

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER PROFESSIONNEL

Domaine : **Sciences et Technologies**

Filière : **Génie électrique**

Spécialité : **Automatique et informatique
industrielles**

Présenté par

Tassadit HAMMOUNI

Ouiza BOUDEHANE

Thème

Modélisation et commande d'un système de transport sous contraintes temporelles dans l'algèbre Max-Plus.

Mémoire soutenu publiquement le 21/07/2016 Devant le jury composé de :

Mr Mohand Achour TOUAT

MCB, UMMTO , Président

Mr Redouane KARA

MCA, UMMTO, Encadreur

Mr Hakim ACHOUR

MCA, UMMTO, Examineur

Mr Ahmed MAIDI

Professeur, UMMTO, Examineur



Remerciements

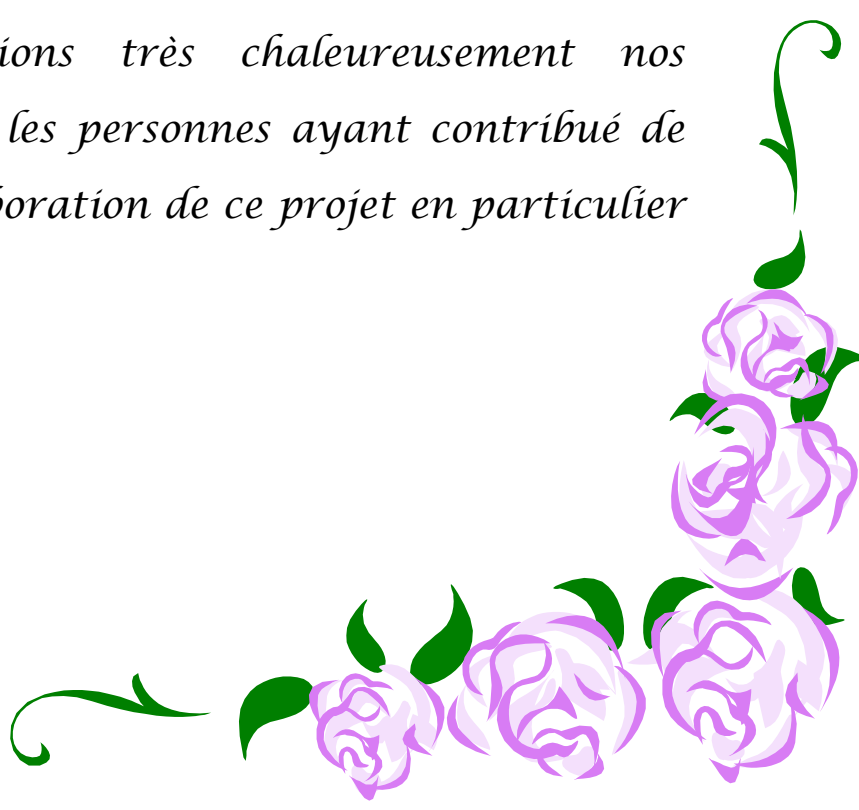
Au terme de ce travail,

Nous tenons, en premier lieu à remercier le Bon Dieu de nous avoir donné le courage et la patience pour accomplir ce modeste travail.

Nous remercions vivement notre promoteur M.KARA Redouane Pour son aide précieux et ses conseils judicieux. Nous tenons également, à lui exprimer notre profonde reconnaissance pour sa disponibilité, le temps précieux qu'il nous a consacré ainsi que ses encouragements.

Que les membres du jury trouvent ici nos vifs remerciements pour avoir accepté de juger notre travail.

Enfin, nous remercions très chaleureusement nos familles, ainsi que toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin pour l'élaboration de ce projet en particulier nos amis.



Sommaire

Introduction générale :	1
Chapitre I : Etude des systèmes de transport public	3
I- Introduction :	3
II- Généralités sur les systèmes de transport :.....	3
II-1-Système physique :.....	3
II-1-1- L'infrastructure :.....	3
II-1-1-A- Lignes :.....	4
II-1-1-B-Arrêts et tronçons (zones) :.....	4
II-1-1-C-Terminus :.....	5
II-1-1-D-Itinéraires :.....	5
II-1-2-Entités de transport :.....	5
II-2- Système de gestion :	5
II-2-1-Planification :	8
II-2-2- Exploitation :.....	9
III- Description d'un système de transport public vu en tant que SDED :.....	11
IV- Transports urbains :.....	13
IV-1- Transport en commun :.....	13
IV-2- Les types de transport en commun :	13
IV-2-1- Transports aériens :	13
IV-2-2- Transports maritimes :.....	14
IV-2-3- Transports terrestres :	14
IV-2-4- Les transports urbains :	14
V- Conclusion :.....	15
Chapitre II : Généralités sur les réseaux de Petri et l'algèbre (Max, +)	16
I-introduction :	16
II-Algèbres des dioïdes :	16
II-1-Rappels algébriques :	16
II-2-Propriétés des dioïdes :.....	17

II-2-1-Structure ordonnée d'un dioïde :	17
II-2-2- Dioïde complet :	17
II-2-3-Dioïde matriciel :	18
II-2-4- Sous-dioïde :	19
II-3-Résolution d'équation dans les dioïdes :	19
III- Réseau de Petri :	20
III-1- Définition :	20
III-2- Élément de base d'un réseau de Petri :	20
III-3- Evolution d'un réseau de Petri :	21
III-4- Les réseaux de Petri Autonomes et non Autonomes :	21
III-4-1- Réseau de Petri Autonome :	21
III-4-2-Réseau de Petri non autonome :	22
III-5- Propriété des réseaux de Petri :	22
III-5-1-L'accessibilité :	22
III-5-2-Etat d'accueil et réseau de Petri réinitialisable :	22
III-5-3-réseaux de Petri borné(Bornitude) :	22
III-6- Réseaux de petri particuliers :	23
III-6-1-Graphe d'état :	23
III-6-2-Graphe d'événements :	23
III-6-3-Réseaux de Petri temporisés :	23
III-6-3-1- Les réseaux de Petri P-temporisés :	24
III-6-3-2- Les réseaux de Petri T-temporisés :	25
III-7-Graphes d'événements temporises :	26
III-7-1-définition :	26
III-7-2-Propriétés des graphes d'événements :	27
III-7-3- Représentation d'état des graphes d'événements temporisés :	27
IV- Représentation de la dynamique :	27
IV-1- Fonctions compteurs, domaine temporel :	28
Equation d'état dans Rmin :	29
IV-2-Fonction dateurs, domaine événementiel :	29

Equation d'état dans <i>Rmax</i> :.....	30
IV-3-Equation compteurs :.....	31
IV-4- Equations dateurs :.....	33
V-Conclusion :.....	34
Chapitre III : Modélisation et commande d'un système de transport public ..	36
I-Introduction :	36
II- Description du système de transport public étudié :	36
III-Modélisation par un graphe d'événements temporisés :	37
III-1-Premier modèle réseau de Pétri :	37
III-2-Interprétation du modèle graphique :	40
III-3-Modèle graphe d'événements temporisés :.....	41
IV-Commande d'un système de transport public sous contrainte temporelle :	42
IV-1- Représentation d'état dans l'algèbre (max, plus) :.....	42
Equation d'état :	44
IV-2-Commande des systèmes à évènements discrets sous contraintes temporelles :	45
IV-3-Commande temporelle des systèmes Max-Plus linéaires :	45
Contrainte temporelle :	45
IV-3-1- Une seule contrainte et une seule commande :	46
IV-3-2-Plusieurs contraintes et une seule commande :	48
IV-3-3-Une seule contrainte et plusieurs commandes :.....	51
IV-4-commande du STP sous contrainte temporelle dans le dioïde(max-plus) :.....	52
IV-4-1-Calcul des lois de commande :	53
IV-4-2-Interprétation des résultats :.....	56
V-Conclusion :.....	56
Conclusion générale :	57
Références bibliographie:	

Table des figures:

Figure-1-1- : Les éléments de l'infrastructure d'un STP.	4
Figure- 1-2- : Phases de planification et d'exploitation d'un STP.....	7
Figure-2-1- : L'évolution d'un réseau de Petri.....	21
Figure-2-2- : Réseau de Petri autonome.	22
Figure-2-3- : Rdp non borné.	23
Figure-2-4- : Graphe d'état.....	23
Figure-2-5-: Le fonctionnement d'un réseau de Petri P-temporisé.....	24
Figure-2-6-: Le fonctionnement d'un réseau de Petri T-temporisé.....	25
Figure-2-7- : Exemple de graphe d'événements	31
Figure-2-8- : Graphe d'événements temporisés étendu.....	32
Figure-2-9- : Graphe d'événements temporisé étendus.....	34
Figure-3-1- : La structure physique de deux lignes LietLi + 1 et de la station Sci, i + 1	36
Figure-3-2- : Modèle RdP du système considéré.	39
Figure-3-3- : Le modèle GET représentant les deux lignes LietLi + 1	42
Figure-3-4- : Le modèle GET des deux lignes L1 et L2.	43
Figure-3-5- : Contrainte temporelle	46
Figure-3-6- Graphe d'événements temporisé.....	50
Figure-3-7- Graphe d'événements étendu.....	50
Figure-3-8- : graphe d'événement temporisé soumis a des contraintes temporelles.....	53

Notations utilisées :

SED : Système à événements discrets.

SDED : Système dynamique à événements discret.

STP : Système de transport public.

GET : Graphe d'événements temporisés.

RdP : Réseau de Petri.

\oplus : Addition dans un dioïde (max, plus).

\otimes : Multiplication dans un dioïde.

\mathbb{R}_{max} : Dioïde $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, max, +)$, appelé aussi algèbre (max,+).

$\overline{\mathbb{R}}_{max}$: Dioïde complet $(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, max, +)$, appelé aussi algèbre (max,+).

\mathbb{R}_{min} : Dioïde $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, max, +)$, appelé aussi algèbre (min,+).

$\overline{\mathbb{R}}_{min}$: Dioïde $(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, max, +)$, appelé aussi algèbre (min,+).

A^* : Etoile de Kleene de la matrice $A(A = Id_n \oplus A \oplus A^2 \dots)$.

D : Dioïde.

$D^{n \times n}$: Dioïde matriciel.

ε : Élément neutre pour la loi \oplus .

e : Élément neutre pour la loi \otimes .

Id_n : Matrice identité.

m_0 : Marquage initial d'un RdP.

τ_i (ou τ_{ij}) : Temporisation associée à une place p_i (ou p_{ij}).

\mathcal{P} : Ensemble des places $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$.

\mathcal{T} : Ensemble des places $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$.

$x_i(k)$: Date de $k^{\text{ème}}$ tir de la transition T_i .

$x_i(t)$: Nombre de tir de la transition T_i à l'instant t .

Y : Vecteur de sortie.

U : Vecteur de commande.

X : Vecteur d'état.

Introduction générale :

Les systèmes de transports sont des systèmes fortement conditionnés par leur environnement. Ils sont conçus à partir de plusieurs ressources. Ils doivent répondre aux différents services tels que les déplacements des passagers d'un endroit à un autre dans les meilleures conditions.

Les systèmes de transport public peuvent être vus comme une classe de système dynamique à événements discrets (SDED). La dynamique de cette classe est gouvernée par l'occurrence d'événement discret (par exemple l'arrivée et le départ d'un bus dans un arrêt).

D'une façon similaire à d'autres classes de SDED tels que les systèmes de production et les systèmes informatique. Les systèmes de transport public (STP) ont une dynamique régie par différents phénomènes dont la synchronisation, le parallélisme et la concurrence. La diversité de ces phénomènes rend l'étude des STP difficiles et nécessite l'exploitation de plusieurs théories complémentaires permettant de modéliser, d'analyser et de commander de tels systèmes.

Les travaux présentés dans ce mémoire permettent dans un premier temps de modéliser un système de transport public (STP), dans l'algèbre Max-Plus en exploitant une modélisation de type graphes d'événements temporisés (GET). Par la suite, on synthétise des lois de commande en boucle fermée qui permettent de respecter des contraintes de temps de séjour de passager dans les stations de correspondance.

Pour ce faire on utilise la méthode proposé [S.Amari,2005]. Cette méthode permet de calculer des gains retours d'état (de type $u(k) = Fx(k - 1)$) qui permettent de garantir le respect de contraintes temporelles strictes imposés sur certaines places des graphes d'événements considéré.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre sont présentées quelques généralités sur les STPs en spécifiant les deux composantes qui les constituent, à savoir le système physique et le système de gestion.

Dans le deuxième chapitre, nous décrivons quelques méthodes de modélisation développée dans le cadre des systèmes de transport public. Ce chapitre nous permette d'aborder les méthodes d'analyse des graphes d'événements temporisés en utilisant la méthode graphique ou la méthode algébrique.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à la modélisation et la commande d'un STP par les réseaux de Petri (RdP) et l'algèbre (max, plus), soumis à des contraintes temporelles.

Chapitre I : Etude des systèmes de transport public

I- Introduction :

Les systèmes de transport sont des systèmes fortement conditionnée par leur environnement. Ils sont conçus à partir de plusieurs ressources. Ils doivent répondre aux différents services tels que les déplacements des passagers d'un endroit à un autre dans les meilleures conditions, en minimisant le temps d'attente dans les stations de correspondance... etc.

Dans ce chapitre, nous définissons la problématique que nous allons aborder dans notre étude. Nous rappelons quelques généralités sur les systèmes de transport considérés, en décrivant les principaux éléments qui les composent. Nous établissons une analogie entre un système de type à événements discrets (les systèmes de production) et les systèmes de transports en mettant en évidence l'appartenance de ces derniers aux systèmes dynamiques à événement discrets (SDED).

II- Généralités sur les systèmes de transport :

Le principal objectif de l'étude des systèmes de transport public est l'accroissement de l'efficacité d'un système de transport et nécessite la réalisation et la gestion d'infrastructures et d'équipements affectés au transport public et leur mise à la disposition des usagers. Deux composants principaux sont donc à considérer :

- le système physique.
- le système de gestion.

Dans ce qui suit nous définissons ces deux composantes d'un système de transport public et donnons leurs caractéristiques. [1]

II-1-Système physique :

Le système physique est représenté par deux éléments principaux qui est l'infrastructure(ou la topologie qui représente la structure du système) et les entités de transports (bus, train, etc....). [1]

II-1-1- L'infrastructure :

Représente une partie du système physique qui concerne les éléments qui permettent de décrire le réseau routier physique, c'est-à-dire décrire l'ensemble des voies carrossables

ouvertes aux entités de transports et véhicules. Les éléments de base de l'infrastructure d'un réseau sont : les lignes, les arrêts, les tronçons, les terminus et les itinéraires d'un passager.[1]

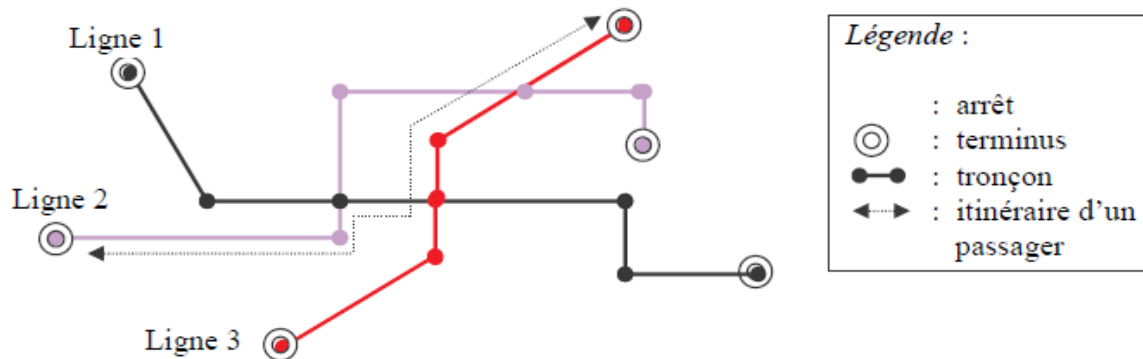


Figure -1-1- : Les éléments de l'infrastructure d'un STP.

II-1-1-A- Lignes :

Les lignes sont composées d'un ensemble fini d'arrêts ou tronçons, alternés regroupés par l'exploitant du réseau en une entité d'exploitation. La structure d'une ligne peut être plus au moins complexe suivant le nombre d'éléments qui la composent et la conception d'une ligne se fait sur des critères géographiques, sociaux et économiques.[1]

II-1-1-B-Arrêts et tronçons (zones) :

Les éléments de base de la représentation spatiale du réseau de transport, sont les arrêts qui représentent les nœuds du réseau et les tronçons qui représentent des connexions unidimensionnelles entre les arrêts. Chaque tronçon est limité par deux arrêts extrémités ou terminus. Les tronçons sont considérés comme des liaisons orientées (sens unique ou double sens) entre leurs arrêts extrémités. Il est caractérisé par sa longueur et la vitesse commerciale de déplacement de l'unité de transport. Ceci permet de déterminer un temps de déplacement entre deux arrêts. Un arrêt est caractérisé par un espace où les véhicules effectuant une tournée s'arrêtent pendant un certain temps afin de permettre aux passagers de descendre ou de monter dans les véhicules.[1]

On différencie alors trois types d'arrêts :

- **Des arrêts simples** : ils sont rattachés à une ligne, il ne peut donc pas s'effectuer d'échange de passagers sur ces arrêts.

- **Des points d'échange de passagers** : ce sont des points de correspondance desservis au moins par deux lignes.
- **Des points de retournement** : ces arrêts correspondent à des extrémités de ligne. Les véhicules de transport y font demi-tour.[2]

II-1-1-C-Terminus :

Les terminus sont des arrêts extrémités c'est-à-dire les arrêts de début de fin de la ligne.

II-1-1-D-Itinéraires :

Dans un système de transport, nous définissons l'itinéraire d'un usager comme une suite alternée d'arrêts et de tronçons d'une ligne ou de plusieurs lignes. Chaque itinéraire permet donc d'assurer le transport en commun de passagers d'un arrêt origine à un arrêt destination. Il existe deux d'itinéraires : **commercial** et **spécial**. Dans un itinéraire commercial, la montée et la descente des clients s'effectuent aux différents arrêts de cet itinéraire. Par contre dans un itinéraire spécial, la montée et descente des clients s'effectuent uniquement aux terminus.[1]

II-1-2-Entités de transport :

Le système physique est en outre, composé d'entités de transport qui sont des véhicules destinés à l'embarquement et au débarquement de passagers. Ils se présentent sous forme de bus, tramways, trains... etc. on caractérise alors le système par :

- Le nombre d'entité de transport dont il dispose.
- Le type d'entité de transport, c'est-à-dire les caractéristiques techniques des véhicules comme leur capacité d'embarquement, leur encombrement ou leur caractéristique dynamique (accélération, vitesse).

Chaque ligne d'un STP est desservie par des entités de transport, selon son importance (zones desservies, tranche horaire du déplacement considéré au cours d'une journée, fréquence de passage souhaitée, niveau de la demande, etc.), de sorte à renforcer le service sur les lieux où la charge en usager est important.[2]

II-2- Système de gestion :

Le deuxième composant des STP est le système de gestion. Il pilote le système physique pour qu'il atteigne certains objectifs, en assurant entre autres la conception des horaires et l'information des usagers.

Plusieurs travaux de recherche dans le domaine du transport public portent sur la conception et le développement d'outils d'aide à la gestion qui permettent aux exploitants d'intervenir dans la résolution de différents problèmes. Parmi les questions principales auxquelles ces recherches tentent de répondre, on trouve :

- Quels sont les objectifs "pertinents" que doivent se fixer les exploitants afin de gérer efficacement ces systèmes de transport ?
- Quelles sont les méthodes et les outils à mettre en œuvre par les exploitants pour atteindre leurs objectifs ?

Notons que même si les exploitants sont les principales entités citées ici intervenant dans la gestion d'un STP, il est utile de rappeler que d'autres acteurs sont également concernés, de près ou de loin, par cette gestion. En effet, les systèmes de transport public sont souvent exploités, en tenant compte de l'ensemble des paramètres liés aux différents acteurs. Le but de cette exploitation est d'assurer la coordination des services et leur qualité et de résorber les perturbations survenues sur une partie du système. Trois types d'acteurs collaborent ainsi entre eux ou interagissent au sein d'un même système de transport public :

- les usagers : ce sont les utilisateurs et les bénéficiaires des services offerts par les transports en commun. On peut les répartir en deux classes : usagers captifs et non captifs. Les usagers captifs sont ceux qui ne disposent pas d'alternative de transport. Tandis que les usagers non captifs ont d'autres moyens de transport possibles (véhicule personnel par exemple). C'est cette catégorie de clientèle qu'il est plus difficile de capter et pour laquelle les plus gros efforts d'amélioration sont souvent réalisés.
- les autorités organisatrices de transport. Cet acteur externe représente divers organismes civils, à différents niveaux de juridiction locale : direction des transports, ministère des transports, villes, communautés urbaines, etc. Ces organismes interviennent notamment dans la définition des stratégies ou des politiques de transport au niveau de l'exploitation des transports publics.
- les exploitants ou opérateurs de transport : ce sont souvent des sociétés et des compagnies de transport du secteur privé à qui une collectivité locale confie la responsabilité de l'exploitation des transports collectifs.

La gestion opérationnelle du transport public opère classiquement à deux niveaux temporels différents : lors de la phase de planification réalisée en temps anticipé, et lors de la phase d'exploitation à proprement parler, en temps réel. Celles-ci sont schématisées par la figure 1-2. La limite entre ces deux phases est fixée arbitrairement dans la plupart des cas. Elle peut se situer au début d'une journée d'exploitation, deux jours à l'avance, etc. Cette limite est souvent marquée par l'instant où un "plan" est "gelé".[1]

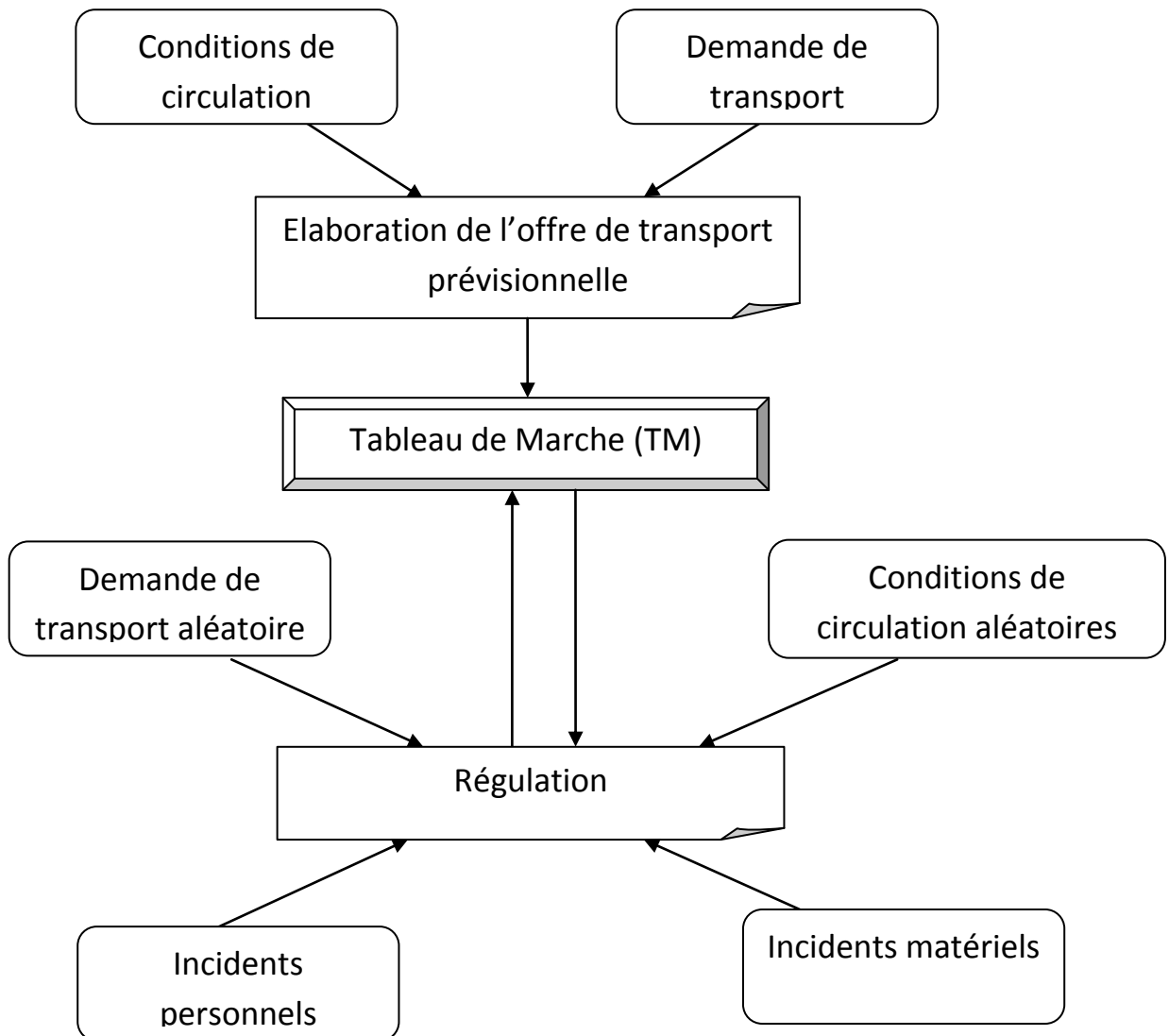


Figure -1-2-: Phases de planification et d'exploitation d'un STP.

II-2-1-Planification :

Il s'agit de la conception et la construction d'un horaire de référence. Cette référence est définie pour une période donnée (par exemple "période de pointe", vacances d'été) et pour un type donné de jour d'exploitation (par exemple un jour de la semaine). L'horaire de référence décrit l'offre de transport théorique. Il est optimisé pour répondre aux objectifs de qualité de service en tenant compte d'une part, des facteurs liés à la nature du réseau, des temps de parcours des lignes, des poids des lignes, etc. D'autre part, de la demande des usagers et des éléments liés à la gestion des moyens nécessaires (véhicules et conducteurs) pour satisfaire cette demande.[1]

- **Régularité** : la régularité est un objectif où on s'intéresse, dans un premier temps à réduire les temps d'attente aux différents arrêts du réseau, et dans un deuxième temps à équilibrer les charges entre les véhicules. En effet, on montre que l'attente en un point donné du réseau et le taux de charge moyen des véhicules sont minimaux lorsque les intervalles en ce point sont égaux (exemple : passage toutes les 5 minutes). En un point donné du réseau (arrêt), un intervalle représente le temps entre les départs ou les passages de deux véhicules successifs circulant dans le même sens. Cet objectif de régularité rentre dans le cadre de l'optimisation du confort des voyageurs à bord des véhicules.
- **Ponctualité** : un système de transport public est souvent muni d'une planification d'horaires programmée et annoncée au public. L'arrivée des voyageurs aux arrêts du réseau s'effectue donc en fonction de ces horaires. La ponctualité est une logique où l'exploitant cherche à respecter les horaires théoriques planifiés. Toute fois en pratique, des phénomènes aléatoires ou récurrents (accidents, congestions, etc.) rendent difficile à atteindre cet objectif.
- **Enlèvement de la charge** : pendant les heures de pointe, la densité des voyageurs à certains arrêts devient plus forte. L'objectif est de prendre en charge tous les voyageurs en concentrant les moyens de transport sur les arrêts les plus importants(en termes de niveau de demande).
- **Correspondance** : cette logique concerne l'assurance des correspondances entre deux lignes d'un réseau ou bien entre une ligne d'un réseau et un autre mode

de transport (cas d'une ligne desservant une station de taxis, une gare de chemin de fer, un métro, etc.). Le ou les exploitants visent à assurer la coordination et l'harmonisation des horaires aux points d'échange de passagers. Leur objectif consiste donc à minimiser l'écart entre les arrivées des véhicules aux stations de correspondance. Ceci permet aux passagers en transit d'effectuer leurs correspondances avec un temps d'attente minimal.[1]

Il est évident qu'un exploitant d'un système de transport public ne peut pas atteindre tous ces objectifs d'une façon univoque. Pendant une période de travail (une journée d'exploitation par exemple), ces objectifs interfèrent entre eux selon des priorités qui se modifient suivant différentes circonstances, à savoir les zones critiques du réseau, les heures de voyage dans la journée, etc. Selon ces priorités, l'exploitant est incité à pratiquer un arbitrage entre les différents objectifs.[1]

Au cours de la phase de planification, le concepteur chargé d'élaborer l'horaire de référence regroupe un ensemble de données, concernant le fonctionnement du système durant une période de travail, dans un document appelé *Tableau de Marche* (TM) qui peut être vu comme un plan ou un programme de production. Les dates de départ et d'arrivée des véhicules aux différents arrêts du réseau sont préétablies et enregistrées dans ce tableau. [1]

Un horaire planifié dans un TM comprend :

- des activités composant strictement la carte de l'offre de transport (les activités des véhicules couvrant des parcours le long desquels les passagers sont autorisés à voyager à bord, les services spéciaux, etc.).
- les temps couvrant des parcours haut-le-pied (sans passagers) entre des terminus ou en provenance ou à destination des arrêts de stationnement.
- les périodes de stationnement.
- les pauses véhicules.
- les temps annexes liés à l'exploitation des véhicules (temps de préparation des véhicules).[1]

II-2-2- Exploitation :

On s'intéresse ici à l'exploitation du système et aux différentes fonctions opérationnelles liées au transport des usagers. Un des objectifs de base poursuivis lors de cette phase est d'effectuer un suivi des véhicules en vue de réaliser diverses actions : suivi

du service, actions correctives de régulation, activation des mécanismes d'information des usagers ou des priorités aux feux de signalisation, etc. En particulier nous détaillerons plus spécifiquement la partie qui consiste à adapter l'horaire de référence décrit dans le tableau de marche aux conditions réelles d'exploitation, dans un plan constamment remis à jour en cours d'exploitation. Cette démarche est connue sous le nom "contrôle en temps réel" ou encore "régulation se déroulant en temps réel".

L'élaboration du TM se fait en temps anticipé et nécessite en particulier la formulation d'hypothèses sur les conditions de circulation (travaux, accidents,...), sur l'état des véhicules et du personnel conducteur (panne, absentéisme), et sur la demande de transport. Or ces facteurs sont des phénomènes complexes, souvent de nature aléatoire.

Le TM est donc défini pour des conditions moyennes d'exploitation.

Dès que l'on s'écarte de ces conditions moyennes, il devient nécessaire de réguler pour faire face à la dégradation de la qualité de service qui découle de cette dérive. Des agents appelés régulateurs sont ainsi incités à modifier, si nécessaire, les données dont ils disposent (TM de base) en les adaptant aux conditions réelles du trafic. Différentes actions de régulation sont envisageables pour essayer de « revenir à l'horaire de référence » malgré les perturbations : création/suppression de courses, échange de véhicules et/ou de conducteurs, modification d'horaire de course (heure de départ), changement de parcours,... Dans le cas où le retour du réseau à l'état initialement prévu est difficile, les modifications et les améliorations apportées sur le système conduisent à la conception d'un nouveau tableau de marche.

Comme nous venons de l'expliquer, les données issues de l'exploitation (contrôle en temps réel) viennent alimenter en permanence la réflexion sur le programme théorique et sont ainsi susceptibles de se traduire par des modifications du tableau de marche de base valable pour la période considérée (représenté sur la figure 1-2 par une flèche montante du module régulation vers le module TM). Toutefois ces données peuvent également être utilisées en temps différé lors de la prochaine phase de planification, pour la constitution du TM de la période suivante. Elles permettent donc d'assurer un suivi *a posteriori* des opérations réalisées en temps anticipé (graphicage et habillage). Ce suivi concerne plusieurs fonctionnalités parmi lesquelles on trouve :

- l'utilisation du matériel et du personnel : véhicules (consommation, remplacement encas de panne), chauffeurs, régulateurs, etc.
- le recueil de données sur le trafic voyageur et sur les points de charge importante.
- le recueil de données sur les temps des parcours réels sur un tronçon, sur un itinéraire ou sur l'ensemble d'une ligne.
- l'offre de service en termes d'analyse des relevés journaliers d'exploitation et les incidents de l'exploitation.

Les réseaux de transport public sont équipés d'outils automatiques capables de faciliter le contrôle en temps réel. Ces outils sont habituellement appelés Systèmes d'Aide à l'Exploitation (SAE). Leurs fonctions principales sont :

- la localisation de véhicules.
- le traitement des alarmes.
- des fonctions d'activation variées (par exemple la priorité aux feux de signalisation).
- le contrôle des valeurs limites relatives aux objectifs de service, afin d'aider le régulateur dans la détection des perturbations et les conducteurs dans l'adaptation de la conduite.
- l'élaboration de données pour l'information des usagers et leur diffusion en temps réel (exemple : système AGORA utilisé par la SNCF, service d'infobus concrétisé par des bornes d'information présentés aux principaux arrêts du réseau et mises en place par la Compagnie des Transports du Pays de Montbéliard).
- la collecte des données dans un but statistique.[1]

III- Description d'un système de transport public vu en tant que SDED :

Les systèmes de transport public sont caractérisés par un espace d'état discret et un changement d'état produit par des événements. Ce sont des systèmes pour lesquels les variables d'états changent seulement à certains instants associés à des événements ponctuels.

Les STP sont composés de ressources (entités de transport, infrastructure, etc.) partagées par plusieurs utilisateurs (passagers) contribuant tous aux mêmes objectifs (transporter des passagers, transmettre des informations, etc.)Le fonctionnement des STP est caractérisé par :

- ❖ Le parallélisme : de nombreux événements peuvent se dérouler simultanément et indépendamment dans diverses parties du système (exemple : l'arrivée ou le départ de deux entités de transport d'un arrêt du réseau).
- ❖ La synchronisation : nécessite la disponibilité simultanée de plusieurs ressources ou la vérification simultanée de plusieurs conditions afin d'exécuter une tâche (exemple : pour qu'un passager puisse se déplacer entre deux arrêts, il faut d'une part la présence du passager, et d'autre part la disponibilité d'un véhicule qui assure son déplacement).
- ❖ La concurrence : elle apparaît au moment où un utilisateur doit choisir une ressource parmi plusieurs (exemple : le cas d'un passager ayant plusieurs choix d'itinéraires pour se rendre à une destination sur un réseau de transport.) Pour ce phénomène, certains événements excluent l'apparition simultanée d'autres événements.

Dans le tableau 1-1, nous décrivons la différence entre les éléments qui composent ces deux types de systèmes à événement discrets (un système de transport public et un système de production) qui ont plusieurs caractéristiques communes.[1]

Composants	Systèmes de production	Systèmes de transport
Ressources	<ul style="list-style-type: none"> machines, moyens de transport (palettes, robots, chariots), hommes (exploitants, main-d'œuvre). 	<ul style="list-style-type: none"> moyens de transport (bus, train, métro), infrastructure, hommes (exploitants, régulateurs, conducteurs).
Tâches	<ul style="list-style-type: none"> usinage d'un produit, assemblage des produit, maintenance des machines 	<ul style="list-style-type: none"> transport de passagers, information de passagers, maintenance des moyens de transport.
Evénements	<ul style="list-style-type: none"> début de traitement d'un produit, fin de traitement, arrivée d'un produit au stock amont ou aval d'une machine. 	<ul style="list-style-type: none"> départ d'un véhicule d'un arrêt, son arrivée à un arrêt, dépôt de passagers, échange de passagers.
Etats	<ul style="list-style-type: none"> disponibilité d'un produit ou d'une machine, machine en panne, traitement d'un produit, attente d'un stock. 	<ul style="list-style-type: none"> attente d'un véhicule à un arrêt, attente d'un passager, véhicule en panne, en circulation ou en pause.
Prise de décision	<ul style="list-style-type: none"> traiter un produit sur une machine, faire varier la capacité d'une machine, faire fonctionner une machine ou non. 	<ul style="list-style-type: none"> affecter un véhicule à une ligne, faire varier le fréquence d'une ligne, modifier les données du réseau(TM, infrastructure,...).

IV- Transports urbains :

IV-1- Transport en commun :

Le **transport en commun**, ou **transport collectif**, consiste à transporter plusieurs personnes ensemble sur un même trajet. Il est généralement accessible en contre partie d'un titre de transport (billet, ticket, carte). [3]

IV-2- Les types de transport en commun :

IV-2-1- Transports aériens :

Le transport aérien utilise aujourd'hui principalement l'avion. [3]

IV-2-2- Transports maritimes :

On distingue :

- Transport maritime de personnes : paquebot, navette maritime (continuité territoriale)
- Transport par voie d'eau de personne : bateau-mouche, ferry.[3]

IV-2-3- Transports terrestres :

Historiquement, les premiers transports terrestres ont été à traction hippomobile, aujourd'hui celui-ci subsiste essentiellement sous forme touristique, comme le transport en roulotte par exemple.

On utilise aujourd'hui surtout des véhicules à moteur : autobus (pour les services urbains), autocar (pour les services interurbains), trolleybus, taxi collectif, véhicule léger affecté au transport public de personnes (VLTP), voiture de tourisme avec chauffeur... On peut aussi citer le **chemin de fer** qui est un système de transport guidé. Il se compose d'une infrastructure spécialisée, de matériel roulant et de procédures d'exploitation faisant le plus souvent intervenir l'humain, même si dans le cas des métros automatiques cette intervention se limite en temps normal à de la surveillance.[3]

IV-2-4- Les transports urbains :

Ils traitent en réalité aussi le transport individuel comme la voiture ou le vélo. Ils concernent les différents moyens de transport qui sont propres à une ville ou un milieu urbain, adaptés à cet environnement.

Ces caractéristiques propres sont principalement : une densité démographique et géographique importante, ce qui implique de bien gérer les flux de voyageurs et marchandises dans l'espace urbain ; des activités économiques importantes ce qui ajoute que la ville est à la fois le lieu de départ et d'arrivée de ces flux ; d'autres caractéristiques font que la ville apporte beaucoup de contraintes menant à une politique précise de transports urbains.

Les transports d'aujourd'hui occupent une place importante dans l'espace urbain. C'est l'héritage du XXe siècle et de l'apparition de la voiture qui démocratise la mobilité.[3]

V- Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté les systèmes de transport public comme une sous-classe des systèmes dynamique à événement discrets

Le prochain chapitre sera consacré aux définitions et à l'introduction des outils de modélisation que nous allons utiliser tout ou long de ce travail sur l'étude des systèmes de transport public.

Chapitre II : Généralités sur les réseaux de Petri et l'algèbre (Max, +)
I-introduction :

Nous nous intéressons essentiellement aux systèmes de transport public modélisés par des graphes d'événements temporisés. Nous représentons le comportement de ces graphes par des systèmes d'équations linéaires définis dans l'algèbre des dioïdes, Max-Plus ou Min-Plus.

Nous allons donner quelques définitions et propriétés de l'algèbre des dioïdes et les réseaux de Petri, nous débutons cette partie par la présentation des outils algébriques permettant de traiter une classe particulière des RdPs.

II-Algèbres des dioïdes :**II-1-Rappels algébriques :**

Un dioïde (ou semi-anneau idempotent) est un ensemble D muni de deux opérations (lois) internes notées \oplus et \otimes et appelée « addition » et « multiplication » respectivement, telles que : $\forall a, b, c \in D$:

➤ La loi additive \oplus est :

$$\text{Associative } (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = a \oplus b \oplus c$$

$$\text{Commutative } a \oplus b = b \oplus a$$

$$\text{Idempotente } a \oplus a = a$$

$$\text{D'élément neutre noté } a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$$

➤ La loi multiplicative \otimes est :

$$\text{Associative } (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) = a \otimes b \otimes c$$

Distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \text{ et } (b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)$$

$$\text{L'élément absorbant } \varepsilon : a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$$

$$\text{D'élément neutre noté } e : a \otimes e = e \otimes a = a$$

De plus, un semi-anneau idempotent, couramment noté (D, \oplus, \otimes) est commutatif lorsque la loi multiplicative \otimes est commutatif, soit lorsque $a \otimes b = b \otimes a$. [4] [5]

Exemples 1 :

Dioïdes $\mathbb{Z}_{min} : \mathbb{Z}_{min} = (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, min, +)$ est un dioïde commutatif, où la loi additive \oplus correspond à l'opération min usuelle ; la loi multiplicative \otimes est équivalente à l'addition usuelle. L'élément zéro de \mathbb{Z}_{min} est $\varepsilon = +\infty$ et l'élément identité est $e = 0$. Ce dioïde est appelé l'algèbre (min, +).

Exemples 2 :

dioïdes $\mathbb{Z}_{max} : \mathbb{Z}_{max} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, max, +)$ est un dioïde commutatif où la loi additive \oplus correspond à l'opération max usuelle, la loi multiplicative \otimes est équivalente à l'addition usuelle et pour le quel $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$. Ce dioïde est appelé l'algèbre (max, +).

II-2-Propriétés des dioïdes :

II-2-1-Structure ordonnée d'un dioïde :

Pour un dioïde D donné, la propriété de la loi additive \oplus induit une relation d'ordre, notée \leq définie par :

$$\forall (a, b) \in D^2, a \leq b \Leftrightarrow a \oplus b = b.$$

Cette relation d'ordre est compatible avec les lois \oplus et \otimes , c'est-à-dire,

$$\forall (a, b, c) \in D^3, a \leq b \Rightarrow a \oplus c \leq b \oplus c.$$

$$a \leq b \Rightarrow a \otimes c \leq b \otimes c.$$

Remarque : dans ce mémoire, nous utiliserons souvent les symboles \geq et \leq . Ils désignent toujours les relations d'ordre usuelles dans l'ensemble \mathbb{R} . Comme on le voit sur l'exemple, cet ordre ne coïncide pas toujours avec l'ordre associé à la structure du dioïde, que nous avons noté par le symbole \leq ou \geq . [6]

II-2-2- Dioïde complet :

Un dioïde (D, \oplus, \otimes) est complet s'il est fermé pour toutes les sommes infinies et si le produit \otimes distribue à gauche et à droite des sommes infinies. Autrement dit, pour tout $d \in D$ et tout sous-ensemble $A \subset D$, les propriétés suivantes sont vérifiées : [6]

$$d \otimes (\oplus_{a \in A} a) = \oplus_{a \in A} (d \otimes a),$$

$$(\oplus_{a \in A} a) \otimes d = \oplus_{a \in A} (a \otimes d),$$

Exemple 3 :

Les dioïdes $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \min, +)$ et $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$ sont des dioïdes complets. La relation \leq , associée à l'application min (respectivement l'application max) est une relation d'ordre qui correspond à l'inverse de l'ordre usuel \geq ,

$$a \leq b \Leftrightarrow b = \min(a, b) \Leftrightarrow a \geq b$$

(Respectivement à l'ordre usuel $a \leq b \Leftrightarrow b = \max(a, b) \Leftrightarrow a \leq b$).

Exemple 4 :

On vérifie facilement que les dioïdes suivants sont complets :

- $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \min, +)$ avec $\varepsilon = +\infty, e = 0$ et $T = -\infty$ est un dioïde noté par la suite : \mathbb{Z}_{\min} . On a dans \mathbb{Z}_{\min} la règle suivante : $(-\infty) + (+\infty) = (+\infty)$

- $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$ avec $\varepsilon = -\infty, e = 0$ et $T = +\infty$ est un dioïde noté par la suite : \mathbb{Z}_{\max} . On a dans \mathbb{Z}_{\max} la règle suivante : $(-\infty) + (+\infty) = (-\infty)$

II-2-3-Dioïde matriciel :

Définition 1 :

L'ensemble des matrices carrées de dimension n , à coefficients dans un dioïde (D, \oplus, \otimes) , est un dioïde matriciel, noté $(D^{n \times n}, \oplus, \otimes)$, où les opérations sont définies, à partir des opérations du dioïde (D, \oplus, \otimes) de manière analogue à l'algèbre classique, de la façon suivante :

$$\forall A, B \in D^{n \times n} :$$

$$A \oplus B : (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

$$A \otimes B : (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

L'élément identité de $D^{n \times n}$ est la matrice, notée Id_n , composée de e sur la diagonale et de ε partout ailleurs. L'élément zéro est la matrice composée exclusivement de ε . [4]

Exemple 5 :

Soit A, B deux matrices dans l'algèbre (max, +) tel que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

On a

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} \max(3,2) & \max(7,0) \\ \max(2,3) & \max(4,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

Et

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} \max(3 + 2, 7 + 3) & \max(3 + 0, 7 + 1) \\ \max(2 + 2, 4 + 3) & \max(2 + 0, 4 + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

II-2-4- Sous-dioïde :

Soit (D, \oplus, \otimes) un dioïde. le sous-ensemble $C \subseteq D$ est qualifié de sous-dioïde de (D, \oplus, \otimes) , noté (C, \oplus, \otimes) , si et seulement si $\varepsilon, e \in C$ et le sous-ensemble C est fermé pour les lois \oplus et \otimes , c'est-à-dire : $\forall a, b \in C, a \oplus b \in C$ et $a \otimes b \in C$. [6]

Exemple 6 : l'ensemble $\bar{\mathbb{N}}_{min} = (\mathbb{N} \cup \{+\infty, -\infty\}, min, +)$ est un sous-dioïde complet du dioïde $\bar{\mathbb{R}}_{min}$. On remarque que le dioïde $\bar{\mathbb{N}}_{min}$ est fermé pour les lois \oplus et \otimes , $\varepsilon, e \in \bar{\mathbb{N}}_{min}$ et e est le plus grand élément de ce dioïde (dans Min-Plus est l'inverse de l'ordre usuel).

II-3-Résolution d'équation dans les dioïdes :

Certaines équations définies dans des dioïdes complets admettent des solutions particulières extrêmes, c.-a-d. Plus petite ou plus grande que toute autre solution. Nous rappelons ici simplement le résultat concernant la résolution de l'équation $x = a \otimes x \oplus b$ implicite qu'on va utiliser par la suite.

Dans cette partie on s'intéresse à la résolution d'équation de type $f(x) = b, b \in D$.

Les lois \oplus et \otimes n'étant pas inversibles, en particulier les applications matricielles. Il n'est pas possible, en général d'inverser les applications définies sous forme analytique dans un dioïde, alors la résolution de l'équation pose un problème d'inversion d'application. La théorie de la résiduation permet cependant de définir des pseudo-inverses pour des applications définies sur des dioïdes. Par conséquent, elle permet d'établir, lorsqu'elles existent des solutions extrêmes de l'équation précédente. On s'intéresse donc à la plus grande solution de l'inéquation $f(x) \leq b$ ou la plus petite solution de l'inéquation $f(x) \geq b$.

[7]

Définition 1 : [7]

(Étoile de Kleene), soit D un dioïde complet et a un élément de D , l'étoile de Kleene de a , noté a^* , est définie comme suit : $a^* = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} a^k$ avec $a^0 = e$. De la même façon l'étoile de Kleene d'une matrice carrée $A \in D^{n \times n}$, notée A^* , est définie par : $A^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A^i$ avec $A^0 = I_n$

Théorème 1 : [7] Dans un dioïde complet, la quantité (A^*B) est la plus petite solution de l'équation $x = Ax \oplus B$ et de l'inéquation $x \geq Ax \oplus B$.

III- Réseau de Petri :

III-1- Définition :

Les réseaux de Petri (RdP) permettent de modéliser des systèmes à événement discret. Ils ont été inventés par **Carl Adam Petri**, un mathématicien **Allemand** contemporain. Il a défini un outil mathématique très général permettant de décrire les relations existant entre des conditions et des événements et de modéliser le comportement des systèmes dynamique à événements discrets. Les RdPs datent de **1960-1962**, c'est un outil très général, modélisant aussi bien les protocoles de communication informatique que des systèmes de production. Il est à l'origine du Grafset (ce dernier étant spécialisé dans la description de la commande de système automatisé).





Les réseaux de Petri ont été développés pour permettre la modélisation des classes importantes des systèmes, afin de permettre leur conception, leur évaluation et leur amélioration. Ils permettent de modéliser et de visualiser des comportements comportant du parallélisme, de la synchronisation, et du partage de ressource.[3]

C'est un outil de modélisation de la composition et la communication entre les automates, il permet la simulation, la validation et l'évolution de performances.[3]

III-2- Élément de base d'un réseau de Petri :

Un réseau de Petri est un graphe biparti, avec une représentation mathématique graphique simple. Composé de deux sommets : les places et les transitions. Des arcs orientés relient les places aux transitions et les transitions aux places. Les places sont représentées par des cercles et les transitions par des barres.

Le tableau suivant nous montre la signification des graphiques utilisé dans les réseaux de Petri telle que les places et les transitions.[3]

Elément	Place	Transition	Arc orienté	Jeton
Signification	Un état du système	Un changement d'état (Action)	reliant soit une place à une transition, soit une transition à une place	état actuel du système
Symbole graphique				

III-3- Evolution d'un réseau de Petri :

L'évolution d'un RdP correspond à l'évolution de son marquage au cours du temps (évolution de l'état du système), il se traduit par un déplacement de marques, ce qui s'interprète comme la consommation/production de ressources déclenchée par des événements ou des actions. Déterminer l'évolution d'un RdP correspond en fait à le simuler. L'évolution d'un RdP se fait par le franchissement d'une seule transition à la fois.[3]

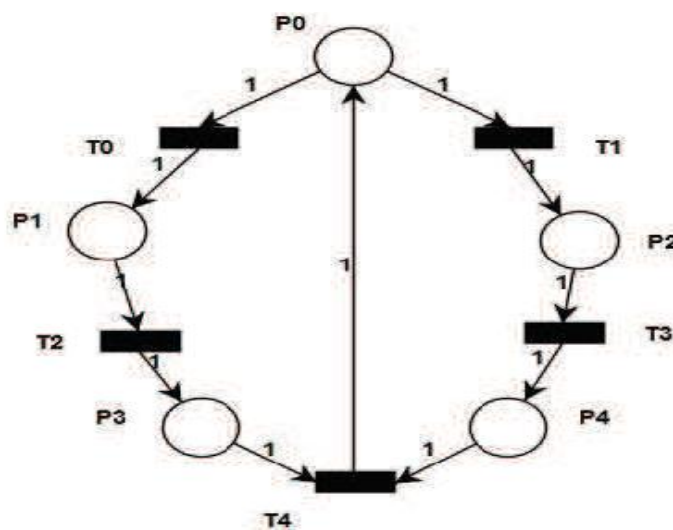


Figure -2-1- : L'évolution d'un réseau de Petri.

III-4- Les réseaux de Petri Autonomes et non Autonomes :

III-4-1- Réseau de Petri Autonome :

Un réseau de Petri autonome décrit le fonctionnement d'un système dont les instants de franchissement des transitions ne sont pas connus.[3]

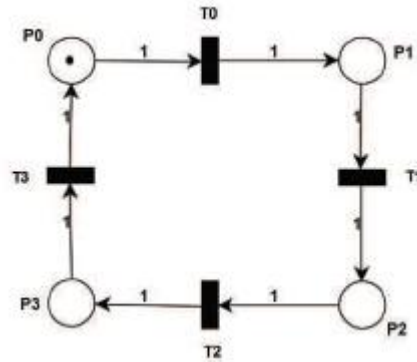


Figure -2-2- : Réseau de Petri autonome.

III-4-2-Réseau de Petri non autonome :

Un réseau de Petri non autonome décrit le fonctionnement d'un système dont l'évolution est conditionné par des événements externes ou par le temps. Un réseau de Petri non autonome est synchronisé et/ou temporisé.[3]

III-5- Propriété des réseaux de Petri :

Les réseaux de Pétri possèdent un certain nombre de propriétés (accessibilité, état d'accueil, la bornitude et la vivacité), dépendant du marquage initial du système et sont liées à l'évolution du réseau.

Elles permettent d'apporter des réponses aux questions, concernant L'accessibilité d'un marquage particulier, la bornitude, la vivacité.[3]

III-5-1-L'accessibilité :

Le franchissement d'une transition validée dans un réseau de Petri apportera une modification au marquage initial. Un marquage m est dit accessible à partir de marquage initial m_0 , s'il existe une séquence de franchissement $\gamma = T_1 T_2 \dots T_n$ qui transforme m_0 en m . [8]

III-5-2-Etat d'accueil et réseau de Petri réinitialisable :

Un réseau de Petri possède un état d'accueil Ma pour un marquage initial m_0 si pour tout marquage accessible $m \in R(m_0)$, il existe une séquence de franchissement γ tel que :

$$m [\gamma > m_0.$$

Si le marquage initial m_0 est un état d'accueil, alors le réseau de Petri est réinitialisable. [8]

III-5-3-réseaux de Petri borné(Bornitude) :

Un réseau de Petri est borné pour un marquage initial m_0 si toutes ses places sont bornées pour $R(m_0)$ (le réseau de Petri est K-borné si toutes les places sont k-bornées).

Une place est dite bornée pour un marquage initial m_0 s'il existe un entier naturel K tel que, pour tout marquage accessible à partir de m_0 , le nombre de marques de cette place est inférieur ou égal à K .

Un réseau de Petri est dit borné s'il est 1-borné.[8]

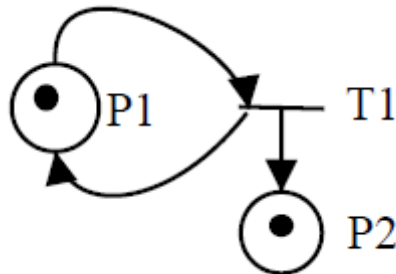


Figure -2-3- : Rdp non borné.

III-6- Réseaux de petri particuliers :

III-6-1-Grappe d'état :

Un Réseau de Petri est un graphe d'état si et seulement si tout transition a exactement une seule place d'entrée et une seule place de sortie. Comme illustré dans la figure si dessus.

[3]

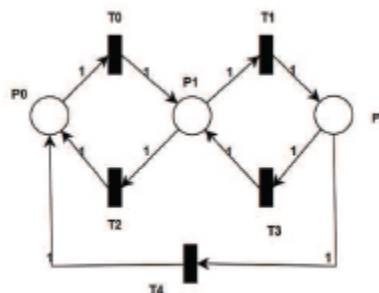


Figure -2-4- : Grappe d'état.

III-6-2-Grappe d'événements :

Un réseau de Petri est un graphe d'événement si et seulement si chaque place possède exactement une seule transition d'entrée et une seule transition de sortie.[8]

III-6-3-Réseaux de Petri temporisés :

Il s'agit de prendre en considération le facteur temps dans la modélisation. L'introduction des temporisations dans un réseau de Petri (les réseaux de Petri temporisés) permettent une étude quantitative du modèle (évaluation des performances, dimensionnement).

Dans un réseau de Petri temporisé, les temporisations sont associées :

- Soit aux places (un temps qui correspond à la durée minimale de séjour d'un jeton dans une place) modèle **P-temporisé**.
- Soit aux transitions (un temps qui correspond à la durée de franchissement de cette transition) modèle **T-temporisé**. [3]

III-6-3-1- Les réseaux de Petri P-temporisés :

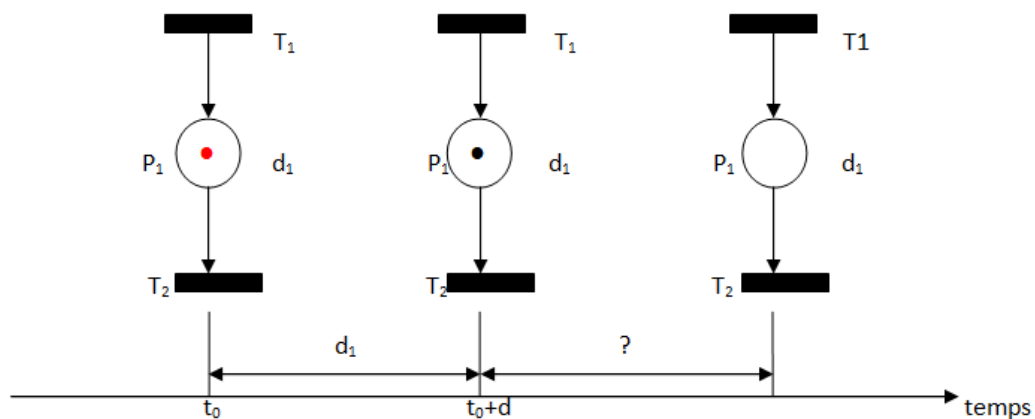
Définition :

Un réseau de Petri P-temporisé est un doublé (R, Tempo) tel que :

- R est un réseau de Petri marqué.
- Tempo : $P \rightarrow N$ est la fonction de temporisation.

Tempo (P_i) = d_i , est la temporisation de la place P_i . [8]

Règle de franchissement :



Le franchissement de T_1 : La marque est déposée dans P_i , mais elle est indisponible, donc T_2 n'est pas franchissable.

Au bout de d_1 unités de temps, la marque devient disponible la transition T_2 est maintenant franchissable.

Le franchissement de T_2 .

Figure -2-5- : le fonctionnement d'un réseau de Petri P-temporisé.

La règle de franchissement doit tenir compte du temps. Soit t_0 l'instant où la marque est déposée dans la place P_1 . La marque est indisponible pendant une durée égale à d_1 , c'est-à-

dire dans l'intervalle $[t_0, t_0+d_1]$. Quand d_1 est écoulé, la marque devient disponible comme le montre la figure 2-5. [8]

III-6-3-2- Les réseaux de Petri T-temporisés :

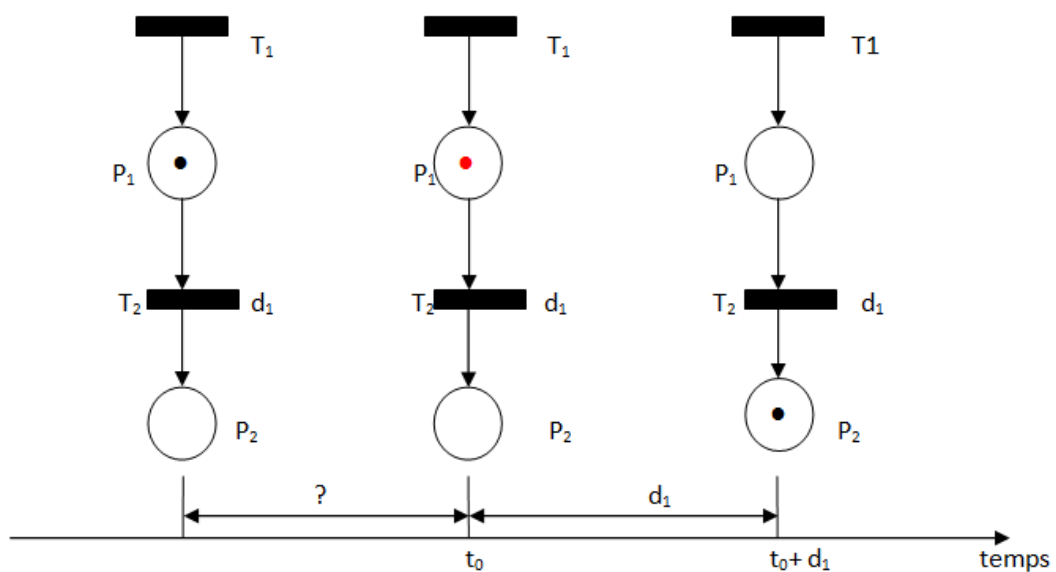
Définition :

Un réseau de Petri T-temporisé est doublet (R, Tempo) tel que :

- R est un réseau de Petri marqué.
- Tempo : $T \rightarrow \mathbb{N}$ est la fonction de temporisation.

Tempo (T_j) = d_j , est la temporisation de la transition T_j . [8]

Règle de franchissement :



Le franchissement de $T_1 : T_2$ est maintenant validée.

Enclenchement de T_2 la marque est indisponible.

Fin de franchissement de T_2 , la marque réservée est retirée de P_1 .

Figure -2-6- : le fonctionnement d'un réseau de Petri T-temporisé.

La transition T_1 est franchie, une marque est déposée dans P_1 ce qui entraîne la validation de T_2 qui sera franchissable à n'importe quel moment.

Quand le franchissement est décidé, la marque nécessaire à ce franchissement est réservée. Lorsque la durée d_1 est écoulée depuis la décision de franchissement la transition est effectivement franchie.[8]

III-7-Graphes d'événements temporisés :

III-7-1-définition :

Un graphe d'événement est un réseau de Petri ordinaire ou chaque place possède exactement une seule transition en amont et une seule transition en aval. Lorsque des temporisations sont associées aux places ou aux transitions, On parle de graphe d'événements temporisé. Dans la suite de ce Mémoire, nous considérons des graphes d'événement P-temporisés, où les temporisations sont associées aux places. Pour chaque couple de transition $t_i, t_j \in T$, tel que T est l'ensemble des transitions du graphe considérée. On note P_{ij} , la place qui relie la transition t_j à la transition t_i . Si cette place P_{ij} existe, la temporisation correspondante est notée τ_{ij} et son marquage est noté m_{ij} .

La plus grande temporisation du graphe d'événement considère est notée τ^{max} , définie par :

$$\tau^{max} = \max_{ij/p_{ij} \in p} \{\tau_{ij}\}.$$

Le plus grand marquage initial des places du graphe d'événement considère est noté m^{max} , et est définie par :

$$m^{max} = \max_{ij/p_{ij} \in p} \{m_{ij}\}.$$

On dira qu'un graphe d'événements est saut ou binaire si $m^{max} = 1$.

Nous signalons que ces notations ne sont pas fixées dans tout le rapport. Parfois dans la commande temporelle des systèmes Max-Plus linéaires, la place est référencée par un seul indice Z , cette place est notée p_z et, les quantités m_z et T_z sont respectivement le marquage initial et la temporisation de cette place.

On note par τ_α la somme des temporisations des places le long du chemin α , donnée par l'expression suivante :

$$\tau_\alpha = \sum_{p_{kl} \in \alpha} \tau_{kl}.$$

Le marquage d'un chemin , noté m_α , est donné par l'expression suivante :

$$m_\alpha = \sum_{p_{kl} \in \alpha} m_{kl}.$$

Dans le paragraphe suivant, nous représentons le comportement d'un graphe d'événements temporisé par des équations linéaires définies sur un dioïde.[6]

III-7-2-Propriétés des graphes d'événements :

Nous rappelons brièvement quelques caractéristiques des graphes d'événements. Rappelons qu'un circuit élémentaire est un chemin qui commence et se termine au même sommet (que ce soit place ou transition). Dans un graphe d'événements, le nombre de jetons d'un circuit élémentaire est constant.

Soit R un graphe d'événements et m_0 son marquage initial, alors (R, m_0) est vivant si et seulement si tout circuit élémentaire contient une place initialement marquée.[9]

Remarque :

Dans la suite de ce mémoire les graphes d'événements considérés sont systématiquement vivants.

III-7-3- Représentation d'état des graphes d'événements temporisés :

Le comportement dynamique d'un système à événement discret peut se représenter, classiquement, en considérant la variation du marquage d'un réseau de Petri, notée ΔM , définie comme l'expression du produit d'une matrice W , appelée matrice d'incidence, par un vecteur de tirs de transitions, noté \underline{S} . L'évolution du marquage est représentée par une équation de la forme.[9]

$$M_f = M_0 + \Delta M.$$

IV- Représentation de la dynamique :

Les graphes d'événements temporisés sont utilisés comme outil de modélisation intermédiaire. Si cette modélisation graphique constitue une première étape, la seconde étape est mise en équation du modèle graphique, c'est-à-dire la définition d'une représentation analytique du système. Le comportement d'un graphe d'événement temporisé peut s'exprimer sous forme d'équations linéaires dans les dioïdes \bar{R}_{min} ou \bar{R}_{max} . ces équations représentent l'évolution du graphe dans les domaines temporel et événementiel. Si on considère τ_{ij} la temporisation correspondante à la place P_{ij} (c'est-à-dire la place qui relie la transition t_j à la transition t_i) avec marquage initial noté m_{ij} . La plus

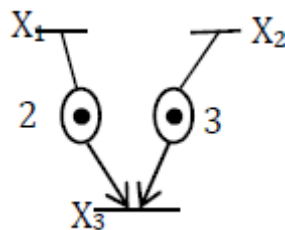
grande temporisation du graphe d'évènements considéré est notée τ^{max} , définie par : $\tau^{max} = \max(\tau_{ij})$. Le plus grand marquage initial des places du graphe d'évènements considérés est noté m^{max} et est défini par : $m^{max} = \max(m_{ij})$.

D'une manière générale, le comportement d'un graphe d'évènements temporisés est représenté sous l'une des deux formes définies dans le graphe qui suit.[7]

IV-1- Fonctions compteurs, domaine temporel :

La mise en équation de GET peut se faire dans le domaine temporel, où le système est écrit par des fonctions dépendantes du temps t. dans ce cas, on s'intéresse au nombre d'activation des transitions jusqu'à l'instant considéré. En effet, cette représentation consiste à associer à chaque transition une fonction $\theta(t) \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^n$ cette fonction est appelée compteur. Les compteurs correspondants aux transitions sources sont les composantes du vecteur $(t) \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^m$.[7]

Exemple 7:



$$x_1(t) \leq \min(1 + x_1(t - 2), 1 + x_2(t - 3)).$$

Plus généralement, le comportement d'un graphe d'évènements temporisé est représenté par l'inéquation suivante :

$$\theta(t) \leq \bigoplus_{\tau=0}^{\tau^{max}} (A_{\tau} \cdot \theta(t - \tau) \bigoplus B_{\tau} \cdot u(t - \tau)). \tag{2-1}$$

Où $A_{\tau} \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^{n \times n}$ est la matrice dont le terme $A_{\tau,ij}$ est égal à m_{ij} , qui correspond au nombre de jetons initiaux dans la place p_{ij} si cette place existe et ε sinon. Les termes matrices $B_{\tau}(k) \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^{n \times n}$ correspondent aux marquages initiaux des places de sortie des transitions sources. En générale, on s'intéresse à l'évolution au plus tôt des graphes d'évènements temporisés, c'est-à-dire qu'une transition est franchie dès qu'elle est franchissable. Cette évolution correspond à la solution maximale de l'inéquation précédente dans $\overline{\mathbb{R}}_{min}$. Cette solution satisfait l'équation linéaire suivante :

$$\theta(t) = \bigoplus_{\tau=1}^{\tau_{max}} (A_{\tau} \cdot \theta(t - \tau) \oplus B_{\tau} \cdot u(t - \tau)). \quad (2-2)$$

L'équation (2.2) est implicite en général. Elle est souvent remplacée par la solution explicite suivante :

$$\theta(t) = \bigoplus_{\tau=1}^{\tau_{max}} (A_0^* \cdot A_{\tau} \theta(t - \tau) \oplus A_0^* B_{\tau} u(t - \tau)) \quad (2-3)$$

Ou : A_0^* est l'étoile de Kleene de la matrice A_0 . [7]

Equation d'état dans \bar{R}_{min} :

Par analogie avec la théorie des systèmes linéaire classique, l'équation explicite (2-3) peut être transformée en une forme d'état. Pour obtenir un modèle d'état, nous décomposons toutes les places dont la temporisation $\tau > 1$ en τ places temporisées à 1. Nous ajoutons donc $(\tau - 1)$ transitions intermédiaires. On associe des compteurs à ces transitions intermédiaires, au nombre de n' qui sont les composantes du vecteur $\bar{\theta}(t) \in \bar{R}_{min}^{n'}$. Le vecteur d'état résultant, note $x(t)$, appartient à \bar{R}_{min}^N , avec $N=n+n'$, et est défini par :

$$x(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \bar{\theta}(t) \end{pmatrix}$$

Le comportement dynamique du graphe d'événement temporisé étendu est décrit par une équation de la forme :

$$x(t) = \hat{A}_0 \cdot x(t) \oplus \hat{A}_1 \cdot x(t - 1) \oplus \hat{B} \cdot u(t),$$

Qui peut s'écrire sous la forme explicite :

$$x(t) = A \cdot x(t - 1) \oplus B u(t), \quad (2-4)$$

Avec $A = \hat{A}_0^* \cdot \hat{A}_1$ et $B = \hat{A}_0^* \cdot \hat{B}$. [7]

Propriété 2-1 : [7] pour un graphe d'événement temporisé avec des temporisations commensurables, l'équation d'état (2.4) est équivalente à la formulation suivante :

$$x(t) = A^{\tau} x(t - 1) \oplus [\bigoplus_{k=0}^{\tau-1} A^k \cdot B \cdot u(t - 1)],$$

Pour tout $\tau \geq 1$.

IV-2-Fonction dateurs, domaine événementiel :

Pour la représentation en dateurs, on s'intéresse aux dates d'activation des transitions du GET. Dans ce cas, on associe à chaque transition une fonction $\theta(k) \in \bar{R}_{max}^n$ cette fonction

est appelée dateur. Les dateurs correspondants aux transitions source sont les composantes du vecteur $u(k) \in \bar{R}_{max}^m$.

La dynamique d'un graphe d'événements temporisé est représentée par l'équation suivante :

$$\theta(k) \geq \bigoplus_{l=0}^{m \max} (A_l \theta(k-l) \oplus B_l \cdot u(k-l)).$$

Ou $A_l \in \bar{R}_{max}^m$ est la matrice dont le terme $A_{l,ij}$ est égal à τ_{ij} , est égale à ε . Les termes des matrices $B_l \in \bar{R}_{max}^{n \times m}$ correspondent aux temporisations des places de sortie des transitions source.

En général, on s'intéresse à l'évolution au plus tôt des graphes d'événements temporisés, c'est-à-dire qu'une transition est franchie dès qu'elle est franchissable. Cette évolution correspond à la solution minimale de l'inéquation précédente dans \bar{R}_{max} . Cette solution satisfait l'équation linéaire suivante :

$$\theta(t) = \bigoplus_{l=0}^{m \max} (A_l \theta(k-1) \oplus B_l u(k-1)) \quad (2.7)$$

L'équation (2-7) est implicite en générale. Elle est souvent remplacée par sa solution explicite suivante :

$$\theta(k) = \bigoplus_{l=1}^{m \max} (A_0^* \cdot A_l \theta(m-l) \oplus A_0^* B_l u(m-l)). \quad (2-8)$$

Ou A_0^* est l'étoile de Kleene de la matrice A_0 . [7]

Equation d'état dans \bar{R}_{max} :

Par analogie avec la théorie des systèmes linéaires classiques, l'équation explicite (2-8) peut être transformée en une forme d'état. Pour obtenir un modèle d'état, nous décomposons toutes les places dont le marquage $m > 1$ en m places marquées à 1, et donc, nous ajoutons $(m-1)$ transition intermédiaires. On associe des dateurs à ces transitions intermédiaires au nombre de n'' qui sont les composantes d'un vecteur $\bar{\theta}(k) \in \bar{R}_{max}^{n''}$. Le vecteur d'état résultant, note $x(k)$, appartient à \bar{R}_{max}^N , avec $N=n+n''$, et est défini par :

$$x(k) = \begin{pmatrix} \theta(k) \\ \bar{\theta}(k) \end{pmatrix}.$$

Dans notre cas, nous considérons des graphes d'événements dont le marquage des places qui ont des transitions source en amont est nul. Le comportement du graphe d'événements temporisé étendu est décrit par une équation de la forme :

$$x(k) = \hat{A}_0 \cdot x(k) \oplus \hat{A}_1 \cdot x(k-1) \oplus \hat{B} \cdot u(k),$$

Qui peut s'écrire sous la forme explicite suivante :

$$x(k) = A \cdot x(k-1) \oplus B \cdot u(k), \tag{2-9}$$

Avec $A = \hat{A}_0^* \cdot \hat{A}_1$ et $B = \hat{A}_0^* \cdot \hat{B}$. [7]

Propriété 2.2 : [7] On considère un graphe d'événements temporisé dont le comportement est représenté par l'équation (2-9). Cette représentation d'état est équivalente à la formulation suivante :

$$\tilde{x}(k) = \tilde{A}^\varphi x(k - \varphi) \oplus [\oplus_{l=0}^{\varphi-1} \tilde{A}^l \cdot \tilde{B} \cdot \tilde{u}(k - l)]$$

Pour tout φ entier tel que $\varphi \geq 1$.

Exemple 8 : Nous considérons le graphe d'événement p-temporisé de la figure 2-7. Ce graphe comporte une transition source, nous avons aussi $\tau^{max}=4, m^{max} = 2$

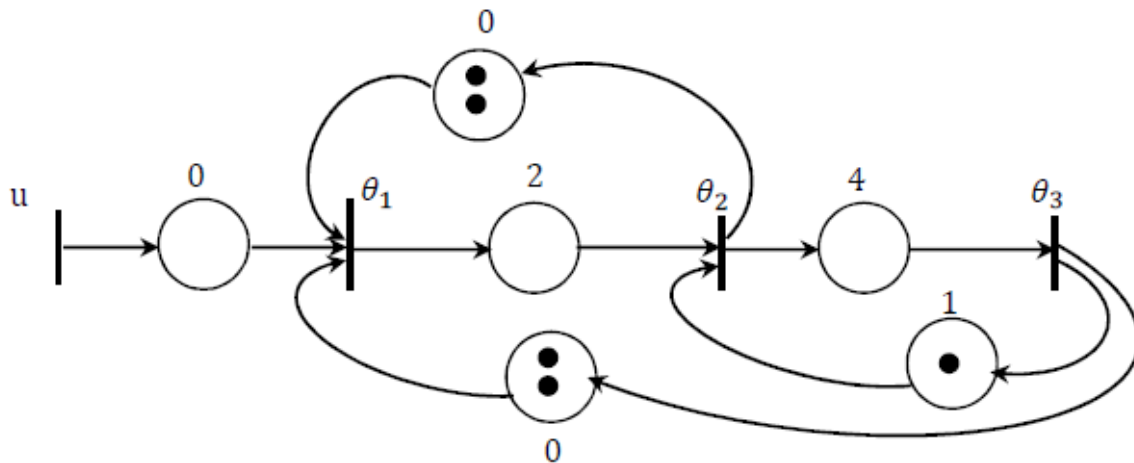


Figure -2-7- : Exemple de graphe d'événements.

IV-3-Equation compteurs :

On considère un franchissement eu plus tôt, c'est-à-dire que toute transition validée est immédiatement franchie. Les fonctions compteur vérifient alors les équations suivantes :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \min(2 + \theta_2(t), 2 + \theta_3(t), u(t)) \\ \theta_2(t) = \min(\theta_1(t-2), 1 + \theta_3(t-1)) \\ \theta_3(t) = \theta_2(t-4) \end{cases}$$

Dans l'algèbre $(\min,+)$, ces équations sont écrites comme suit :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = 2\theta_2(t) \oplus 2\theta_3(t) \oplus u(t) \\ \theta_2(t) = \theta_1(t-2) \oplus 1\theta_3(t-1) \\ \theta_3(t) = \theta_2(t-4) \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\theta(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e \end{pmatrix} \theta(t) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \theta(t-1) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \theta(t-2) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{pmatrix} \theta(t-4) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} u(t).$$

Cette équation est implicite et peut être remplacée par sa solution explicite. Tout d'abord,

on calcule A_0^* , tel que $A_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$.

$$A_0^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_0^i = I \oplus A_0 \oplus A_0^2 = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 2 & 2 \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix}$$

L'équation explicite (2-2) est donnée par

$$\theta(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \theta(t-1) \oplus \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \theta(t-2) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{pmatrix} \theta(t-4) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} u(t).$$

Pour avoir la forme d'état, nous avons étendu le graphe d'évènements temporisés initial pour avoir un nouveau graphe équivalent avec des temporisations égales à 1 ou 0. Nous obtenus alors le graphe de la figure 2-8.

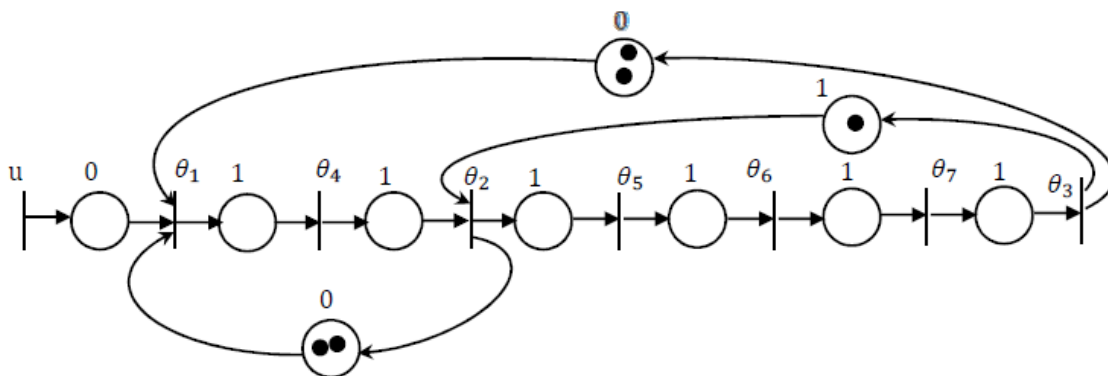


Figure -2-8- : Graphe d'évènements temporisés étendu.

Le modèle d'état obtenu est donné par :

$$x(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 3 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix} x(t-1) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(t)$$

IV-4- Equations dateurs :

Pour le graphe d'événements de la figure2-7, on associe une fonction dateurs $\theta_i(k)$ à chaque transition. Pour un franchissement au plus tôt, les fonctions dateurs vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \theta_1(k) = \max(\theta_2(k-2), \theta_3(k-2), u(k)) \\ \theta_2(k) = \max(2 + \theta_1(k), 1 + \theta_3(k-1)) \\ \theta_3(k) = 4 + \theta_2(k) \end{cases}$$

Dans l'algèbre (max, +), ces équations sont écrites comme suit :

$$\begin{cases} \theta_1(k) = \theta_2(k-2) \oplus \theta_3(k-2) \oplus u(k) \\ \theta_2(k) = 2\theta_1(k) \oplus 1\theta_3(k-1) \\ \theta_3(k) = 4\theta_2(k) \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\theta(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon \end{pmatrix} \theta(k) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \theta(t-1) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & e & e \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \theta(k-2) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} u(t)$$

Cette équation est implicite et peut être remplacée par sa solution explicite. Tout d'abord,

on calcule A_0^* , tel que $A_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} A_0^* &= \bigoplus_{I \in N} = I \oplus A_0 \oplus A_0^2 \oplus A_0^3 = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & e & \varepsilon \\ 6 & 4 & e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'équation explicite (2-2) est donnée par

$$\theta(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{pmatrix} \theta(k-1) \oplus \begin{pmatrix} 2 & e & e \\ \varepsilon & 2 & 2 \\ e & 6 & 6 \end{pmatrix} \theta(k-2) \oplus \begin{pmatrix} e \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} u(k).$$

Pour avoir la forme d'état, nous avons étendu le graphe d'évènements temporisés initial pour avoir un nouveau graphe équivalent avec des marquages égaux à 1 ou 0. Nous obtenons alors le graphe de la figure2-9.

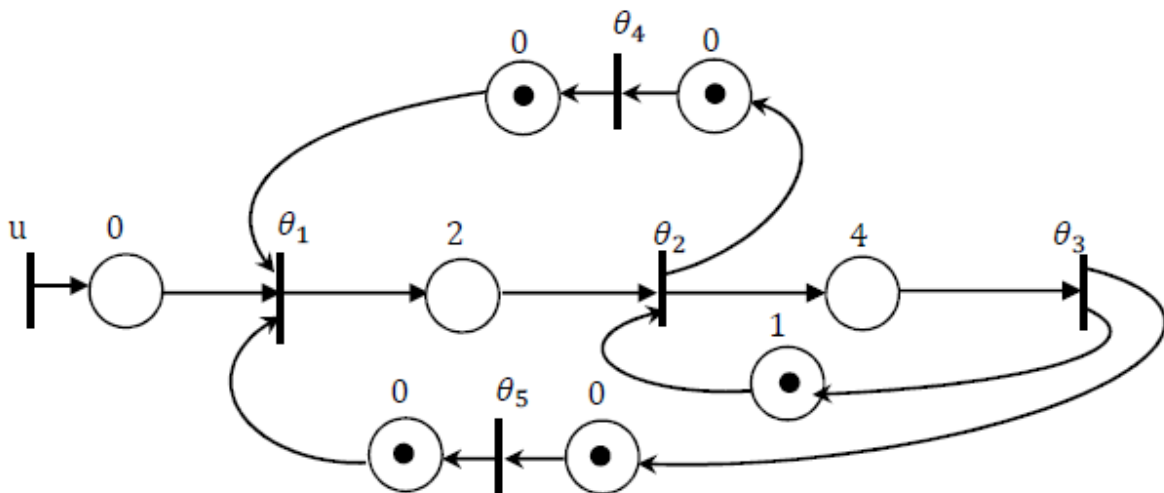


Figure -2-9- : Graphe d'évènements temporisés étendus.

Le modèle d'état obtenu est donné par :

$$x(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & e \\ \varepsilon & \varepsilon & e & 2 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & 6 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(k-1) \oplus \begin{bmatrix} e \\ 2 \\ 6 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(k).$$

Où $x_i(k)$ est la fonction dateur de la transition t_i pour $i = 1$ à 5, et $u(k)$ correspond à la fonction dateur de la transition d'entrée tu .

V-Conclusion :

Dans ce deuxième chapitre, nous avons étudiés les outils mathématiques utilisés dans ce travail. Nous avons ainsi donné quelques définitions et propriétés relative aux diodes.

Nous avons par la suite introduit les graphes d'évènements temporisés après un petit rappel sur les réseaux de Petri.

Dans le prochain chapitre, nous avons montré comment, à partir d'un graphe d'événement temporisé, nous obtenons des modèles linéaires dans l'algèbre $(\max, +)$ et $(\min, +)$.

Chapitre III : Modélisation et commande d'un système de transport public

I-Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons utiliser les graphes d'événements et l'algèbre des diodes pour modéliser un système de transport public.

Nous avons imposé à ce système de respecter une contrainte temporelle à satisfaire et nous désirons calculer une loi de commande causale qui permettra de satisfaire cette contrainte.

Notre objectif principal, dans ce chapitre est la synthèse d'une loi de commande causale de type retour d'état qui permettra de satisfaire cette contrainte.

II- Description du système de transport public étudié :

Nous considérons un STP composé de n lignes de bus (avec $n \geq 2$) (figure 3-1). Chacune est desservie par un nombre fixé de bus qui réalisent un circuit et passent au même endroit avec une fréquence donnée (fonction du temps de parcours du circuit et de la demande de transport).

Dans ce chapitre, nous nous limitons au cas où chaque ligne $L_i (1 \leq i \leq n)$ est desservie par un unique bus B_i qui se trouve initialement à sa station de départ. Certaines lignes sont connectées entre elles par des arrêts de correspondance qui permettent aux passagers de changer de ligne selon leurs destinations.

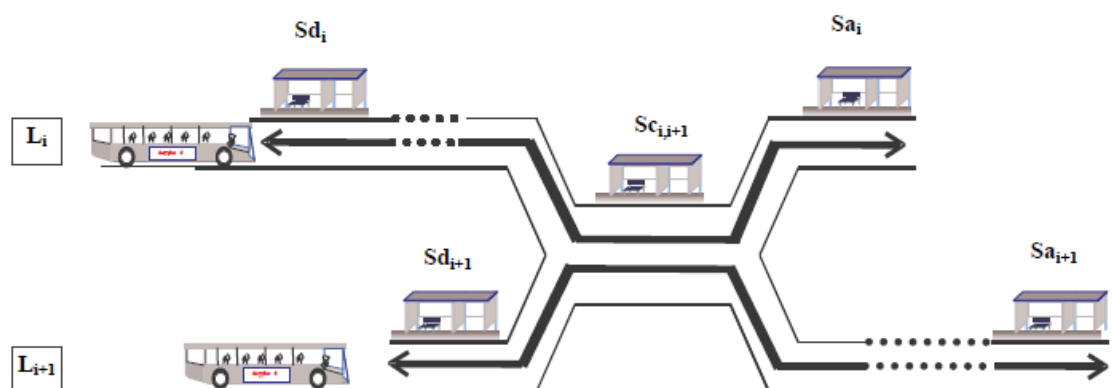


Figure -3-1- : La structure physique de deux lignes L_i et L_{i+1} et de la station $SC_{i,i+1}$.

Dans cette étude, nous nous intéressons à la gestion des correspondances des passagers effectuant un aller simple sur le réseau au cours d'une période donnée (exemple : un jour de la semaine) en empruntant un bus à un arrêt d'une ligne $L_i (1 \leq i \leq n - 1)$ pour se rendre à un arrêt destination d'une autre ligne $L_j (1 \leq i < j \leq n)$. L'étude des trajets de retour s'effectue de la même façon. La figure 3-1 présente la structure physique d'une portion du réseau plus particulièrement étudiée et pouvant être considérée comme « générique » du réseau global. Elle est composée de deux lignes L_i et L_{i+1} fait notamment apparaître leur station de correspondance commune $Sc_{i,i+1}$. Les voyageurs peuvent ainsi emprunter un bus à la station de départ Sd_i (resp. Sd_{i+1}) soit pour se rendre à la station d'arrivée Sa_i (resp. Sa_{i+1}) En se déplaçant sur une seule ligne, soit pour se rendre à la station Sa_i (resp. Sa_{i+1}) En utilisant les deux lignes et en changeant de bus à la station de correspondance $Sc_{i,i+1}$.

III-Modélisation par un graphe d'événements temporisés :

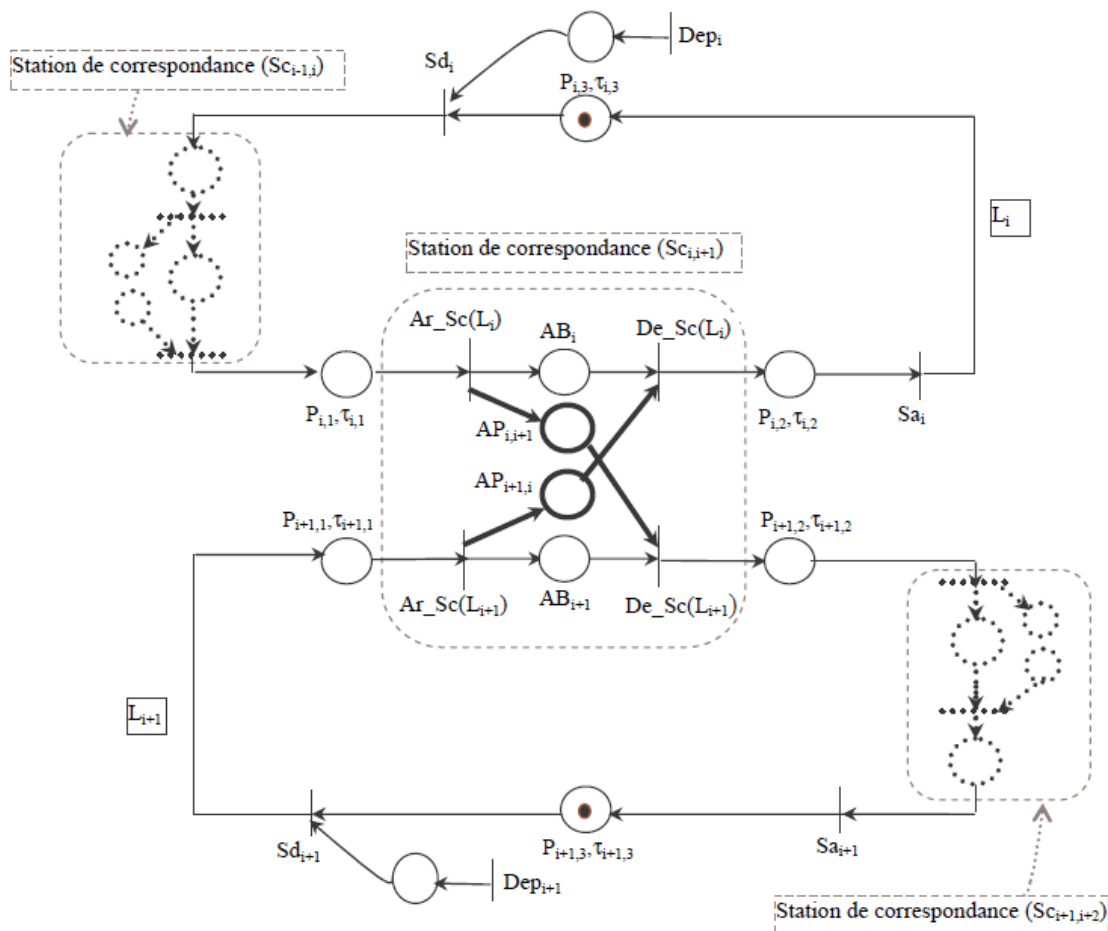
III-1-Premier modèle réseau de Pétri :

Nous utilisons le formalisme RdP pour modéliser le réseau de bus de la figure 3-1. Comme nous l'avons évoqué en introduction de ce chapitre, l'attente des bus aux arrêts de correspondance est un phénomène peu courant, comparé à d'autres systèmes de transport public. Toute fois, la synchronisation des bus peut malgré tout être imposée par les exploitants en certains points d'échange jugés critiques, et à des périodes particulières (heures de pointe par exemple). Nous considérons donc ici un fonctionnement synchronisé du réseau : les bus de chaque couple de lignes s'attendent à leur arrêt de correspondance commun pour permettre aux passagers de changer de ligne. Après l'échange de passagers, chaque bus poursuit son trajet vers d'autres arrêts. Nous définissons alors les éléments suivants du modèle RdP :

- les transitions sont assimilées aux arrêts du réseau ;
- les places et les arcs associés représentent :
 - soit l'autorisation de début d'une course pour un bus ;
 - soit le trajet d'un bus entre deux arrêts non obligatoirement successifs du réseau ;
 - soit l'attente de passagers à une station de correspondance. Pour distinguer ces places des autres places du modèle, nous les représentons, ainsi que les arcs associés, par des traits épais ;

- les jetons représentent de la même façon :
 - soit un ordre de commencement d'une course pour un bus depuis son arrêt de départ.
 - soit un bus en circulation sur une ligne, dans le cas où le jeton se trouve dans une place qui modélise le déplacement d'un bus.
 - soit un lot de passagers en attente dans le cas où le jeton se trouve dans une place associée à l'attente de passagers.
- les temporisations associées aux places du modèle représentent les temps de déplacement des bus entre les arrêts du réseau. Les temporisations associées aux places qui représentent l'attente de passagers sont nulles : en effet, d'une part les temps de montée et de descente de passagers dans les véhicules sont contenus dans le temps de déplacement des bus ; d'autre part nous négligeons ici le temps de déplacement (à pied) des passagers entre les deux bus concernés par l'échange. Enfin les temporisations des places représentant une autorisation de début de course sont également nulles : en effet, une telle autorisation est immédiatement effective.

En tenant compte des éléments donnés ci-dessus, et en supposant que les poids associés aux arcs du modèle RdP sont égaux à 1, le graphe de la figure 3-2. Modélise les deux lignes L_i et L_{i+1} de la figure 3-1.



Légende :

- trait fin : circuit d'un bus ;
- trait gras : connexion entre deux lignes (attente de passagers en $Sc_{i,i+1}$, ou information sur l'arrivée d'un bus en $Sc_{i,i+1}$).

Figure -3-2- Modèle RDP du système considéré.

Le reste du réseau se comporte comme ces deux lignes. Le modèle obtenu est composé de deux circuits. Chacun représente une ligne L_j ($j \in \{i, i + 1\}$) de la façon suivante :

- la ligne L_j est représentée par le circuit $Sd_j, P_{j,1}, AB_j, De_SC(L_j), P_{j,2}, Sa_j, P_{j,3}, Sd_j$. Les transitions $Ar_SC(L_j)$ et $De_SC(L_j)$ ainsi que la place AB_j modélisent la station de correspondance $Sc_{i,i+1}$, où $Ar_SC(L_j)$ (resp. $De_SC(L_j)$) représente l'arrivée (resp. le départ) du bus B_j en $Sc_{i,i+1}$ (resp. de $Sc_{i,i+1}$) ; la place AB_j représente l'attente du bus B_j en $Sc_{i,i+1}$ pour effectuer la correspondance. Les places $P_{j,1}$, $P_{j,2}$ et $P_{j,3}$ (resp. les temporisations $\tau_{j,1}$, $\tau_{j,2}$, $\tau_{j,3}$) modélisent les trajets (resp. les temps de déplacement)

entre les stations Sd_j et $Sc_{i,i+1}$, $Sc_{i,i+1}$ et Sa_j et enfin entre Sa_j et Sd_j . Le jeton se trouvant initialement dans la place $P_{j,3}$ représente le bus B_j . La période λ_j est donnée par :

$$\lambda_j = \tau_{j,1} + \tau_{j,2} + \tau_{j,3}.$$

- à chaque transition Sd_j on associe une transition Dep_j et une place (de temporisation nulle) modélisant l'entrée de la ligne à partir de laquelle il est possible de commander cette ligne en imposant des dates de départ des bus pour effectuer une course.
- la correspondance entre les deux lignes est représentée par la connexion entre les deux circuits du modèle. Cette connexion est composée des places $AP_{i,i+1}$ et $AP_{i+1,i}$, qui représentent les attentes des passagers pour effectuer la correspondance, et des arcs orientés suivant le déplacement de ces passagers (de la ligne L_i vers L_{i+1} et de la ligne L_{i+1} vers L_i).

III-2-Interprétation du modèle graphique :

Dans ce paragraphe nous expliquons le fonctionnement du modèle de la figure 3-2. Le bus de chaque ligne se trouve initialement à sa station de départ (Sd_i et Sd_{i+1}) (présence d'un jeton dans chacune des places $P_{i,3}$ et $P_{i+1,3}$). Le tir de la transition Dep_i équivaut à un ordre (autorisation) de départ donné au bus B_i . Le tir de la transition Sd_i signifie que le bus B_i commence son circuit à partir de cet arrêt. Après $\tau_{i,1}$ unités de temps, l'arrivée de B_i à la station de correspondance Sd_{i+1} valide la transition $Ar_Sc(L_i)$. Le franchissement de cette dernière met un jeton (qui modélise les passagers) à la place, $AP_{i,i+1}$, et un autre (qui modélise le bus) à la place AB_i . La présence d'un jeton à la place $AP_{i+1,i}$ signifie que le bus B_{i+1} est déjà arrivé et a déposé des passagers souhaitant effectuer une correspondance avec B_i . Ceci autorise alors le tir de la transition $De_Sc(L_i)$ et le bus B_i peut donc quitter la station $Sd_{i,i+1}$. Si aucun jeton ne se trouve dans $AP_{i+1,i}$, le bus B_i , arrivé le premier en $Sc_{i,i+1}$, doit attendre l'arrivée de B_{i+1} pour récupérer les passagers. Le tir de la transition $De_Sc(L_i)$ met un jeton en $P_{i,2}$ (déplacement de B_i , entre $Sc_{i,i+1}$ et la station d'arrivée Sa_i). Après $\tau_{i,2}$ unités de temps, le tir de la transition Sa_i met à nouveau un jeton dans la place $P_{i,3}$: B_i est ainsi sur le trajet de retourner vers sa station de départ. Le franchissement des transitions du circuit associé à la ligne L_{i+1} se fait de la même façon que celui des transitions du circuit qui modélise la ligne L_i . Le bus arrivant le premier à l'arrêt de correspondance ne pourra pas continuer sa route tant que le bus de l'autre ligne ne l'aura pas rejoint (pas de franchissement de $De_Sc(L_j)$ donc situation de blocage sur le circuit associé). Compte tenu

de cette attente obligatoire du bus ayant le circuit le plus court, la période des deux lignes L_i et L_{i+1} est donc en réalité égale à λ telle que : $\lambda = \text{Max}(\lambda_i, \lambda_{i+1})$.

III-3-Modèle graphe d'événements temporisés :

Le modèle mathématique (Max-Plus) linéaire est déduit à partir du modèle GET décrivant le comportement du réseau. Ce travail est limité au cas où les trains ou les bus s'attendent systématiquement aux stations de correspondance pour effectuer les échanges de passagers.

Dans le même contexte, et afin d'évaluer les contraintes temporelles d'un réseau de bus, notamment les dates de passage des véhicules aux différents arrêts du réseau et les temps de correspondance des usagers, nous étudions le système donné dans la figure 3-1 en utilisant les GET et l'algèbre (Max-Plus) on lui impose des contraintes temporelles.

Dans le cas d'un réseau synchronisé (les bus doivent s'attendre), nous ne considérons toujours que la partie du réseau représentée par les deux lignes L_i et L_{i+1} de la figure 3-1. De plus nous nous intéressons ici uniquement à la gestion des correspondances des passagers sur un itinéraire donné : par exemple, les passagers venant de la station de départ Sd_i et se rendant à la station d'arrivée $Sc_{i,i+1}$. Le modèle GET associé est donné par la figure 3-3 c'est une version simplifiée du modèle précédent (figure 3-2) dans le sens où l'échange de passagers de la ligne L_{i+1} vers la ligne L_i n'est pas représenté. La synchronisation désigne ici l'obligation d'attente du bus B_{i+1} pour assurer les correspondances. Pour ce nouveau modèle, la transition qui représente la station de correspondance $Sc_{i,i+1}$ est notée $Sc(L_j)$ pour la ligne L_j (avec $j \in \{i, i+1\}$); elle regroupe les éléments $Ar_Sc(L_j)$, AB_j et $De_Sc(L_j)$ donnés dans le modèle de la figure 3-2. Comme pour le modèle précédent et bien que nous ne considérons l'échange de passagers que dans un seul sens à la station de correspondance, le modèle graphique de la figure 3-1. Fonctionne avec l'hypothèse d'alternance des bus en $Sc_{i,i+1}$ déjà énoncée au paragraphe (interprétation du modèle graphique).

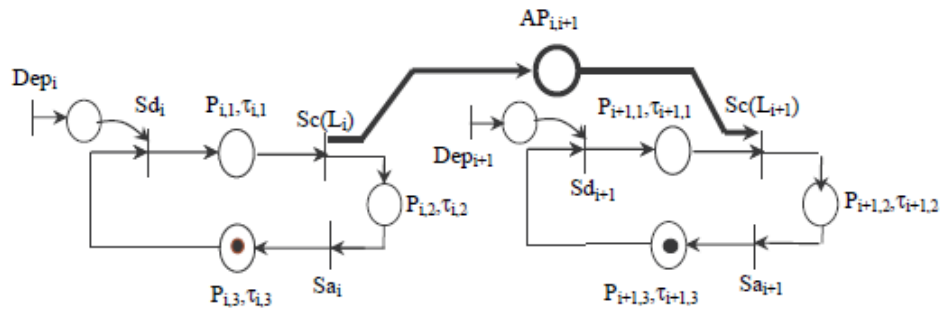


Figure -3-3 : Le modèle GET représentant les deux lignes L_i et L_{i+1} .

IV-Commande d'un système de transport public sous contrainte temporelle :

IV-1- Représentation d'état dans l'algèbre (max, plus) :

Afin de faciliter la représentation des éléments du modèle graphique, et ensuite la description de ce dernier sous forme d'équations mathématiques, nous affectons aux transitions et aux places de la figure 3-3 des notations que nous explicitons dans le tableau 3.1. Ceci nous permet d'obtenir le modèle GET de la figure 3-4. Dans celui-ci, chaque arrêt $Sa_j (j \in \{i, i + 1\})$ est " agrégé " dans le trajet $Sc(L_j) \rightarrow Sd_j$; de même le temps de déplacement du bus B_j sur ce trajet est $\tau_{i,2}$ au lieu de $\tau_{i,2} + \tau_{i,3}$. Cette agrégation s'explique par le fait que nous nous intéressons dans cette étude uniquement aux stations de correspondance et aux stations de départ des deux lignes.

Éléments de réseau pour la ligne L_j avec $j \in \{i, i+1\}$	Correspondances dans le GET
Dep_j	u_j
Sd_j	$x_{j,1}$
$Sc(L_j)$	$x_{j,2}$
$AP_{i,i+1}$	P_i
$P_{j,1}$	$P_{j,1}$
$P_{j,2}, Sa_j$ et $P_{j,3}$	$P_{j,2}$

Tableau 3-1 : Correspondance entre les éléments du réseau de bus et ceux du GET.

L'évolution au cours du temps des différents franchissements des transitions se traduit analytiquement dans l'algèbre usuelle par le système d'équations linéaires (3-1), sachant que chaque transition validée est franchie immédiatement. Dans ce système, on considère l'opérateur "max" habituel comme un opérateur d'assemblage de deux grandeurs (produits dans un système de production, bus-passagers dans un système de transport, etc.). Cet

assemblage peut être effectué uniquement au moment où la grandeur qui arrive au plus tard au lieu d'assemblage est disponible, c'est à dire à la date qui correspond au maximum des dates de disponibilité de deux grandeurs. De même, la notion d'*addition* de deux ou plusieurs grandeurs correspond à l'opérateur "+" usuel. Les deux opérateurs (max et +) sont propres aux cas discrets, où on s'intéresse à la date d'occurrence des événements.

En définissant les variables d'état associées à la station de correspondance des deux lignes et ainsi que les dateurs associés à ces variables.

A partir des éléments du tableau 3-1, nous obtenons le modèle graphique suivant :

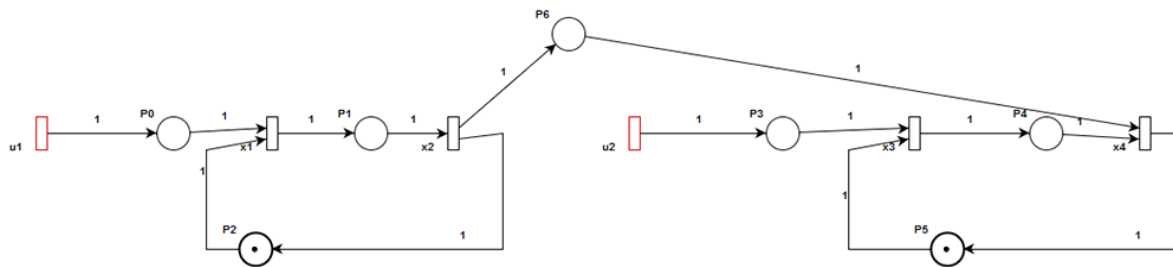


Figure -3-4- : Le modèle GET des deux lignes L1 et L2.

Avec les places représentent les temporisations $p_i = \tau_i$,

On peut aussi décrire le comportement dynamique d'un graphe d'événement temporisé par des équations Max-plus linéaire. Pour représenter le comportement dynamique du graphe de la figure 3-4 nous associons à chaque transition t_i , avec $i=1$ à 4, une fonction dateur $x_i(k)$, qui représente la date de $k^{ème}$ franchissement de la transition t_i . La fonction dateur attribuée à la transition d'entrée est notée $u_i(k)$. On considère un franchissement au plus tôt, c'est-à-dire que la transition validée est immédiatement franchie.

Les fonctions dateurs vérifient alors les équations suivantes :

$$\forall k \geq 1, \begin{cases} x_1(k) = \max[\tau_2 + x_2(k-1), u_1(k)] \\ x_2(k) = \tau_1 + x_1(k) \\ x_3(k) = \max[\tau_4 + x_4(k-1), u_2(k)] \\ x_4(k) = \max[\tau_3 + x_3(k), x_2(k)] \end{cases} \quad (3-1)$$

Dans l'algèbre (max,+), ces équations sont écrites comme suit :

$$\forall k \geq 1, \begin{cases} x_1(k) = \tau_2 \otimes x_2(k-1) \oplus u_1(k) \\ x_2(k) = \tau_1 \otimes x_1(k) \\ x_3(k) = \tau_4 \otimes x_4(k-1) \oplus u_2(k) \\ x_4(k) = \tau_3 \otimes x_3(k) \oplus x_2(k) \end{cases} \quad (3-2)$$

Ces 4 équations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$x(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \tau_3 & \varepsilon \end{pmatrix} x(k) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \tau_2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_4 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-1) \oplus \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} u(k) \quad (3-4)$$

Avec :

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \tau_3 & \varepsilon \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \tau_2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_4 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Equation d'état :

Nous pouvons toujours décrire le comportement d'un graphe d'événement temporisé par une équation d'état, définie dans l'algèbre Max-plus. Il suffit de calculer A_0^* pour avoir une équation d'état.

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k),$$

$$\text{Avec } A = A_0^* \cdot A_1, B = A_0^* \cdot B_1.$$

$$\text{Avec } A_0^* = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_1 & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \tau_1 & e & \tau_3 & e \end{bmatrix}, \text{ et } A = A_0^* \otimes A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \tau_2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau_1 \tau_2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_4 \\ \varepsilon & \tau_1 \tau_2 & \varepsilon & \tau_3 \tau_4 \end{bmatrix}.$$

L'équation d'état est donnée par :

$$x(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \tau_2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau_1 \tau_2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_4 \\ \varepsilon & \tau_1 \tau_2 & \varepsilon & \tau_3 \tau_4 \end{bmatrix} x(k-1) \oplus \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \tau_1 & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \tau_1 & \tau_3 \end{bmatrix} u(k) \quad (3-5)$$

IV-2-Commande des systèmes à événements discrets sous contraintes temporelles :

Les systèmes à événements discrets sont essentiellement caractérisés par des changements d'état dus à l'occurrence d'événements asynchrones. L'introduction de paramètres temporels permet d'évaluer leurs performances (taux de production d'une cellule d'usinage, temps de parcours dans un système de transport). Ces systèmes dynamiques peuvent également faire l'objet de contraintes de temps de séjour (attente maximum d'une correspondance entre trains ou bus,...). Le non respect de ces contraintes conduit à des défaillances dans le système. Il est donc nécessaire, de disposer de techniques et d'outils qui permettent d'assurer ces spécifications temporelles.

IV-3-Commande temporelle des systèmes Max-Plus linéaires :

Comme nous l'avons vu dans (la résolution d'équation dans les dioïdes), le comportement d'un graphe d'événements temporisés peut être représenté par une équation linéaire dans l'algèbre Max-Plus. Nous considérons l'équation linéaire suivante :

$$x(k) = Ax(k - 1) \oplus Bu(k), \quad (3-6)$$

Où $x \in \overline{\mathbb{R}}_{max}^N$, $A \in \overline{\mathbb{R}}_{max}^{N \times N}$, $B \in \overline{\mathbb{R}}_{max}^{N \times m}$, $u \in \overline{\mathbb{R}}_{max}^m$ et les vecteurs N et m sont des entiers qui représentent respectivement le nombre des transitions internes et le nombre des transitions de commande. La composante $x_i(k)$, pour $i = 1 \text{ à } N$, désigne la date du $k^{\text{ème}}$ franchissement de la transition t_i et le coefficient $u_l(k)$, pour $l = 1 \text{ à } m$, définit la fonction dateur associée à la transition de commande t_l . Nous considérons un graphe d'événements temporisés représenté par l'équation (3-6). On ajoute à ce graphe des contraintes temporelles supplémentaires sur certaines des places. Ces contraintes de temps peuvent être décrites par des inéquations linéaires dans le dioïde $\overline{\mathbb{R}}_{max}$. Nous développons dans cette section une approche formelle pour déterminer des lois de commande sous forme d'équation Max-Plus linéaire, qui vont satisfaire les contraintes temporelles.[7]

Contrainte temporelle :

Généralement on distingue trois types de contraintes temporelles :

- Systèmes à contraintes temporelles critiques, le non respect de ces contraintes de temps peut conduire à des défaillances avec des conséquences pouvant être graves. Si l'échéance est dépassée, il y a faute.

- Systèmes à contraintes temporelles souples, où le dépassement des échéances est considéré comme une faute bénigne. Lorsqu'une échéance est dépassée, il n'y a pas faute ; le résultat peut être exploitable même s'il est fourni après l'échéance
- Systèmes à contraintes temporelles strictes, où le dépassement occasionnel des échéances est toléré. Il y a faute (bénigne) si l'échéance n'est pas respectée.[7]

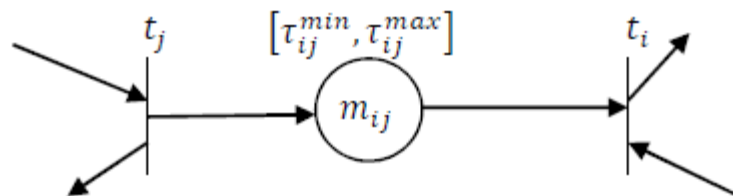


Figure -3-5- : Contrainte temporelle

Nous supposons qu'une place p_{ij} temporisée à τ_{ij} est soumise à une contrainte temporelle supplémentaire τ_{ij}^{max} . Nous associons l'intervalle de temps $[\tau_{ij}, \tau_{ij}^{max}]$ (voir figure 3-5), avec $\tau_{ij}^{max} \geq \tau_{ij}$, à la place p_{ij} (voir figure 3-5). Les jetons entrants dans cette place vont séjourner au moins τ_{ij} unités de temps et ils ne peuvent pas dépasser τ_{ij}^{max} unités de temps. Cette contrainte temporelle se traduit par les deux inéquations Max-Plus linéaire suivantes :

$$\tau_{ij} \cdot x_j(k - m_{ij}) \leq x_i(k) \leq \tau_{ij}^{max} \cdot x_j(k - m_{ij}),$$

Où m_{ij} est le marquage initial de la place p_{ij} . Le principe de fonctionnement d'un graphe d'événements temporisé exige de la part des jetons qui se trouvent dans une place donnée d'y passer au minimum τ_{ij} unités de temps. En tenant compte de l'équation (3-6) qui représente le comportement du graphe considéré, l'inéquation de droite est satisfaite.

La deuxième inéquation qui est donnée par l'inégalité (3-7),

$$x_i(k) \leq \tau_{ij}^{max} \cdot x_j(k - m_{ij}) \tag{3-7}$$

Représente en réalité la contrainte temporelle supplémentaire à satisfaire. [6]

IV-3-1- Une seule contrainte et une seule commande :

Nous considérons un graphe d'événements temporisé avec une seule transition de commande. Nous supposons qu'une place est soumise à une contrainte temporelle supplémentaire. Le comportement de ce graphe est représenté par l'équation Max-Plus

linéaire (2-8) et soumise à la contrainte temporelle (3-8). La loi de commande $u(k) \in \overline{\mathbb{R}}_{max}$.

$$x_i(k) \leq \tau_{ij}^{max} \cdot x_j(k - m_{ij}) \quad (3-8)$$

L'inéquation (3-8) exprime une borne maximale de temps de séjour des jetons dans la place p_{ij} , qui admet t_j comme transition d'entrée et t_i comme transition de sortie. Nous calculons des lois de commande $u(k)$ qui vont retarder, si nécessaire, les dates de franchissement de la transition t_j , afin de garantir le respect de la contrainte temporelle. Comme nous l'avons vu dans les graphes d'événement temporisé, l'équation Max-Plus linéaire (3-6) conduit à l'expression suivante :[7]

$$x(k) = A^\varphi x(k - \varphi) \oplus \left[\bigoplus_{k'=0}^{\varphi-1} (A^{k'} \cdot B) \cdot u(k - k') \right],$$

Pour $\varphi \geq 1$ et $k > \varphi$.

L'expression de la $i^{ème}$ composante du vecteur $x(k)$ est donnée ainsi par l'équation (3-9).

$$x_i(k) = \bigoplus_{r=1}^N ((A^\varphi)_{ir} \cdot x_r(k - \varphi)) \oplus \left[\bigoplus_{k'=0}^{\varphi-1} (A^{k'} \cdot B)_i u(k - k') \right] \quad (3-9)$$

En tenant compte de l'équation (3-9), la contrainte temporelle (3-8) est équivalente aux inégalités suivantes :

$$\bigoplus_{r=1}^N ((A^\varphi)_{ir} \cdot x_r(k - \varphi)) \leq \tau_{ij}^{max} x_j(k - m_{ij}) \quad (3-10)$$

$$\bigoplus_{k'=0}^{\varphi-1} (A^{k'} \cdot B)_i u(k - k') \leq \tau_{ij}^{max} x_j(k - m_{ij}) \quad (3-11)$$

Il suffit donc de vérifier les conditions (3-10) et (3-11) pour valider la contrainte temporelle (3-8). Nous supposons qu'il existe un chemin, avec un marquage initial noté m_α , qui relie la transition de commande tu à la transition t_j . Cette hypothèse exprime une relation entre les deux transitions, ce qui se traduit par l'inéquation (3-12).

$$(A^{m_\alpha} \cdot B)_j \cdot u(k - m_\alpha) \leq x_j(k). \quad (3-12)$$

Nous prenons en considération l'inégalité (3-12), les inéquations (3-10) et (3-11) sont impliquées par les inégalités (3-13) et (3-14).

$$\bigoplus_{r=1}^N ((A^\varphi)_{ir} \cdot x_r(k - \varphi)) \leq \tau_{ij}^{max} \cdot (A^{m_\alpha} \cdot B)_j \cdot u(k - m_\alpha - m_{ij}). \quad (3-13)$$

$$\bigoplus_{k'=0}^{\varphi-1} (A^{k'} \cdot B)_i u(k - k') \leq \tau_{ij}^{max} \cdot (A^{m_\alpha} \cdot B)_j \cdot u(k - m_\alpha - m_{ij}). \quad (3-14)$$

Pour le cas où $m_\alpha = m_{ij} = 0$, on a $\varphi = m_\alpha + m_{ij} + 1 \Rightarrow \varphi = 1$, on a aussi $k' = 0$ à $\varphi - 1$ ce qui implique que $k' = 0$.

L'équation (3-13) donne

$$\bigoplus_{r=1}^N ((A^\varphi)_{ir} \cdot x_r(k-1)) \leq \tau_{ij}^{max} \cdot B_j \cdot u(k)$$

Ce qui donne

$$u(k) \geq \bigoplus_{r=1}^N [((A)_{ir} - B_j - \tau_{ij}^{max}) \cdot x_r(k-1)], \quad (3-15)$$

Et l'équation (3-14) donne

$$B_i \leq \tau_{ij}^{max} \cdot B_j, \quad (3-16)$$

Nous avons une condition à satisfaire (3-16) pour résoudre le problème du respect de la contrainte temporelle (3-8). Les feedbacks vérifiant l'inéquation suivante :

$$u(k) \geq \bigoplus_{r=1}^N [((A)_{ir} - B_j - \tau_{ij}^{max}) \cdot x_r(k-1)],$$

Ces feedbacks sont bien posés si $\varphi = m_\alpha + m_{ij} + 1$.

Théorème 3-1 : [7] l'inéquation

$$u(k) \geq \bigoplus_{r=1}^N F_r \cdot x_r(k-1)$$

Avec $F_r = \max(0, A_{ir} - B_j - \tau_{ij}^{max})$, définit des lois de commande causales qui garantissent le respect de la contrainte (3-8) s'il y a un chemin vide qui relie la transition de commande à la transition de la contrainte temporelle et si la condition suivante $B_i \leq \tau_{ij}^{max} \cdot B_j$ est bien respectée.

IV-3-2-Plusieurs contraintes et une seule commande :

Nous considérons maintenant un graphe d'événements temporisé, modélisé par l'état (3-6), est soumis à Z contraintes temporelles supplémentaires, avec ≥ 1 . Les places contraintes sont notées p_z , pour $z = 1$ à Z . Pour chaque place p_z , nous avons m_z , τ_z^{min} et τ_z^{max} qui représentent respectivement le marquage initial, la temporisation minimale et la temporisation maximale de cette place. Les transitions t_z et t_z' correspondent aux transitions d'entrée et de sortie de la place p_z et les fonctions $x_z(k)$ et $x_z'(k)$ définissent leurs dateurs correspondants. Les contraintes temporelles sont traduites par les deux inéquations suivantes :

$$\tau_z^{\min} \cdot x_z(k - m_z) \leq x_{z'}(k) \leq \tau_z^{\max} \cdot x_z(k - m_z),$$

Avec z allant de 1 à Z . L'inéquation

$$\tau_z^{\min} \cdot x_z(k - m_z) \leq x_{z'}(k),$$

Est vérifiée en tenant compte du système Max-Plus linéaire (3-6).

Supposons que le système (3-6) est vérifié, la contrainte temporelle se ramène seulement à

$$x_{z'}(k) \leq \tau_z^{\max} \cdot x_z(k - m_z), \quad (3-17)$$

Avec z allant de 1 à Z . Nous supposons pour chaque contrainte, qu'il existe un chemin noté α_z , qui relie la transition de commande tu à la commande t_z . On note m_{α_z} est le marquage initial de ce chemin. On peut écrire l'inéquation (3-12) dans ce cas par

$$(A^{m_{\alpha_z}} \cdot B)_z \cdot u(k - m_{\alpha_z}) \leq x_z(k),$$

On note par $u_z(k)$ les lois de commande calculée par le Théorème 3-1 pour satisfaire la $z^{\text{ème}}$ contrainte temporelle (3-17). Nous déterminons dans le Théorème 3-2 un feedback qui vérifie toutes les contraintes temporelles.[6]

Théorème 3-2 : [6]l'équation

$$u(k) = \bigoplus_{z=1}^Z u_z(k),$$

Avec $\varphi_z = 1$ et

$$u_z(k) = \bigoplus_{r=1}^N (A_{z'r} - B_z - \tau_z^{\max}) x_r(k - 1),$$

Définit une commande causale qui respecte toutes les contraintes temporelles (3-7), si les conditions suivantes sont satisfaites, pour $z = 1$ à Z , on a

$$m_z = m_{\alpha_z} = 0,$$

$$A_{z'r} \geq \tau_z^{\max} \cdot B_z,$$

Pour $r = 1$ à N , et

$$B_{z'} \leq \tau_z^{\max} \cdot B_z.$$

Exemple 1 : Nous considérons le graphe d'événements temporisé donné par la figure 3-6.

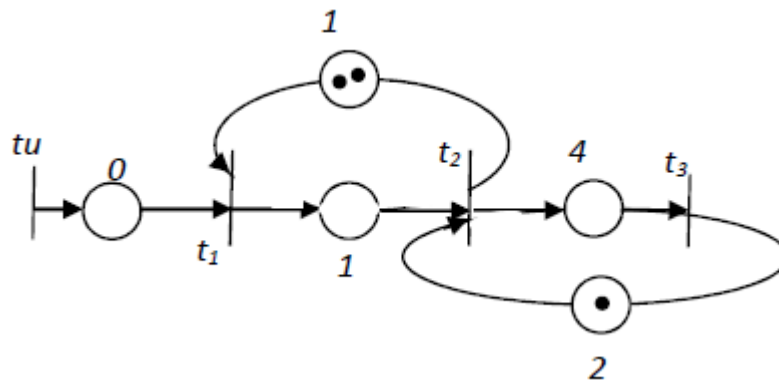


Figure -3-6- : Graphe d'événements temporisé.

Ce graphe est soumis à une contrainte temporelle, donnée par l'inéquation suivante :

$$2x_1(k) \geq x_2(k).$$

Nous calculons des lois de commande causales pour satisfaire cette contrainte temporelle. Nous appliquons les résultats du Théorème 3-1 pour résoudre ce problème de contrainte de temps. On ne peut pas représenter le fonctionnement du graphe d'événements temporisé considéré tel qu'il est, par une équation d'état de même type que l'équation (2-8). Pour cela, nous décomposons les places ayant plus d'un jeton pour avoir un nouveau graphe d'événements temporisé équivalent avec des places marquée à un ou zéro, ce qui donne un marquage initial maximum $m^{max} = 1$. Nous décomposons la place p_{12} en deux places, notées p_{42} et p_{14} , qui sont marquées à 1. Le graphe étendu est donné par la figure 3-7.

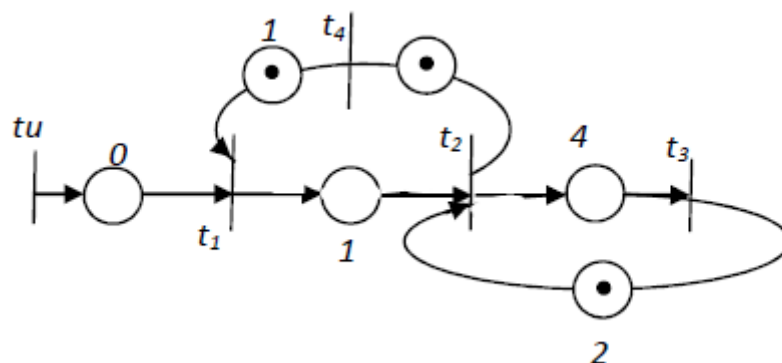


Figure -3-7- : Graphe d'événements étendu.

L'équation d'état associée au graphe d'événements temporisé étendu de la figure 3-7 est donnée comme suit :

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 5 \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} . x(k-1) \oplus \begin{bmatrix} e \\ 1 \\ 5 \\ \varepsilon \end{bmatrix} . u(k),$$

Où les composantes du vecteur $x(k)$ sont les fonctions des dateurs associées aux transitions t_1, t_2, t_3 et t_4 . La fonction $u(k)$ est le dateur de la transition source, qui représente l'entrée de commande. Dans cet exemple, nous avons la temporisation maximale associée à la place p_{ij} qui est $\tau_{ij}^{max} = \tau_{21}^{min} = 2$ et la temporisation minimale égale à 1. On voit bien qu'il existe un chemin de la transition source tu à la transition t_j , dans ce cas de la transition tu à la transition t_1 . On constate que la temporisation de ce chemin est $\tau_\alpha = 0$, et le marquage initial est $m_\alpha = 0$. L'hypothèse du théorème est bien vérifiée puisque $m_\alpha = m_{ij} = 0$. Nous avons aussi $\tau_\alpha + \tau_{ij}^{max} = \tau_\alpha + \tau_{21}^{max} = 2$, et $A_{ir} = A_{2r} = [\varepsilon, \varepsilon, 2, 2]$ respectivement pour $r = 1$ à 4. On voit que la condition (3-16) donnée dans le Théorème 3-1 est vérifiée. D'une manière similaire, nous avons $B_i = B_2 = 1$, donc la condition du Théorème est respectée aussi.

Dans cet exemple, les lois de commande données par le Théorème 3-1, vérifient l'inéquation $u(k) \geq x_3(k-1) \oplus x_4(k-1)$,

Et garantissent le respect de la contrainte temporelle.

IV-3-3-Une seule contrainte et plusieurs commandes :

Dans ce cas une unique place p_{ij} du graphe considéré est soumise à une contrainte temporelle supplémentaire (3-7). Il est associé pour chaque transition source, une fonction dateur, notée $u_l(k)$ pour $l = 1$ à m . Nous supposons qu'il existe un chemin, noté α , avec un marquage initial noté m_α , qui relie le transition tu_s à la transition t_j . Cette hypothèse est traduite par l'inéquation suivante :

$$x_j(k) \geq (A^{m_\alpha} B)_{js} u_s(k - m_\alpha).$$

Nous supposons que $m_\alpha = m_{ij} = 0$, c'est-à-dire que le marquage initial de la place p_{ij} et du chemin α sont nuls. Dans ce cas nous posons $\varphi_s = m_\alpha + m_{ij} + 1 = 1$. Les inéquations (3-13) et (3-14) sont données dans ce cas comme suit :

$$\bigoplus_{r=1}^N A_{ir} \cdot x_r(k-1) \leq \tau_{ij}^{max} \cdot B_{js} u_s(k), \quad (3-18)$$

$$\bigoplus_{l=1}^N A_{il} \cdot u_l(k-1) \leq \tau_{ij}^{max} \cdot B_{js} u_s(k). \quad (3-19)$$

La contrainte temporelle (3-17) est impliquée aux deux conditions (3-18) et (3-19).

La $s^{ème}$ composante du vecteur commande $u(k)$ qui est donnée par l'inéquation

$$u_s(k) \geq \bigoplus_{r=1}^N (A_{ir} - B_{js} - \tau_{ij}^{max}) x_r(k-1),$$

Permet de vérifier la condition (3-18), si la condition (3-20) est vérifiée.

$$A_{ir} \geq \tau_{ij}^{max} \cdot B_{js}, \quad (3-20)$$

Avec $r = 1 \text{ à } N$.

La condition (3-19) est vérifiée si les conditions (3-21) et (3-22) sont satisfaites.

Pour $l = 1 \text{ à } m$,

$$B_{il} \leq \tau_{ij}^{max} \cdot B_{js}, \quad (3-21)$$

$$u_l(k) \leq u_s(k), \quad (3-22)$$

On obtient ainsi le Théorème suivant.[6]

Théorème3-3 : [6]le respect de la contrainte temporelle (3-17) est garanti, s'il existe un indice s tel que

$$u_s(k) \geq \bigoplus_{r=1}^N [(A_{ir} - B_{js} - \tau_{ij}^{max}) x_r(k-1)],$$

Avec, $u_l(t) = \varepsilon$ pour $l \neq s$ et si les conditions (3-20) et (3-21) sont satisfaites.

IV-4-commande du STP sous contrainte temporelle dans le dioïde(max-plus) :

Dans cette partie, nous développons une méthode de commande Max-Plus soumis à des contraintes temporelles. Nous limitons notre étude à un système avec deux entrées de commande et comportant une ou plusieurs places soumises à une contrainte de temps. Nous calculons pour cette de système des lois de commande qui permettent de satisfaire la contrainte imposées.

Nous considérons le modèle la figure 3-8, nous avons vu dans cette partie qua le STP comporte une contrainte temporelle sur la place de correspondance. Notre objectif est de calculer une loi de commande qui va garantir le respect de cette contrainte temporelle afin

de garantir le bon fonctionnement du système. Nous appliquons dans cette partie la méthode développée dans la station C, Pour calculer les lois de commande.

IV-4-1-Calcul des lois de commande :

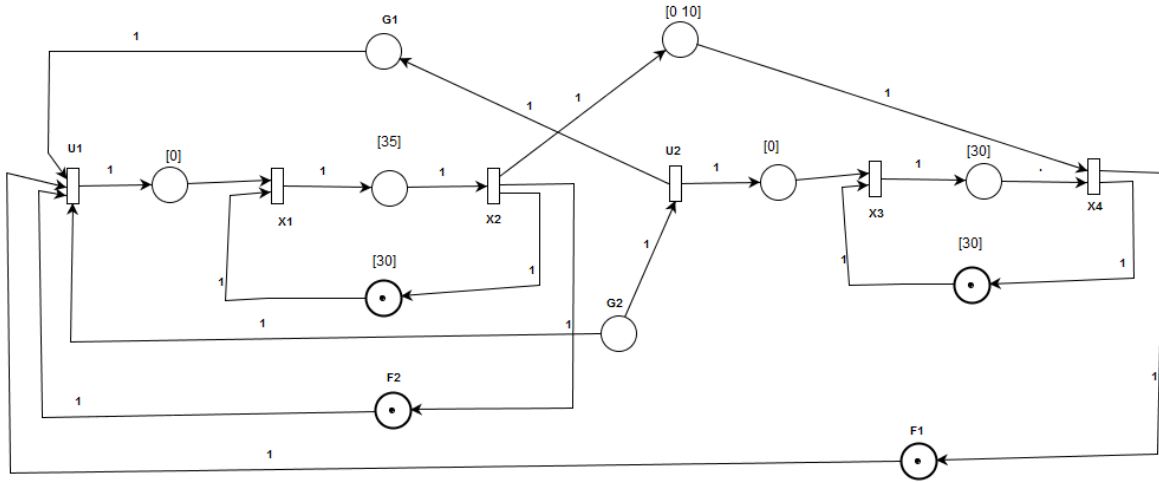


Figure -3-8- : Graphe d'événement temporisé soumis a des contraintes temporelles.

La contrainte temporelle est donnée par

$$x_4(k) \leq \tau_{max} \cdot x_2(k) \tag{3-23}$$

L'équation d'état est donnée par (3-5).

D'après la figure(1) on voit bien qu'il existe un chemin vide de la transition de commande t_{u_1} à la transition t_4 . la temporisation de ce chemin est $\tau_\alpha = \tau_1$ et son marquage initial est $m_\alpha=0$.

Alors l'hypothèse est bien vérifiée puisque $m_\alpha = m_{ij} = 0$.

Après, on a remplace $x_4(k)$ par son équation donnée en (3-23)

$$[(\tau_1 \otimes \tau_2) \cdot x_2(k - 1) \oplus (\tau_3 \otimes \tau_4) \cdot x_4(k - 1) \oplus \tau_1 \cdot u_1(k) \oplus \tau_3 \cdot u_2(k)] \leq \tau_{max} \cdot x_2(k) \tag{3-24}$$

D'après le chemin α du graphe qu'on a suivi on a l'équation (3-25)

$$x_2(k) \geq \tau_1 \cdot u_1(k) \tag{3-25}$$

Donc l'équation (3-24) nous donne

$$\begin{cases} (\tau_1 \otimes \tau_2) \cdot x_2(k - 1) \oplus (\tau_3 \otimes \tau_4) \cdot x_4(k - 1) \leq \tau_{max} \cdot x_2(k) \\ \text{et} \end{cases} \tag{3 - 26}$$

$$\begin{cases} \tau_1 \cdot u_1(k) \oplus \tau_3 \cdot u_2(k) \leq \tau_{max} \cdot x_2(k) \end{cases} \tag{3 - 27}$$

On remplace $x_2(k)$ par (3-25) dans (3-26) et (3-27) on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tau_1 \otimes \tau_2). x_2(k-1) \oplus (\tau_3 \otimes \tau_4). x_4(k-1) \leq (\tau_{max} \otimes \tau_1). u_1(k). \\ \text{et} \\ \tau_1. u_1(k) \oplus \tau_3. u_2(k) \leq (\tau_{max} \otimes \tau_1). u_1(k) \end{array} \right. \quad (3-28)$$

On a d'après l'équation (3-28) la loi de commande $u_1(k)$ ce qui donne :

$$u_1(k) \geq (\tau_1 \otimes \tau_2 - \tau_{max} \otimes \tau_1). x_2(k-1) \oplus (\tau_3 \otimes \tau_4 - \tau_{max} \otimes \tau_1). x_4(k-1) \quad (3-30)$$

$$u_1(k) \geq (\tau_2 - \tau_{max} - \tau_1) x_2(k-1) \oplus (\tau_3 - \tau_{max} - \tau_1) x_4(k-1) \quad (3-31)$$

On a suivi les étapes du Théorème 3-1 :

$$F_{ir} = \max\{(A_{ir} - \tau_{max} - \tau_\alpha), 0\}$$

En fin, le résultat de la loi de commande est :

$$u_1(k) = [F_2 \otimes x_2(k-1)] \oplus [F_4 \otimes x_4(k-1)] \quad (3-32)$$

La même chose pour l'équation (3-29) on a :

$$\tau_1. u_1(k) \oplus \tau_3. u_2(k) \leq (\tau_{max} \otimes \tau_1). u_1(k)$$

D'où :

$$\tau_1. u_1(k) \leq (\tau_{max} \otimes \tau_1). u_1(k) \quad (3-33)$$

Ce qui donne :

$$\tau_{max} \geq 0$$

Donc l'équation (3-33) est toujours vérifiée.

Il faut donc vérifier la satisfaction de l'inéquation suivante :

$$\tau_3. u_2(k) \leq (\tau_{max} \otimes \tau_1). u_1(k) \quad (3-34)$$

$$\tau_3 + u_2(k) \leq \tau_{max} + \tau_1 + u_1(k)$$

Ce qui implique

$$u_1(k) \geq (\tau_3 - \tau_{max} - \tau_1). u_2(k)$$

$$u_1(k) = (\tau_3 - \tau_{max} - \tau_1). u_2(k). \quad (3-35)$$

Si $\tau_3 - \tau_{max} - \tau_1 \geq 0$ sa ne pose pas de problème (d'après le théorème 3-1)

Si non

On a l'équation (3-34) ce qu'elle implique à :

$$u_2(k) \leq (\tau_{max} + \tau_1 - \tau_3) \cdot u_1(k).$$

Le plus grand $u_2(k)$ qui satisfait cette inéquation est celui qui réalise l'égalité.

$$u_{2_{sup}}(k) = (\tau_3 - \tau_{max} - \tau_1) \cdot u_1(k). \quad (3-36)$$

Exemple d'application :

Soient deux lignes de bus L_1 et L_2 telles que représentées par la figure 3-8 et caractérisées par les données suivantes :

Les temporisations de L_1 sont : $\tau_1 = 35 \text{ min}$, $\tau_2 = 30 \text{ min}$ et pour L_2 sont : $\tau_3 = 30 \text{ min}$, $\tau_4 = 30 \text{ min}$.

La temporisation de la station de correspondance est $\tau_{max} = 10 \text{ min}$.

Après qu'on a remplacé les temporisations par leurs valeurs dans l'équation (3-35) on a :

$$u_1(k) = (30 - 10 - 35) \otimes u_2(k).$$

$$u_1(k) = (-15) \otimes u_2(k).$$

On remarque que d'après le résultat obtenu la loi de commande $u_2(k)$ est retardée de 15 min par rapport à $u_1(k)$.

La même chose pour l'équation (3-36) on a :

$$u_2(k) = (10 + 35 - 30) \otimes u_1(k).$$

$$u_{2_{sup}}(k) = (+15) \otimes u_1(k).$$

On remarque que d'après le résultat obtenu la loi de commande $u_{2_{sup}}(k)$ a une avance de 15 min par rapport à $u_1(k)$.

IV-4-2-Interprétation des résultats :

- En analysant les résultats de la commande, nous remarquons que le départ ou l'arrivée de l'un des bus des deux lignes à la station de correspondance sont retardés ou avancé de 15min par rapport à l'autre.
- La loi de commande calculée dans l'algèbre Max-Plus correspond à un retour d'état causal pour lequel la contrainte temporelle de STP est satisfaite.

V-Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons décrit le fonctionnement du STP, puis à partir d'une modélisation par un graphe d'événement temporisé sous contraintes temporelles, une méthode et développée pour la synthèse de loi de commande qui permettent de satisfaire les contraintes imposées.

Conclusion générale :

Dans ce travail, nous avons abordé le problème de commande d'un système de transport public(STP) ; en utilisant des graphes d'événements temporisés, nous arrivons à modéliser un réseau de transport en commun qui est soumis à des contraintes temporelles et représenté par des modèles Max-Plus (Algèbre des dioïdes).

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous avons décrit les différentes composantes d'un système de transport public et le fonctionnement.

Dans le deuxième chapitre, nous avons donné quelques rappelles sur l'algèbre des dioïdes, sur les réseaux de Petri (RdP) et sur les graphes d'événements temporisés ainsi que la représentation de leur dynamique par des modèles linéaires dans l'algèbre Max-Plus et Min-Plus.

Dans le troisième chapitre, nous avons modélisé le STP par des graphes d'événements temporisés dans l'algèbre des dioïdes. Par la suite, nous avons donné une méthodes qui permet le calcul de lois de commande qui garantissent les contraintes temporelles associées aux graphes d'événements temporisés étudié. Le problème est étudié dans l'algèbre Max-Plus. En suite, nous avons appliqué ces méthodes de calcul sur un STP qui est soumis à une seule contrainte de temps et deux entrées de commande. Ainsi, on a déterminé des lois de commande causales sous forme de retour d'état (Feedback), qui garantissent le respect des contraintes temporelles. A la fin de ce chapitre, nous avons donnés et interprété les résultats trouvés.

Comme perspectives, il serait très intéressent de mettre en œuvre ces lois de commande étudiés sur des systèmes complexes, comme les systèmes de transports aériens ou maritimes. Il serait également intéressant d'utiliser d'autres approches de commande sur les STPs et de faire ensuite une étude comparative avec les résultats qu'on a obtenus.

