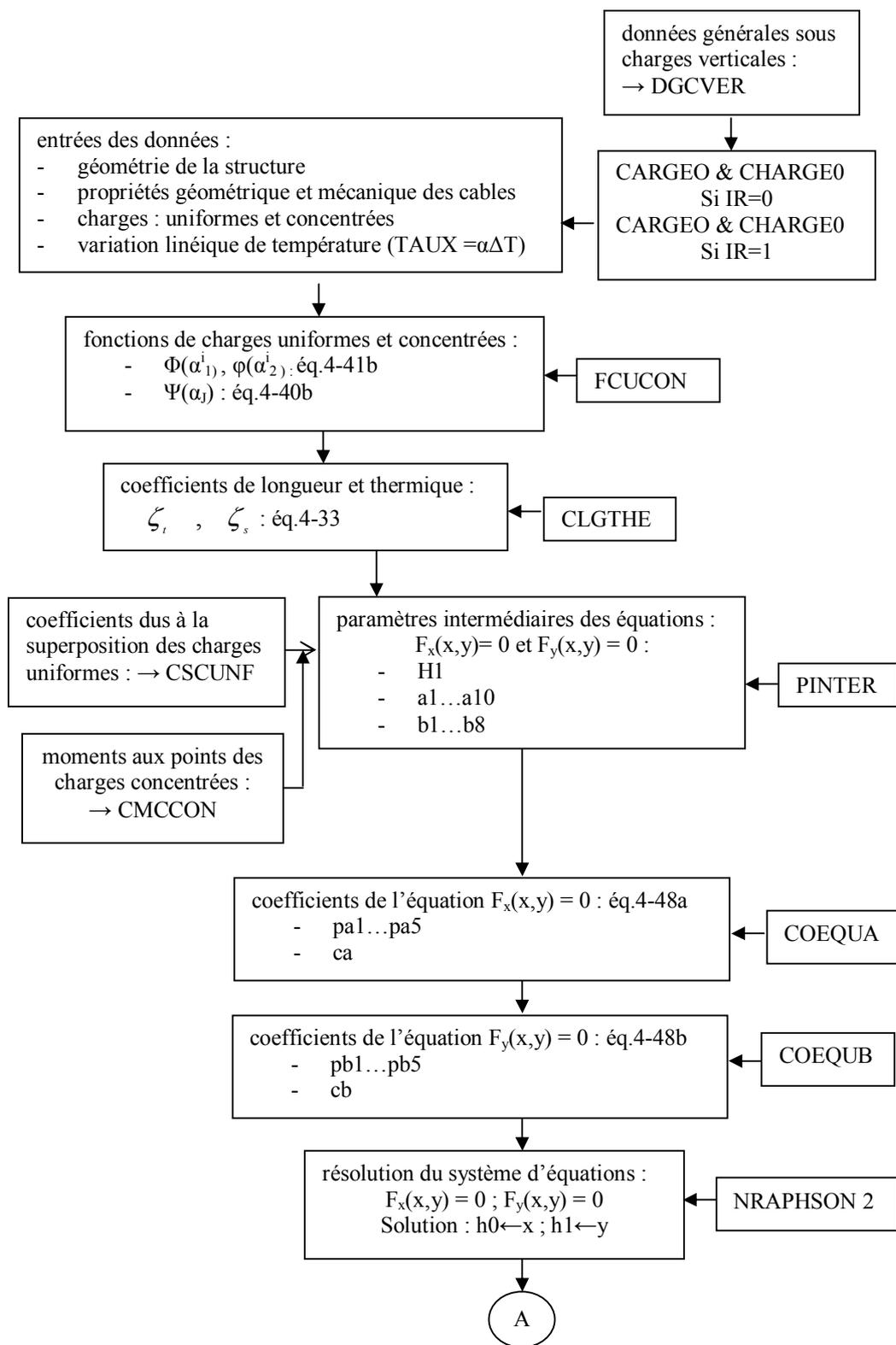
Suivra ensuite une étude paramétrique dans le but de mettre en relief l'influence des principaux paramètres comme la cambrure, la pré-tension du câble de rigidité, l'intensité des charges appliquées et les variations de température.

Nous présenterons également les résultats obtenus pour l'analyse vibratoire en régime libre, où nous avons affiché les dix premières fréquences propres de la structure comparées avec celles obtenues par le code ANSYS.

Cependant, nous allons d'abord donner l'organigramme général du programme de la méthode de calcul.

5-2 Organigramme général du programme de calcul BPCVER et les principales fonctions associées

Le programme s'intitule BPCVER (**B**loc **P**incipal de l'analyse sous **C**harges **V**ERTicales), écrit en langage d'ordinateur APL et facilement exploitable sur micro-ordinateurs. L'organigramme général du programme de calcul et les principales fonctions associées sont récapitulés dans la figure suivante.



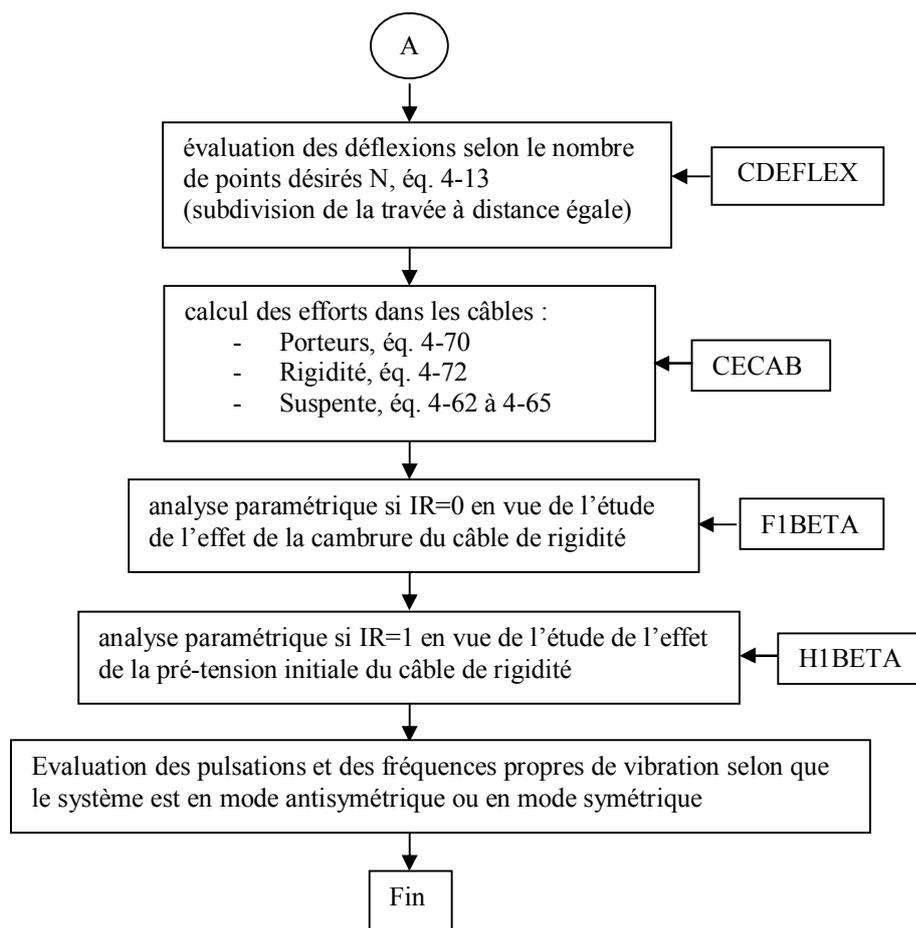


Figure 5-1 : Organigramme de la méthode de calcul

5-3 Expérimentations numériques, validation et discussion des résultats

Afin de jauger la fiabilité et la précision de la méthode de calcul établie, nous proposons d'analyser un exemple d'une structure suspendue dont les résultats nous serviront principalement d'étalon de référence théorique. L'exemple porte sur une passerelle piétonnière rigidifiée par câble cambré dont les vues en élévation et en profil sont montrées respectivement sur les figures 5-2 et 5-3. La géométrie et les propriétés mécaniques des différents éléments utilisés de la structure sont empruntées de la passerelle réalisée actuellement à Charny, surplombant la rivière chaudière, dans le parc d'attraction des chutes-de-la chaudière situé dans la municipalité de Lévy près de la ville de Québec. Il s'agit de calculer la structure et de comparer les résultats ainsi obtenus avec ceux affichés par le code ANSYS [44] sous l'une ou conjointement des deux situations de sollicitations respectives:

- a) En l'absence de variation de température où seront envisagés deux types de charges verticales distinctes à savoir une charge d'intensité $p=4\text{kN/m}$ répartie uniformément sur toute la travée et une charge concentrée d'intensité $P=15\text{kN}$, appliquée au centre de la travée ; cette dernière étant un cas particulier limite de la charge répartie qui consiste en une suite de petites charges concentrées distribuées le long de la travée.
- b) En considérant une variation de température ΔT de valeur égale à 20°C appliquée à la fois avec la surcharge complète p d'intensité 4kN/m .

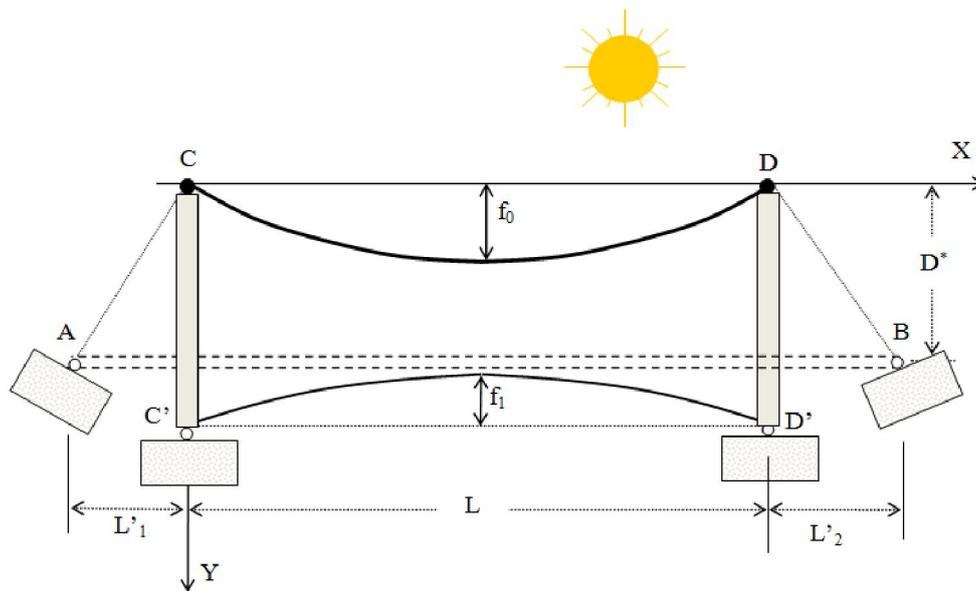


Figure 5-2 : Vue en élévation de la structure suspendue

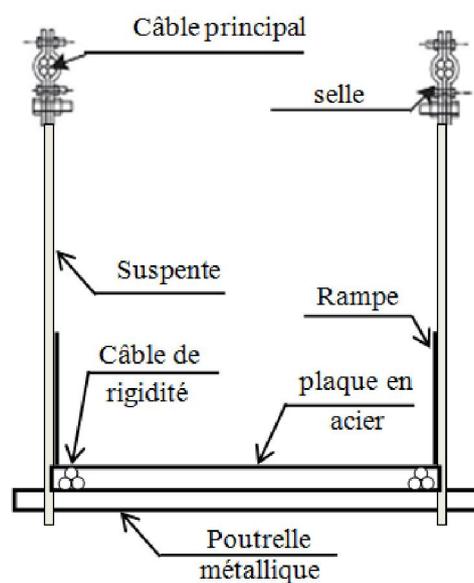


Figure 5-3 : Vue en profil de la structure suspendue

5-3-1 Description de la structure

Les dispositions générales adoptées pour assurer le support de ces surcharges sont décrites ci-après. Elles ont été choisies de façon à correspondre à un système représentatif d'une structure légère de ce type (dimensions générales, sections des éléments utilisés).

- Travée : la travée unique franchie est de $L=80\text{m}$ centre à centre des pylônes ; chaque hauban de rive s'étend sur $L'=18\text{m}$ en projection horizontale.
- Câbles porteurs : chacune des deux nappes de suspentes est portée par un câble toronné de 50 mm, ($S_0=0.196 \times 10^{-2} \text{ m}^2$), en fils d'acier étiré à haute résistance. Chaque câble est réglé sur une forme parabolique dans un plan vertical, passe aux sommets des pylônes auxquels il aboutit, et est finalement prolongé sur les rives comme hauban dont la section transversale est identique à celle des câbles porteurs ($S'_0=0.196 \times 10^{-2} \text{ m}^2$).
- Suspension : chaque nappe des suspentes verticales est constituée par des ronds de 10 mm, ($S=0.079 \times 10^{-3} \text{ m}^2$), écartés de 2m d'axe en axe ; la tension moyenne initiale dans une suspenste vaut $T_s=\omega_s \times 2\text{m}=\omega_1 \times 2\text{m}=4.80\text{kN}$.
- Tablier : le tablier est supposé composé de poutrelles métalliques simples reposant sur les platines des suspentes, entretoisées par des pièces légères.
- Câbles de rigidité : d'un diamètre de 40 mm, ($S_1=0.126 \times 10^{-2} \text{ m}^2$), ils sont au nombre de deux et disposés de chaque côté de l'ouvrage, à l'aplomb de la suspension à laquelle ils sont liés. Les extrémités de chacun d'eux sont ancrées aux pieds des pylônes, dans les massifs de fondation de ces derniers, à une distance verticale $D^*=12.6\text{m}$ du sommet des pylônes ($D^*=f_0 + f_1 + \text{cte}$). La traction de précontrainte H_1 s'élève à 600kN, compte tenu de la géométrie retenue et du poids propre de l'ouvrage ainsi sommairement décrit, qui s'élève à environ 1000N par mètre horizontal. Chaque câble parabolique supportera alors 500N/m avant l'introduction de toute surcharge. Sous l'effet de cette charge permanente et au réglage initial, le câble porteur réalise une flèche f_0 de 6.4m, le câble de rigidité une contre-flèche f_1 de 3.2m. Toutefois, à cause de la faible charge due à leur poids propre, les haubans présentent une flèche minimale et sont supposés quasi rectilignes ($f_1'=0$).

Les différents éléments de l'ouvrage sont supposés, en outre, fait d'un matériau ayant un coefficient de dilatation thermique constant égale à 1.9×10^{-5} mm/(mm.°C) et l'ensemble des autres caractéristiques géométriques et mécaniques sont récapitulées dans le tableau 5-1.

Tableau 5-1 : Données géométriques et mécaniques du système type étudié

L (m)	L _i ' (m)	S ₀ , S' _i (m ²)	S ₁ (m ²)	S (m ²)	f ₁ (m)	f ₀ (m)	f ₁ ' (m)	D* (m)
80	18	0.196E-2	0.126E-2	0.79E-4	3.2	6.4	0	12.6

E _c (kN/m ²)	ω' (kN/m)	T _s (kN)	H ₁ (kN)	H ₀ (kN)	p (kN/m)	ΔT (°C)	α _t (mm/mm.°C)
150x10 ⁶	0.5	4.80	600	362.5	4	20	1.9x10 ⁻⁵

5-3-2 Résultats numériques, validation et discussions

Pour chacune des situations de charges envisagées, nous présentons aux tableaux 5-2 et 5-3, les résultats obtenus pour les flèches (v), les efforts engendrés dans les câbles (T_{c0} et T_{c1}) et dans les suspentes (T_s) équidistantes, chacune de celle-ci portant l'effort réparti sur 2m de nappe.

Nous profitons, cependant, de la symétrie de la structure pour n'en représenter que la moitié des points de suspension équidistants où sont calculés les efforts dans les suspentes T_s. Les tensions T_{c0} et T_{c1} sont également calculées aux nœuds de suspension ; le rapport flèche/travée f₀/L = 1/12.5 étant inférieur à 1/10, valeur limite au-delà de laquelle la forme initiale des câbles n'est pas réellement assimilable à une configuration parabolique de 2^{ème} degré qui est l'une des hypothèses principales de la méthode de calcul énumérées à la section 4-1.

Tableau 5-2 : Résultats obtenus sous charges uniforme et concentrée

a) Uniforme complète

Abscisse (m)	v (mm)	Tc ₁ (kN)	Tc ₀ (kN)	T _s (kN)
0	0.00	423.1	741.4	-
4	74.67	421.9	734.1	10.92
8	141.47	420.7	727.5	10.92
12	200.42	419.7	721.6	10.92
16	251.51	418.9	716.5	10.92
20	294.73	418.1	712.1	10.92
24	330.10	417.5	708.5	10.92
28	357.61	417.1	705.7	10.92
32	377.26	416.7	703.7	10.92
36	389.05	416.5	702.5	10.92
40	392.98	416.5	702.1	10.92

b) Concentrée locale

Abscisse (m)	v (mm)	Tc ₁ (kN)	Tc ₀ (kN)	T _s (kN)
0	0.00	594.8	406.2	-
4	-7.77	593.5	402.7	4.998
8	-11.48	592.3	399.6	4.998
12	-11.13	591.2	396.8	4.998
16	-6.72	590.3	394.3	4.998
20	1.74	589.5	392.2	4.998
24	14.26	588.9	390.5	4.998
28	30.84	588.3	389.1	4.998
32	51.47	587.9	388.1	4.998
36	76.16	587.7	387.4	4.998
40	104.92	587.5	387.2	10.965

Tableau 5-3 : Résultats obtenus sous la charge uniforme complète appliquée conjointement avec la variation de température

Abscisse (m)	v (m)	Tc ₁ (kN)	Tc ₀ (kN)	T _s (kN)
0	0.000	324.5	690.7	-
4	0.086	323.5	683.7	10.2
8	0.163	322.7	677.5	10.2
12	0.231	321.9	671.9	10.2
16	0.290	321.2	667.0	10.2
20	0.339	320.6	662.9	10.2
24	0.380	320.1	659.5	10.2
28	0.412	319.7	656.8	10.2
32	0.434	319.5	654.9	10.2
36	0.448	319.3	653.8	10.2
40	0.452	319.3	653.4	10.2

Nous remarquons en premier lieu, notamment sous la charge concentrée, l'importance de la valeur de la traction répartie dans l'ensemble de la suspension vis-à-vis de la traction concentrée localisée (pointe) qu'à première vue on est porté à considérer comme critique ; ces résultats mettent en relief le rôle répartiteur du câble de rigidité et de la structure en général.

En deuxième lieu, nous remarquons que l'augmentation de la variation de température se manifeste par l'accroissement des flèches et la détension des différents éléments structuraux de l'ouvrage. A titre d'exemple, à mi-travée, nous enregistrons pour la flèche, une

augmentation de l'ordre de 15%. Les efforts dans les câbles porteurs et de rigidité diminuent respectivement de 6.9 % et de 23.3%. En ce qui concerne les suspentes supposées écartées entre-elles d'une manière équidistante ($\omega_s = \omega_1 = 2.4 \text{ kN/m}$; $S = 0.79 \times 10^{-4} \text{ m}^2$; $T_s = \omega_1 \cdot e_s = 4.8 \text{ kN}$), la tension moyenne dans une suspente passe de 10.9 kN à 10.2 kN qui correspond à une diminution de l'ordre de 6.4%.

Aux tableaux 5-4, 5-5 et 5-6 et sur les figures 5-4, 5-5 et 5-6, nous illustrons les résultats obtenus par le code ANSYS comparés à ceux des tableaux 5-2 et 5-3 dont le maillage utilisé est représenté sur la figure 5-7. Nous présentons respectivement à une abscisse (x) donnée et selon le cas de la sollicitation appliquée, les déplacements verticaux (v_1, v_0), les efforts dans les câbles (T_{C0}, T_{C1}) et dans les suspentes (T_s). Signalons que l'erreur relative (e), exprimée en pourcentage, est calculée en prenant comme référence la solution dérivée par la méthode analytique en se rappelant qu'alors $v_1 = v_0$ par hypothèse. Une valeur négative de l'erreur signifie donc que la valeur calculée pour le modèle discrétisé par éléments finis (ANSYS) est inférieure à celle à laquelle on la compare.

Nous remarquons une très bonne concordance des résultats dont l'erreur n'excède guère 1% , sauf pour les flèches, comme on pouvait s'y attendre, près des appuis où la longueur de la suspente est maximale ; l'erreur étant de 6.3%. L'hypothèse d'inextensibilité par conséquent n'engendre une erreur sensible que dans les zones extrêmes de la travée où se trouvent les suspentes les plus longues, donc les plus extensibles [45].

Tableau 5-4 : Comparaison des résultats obtenus avec le code ANSYS : surcharge uniforme complète seule ($p = 4 \text{ kN/m}$)

x (m)	v_1 (mm)	$e(v, v_1)$ %	v_0 (mm)	$e(v_0, v_1)$ %	T_{C1} (kN)	e %	T_{c0} (kN)	e %	T_s (kN)	e %
0	0.00	-	0.00	-	418.01	1.21	736.24	0.70	-	-
4	77.63	-3.97	72.11	7.11	417.40	1.06	729.53	0.62	10.81	1.03
8	143.06	-1.12	138.31	3.32	416.72	0.96	723.08	0.61	10.94	-0.13
12	201.41	-0.50	197.43	1.98	416.17	0.85	717.31	0.60	10.93	-0.07
16	252.57	-0.42	249.26	1.31	415.72	0.75	712.28	0.59	10.92	0.00
20	296.31	-0.54	293.58	0.92	415.40	0.66	707.99	0.58	10.92	0.07
24	332.47	-0.72	330.20	0.68	415.17	0.57	704.46	0.57	10.91	0.12
28	360.84	-0.90	358.92	0.53	415.04	0.49	701.71	0.56	10.90	0.17
32	381.28	-1.06	379.56	0.45	414.96	0.42	699.78	0.55	10.90	0.21
36	393.60	-1.17	392.02	0.40	414.93	0.38	698.70	0.53	10.90	0.24
40	397.72	-1.21	396.18	0.39	414.93	0.37	698.48	0.51	10.90	0.25

Tableau 5-5 : Comparaison des résultats obtenus avec le code ANSYS :
 Sous la charge concentrée P=15kN

x (m)	v ₁ (mm)	e(v,v ₁) %	v ₀ (mm)	e(v ₀ ,v ₁) %	T _{C1} (kN)	e %	T _{c0} (kN)	e %	T _s (kN)	e %
0	0.00	-	0.00	-	593.41	0.23	404.35	0.46	-	-
4	-7.28	6.31	-7.44	-2.28	592.01	0.25	401.15	0.39	4.93	1.43
8	-10.90	5.05	-11.04	-1.31	590.69	0.27	398.11	0.37	4.98	0.32
12	-10.63	4.49	-10.75	-1.14	589.54	0.28	395.41	0.35	4.99	0.26
16	-6.38	5.06	-6.48	-1.58	588.55	0.30	393.07	0.31	4.99	0.22
20	1.83	-5.17	1.80	-1.67	587.73	0.30	391.06	0.29	4.99	0.19
24	14.21	0.35	14.14	0.51	587.06	0.31	389.42	0.28	4.99	0.16
28	30.65	0.62	30.58	0.21	586.59	0.29	388.14	0.25	4.99	0.15
32	51.20	0.52	51.14	0.11	586.27	0.28	387.22	0.23	4.99	0.14
36	75.88	0.37	75.83	0.07	586.14	0.27	386.67	0.19	5.00	0.06
40	105.24	-0.30	103.77	1.40	586.13	0.23	386.52	0.17	10.63	3.09

Tableau 5-6 : Comparaison des résultats obtenus avec le code ANSYS :
 surcharge uniforme complète p=4kN/m + ΔT=20°C

x (m)	v ₁ (mm)	e(v,v ₁) %	v ₀ (mm)	e(v ₀ ,v ₁) %	T _{C1} (kN)	e %	T _{c0} (kN)	e %	T _s (kN)	e %
0	0.00	-	0.00	-	318.68	1.79	685.02	0.82	-	-
4	-91.38	-6.25	-82.42	9.80	318.30	1.61	678.75	0.72	10.08	1.19
8	-166.34	-2.05	-158.68	4.61	317.80	1.52	672.64	0.72	10.20	-0.01
12	-233.25	-0.98	-226.83	2.75	317.41	1.40	667.18	0.70	10.19	0.06
16	-291.96	-0.68	-286.62	1.83	317.11	1.27	662.40	0.69	10.19	0.14
20	-342.20	-0.95	-337.78	1.29	316.91	1.15	658.32	0.69	10.18	0.19
24	-383.76	-0.99	-380.08	0.96	316.79	1.04	654.96	0.69	10.17	0.25
28	-416.41	-1.07	-413.27	0.76	316.73	0.93	652.35	0.68	10.17	0.30
32	-439.93	-1.37	-437.14	0.63	316.72	0.87	650.50	0.67	10.16	0.35
36	-454.12	-1.37	-451.56	0.57	316.73	0.81	649.47	0.66	10.16	0.38
40	-458.87	-1.52	-456.37	0.55	316.72	0.81	649.25	0.63	10.16	0.39

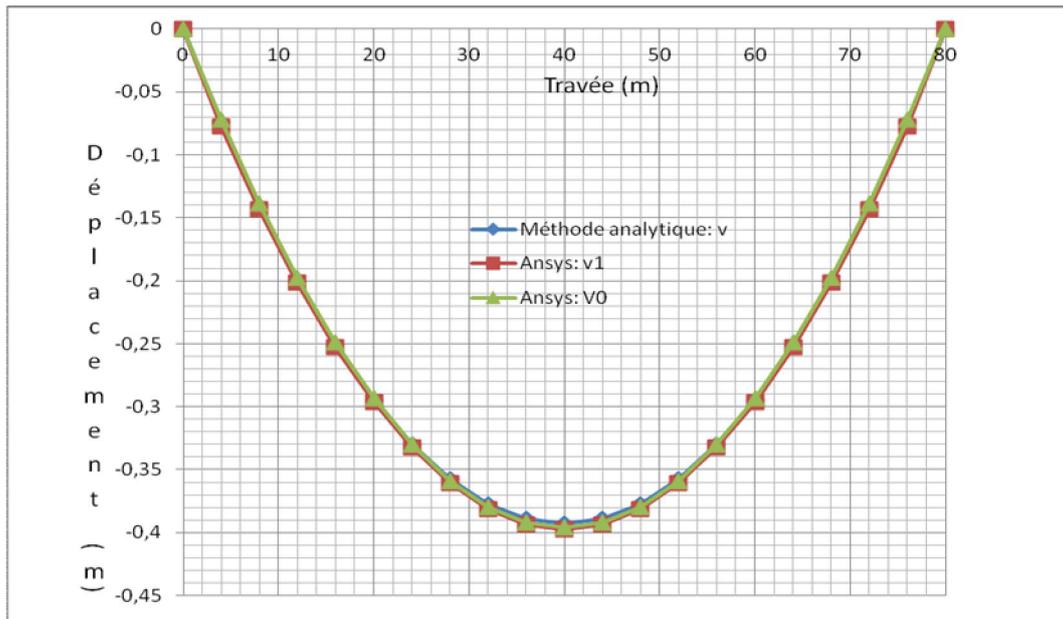


Figure 5-4 : Comparaison des résultats sous la charge répartie

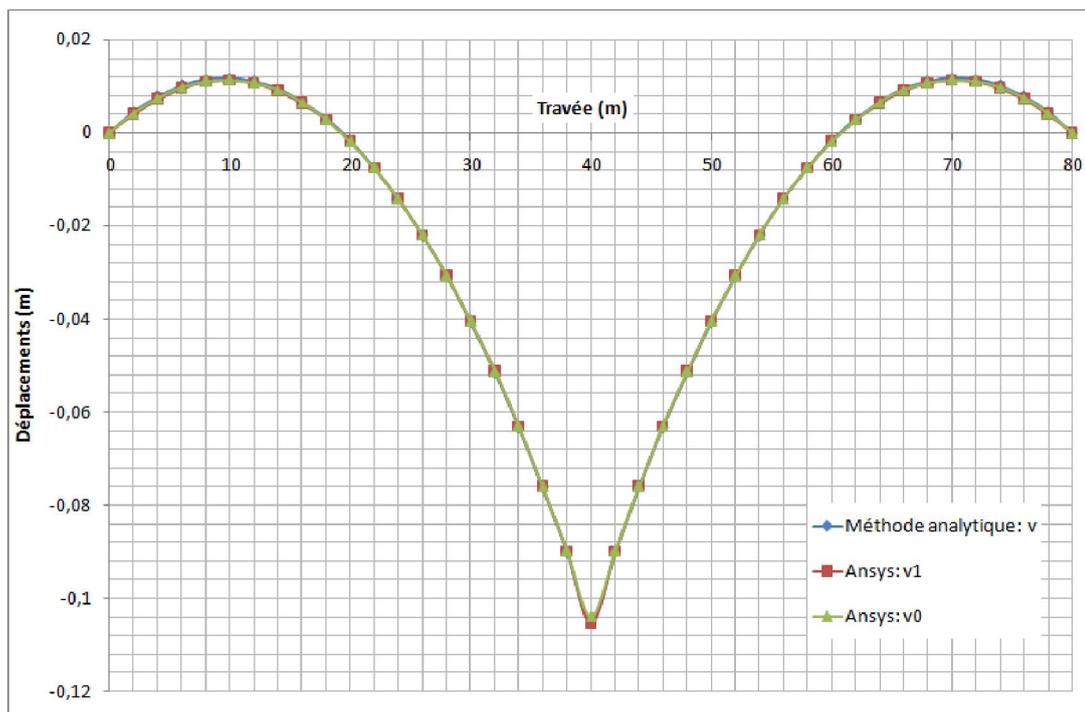


Figure 5-5 : Comparaison des résultats sous la charge concentrée

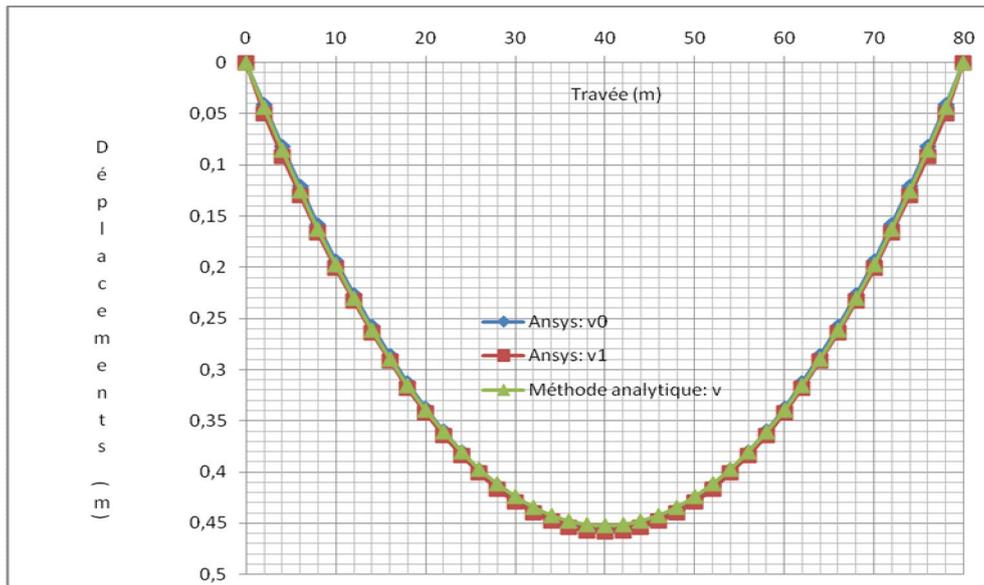


Figure 5-6 : Comparaison des résultats obtenus sous la charge uniforme $p=4\text{kN/m}$ et la variation de température $\Delta T=20^\circ\text{C}$

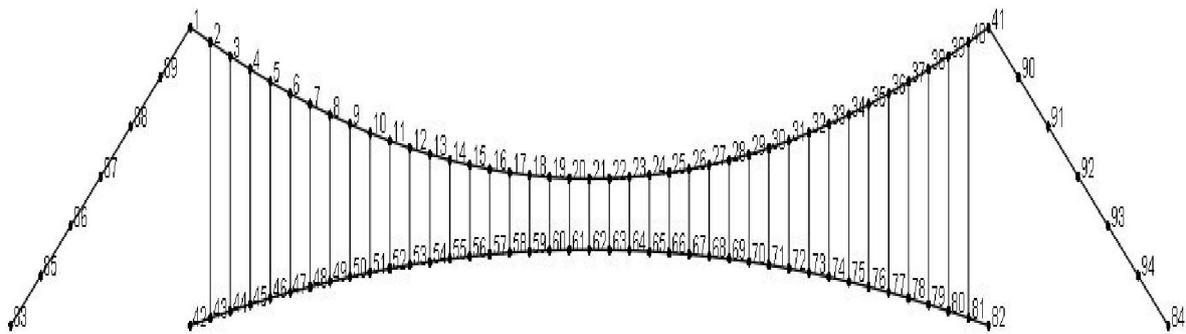


Figure 5-7 : Maillage utilisé lors de la simulation avec ANSYS

5-4 Analyse paramétrique

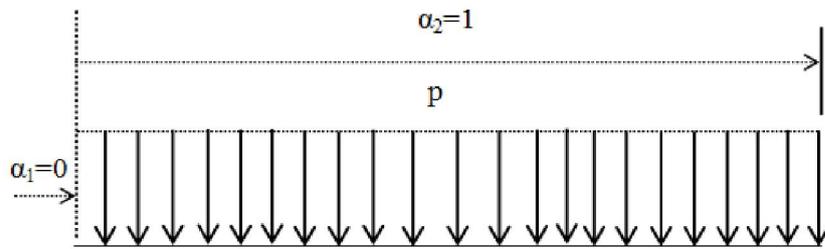
Dans le cadre de cette section, nous allons mettre en relief par le biais d'une étude paramétrique, l'influence des principaux paramètres comme la cambrure, la pré-tension du câble de rigidité, l'intensité des charges et les variations de température. Les effets étudiés sont la variation des efforts dans le système et les flèches (déplacements verticaux).

5-4-1 Paramètres principaux étudiés

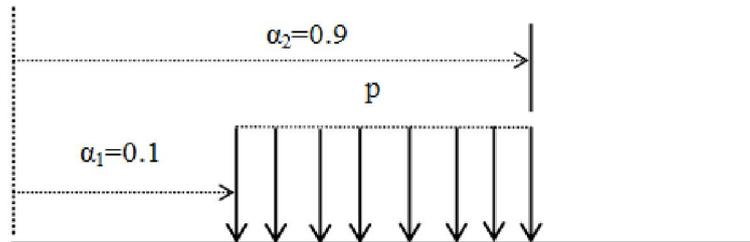
Le but de l'analyse que nous présentons ici est de montrer sous forme adimensionnelle la variation des flèches maximales et des poussées engendrées dans les câbles en fonction des paramètres principaux du système et de sa sollicitation. Ces paramètres rendus adimensionnels sont :

- la cambrure du câble de rigidité (f_1/L);
- la précontrainte (H_1/H_1^*) dans le câble de rigidité;
- l'intensité des charges partiellement réparties ($2\beta pL/H_1$) disposées selon les trois cas envisagés à la figure 5-8, soit complètement chargée (cas 1: $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$), soit symétriquement et décentriquement chargée (cas 2: $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0.1$ et $\alpha_1=0.9$, $\alpha_2=1$), soit symétriquement et centriquement chargée (cas 3: $\alpha_1=0.1$, $\alpha_2=0.9$) par rapport à la section médiane de la travée;
- la variation des températures;
- le poids propre total de l'ouvrage.

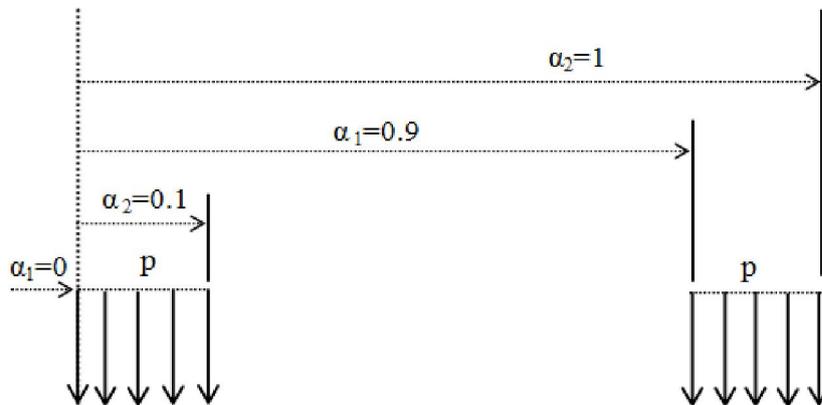
* étant l'indice relatif à la structure de l'exemple numérique étudié. Nous attribuons à β une suite de valeurs en progression arithmétique de pas égal à 0.1 et nous gardons pour f_0/L la valeur 1/12 en référence à $f_0 = 6.4$ m et $L = 80$ m. En ce qui concerne (pL/H_1), on fait référence à $p = 4$ kN/m, $L = 80$ m et $H_1 = 600$ kN.



a) Cas 1 : Travée complètement centrée



b) Cas 2 : Travée symétriquement centrée



c) Cas 3 : Travée symétriquement décentrée

Figure 5-8 : Disposition des charges des cas envisagés

Examinons maintenant tour à tour l'effet de ces paramètres tout en portant attention à la non-linéarité qui pourrait se révéler simultanément dont particulièrement pour les deux premiers paramètres à savoir f_1 et H_1 .

5-4-2 Effet de la cambrure du câble de rigidité

L'examen de ce paramètre nous amène aux figures 5-8 à 5-10 qui illustrent selon la disposition des surcharges envisagées, en fonction de la cambrure f_1/L , la déformée (v), la flèche réduite (v_{\max}/L) et la variation réduite des poussées (h_0/H_1 et h_1/H_1). La plage des valeurs retenues pour la cambrure s'étend de 1/100 à 1/10. La valeur minimale de f_1/L correspond à la configuration quasi-rectiligne du câble de rigidité et la valeur maximale à la limite approximative de validité de la présente théorie. Chaque groupe de figures regroupe différentes courbes correspondant à une même disposition de charge (α_1 et α_2) et à différentes intensités de charge (β). L'analyse de ces figures nous permet de dégager deux points importants.

En premier lieu, on constate aisément l'effet positif net de la cambrure du câble de rigidité sur le comportement du système. On note, par rapport au câble de rigidité à configuration quasi-rectiligne, une réduction très sensible allant jusqu'à 60% tant de la flèche (v_{\max}) que des variations de poussées (h). Ceci montre la contribution efficace de la cambrure à la stabilité du système. Une influence semblable vient de la flèche du câble porteur (f_0/L). Ce qu'il est important de retenir, comme on l'a déjà pressenti à la section 5-3-2, c'est que les effets dans la structure sont inversement proportionnels aux flèches (f_0 , f_1) des câbles.

En second lieu, on remarque qu'à une abscisse donnée f_1/L , l'espacement entre les courbes d'un abaque est quasiment uniforme; cela révèle que les effets étudiés (v et h) sont pratiquement linéairement proportionnels à l'intensité de la charge. En d'autres termes, pour la gamme d'intensités de charges utilisées (la valeur maximale étant la charge typique 4kN/m), la non-linéarité du système n'est pas significative. C'est afin justement d'observer le comportement non linéaire que nous procédons à l'examen des charges plus élevées. Illustrons par exemple le cas d'une disposition de charges entièrement réparties, soit pour $\alpha_1=0$ et $\alpha_2=1$ (fig. 5-8a). Les résultats obtenus (fig. 5-11, 5-12, 5-13) montrent clairement la non-linéarité qui devient de plus en plus importante au fur et à mesure de la diminution de la cambrure du câble de rigidité, phénomène que nous avons illustré sur la figure 5-11 au moyen de la courbe à traits discontinus, qui délimite le seuil de non-linéarité à 5%.

Nous appelons pourcentage de non-linéarité le quotient, exprimé en %, de l'écart entre les valeurs calculées par voies linéaire et non linéaire, par la valeur calculée par voie linéaire.

Pour une cambrure $f_1/L=1/100$ et $\beta=1$ (coefficient de charge), le pourcentage de non-linéarité s'élève à 13, alors qu'il est de 5.1 pour une cambrure plus usuelle de $1/25$.

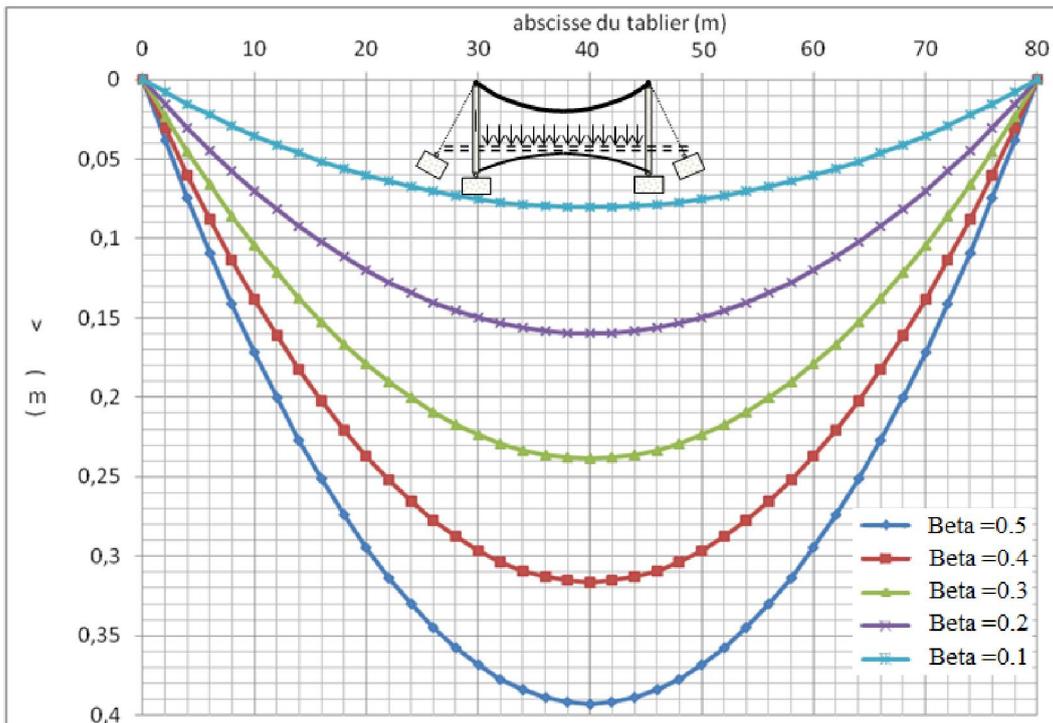


Figure 5-8a : Déformée selon la disposition de charge adoptée dans le cas 1

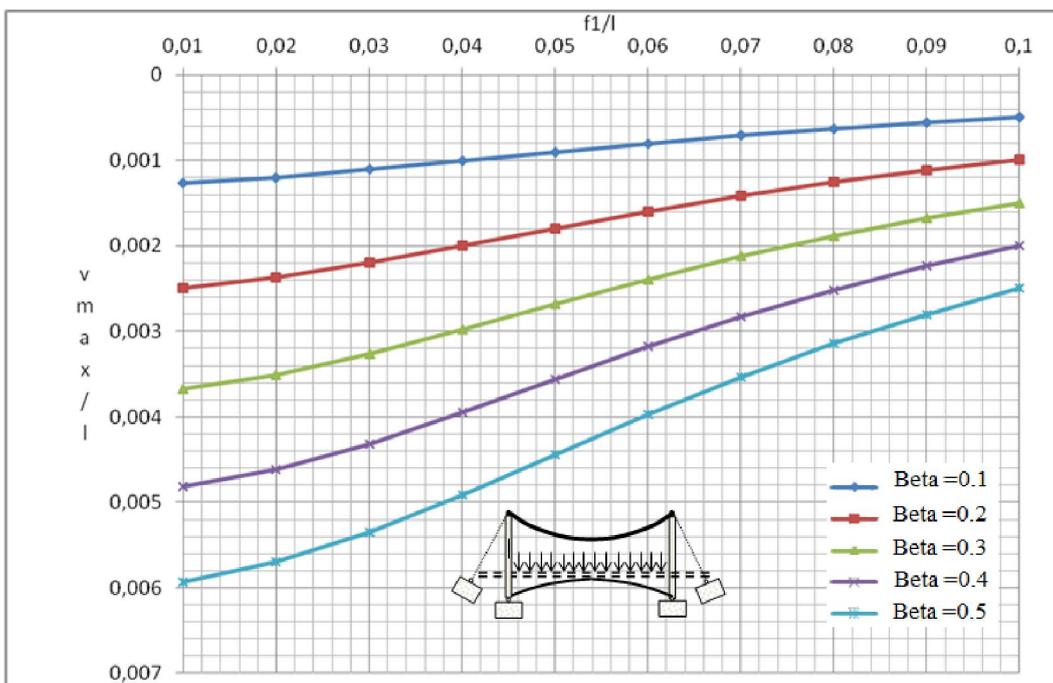


Figure 5-8b : Variation de la flèche en fonction de la cambrure selon le cas 1

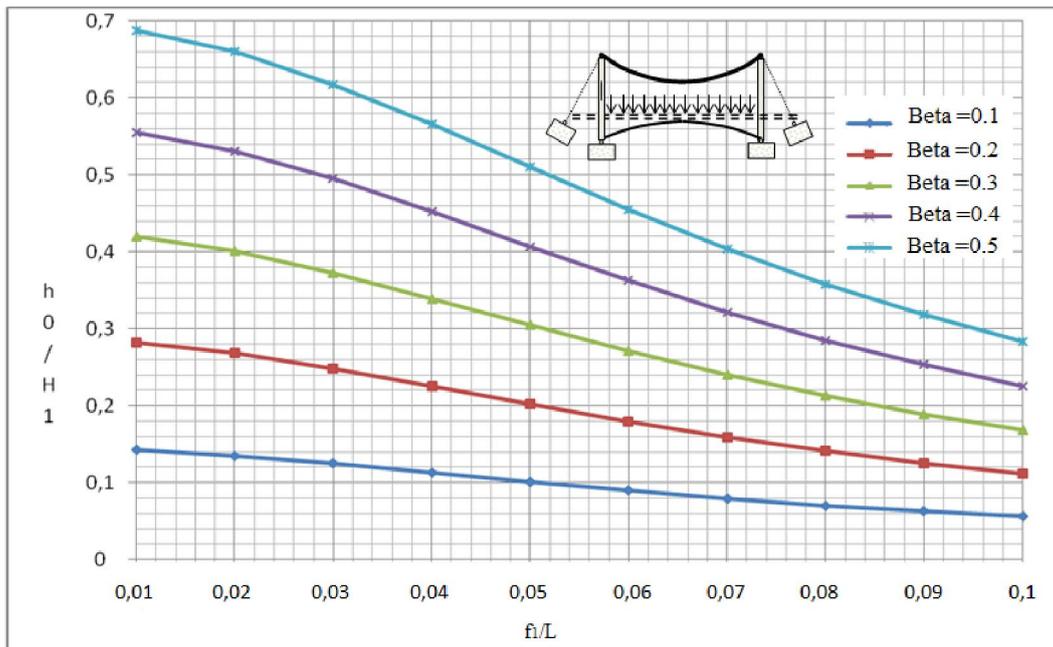


Figure 5-8c : Variation de la poussée du câble supérieur en fonction de la cambrure pour différents niveaux de chargement selon le cas 1

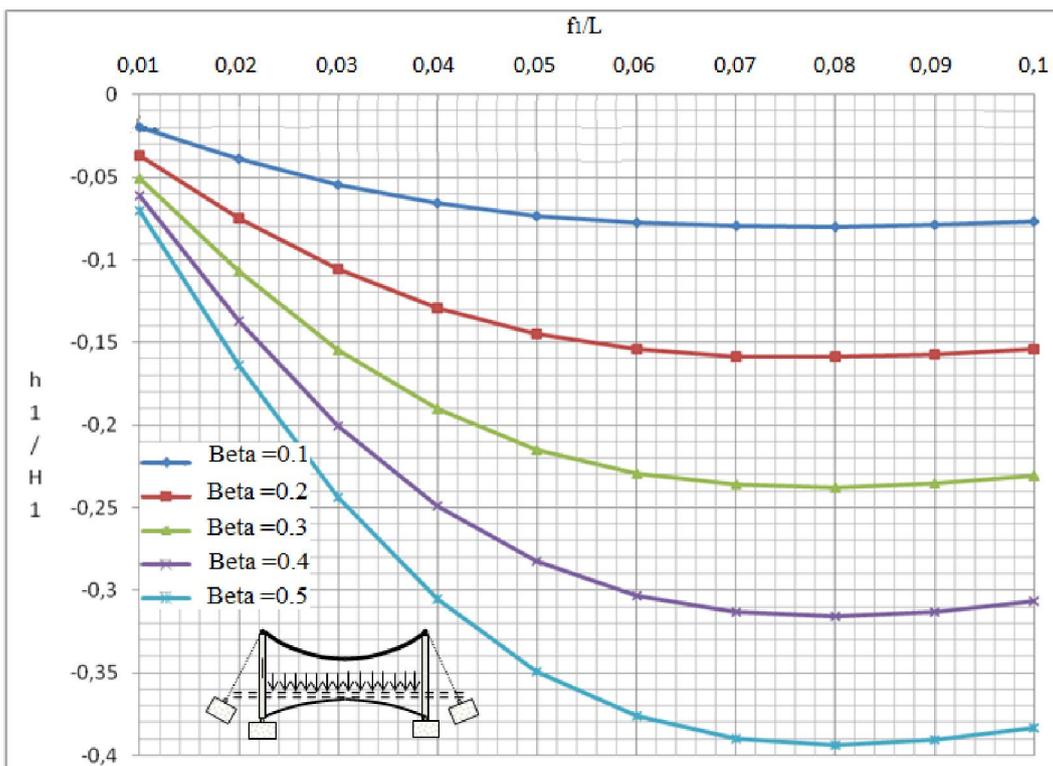


Figure 5-8d : Variation de la poussée du câble de rigidité en fonction de la cambrure pour différents niveaux de chargement selon le cas 1

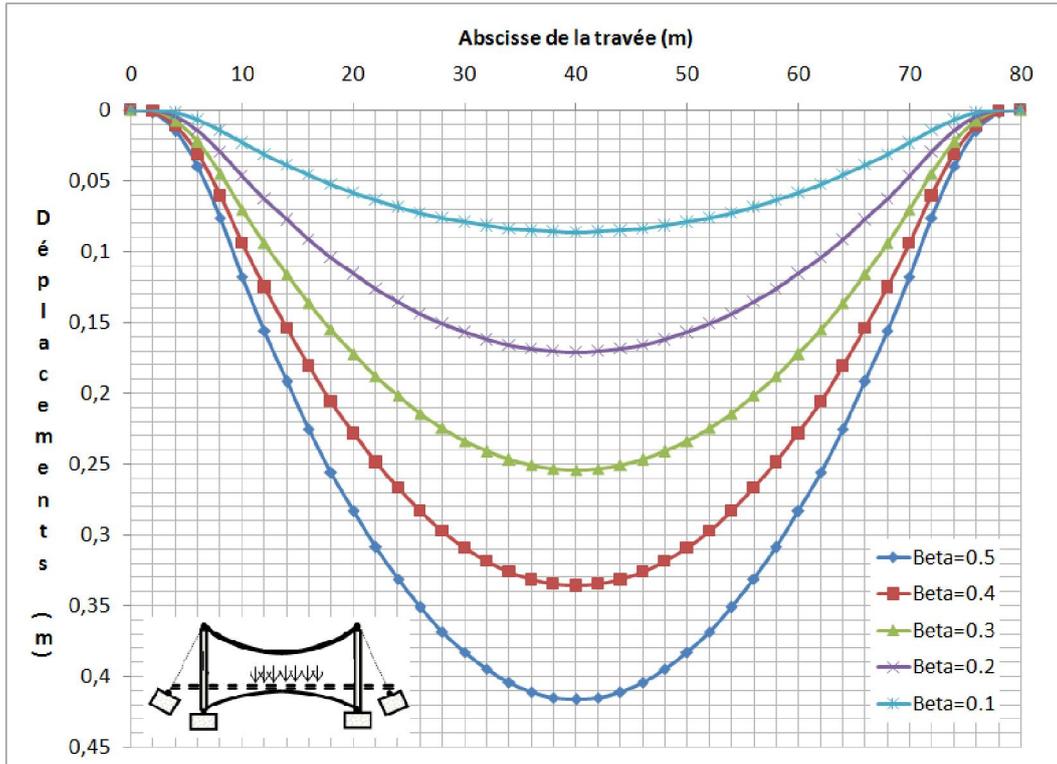


Figure 5-9a : Déformée selon la disposition de charge adoptée dans le cas 2

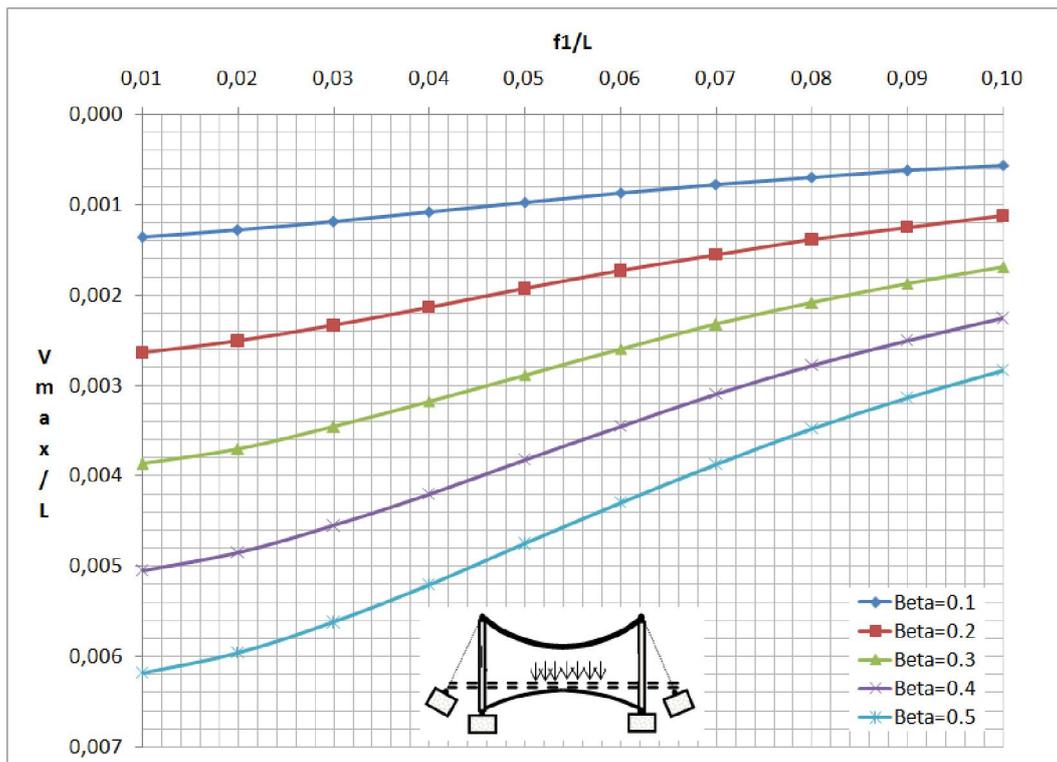


Figure 5-9b : Variation de la flèche en fonction de la cambrure selon le cas 2

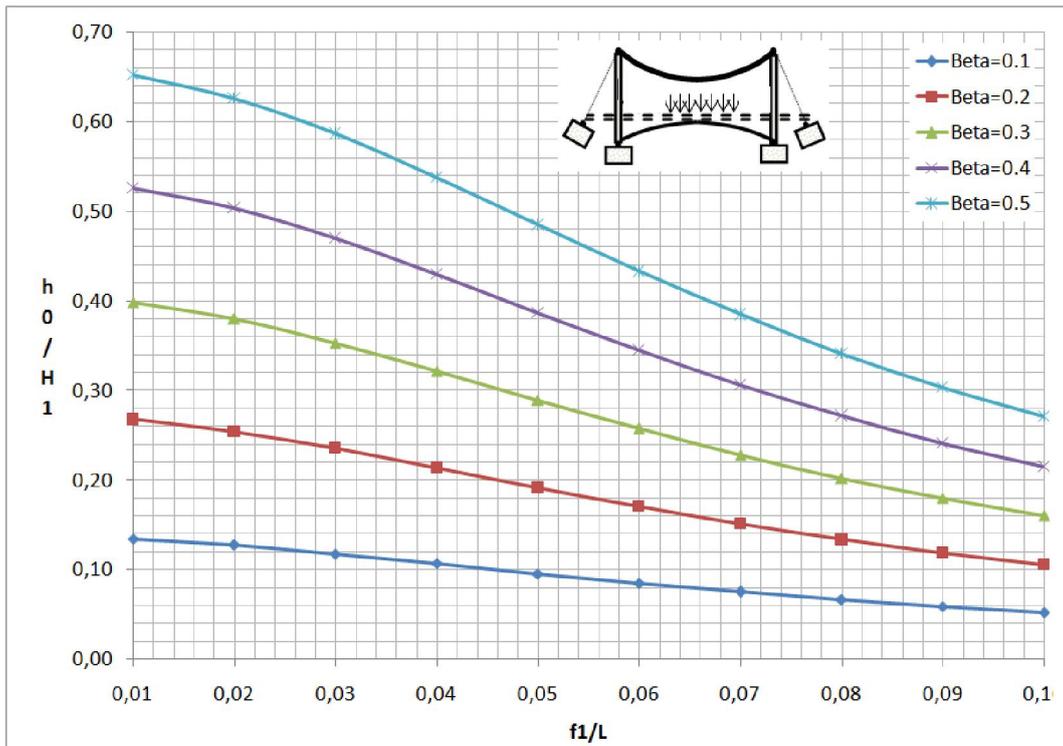


Figure 5-9c : Variation de la poussée du câble supérieur en fonction de la cambrure pour différents niveaux de chargement selon le cas 2

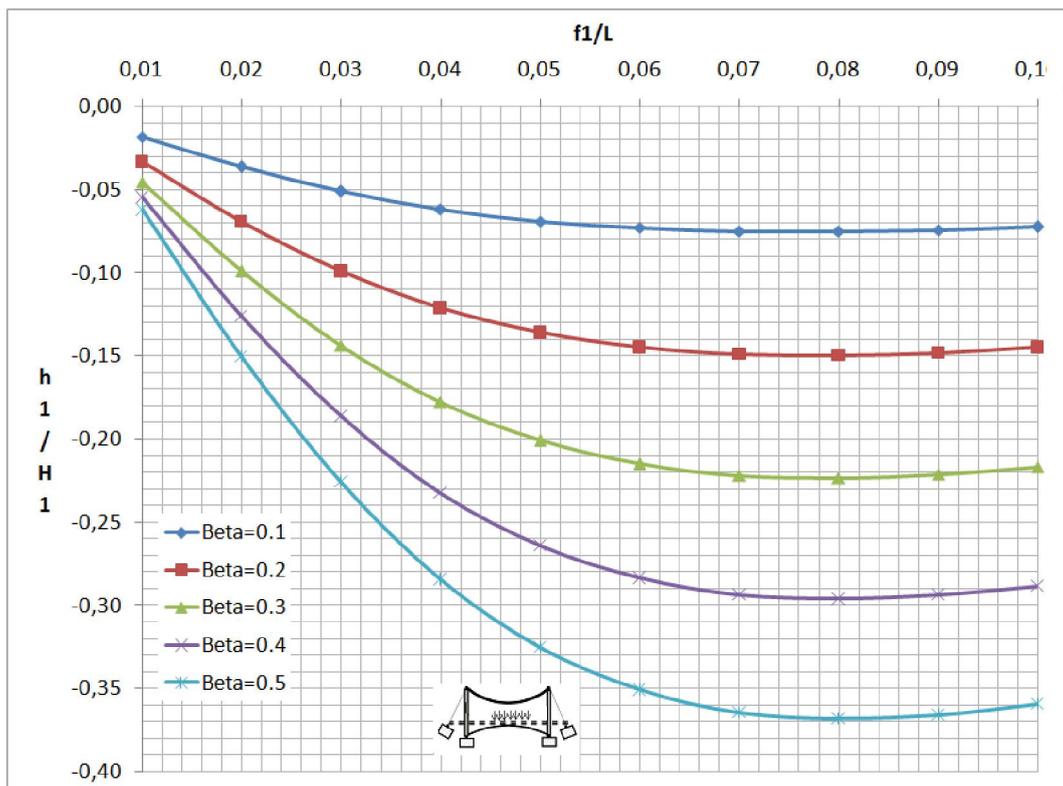


Figure 5-9d : Variation de la poussée du câble de rigidité en fonction de la cambrure pour différents niveaux de chargement selon le cas 2

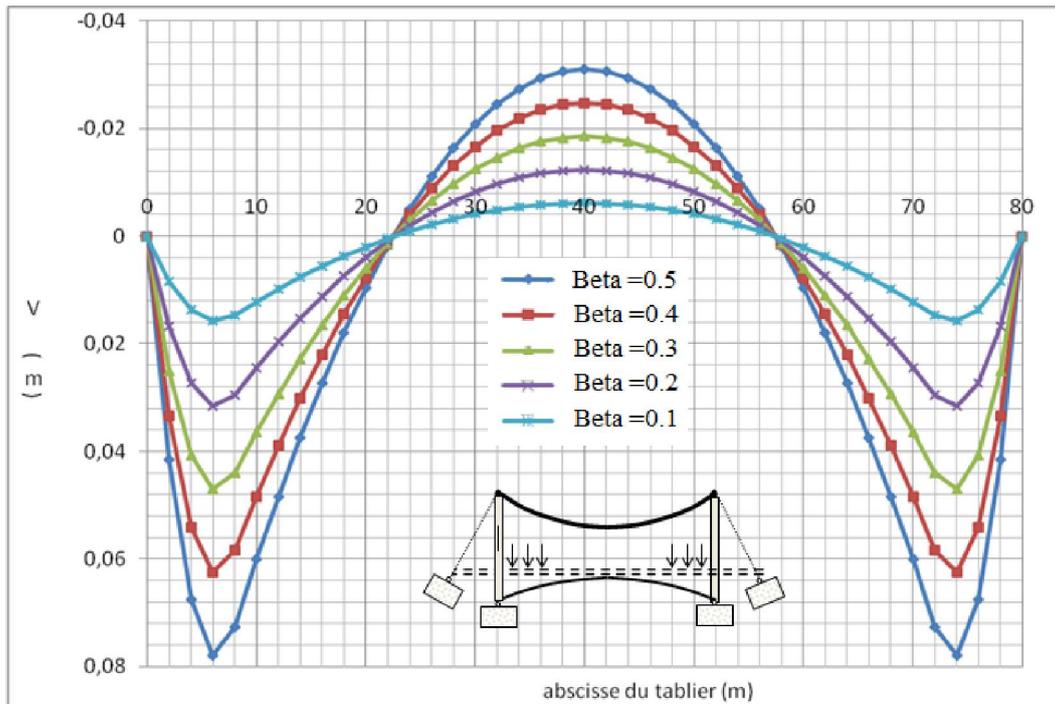


Figure 5-10a : Déformée selon la disposition de charge adoptée dans le cas 3

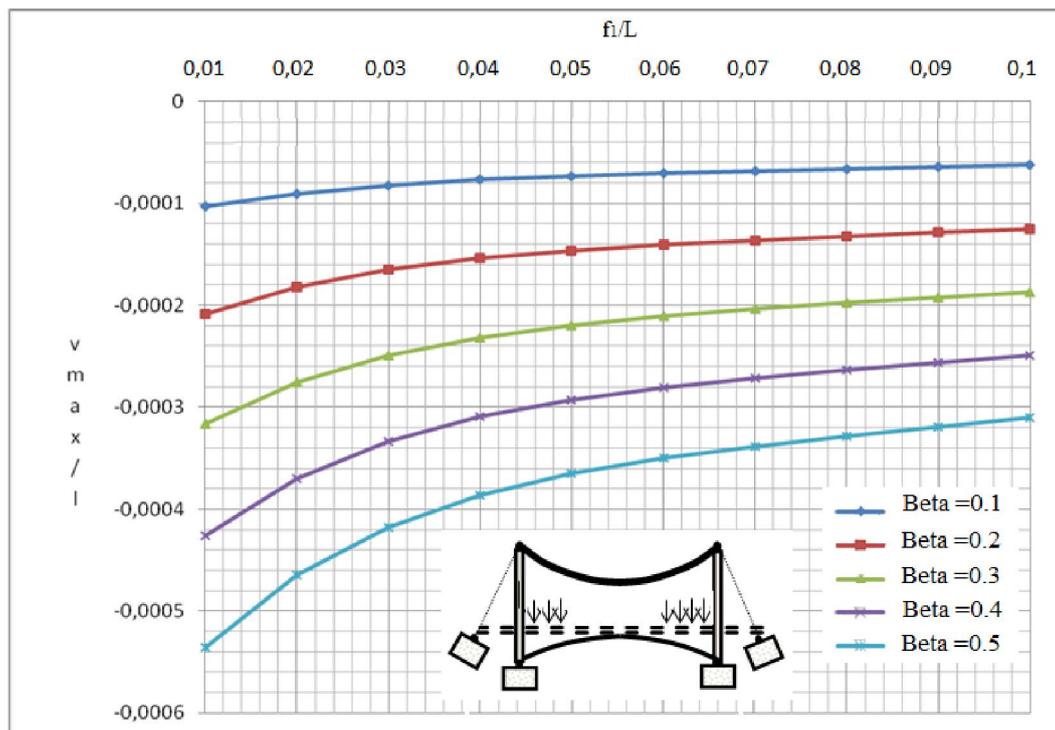


Figure 5-10b : Variation de la flèche à mi-travée en fonction de la cambrure pour différents niveaux de chargement selon le cas3

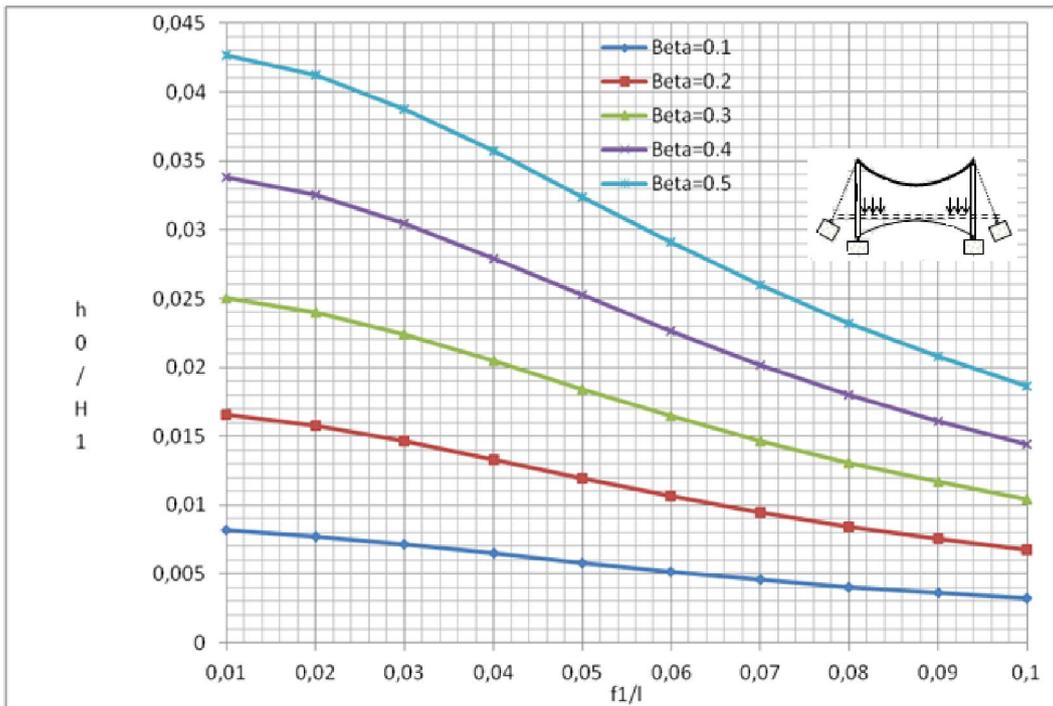


Figure 5-10c : Variation de la poussée du câble supérieur en fonction de la cambrure pour différents niveaux de chargement selon le cas 3

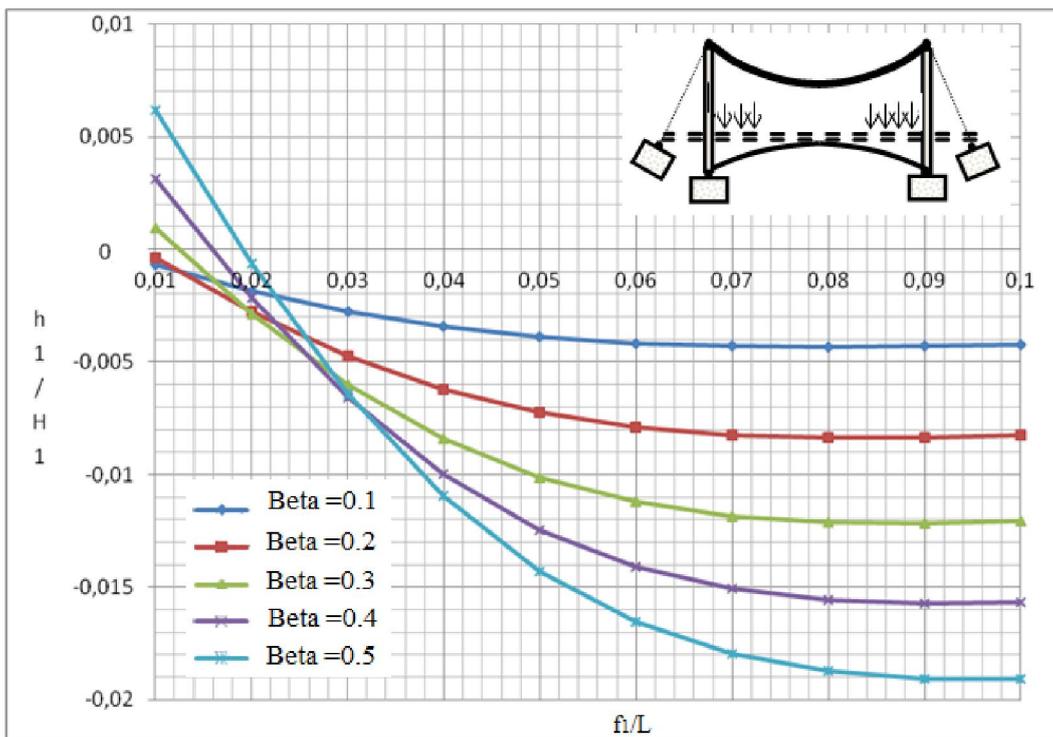


Figure 5-10d : Variation de la poussée du câble de rigidité en fonction de la cambrure pour différents niveaux de chargement selon le cas 3

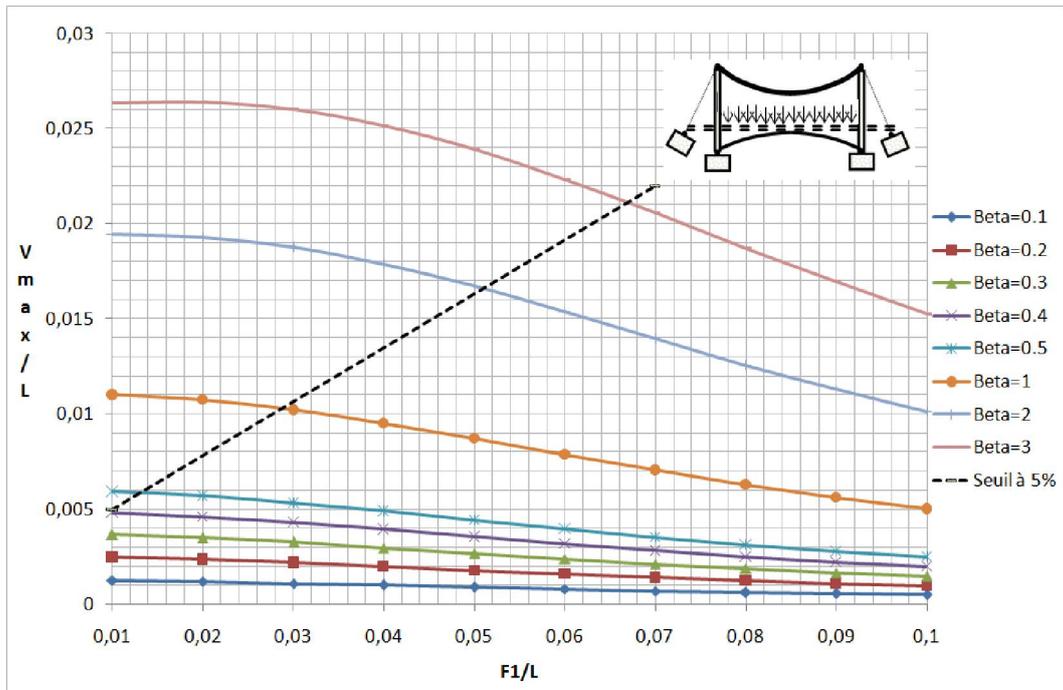


Figure 5-11 : Variation de la flèche en fonction de la cambrure, pour des charges très élevées

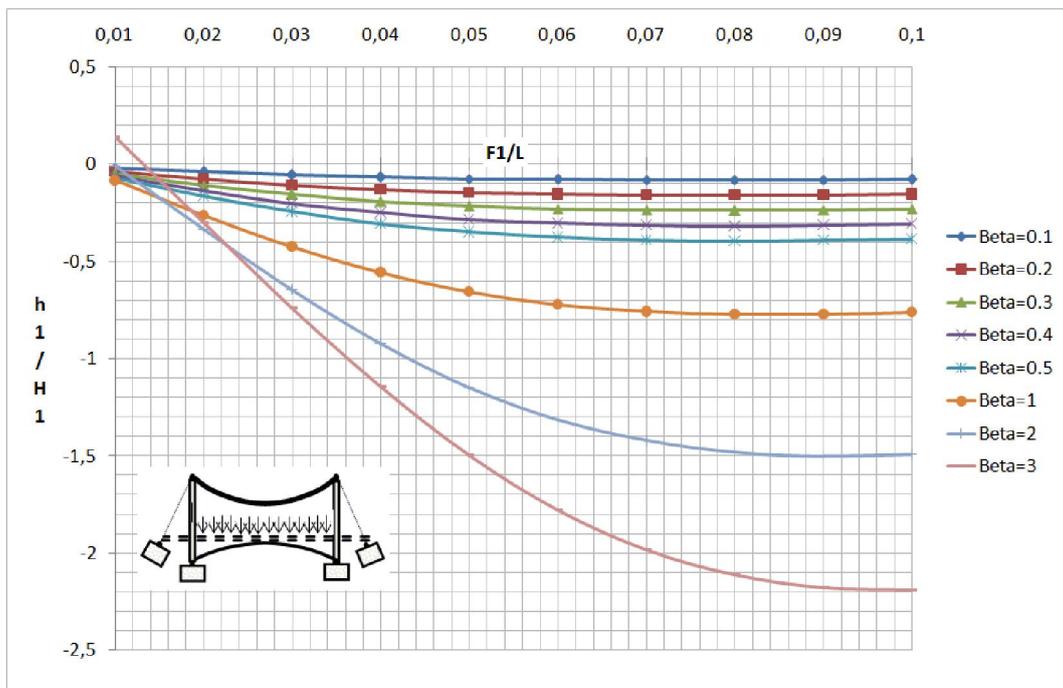


Figure 5-12 : Variation de la poussée du câble de rigidité en fonction de la cambrure, pour des charges très élevées

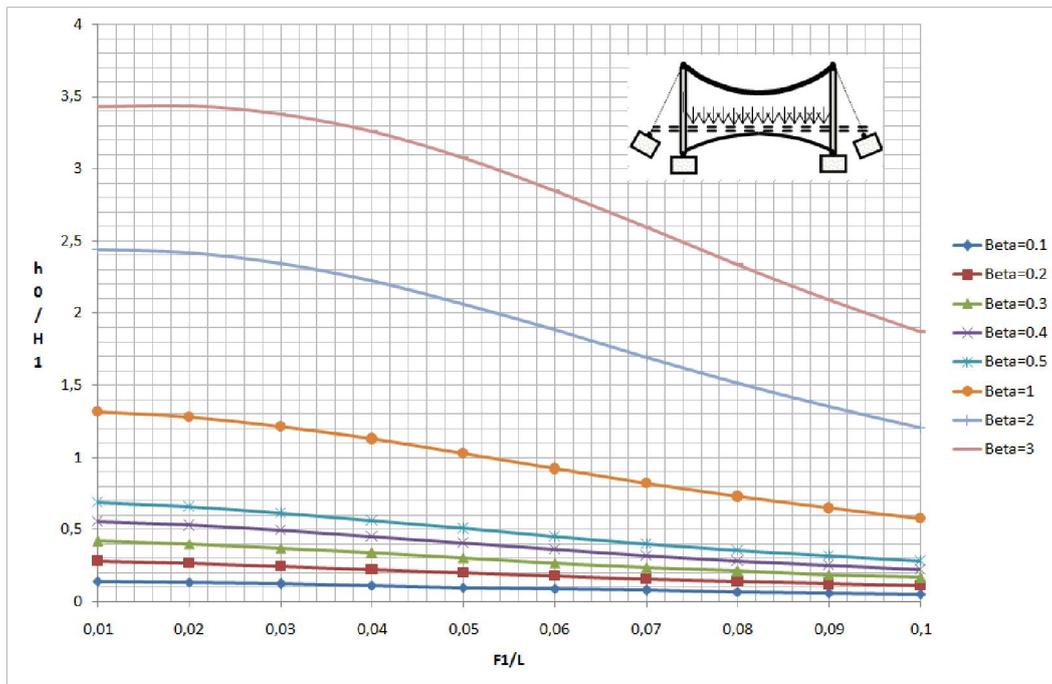


Figure 5-13 : Variation de la poussée du câble supérieur en fonction de la cambrure, pour des charges très élevées

5-4-3 Effet de la précontrainte H_1

Les résultats obtenus sont rapportés à la figure 5-14 où nous représentons la variation de la flèche verticale en fonction de la précontrainte du câble de rigidité (H_1) et de la sollicitation ($2\beta p$), pour des valeurs usuelles de la cambrure du câble de rigidité ($f_1/L=1/25$) et de la flèche du câble porteur ($f_0/L=1/12$). Nous observons généralement une variation linéaire et un resserrement de plus en plus sensible des courbes en fonction de l'accroissement de la précontrainte.

Cela révèle en premier lieu, par analogie avec la cambrure du câble de rigidité, l'importance de la mise en tension initiale dans la stabilité. On note pour la structure étudiée, une réduction de 8% de la flèche sous charge par rapport à la valeur minimale de la précontrainte considérée. En deuxième lieu, le resserrement des courbes en fonction de l'accroissement des intensités de charge nous renseigne également sur la non-linéarité illustrée par la courbe du seuil de 5% à la figure 5-11. En effet, de toute évidence, la non-linéarité se manifeste de plus en plus avec la diminution de la précontrainte et l'élévation des charges. Cela donne, pour une précontrainte $H_1=180\text{kN}$ (soit la valeur minimale envisagée) et $\beta=2$, un pourcentage de non-linéarité égale à 7.3% alors qu'il est de 6.3 pour la précontrainte $H_1^*=600\text{kN}$ de référence.

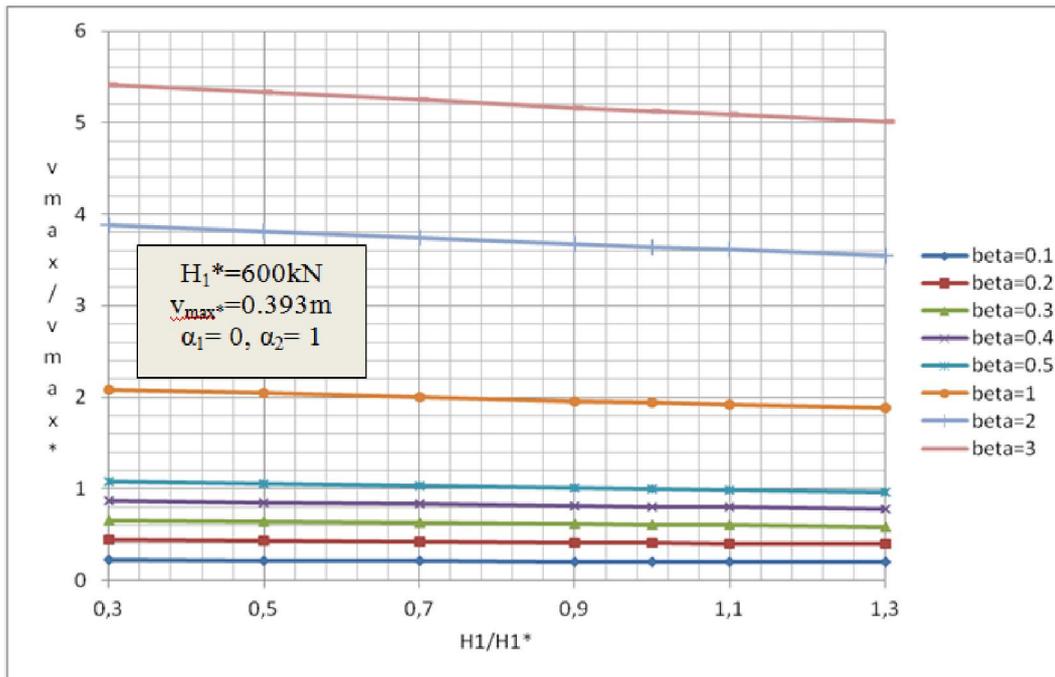


Figure 5-14 : Variation de la flèche en fonction de la précontrainte et de l'intensité des charges

5-4-4 Effets des variations de température

Dans le but de tester d'une façon plus large la fiabilité de la méthode de calcul proposée (modèle continu), d'autres niveaux de variations de température (ΔT) sont considérés comme susceptibles de se produire pendant la vie de l'ouvrage [46]. Ces écarts de température sont compris entre -50 et 50 ° C. Le niveau cryogénique extrême de -50 ° C peut se produire pendant la saison froide comme dans les pays du nord par exemple alors que le niveau extrême élevé de température de $+ 50$ ° C pourrait avoir lieu pendant un feu de forêt si la structure est installée dans un environnement forestier fortement boisé.

Les résultats ainsi obtenus avec la méthode analytique (modèle continu) et ceux affichés par le code ANSYS (modèle discret) sont récapitulés dans le tableau 5-7 où sont indiqués les valeurs enregistrées pour les poussées dans les câbles et la déflexion maximale ou la flèche dans la structure. L'évolution de la déflexion maximale, à mi-travée, est représentée graphiquement sur les figures 5-15 et 5-16 respectivement pour les écarts élevés et basses températures. D'autres résultats plus détaillés comparés à ceux du code ANSYS illustrant la déformée obtenue sous l'action de chaque variation de température (ΔT) sont représentés sur les figures 5-17 à 5-26.

L'analyse de ces résultats nous permet de dégager particulièrement deux points importants.

Nous remarquons en premier lieu une parfaite concordance des résultats avec le modèle discret formulé par ANSYS et ce à tous les niveaux de variations de température envisagés où l'erreur ne dépasse guère 2.2%. Ce qui démontre clairement la fiabilité de la méthode analytique ainsi proposée tenant compte des effets des variations de température. L'erreur semble être toutefois légèrement plus prononcée pour des écarts de température plus élevés.

En deuxième lieu, comme c'est déjà pressenti dans la section précédente, nous constatons que, plus les variations de température augmentent dans le système, plus les déplacements sont importants et plus les câbles deviennent encore beaucoup plus détendus ; les effets sont pratiquement proportionnels aux variations de température comme montré sur les figures 5-27 et 5-28. A titre comparatif, en prenant comme référence le cas où l'ouvrage n'est sous l'action que des charges mécaniques seules (i.e $\Delta T=0$), la variation de température $\Delta T = 50^{\circ}\text{C}$ conduit

à une augmentation de la flèche d'une valeur égale à 152.2 mm soit en terme d'erreur relative équivalente à 38.7%. La poussée dans le câble supérieur passe ainsi de $H_{C0} = 362.5 + 339.6 = 702.1$ kN ($\Delta T = 0^\circ\text{C}$), à la valeur $H_{C0} = 362.5 + 222 = 584.5$ kN ($\Delta T = 50^\circ\text{C}$) ; ce qui représente une baisse ou une détension de 117.6 kN équivalent en pourcentage à une réduction de 16.8%. Par contre, dans le câble de rigidité, la poussée passe de $H_{C1} = 600 - 183.5 = 416.5$ kN ($\Delta T = 0^\circ\text{C}$) à $H_{C1} = 600 - 427 = 173$ kN ($\Delta T = 50^\circ\text{C}$) soit une détension de 243.5 kN équivalent à une réduction de 58.5% qui est presque quatre fois plus élevée que dans le câble supérieur. Cependant, un écart de température cryogénique donne lieu à une réduction de flèche de 141 mm en comparaison au milieu ambiant.

Tableau 5-7 : Comparaison des résultats sous écarts de température variés

ΔT ($^\circ\text{C}$)	h_0 (kN)			h_1 (kN)			V_{\max} (mm)		
	continu	discret	e(%)	continu	discret	e(%)	continu	discret	e(%)
-50	470.3	468.5	-0.4	58.2	58.9	1.2	252.0	253.9	0.8
-40	443.1	440.9	-0.5	9.98	10.3	3.2	280.0	281.4	0.5
-30	416.5	413.9	-0.6	-38.3	-38.4	0.3	307.0	309.5	0.8
-20	390.3	387.4	-0.7	-86.1	-87.2	1.3	335.0	338.5	1.0
-10	364.7	361.4	-0.9	-135.0	-136.1	0.8	363.9	367.9	1.0
0	339.6	336.0	-1.0	-183.5	-183.3	-0.1	393.0	397.7	1.2
10	314.9	311.1	-1.2	-232.1	-234.1	-0.9	423.0	428.1	1.2
20	290.9	286.2	-1.6	-280.7	-283.3	-0.9	452.0	458.9	1.5
30	267.3	263.0	-1.6	-329.4	-332.5	-0.9	482.9	490.2	1.5
40	244.4	239.8	-1.9	-378.2	-381.8	-1.0	513.8	521.9	1.6
50	222.0	217.2	-2.2	-427.0	-431.1	-1.0	545.2	550.2	1.0

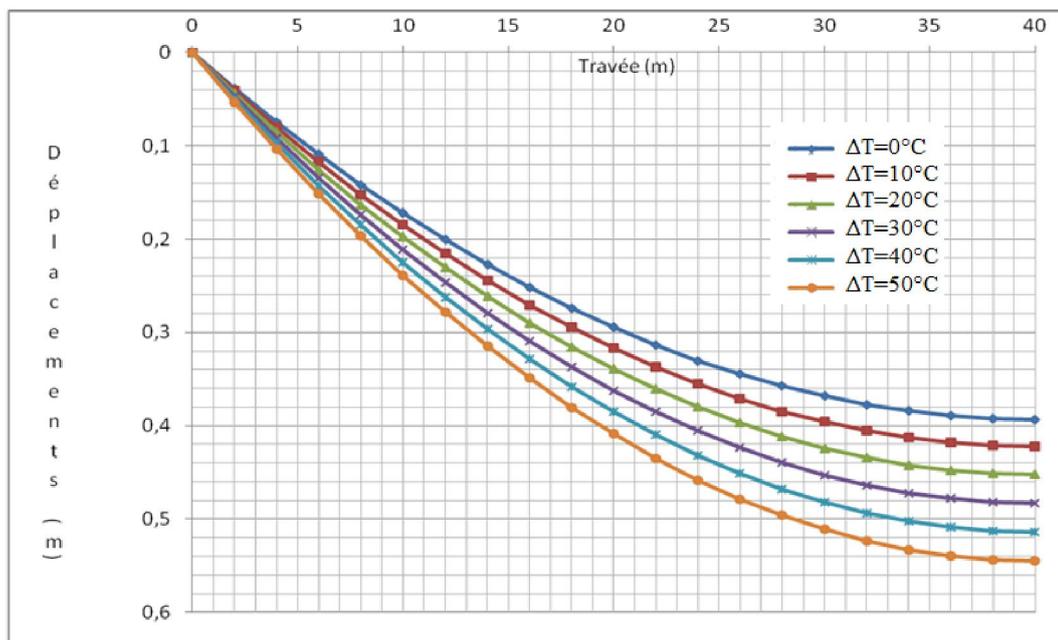


Figure 5-15 : Evolution de la flèche en fonction des écarts élevés de température (positifs)

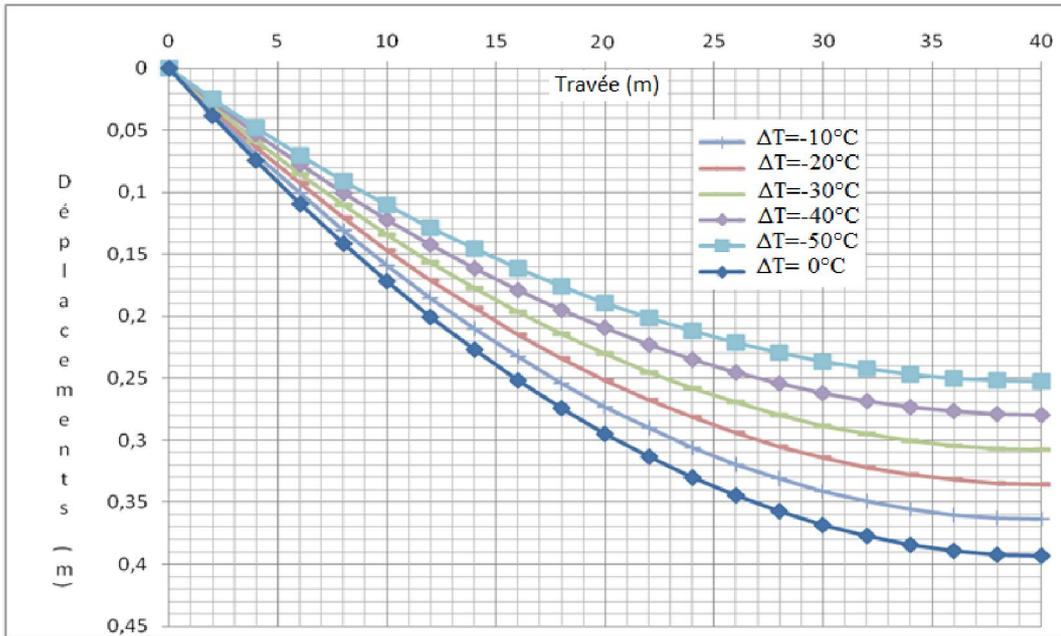


Figure 5-16 : Evolution de la flèche en fonction des écarts de températures cryogéniques (négatives)

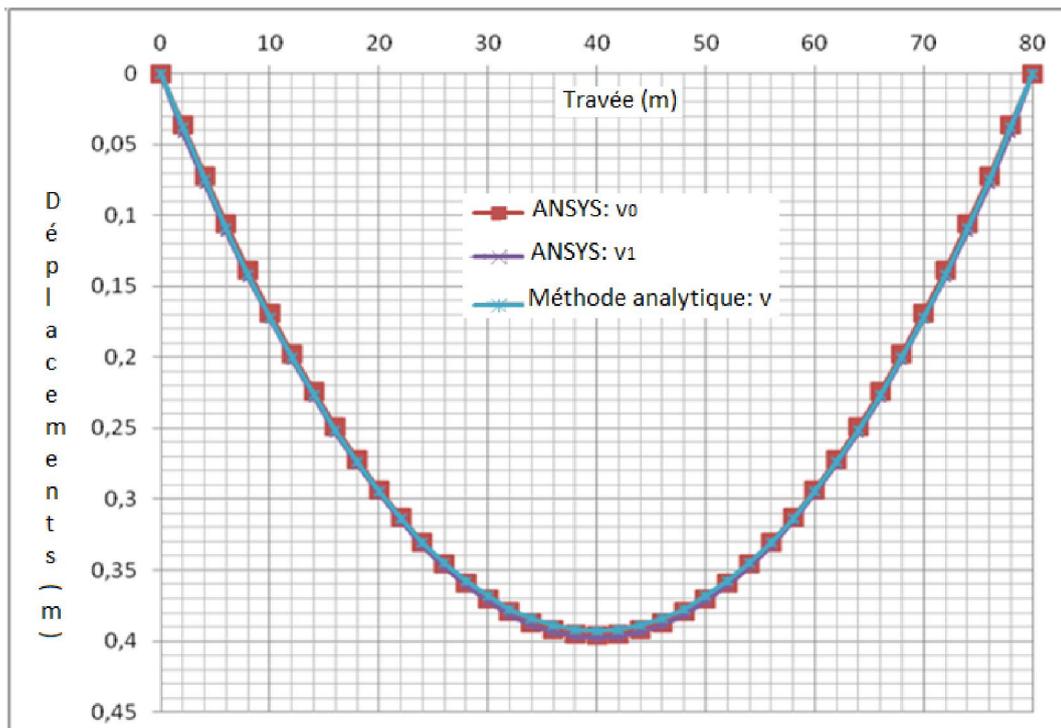


Figure 5-17 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T=0^\circ\text{C}$ (i.e $T=20^\circ\text{C}$)

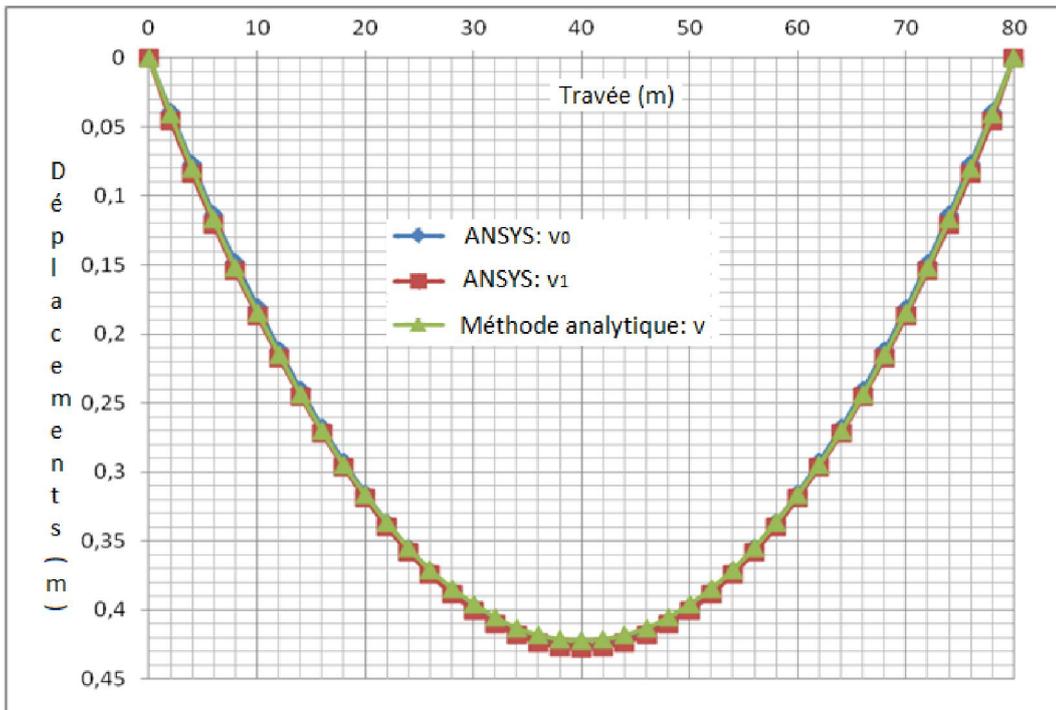


Figure 5-18 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T = +10^\circ\text{C}$

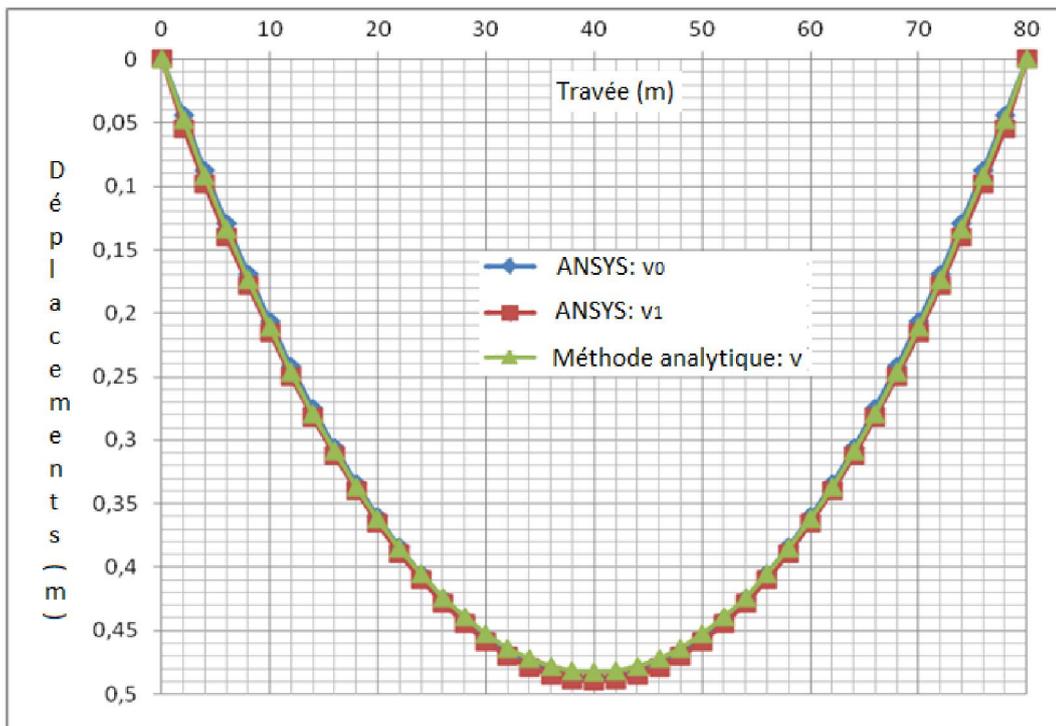


Figure 5-19 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T = 30^\circ\text{C}$

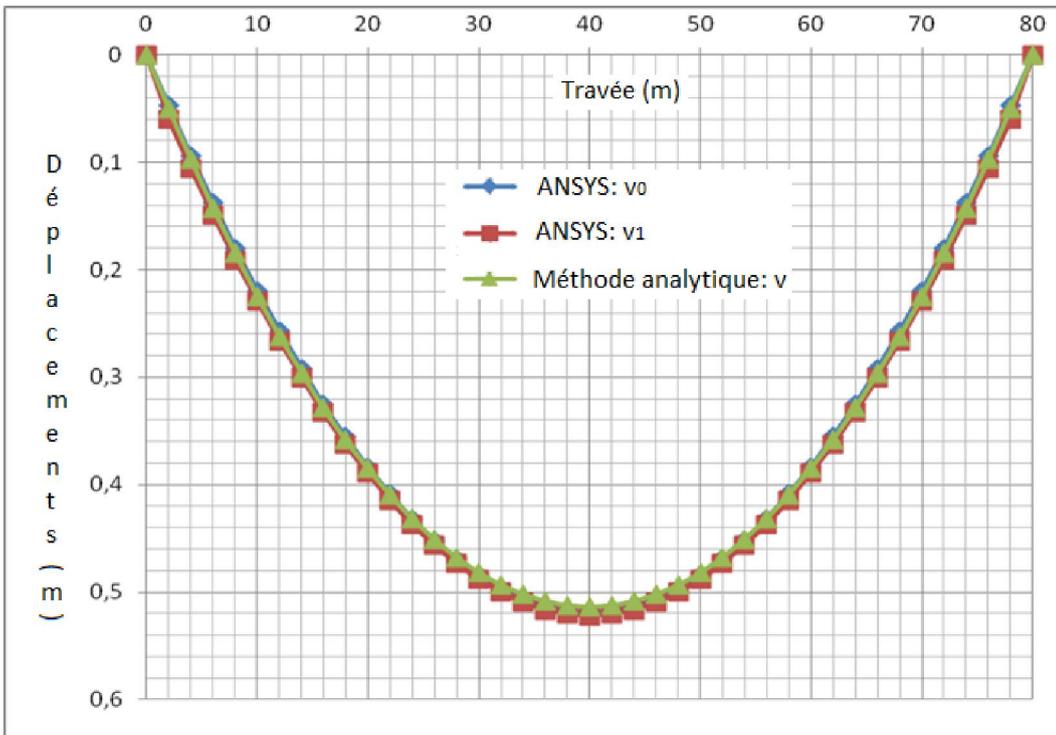


Figure 5-20 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T = 40^\circ\text{C}$

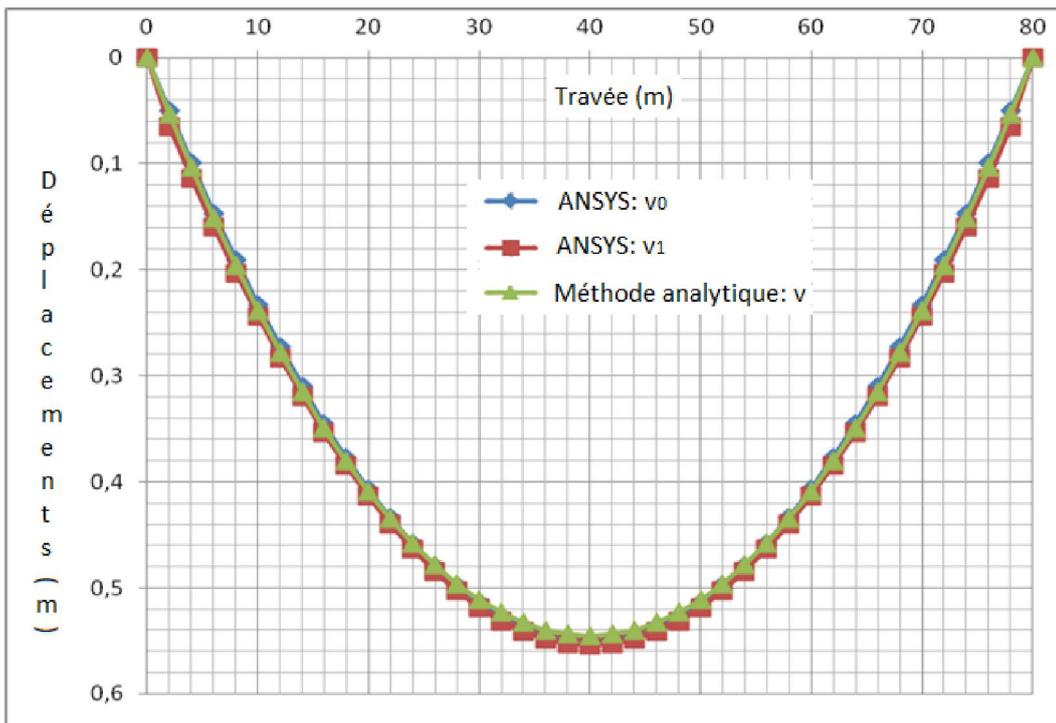


Figure 5-21 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T = 50^\circ\text{C}$

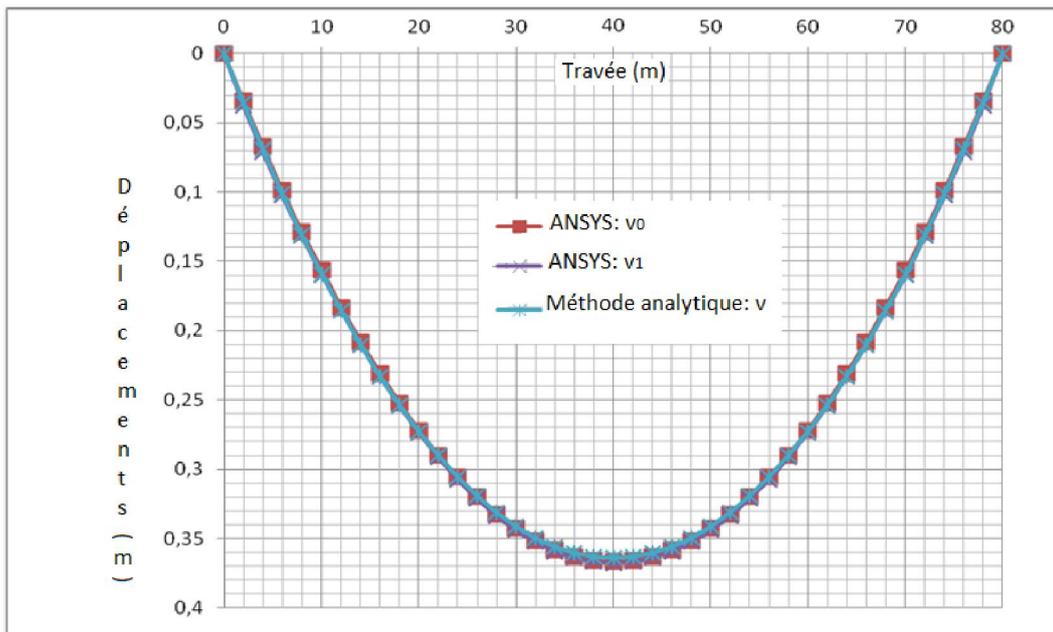


Figure 5-22 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T = -10^\circ\text{C}$

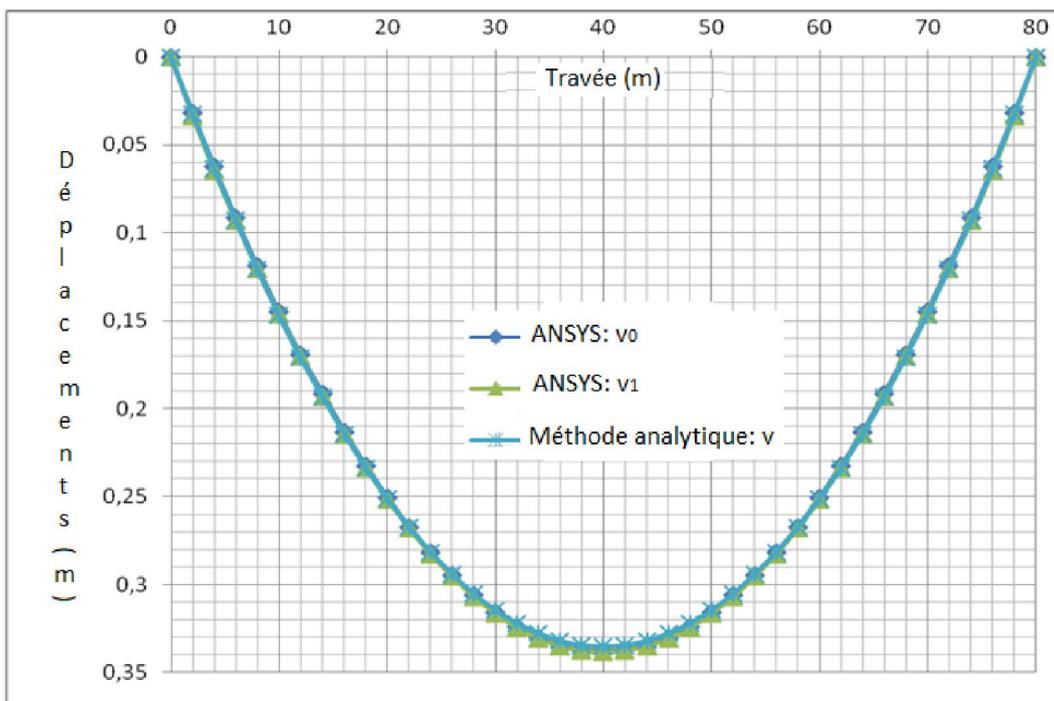


Figure 5-23 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T = -20^\circ\text{C}$

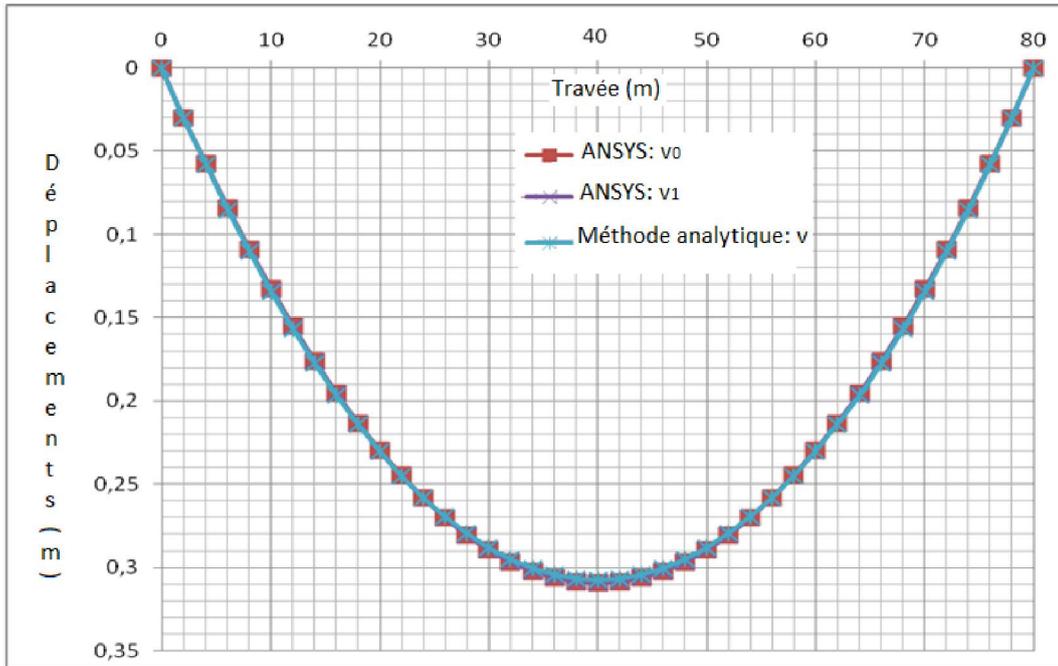


Figure 5-24 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T = -30^{\circ}\text{C}$

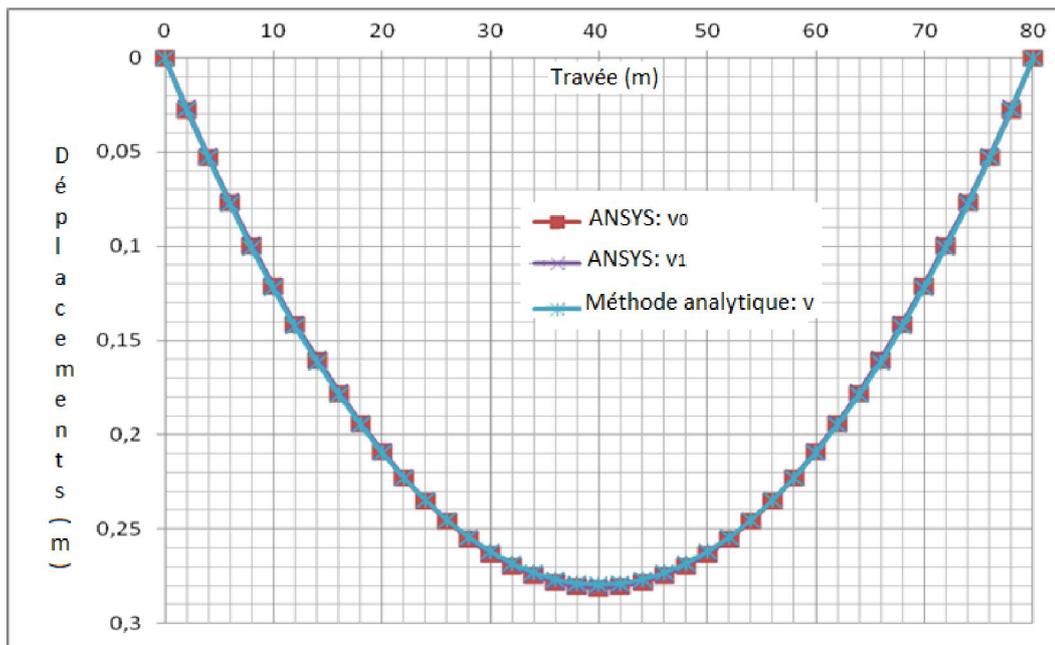


Figure 5-25 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T = -40^{\circ}\text{C}$

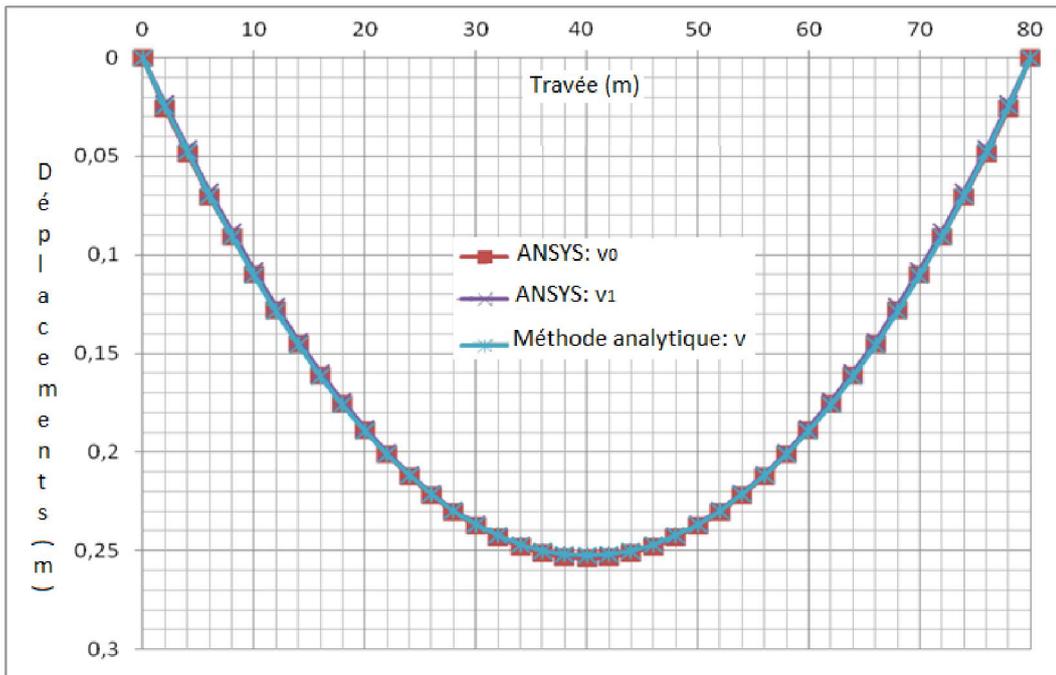


Figure 5-26 : Evolution des déplacements le long de la travée à $\Delta T = -50^\circ\text{C}$

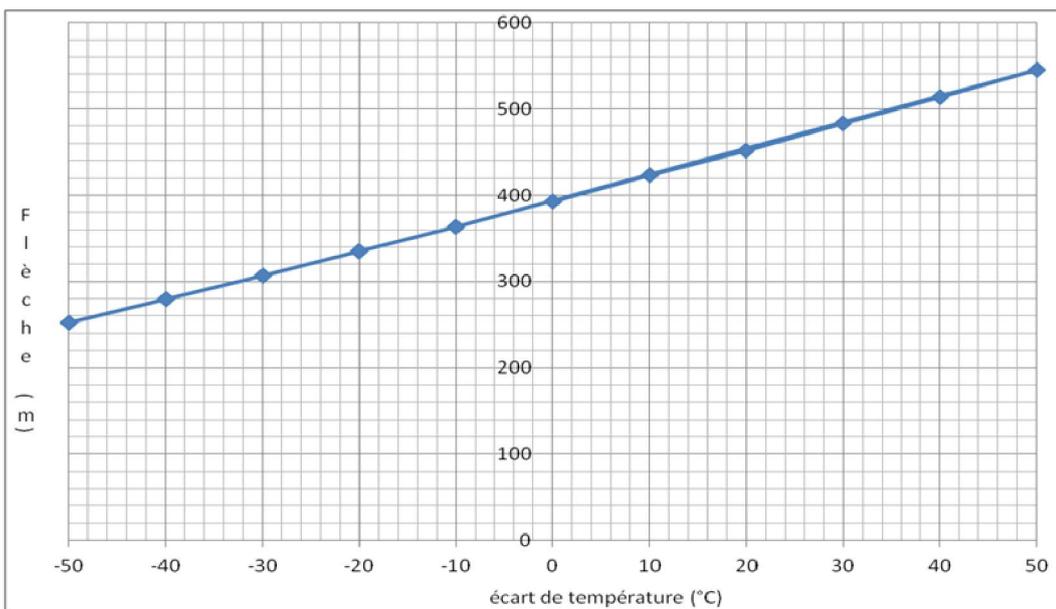


Figure 5-27 : Evolution des flèches en fonction des variations de température

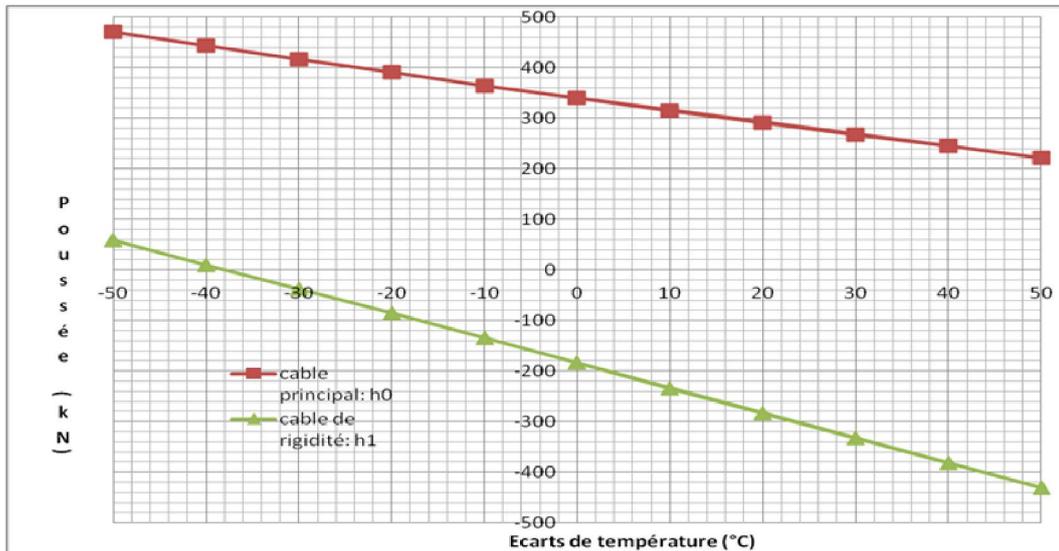


Figure 5-28 : Evolution des poussées en fonction des variations de température

5-5 Calcul des pulsations et des fréquences propres de vibration

Dans le but de jauger la fiabilité de la théorie de vibration en régime libre exposée dans la deuxième partie du chapitre précédent, nous proposons de calculer les cinq premières pulsations (ω_n) et fréquences (f_n) propres de vibration de la passerelle étudiée dont les caractéristiques mécaniques et géométriques ont été récapitulées dans le tableau 5-1. Cependant, en guise de simplification théorique, nous allons négliger la présence des haubans d'ancrage ainsi qu'en l'absence de toute surcharge et de variation de température soit en considérant $p=0$ et $\Delta T=0$.

La première pulsation du mode de vibration antisymétrique est définie par la relation (4-87) où avec $n=1$, nous aurons:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{\frac{(H_0 + H_1)}{m}} = \frac{2\pi}{80} \sqrt{\frac{(362.5 + 600)}{\frac{0.5}{9.81}}} = 10.8 \text{ rad/s soit } f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 1.7 \text{ Hz. Par simulation}$$

à l'aide du code ANSYS, celui-ci affiche pour la fréquence, une valeur égale à 1.67 soit une erreur relative égale à 2.78%.

Pour les autres valeurs i.e pour $n=2$, $n=3$, $n=4$ et $n=5$, nous obtenons respectivement:

$$\omega_2 = \frac{4\pi}{80} \sqrt{\frac{(362.5 + 600)}{\frac{0.5}{9.81}}} = 21.6 \text{ rad/s soit } f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 3.44 \text{ Hz et ANSYS affiche } f_2 = 3.37 ;$$

$$\omega_3 = \frac{6\pi}{80} \sqrt{\frac{(362.5 + 600)}{\frac{0.5}{9.81}}} = 32.4 \text{ rad/s soit } f_3 = \frac{\omega_3}{2\pi} = 5.15 \text{ Hz et ANSYS affiche } f_3 = 5.04.$$

$$\omega_4 = \frac{8\pi}{80} \sqrt{\frac{(362.5 + 600)}{\frac{0.5}{9.81}}} = 43.2 \text{ rad/s soit } f_4 = \frac{\omega_4}{2\pi} = 6.88 \text{ Hz et ANSYS affiche } f_3 = 6.67.$$

$$\omega_5 = \frac{10\pi}{80} \sqrt{\frac{(362.5 + 600)}{\frac{0.5}{9.81}}} = 54.0 \text{ rad/s soit } f_4 = \frac{\omega_4}{2\pi} = 8.59 \text{ Hz et ANSYS affiche } f_3 = 8.25.$$

Quant au mode de vibration symétrique, il faut d'abord résoudre numériquement l'équation transcendante (4-94) pour trouver la solution $(\frac{\beta\ell}{2})_n$ et ensuite utiliser la relation (4-97) pour calculer la pulsation (ω_n) ou la fréquence ($f_n = \omega_n/2\pi$). Afin de résoudre l'équation (4-94), il est nécessaire d'adapter l'algorithme de Newton-Raphson exposé dans la figure 4-5 pour trouver la solution d'une seule équation de la forme $F_x(x)=0$. Ainsi, en posant $x = \frac{\beta\ell}{2}$, l'équation (4-94) s'écrit : $F_x(x) = \tan(x) - x + 4x^3/\lambda^2 = 0$.

Cependant, à cause de la multitude (ou infinie) de solutions que peut prendre cette équation et également de la solution initiale dont dépendent chacune des solutions, il est nécessaire de procéder d'abord à un balayage dans un certain intervalle de la solution initiale préalablement choisie. Les résultats ainsi trouvés pour les cinq premières solutions et en les comparant avec ceux obtenus par le code ANSYS, sont récapitulés dans le tableau 5-8 où λ^2 étant égal à 138.87.

Tableau 5-8 : Les cinq premières fréquences du mode symétrique

Solution initiale (X_0)	Solution (X)	β [rad/s]	ω [rad/s]	f [1/s ou Hz]	f [1/s ou Hz] (ANSYS)
4	4.27	0.106	14.57	2.32	2.34
5	6.08	0.152	20.889	3.32	3.25
10	8.01	0.200	27.48	4.38	4.28
11	11.03	0.276	37.89	6.03	5.88
14	14.15	0.354	48.61	7.74	7.47

L'ensemble des 10 premières fréquences ainsi obtenues pour les deux modes de vibration (antisymétrique et symétrique) comparées avec celles issues du code ANSYS, sont récapitulées par ordre croissant dans le tableau 5-9 ; les déformées modales correspondantes, étant illustrées dans les figures 5-29 à 5-38. Nous remarquons une concordance assez satisfaisante qui laisse entrevoir la véracité des hypothèses admises.

Tableau 5-9 : Récapitulation des dix premières fréquences de vibration obtenues comparées avec celles issues du code ANSYS

Mode	antisymétrique	Symétrique	ANSYS
1	1.72	-	1.67
2	-	2.32	2.34
3	-	3.32	3.25
4	3.44	-	3.37
5	-	4.38	4.28
6	5.15	-	5.04
7	-	6.03	5.88
8	6.87	-	6.67
9	-	7.74	7.47
10	8.59	-	8.25

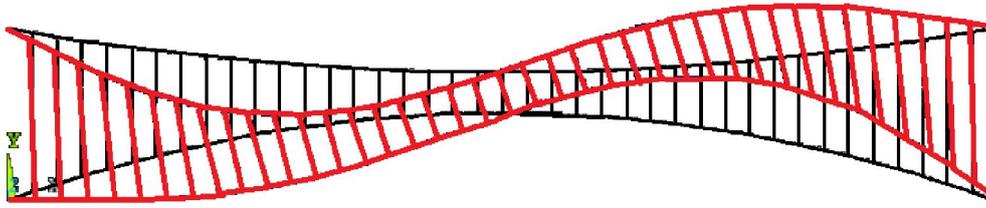


Figure 5-29 : Forme du mode 1 (antisymétrique)

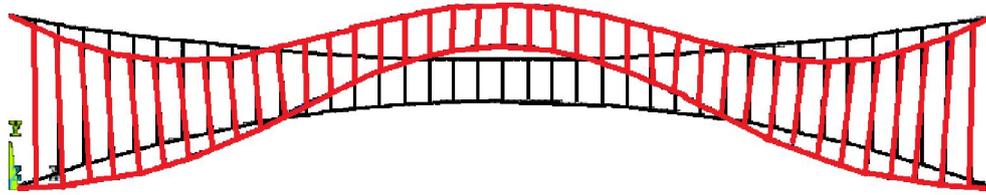


Figure 5-30 : Forme du mode 2 (symétrique)



Figure 5-31: Forme du mode 3 (symétrique)

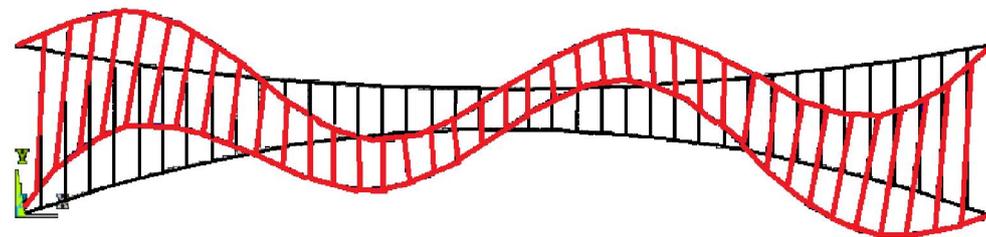


Figure 5-32: Forme du mode 4 (antisymétrique)

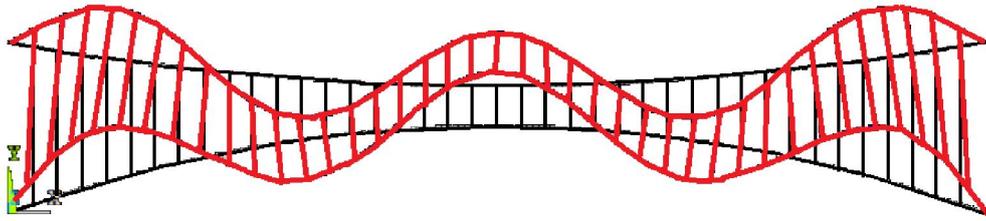


Figure 5-33: Forme du mode 5 (symétrique)

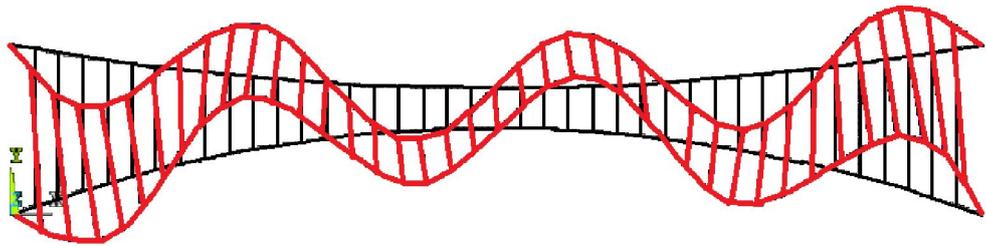


Figure 5-34: Forme du mode 6 (antisymétrique)

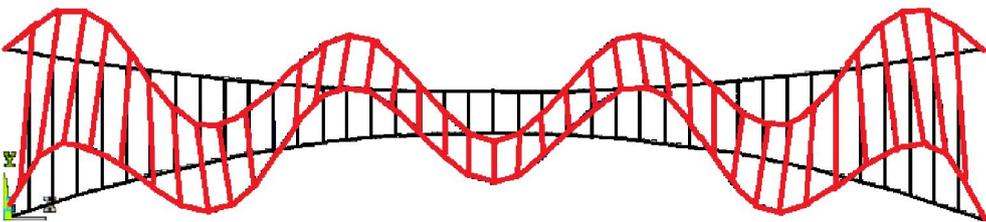


Figure 5-35: Forme du mode 7 (symétrique)

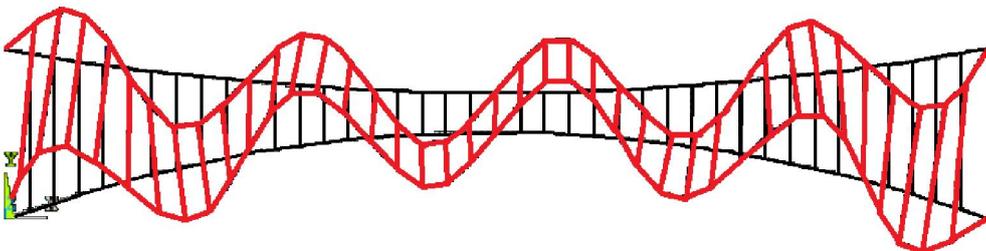


Figure 5-36: Forme du mode 8 (antisymétrique)

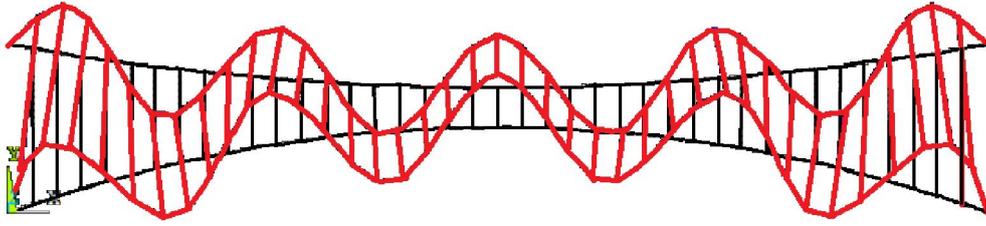


Figure 5-37: Forme du mode 9 (symétrique)

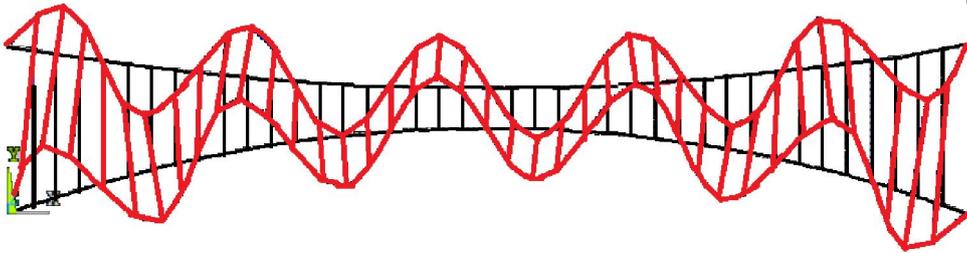


Figure 5-38: Forme du mode 10 (antisymétrique)

CHAPITRE 6

CONCLUSIONS GENERALES

Les considérations développées dans ce qui suit présentent un caractère assez général. Les conclusions particulières dégagées à la fin de certains chapitres ne sont pas reprises ici en détail. On renvoie pour cela aux différents chapitres traitant les sujets spécifiques.

6-1 Rétrospective

Le but principal de ce travail consistait en premier lieu de développer une méthode de calcul, par modèle continu, simple mais suffisamment précise et fiable, permettant d'aborder le calcul statique et dynamique d'un ouvrage suspendu léger et sans poutre de rigidité qui se compose principalement d'une nappe de suspentes verticales réunissant un câble porteur et un câble de rigidité fixés en leurs extrémités à des massifs d'ancrage. Un tel système peut supporter éventuellement un tablier léger supposé dépourvu d'aucune rigidité propre appréciable pouvant dans le cas pratique être l'exemple d'une passerelle piétonnière très flexible dont l'implantation sera très intéressante dans des sites d'attraction. En deuxième lieu, il s'agissait de mettre en évidence, au moyen d'une analyse paramétrique appropriée, l'effet des paramètres principaux sur le comportement de la structure, et établir leurs valeurs critiques à partir desquelles la non-linéarité se révèle significative.

Les modélisations mathématiques ont été présentées d'une manière succincte en exploitant fondamentalement l'approche qui assimile le comportement de la nappe des suspentes à celui d'un voile continu et inextensible. Sous l'action des charges statiques et thermiques d'une part, les fondements théoriques de la méthode de calcul, essentiellement non linéaire, sont basés sur l'équation des déplacements orthogonaux et la condition d'immobilité des extrémités des câbles solidaires des massifs d'ancrage. Les équations qui en résultent, à caractère non linéaire décrivant les tractées ou les poussées dans les câbles, sont établies de façon à être résolues par la méthode de Newton-Raphson à double itération. Les sollicitations d'origine mécanique ainsi que les effets de changements de température liés aux agressions environnementales sont supposés appliqués dans le plan propre de la structure. Par analogie

avec la théorie des ponts suspendus à poutre de rigidité, les câbles sont supposés prendre appui sur les pylônes par l'intermédiaire de chariots de dilatation, afin qu'aucune réaction horizontale ne puisse s'exercer sur les pylônes. Sous l'effet dynamique d'autre part, la théorie linéaire en régime vibratoire libre a été adoptée. L'équation d'équilibre de mouvement vertical d'un élément différentiel dans la direction longitudinale de la structure ainsi que les équations des poussées résultantes engendrées dans les câbles sont linéarisées en négligeant les effets de second ordre liés aux grands déplacements. Cependant, seul le mouvement transversal vertical est considéré vu que la célérité des ondes de vibration longitudinales est généralement beaucoup moins importante que les ondes de vibration transversales. La résolution des équations qui en résultent conduit à des modes propres antisymétriques et à des modes propres symétriques qui caractérisent le comportement dynamique en régime vibratoire libre du système. Les fréquences propres de vibration et les déformées modales sont alors obtenues comme dans le cas d'un câble parabolique simple.

Les autres hypothèses admises qui délimitent les conditions de validité de la méthode de calcul sont principalement les suivantes:

- câble parfaitement flexible qui revient à énoncer en langage structural que, tout au long d'un câble en équilibre, le moment fléchissant est nul;
- inextensibilité des suspentes permettant d'assimiler le comportement de la nappe des suspentes à celui d'un voile continu et inextensible;
- câbles relativement peu profonds correspondant à un rapport flèche/travée ne dépassant pas l'ordre de 1/10 afin d'assimiler les chaînettes fortement aplaties, dans l'état initial, à des paraboles de 2^{ème} degrés;
- Lors du réglage initial, le câble porteur reprend la totalité des charges uniformément réparties dues au poids propre de l'ouvrage y compris le poids de l'ensemble des câbles et des suspentes, et auquel il faut ajouter les effets engendrés par la pré-tension du câble de rigidité.
- Surtensions négligeables dans le cas des modes propres antisymétriques.

La méthode est ensuite appliquée principalement à différents aspects de l'analyse statique et dynamique d'une passerelle piétonnière rigidifiée par câbles précontraints. Sous l'aspect statique, sont considérés différents types de charges verticales et plusieurs niveaux distincts de variations de température susceptibles de se produire lors de la vie de l'ouvrage. Sous l'aspect dynamique, les pulsations et les fréquences propres sont évaluées selon que le système est en mode de vibration antisymétrique ou symétrique. Les résultats sont confrontés avec succès à ceux issus du logiciel ANSYS, fortement connu internationalement, qui est un code essentiellement numérique basé sur la méthode des éléments finis dont le principe consiste de traiter la structure comme telle soit par modèle discret. Nous avons ainsi pu examiner par le biais de l'analyse paramétrique l'influence des paramètres clés comme la cambrure, la pré-tension du câble de rigidité et l'intensité des charges appliquées. Les résultats ont été présentés sous forme graphique en vue de montrer l'influence du câble raidisseur cambré sur les déplacements (flèche) et les efforts engendrés dans les câbles en fonction de l'intensité des charges et leurs dispositions respectives. En conséquence, nous avons pu juger de la valeur et du mérite des hypothèses simplificatrices du système continu et nous renseigner sur la non-linéarité géométrique en fonction des paramètres principaux selon les critères admis.

6-2 Organisation du travail

Le travail présenté dans cette thèse a été organisé en 6 chapitres dont le premier en guise d'introduction a été consacré essentiellement à la nature de la problématique et à la question des structures suspendues ainsi qu'à la description des objectifs fixés. Plusieurs points ont été abordés dont la revue bibliographique des méthodes de calcul antérieures mettant en évidence la modélisation mathématique des réseaux à câbles. Les calculs peuvent être menés suivant deux approches distinctes soit par modèle continu en assimilant le comportement de la nappe des suspentes à un voile continu et inextensible soit par modèle discret en considérant la structure discontinue à l'origine.

Le chapitre deux analyse les conditions de durabilité et les vibrations des câbles dans le but de mettre en relief la vulnérabilité des agressions environnementales (température, pluie, vent, ...) et le phénomène vibratoire qui en résultent pouvant, s'ils ne sont pas maîtrisés, endommager par fatigue les câbles et ainsi mettre en péril la stabilité de l'ouvrage. Les conséquences des facteurs de vieillissement des câbles et le choix des matériaux constitutifs

de base ont été tout d'abord rapportés et commentés. Suivi ensuite de la revue des paramètres aérodynamiques des câbles où sont présentés d'une manière succincte les phénomènes physiques susceptibles de donner lieu à des vibrations. Quelques actions permettant de combattre ces vibrations étaient également rapportées et analysées.

Le chapitre suivant a été consacré à la revue d'une manière approfondie et commentée des formulations théoriques décrivant le comportement statique et dynamique d'abord d'un câble seul et ensuite d'un système à treillis de câbles dont les courbures sont convexes ou concaves. Des exemples d'illustration étaient apportés dans le but de comprendre les fondements mathématiques de base des méthodes de calcul qui sont parfois assez laborieuses à cause surtout du problème des grands déplacements. Les câbles sont admis de forme parabolique et supposés ancrés solidement à des massifs d'ancrage.

Le chapitre quatre a traité à la présentation des développements théoriques de la méthode de calcul d'un système vertical précontraint sans poutre de rigidité en utilisant l'approche fondamentale qui assimile le comportement de la nappe des suspentes à celui d'un voile continu et inextensible. Sous charges statiques et thermiques, les équations à caractère non linéaire décrivant les tractées dans les câbles sont établies de façon à être résolues par la méthode de Newton-Raphson à double itération. On suppose de plus, par analogie avec la théorie des ponts suspendus à poutre de rigidité, que les câbles reposent sur les pylônes par l'intermédiaire de chariots de dilatation, afin qu'aucune réaction horizontale ne puisse s'exercer sur les pylônes. Sous l'action dynamique, la théorie linéaire en régime vibratoire libre a été adoptée afin de dériver l'équation d'équilibre de mouvement vertical d'un élément différentiel et les équations des poussées résultantes engendrées dans les câbles en négligeant les effets de second ordre liés aux grands déplacements. Cependant, seul le mouvement transversal vertical a été considéré à cause de la vitesse des ondes de vibration longitudinales qui est généralement beaucoup moins importante que les ondes de vibration transversales verticales. Ainsi, la résolution des équations qui en résultent conduit à des modes propres antisymétriques et à des modes propres symétriques. Les fréquences propres de vibration et les déformées modales seront obtenues par analogie au cas d'un câble parabolique simple.

L'avant dernier chapitre a été consacré à l'implémentation numérique et à l'analyse des résultats où dans un premier temps nous avons décrit le programme de la méthode de calcul ainsi établie par des applications numériques portant sur l'analyse d'une passerelle suspendue

soumise à l'action de charges verticales suivies d'une variation de température appliquées dans le plan général du système. Dans un deuxième temps, nous avons effectués une analyse paramétrique appropriée afin de mettre en évidence certains paramètres clés les plus influents sur le comportement de la structure comme la cambrure et la pré-tension du câble de rigidité tout en portant attention à la non-linéarité qui pourrait se révéler simultanément. Nous avons également présenté les dix premières fréquences propres de vibration de la structure, obtenues par la théorie linéaire en régime vibratoire libre, ainsi que leurs modes de vibration correspondants affichés par le code ANSYS.

6-3 Résultats obtenus

La méthode analytique de calcul ainsi établie, nous permet de procéder aisément à l'analyse du comportement statique et dynamique d'un ouvrage suspendu léger sans poutre de rigidité en tenant compte des effets d'origine mécanique et thermique. Son fondement théorique est simple. Appliquée à une passerelle piétonnière rigidifiée par câble cambré et sollicité dans son propre plan par des charges verticales de service suivi d'une variation de température, la méthode semble fiable et efficace.

La comparaison des résultats obtenus révèle une excellente précision que l'on peut obtenir avec la modélisation numérique basée sur le principe de discrétisation par éléments finis où l'erreur n'excède guère en moyenne 2%. Les effets de l'augmentation des températures dans la structure se traduisent dans la structure par l'accroissement des flèches et par la détension des éléments de la suspension (câbles, suspentes) qui se manifestent par la réduction sensible des efforts.

Toutefois, l'invalidité de la méthode de calcul apparaît dans des conditions de pré-tension faible, de charges excessives et du rapport élevé flèche/travée lié au câble porteur en d'autres termes lorsque le comportement de la structure devient nettement non linéaire. Les hypothèses de la modélisation numérique sont évidemment plus réalistes que les simplifications admises de continuité et d'inextensibilité des suspentes. Cela confère bien entendu au modèle discrétisé plus de souplesse que n'en possède le modèle analytique ou continu puisqu'il permet de tenir compte des conditions d'appuis, de la présence des pylônes et de n'importe quelle direction de la sollicitation. L'avantage de la méthode analytique proposée demeure, par conséquent, dans la faible taille du problème résultant qui permet un traitement très aisé et

rapide sur un micro-ordinateur simple, ce qui répond avec succès à un objectif tant recherché sur le plan théorique et pratique.

Quant aux résultats de l'analyse paramétrique, nous pouvons en dégager les conclusions suivantes :

- La courbure et la précontrainte du câble de rigidité contribuent très efficacement à la stabilité de la structure. Les résultats obtenus démontrent qu'avec des valeurs relativement élevées de la cambrure, on pourrait réduire de façon appréciable (jusqu'à environ 60%) les déplacements et les variations des poussées par rapport à une cambrure quasi-rectiligne qui a été la configuration généralement utilisée jusqu'ici dans les cas pratiques.
- Sans affecter significativement la hausse du poids propre de la travée, un choix adéquat de la courbure et de la précontrainte du câble de rigidité permet de réduire sensiblement la déformabilité à laquelle sont sujettes en majorité ce types de structures suspendues.
- La flèche du câble porteur agit dans le même sens que celle du câble de rigidité : les effets engendrés dans la structure (efforts et déplacements) lui sont inversement proportionnels.
- La non-linéarité observée est du type positif ou favorable et contribue à la rigidification du système ; elle devient de plus en plus importante au fur et à mesure que la cambrure et la précontrainte du câble de rigidité diminuent.

6-4 Recommandations futures

Ce qu'on pourrait enfin suggérer comme études futures pour l'amélioration de ce thème de travail sont les suivantes :

- Entreprendre une analyse paramétrique afin de montrer l'influence des pylônes (conditions d'appuis, sections, etc.).

- Effectuer si possible quelques tests en laboratoire en vue de mesurer concrètement la nature des hypothèses émises et d'observer l'influence stabilisatrice de la cambrure du câble de rigidité qui pourrait être de grande importance pratique pour l'ingénieur.

- Etendre la théorie du modèle dit continu aux charges horizontales, telles que par exemple sous l'effet quasi-statique du vent en exploitant la voie de la théorie des structures hyperstatiques d'ordre infini qui fondamentalement exploite le principe de superposition des petits effets.

- Poursuivre et raffiner la méthode de calcul des fréquences propres de vibration en procédant à des tests numériques.

RÉFÉRENCES

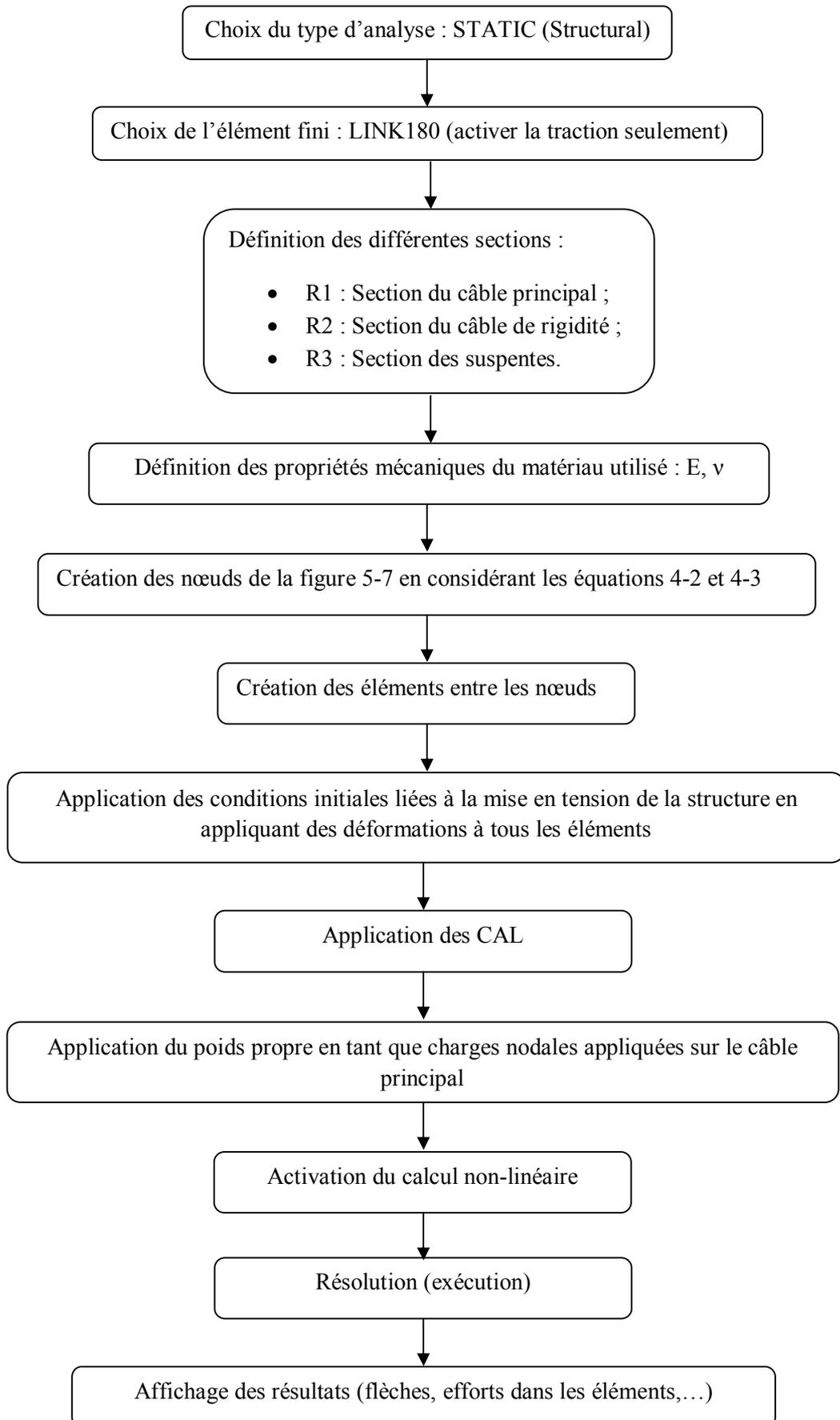
- [1] Courbon, J., 1950. Application de la résistance des matériaux au calcul des ponts, Dunod, Paris.
- [2] Timoshenko, S.P., 1953. The collected papers, New-York, Mc Graw-Hill Book Company, pp. 448-462.
- [3] Juozpaitis A. and al., 2010. Non linear analysis of suspension bridges with flexible and rigid cables, Journal of Civil Eng. and Mang., 16:1, pp.149-151.
- [4] Desai Y.M. and al., 1989. Geometric nonlinear static analysis of cable supported structures, Computers & Structures, V. 29, N° 6, pp. 1001, 1009.
- [5] Goremikins V. and al., 2013. Simplified method of determination of natural-vibration frequencies of prestressed suspension bridges, Procedia Engineering, 57, pp. 343-352.
- [6] Grogorjeva T., Juozpaitis A. and Kamaitis Z., Static analysis and simplified design of suspension bridges having various rigidity of cables, 2010, Journal of Civil Eng. And Mang., 16:3, pp. 363-371.
- [7] Chen Z. and al., A simplified structural mechanics model for cable truss footbridges and its implications for preliminary design, 2014, Engineering Structures, 68, pp. 121-133.
- [8] Grigorjeva T. and Juozpaitis A., Revised engineering method for analysis of behavior of suspension bridge with rigid cables and some aspects of numerical modeling, 2013, Procedia Engineering, 57, pp. 364-371.
- [9] Shrefler B.A. and Odorizzi S., 1983. A total lagrangian geometrically non-linear analysis of combined beam and cable structures, Computers & Structures, V. 17, N° 1, pp. 115, 127.
- [10] Otto, F. et Schleyer, F.K., 1969. Cable structures, tensile structures, V.2, MIT Press, Massachussets.
- [11] Massimo, M., 1971. Structures suspendues, système Jawerth, Interstatic, Bologne, Italie.
- [12] Möllman, H., 1970. Analysis of plane prestressed cable structures, ASCE, J. Str. Div., Oct. pp. 2059-2083.
- [13] IASS Pacific symposium, Tension structures and space Frames, Part II, 1971, Architec. Inst. of Japan Tokyo and Kyoto.
- [14] Ozdemir, H., A finite element approach for cable problems, Int. J. Solids & Structures, Oct.1978, pp. 427-437.
- [15] Gandhir, M. L. et Batchlor, B., A finite element for 3D prestressed cable nets, Int. J. Numer. Methods Eng. V.11, 1977, PP. 905-929.

- [16] Krishna, P., 1971. Theoretical analysis of pretensioned cable networks, IASS Pac. Sym. Part II
- [17] Tottenham, H. et Williams, P.G., Cable net: continuous system analysis, ASCE, J. Eng. M. Div. , June 1970.
- [18] Kmet S. and Kokorudova Z., Non-linear closed-form computational model of cable trusses, International Journal of Non-Linear Mechanics, 44, 2009, PP. 735-744.
- [19] Courbon, J., 1975. Structures hyperstatiques d'ordre infini, Annales ITBTP, TMC190, N°334, PP. 91-133.
- [20] Siev, A. et Eidelman, J., Stress analysis of prestressed roofs, ASCE, J. Str. Div., Aug. 1967, PP. 103-121.
- [21] Krishna, P. et Sparkes, S.R., 1986. An influence coefficient method for pretensioned cable systems, Inst. Civ. Eng. Proc., V41, PP. 543-548.
- [22] Krishna, P. et Natrajan, P.R., Analysis of doubly curved suspended cable networks, June 1986, Int. Ass. of Shell Structure, Bul. N°34.
- [23] Krishna, P., 1964. Analysis of funicular suspension systems, Ph. D. thesis, University of London.
- [24] SETRA, novembre 2001. Haubans, Recommandations de la commission interministérielle de la précontrainte, www.setra.equipement.gouv.fr.
- [25] Virlogeux M, 1998. Cable vibration in cable stayed bridges, Bridge aerodynamics, Larsen Esdahl editors, Rotterdam.
- [26] Virlogeux M, Lacoste G., Fontaine J.F., Le faucheur D., Mai 1986. Réflexions sur la résistance à la fatigue des haubans : détermination des conditions de l'essai de réception des haubans et des ancrages du pont de Seyssel.
- [27] Laboratoire central des ponts et chaussées (LCPC), 1989. Les ponts suspendus en France, Service d'études techniques des routes et autoroutes, Paris.
- [28] Latteur P., 2014. Calculer une structure – de la théorie à l'exemple, Chapitre 13_Les câbles, ed. academia-Bruylant, www.issd.be.
- [29] Berthier Y., Vincent L. Et Godet Y., 1988. L'usure et la fissuration induite en petits débattements : genèse, formalisme et remède, Mécanique, Matériaux, Electricité, V.248, octobre.
- [30] Filippo Gazzola, 2015, Mathematical models for suspension bridges, Springer.
- [31] Gimsing N., 2012, Cable supporting bridges: Concept and design, third edition, Wiley.
- [32] Irvine, M., 1974. Studies in the statics and dynamics of simple cable systems, PhD Thesis, Dynamics laboratory, California institute of technology, DYNL-108.

- [33] Routh E.J., 1891. Analytical statistics, Cambridge, Vol. 1, Chapter X.
- [34] Pugsley, A.G., 1957. The theory of suspension bridges, Edward Arnold, London, Chapters I,II,III.
- [35] O'Brien T., February 1967. General solution of suspended cable problems, Journal of the structural division, American society of civil engineers, ST1, V93, P.1-26.
- [36] Whittaker E.T., 1944. Analytical dynamics, Fourth edition, Dover, pp. 34, 177.
- [37] Watson G.N., 1966. Theory of Bessel functions, Second edition, Cambridge, pp. 3-5.
- [38] Routh E.J., Advanced dynamics of rigid bodies, Sixth edition, Dover, 1955, p.178, Chapter XIII.
- [39] Rhors J.H., 1851. On the oscillations of a suspension chain, Transaction Cambridge philosophical Society, Volume IX, Part III, pp. 379-398.
- [40] Vincent G.S., 1965. A summary of laboratory and field studies in the united states on wind effects on suspension bridges, Proceedings of conference on wind effects on buildings and structures, Teddington, England, V. II pp. 512-522.
- [41] Saxon, D.S. and Cahn A.S., 1953. Modes of vibration of a suspended cable, Quarterly journal of mechanics and applied mathematics, Vol. VI, part 3, pp. 273-285.
- [42] Shrefler B.A. and Odorizzi S., 1983. A total lagrangian geometrically non-linear analysis of combined beam and cable structures, Computers & Structures, V. 17, N° 1, pp. 115-127.
- [43] Grigorjeva T. and Juozpaitis A., 2013. Revised engineering method for analysis of behavior of suspension bridge with rigid cables and some aspects of numerical modeling, Procedia Engineering, 57, pp. 364-371.
- [44] ANSYS® Academic Research, Release 15.0 <http://www.ansys.com/>.
- [45] Sadaoui A., Lattari K. and Khennane A. , 2016. A novel analytical method for the analysis of cable-truss footbridges, *Engineering Structures*, 123, Pages 97-107. <http://dx.doi.org/10.201j.struct.2016.05.025>. Journalhomepage: www.elsevier.com/locate/engstruct.
- [46] Sadaoui A., Lattari K. and Khennane A., 2016. Effects of temperature changes on the behaviour of a cable truss system, *Journal of Constructional Steel Research*, November 2016, 129, Pages 111-118, <http://dx.doi.org/10.2016/J.Jcsr.2016.11.013>.
- [47] Routh E.J., 1955. Advanced dynamics of rigid bodies, Sixth edition, Dover, p.178, Chapter XIII.
- [48] Rohrs, J.H., 1941. The failure of the tacoma narrows bridge, Board of engineers, Amman O.H., Von Karman T., Federal work agency, March 28, Appendix VI.

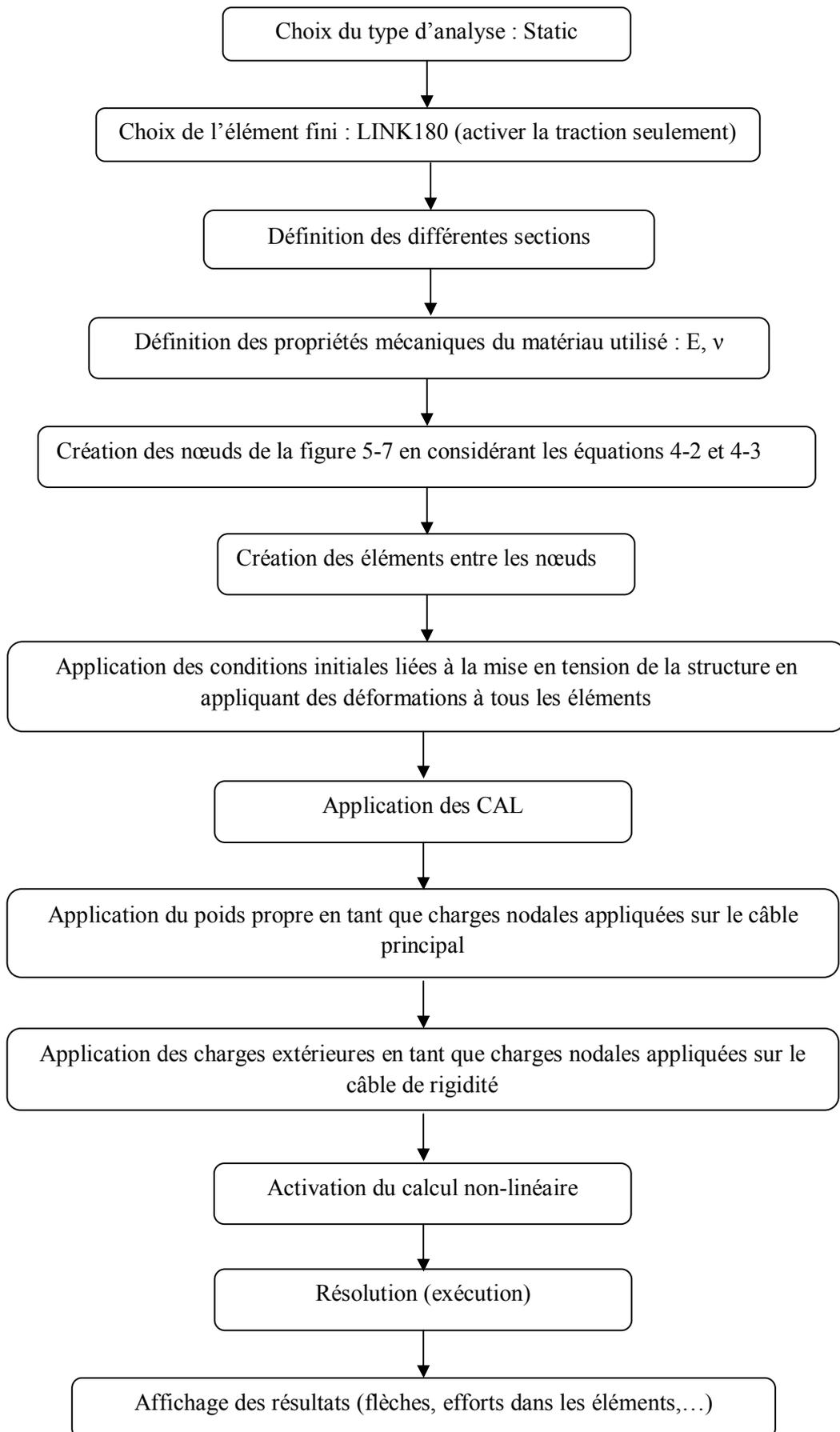
ANNEXE A

Organigramme du calcul statique des paramètres initiaux de la structure par le code ANSYS



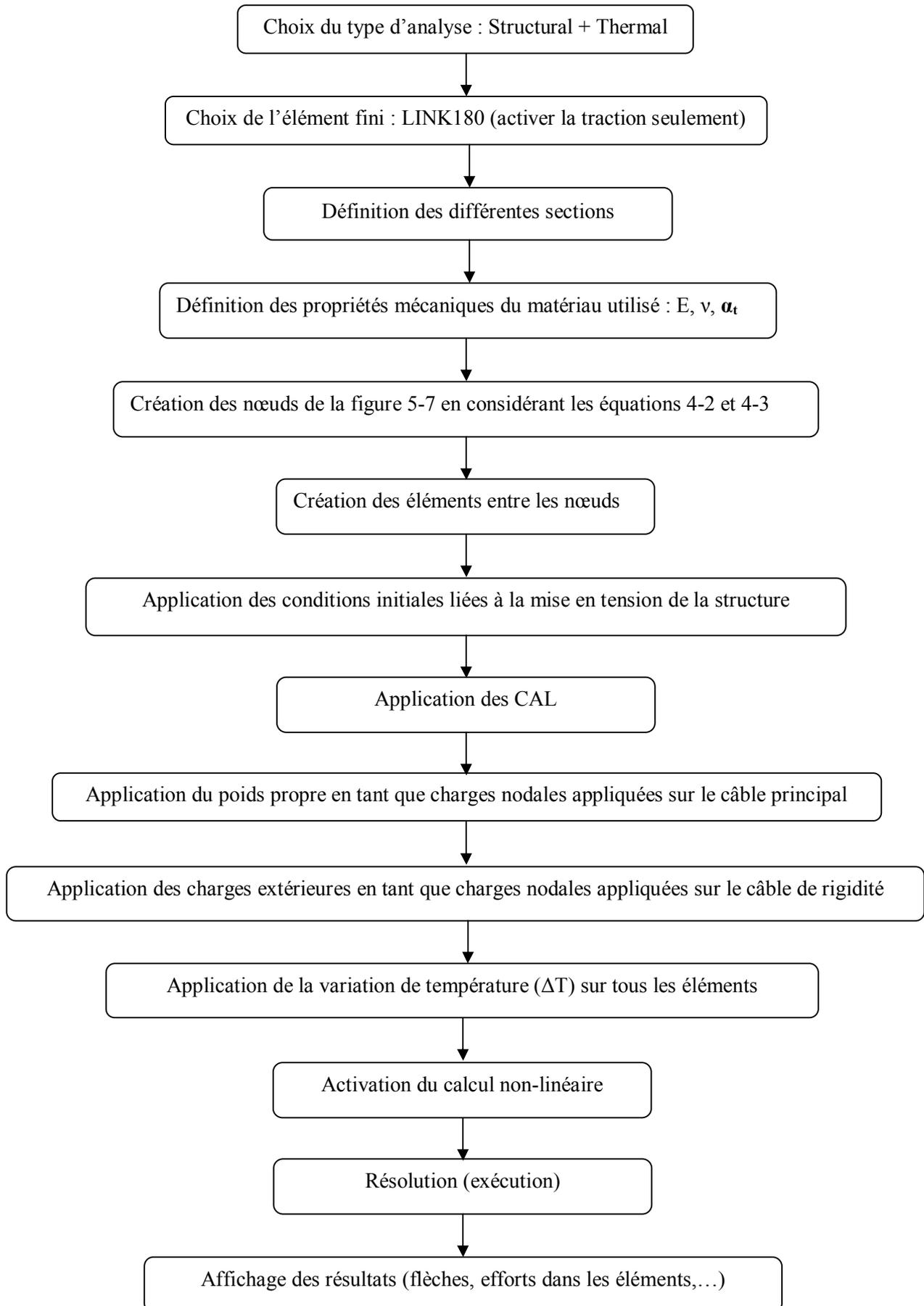
ANNEXE B

Organigramme du calcul statique sous charges verticales par le code ANSYS



ANNEXE C

Organigramme du calcul statique sous charges verticales suivies d'une variation de la température par le code ANSYS



ANNEXE D

Organigramme du calcul fréquentiel par le code ANSYS

