

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR**

**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU**

**FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE**

**DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE**



# **Mémoire de fin d'étude**

*En vue d'obtention du diplôme d'ingénieur d'Etat en Electrotechnique.*

*Option : Réseaux Electriques.*

## **THÈME**

*Etude d'une machine à réluctance variable  
linéaire par la méthode des éléments finis*

*Proposé et dirigé par :*

*Mr : M.ZAOUIA*

*Réalisé par :*

*M<sup>lle</sup>: REZGUI Rezika*

Promotion 2011



# *Remerciements*

*Je tiens à exprimer mes vifs remerciements pour mon promoteur  
M<sup>r</sup> M.ZAOUIA, Maître Assistant classe A de l'université Mouloud Mammeri  
de Tizi ouzou d'avoir accepté d'assurer la direction de mon travail et pour ses  
précieux conseils .*

*Je remercie également les membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait  
en acceptant de juger mon modeste travail*

*A tous les enseignants qui ont contribué à ma formation*

*A mes parents, mon mari et mes ami(e)s surtout Sihem ma meilleure amie.*

*A tous ceux qui m'ont soutenu durant tout ce cursus universitaire.*



*A tous merci*



**Je dédie ce travail à :**

*Je dédie ce modeste travail à :*

*Mon mari Djillali et ma fille Dalia*

*Mon père Arezki et ma mère Yamina*

*Mes frères Ramdhane, Nacer et Kamel*

*Ma chère sœur Ghania et son mari Nadir ainsi ses  
fils Rayane et Ahmed*

*Mon oncle Amar et sa femme Wardia*

*Ma grand-mère Djouhar*

*Tous mes cousins et cousines*

*Toutes mes tantes et leurs enfants*

*Mes beau parents Roza et Hassen*

*Mes beau frères Boukhalfa, Abdenour, Loucef et*

*Toufik*

*Ma belle sœur Fatma et son fils Hassen*

*A mes meilleures amies: Sihem, Dalia, Zazou, Nadia, Wrida,*

*Fazia, Djidji, Madoucha, ...*

**Rezika**

---

Introduction générale. ....	1
-----------------------------	---

## **Chapitre I : Généralités sur la machine à réductance variable linéaire**

Introduction .....	2
I.1. Principe de base .....	2
I.2. Domaines d'utilisation des MRV .....	5
I.3. Avantages et inconvénients des MRV .....	5
I.4. Les divers types de MRV .....	5
I.5. Caractéristiques électromagnétiques-énergie-couple .....	8
I.6. Machine linéaire à réductance variable .....	9
Conclusion.....	10

## **Chapitre II : Equations de Maxwell et modèle électromagnétique.**

Introduction .....	11
II.1. Les équations de Maxwell .....	11
II.2. Relation du milieu .....	12
II.3. Conditions aux limites .....	13
II.4. Modèle électromagnétique .....	14
II.4. Différentes méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles .....	18
Conclusion .....	24

## **Chapitre III : Méthode des éléments finis et discrétisation des modèles électromagnétiques.**

Introduction .....	25
III.1. Présentation de la méthode des éléments finis .....	25
III.2. Le maillage .....	26
III.3. Principe de la méthode des éléments finis .....	27
III.4. Formulation éléments finis des équations électromagnétiques .....	27
III.5. Les avantages et les inconvénients de la méthode des éléments finis .....	29
III.6. Présentation de FEMM (version 3.3) .....	33
Conclusion.....	34

## **Chapitre IV : Méthode de calcul de force magnétique.**

Introduction .....	35
IV.1. Méthode de la variation de la coénergie et de l'énergie magnétique ....	35
IV.2. Force de Lorentz .....	36
IV.3. Méthode des travaux virtuels .....	39
IV.4. Tenseur de maxwell .....	39
Conclusion .....	41

## **Chapitre V : Application et validation.**

Introduction .....	42
V.1. Présentation du dispositif .....	42
V.2. Dimensions géométriques de la machine .....	43
V.3. Organigramme .....	43
V.4. Résultats et discussion .....	44
Conclusion.....	50

Conclusion générale.....	51
--------------------------	----

Les machines à réluctance variable (MRV) ont été utilisées il y a un demi-siècle comme génératrices à hautes fréquences HF, pour la T.S.F (téléphone sans fil). Certaines études de cette époque, portant sur les couples créés par les encoches, auraient d'ailleurs pu servir de base à une théorie des machines à réluctance. En fait, celles-ci sont tombées dans l'oubli jusqu'en 1970 environ (hormis quelques machines spéciales : génératrices pour chauffage par induction, excitatrices pilotes d'alternateurs) ; elles sont alors réapparues en tant que moteurs (comme les actionneurs, relais électromécaniques). A l'heure actuelle, du fait de l'essor de la robotique et des progrès de l'électronique de puissance, les machines à réluctances variables sont en plein développement, tout en restant mal comprises, et souvent mal conçues [1].

Les systèmes électromagnétiques sont régis par des équations aux dérivées partielles lesquelles sont en fonction du paramètre fondamental qui n'est autre que le champ électromagnétique. La résolution de ces équations s'effectue par des méthodes de calcul qui peuvent être analytiques ou numériques. Les méthodes analytiques sont efficaces mais limitées par la complexité géométrique, ce qui n'est pas le cas pour les méthodes numériques qui sont en plein essor grâce au développement de l'outil informatique. Parmi ces méthodes on retiendra la (M.E.F) qui est fortement développée. Ces principes sont relativement simples du point de vue mathématique. Elle est très adaptée à l'étude de géométrie complexe et aux traitements des systèmes non linéaires. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique de l'ingénieur [2].

Dans notre travail, un code de calcul numérique basé sur la méthode des éléments finis « Finite elements method magnétique » (FEMM) est appliquée à une machine à réluctance variable avec pour objectif de déterminer numériquement la répartition du champ magnétique dans la machine synchrone, ainsi que la force magnétique. Notre travail est structuré en cinq chapitres : Le premier chapitre est consacré aux généralités sur la machine à réluctance variable (MRV) et la structure de base. Le deuxième chapitre s'intéresse à la présentation des équations de Maxwell et modèle électromagnétique. Le troisième chapitre s'intéresse à la méthode des éléments finis qui est l'une des méthodes les plus utilisées pour résoudre les équations aux dérivées partielles, elle nécessite l'utilisation inverse de l'ordinateur. Le quatrième chapitre traite des méthodes de calcul des forces magnétiques par différentes méthodes dans le dispositif électromagnétique. Le cinquième et dernier chapitre sera consacré à l'étude d'une machine à réluctance variable linéaire. Enfin nous terminons notre travail par une conclusion générale.

## Introduction

Le principe des machines à réluctance variable (MRV) a été mis en œuvre depuis fort longtemps soit pour produire des courants de fréquence élevée (10KHZ), à l'époque des débuts de la radio, soit plus simplement pour réaliser des actionneurs du relais électromécaniques (électro-aimants à palette ou à noyau plongeur).

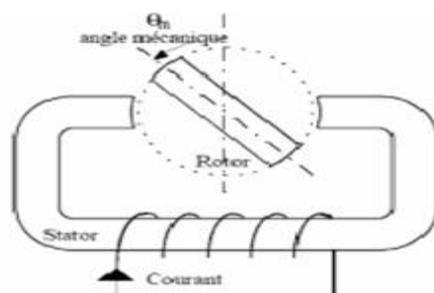
Les MRV ont trouvés un regain d'intérêts ces vingt dernières années, en association avec des alimentations électroniques de puissance, pour de petits appareillages (moteur pas-à-pas). L'emploi des MRV est envisagé actuellement pour des entraînements lents à couple élevé (machine vernier) [3].

### I.1. Principe de base

Le principe des machines à réluctance variable (MRV) est basé sur celui de l'électroaimant. Quel que soit le type de machine à réluctance variable étudié (cylindrique, linéaire, vernier à grosses dents...), le principe de fonctionnement est toujours identique si les couplages magnétiques entre phases sont négligeables. Il peut être décrit à partir de la structure monophasée élémentaire représentée (Figure I.1). Il s'agit d'un circuit magnétique simple constitué de deux pièces ferromagnétiques, l'une fixe (stator) comportant un enroulement à  $N$  spires parcourues par un courant  $i$  et l'autre mobile (rotor) autour d'un axe fixe. Soit  $\theta_m$  l'angle de l'axe longitudinal de la pièce mobile et celui interpolaire de la pièce fixe.

Le flux magnétique créé par les ampères-tours ( $Ni$ ) oscille entre deux valeurs extrêmes correspondant aux deux positions :

- **Une position d'opposition** (Figure I.1.a) dans laquelle le circuit magnétique présente une réluctance maximale, ou une inductance minimale.
- **Une position de conjonction** (Figure I.1.b) dans laquelle le circuit magnétique présente une réluctance minimale, ou une inductance maximale [1].



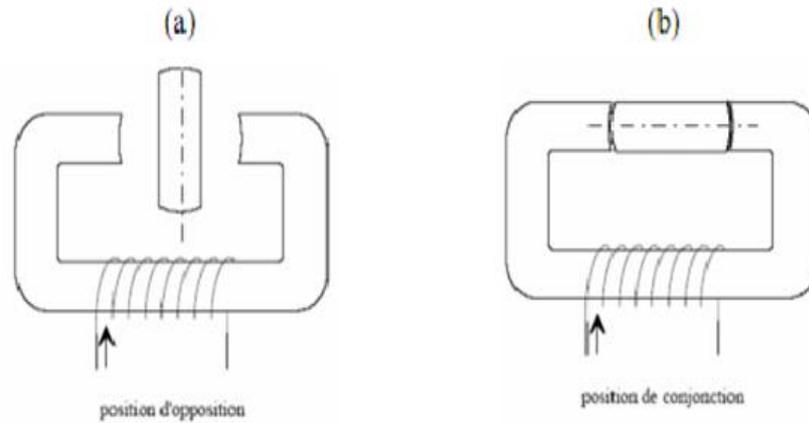


Figure I.1 : Structure de base de MRV et positions extrêmes du rotor.

A partir de la position d'opposition ( $\theta_m = 0$ ), pour que la pièce ferromagnétique rotorique se mette à tourner, nous devrions alimenter l'électroaimant fixe jusqu'à la position de conjonction ( $\theta_m = \pi/2$ ), selon la règle « flux max. ou de la réluctance min. », et ainsi de suite ...

Sachant que l'expression du couple électromagnétique est :

$$T_e = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial \theta_m} \quad (\text{I.1})$$

L'alimentation de la machine avec un courant constant lors de la phase croissante ou décroissante d'inductance.

(Figure I.2) donnera le régime de fonctionnement souhaité :

- **Moteur** ( $T_e > 0$ ) sur la phase croissante de l'inductance  $\left[ \frac{\partial L(\theta_m)}{\partial \theta_m} > 0 \right]$ .
- **Générateur** ( $T_e < 0$ ) sur la phase décroissante de l'inductance  $\left[ \frac{\partial L(\theta_m)}{\partial \theta_m} < 0 \right]$ .

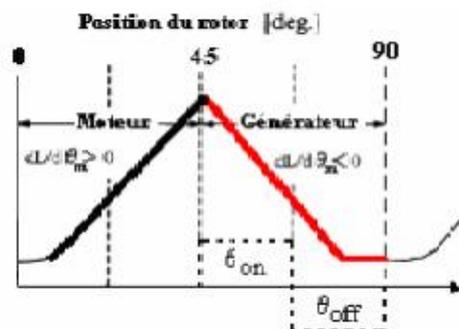


Figure I.2 : Variation de l'inductance en fonction de la position du rotor.

Typiquement, il y a un nombre inégal de pôles saillants au stator et au rotor. Il existe pour cela des règles régissant le nombre de dents statoriques  $N_S$  et rotoriques  $N_r$  ainsi que le nombre de phases  $k$  pour assurer un bon fonctionnement de la MRV. Soit la MRVDS triphasée donnée par la (Figure I.3.a). ou  $N_S = 6$  dents (stator) et  $N_r = 4$  (rotor)

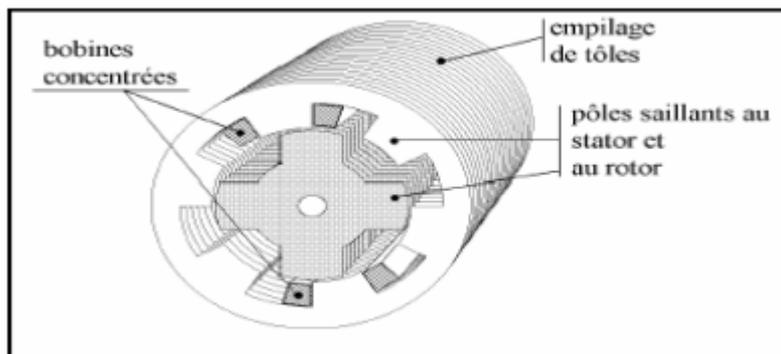


Figure I.3.a : Structure électromagnétique d'une MRVDS 6/4 triphasée.

Si le rotor se trouve dans une position intermédiaire entre l'opposition et la conjonction, l'injection d'un courant dans l'enroulement d'excitation modifie l'état du système qui tend alors à présenter une réluctance minimale (flux maximal) ; on observe ainsi une rotation du rotor vers la position de conjonction. Lorsque le courant est supprimé, si l'énergie cinétique emmagasinée durant la rotation est suffisante pour l'amener jusqu'à l'opposition, alors on peut répéter le cycle et obtenir un mouvement continu de rotation (Figure I.3.b).

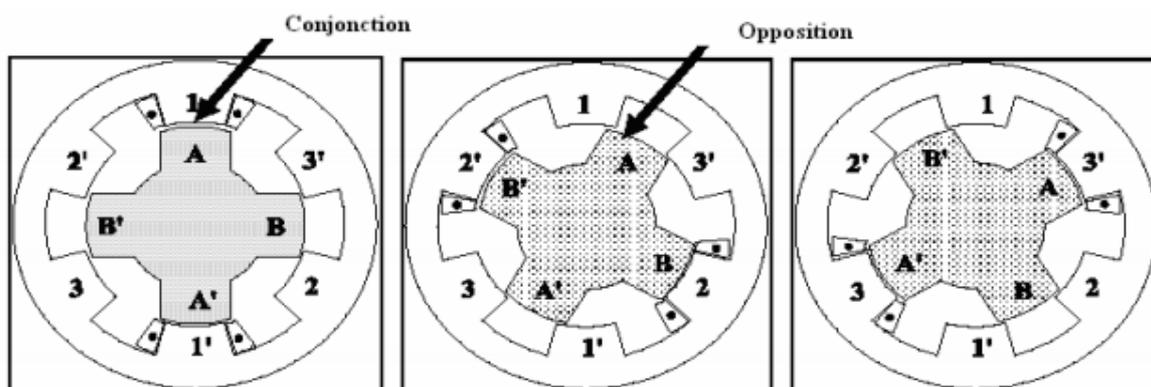


Figure I.3.b : Positions d'opposition et de conjonction d'une MRVDS 6/4.

La période de variation de la réluctance vue d'une phase correspond au passage de la Conjonction d'une dent à la conjonction de la dent suivante.

La relation entre angles électrique  $\theta_e$  et mécanique  $\theta_m$  est donnée par :

$$\theta_e = N_r \cdot \theta_m \quad (I.2)$$

## I.2. Domaines d'utilisation des MRV

En pratique, on distingue deux domaines d'application des moteurs à réluctance variable [2]:

- **Utilisation en moteur pas à pas** : on envoie un certain nombre d'impulsions sur les bobines des phases successives : le rotor avance d'un nombre de pas égal au nombre d'impulsion. Cette utilisation, la plus classique, permet de réaliser des déplacements ou des positionnements précis avec une commande en boucle ouverte. Plus la précision demandée est grande, plus il faut de pas par tour.
- **Utilisation en moteur à vitesse variable** : on concurrence pour certaines applications avec le moteur asynchrone à cage ou le moteur synchrone à aimants permanents. Le moteur à réluctance variable est alors à commutation ; c'est-à-dire que le courant dans chacune des phases est à chaque période établi puis coupé par un convertisseur.

## I.3. Avantages et inconvénients des MRV

Par rapport aux machines classiques AC et DC, les MRV présentent les avantages suivants :

- ∅ Structure simple et robuste pour un faible coût de fabrication.
- ∅ Possibilité de fonctionnement à puissance quasi constante sur une large plage de vitesse.
- ∅ Pertes essentiellement concentrées au stator donc refroidissement aisé.
- ∅ Fonctionnement possible grâce à l'indépendance de chaque phase.
- ∅ Couple massique relativement élevé, ...

La MRV a cependant quelques limites :

- ∅ Elle doit être commutée électroniquement et ne peut donc être alimentée directement par une source alternative (AC) ou (DC).
- ∅ Ses caractéristiques magnétiques non linéaires compliquent son analyse et son Contrôle.
- ∅ Sa structure dentée, cause d'oscillations de couple et de bruits, surtout à vitesse élevée.

## I.4. Les divers types de MRV

Les machines utilisant systématiquement l'effet de réluctance variable sont à double saillances, c'est-à-dire que pour renforcer cet effet on utilise la saillance du fer du stator et

celle du fer du rotor. Ces machines à double saillances peuvent être à circuit magnétique unique ou multiple [2].

### I.4.1. Moteurs à circuit magnétique simple

#### I.4.1.a Moteurs à « grosses dents »

La figure (I.4) présente un exemple d'un moteur à simple circuit, à 6 dents (ou pôles ou plots) statoriques et 4 dents rotoriques. Le stator et le rotor sont obtenus par empilage de tôles. Le rotor n'est pas bobiné, les bobines sont placées autour des dents du stator ; ici le stator est triphasé. Le stator et le rotor sont caractérisés, dans ce cas, par un pas dentaire différent, donc ce moteur présente 12 pas par tour.

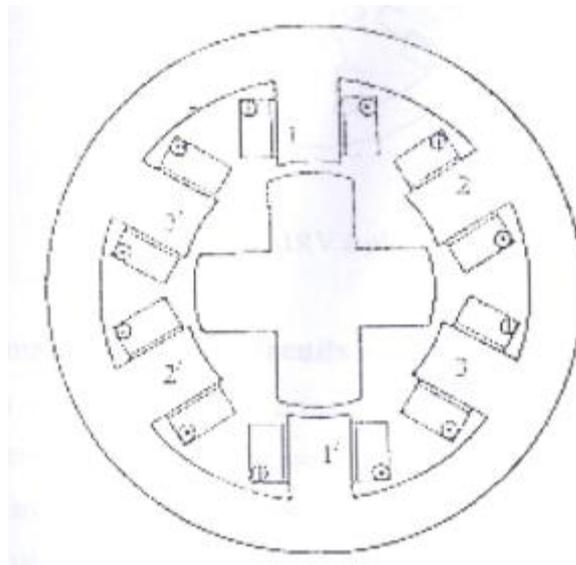


Figure I.4 : MRV a grosses dents

#### I.4.1.a Moteurs à « petites dents »

Pour augmenter le nombre de pas par tour sans augmenter le nombre de bobines, on utilise des pôles statoriques dentés. La largeur des dents doit être la même au stator et au rotor.

La figure (I.5) représente un exemple d'un moteur triphasé (à simple circuit) à plots dentés :

Le rotor comporte 16 dents, le stator comporte 6 pôles (12 dents).

Comme il y a 16 pas dentaires sur le rotor, ce moteur présente 48 pas par tour.

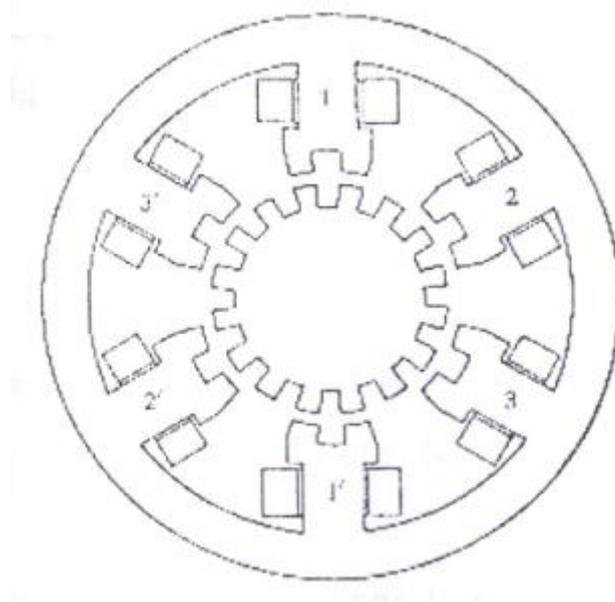


Figure I.5 : MRV à plots dentés.

#### I.4.2. Moteurs à plusieurs circuits magnétiques

En associant sur un même arbre  $q$  machines monophasées à réluctance pure (quelles soit à petites ou grosses dents), on peut réaliser une machine polyphasée, à condition que les angles (denture de rotor, denture de stator) des différentes galettes soient décalés les uns par rapport aux autres de [1] :

$$(m/q)\delta_r \quad (I.3)$$

Avec  $\delta_r$  : pas angulaire rotorique.

$q$  : nombre de galettes (phases).

$m$  : entier entre 1 et  $q$ .

La figure (I.6) représente le schéma de principe de telle machine dite machine polyphasées.

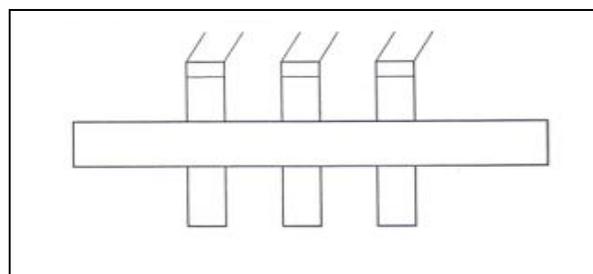


Figure I.6 : Machine triphasée à trois galettes monophasées

### I.5. Caractéristiques électromagnétiques-energie-couple

Dans une MRV, le flux varie en fonction de la position du rotor et des ampères tours injectés dans une phase du stator, soit :  $\psi = \text{fonction}(N, i, \theta)$  (I.4)

De ces caractéristiques électromagnétiques (Figure I.7.a), nous pouvons déduire l'allure de l'inductance en fonction de la position et l'état de saturation (Figure I.7.b) [1].

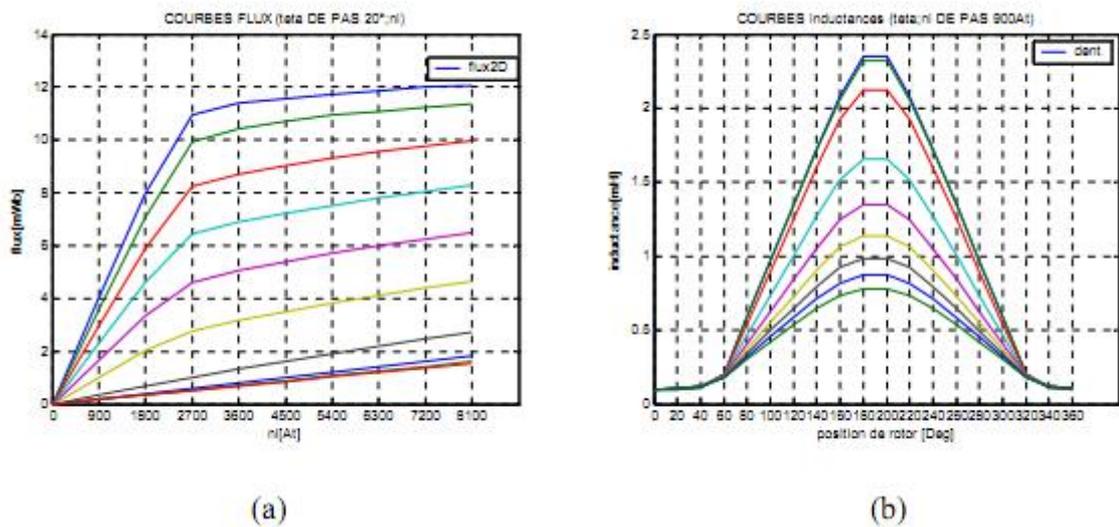


Figure I.7 (a), (b) : Caractéristique flux-At (pas de  $\theta = 20^\circ$ )

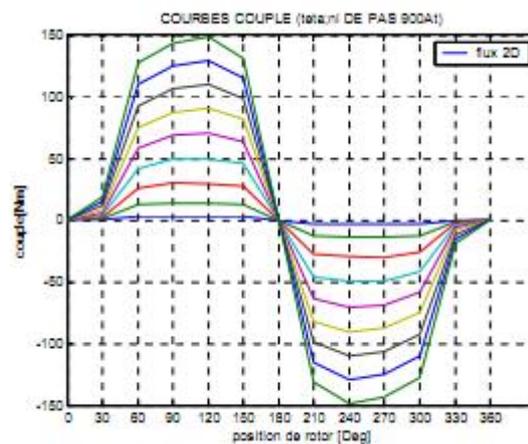


Figure I.7.c : Allure du couple en fonction de la position et de l'état de saturation

Nous pouvons aussi en déduire le couple développé (Figure I.7.c) ou le calculer selon la méthode des travaux virtuels à partir d'une variation d'énergie ou de coénergie (Figure I.8) entre les deux positions extrêmes (conjonction et opposition) [1] :

- Energie magnétique :  $W_e = \int i \cdot \partial\psi$  (I.5)

$$T_e = - \left( \frac{\partial W_e}{\partial \theta} \right)_{\psi = \text{cst}} \quad (\text{I.6})$$

- Coénergie :  $W_c = \int \psi \cdot \partial i$  (I.7)

$$T_e = \left( \frac{\partial W_c}{\partial \theta} \right)_{i = \text{cst}} \quad (\text{I.8})$$

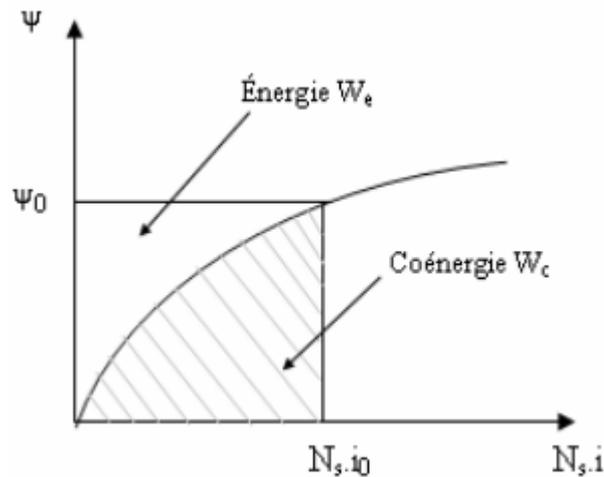


Figure I.8 : Représentation de l'énergie et de la coénergie

En régime linéaire, on montre que le couple s'exprime de la manière suivante :

$$T_e = \frac{1}{2} \cdot i^2 \cdot \frac{\partial L}{\partial \theta_m} \quad (\text{I.9})$$

Qui indique que le couple ne dépend pas du sens du courant d'où possibilité d'une alimentation en courant unidirectionnel. Par contre, le couple dépend de la dérivée de l'inductance  $L$  par rapport à la position du rotor  $\theta$ , d'où les deux types de fonctionnements déjà présentés dans la figure (I.2).

## I.6. Machine linéaire à réluctance variable (MRV)

Dans ce qui suit nous présentons une machine linéaire, le principe de son fonctionnement est le même que la machine à réluctance variable tournante. La fig. I.9, montre une configuration d'une machine à réluctance variable à quatre phases. La figure I.10, montre la distribution du flux magnétique dans la machine.

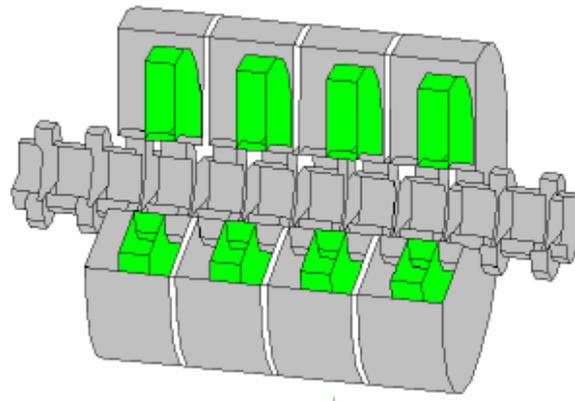


Figure I.9 : Configuration d'une machine linéaire à réluctance variable

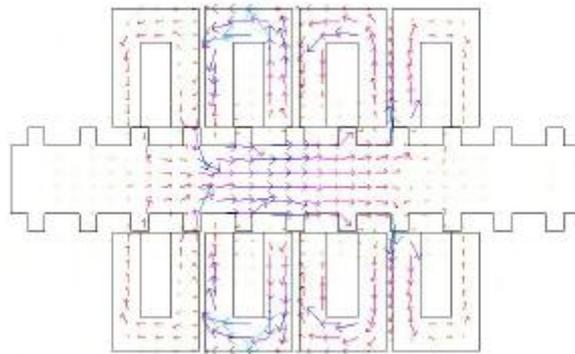


Figure I.10 : Distribution des lignes de Flux magnétique

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le principe de fonctionnement d'une machine à réluctance variable qui comporte toujours des matériaux ferromagnétiques dont la forme géométrique modifie la configuration du champ magnétique produit par un ou plusieurs bobinages. La conversion électromécanique est possible, lorsque la disposition spatiale des matériaux ferromagnétiques et des bobinages obéit à des règles topologiques. Les structures des machines qui en découlent sont très variées, ce qui permet de proposer des solutions utilisant la réluctance variable à des problèmes techniques très différents comme les machines très rapides à rotor massif, les moteurs-couples très lents ou les moteurs pas à pas ayant un grand nombre de pas par tour.

## Introduction

Les équations de Maxwell, sont des lois fondamentales de la physique. Elles constituent les postulats de base de l'électromagnétisme avec l'expression de la force électromagnétique de Lorentz. Les équations de Maxwell traduisent sous forme locale, les différents théorèmes (Gauss, Ampère, Faraday) qui régissent l'électromagnétisme sous forme de relations intégrales. Elles donnent ainsi un cadre mathématique précis au concept fondamental de champ introduit en physique par Faraday.

Sur la base des équations de Maxwell, on construira les modèles électromagnétiques en régime statique et en régime dynamique (magnétostatique et magnétodynamique) en coordonnées cartésiennes et cylindriques sous forme d'équations aux dérivées partielles. On exposera par la suite les différentes méthodes (analytiques et numériques) de résolution de ces équations d'une manière globale en se basant sur les avantages et les inconvénients de chacune d'entre elles pour pouvoir effectuer un choix selon deux critères essentiels, à savoir le temps de calcul et la précision des résultats à obtenir [4].

### II.1. les équations de Maxwell

La première étape dans l'étude des problèmes physiques c'est l'établissement des équations qui le régissent. Pour établir ces équations, on fait appel aux équations de Maxwell. En effet, en démarrant des relations fondamentales de l'électricité et du magnétisme, Maxwell est arrivé à mettre en place quatre équations qui regroupent les deux domaines, c'est l'électromagnétisme.

Ces quatre équations gouvernent d'une manière très efficace avec les relations relatives à la constitution des milieux du dispositif à étudier et la loi d'Ohm généralise tous les phénomènes électromagnétiques du moment qu'elles sont utiles de toute analyse de ce genre [5].

#### II.1.1. Première équation de maxwell

Cette équation exprime la conservation des charges électriques de conduction.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{II.1})$$

Avec :

$\vec{D}$  : Vecteur de déplacement ou excitation électrique [C/m<sup>2</sup>].

$\rho$  : Densité de charge volumique [C/m<sup>3</sup>].

#### II.1.2. Deuxième équation de Maxwell

Cette équation caractérise le couplage entre les phénomènes magnétiques et les phénomènes électriques.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.2})$$

Avec :

$\vec{B}$  : Vecteur induction magnétique [T].

$\vec{E}$  : Vecteur champ électrique [V/m].

### II.1.3. Troisième équation de Maxwell

Cette équation exprime le champ B qui est à flux conservatif.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II.3})$$

### II.1.4. Quatrième équation de Maxwell

Cette équation exprime que le fait que le champ magnétique peut être créé non seulement par un courant électrique mais aussi par la variation d'un champ électrique.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II.4})$$

Avec :

$\vec{J}_c$  : Vecteur densité de courant de conduction [A/m<sup>2</sup>].

## II.2. Relation du milieu

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r \quad (\text{II.5})$$

Avec :

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0 \quad (\text{II.6})$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{II.7})$$

$\vec{B}_r$  : vecteur induction magnétique rémanente [T].

$\epsilon$  : Permittivité électrique [F/m]

$\mu$  : Perméabilité magnétique [H/m]

$B_r = 0$ , car le phénomène de l'alimentation rémanente dans les ferromagnétiques est négligeable.

## II.3. Loi d'Ohm

$$\vec{j}_{ind} = \sigma \vec{E} \quad (\text{II.8})$$

Avec le terme courant de source, la loi d'Ohm s'écrira :

$$\vec{j}_c = \sigma \vec{E} + \vec{j}_s \quad (\text{II.9})$$

$\vec{j}_{ind}$ : Densité du courant induit [A/m<sup>2</sup>]

$\vec{j}_s$ : Densité du courant de source [A/m<sup>2</sup>]

$\sigma$ : Conductivité électrique [ $\Omega \cdot m^{-1}$ ]

### II.3. Conditions aux limites

La résolution des équations de Maxwell en particulier, ainsi que des équations aux dérivées partielles de manière générale nécessitent l'ajout des conditions aux limites associées aux problèmes étudiés [6] :

On distingue trois conditions aux limites :

#### 1- Condition de DIRICHLET

Dans ce cas le vecteur potentiel magnétique est constant sur la frontière, ce qui veut dire que l'induction magnétique est parallèle à ce contour qui présente alors une équipotentielle.

On rencontre cette condition lorsqu'une partie ou tout le contour se trouve suffisamment éloigné des sources d'excitation pour pouvoir négliger les valeurs du potentiel vecteur magnétique sur la frontière par rapport aux valeurs de ce même potentiel à l'intérieur du domaine.

La condition de Dirichlet s'écrit sous la forme suivante [6] :

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{g}_0 = \text{constante.} \quad (\text{II.10})$$

#### 2- Condition de NEUMANN

On la trouve sur les plans ou les axes d'antisymétrie par exemple les axes inter-polaires, sur cette frontière les lignes de l'induction magnétique sont normales de même lorsque ce type de condition aux limites apparaît sur des axes d'antisymétries le maillage est limité à une portion du domaine.

La condition de Neumann s'écrit sous la forme suivante [6] :

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u})}{\partial n} = \mathbf{g}_0 = \text{constante} \quad (\text{II.11})$$

#### 3- Condition de type mixte

On l'appelle condition mixte car elle est combinaison de deux types de conditions de Dirichlet et Neumann.

Ce type de condition est donné comme suit [6] :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{u}) + \mathbf{b} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u})}{\partial n} = \mathbf{g} \quad (\text{II.12})$$

Avec

$\mathbf{g}$  : valeur de l'inconnue sur la frontière considérée

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$  : coefficients définis sur le domaine d'étude

## II.4. Modèle électromagnétique

Généralement un dispositif électromagnétique comporte plusieurs matériaux dont certains ont des caractéristiques non linéaires par ailleurs les phénomènes électromagnétiques varient fortement au sein de la structure ; c'est pour cela que l'analyse de la structure complète en trois dimensions (3D) s'avère fastidieuse et coûteuse en terme de temps et de calcul, d'autre part l'analyse à une dimension (1D) est moins représentative. L'emploi des modèles à deux dimensions (2D) est particulièrement simple et efficace et son choix est réaliste. Et pour pouvoir effectuer une analyse significative sur les phénomènes électromagnétiques, il faudrait élaborer les modèles électromagnétiques sous forme d'équations aux dérivées partielles qu'on pourrait ensuite résoudre par différentes méthodes. On aura donc à faire avec deux modèles, l'un est magnétostatique, et l'autre est magnétodynamique en coordonnées cartésiennes et cylindriques [4].

### II.4.1 Modèle magnétostatique

Pour ce modèle, on ne tiendra pas compte d'aucune variation des grandeurs par rapport au temps ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ).

D'où, les équations de Maxwell s'écriront comme suit :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \mathbf{0} \quad (\text{II.13})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II.14})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_c \quad (\text{II.15})$$

#### II.4.1.1 En coordonnées cartésiennes

Sachant que

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = -\Delta \vec{A} + \overrightarrow{\nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})} \quad (\text{II.16})$$

En introduisant la condition de Jauge de coulomb :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{II.17})$$

et cela pour assurer l'unicité de la solution nous aurons :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = -\Delta \vec{A} \quad (\text{II.18})$$

En considérant que les propriétés physiques des milieux sont linéaires (la saturation est négligeable) on aura :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \cdot \vec{J}_c \quad (\text{II.19})$$

La combinaison des équations (II.13) et (II.19) donnera :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \mu \cdot \vec{J}_c \quad (\text{II.20})$$

En faisant la soustraction entre les équations (II.20) et (II.18) nous aurons :

$$\Delta \vec{A} + \mu \cdot \vec{J}_c = 0 \quad (\text{II.21})$$

En posant le potentiel vecteur magnétique dirigé selon l'axe (Oz), donc  $\vec{A} = (0, 0, A_z)$

$$\text{Tels que : } \Delta \vec{A} = \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.22})$$

$\vec{J}_c$  : Densité des courants de conduction

D'où l'équation (II.21) devient :

$$\left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) + \mu \cdot J_c = 0 \quad (\text{II.23})$$

$$\text{Sachant que : } \vec{J}_c = \vec{J}_s - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{II.24})$$

$\vec{J}_s$  : Densité des courants de source

Et  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$  car il s'agit d'un phénomène statique

l'équation (II.23) devient alors

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = -\mu \cdot J_s \quad (\text{II.25})$$

En posant  $\mathbf{v}_0 = \frac{1}{\mu_0}$  et  $\mathbf{v} = \frac{1}{\mu}$

L'équation finale générale sera alors :

$$\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = -\mu \cdot J_s \quad (\text{II.26})$$

Avec

$\mathbf{A}$  : potentiel vecteur magnétique [T.m]

$\mathbf{v}$  : Réductivité magnétique [H/m]

L'équation (II.26) représente l'équation aux dérivées partielles avec le terme source en coordonnées cartésiennes (2D) du model magnétostatique.

#### II.4.1.2 En coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques on a :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z} (r A_\varphi) \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\varphi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_z \quad (\text{II.27})$$

$\vec{A}$  est dirigé suivant le vecteur  $\vec{u}_\varphi$  donc les composantes de  $\vec{A}$  seront :  $\vec{A} = (0, A_\varphi, 0)$  ou bien

$$\vec{A} = r \vec{A}_\varphi \quad (\text{II.28})$$

D'où l'équation (II.27) devient :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r} \left( -\frac{\partial}{\partial z} (r A_\varphi) \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{u}_z \quad (\text{II.29})$$

En appliquant le rotationnel à l'équation (II.29) et en posant :

$$\vec{B}_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \vec{u}_r \quad (\text{II.30})$$

et

$$\vec{B}_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \vec{u}_z \quad (\text{II.31})$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{B}_r \cdot \vec{u}_r + \vec{B}_z \cdot \vec{u}_z) \quad (\text{II.32})$$

L'équation (II.27) devient alors :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z} (r B_r) \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\varphi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_z \quad (\text{II.33})$$

En prenant  $[r, z]$  comme plan d'étude ce qui veut dire que  $B_\varphi = 0$  et  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$

Alors l'équation (II.33) devient :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \left( \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\varphi \quad (\text{II.34})$$

En remplaçant  $B_r$  et  $B_z$  par leurs valeurs respectives nous aurons :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \left( -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \vec{A}_\varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \right) \vec{u}_\varphi \quad (\text{II.35})$$

La combinaison des équations (II.19) et (II.35) nous donnera :

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \right) \vec{u}_\varphi = -\mu_0 \cdot \vec{J}_c \quad (\text{II.36})$$

Le phénomène est statique d'où :  $J_c = J_{s\varphi}$  car toutes les variations par rapport au temps sont nulles.

En posant  $v_0 = \frac{1}{\mu_0}$  et  $J_s = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, J_{s\varphi})$ , alors l'équation finale s'écrira :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r A_\varphi) \right) = -J_{s\varphi} \quad (\text{II.37})$$

L'équation (II.37) représente l'équation aux dérivées partielles avec le terme source en coordonnées cylindriques (2D) du modèle magnétostatique.

## II.4.2 Modèle magnétodynamique

Dans ce cas les variations des grandeurs par rapport au temps ne sont pas nulles. Mais on va négliger les courants de déplacement, car les fréquences en électrotechnique sont inférieures aux radiofréquences ( $f < 10^{12}$  Hz).

### II.4.2.1 En coordonnées cartésiennes

C'est le même raisonnement que le précédent à l'exception que le terme  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  n'est pas nul.

D'où :

$$\vec{J}_c = \vec{J}_s - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{II.38})$$

Donc l'équation (II.29) devient :

$$\nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} = -J_s \quad (\text{II.39})$$

L'équation (II.39) représente l'équation aux dérivées partielles en coordonnées cartésiennes (2D) du vecteur magnétique avec terme source sans courant de déplacement du modèle magnétodynamique.

En régime harmonique l'équation (II.39) s'écrira :

$$\nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - \sigma j \omega A_z = -J_s \quad (\text{II.40})$$

### II.4.2.2 En coordonnées cylindriques

C'est le même raisonnement que le précédent à l'exception que  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \neq \mathbf{0}$ .

D'où :

$$\vec{J}_c = \vec{J}_s - \sigma \frac{\partial \vec{A}_\varphi}{\partial t} \quad (\text{II.41})$$

Donc l'équation (II.40) devient :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r A_\varphi) \right) - \frac{\sigma}{r} \frac{\partial}{\partial t} (r A_\varphi) = -J_{s\varphi} \quad (\text{II.42})$$

L'équation (II.42) représente l'équation aux dérivées partielles du potentiel vecteur magnétique avec terme source sans courant de déplacement en coordonnées cylindriques (2D) du modèle magnétodynamique.

En régime harmonique l'équation (II.42) s'écrira :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r A_\varphi) \right) - \frac{\sigma}{r} j \omega (r A_\varphi) = -J_{s\varphi} \quad (\text{II.43})$$

Avec  $\vec{A} = r \vec{A}_\varphi$ .

## II.5 Différentes méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles

Après avoir transformé le problème physique (électromécanique) en un problème d'équations aux dérivées partielles, on procédera à résoudre ces équations pour donner une signification objective aux solutions à trouver. Ces solutions seront en réalité les grandeurs du phénomène étudié [4].

### II.5.1 Méthodes analytiques

Les méthodes de résolution analytiques utilisées pour la résolution des problèmes électromagnétiques régis par des équations aux dérivées partielles sont [4] :

- La méthode de transformations conformes.
- La méthode de séparation des variables.

#### II.5.1.1 La méthode de transformations conformes

Les méthodes de transformations conformes sont considérablement utilisées dans la résolution analytique des champs Laplaciens, avec des géométries complexes, elles sont utilisées pour analyser le champ dans plusieurs dispositifs (entre deux câbles non concentriques, des lignes de transmission à hautes fréquences de sections différentes, autour d'un conducteur de section polygonale et dans l'entrefer des machines tournantes ... etc [4].

Le principe de la méthode analytique consiste à considérer un plan, on associe à chaque point de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  ou polaire  $(r, \theta)$  un nombre complexe  $\underline{Z} = x + jy = r \cdot e^{j\theta}$  (II.44)

Dans un autre plan, on associe à chaque point un nombre complexe  $\underline{W} = u + jv = \rho \cdot e^{j\theta}$  (II.45)

On doit déterminer une transformation  $f$  telle que :  $\underline{W} = f(\underline{Z})$  qui assure la projection du plan complexe  $\underline{Z}$  sur le plan complexe  $\underline{W}$ .

#### II.5.1.2 La méthode de séparation des variables

Cette méthode consiste à remplacer une équation aux dérivées partielles (à trois dimensions) par trois équations différentielles linéaires à coefficients constants et cela pour remplacer un problème à plusieurs dimensions par des problèmes unidimensionnels qui seront plus faciles à résoudre, cette méthode est utilisée pour la résolution de l'équation de Laplace dans des systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques et quelques autres systèmes d'usage moins courant dont les systèmes elliptiques, paraboliques et hyperboliques font partie.

Le principe de la méthode consiste à poser :

$$A_\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = A_\varphi(\mathbf{r}) \cdot A_\varphi(\mathbf{z}) \quad (\text{II.46})$$

Tel que :  $\mathbf{A}_\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{z})$  est la solution de l'équation différentielle aux dérivées partielles considérée de telle sorte que les fonctions  $\mathbf{A}_\varphi(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{A}_\varphi(\mathbf{z})$  dépendent des variables  $r$  et  $z$  respectivement.

A l'aide des hypothèses simplificatrices, les méthodes analytiques présentent correctement les phénomènes physiques étudiés avec une mise en oeuvre relativement facile, mais l'inconvénient de ces méthodes c'est lorsque les équations à résoudre deviennent de plus en plus linéaires où les modèles seront lourds, et dans le cas où les dispositifs sont des géométries complexes on ne peut pas faire coïncider les limites de la structure avec des surfaces d'un système de coordonnées orthogonales (plans, cylindres et sphères ... etc [4]).

### II.5.2 Méthodes numériques

Vu les avantages qu'elles présentent pour la modélisation des dispositifs électromagnétiques, les méthodes numériques sont devenues indispensables et d'un apport considérable. Parmi ces avantages, on trouve la prise en compte des problèmes de type vectoriel, des non linéarités et des géométries complexes. Ces méthodes consistent à transformer les équations aux dérivées partielles du champ en un système d'équations algébriques dont la solution forme une approximation du champ en une grille discrète de points du plan ou de l'espace. Pour résoudre numériquement un problème de champ, une méthode appropriée doit être choisie parmi plusieurs telles que : la méthode des différences finies, la méthode d'intégrales de frontières, la méthode des éléments finis et la méthode des circuits couplés... etc [4].

#### II.5.2.1 Méthodes des différences finies

Cette méthode est basée sur l'approximation de l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences, où chaque dérivée est approchée par une différence de valeur de l'inconnu à déterminer en un certain nombre de points du domaine de résolution, donc l'équation aux dérivées partielles est remplacée par les équations algébriques en chaque point (nœud) en considérant une combinaison linéaire des valeurs de l'inconnu au point considéré et aux points environnants [4].

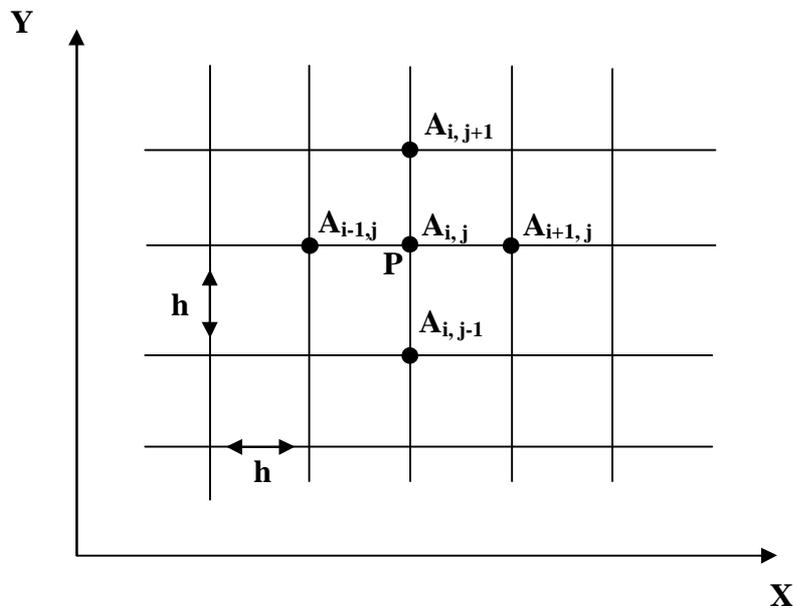


Figure II.1 : Maillage type différences finies

Les dérivées partielles premières et secondaires de l'inconnue au point p sont données par :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial X}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2h} \quad (\text{II.47})$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial Y}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2h} \quad (\text{II.48})$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{h^2} \quad (\text{II.49})$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial Y^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{h^2} \quad (\text{II.50})$$

Le Laplacien s'écrit alors comme suit :

$$(\Delta A)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1} + A_{i,j-1} - 4A_{i,j}}{h^2} \quad (\text{II.51})$$

La variation de i et de j sur les points du maillage donne un système algébrique de la forme :

$$[\mathbf{S}] \cdot [\mathbf{A}] = [\mathbf{F}] \quad (\text{II.52})$$

Avec

$[\mathbf{F}]$  : Le terme source.

$[\mathbf{S}]$  : Une matrice contenant les caractéristiques du système.

[A] : Le vecteur des inconnues.

### a- Avantages de la méthode

- ∅ Mise en œuvre relativement simple.
- ∅ Prise en compte des non linéarités.
- ∅ Préparation et introduction des données relativement simple.

### b- Inconvénients de la méthode

- ∅ Non considération des géométries complexes.
- ∅ Taille des systèmes algébriques importante.
- ∅ Temps de résolution relativement important.
- ∅ Précision des calculs nécessitant des ordinateurs de grande capacité mémoire [4].

## II.5.2.2 Méthodes des circuits couplés

La méthode des circuits couplés est une méthode semi analytique qui consiste à transformer le domaine d'étude en un circuit électrique équivalent en faisant une discrétisation de ce domaine en mailles auxquelles s'appliquent des expressions analytiques des grandeurs électromagnétiques en utilisant la théorie des circuits pour la résolution des équations de Maxwell et également une expression intégrale ( loi de Biot et Savart) des grandeurs électromagnétiques. Le maillage consiste à subdiviser le domaine en spires élémentaires pour exprimer la résistance, l'inductance propre de chaque spire élémentaire et les inductances mutuelles entre les différentes spires. L'ensemble des éléments obtenus forme alors un système de circuits mutuellement couplés. Dans le cas des phénomènes électromagnétiques sinusoïdaux, le système d'équation obtenu est linéaire et à coefficients complexes de la forme suivante [4] :

$$[\mathbf{Z}] \cdot [\mathbf{I}] = [\mathbf{V}] \quad (\text{II.53})$$

Où les éléments  $Z_{ij}$  de la matrice  $[\mathbf{Z}]$ , représentent l'impédance élémentaire,  $I_i$  le courant traversant une spire élémentaire  $i$  et  $V_i$  la tension appliquée à cette spire.

Dans le cas du régime transitoire, le système d'équations linéaires obtenu est à coefficients réels et de la forme suivante [4] :

$$[\mathbf{R}] \cdot [\mathbf{I}] + [\mathbf{L}] \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} \right] = [\mathbf{V}] \quad (\text{II.54})$$

La matrice est diagonale, ses éléments représentent les résistances des spires élémentaires.

La matrice [L] est une matrice pleine où les éléments de la diagonale  $L_{i j}$  représentent les inductances propres des spires élémentaires et les éléments hors la diagonale  $M_{i j}$  représentent les inductances mutuelles des spires  $i$  et  $j$ .

### a- Avantages de la méthode

- Ø Application générale pour les problèmes de répartition des grandeurs électromagnétiques.
- Ø Plus précise que la méthode analytique unidimensionnelle.
- Ø Ne nécessite pas trop d'espace mémoire.

### b- Inconvénients de la méthode

- Ø Le principal inconvénient de cette méthode est la lourdeur des calculs nécessaires pour obtenir analytiquement les coefficients d'inductance mutuelle, une alternative consiste à calculer ceux-ci par éléments finis.
- Ø Notons aussi que le champ d'application de cette méthode est très limité [4].

### II.5.2.3 Méthodes d'intégrale de frontière

La méthode d'intégrale de frontière permet la présentation du domaine (la détermination des grandeurs inconnues) tout en limitant la discrétisation à la frontière. Elle ne s'applique que dans le cas où le milieu considéré est linéaire, lorsque les fréquences de travail sont très importantes, car la profondeur de pénétration devient très faible par rapport aux autres dimensions géométriques du dispositif étudié. La méthode des intégrales de frontières est utilisée généralement en magnétostatique ou bien elle est électromagnétique dans les milieux linéaires et non conducteurs.

En deux dimensions par exemple elle est basée sur la formulation intégrale suivante [4] :

$$CA = \oint_c A \frac{\partial G}{\partial n} dc - \oint_c G \frac{\partial A}{\partial n} dc \quad (\text{II.55})$$

Où  $G$  est la fonction de Green de l'opérateur de Laplace en deux dimensions, elle est donnée par :

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (\text{II.56})$$

$C$  est un facteur qui caractérise la forme de la frontière ( $C=0.5$  sur un contour lisse),  $\frac{\partial A}{\partial n}$  est la projection du gradient du module de la composante transversale du vecteur potentiel magnétique sur la normale à l'élément de la frontière  $dc$ . L'intégrale est calculée sur la frontière  $c$  du domaine analysé. La discrétisation de l'équation (II.58) aboutit à un système linéaire en termes de valeurs du module de la composante transversale du vecteur potentiel magnétique sur les nœuds de la frontière.

**a- Avantages de la méthode**

- ∅ Prise en compte de domaines finis.
- ∅ Temps de calcul relativement réduit.
- ∅ Taille des systèmes algébriques réduite.

**b- Inconvénients de la méthode**

- ∅ Ne résout que les problèmes linéaires.
- ∅ Le système algébrique obtenu n'est pas une matrice pleine [4].

**II.5.2.4 Méthode des éléments finis**

La méthode des éléments finis consiste en utilisation d'une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. La méthode des éléments finis est basée sur une formulation intégrale du problème aux dérivées partielles, cette formulation peut être de type variationnel ou résidus pondéré [7].

**Conclusion**

Le choix entre les méthodes analytiques et numériques pour la résolution des équations aux dérivées partielles nous met face à un dilemme à savoir gagner en terme de temps de programmation et de calcul, ou bien améliorer la précision des résultats.

Comparativement aux outils de résolution formulation intégrale, on peut conclure de façon générale que les méthodes numériques résolvent les équations physiques de base du système à dimensionner, avec un faible niveau d'hypothèses et en utilisant des algorithmes mathématiques lourds. Ils fournissent ainsi, les grandeurs étudiées (potentiel vecteur magnétique, champ magnétique...) en tous points du domaine de résolution, et on en déduit les valeurs lesquelles le problème avec plus de précision.

Parmi les méthodes numériques citées, nous avons opté pour la méthode des éléments finis. Grâce à son efficacité et sa capacité de s'intégrer à des logiciels de conception assistée par ordinateur, cette méthode pourra nous fournir de bons résultats en termes de précision avec un gain et en terme de temps, de calcul et de programmation et qui fera l'objet du chapitre suivant.

## Introduction

Avec l'apparition des ordinateurs assez puissants en terme d'espace mémoire, rapide en terme d'exécution des calculs et économiques (coûts réduits), l'utilisation de la méthode des éléments finis pour la résolution des problèmes de champs électromagnétiques devient un choix réaliste. Ce type de problème est modélisé de façon fondamentale, en partant des équations de Maxwell qui sont manipulées pour aboutir à une équation différentielle globale régissant le fonctionnement du dispositif électromagnétique dans un cadre restreint et bien déterminé.

L'efficacité de la méthode des éléments finis en tant qu'un outil numérique de détermination de la répartition finie des grandeurs électromagnétiques au sein des machines électriques réside en sa puissance et sa souplesse, en effet cette méthode permet de s'affranchir la plupart des hypothèses restrictives [4].

### III.1. Présentation de la méthode des éléments finis

Afin de résoudre un problème électromagnétique par la méthode des éléments finis, on procède par les étapes suivantes [4] :

- 1-** On se pose un problème physique traduit sous forme des équations aux dérivées partielles à satisfaire en tout point d'un domaine  $V$ , avec les conditions aux limites sur les bornes de  $V$ , nécessaires et suffisantes pour l'unicité de la solution.
- 2-** On construit une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ces conditions aux limites.
- 3-** On fait un maillage du domaine en le subdivisant en sous domaines  $V_e$ .
- 4-** On choisit la famille des champs locaux : c'est-à-dire à la fois la position des nœuds dans les sous domaines et les fonctions définissent le champ local en fonction des valeurs aux nœuds. La maille complétée par ces informations est appelée élément.
- 5-** On ramène le problème à un problème discret : c'est la discrétisation. En effet, toute solution approchée est complètement déterminée par les valeurs aux nœuds des éléments. Il suffit donc de trouver les valeurs attribuées aux nœuds pour décrire une solution approchée.
- 6-** On résout le système discret.
- 7-** On construit la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux nœuds et on en déduit d'autres grandeurs.
- 8-** On visualise et on exploite le résultat pour juger de leurs qualités et leurs satisfactions de cahier de charge.

## III.2 Le maillage

En premier lieu on choisit un ensemble de  $n$  points sur le domaine  $V$  qui sert à définir la géométrie, puis nous subdivisons le domaine  $V$  en sous domaines  $V_e$  en forme relativement simple et chaque élément du sous domaine  $V_e$  doit être défini analytiquement de manière unique en fonction des coordonnées des nœuds géométriques qui appartient à cet élément, c'est-à-dire qu'ils sont situés sur  $V$  et sur la frontière. Notons que deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leurs frontières communes, les frontières entre éléments peuvent être des points, des courbes ou des surfaces, et l'ensemble de tous les éléments  $V_e$  doit constituer le domaine  $V$ .

Les formes d'éléments classiques correspondent à des domaines à une ou deux dimensions sont présentées comme suit [4] :

### 1. Éléments à une dimension



Linéaire (deux nœuds)

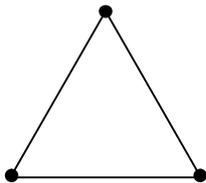


Quadratique (trois nœuds)

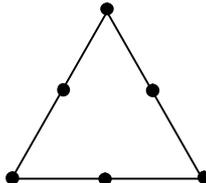


Cubique (quatre nœuds)

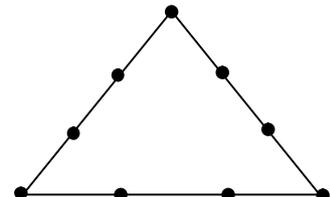
### 2. Éléments à deux dimensions



Linéaire (trois nœuds)



Quadratique (six nœuds)

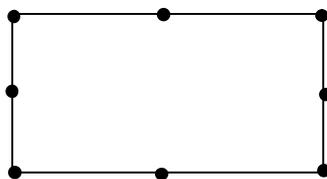


Cubique (neuf nœuds)

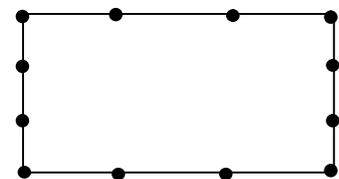
Les éléments carrés sont :



Linéaire (quatre nœuds)



Quadratique (huit nœuds)



Cubique (douze nœuds)

La méthode des éléments finis est basée sur la substitution de la forme différentielle que représente l'équation aux dérivées partielles et les conditions aux limites associées de la formulation intégrale du problème à étudier.

Cette formulation intégrale peut être :

\*projective

\*variationnelle.

\*résidus pondérés.

### III.3.1. Formulation projective

La formulation projective est plus utilisée que le type variationnelle, elle est dite de GALERKINE. Le principe fondamental des méthodes projectives est basé sur un théorème applicable dans un espace de HILBERT qui stipule que seul le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace.

Soit  $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$  dans  $\mathbf{U}^2$ , l'orthogonalité des fonctions  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  se traduit par : 
$$\int_{\mathbf{V}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} dV \quad (\text{III.1})$$

La résolution d'un problème aux dérivées partielles peut alors se traduire par la recherche d'une fonction  $\boldsymbol{\mu}$  tel que les opérateurs  $\mathbf{L}$  sur le domaine  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{B}$  sur la frontière  $\Gamma$  vérifient :

$$\begin{cases} \mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}) - \mathbf{f} = \mathbf{0} \\ \mathbf{B}(\boldsymbol{\mu}) - \mathbf{g} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

En général l'opérateur différentiel  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\mu})$  est d'ordre  $(\mathbf{n}-1)$  par rapport à l'opérateur  $\mathbf{L}(\boldsymbol{\mu})$ .

### III.3.2. Formulation variationnelle

L'utilisation de la méthode variation elle exige la connaissance au préalable de la fonctionnelle d'énergie à étudier, cette dernière est déterminée à partir du principe de l'action Hamiltonienne qui stipule l'existence d'une fonctionnelle de type intégral définit par :

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \int_{\mathbf{V}} \mathbf{L} dV \quad (\text{III.3})$$

$\mathbf{L}$  : Fonction de Lagrange qui résulte de la coénergie du système de type cinétique et son énergie potentielle.

$\mathbf{V}$  : Domaine de résolution.

Dans le cas magnétostatique cette fonction  $\mathbf{L}$  pourra s'exprimer par :

$$\mathbf{L} = \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} d\mathbf{b} - \mathbf{J}\mathbf{A} \quad (\text{III.4})$$

D'où la fonction d'énergie suivante :

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \int_{\mathbf{V}} \left[ \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} d\mathbf{b} - \mathbf{J}\mathbf{A} \right] dV \quad (\text{III.5})$$

$\mathbf{v}$  : réflectivité magnétique.

$\mathbf{B}$  : Module de l'induction magnétique.

$\mathbf{J}$  : Densité de courant.

$\mathbf{A}$  : Potentiel vecteur magnétique.

Résoudre le problème variationnel défini par la fonctionnelle d'énergie  $F(A)$  revient à minimiser cette même fonctionnelle, la minimisation est effectuée en utilisant le principe de RAYLEIGHRIZ qui

$$\text{consiste à écrire } \frac{\partial F(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_2} = \dots \dots = \frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_N} \quad (\text{III.6})$$

Avec :

$N$  : Nombre de nœuds du domaine.

$A_i$  : Inconnu du nœud  $i$  du domaine.

L'utilisation de la méthode des éléments finis consiste à poser :

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{F}_e(\mathbf{A}^e) \quad (\text{III.7})$$

Avec :

$e$  : élément fini du domaine.

D'où on peut écrire :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{F_e(A^e)}{\partial A_i} = \mathbf{0} \quad (\text{III.8})$$

Avec :

$$\mathbf{A}^e = \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\phi}_k^e \mathbf{A}_k^e \quad (\text{III.9})$$

$F_e(\mathbf{A}^e)$  : Fonction d'énergie de l'élément.

$A_k^e$  : Inconnu de l'élément ( $e$ ) au nœud ( $i$ ).

$\boldsymbol{\phi}_k^e$  : Fonction au nœud ( $j$ ) de l'élément ( $e$ ).

$N_e$  : Nombre de subdivisions en sous domaines du domaine d'étude.

$A^e$  : Fonction d'approximation de l'élément ( $e$ ).

Donc on a à résoudre  $N$  systèmes algébriques à  $N$  inconnus  $A_1, A_2, \dots, A_N$ .

### III.3.3 Formulation résidus pondérés

Le principe de la méthode résidus pondérés consiste à rechercher des fonctions de projections satisfaisant les conditions aux limites et qui minimisent l'intégral résidu de l'approximation.

Donc pour toute base fonction  $\boldsymbol{\phi}$  l'on ait :

$$\int_V \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\phi}_i dV = \mathbf{0} \quad (\text{III.10})$$

Avec :

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}(\mathbf{A}) - \mathbf{f} \quad (\text{III.11})$$

$\mathbf{R}$  : Résidu de l'approximation.

$\mathbf{L}$  : Opérateur différentiel.

$\mathbf{f}$  : fonction défini par le domaine  $V$ .

$\phi_i$  : Fonction de projection.

$\mathbf{A}$  : inconnu.

Les valeurs de l'inconnu  $\mathbf{A}$  qui peuvent annuler l'intégral représentent la solution du système algébrique.

Pour cette méthode, le choix des fonctions  $\phi$  introduit une erreur de méthode, mais elle présente un important avantage par rapport à la méthode variation elle, c'est qu'elle ne nécessite pas la connaissance au préalable de l'expression énergétique du système.

Un choix adéquat des fonctions  $\phi$  permet d'avoir une précision équivalente à celle obtenue en utilisant la méthode variation elle à condition que les fonctions de pondérations doivent être linéairement indépendantes.

Selon le choix convenable des fonctions de pondérations  $\phi$ , on arrive à définir plusieurs méthodes qui découlent de la méthode des résidus pondérés :

- La méthode de collation par points.
- La méthode des moindres carrés.
- La méthode de GALERKINE.

On s'intéresse beaucoup plus à la méthode projective de GALERKINE car cette méthode ne nécessite pas la connaissance au préalable de l'expression énergétique du système et les fonctions de pondération sont identiques aux fonctions de forme (ceci permet d'aboutir à un système matriciel symétrique).

### **III.4. Les avantages et les inconvénients de la méthode des éléments finis**

#### **a- Avantages de la méthode**

- Adaptation aux géométries complexes.
- Prise en compte des non linéarités.
- Temps de calcul relativement avantageux.

#### **b- Inconvénients de la méthode**

- Mise en œuvre relativement difficile.
- Prise en considération des domaines infinis.
- Présence de singularités dans le domaine d'étude.

### **III.5. Discrétisation des équations aux dérivées partielles (système algébrique)**

Pour discrétiser les équations aux dérivées partielles afin d'obtenir des systèmes algébriques à résoudre numériquement on va procéder par la formulation éléments finis des différents modèles électromagnétiques.

### III.5.1. Modèle magnétostatique

#### a- En coordonnées cartésiennes

Pour la formulation en éléments finis du modèle magnétostatique en coordonnées cartésiennes (2D) donnée par l'équation (II.26) on utilise la méthode projective de Galerkin :

On aura :

$$\iint_{\mathcal{V}} \Phi_i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathbf{v} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mathbf{v} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] dx dy = - \iint_{\mathcal{V}} J_s \Phi_i dx dy \quad (\text{III.12})$$

On applique le théorème de Green et on aura :

$$\iint_{\mathcal{V}} \Phi_i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathbf{v} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mathbf{v} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] dx dy = \iint_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\Gamma} \mathbf{v} \frac{\partial A}{\partial n} \Phi_i d\Gamma \quad (\text{III.13})$$

Pour les conditions aux limites de type Dirichlet ou Newman homogènes, le terme qui tient compte de la frontière s'annule dans les équations :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \frac{\partial A}{\partial n} \Phi_i d\Gamma = 0$$

On aura donc :

$$\iint_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\mathcal{V}} J_s \Phi_i dx dy \quad (\text{III.14})$$

Avec  $\Phi_i$  fonction de projection ou de pondération.

Sur chaque nœud du maillage, l'élément A est représenté sous la forme suivante :

$$\mathbf{A} = \sum_{K=1}^n \Phi_k \cdot A_K \quad (\text{III.15})$$

Avec :

$\Phi_k$  : Fonction de forme associée au nœud (K) du domaine.

$n$  : Nombre total de nœuds de domaine.

$K$  : Entier naturel variant de 1 jusqu'à  $n$ .

On remplace l'expression (II.25) dans l'équation (II.26) et on obtient :

$$\iint_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) A_K dx dy = + \iint_{\mathcal{V}} J_s \Phi_i dx dy \quad (\text{III.16})$$

Pour résoudre cette équation il faut la transformer de sa forme différentielle en une forme matricielle. On aura donc le système algébrique suivant :

$$[\mathbf{M}][\mathbf{A}] = [\mathbf{K}] \quad (\text{III.17})$$

Tel que :

$$\mathbf{M}_{ik} = \iint_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\mathbf{K}_i = + \iint_{\mathcal{V}} J_s \Phi_i dx dy$$

$[\mathbf{A}]$  : Vecteur des inconnues.

## b- En coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques on a :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r A_\varphi) \right) = -J_s \quad (\text{III.18})$$

Dans le cas des problèmes en coordonnées cylindriques la variable considérée par la formulation éléments finis est  $A = r A_\varphi$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{r} \frac{\partial A}{\partial z} \right) = -J_s \quad (\text{III.19})$$

En appliquant Green :

$$\iint_x \frac{v}{r} \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} \right) dr dz = - \iint_x J_s \Phi_i dr dz \quad (\text{III.20})$$

La fonction d'approximation s'exprimera sous sa forme discrétisée par :

$$A = \sum_{K=1}^n \Phi_k \cdot A_K \quad (\text{III.21})$$

$\Phi_k(r, z)$  : Fonction de forme associée au nœud (k) du domaine.

$A_k$  : Inconnu au nœud k du domaine indépendant de r et z.

En remplaçant l'équation (IV.31) dans (IV.30) on aura :

$$\iint_x \frac{v}{r} \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \frac{\partial \Phi_k}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \right) A_k dr dz = + \iint_x J_s \Phi_i dr dz \quad (\text{III.22})$$

Ceci conduit à la forme matricielle suivante :

$$[M][A] = [K]$$

Avec :

$$M_{ik} = \iint_x \frac{v}{r} \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \frac{\partial \Phi_k}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \right) dr dz$$

$$K_i = + \iint_x J_s \Phi_i dr dz$$

## III.5.2. Modèle magnétodynamique

### a- En coordonnées cartésiennes

C'est le même raisonnement que le précédent à l'exception que le terme  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  n'est pas nul.

En utilisant la méthode projective de Galerkin, et en appliquant Green pour l'équation (II.39) on aura :

$$\iint_x v \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) dx dy - \iint_x \sigma \Phi_i \frac{\partial A_z}{\partial t} dx dy = - \iint_x \Phi_i J_s dx dy \quad (\text{III.23})$$

Lorsque

$$A = \sum_{K=1}^n \Phi_k \cdot A_K$$

$$\iint_x v \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \right) A_K dx dy - j\omega \iint_x \sigma \Phi_i \Phi_k A dx dy = + \iint_x \Phi_i J_s dx dy \quad (\text{III.24})$$

On obtient le système matriciel de la forme

$$[M][A] + j\omega[F][A] = [K]$$

Avec :

$$M_{ik} = \iint_x v \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \right) dx dy$$

$$F_{ik} = + \iint_x \sigma \Phi_i \Phi_k dx dy$$

$$K_i = + \iint_x J_s \Phi_i dx dy$$

### b- En coordonnées cylindriques

Les vecteurs de champ magnétique et de densité de courant de source sont dirigés suivant l'axe orthogonal ( $\vec{0}_\varphi$ ), d'où :

$$\vec{A} = (0, A_\varphi, 0) \text{ où bien } \vec{A} = r \vec{A}_\varphi \text{ et } J_s = (0, J_{s\varphi}, 0).$$

Après avoir passé sur la formulation intégrale de l'équation (II.45), et en lui appliquant le théorème de Green on obtient :

$$\iint_x v \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \frac{\partial \Phi_k}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \right) \frac{A_k}{r} dr dz - j\omega \iint_x \sigma \Phi_i \Phi_k A_k \frac{dr dz}{r} = + \iint_x \Phi_i J_s dr dz \quad (\text{III.24})$$

On généralise cette équation sur tous les nœuds du domaine, on aboutit au système matriciel à résoudre et qui est le suivant :

$$[M][A] + j\omega[F][A] = [K]$$

Avec

$$M_{ik} = \iint_x v \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \frac{\partial \Phi_k}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \right) \frac{A_k}{r} dr dz$$

$$F_{ik} = + \iint_x \sigma \Phi_i \Phi_k \frac{dr dz}{r}$$

$$K_i = \iint_x J_s \Phi_i dr dz$$

Une programmation efficace de la méthode des éléments finis (MEF) nécessite une bonne expérience à la fois dans le domaine des éléments finis et dans le domaine de l'informatique.

Les programmes sont compliqués car ils doivent exécuter des opérations très diverses : organisation des données, intégration numérique, résolution des systèmes, ...etc.

Les quantités des données manipulées par un programme des éléments finis peuvent être très importantes où il faut souvent avoir recours à des techniques informatiques peu répandues en calculs scientifiques, la programmation doit être efficace pour minimiser les coûts de traitement sur ordinateur

En vue de l'importance de la méthode des éléments finis (MEF) dans l'industrie, le critère économique s'impose pour l'ingénieur, la notion de temps minime dans l'étude et la réalisation des projets sont parmi ces critères. Cela a contribué à l'apparition de logiciels (Flux 2D, PDE-TOOL sous Matlab, Flux

3D, Flux Expert, FEMM...) où on trouve la majorité des programmes utiles pour l'étude et la mise en œuvre de la MEF

### III.6.1 Présentation de FEMM (version 3.3)

FEMM est une suite des programmes pour résoudre des problèmes statiques et de basse fréquence en magnétisme. Les programmes actuels s'adressent aux problèmes bidimensionnels dans les domaines cartésiens et axisymétriques. FEMM est divisé en trois parties [2] :

#### a- Processeur (femme .exe)

C'est un programme permettant de définir la géométrie de la structure à étudier et d'affecter les propriétés des matériaux dans chaque région et les conditions aux limites choisies, ainsi que le type de problème à résoudre (plan, axisymétrique).

#### b- Solutionneur (fkerne .exe)

Le solutionneur prend en considération le problème complètement défini et résout les équations de Maxwell appropriées pour obtenir les résultats recherchés.

#### c- Post processeur (femmview .exe)

C'est une interface graphique qui permet de traiter les résultats fournis par le solutionneur dans les différentes régions, le programme permet aussi à l'utilisateur d'inspecter le champ dans n'importe quel point de la structure.

Deux programmes additionnels sont appelés pour accomplir des tâches spécialisées, qui sont les suivantes :

#### - Triangle .exe

C'est un programme qui décompose la région d'étude en un grand nombre de triangles, une partie essentielle du processus de la FEM.

#### - Femmplot .exe

C'est un petit programme employé pour tracer les diverses courbes.

#### • Présentation du Lua

Lua est un langage de programmation puissant et léger conçu pour des applications prolongeantes. Lua est également fréquemment employé comme langue d'usage universel et autonome. Lua combine procédural simple syntaxe (semblable au pascal) avec les constructions puissantes de description de données basées sur associatif rangées et sémantique extensible. Le code FEMM présente une interface de programmation et de compilation de programmes sous Lua. Nous avons donc utilisé cette console pour accélérer notre travail.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini le principe de la méthode des éléments finis d'une façon plus ou moins détaillée de point de vue des étapes à suivre pour résoudre un problème électromagnétique et également, nous avons exposé la discrétisation des équations aux dérivées partielles qui sert à obtenir des systèmes algébriques prêts à être résolus numériquement et nous avons terminé ce chapitre par la présentation du logiciel F.E.M.M qui sera l'outil à utiliser pour l'étude de notre application.

## Introduction

Le but du travail que nous présentons dans cette partie concerne les méthodes de détermination des forces à partir des grandeurs magnétiques dans les systèmes électromagnétiques. Les forces magnétiques jouent un rôle déterminant dans le fonctionnement de tout système électromagnétique, mécanique en termes de déplacement ou de déformation. Les lois physiques de l'électromagnétisme donnent une réponse simple à ce sujet tant que l'on ne considère pas les matériaux ferromagnétiques. Dans le cas des conducteurs électriques par exemple, il n'y a pas d'ambiguïté, la densité locale de force  $f$  suit la loi classique de Laplace. Or grâce à leurs propriétés les matériaux ferromagnétiques sont extrêmement présents en électromagnétisme puisque les performances des systèmes électromagnétiques (machines électriques, actionneurs, contacteurs, transformateurs, ...) leur sont directement liées, il est donc indispensable de savoir exprimer les forces qui s'exercent au sein de ces matériaux.

Diverses manières d'évolution de la force globale sur un corps quelconque sont possibles. La détermination de cette force résultante peut se faire avec ou sans connaissance de la répartition des forces à l'intérieur de l'objet en question. Toutefois, les modèles de calcul utilisés donnent chacun leur propre approche à la notion de densité de force [8].

### IV.1 Méthode de la variation de la coénergie et de l'énergie magnétique

La force magnétique peut être calculée par la dérivation par rapport au déplacement à courant constant de la coénergie magnétique  $\overline{W}$ , ou par la dérivation par rapport au déplacement à flux constant de sa forme homologue l'énergie magnétique ( $W$ )

Si  $F_s$  représente la composante de la force magnétique totale suivant une direction donnée, on pourra écrire :

$$F_s = + \left. \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} \right|_{i = \text{cst}} \quad (\text{IV.1})$$

$$F_s = - \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{\Phi = \text{cst}} \quad (\text{IV.2})$$

Sachant que :

$$\overline{W} = \int_{\Omega} \left[ \int_0^H B dH \right] d\Omega \quad \text{ou bien} \quad W_{\Omega} = \int \left[ \int_0^H H dB \right] d\Omega \quad (\text{IV.3})$$

$\Omega$  : Domaine de résolution.

Numériquement, les dérivations peuvent être obtenues par les relations suivantes :

$$F_x = \left. \frac{\overline{W}_{x+\Delta x} - \overline{W}_x}{\Delta x} \right|_{i=\text{cst}} \quad (\text{IV.4})$$

$$F_x = \left. -\frac{W_{x+\Delta x} - W_x}{\Delta x} \right|_{\Phi=\text{cst}} \quad (\text{IV.5})$$

$\Delta x$  : représente un incrément de déplacement.

## IV.2 Force de Lorentz

Le problème rencontré c'est dans le conducteur de courant utile dans le champ magnétique externe.

Si on considère un conducteur électrique magnétique placé dans un champ magnétique. L'équation différentielle de la force s'exerçant sur ce conducteur est donnée par la relation suivante [9] :

$$d\vec{F} = Id\vec{L}\wedge\vec{B} \quad (\text{IV.6})$$

Où  $d\vec{L}$  est la longueur élémentaire dans la direction du courant I.

L'équation (IV.6) est dérivée vers la relation fondamentale de la force entre deux charges mobiles. Elles représentent la partie magnétique de la force de Lorentz quand le conducteur est une droite et le champ est une constante le long de sa longueur, la force différentielle peut être intégrée. Dans les deux dimensions magnétostatiques le modèle éléments finis, les composantes du champ sont localisées dans le plan. Dans ce cas (IV.6) peut être simplifié dans l'expression qui suit pour le conducteur de longueur.

$$\mathbf{F} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{L} \quad (\text{IV.7})$$

Les équations de la force sont théoriquement valables seul pour un conducteur dans un champ magnétique, dans la pratique elles peuvent être utilisées même pour le calcul de la force dans les machines électriques avec plusieurs encoches qui contiennent le courant, à condition que B soit une valeur moyenne dans l'entrefer.

Cette simplification indique déjà le degré de perte, aussi l'information locale autour du champ n'est pas prise en considération. Ces combines approchent l'analyse du champ analytique et numérique à niveau simplifié.

Dans un modèle 2D, la composante du champ est localisée sur sa surface. Où le courant est orienté perpendiculairement à cette surface.

Dans ce cas l'équation (IV.7) peut être également exprimée sous sa forme locale. C'est la force par unité de volume notée par  $\vec{F}$  [9] :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{F}}{dV} \quad (\text{IV.8})$$

$$\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B} \quad (\text{IV.9})$$

$dV$  : unité de volume

$$\vec{F} = \frac{Id\vec{L} \wedge \vec{B}}{dV}$$

(IV.10)

La force globale est donnée par :

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} dV = \int_V (\vec{J} \wedge \vec{B}) dV \quad (\text{IV.11})$$

Dans une structure axisymétrique en 2D, les forces électromagnétiques sont exprimées selon les composantes r et z, par les relations suivantes :

$$f_r = J_\Phi \cdot B_z \quad (\text{IV.12})$$

$$f_z = -J_\Phi \cdot B_r \quad (\text{IV.13})$$

Sachant que :

$$\vec{J} = (0, J_\Phi, 0) \quad (\text{IV.14})$$

$$\vec{B} = (B_r, 0, B_z) \quad (\text{IV.15})$$

$$B_r = \frac{\partial A_\Phi}{\partial z} \quad (\text{IV.16})$$

$$B_z = \frac{\partial A_\Phi}{\partial r} \quad (\text{IV.17})$$

En utilisant la résolution par la méthode des éléments finis, les forces totales dans chaque élément sont données par :

$$\mathbf{F}_r = \iint_{\Omega} J_{\Phi} \cdot \mathbf{B}_z \cdot d\Omega \quad (\text{IV.18})$$

$$\mathbf{F}_z = \iint_{\Omega} -J_{\Phi} \cdot \mathbf{B}_r \cdot d\Omega \quad (\text{IV.19})$$

Où :

$\mathbf{B}_z$  : Composante d'induction magnétique suivant l'axe z.

$\mathbf{B}_r$  : Composante d'induction magnétique suivant l'axe r.

$\Omega$  : Domaine d'étude.

Dans une structure cartésienne en 2D, les forces électromagnétiques sont exprimées selon les composantes x et y, par les relations suivantes :

$$F_x = J_z \cdot B_y \quad (\text{IV.20})$$

$$F_y = -J_z \cdot B_x \quad (\text{IV.21})$$

Sachant que :

$$\vec{J} = (0, 0, J_z) \quad (\text{IV.22})$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y, 0) \quad (\text{IV.23})$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} \quad (\text{IV.24})$$

$$B_y = \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (\text{IV.25})$$

En utilisant la résolution par la méthode des éléments finis les forces totales dans chaque élément sont données par :

$$F_x = \iint_{\Omega} J_z \cdot B_y \cdot d\Omega \quad (\text{IV.26})$$

$$F_y = \iint_{\Omega} -J_z \cdot B_x \cdot d\Omega \quad (\text{IV.27})$$

Où :

$B_y$  : Composante d'induction magnétique suivant l'axe z.

$B_x$  : Composante d'induction magnétique suivant l'axe r.

$\Omega$  : Domaine d'étude.

### IV.3 Méthode des travaux virtuels

#### 1-principe de la méthode

Coulomb propose d'utiliser la méthode des éléments finis pour évaluer directement la force magnétique totale. En effet, le domaine « déformé »  $V_d$  est décomposé en sous domaines  $V_e$  (élément fini) sur lesquels, toute intégration est conduite en fonction des coordonnées locales (u, v,  $\omega$ ) [10].

#### 2-Calcul de la force

En faisant appel à la coénergie, l'expression de la force s'écrit :

$$F_s = \frac{\partial}{\partial s} \left[ \int_{V_e} \left[ \int_0^H \mathbf{B} d\mathbf{H} \right] dV \right] = \frac{\partial}{\partial s} \sum_e \left[ \int_{V_e} \left[ \int_0^H \mathbf{B} d\mathbf{H} \right] d\Omega_e \right] \quad (\text{IV.28})$$

Dans le système de coordonnées locales, l'expression (III.28) de la force prend la forme suivante :

$$F_s = \frac{\partial}{\partial s} \sum_e \left[ \int_{V_{e \text{ local}}} \left[ \int_0^H \mathbf{B} d\mathbf{H} \right] |G| dV_e \right] = \frac{\partial}{\partial s} \sum_e \left[ \int_{V_{e \text{ local}}} \left[ \int_0^H \mathbf{B} d\mathbf{H} \right] |G| du dv d\omega \right] \quad (\text{IV.29})$$

$|G|$  : Est le déterminant de la matrice Jacobéenne de transformation de coordonnées.

La dérivation par rapport au déplacement s, introduit sous l'intégrale de volume conduit à l'expression suivante :

$$F_s = \sum_e \int_{V_{e \text{ local}}} \left[ -\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial s} \cdot \mathbf{H} + \int_0^H \mathbf{B} d\mathbf{H} \cdot |G|^{-1} \cdot \frac{\partial |G|}{\partial s} \right] dV_e \quad (\text{IV.30})$$

Ainsi pour déterminer la force, seule la matrice jacobéenne et son déterminant varient en fonction du déplacement, donc ils sont les seuls termes à calculer.

### IV.4. Tenseur de Maxwell

L'approche la plus utilisée dans le calcul des forces électromagnétiques serait la méthode du tenseur de Maxwell. Contrairement à la méthode des travaux virtuels qui est basé sur l'énergie.

La méthode du tenseur de Maxwell décrit directement les forces en termes du champ magnétique.

L'avantage de cette méthode est de permettre la détermination des forces avec une seule solution éléments finis.

Cette approche consiste à calculer le tenseur local en tout point du domaine, puis à additionner ces tenseurs locaux (en utilisant une intégrale de surface) pour trouver la force totale. L'expression du tenseur de Maxwell peut être déduite à partir de l'équation (IV.31). En trois dimensions la force est donnée comme suit [10] :

$$\vec{F} = \nu \int \vec{T} \cdot d\vec{S} \quad (\text{IV.31})$$

Où :

$d\vec{S}$  : Est le vecteur normal à la surface  $\vec{S}$  considérée.

Dans le plan [r, z] le terme  $\vec{T}$  est décrit par :

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} B_r^2 - \frac{1}{2}|B^2| & B_r B_z \\ B_z B_r & B_z^2 - \frac{1}{2}|B^2| \end{bmatrix} \quad (\text{IV.32})$$

L'expression ci-dessus peut être réécrite en termes de composantes normale et tangentielle d'induction magnétique à chaque point du contour fermé  $C$  où la force est évaluée.

Cependant, les composantes associées à la force pour une longueur axiale  $L$  sont :

$$F_r = \frac{1}{2\mu_0} \int (B_r \cdot B_n - B_z \cdot B_t) dL \quad (\text{IV.33})$$

$$F_z = \frac{1}{2\mu_0} \int (B_z \cdot B_n - B_r \cdot B_t) dL \quad (\text{IV.34})$$

Si on veut calculer la composante de la force globale suivant l'axe (oz), les expressions des composantes tangentielle et normale des inductions magnétiques deviendront :

$$B_n = B_r \quad (\text{IV.35})$$

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_z \quad (\text{IV.36})$$

Le contour doit être entièrement dans l'air et ne doit pas passer à travers d'autres matériaux.

Dans plusieurs cas, le contour n'a pas besoin d'être fermé. Des parties du contour fermé peuvent ne pas être considérées si leur valeur intégrale est négligeable, les expressions des forces sont calculées sur une seule ligne droite.

$$\mathbf{F}_n = \frac{1}{2\mu_0} \int (\mathbf{B}_n^2 - \mathbf{B}_t^2) d\mathbf{L} \quad (\text{IV.37})$$

$$\mathbf{F}_t = \frac{1}{2\mu_0} \int (\mathbf{B}_n \cdot \mathbf{B}_t) d\mathbf{L} \quad (\text{IV.38})$$

### Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés aux différentes méthodes d'évaluation des forces magnétiques dans les dispositifs électromagnétiques, on s'intéresse à la variation de l'énergie et de coénergie magnétique puis la force de Lorentz et la méthode du Tenseur de Maxwell.



Tableau I : Dimensions géométriques de la MRV

Nombre de phase	3
Largeur du pole statorique	17mm
Longueur du pole statorique	25mm
Profondeur du stator	50mm
Largeur du pole rotorique	17.5mm
Profondeur du rotor	50mm
Longueur totale	204mm
Largeur totale	110mm
Largeur de l'entrefer	1mm
Type en acier	M19

### V.3. Organigramme de calcul

Le programme de calcul se fait selon l'organigramme suivant :

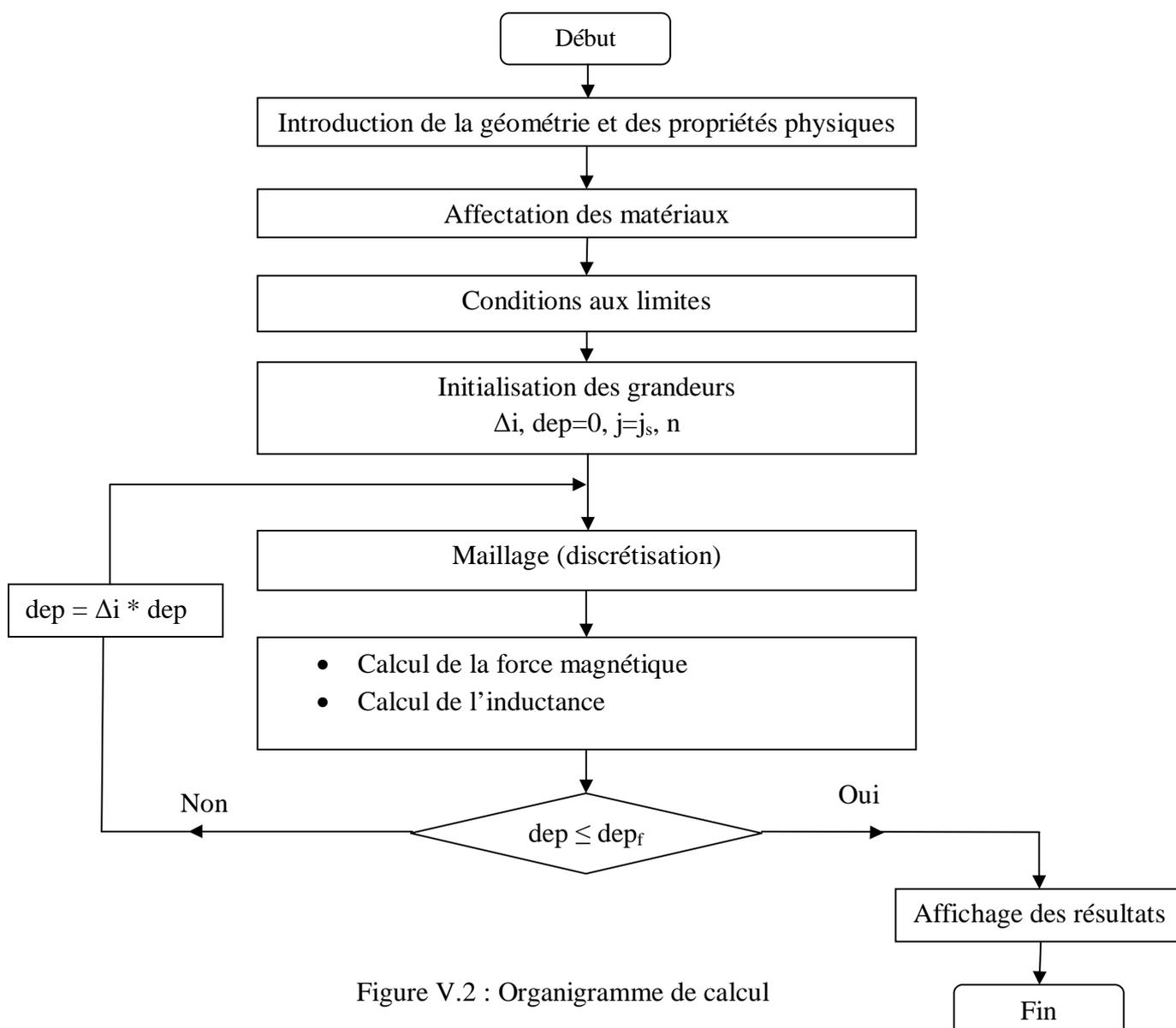


Figure V.2 : Organigramme de calcul

Tel que :

dép. : Le déplacement.

dep<sub>f</sub> : Le déplacement final.

j<sub>s</sub> : La densité de courant de source.

Δi : le pas.

n : Le nombre d'itérations.

#### V.4. Résultats et discussion

Le domaine d'étude de la machine à réluctance variable est représenté par la figure (V.3).

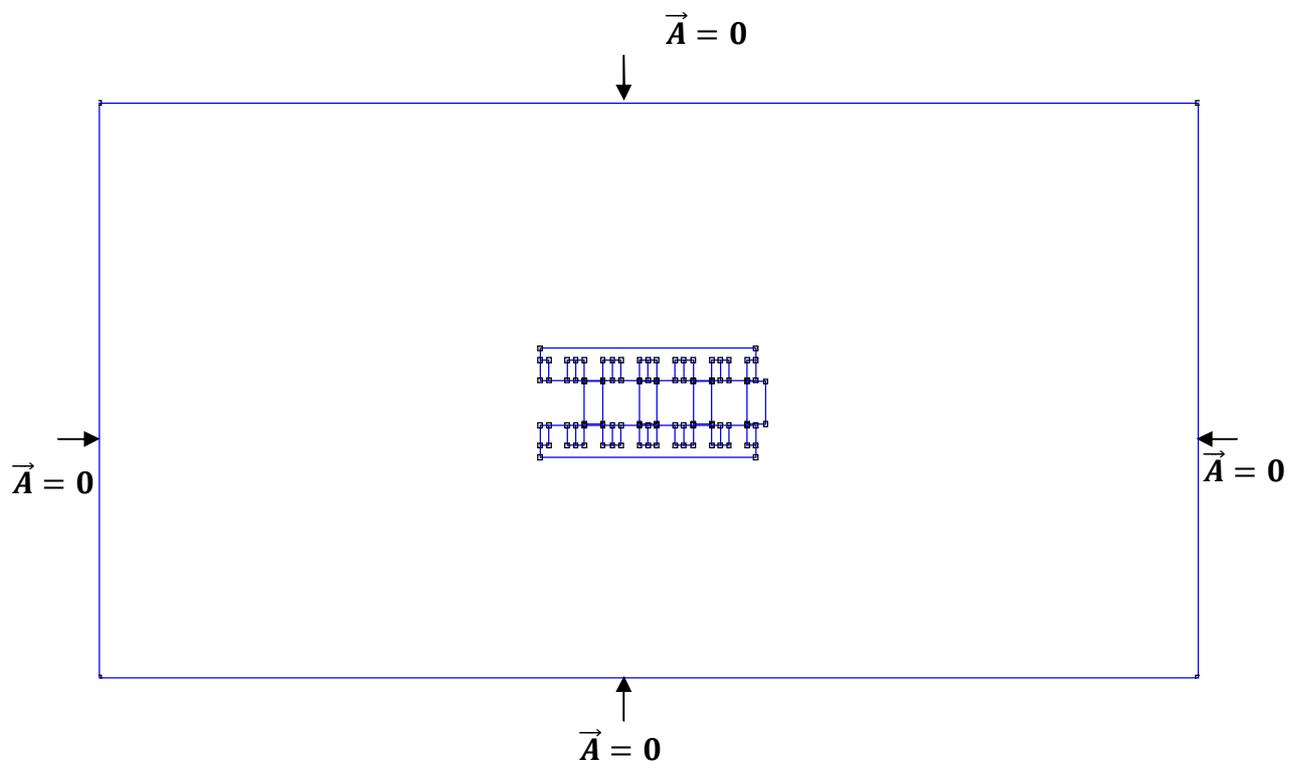


Figure V.3 : Domaine d'étude de la machine à réluctance variable et conditions aux limites.

Nous utilisons la condition de Dirichlet homogène, elle nous renseigne sur la valeur exacte de l'inconnu sur la frontière extérieure de domaine de résolution.

### V.4.1. Maillage du domaine de résolution

La figure (V.4) présente le maillage pour la résolution éléments finis, afin de résoudre le problème électromagnétique 2D en régime magnétostatique dans le plan (x, y).

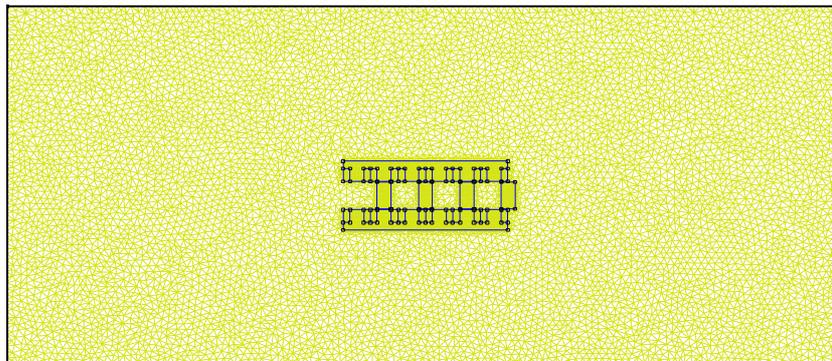


Figure V.4 : Maillage élément finis du domaine d'étude de la machine à réluctance variable.

### V.4.2. Les lignes de flux

La figure (V.5) représente les lignes de flux obtenues lors de la résolution pour la position alignée des dents de la machine.

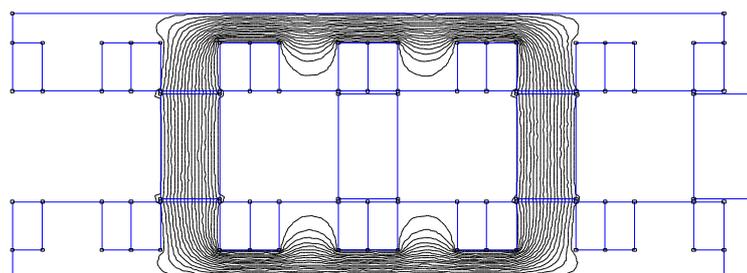


Figure V.5 : Ligne du flux pour la position alignée des dents ( $J=2.66.10^{+6}$  A/m<sup>2</sup>)

La figure (V.6) illustre les lignes de flux pour la position décalée des dents de la machine.

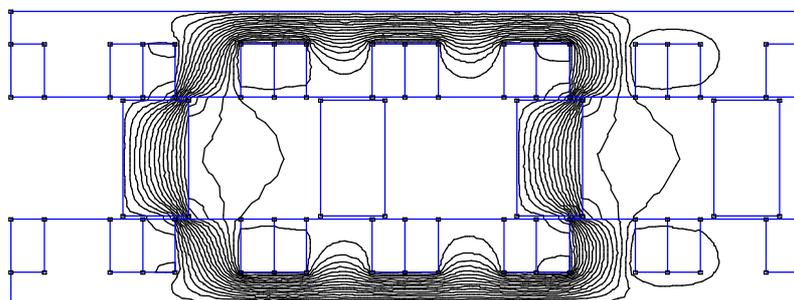


Figure V.6 : Ligne du flux pour la position décalée des dents ( $J=2.66.10^{+6}$  A/m<sup>2</sup>)

• **Validation**

Afin de valider le programme développé nous avons évalué l’inductance en fonction du déplacement de la partie en mouvement de la machine à réluctance variable et nous l’avons comparé aux résultats expérimentaux fournis par [11]. Nous remarquons une concordance entre les résultats calculés et les résultats expérimentaux la confrontation est donnée par la figure V.7.

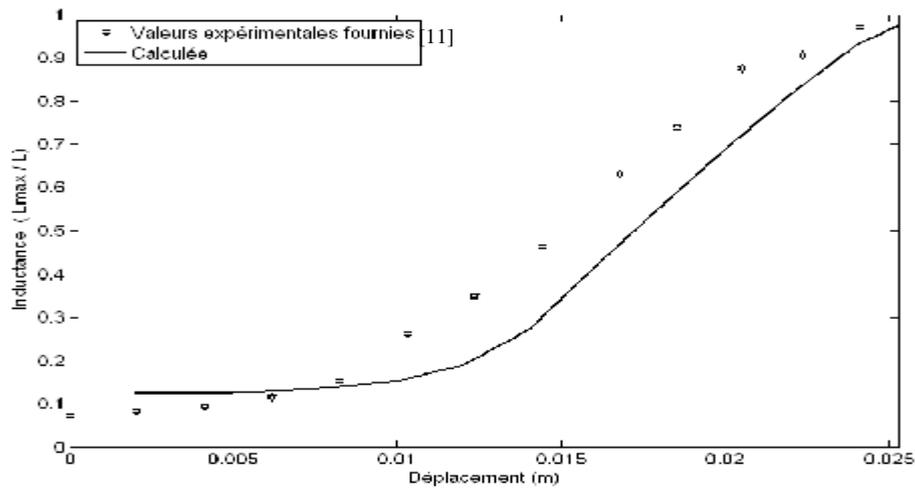


Figure V.7 : Confrontation des résultats expérimentaux et calculés de l’inductance

**V.4.3. Induction magnétique**

Nous représentons ci-dessous la répartition de l’induction magnétique pour la position alignée et décalée des dents de la machine.

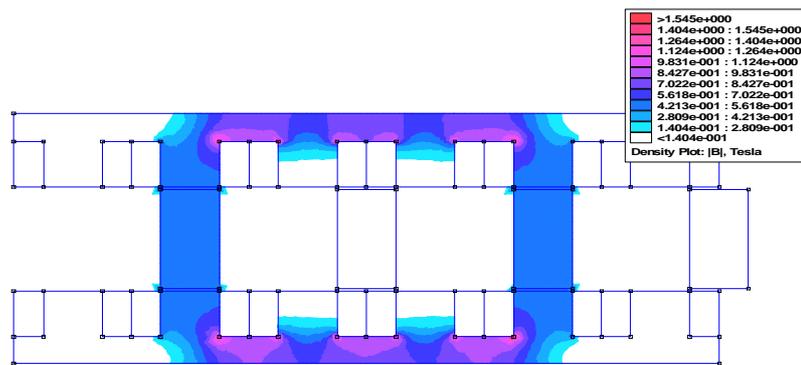


Figure V.8 : Induction magnétique pour la position alignée des dents ( $J=2.66.10^{+6}$  A/m<sup>2</sup>)

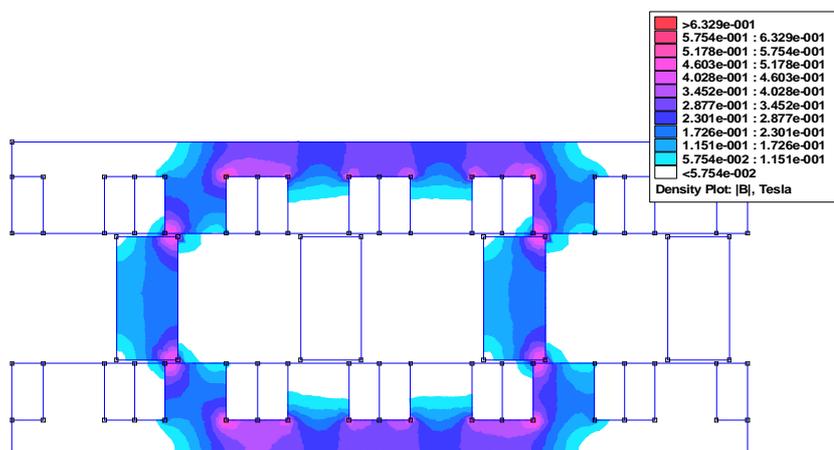


Figure V.9 Induction magnétique pour la position décalée des dents ( $J=2.66 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$ )

La Figure V.10.a et V.10.b montrent les allures de l'induction normale et tangentielle dans l'entrefer en fonction du déplacement pour la densité de courant  $J= 2.66 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$  et pour les positions alignées et décalées des dents.

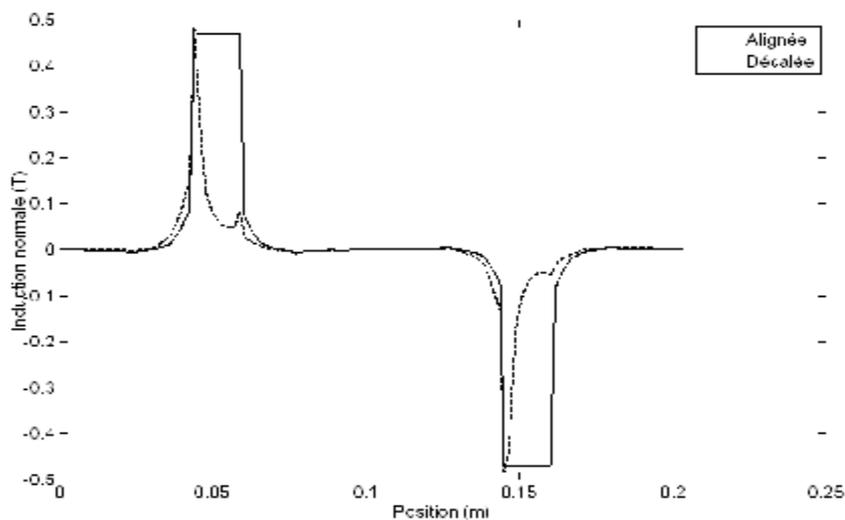


Figure V.10.a : Induction normale dans l'entrefer pour une densité de courant  $J=2.66 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$

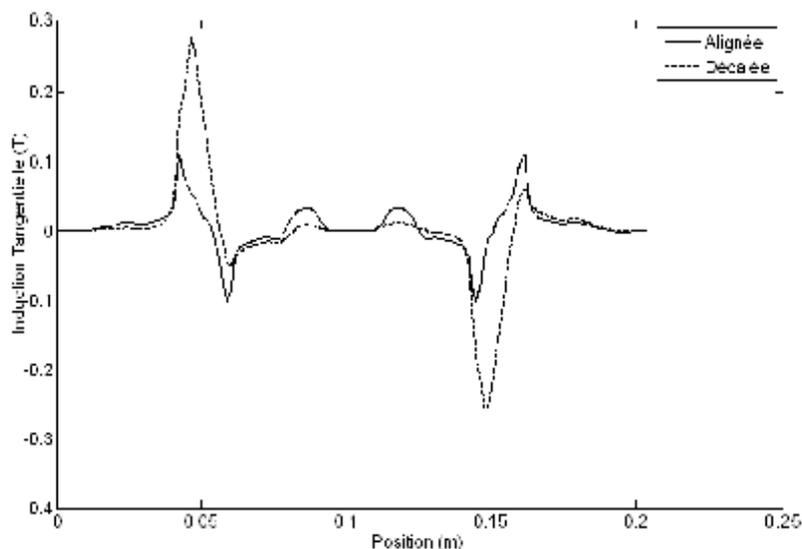


Figure V.10.b : Induction tangentielle dans l'entrefer pour une densité de courant  $J=2.66. 10^6 \text{ A/m}^2$

Dans l'entrefer la valeur de l'induction normale est proche de 0.5 Tesla pour la position alignée et décalée des dents pour une densité de courant de  $J=2.66. 10^6 \text{ A/m}^2$  et une induction tangentielle proche de 0.3 Tesla pour la position décalée des dents et 0.1 Tesla pour la position alignée des dents pour la même densité de courant. L'allure de l'induction est périodique, et on remarque que l'épaisseur du créneau d'induction pour la position décalée diminue.

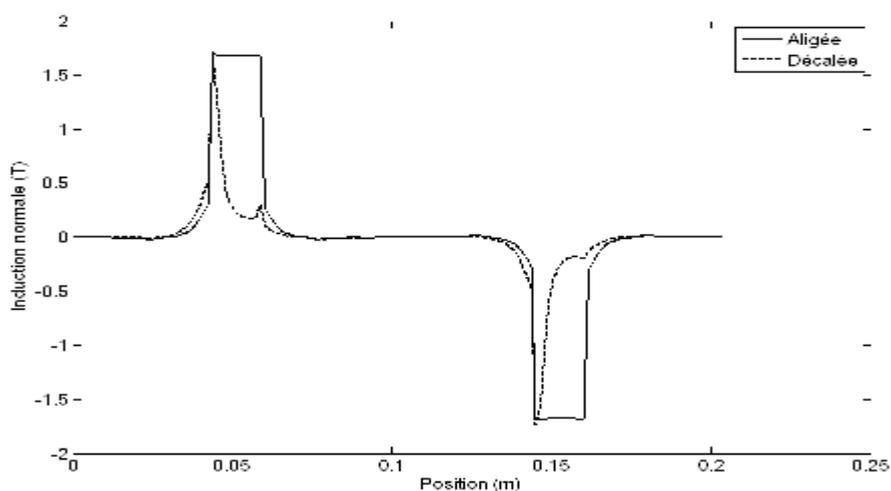


Figure V.11.a : Induction normale pour une densité de courant  $J=9.5. 10^6 \text{ A/m}^2$

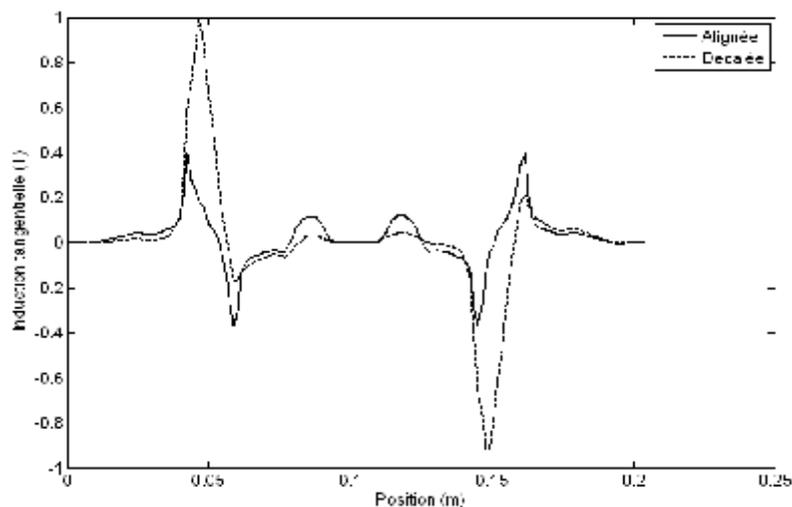


Figure V.11.b : Induction tangentielle pour une densité de courant  $J=9.5 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$

Dans l'entrefer la valeur de l'induction normale est proche de 1.7 Tesla pour la position décalée et alignée des dents pour une densité de courant de  $J=2.66 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$  et une induction tangentielle proche de 0.3 Tesla pour la position alignée des dents et 1 Tesla pour la position décalée des dents pour la même densité de courant. L'allure de l'induction est périodique, et on remarque que l'épaisseur du créneau d'induction pour la position décalée diminue.

### V.4.4. Evaluation de la force magnétique

La figure ci-dessous représente les allures des forces magnétiques en fonction du déplacement et pour différentes densités de courant.

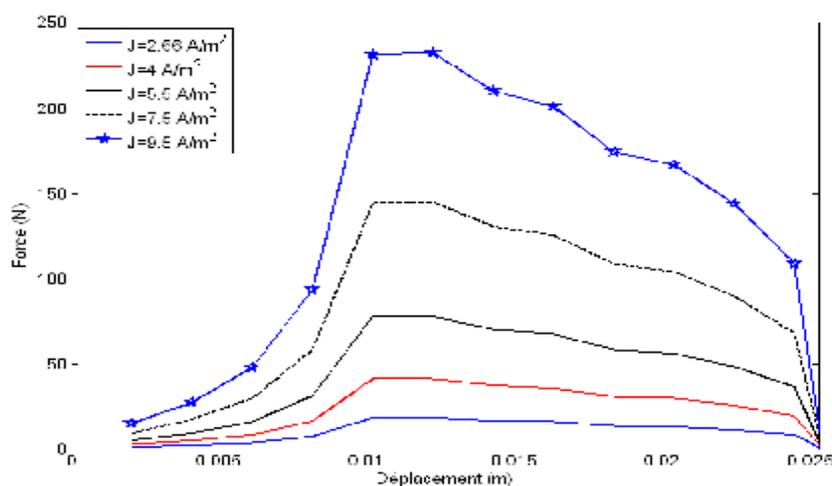


Figure V.12 : Force magnétique en fonction du déplacement

L'étude de la force magnétique en fonction du déplacement s'effectue en utilisant la méthode du Tenseur de Maxwell, le résultat obtenu est montré sur la figure V.12. On remarque que plus la densité de courant augmente plus l'allure de la force augmente pour une valeur de déplacement inférieure à 0.01m. Plus la valeur du déplacement augmente à partir de 0.01 m, la force magnétique diminue jusqu'à ce qu'elle s'annule, sachant que le pas de déplacement de la partie mobile est constant et imposée.

Tableau 2 : Les forces magnétiques maximales en fonction des densités de courant.

Densités de courant ( $10^{+6} \text{A/m}^2$ )	Force maximale (N)
2.66	20
4	40
5.5	70
7.5	145
9.5	240

## Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé un code de calcul à l'aide du logiciels FEMM et nous l'avons appliqué à l'étude d'une machine à reluctance variable linéaire pour déterminer principalement la force magnétique. Afin de valider le programme développée, nous avons calculé l'inductance en fonction du déplacement du rotor et nous l'avons confronté avec des résultats expérimentaux fournis. Nous avons ensuite calculé les inductions tangentielles et normales. la force magnétique en fonction du déplacement a été calculé à l'aide de la méthode du Tenseur de Maxwell ou nous avons remarqué que la force est très important pour une densité de courant de  $J=9,5.10^{+6} \text{A/m}^2$ .

La machine à réductance variable est de conception très simple qui peut concurrencer les machines classiques à courant alternatif grâce à ses bonnes performances.

Dans notre travail, nous avons évoqué au début quelques généralités sur la MRV et son domaine d'utilisation, puis en passant par les équations de Maxwell, nous avons obtenu les équations aux dérivées partielles en termes de potentiel vecteur magnétique régissant cette machine. Nous avons présentés les méthodes numériques de résolution de ces équations partielles particulièrement la méthode des éléments finis qui a été utilisée pour la résolution de ces équations.

Pour faciliter la tâche des calculs, nous avons fait appel au logiciel FEMM efficace et simple, où un programme a été écrit et exécuté, afin de calculer principalement la force magnétique en fonction du déplacement. Nous avons choisi la méthode du Tenseur de Maxwell qui a été appliqué pour calculer la force magnétique en fonction du déplacement pour différentes densités de courant d'alimentation ainsi que la déduction des inductions tangentielles et normales. Nous avons remarqué qu'en augmentant la densité de courant, la force magnétique augmente ainsi que l'induction magnétique au niveau de l'entrefer.

- [1] F.M.SARGOS « Machine à réluctance variable». Cours non éditer de DEA.I.N.P.L. NANCY, France. Décembre 1992.
- [2] [www.femm.foster-miller.net](http://www.femm.foster-miller.net) « Finite Element Method magnetics ». Version 3.3. User's manual, March 14, 2003.
- [3] ALAIN MAILLFERT « Conception assistée par ordinateur, machine à réluctance variable». Technique de l'ingénieur D5503-1986. Ppl-20.
- [4] [www.Sciencepresse.qc.ca](http://www.Sciencepresse.qc.ca)
- [5] S.YACINE et F.SAOULA « Etude d'une machine synchrone linéaire à aimants permanents ».Mémoire de fin d'étude, d'ingénieur de l'UMMTO, promotion 2006.
- [6] L.NAIT KADI,A.NAIT OUSLEMENE « Mise on ouvre du couplage magnétothermique pour l'étude de la répartition de la température en utilisant la méthode des élément finis : application au dispositifs de chauffage par induction et lanceurs électromagnétique » Mémoire d'ingénieur, université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou,2002
- [7] M.Hadjari et L.Flissi « Modélisation des phénomènes électromagnétiques et mécaniques en régime transitoire en utilisant la méthode des éléments finis avec prise en compte du mouvement ». Mémoire d'ingénieur, promotion 2002, Université MOULOUD MAMMERI, Tizi-Ouzou.
- [8] K.SRAIRI « Modélisation d'actionneurs électromagnétiques alimentés en régime transitoire ». Thèse de doctorat, Université de Nantes, 1996.
- [9] K.HAMEYER et R.BELMANS « Numeerical Modelling and Design of Electrical Machines and devises ». Edition WIT press 1999.
- [10] M.ZAOUIA « Mise en œuvre d'un modèle de couplage de phénomène électrique et magnétique en régime transitoire avec prise en compte du mouvement ». Mémoire de magistère de l'EMP, promotion 2001.
- [11] Ferhat Daldaban, Nurettin Ustkoyuncu. « A new double sided linear switched reluctance motor with low cost » Energy conversion and management 47 (2006) pp.2983-2990 ELSEVIER.