

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOU MAMMERI, TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET INFORMATIQUE

DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

MEMOIRE DE MAGISTER

en Automatique

Option : **Traitement d'Images et Reconnaissance de Formes**

Présenté par

KORICHI ALI

Thème

Traitements non-locaux d'images basés sur les équations aux dérivées partielles définies sur des graphes pondérés.

Mémoire soutenu le : 14/03/2016

devant le jury d'examen composé de :

DIAF Moussa

Professeur à l'U.M.M.T.O.

Président

HAMMOUCHE Kamal

Professeur à l'U.M.M.T.O.

Rapporteur

MAIDI Ahmed

M.C.A à l'UMMTO

Examineur

SADI Bachir

M.C.A à l'UMMTO

Examineur

DIRAMI Ahmed

M.C.B à l'UMMTO

Examineur

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire de Vision artificielle et automatique des systèmes (LVAAS) du département automatique, Faculté de Génie Electrique et Informatique de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Je tiens en premier lieu à adresser mes vifs remerciements à mon directeur de mémoire Monsieur **HAMMOUCHE Kamal** Professeur à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, pour m'avoir guidé tout le long de ce travail. Je lui exprime ma profonde gratitude pour m'avoir fait profiter de ses connaissances et surtout sa rigueur scientifique. Sans sa disponibilité permanente son soutien et ses conseils ce travail n'aurait pas pu aboutir.

Nos vifs remerciements vont aussi à Monsieur **DIAF Moussa** Professeur à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens aussi à remercier Monsieur **MAIDI Ahmed**, Maitre de conférences classe A à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, pour avoir bien voulu faire partie du jury de ce mémoire.

Monsieur **SADI Bachir**, Maitre de conférences classe A à l'Université Mouloud Mammeri à bien voulu participer au jury de ce mémoire, qu'il trouve, ici, l'expression de notre profonde gratitude pour l'intérêt qu'il a apporté à notre travail.

Que Monsieur **DIRAMI Ahmed**, Maitre de conférences classe A à l'Université Mouloud Mammeri trouve ici nos remerciements pour avoir accepté de faire partie du jury d'examen de notre mémoire.

Sommaire

| | |
|--|----|
| Introduction générale | 01 |
| Chapitre 1 : Théorie des graphes appliquée aux images | 03 |
| 1. Introduction..... | 03 |
| 2. Quelques Définitions sur graphe | 03 |
| 3. Représentation matricielle d'un graphe | 05 |
| 3.1. Matrice d'adjacence | 05 |
| 3.2. Matrice associée | 06 |
| 3.3. Matrice d'incidence aux arcs | 07 |
| 4. Graphes pondérés et graphe de similarité | 07 |
| 5. Différents types de graphe de similarité | 08 |
| 5.1. Graphe complet | 09 |
| 5.2. Graphe de ε -voisinage | 09 |
| 5.3. Graphe des k-plus proches voisins | 10 |
| 6. Représentation des images par des graphes | 11 |
| 6.1. Représentation des images par des graphes utilisant les coordonnées spatiales | 11 |
| 6.2. Représentation des images par des graphes utilisant les attributs des pixels (domaine non organisé) | 12 |
| 6.3.Représentation des images par des graphes d'adjacence des régions | 13 |
| 7. Vecteurs d'attributs | 14 |
| 8. Fonctions de poids | 17 |
| 9. Conclusion | 17 |
| Chapitre 2 : Opérateurs définis sur des graphes | 19 |
| 1. introduction | 19 |
| 2. Construction de graphe pondéré sur une image | 19 |
| 3 .Fonctions définies sur des graphes | 20 |
| 4. Opérateur de différence | 21 |
| 5. Opérateur gradient | 22 |
| 6. Opérateur p -Laplacien | 23 |

| | |
|--|-----------|
| 7. Morphologie Mathématique sur graphes | 25 |
| 7.1. Erosion et Dilatation des images binaires..... | 26 |
| 7.2. Erosion et Dilatation des images en niveaux de gris | 26 |
| 7.3. Erosion et Dilatation à base des équations aux dérivées partielles | 27 |
| 7.4. Erosion et Dilatation sur graphes | 28 |
| 7.5. Ouverture et la fermeture morphologiques | 29 |
| 7.6. Gradient morphologique | 30 |
| 7.7. Chapeau haut de forme | 31 |
| 8. Segmentation d'images par le modèle de Chan et Vese définie sur des graphes | 31 |
| 9. Conclusion | 35 |
| Chapitre 3 : Tests et Résultats | 36 |
| 1. Introduction | 36 |
| 2. Préambule | 36 |
| 3. Opérateur Gradient | 38 |
| 4. Opérateurs de Morphologie Mathématique | 39 |
| 4.1. L'érosion et la dilatation | 41 |
| 4.2. L'ouverture et la fermeture | 41 |
| 4.3. Gradient morphologique | 46 |
| 4.4. Chapeau haut forme | 47 |
| 5. Influence du choix de ε | 47 |
| 6. Résultats de la segmentation | 49 |
| 7. Conclusion | 49 |
| Conclusion générale | 52 |
| Bibliographie | |

Liste des figures

| | Page |
|---|------|
| Figure1.1: Exemple de graphe orienté. | 4 |
| Figure1.2: Graphe non orienté. | 5 |
| Figure1.3: Exemple de graphe orienté. | 5 |
| Figure1.4: Graphe complet et graphe non complet. | 9 |
| Figure1.5: Graphe de ε -voisinage. | 10 |
| Figure1.6: Graphes des k plus proches voisins standard et mutuel. | 10 |
| Figure1.7: Graphes grille représentant les images. | 12 |
| Figure1.8: Exemple de graphe d'adjacence des régions associé à une partition d'une image. | 14 |
| Figure1.9: Exemple de patches de taille (3×3). | 16 |
| Figure3.1: Images tests. | 37 |
| Figure3.2: Images RAG des images de la figure (3.1). | 37 |
| Figure3.3: Résultats de l'opérateur gradient classique et celui défini sur des graphes ε -voisinage. | 40 |
| Figure3.4: Résultats de l'opérateur érosion classique et celui défini sur des graphes de ε -voisinage. | 42 |
| Figure3.5: Résultats de l'opérateur dilatation classique et celui défini sur des graphes de ε -voisinage. | 43 |
| Figure3.6: Résultats de l'opérateur ouverture classique et celui défini sur des graphes de ε -voisinage. | 44 |
| Figure3.7: Résultats d'un opérateur fermeture classique et celui défini sur des graphes de ε -voisinage. | 45 |
| Figure3.8: Résultats des opérateurs gradient et Laplacien morphologique sur une image en niveaux de gris. | 46 |
| Figure3.9: Résultats de l'application des deux opérateurs chapeau haut forme (blanc et noire) sur l'image Cameraman. | 47 |
| Figure3.10: Résultats de l'opérateur gradient défini sur des graphes de ε -voisinage. | 48 |
| Figure3.11: Résultat de la segmentation d'une image. | 50 |
| Figure3.12: Résultat de la segmentation de l'image 3.11.a avec un autre contour initial. | 51 |

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

Les traitements classiques réalisés sur les images numériques tels que le filtrage, la détection des contours, la restauration des images, la segmentation, les opérations morphologiques, consistent le plus souvent à utiliser les pixels voisins dans l'image. Ils sont usuellement formulés comme des opérations sur des ensembles ou des treillis et leurs implémentations sont habituellement faites dans un cadre algébrique (discret). Cependant, des formulations alternatives basées sur la théorie des graphes ont également été proposées. Cette approche est basée sur la représentation de l'image par un graphe dans lequel les sommets correspondent aux pixels et les arêtes expriment la "proximité" entre les sommets. Cette proximité peut être spatiale ou non spatiale, c'est à dire qu'elle ne dépend pas des positions des pixels mais plutôt de leurs attributs. Les graphes ont l'avantage d'être une structure naturellement adaptée à la représentation de tout type de données discrètes, continues, uniformes et non uniformes.

Un outil très utilisé ces dernières années en traitement d'images et en vision par ordinateur est celui des équations aux dérivées partielles (EDP) et du calcul variationnel. Cet outil mathématique est devenue un sujet de recherche majeur et incontournable dans le domaine du traitement d'images. Les recherches dans ce domaine ont débouché sur la description par des EDP des opérateurs de traitement très variés tels que la détection de contours, le filtrage, la restauration, le rehaussement de contraste, la segmentation des images et des opérateurs morphologiques tels que l'érosion et la dilatation.

Cependant, l'utilisation des EDP dans le domaine du traitement d'images nécessite une discrétisation des opérateurs différentiels afin de pouvoir disposer de schémas numériques applicables. Cette discrétisation constitue un obstacle non négligeable lorsque les données sont définies sur des domaines non uniformes ou possèdent une grande dimensionnalité.

Pour surmonter cet obstacle, une adaptation des modèles basées sur les EDP dans un cadre discret ont été proposées en s'appuyant sur la notion

des graphes. L'adaptation des modèles basées sur les EDP à des graphes se fait par transcription directe des équations aux dérivées partielles (EDP) vers des équations aux différences partielles (EdP) en utilisant des opérateurs de dérivation définis sur ces graphes.

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à définir et à appliquer quelques opérations de traitement d'images en niveaux de gris définis sur des graphes. Il s'agit plus particulièrement, des opérateurs gradient et Laplacien définis sur les graphes, des opérateurs morphologiques décrits par les équations aux dérivées partielles et définies sur des graphes pondérés ainsi qu'à la segmentation d'images basée sur une version discrète définie sur des graphes du modèle de Chan et Vese. Ce modèle très populaire permet de segmenter l'image en deux régions en se basant sur la minimisation de la fonctionnelle énergie.

Ce mémoire est organisé principalement en trois chapitres.

Le premier chapitre porte sur quelques définitions notions de base de la théorie des graphes et sur les différentes manières de représenter des images par des graphes.

Le deuxième chapitre est consacré aux opérations définies sur des graphes comme le gradient, le p -Laplacien ainsi que les opérateurs morphologiques (érosion, dilatation, ouverture, fermeture et chapeau haut de forme) et la segmentation d'images basée sur le modèle de Chan et Vese.

Les tests et les résultats de l'application des opérations gradient et morphologiques locaux et non locaux ainsi que ceux de la segmentation par le modèle de Chan et Vese sont présentés dans le troisième chapitre.

Nous terminons notre travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Théorie des graphes appliquée aux images

1. introduction

La théorie des graphes est une branche des mathématiques qui a débuté avec les travaux d'Euler. L'histoire veut que Léonard Euler en visite dans la ville de Königsberg, ait tenté de répondre à un problème « Peut-on se promener dans la ville en empruntant chacun des sept ponts une et une seule fois, et revenir à son point de départ ? » [1].

La théorie des graphes constitue un outil puissant de modélisation et de résolution de problèmes concrets. Elle est très utilisée en recherche opérationnelle, dans le génie électrique (modélisation des circuits...), la programmation, la gestion des réseaux, la biologie, la classification de données, etc.

La représentation des données sous forme de graphe est également utilisée dans différentes applications d'analyse d'images. Dans ces applications, l'image est traitée pour produire un graphe représentant les composants (pixels, régions,...) et les relations entre eux.

Nous voulons au cours de ce chapitre, mettre le point sur quelques définitions et notions de base de la théorie des graphes ainsi que les différentes représentations des images par des graphes.

2. Quelques définitions sur les graphes

Un graphe noté $G=(V,E)$ est défini par un ensemble fini de points $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dit ensemble nœuds ou sommets et par un ensemble fini E de produits cartésiens $V \times V = \{(v_i, v_j) / v_i \in V, v_j \in V\}$. E est appelé ensemble des arêtes ou d'arcs $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ [2].

Si le graphe G contient n sommets, on dit alors que G est d'ordre n .

Si une arête e relie deux sommets v_i et v_j , on dit que l'arête est incidente aux sommets v_i et v_j . Les sommets v_i et v_j sont alors adjacents, ou incidents à e .

On note un arête orienté relie un sommet u au sommet v dans un graphe G par uv .

L'arc dont l'extrémité initiale est confondue avec l'extrémité terminale forme une boucle, notée : $e = v_i v_j$.

Dans le cas général un graphe peut avoir des arêtes multiples, c'est-à-dire que plusieurs arêtes différentes relient la même paire de sommets.

Un graphe est dit simple s'il est sans boucles ni arêtes multiples. Dans le cas contraire, c'est-à-dire, si des boucles ou des arêtes multiples sont autorisés, on dira que le graphe est multiple.

Un graphe est dit orienté si les arêtes sont orientées (indiquées par des flèches). Dans ce cas, le sommet de départ représente « l'extrémité initiale » et le sommet d'arrivée représente « l'extrémité terminale » [3].

Autrement dit, un graphe orienté peut être défini par le quadruplet : $G (V, E, I, T)$ où :

— I est l'application extrémité initiale d'un arc définie par :

$$\begin{aligned} I : E &\longrightarrow V \\ uv &\longmapsto I(uv) = u \end{aligned}$$

— T est l'application extrémité terminale d'un arc définie par :

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow V \\ uv &\longmapsto T(uv) = v \end{aligned}$$

Un exemple de graphe orienté est donné sur la figure (1.1) ci-contre.

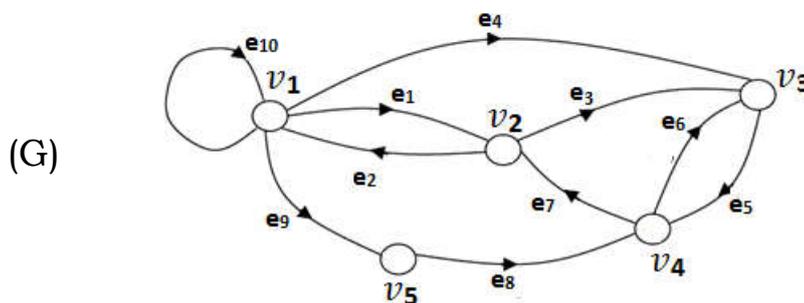


Figure 1.1: Exemple de graphe orienté

Un graphe est dit non orienté si les arêtes sont non orientées. Un exemple de graphe non orienté est donné sur la figure (1.2) ci-après

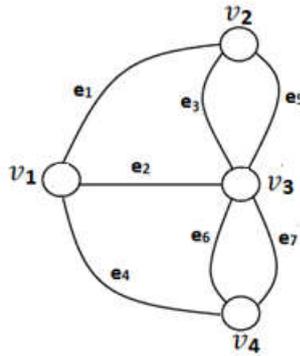


Figure 1.2: Graphe non orienté

3. Représentation matricielle d'un graphe

Certains graphes peuvent être complexes, notamment s'ils contiennent plusieurs arcs ou plusieurs sommets. Pour palier à certaines difficultés rencontrées dans le traitement de ces graphes, une représentation de ces graphes par des matrices a été introduite.

À un graphe $G=(V,E)$ contenant n sommets et m arcs, c'est-à-dire : $\text{card}(V) = n$ et $\text{card}(E) = m$, on associe trois types de matrices. Ces matrices seront définies ci-dessous en prenant comme exemple le cas du graphe G de la figure (1.3) ci-dessous.

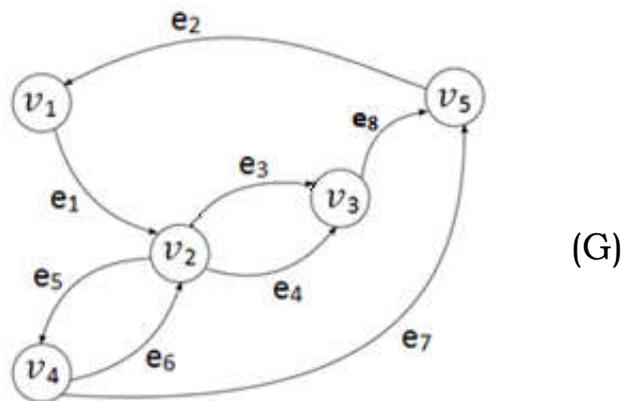


Figure 1.3 : Exemple de graphe orienté

3. 1. Matrice d'adjacence

La matrice d'adjacence d'un graphe $G=(V,E)$ est une matrice de dimension $n \times n$. Ses éléments prennent deux valeurs 1 ou 0. Chaque ligne et chaque colonne correspond à un sommet du graphe. Ainsi chaque élément de la matrice indique la relation qui existe entre deux sommets :

- 1 signifie que les deux sommets sont reliés par un arc ,
- 0 signifie que les deux sommets ne sont pas reliés par un arc.

Pour le graphe G de la figure (1.3), la matrice d'adjacence $A=(a_{ij})$ est:

| | | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | v_1 | v_2 | v_3 | v_4 | v_5 |
| $A=$ | v_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | v_2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | v_3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | v_4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | v_5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$e_1 = v_1 v_2$ est un arc du graphe G ; c'est à dire v_1 est une extrémité initiale de l'arc e_2 et v_2 son extrémité terminale, donc l'élément a_{12} (l'élément de la deuxième ligne et de la première colonne) de la matrice d'adjacence du graphe G sera égal à 1. Par contre il n'existe pas d'arc ayant v_1 comme extrémité initiale et v_3 comme extrémité terminale, ainsi l'élément a_{13} (élément de la première ligne et de la troisième colonne) de la matrice d'adjacence sera égal à 0.

3.2. Matrice associée

La matrice associée d'un graphe $G = (V, E)$ est une matrice de dimension $n \times n$, où chaque ligne et chaque colonne correspondent à un sommet du graphe. Chaque élément indique le nombre de relations entre deux sommets, c'est-à-dire le nombre d'arcs (arêtes) reliant deux sommets.

Pour le graphe G de la figure (1.3), la matrice associée $B = (b_{ij})$ est:

| | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | v_1 | v_2 | v_3 | v_4 | v_5 |
| $B =$ | v_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | v_2 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| | v_3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | v_4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | v_5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Du graphe de la figure (1.3) on décèle 2 arcs de la forme (v_2, v_3) ; c'est-à-dire ayant v_2 comme extrémité initiale et v_3 comme extrémité terminale, ainsi l'élément a_{23} correspondant sera égal à 2.

3.3. Matrice d'incidence aux arcs

La matrice d'incidence aux arcs d'un graphe $G = (V, E)$ est une matrice à n lignes et m colonnes. Ses éléments prennent les valeurs 1, 0 ou -1. Chaque ligne de la matrice est associée à un sommet et chaque colonne à un arc. Chaque élément de la matrice indique la relation entre un sommet et un arc comme suit :

+1 signifie que le sommet est une extrémité initiale de l'arc.

-1 signifie que le sommet est une extrémité terminale de l'arc.

0 signifie qu'il n'existe pas de relations entre le sommet et l'arc.

La matrice d'incidence ne convient pas pour les graphes avec boucles.

Pour le graphe G de la figure (1.3), composé de 7 arcs, la matrice d'incidence aux arcs $C = (c_{ij})$ est:

| | e_1 | e_2 | e_3 | e_4 | e_5 | e_6 | e_7 | e_8 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| v_1 | +1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| v_2 | -1 | +0 | +1 | +1 | +1 | -1 | 0 | 0 |
| v_3 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | +1 |
| v_4 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | +1 | +1 | 0 |
| v_5 | 0 | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 |

4. Graphes pondérés et graphe de similarité

On dit qu'un graphe est pondéré si on affecte à chaque arête un nombre (quel que soit sa signification) [04]. Ce nombre positif est alors appelé poids de l'arête et le graphe est représenté par le triple $G=(V,E,W)$ où $W:E \rightarrow \mathbb{R}^+$ désigne la fonction poids du graphe.

Souvent le poids d'une arête est basé sur une relation de similarité entre les vecteurs caractéristiques des sommets de cette arête.

La similarité entre deux sommets dépend généralement d'une mesure de distance $d:E \rightarrow \mathbb{R}^+$

Il existe plusieurs manières de définir la distance entre deux sommets [2]. Soient u et v deux sommets de E , défini chacun par son vecteur caractéristique :

$$f(u) = (f_1(u), f_2(u), \dots, f_k(u)) \text{ et } f(v) = (f_1(v), f_2(v), \dots, f_k(v))$$

La distance entre ces deux sommets peut être définie par:

- Distance de Manhattan (*1-distance*):

$$d(uv) = \sum_{i=1}^k |f_i(u) - f_i(v)| \quad (1.1)$$

- Distance euclidienne (*2-distance*):

$$d(uv) = \sqrt{\sum_{i=1}^k (f_i(u) - f_i(v))^2} \quad (1.2)$$

- Distance de Minkowski (*p-distance*):

$$d(uv) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^k |f_i(u) - f_i(v)|^p} \quad (1.3)$$

- Distance de Chebyshev (*∞ -distance*):

$$d(uv) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^k |f_i(u) - f_i(v)|^p} = \sup_i (|f_i(u) - f_i(v)|) \quad (1.4)$$

Les fonctions de similarité permettent de prendre en compte la similarité entre les données [5]. Les plus utilisées sont :

L'inverse de la distance $w(uv) = \frac{1}{d(uv) + \alpha}$ (1.5)

Fonction gaussienne $w(uv) = \exp\left(\frac{-d^2(uv)}{\sigma^2}\right)$ (1.6)

α et σ sont des paramètres positifs de contrôle. D'autres fonctions de similarité sont données au paragraphe 8 de ce chapitre.

5 .Différents types de graphe de similarité

Il existe plusieurs manières de représenter un ensemble de données $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sous forme d'un graphe en utilisant une mesure de similarité entre chaque couple de données v_i et v_j .

Le but, lors de la construction de ces graphes de similarité, est de modéliser la relation de voisinage entre les différentes données de V .

Les différents types de graphes de similarité sont :

- graphe complet
- graphe ε -voisinage
- graphe de k plus proches voisins

5.1. Graphe complet

On appelle graphe complet un graphe dont tous les sommets sont adjacents, c'est-à-dire dont tous les sommets sont connectés entre eux.

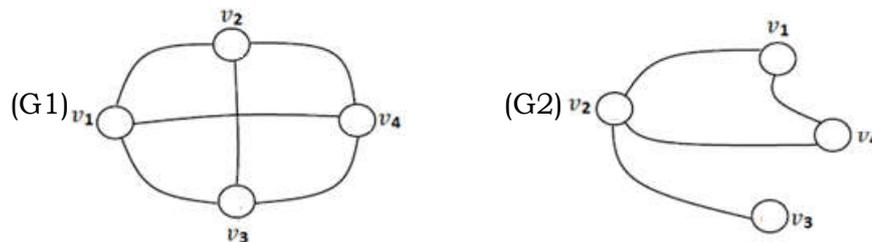


Figure 1.4 : Graphe complet et graphe non complet

Dans les exemples de la figure (1.4), les sommets du graphe G1 sont tous adjacents, donc le graphe G1 est complet, alors que les sommets v_1 et v_3 dans le graphe G2 ne sont pas adjacents donc le graphe G2 est donc non complet.

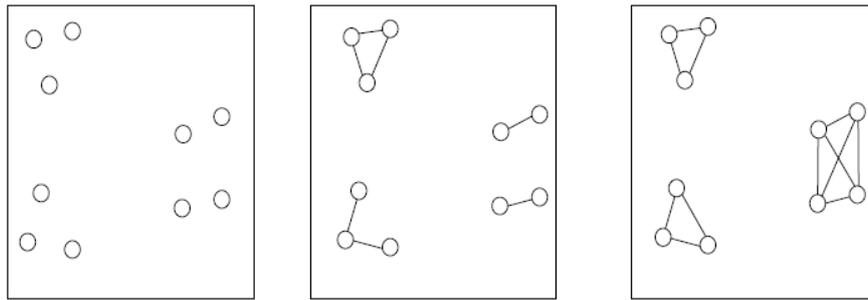
5.2. Graphe de ε -voisinage

Le graphe ε -voisinage est un graphe dont tous les couples de sommets dont la distance est inférieure à ε sont reliés. Le voisinage pour un sommet donné u est donc défini comme étant l'ensemble des voisins dont la mesure de distance d est inférieure ou égale au paramètre de seuillage ε . Le voisinage $\mathcal{N}_\varepsilon(u)$ pour un sommet u est alors défini comme suit:

$$\mathcal{N}_\varepsilon(u) = \{v \in V \setminus \{u\} / d(uv) < \varepsilon\} \quad (1.7)$$

Lorsque le paramètre de seuillage noté $\varepsilon = \infty$, nous obtenons alors un graphe complet [8].

La figure (1.5) montre un exemple de graphe ε -voisinage pour $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = 2$.



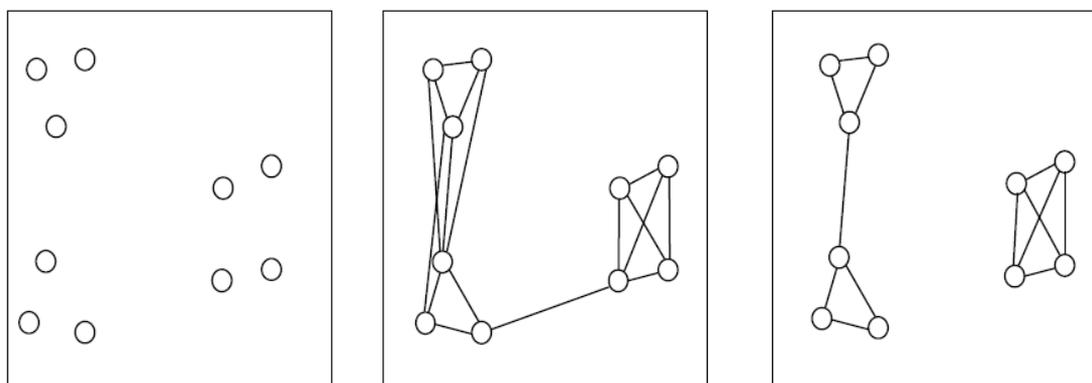
Point originaux Graphe de voisinage ($\varepsilon = 1$) Graphe de voisinage ($\varepsilon = 2$)

Figure 1.5 : Graphe de ε -voisinage

5.3. Graphe des k -plus proches voisins

Dans ce type de graphe, un sommet v_i est lié au sommet v_j si ce dernier est parmi les k plus proches voisins (KPPV) du sommet v_i . Cette définition conduit à un graphe dont la relation de voisinage n'est pas symétrique. Il existe deux façons de rendre ce graphe non orienté. La première façon consiste tout simplement à ignorer le sens des arêtes, en reliant le sommet v_i et le sommet v_j avec une arête non orienté si v_i est parmi les k plus proches voisins de v_j ou si v_j est parmi les k plus proches voisins de v_i . Le graphe résultant est généralement appelé « graphe des k -plus proches voisins standard ». L'autre façon consiste à relier le sommet v_i avec le sommet v_j si v_i est parmi les k plus proches voisins de v_j et v_j si est parmi les k plus proches voisins de v_i . Le graphe qui en résulte est appelé « graphe des k -plus proche voisins mutuels »

La figure (1.6) montre les deux types de graphes des k plus proches voisins (standard et mutuel) pour $k = 3$.



Point originaux

Graphe des 3 PPV standard

Graphe des 3 PPV mutuel

Figure 1.6 : Graphes des k plus proches voisins standard et mutuel

6. Représentation des images par des graphes

La structure de graphe est adaptée pour représenter des données discrètes. Ainsi l'image numérique peut être représentée par un graphe pondéré $G=(V,E,W)$ dont les sommets V sont généralement associés aux pixels de l'image et les similarités entre les sommets sont incorporées dans la fonction poids W des arêtes E .

Selon que l'organisation spatiale des données (pixels) est prise en compte ou non, l'image est représenté par un graphe défini dans un domaine organisé ou dans un domaine non organisé (c'est-a-dire utilisant les attributs des pixels).

6.1. Représentation des images par des graphes utilisant les coordonnées spatiales

Dans une image numérique les pixels de l'image sont positionnés sur une grille régulière. La représentation d'une image par un graphe suit la même répartition des pixels sur l'image.

Dans ce cas la distance d utilisée pour calculer la similarité entre les nœuds est basée sur les coordonnées spatiales des pixels de l'image correspondants. Un sommet $u \in V$ est associé à un pixel de l'image de coordonnées spatiales (x_u, y_u) et sa distance par rapport à un autre sommet v représenté par ses coordonnées spatiales dans l'image est :

$$\text{Distance " city-block " : } d(uv) = |x_u - x_v| + |y_u - y_v| \quad (1.8)$$

$$\text{Distance "Chebychev " : } d(uv) = \max (|x_u - x_v|, |y_u - y_v|) \quad (1.9)$$

En considérant un graphe de ε -voisinage et dans le cas de la distance " city-block " avec $\varepsilon \leq 1$, chaque nœuds est relié à ses 4 plus proches voisins situé à une distance $d(u, v) \leq 1$ comme le montre la figure (1.7) . On parle alors de la connexité 4-voisinage.

Si on considère la distance de "Chebychev " avec $\varepsilon \leq 1$, chaque nœuds du graphe est relié à ses 8 plus proches voisins (fig.1.7). Dans ce cas la connexité est dite 8-voisinage.

La figure (1.7) montre deux exemples de graphe grille en 4 et en 8-voisinage.



Figure 1.7: Graphes grille représentant les images. (a) : un graphe grille en 4-voisinage, (b) : un graphe grille en 8-voisinage.

6.2. Représentation des images par des graphes utilisant les attributs des pixels

Une autre manière de représenter une image par un graphe est de considérer les attributs des pixels associés aux nœuds lors de la construction du graphe au lieu des coordonnées spatiales. Dans ce cas, à deux nœuds proches dans un graphe peuvent correspondre deux pixels spatialement éloignés dans l'image.

Ce type de graphe permet de modéliser les relations de similarité entre les vecteurs caractéristiques des pixels.

Dans ce cas la similarité entre deux nœuds du graphe peut être déterminée à partir de la distance entre les deux nœuds. La distance la plus utilisée est la distance Euclidienne :

$$d(uv) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(u) - f_i(v))^2} \quad \text{avec : } f: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (1.10)$$

$f_i(u)$ et $f_i(v)$ ($i = 1, \dots, m$) représentent respectivement le i ème attribut du pixel associé au nœud u et v .

D'autres mesures de distances peuvent être également considérées. Le choix de cette mesure dépend généralement de l'application considérée.

Deux familles de graphes de voisinage sont généralement utilisées pour représenter une image :

- le graphe de ε -voisinage .
- le graphe des k plus proches voisins, noté k PPV.

6.3. Représentation des images par des graphes d'adjacence des régions

La représentation des images par un graphe $G = (V, E)$ consiste à associer à chaque pixel un sommet dans V et à définir l'ensemble des arêtes de E et les poids qui leur sont associés W [7].

Associer à chaque pixel un sommet dans V conduit à la construction de graphes de grande taille.

Pour réduire la taille du graphe, une solution consiste à réduire le nombre de pixels. Pour cela, il suffit de trouver une partition (ensemble de régions connexes) pour une image donnée et associer à chaque région un sommet dans V . À partir de cette partition, un graphe de voisinage est construit en reliant par des arêtes des régions adjacentes. Ce type de graphe est nommé graphe d'adjacence de région ou RAG (Region Adjacency Graph) [8].

La construction d'une partition à partir d'une image peut se faire avec différentes méthodes. Parmi toutes celles existantes, nous pouvons citer la ligne de partage des eaux [7].

Finalement, un RAG peut être défini comme étant un graphe de ε -voisinage (avec $\varepsilon=1$) où l'ensemble des arêtes E est défini avec la distance $d(uv) = 1$ si les régions u et v sont adjacentes et par $d(uv) = \infty$ si elles ne le sont pas.

La figure (1.8) montre un exemple de graphe d'adjacence de régions associé à une partition d'une image initiale. La figure (1.8b) montre une partition où les contours de chaque région sont indiqués en blanc. Chaque région de la partition est caractérisée par la couleur moyenne des pixels de l'image initiale qui la compose. La figure (1.8c) montre le RAG associé à la partition.

Les arêtes représentent les relations d'adjacences et les sommets sont caractérisés par la couleur de la région qui lui est associée.

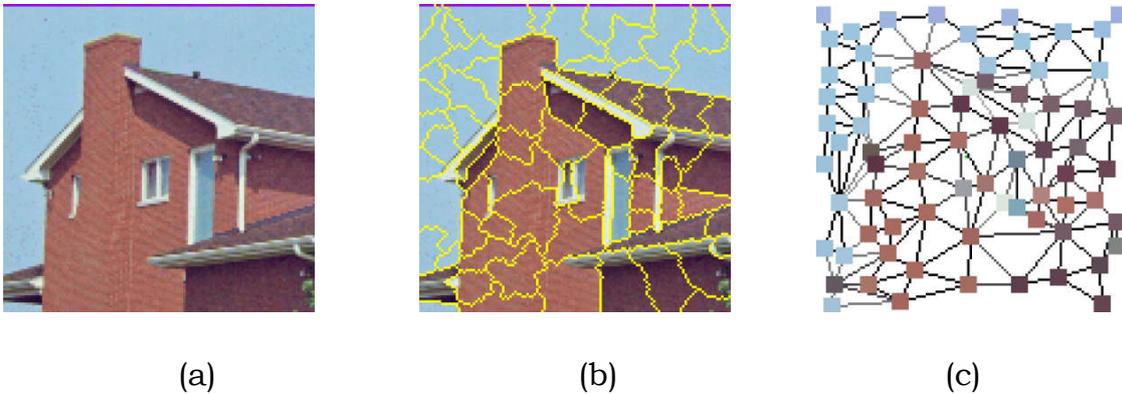


Figure 1.8: Exemple de graphe d'adjacence des régions associé à une partition d'une image. (a) : image initiale, (b) : partition de (a) , (c) : graphe d'adjacence de régions RAG de la partition (b)

7. Vecteurs d'attributs

Les similarités entre les sommets du graphe reposent sur une comparaison des attributs associés à chacun de ses sommets. Ces attributs dépendent généralement d'une fonction initiale f^0 représentant l'image initiale et qui est définie en chaque sommet. Ainsi, nous définissons le vecteur d'attributs $\mathcal{F}(u)$ en chaque sommet $u \in V$ du graphe.

Il existe différents types d'attributs tels que la couleur, la texture ou la forme. Ces attributs peuvent être utilisés individuellement ou combinés.

7.1. Niveau de gris

L'attribut le plus couramment utilisé dans le cas des images en niveaux de gris est sans doute le niveau de gris.

7.2. La couleur

Les attributs couleur découlent des systèmes de représentation d'une image couleur. Les plus connus sont:

* le système RVB : En traitement d'images couleur, l'espace RGB reste de loin le plus utilisé et le plus simple à manipuler. Toute couleur C de

coordonnées (r, g, b) peut être reproduite par addition des trois primaire R, G et B. Les attributs sont donc les couleur rouge (r), vert (v) et bleu (b)[9] .

* le système HSV : connu aussi sous le nom du système de cône hexagonal, il se présente en deux variantes : le modèle de cône hexagonal simple et le modèle hexagonal double. Ils représentent la couleur sous forme d'un triplet: Teinte H (Hue), Saturation S et luminosité V (Value). Les attributs correspondants sont la Teinte, la Saturation et luminosité.

* le système LAB : Il constitue une approximation de l'espace d'Adams-Nickerson dans lequel l'amplitude perceptuelle de la couleur est définie en termes d'échelles de couleurs opposées couvrant l'intégralité du spectre visible par l'œil humain.

- L : luminance varie entre 0 et 100
- a : variations sur un axe rouge-vert : varie entre -300 et +300
- b : variations sur un axe bleu -jaune : varie entre -300 et +300

Les attributs sont L, a et b.

7.3. La forme

La forme constitue un moyen très efficace pour la description d'un objet. Plusieurs attributs ont été proposés afin de représenter une forme. Parmi ces attributs, on peut citer la surface, le périmètre, les axes les intersections de lignes les trous etc. D'autres attributs, appelées caractéristiques géométriques sont définis à partir des moments géométrique telle que les moments invariants [10].

7.4. La texture

La texture est une caractéristique importante dans la description de l'état de surface d'un objet ou une zone de l'image. Elle se traduit en termes linguistiques par le contraste, la granularité, l'orientation, la finesse, la régularité et la rugosité. Elle est définie par la répétition spatiale aléatoire ou non d'un motif de base. Toute une gamme de méthodes adaptées à la description de la texture en terme qualitatif ou quantitatif ont été proposées. Cette description est formalisée par un certain nombre de propriétés

caractéristiques ou attributs. Parmi ces méthodes celle basée sur les matrices de cooccurrence reste la plus populaire. Proposée par Haralick et al, elle consiste à explorer les dépendances spatiales des pixels en construisant d'abord une matrice de cooccurrence basée sur l'orientation et la distance entre les pixels de l'image [11]. De chacune de ces matrices, on peut extraire ensuite des attributs de texture comme le contraste, l'entropie ou l'homogénéité.

7.5. Patch

Une autre manière de caractériser un pixel est de le représenter par ses pixels voisins appartenant à une fenêtre de voisinage centrée sur lui-même appelée patch.

Un patch est une fenêtre généralement carrée de taille fixe ($S \times S$) centrée autour d'un pixel (fig.1.9). A titre d'exemple pour l'image en niveaux de gris de la figure (1.9), le vecteur d'attributs $\mathcal{F}(u)$ issu du patch de taille (3×3) pour le pixel central indiqué sur la figure est : $\mathcal{F}_v = \{10,12,20,13,19,25,24,36,35\}$

Notons que, les méthodes utilisant des patches sont qualifiées de non locales. Les configurations non locales dans ce cas n'existent plus dès lors que l'on considère des graphes. En effet, ces notions disparaissent et s'expriment uniquement en terme de topologie du graphe (le voisinage des sommets) et de poids des arêtes. Les traitements non locaux des images deviennent alors simplement des traitements locaux sur un graphe.

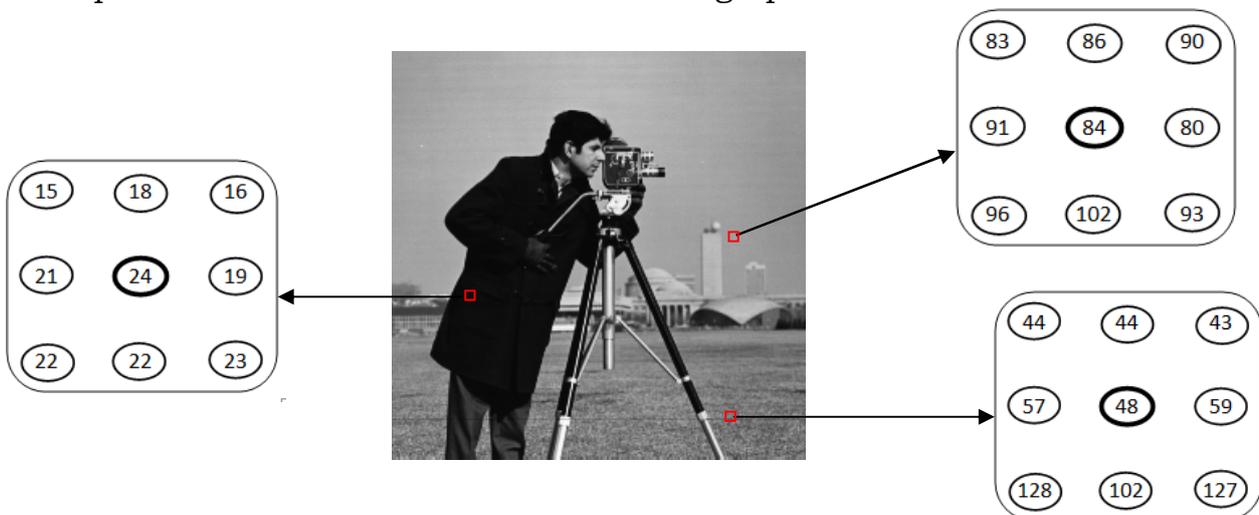


Figure 1.9: Exemple de patches de taille (3×3) .

8. Fonctions de poids

Dans la représentation d'une image par un graphe pondéré $G=(V,E,W)$, chaque arête de E est affectée d'un poids dans W .

Il existe différentes fonctions permettant de définir les poids des arêtes, mais le plus souvent, ces fonctions rendent compte des similarités entre les pixels. Elles dépendent, soit de la distance spatiale entre les nœuds, soit de la distance entre les attributs des nœuds ou soit des deux distances.

Plusieurs formes de fonction de poids peuvent être utilisées [12,13,14,15] :

$$w_{uv} = \exp\left(\frac{\|u-v\|_2^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.15)$$

$$w_{uv} = \exp\left(\frac{\|f(u)-f(v)\|_2^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.16)$$

$$w_{uv} = \exp\left(\frac{\|u-v\|_2^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{\|f(u)-f(v)\|_2^2}{\sigma^2}\right) \quad (1.17)$$

$$w_{uv} = \exp\left(-\frac{\|f(u)-f(v)\|_2^2}{\sigma^2}\right) \quad (1.18)$$

$$w_{uv} = \frac{1}{\|u-v\|_2 + \sigma} \quad (1.19)$$

$$w_{uv} = 1 \quad (1.20)$$

Où $\|u-v\|_2$: est la distance euclidienne spatiale entre les nœuds u et v , et $\|f(u)-f(v)\|_2$ est la distance euclidienne entre les attributs des nœuds u et v .

9. Conclusion

La théorie des graphes est un très vaste domaine, en évolution constante tant du point de vue des recherches fondamentales que de celui des applications. Les graphes permettent de manipuler plus facilement des objets et leurs relations avec une représentation graphique naturelle. L'ensemble des techniques et outils mathématiques mis au point en théorie des graphes permettent de démontrer facilement des propriétés et d'en déduire des méthodes de résolution.

Dans ce chapitre, nous avons présenté que quelques éléments et notions de base de la théorie des graphes, celles qui vont nous servir de mieux appréhender la suite de notre travail. Nous pouvons retenir de ce chapitre la possibilité de représenter une image par un graphe de similarité ε -voisinage dans le but d'effectuer autrement des opérations de traitement d'images. Quelques uns de ces traitements feront l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 2

Opérateurs définis sur des graphes

1. introduction

Nous allons, dans ce chapitre, nous atteler à étudier quelques opérateurs définis sur les graphes comme les opérateurs gradient et Laplacien. Ces opérateurs vont nous servir d'une part d'aborder quelques éléments de traitement d'images basées sur la morphologie mathématique sous un autre angle qui est celui des équations différentielles partielles (EDP) définies sur des graphes et décrire, d'autre part, une méthode de segmentation d'images basée sur une version discrète définie sur des graphes du modèle de Chan et Vese.

2. Construction de graphe pondéré sur une image

De manière générale, les graphes qu'on utilise pour représenter des images sont des graphes simples (sans arêtes multiples et sans boucles), non orientés et pondérés.

A partir d'une image I , on peut construire donc un graphe pondéré $G = (V, E, w)$.

Ce graphe est composé d'un ensemble fini $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de n sommets qui sont associés soit aux pixels de l'image I , soit aux régions issues de la partition de l'image I lors de la construction d'un graphe d'adjacence des régions (RAG).

Il est aussi composé d'un ensemble fini $E \subset V \times V$ d'arêtes qui est défini selon le type de graphe construit sur l'image (complet, ε -voisinage, k plus proches voisins).

Ce graphe est pondéré si on lui associe une fonction poids $W: E \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Cette fonction de pondération est appliquée à l'ensemble des arêtes E telle que pour une arête $uv \in E$:

$$W_{uv} = W_{vu}$$

et

$$W_{uv} \begin{cases} > 0 & \text{si } vu \in E \\ = 0 & \text{si } uv \notin E \end{cases} \quad (2.1)$$

On définit une fonction $f: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ à valeurs réelles sur les sommets du graphe G .

Cette fonction f attribue un vecteur $f(v)$ à chaque sommet $v \in V$. Elle peut être considérée comme un vecteur colonne $f(v) = (f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))^T$.

Cette fonction appartient à un espace de Hilbert de fonctions à valeurs réelles sur les sommets V du graphe G et dans le quel on peut définir un produit scalaire :

$$\langle f(u), h(u) \rangle_{\mathcal{H}(V)} = \sum_{u \in V} f(u)h(u) \quad (2.2)$$

et une norme L_2 telle que :

$$\|f(u)\|_2 = \sqrt{\langle f(u), f(u) \rangle} = (\sum_{u \in V} |f(u)|^2)^{1/2} \quad (2.3)$$

3 .Fonctions définies sur des graphes

On peut également définir une fonction $F(uv)$ à valeur réelle sur chaque arête $uv \in E$. Cette fonction appartient également à l'espace de Hilbert sur le quel, on peut définir un produit scalaire et une norme L_2 tels que :

$$\langle F(uv), H(uv) \rangle = \sum_{u \in V} \sum_{v \sim u} F(uv)H(uv) \quad (2.4)$$

$$\|F\|_2 = \sqrt{\langle F(uv), F(uv) \rangle} = (\sum_{uv \in E} |F(uv)|^2)^{1/2} \quad (2.5)$$

Remarque : La notation $v \sim u$ signifie que les sommets u et v sont adjacents, c'est-à-dire que le sommet appartient au voisinage de u ($v \in N(u)$).

D'une manière générale, on peut définir les normes \mathcal{L}_p pour $f(u)$ et $F(uv)$:

$$\|f\|_p = \begin{cases} (\sum_{u \in V} |f(u)|^p)^{\frac{1}{p}} & \text{pour } 1 \leq p < \infty \\ \max_{u \in V} (|f(u)|) & \text{pour } p = \infty \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\|F\|_p = \begin{cases} (\sum_{uv \in E} |F(uv)|^p)^{\frac{1}{p}} & \text{pour } 1 \leq p < \infty \\ \max_{uv \in E} (|F(uv)|) & \text{pour } p = \infty \end{cases} \quad (2.7)$$

4. Opérateur de différence

La plus part des opérateurs utilisés en mathématiques ainsi que dans la théorie des graphes sont définis à partir de l'opérateur différence. Cet opérateur permet en particulier de définir les versions discrètes des opérateurs gradient et Laplacien sur des graphes [16,17].

Rappelons que l'opérateur de différence d'une fonction continue $f(x)$ en un point x est définie par :

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.8)$$

Où Δx est un accroissement très petit et $x + \Delta x$ un point voisin de x .

Par analogie, on peut définir l'opérateur différence sur un sommet $u \in V$ du graphe en fonction d'un sommet voisin v lié à u selon une arête $uv \in E$ par :

$$(d_w f)(uv) = \frac{f(v) - f(u)}{h_{uv}} \quad (2.9)$$

Où h_{uv} est un pas d'échantillonnage qui est lié au poids w_{uv} entre les sommets u et v de V , tel que :

$$h_{uv} = \frac{1}{\sqrt{w_{uv}}} \quad (2.10)$$

La relation (2.9) peut être réécrite comme suit :

$$(d_w f)(uv) = \sqrt{w_{uv}} (f(v) - f(u)) \quad (2.11)$$

Notons que d'autres formulations de l'opérateur de différence ont été proposées dans [7] :

$$(d_w^+ f)(uv) = \sqrt{w_{uv}} \max(f(v), f(u) - f(v)) \quad (2.12)$$

$$(d_w^- f)(uv) = \sqrt{w_{uv}} (f(u) - \min(f(u), f(v))) \quad (2.13)$$

De même, la dérivée d'une fonction continue est approximée par une différence :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \simeq \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \quad (2.14)$$

Par analogie, l'opérateur dérivé sur un sommet u est appliquée à une arête $uv \in E$ d'un graphe peut être écrite [7]:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial uv} \right|_u = \partial_v f(u) = (d_w f)(uv) \quad (2.15)$$

avec :

$$\begin{aligned} \partial_v f(u) &= -\partial_u f(v) \\ \partial_v f(u) &= 0 \text{ si } v = u \text{ ou } f(v) = f(u) \end{aligned} \quad (2.16)$$

On peut également définir l'opérateur adjoint noté d_w^* d'une fonction F en un sommet $u \in V$ par [16,17]:

$$(d_w^* F)(u) = \sum_{v \sim u} \sqrt{w_{uv}} (F(vu) - F(uv)) \quad (2.17)$$

5. Opérateur gradient

Le gradient est une généralisation de la notion de dérivée pour une fonction à plusieurs variable. C'est une grandeur vectorielle indiquant la façon dont une grandeur physique varie dans l'espace. En mathématique, le gradient est un vecteur représentant la variation d'une fonction par rapport à la variation de ses différents paramètres

Le gradient est très utilisé dans divers domaines tels que l'optimisation et la résolution d'équations aux dérivées partielles. En traitement d'images, le gradient est utilisé pour mesurer les variations de luminance et à la détection des contours d'objets.

Etant donné qu'une fonction f définie sur chaque sommet $u \in V$ d'un graphe G peut être considérée comme une fonction à n variables, on peut alors définir le gradient de la fonction $f(u)$.

Ainsi, l'opérateur gradient pondéré noté $(\nabla_w f)(u)$ d'une fonction f en un sommet $u \in V$ est défini comme étant le vecteur de toutes les différences pour l'ensemble des arêtes de E .

$$(\nabla_w f)(u) = (d_w f)(uv)_{uv \in E}^T \quad (2.18)$$

Comme pour une fonction continue, ce gradient $(\nabla_w f)(u)$ permet de mesurer les fluctuations de la fonction $f(u)$ sur chaque sommet u du graphe. Ces variations sont quantifiées par la norme du gradient.

D'une manière générale, les p . norme du gradient $(\nabla_w f)(u)$ sont données par :

$$\|(\nabla_w f)(u)\|_p = [\sum_{v \sim u} w_{uv}^{p/2} |f(v) - f(u)|^p]^{1/p} \quad (2.19)$$

pour $0 < p < +\infty$

$$\|(\nabla_w f)(u)\|_\infty = \max_{v \sim u} (\sqrt{w_{uv}} |f(v) - f(u)|) \quad (2.20)$$

pour $p = \infty$

L'opérateur défini précédemment en un sommet $u \in V$ prend en considération que le voisinage $\mathcal{N}(u)$ de u . C'est donc un opérateur local. De plus ce sont des gradients pondérés symétriques. D'autres types de gradients pondérés directionnels ont été ainsi définis afin de prendre en compte les interactions non locales entre les données tels que [7] :

$$\|(\nabla_w^+ f)(u)\|_p = [\sum_{v \in V} w_{uv}^{p/2} |\max(0, f(v) - f(u))|^p]^{1/p} \quad (2.21)$$

$$\|(\nabla_w^- f)(u)\|_p = [\sum_{v \in V} w_{uv}^{p/2} |\min(0, f(v) - f(u))|^p]^{1/p} \quad (2.22)$$

$$\|(\nabla_w^+ f)(u)\|_\infty = \max_{v \in V} \sqrt{w_{uv}} |\max(0, f(v) - f(u))| \quad (2.23)$$

$$\|(\nabla_w^- f)(u)\|_\infty = \max_{v \in V} \sqrt{w_{uv}} |\min(0, f(v) - f(u))| \quad (2.24)$$

Remarque : Le gradient ne dépend pas de la structure du graphe, par conséquent, il aura toujours la même expression quelles que soient les données représentées par le graphe.

6. Opérateur p -Laplacien

L'opérateur Laplacien, est un opérateur différentiel défini par l'application de l'opérateur gradient suivi de l'application de l'opérateur divergence. Il apparaît dans la formulation mathématique de nombreuses disciplines. On le trouve, par exemple, dans les équations aux dérivées partielles telles que l'équation de Laplace et l'équation de la chaleur.

Le Laplacien d'une fonction $f(x)$ est définie comme suit :

$$\Delta f(x) = \nabla^2 f(x) = \nabla(\nabla f(x)) = \text{div}(\nabla(f(x))) \quad (2.25)$$

Cet opérateur a été également défini pour une fonction $f(u)$ définie sur chaque nœud $u \in V$ d'un graphe G .

Ainsi, l'opérateur p -Laplacien pondéré isotrope est défini à partir de l'opérateur de différence (2.9) et de son adjoint (2.17) [17, 18].

$$\Delta_{w,p}^i f = d_w^* (\|\nabla_w f\|_2^{p-2} d_w f) \quad (2.26)$$

L'expression de cet opérateur en un sommet $u \in V$, pour la fonction f prend la forme suivante:

$$\Delta_{w,p}^i f(u) = \sum_{v \sim u} \sqrt{w_{uv}} \left(\frac{(d_w f)(vu)}{\|\nabla_w f(v)\|_2^{2-p}} - \frac{(d_w f)(uv)}{\|\nabla_w f(u)\|_2^{2-p}} \right) \quad (2.27)$$

$$= \sum_{v \sim u} w_{uv} \left(\frac{f(u) - f(v)}{\|\nabla_w f(v)\|_2^{2-p}} - \frac{f(v) - f(u)}{\|\nabla_w f(u)\|_2^{2-p}} \right) \quad (2.28)$$

$$= \sum_{v \sim u} w_{uv} \left(\|\nabla_w f(v)\|_2^{p-2} + \|\nabla_w f(u)\|_2^{p-2} \right) (f(v) - f(u)) \quad (2.29)$$

À partir du p -Laplacien de l'équation (2.26), on peut définir le p -Laplacien pondéré anisotrope $\Delta_{w,p}^a$ tel que :

$$\Delta_{w,p}^a f = d_w^* (|d_w f|^{p-2} d_w f) \quad (2.30)$$

Le symbole $|\cdot|$ désigne la valeur absolue.

Comme pour le p -Laplacien isotrope (2.26), nous pouvons déduire l'expression de l'opérateur de p -Laplacien anisotrope en un sommet $u \in V$ à l'aide la définition de la différence pondérée et de son adjoint.

$$\begin{aligned} (\Delta_{w,p}^a f)(u) &= \sum_{v \sim u} \sqrt{w_{uv}} \left(\frac{(d_w f)(vu)}{|(d_w f)(vu)|^{2-p}} - \frac{(d_w f)(uv)}{|(d_w f)(uv)|^{2-p}} \right) \\ &= \sum_{v \sim u} w_{uv}^{\frac{p}{2}} \left(\frac{(f(u) - f(v))}{|f(u) - f(v)|^{2-p}} - \frac{(f(v) - f(u))}{|f(v) - f(u)|^{2-p}} \right) \\ &= \sum_{v \sim u} w_{uv}^{\frac{p}{2}} (f(u) - f(v)) |f(u) - f(v)|^{p-2} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Les p -Laplaciens isotrope et anisotrope peuvent être obtenus à partir d'une formulation plus générale.

$$\Delta_{w,p,q}^* f = d_w^* (\|\nabla_w f\|_q^{p-q} |d_w f|^{q-2} d_w f) \quad (2.32)$$

Avec $0 < p < +\infty$. et $0 < q < +\infty$. tel que :

Avec les définitions de la différence et de l'adjoint, on peut déduire l'expression du p -Laplacien généralisé, en un sommet $u \in V$:

$$\begin{aligned}
(\Delta_{w,p,q}^* f)(u) &= \sum_{v \sim u} \sqrt{w_{uv}} (\|\nabla_w f(v)\|_q^{p-q} |(d_w f)(vu)|^{q-2}) (d_w f)(vu) \\
&\quad - \|\nabla_w f(u)\|_q^{p-q} |(d_w f)(uv)|^{q-2} (d_w f)(uv)) \\
&= \sum_{v \sim u} w_{uv}^{\frac{q}{2}} (\|\nabla_w f(v)\|_q^{p-q} (f(u) - f(v)) |f(u) - f(v)|^{q-2} \\
&\quad - \|\nabla_w f(u)\|_q^{p-q} (f(v) - f(u)) |f(v) - f(u)|^{q-2}) \\
&= \sum_{v \sim u} w_{uv}^{\frac{q}{2}} (\|\nabla_w f(v)\|_q^{p-q} + \|\nabla_w f(u)\|_q^{p-q}) \\
&\quad \cdot (f(u) - f(v)) |f(u) - f(v)|^{q-2} \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Remarque :

- Pour $q=2$, le p -Laplacien généralisé prend la forme du p -Laplacien isotrope.
- Pour $q = p$, le p -Laplacien généralisé équivalent au p -Laplacien anisotrope.
- Pour $q = p = 2$, le p -Laplacien généralisé et les p -Laplaciens isotrope et anisotrope ont la même expression, ils correspondent au Laplacien combinatoire.

7. Morphologie Mathématique sur graphes

La morphologie mathématique est une théorie d'analyse d'images élaborée par Matheron et de J. Serra en 1964. elle est fondée sur les concepts de géométries, de topologie, de théorie des probabilités et surtout sur la théorie des ensembles. La morphologie mathématique constitue une approche d'analyse d'images à part entière et peut être utilisée pour résoudre un grand nombre de problèmes de traitement d'images tels que le filtrage, l'analyse de texture et la segmentation d'images [19].

L'idée de base de la morphologie mathématique est de comparer les objets dans l'image à analyser à l'aide d'un autre objet de forme connue appelé élément structurant [20]. Ce dernier est une géométrie qui peut être un carré, un cercle, une croix ou un losange.... L'élément structurant est ainsi déplacé de façon à ce que son centre O passe par toutes les positions dans l'image à analyser. Pour chacune des positions de O , on se pose une

question relative à l'union ou à l'intersection de l'élément structurant avec les objets de l'image. L'ensemble des points correspondant à une réponse positive permet de construire une nouvelle image à partir de laquelle, on peut extraire une information.

Les deux opérations fondamentales en morphologie mathématique sont la dilatation et l'érosion. Elles constituent une base permettant de former de nombreuses autres opérations morphologiques telles que l'ouverture ou la fermeture [7].

7.1. Erosion et Dilatation des images binaires

L'érosion d'un ensemble A par un élément structurant B est définie à partir de la soustraction ensembliste de Minkowski, notée \ominus , sous la forme :

$$\varepsilon_B(A) = A \ominus B = \{s/N_s \subseteq A\} \quad (2.34)$$

Où N_s désigne la translation de l'élément structurant B centré au point $s/s \in A$.

La dilatation d'un ensemble A par un élément structurant B est définie à partir de la addition ensembliste de Minkowski, notée \oplus , sous la forme :

$$\delta_B(A) = A \oplus B = \{s/N_s \cap A \neq \emptyset\} \quad (2.35)$$

La dilatation s'exprime donc comme l'union des éléments structurant dont l'origine est déplacée à l'intérieur de A .

7.2. Erosion et Dilatation des images en niveaux de gris

Pour une image en niveaux de gris, l'érosion et la dilatation de l'image avec un élément structurant non planaire appelée « fonction structurante », définie sur un support $B \subset \mathbb{R}^2$ sont généralement formulées de la manière suivante :

$$\varepsilon_s(f)(x) = (f \ominus s)(x) = \inf\{f(x+y) - s(y)/y \in B\}, x \in \mathbb{R}^2 \quad (2.36)$$

$$\delta_s(f)(x) = (f \oplus s)(x) = \sup\{f(x-y) + s(y)/y \in B\}, x \in \mathbb{R}^2 \quad (2.37)$$

Le support de la fonction structurante s est un ensemble compact, symétrique, convexe tel que :

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in B \\ -\infty & \text{si } x \notin B \end{cases} \quad (2.38)$$

Dans ce cas, la fonction structurante est dite « planaire » et B devient un élément structurant comme dans le cas de la morphologie binaire. Ainsi, l'érosion et la dilatation de la fonction f par l'élément structurant B est donnée sous la forme suivante :

$$\varepsilon_B(f)(x) = (f \ominus B) = \inf\{f(x + y) / y \in B\}, x \in \mathbb{R}^2 \quad (2.39)$$

$$\delta_B(f)(x) = (f \oplus B) = \sup\{f(x - y) / y \in B\}, x \in \mathbb{R}^2 \quad (2.40)$$

En morphologie classique, l'érosion permet de réduire les pics et d'élargir les vallées. Elle tend à homogénéiser localement l'image, à l'assombrir et à étaler le bord des objets les plus sombres. Tandis que la dilatation comble les vallées et épaissit les pics. Elle homogénéise localement l'image, l'éclaircit et tend à faire disparaître les objets sombres.

7.3. Erosion et Dilatation à base des équations aux dérivées partielles

Des formulations alternatives basées sur des équations aux dérivées partielles (EDP) ont également été proposées pour décrire les opérateurs morphologiques d'érosion et de dilatation [21,22]. Ces formulations permettent de définir les opérations d'érosion et de dilatation d'une image f par un ensemble d'éléments structurants $B = \{x \in \mathbb{R}^2: \|x\|_p \leq 1\}$ par les EDP telles que :

$$\frac{\partial \delta(f)}{\partial t} = +\|\nabla \delta\|_q = +\|\nabla f\|_q \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \varepsilon(f)}{\partial t} = -\|\nabla \varepsilon\|_q = -\|\nabla f\|_q \quad (2.42)$$

Selon la norme du gradient, définie par des valeurs spéciales de q , on peut établir une équivalence avec l'élément structurant. Ainsi dans le cas de la dilatation, les éléments structurants pour différents valeurs de q sont:

$$q = 1, \quad \frac{\partial \delta(f)}{\partial t} = \|\nabla f\|_1 = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|, \quad B = \text{un carré} \quad (2.43)$$

$$q = 2, \quad \frac{\partial \delta(f)}{\partial t} = \|\nabla f\|_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}, \quad B = \text{un disque} \quad (2.44)$$

$$q = \infty, \quad \frac{\partial \delta(f)}{\partial t} = \|\nabla f\|_\infty = \max \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \right\}, \quad B = \text{un losange} \quad (2.45)$$

7.4. Erosion et Dilatation sur graphes

Les opérateurs de dilatation et d'érosion définies par les équations aux dérivées partielles ont permis d'appliquer des opérateurs morphologiques sur des données représentées par des graphes.

En effet, à partir des opérateurs différentiels directionnels dans les équations (2.41) et (2.42), on peut définir des versions discrètes des opérations d'érosion et de dilatation. Ces versions, définies sur graphes, peuvent s'exprimer à l'aide des équations aux différences partielles de la manière suivante [7].

Soit $G = (V, E, W)$ un graphe pondéré et f^0 une fonction initiale. Alors, la dilatation et l'érosion de la fonction f^0 sont

$$\frac{\partial \delta(f)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = +\|\nabla_w^+ f\|_q \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \varepsilon(f)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = -\|\nabla_w^- f\|_q \quad (2.47)$$

Les opérateurs ∇_w^+ et ∇_w^- correspondent aux gradients externe et interne pondérés (équations (2.21), (2.22), (2.23) et (2.24)).

La discrétisation des EDPs conduisent aux équations d'évolution suivantes :

$$\frac{f^{n+1}(u) - f^n(u)}{\Delta t} = +\|\nabla_w^+ f(u)\|_q \quad (2.48)$$

$$\frac{f^{n+1}(u) - f^n(u)}{\Delta t} = -\|\nabla_w^- f(u)\|_q \quad (2.49)$$

Selon la norme du gradient considéré, nous avons dans le cas de la dilatation les expressions suivantes :

$$\frac{f^{n+1}(u) - f^n(u)}{\Delta t} = \|\nabla_w^+ f^n(u)\|_1 = \sum_{v \sim u} \sqrt{w_{uv}} \max(0, f^n(v) - f^n(u)) \quad \text{pour } q=1 \quad (2.50)$$

$$\frac{f^{n+1}(u)-f^n(u)}{\Delta t} = \|\nabla_w^+ f^n(u)\|_2 = \sqrt{\sum_{v \sim u} w_{uv} \max(0, f^n(v) - f^n(u))^2} \quad \text{pour } q=2 \quad (2.51)$$

$$\frac{f^{n+1}(u)-f^n(u)}{\Delta t} = \|\nabla_w^+ f^n(u)\|_\infty = \max_{v \sim u} (\sqrt{w_{uv}} |\max(0, f^n(v) - f^n(u))|) \quad \text{pour } q = \infty \quad (2.52)$$

En choisissant la constante temporelle Δt égale à 1 et en considérant la norme ∞ , le schéma numérique précédent devient, pour un graphe non pondéré $G = (V, E, g_1)$ pour le quel $w_{uv} = 1$,

$$\begin{aligned} f^{n+1}(u) &= f^n(u) + \max_{v \sim u} \left(\max(0, f^n(v) - f^n(u)) \right) \\ f^{n+1}(u) &= f^n(u) + \max_{v \sim u} (f^n(v) - f^n(u)) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Ainsi, la valeur de la fonction f en un sommet u à l'itération $n + 1$ vaut

$$f^{n+1}(u) = \begin{cases} \max_{v \sim u} (f^n(v)) & \text{si } f^n(v) - f^n(u) > 0 \\ f^n(u) & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.54)$$

Ce qui permet de déduire, dans tous les cas, l'expression d'une dilatation définie sur un graphe

$$\delta^n f(u) = f^{n+1}(u) = \max_{v \sim u} (f^n(v), f^n(u)) \quad (2.55)$$

De la même manière, nous aboutissons à la formulation d'une érosion définie sur un graphe donnée comme suit:

$$\varepsilon^n f(u) = f^{n+1}(u) = \min_{v \sim u} (f^n(v), f^n(u)) \quad (2.56)$$

7.5. Ouverture et la fermeture morphologiques

L'ouverture et la fermeture sont des opérations morphologiques réalisées à partir des opérations élémentaires de dilatation et d'érosion. La manière la plus simple de générer les opérations d'ouverture et de fermeture est d'appliquer en série les opérations de dilatation et d'érosion. Ainsi, pour une fonction f l'opération d'ouverture $O^B(f)$ et la fermeture $F^B(f)$ par un élément structurant B sont définies par:

$$O^B(f) = \delta^B(\varepsilon^B(f)) \quad (2.57)$$

$$F^B(f) = \varepsilon^B(\delta^B(f)) \quad (2.58)$$

Appliqué sur une image binaire, l'ouverture a pour effet de supprimer les petits détails se trouvant à la périphérie des sous ensembles convexes,

tandis que la fermeture agit d'une manière duale à l'ouverture en bouchant les parties du fond de l'image ne contenant pas l'élément structurant.

Concernant une image en niveaux de gris, l'ouverture a tendance à supprimer les pics et à préserver les vallées. Elle homogénéise les régions locales de l'image mais préserve les objets sombres. Par contre, la fermeture comble les vallées et éclaircit l'image.

L'ouverture et la fermeture sont souvent combinées pour effectuer un filtrage de l'image.

L'utilisation de la formulation par des EDPs des opérateurs morphologiques de l'érosion et de la dilatation nous permettent également d'exprimer et d'adapter les opérateurs d'ouverture et de fermeture à des données représentées sur des graphes.

7.6. Gradient morphologique

En traitement d'image un intérêt particulier est porté aux contours des objets qui donnent une information riche sur le contenu de l'image. Un détecteur de contour vise à mettre en évidence les hautes fréquences spatiales dans l'image. Ils correspondent dans la plus part des cas à des opérateurs gradient ou Laplacien. Les détecteurs basés sur la morphologie mathématique entrent dans la catégorie des détecteurs de contours non linéaires.

Le gradient morphologique est défini comme la différence arithmétique entre la dilatation et l'érosion d'une image f par un élément structurant B [23]. Il donné par :

$$|\nabla(f)| = \delta^B(f) - \varepsilon^B(f) \quad (2.59)$$

Le gradient s'interprète comme l'étendue des niveaux de gris, c'est-à-dire la différence entre les niveaux de gris max et min.

Le gradient peut être également obtenu par la différence entre le dilaté de l'image elle-même :

$$|\nabla f^+| = \delta^B(f) - f \quad (2.60)$$

Ou par la différence entre l'image et son érodée :

$$|\nabla f^-| = f - \varepsilon^B(f) \quad (2.61)$$

Le Laplacien morphologique $|\Delta f|$ peut par contre s'exprimer par la différence entre le module du gradient par dilatation et celui du gradient par érosion :

$$|\Delta f| = |\nabla f^+| - |\nabla f^-| \quad (2.62)$$

L'utilisation de la formulation par des EDPs des opérateurs morphologiques de l'érosion et de la dilatation nous permettent de proposer d'autres opérateurs gradient pour des données représentées sur des graphes.

7.7. Chapeau haut de forme

Le chapeau haut de forme est une autre transformation morphologique qui, dans le cas traditionnel, permet de retrouver les informations éliminées par l'ouverture ou la fermeture morphologique. On définit la transformation chapeau haut de forme blanc comme la différence algébrique entre la fonction de départ f et l'ouverture $O^B(f)$ tel que :

$$Cb(f) = f - O^B(f) \quad (2.63)$$

On définit la transformation duale chapeau haut de forme noire comme la différence algébrique entre la fermeture $F^B(X)$ et la fonction de départ f comme :

$$Cn(f) = F^B(f) - f \quad (2.64)$$

Nous proposons à partir de cet opérateur une nouvelle opération morphologique sur graphe et ceci grâce à l'utilisation des EDP dans la formulation de l'opérateur de fermeture sur graphes.

8. Segmentation d'images par le modèle de Chan et Vese définie sur des graphes

La segmentation est une opération très importante et très utilisée en traitement des images. Elle permet l'identification ou l'extraction des différents objets ou régions qui composent l'image de manière à faciliter son interprétation. Formellement, la segmentation est définie comme l'opération de partitionnement de l'image en régions homogènes. Parmi la panoplie de méthodes développées, l'approche basée sur les contours actifs est

actuellement très attractive. Le principe de cette technique consiste à faire évoluer un contour Γ de telle sorte qu'après convergence, il réalise une partition de l'image initiale f^0 en deux régions ayant des caractéristiques différentes. Ce problème est généralement formalisé comme un problème variationnel décrit par un modèle mathématique. Parmi les modèles existants celui de Chan et Vese (CV) est sans doute le plus populaire. Il permet de segmenter l'image en deux régions en se basant sur la minimisation de la fonctionnelle énergie suivante [24]:

$$E(\Gamma) = \int_{\Omega_1} (f^0(x) - c_1)^2 dx + \int_{\Omega_2} (f^0(x) - c_2)^2 dx + \nu L(\Gamma) \quad (2.65)$$

où c_1 et c_2 sont respectivement les moyennes des régions extérieure (Ω_1) et intérieure (Ω_2) de l'image délimitée par la courbe Γ . Le dernier terme de cette énergie est lié à la longueur de la courbe Γ , ν étant une pondération. Cette énergie est généralement minimisée en utilisant la formulation level sets qui conduit à une équation aux dérivées partielles (EDP) dérivant du principe d'Euler-Lagrange [25].

Le modèle CV peut être reformulé comme suit [24]:

Soit $l(x): \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow [0,1]$ une fonction indicatrice ou fonction "level" définie à partir de la courbe Γ telle que:

$$l(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_1 \\ 0 & \text{si } x \in \Omega_2 \end{cases} \quad (2.66)$$

Dans ce cas, la longueur de la courbe $L(\Gamma)$ peut être exprimée par la norme du gradient de la fonction $l(x)$:

$$L(\Gamma) = \int_{\Omega} \|\nabla l(x)\|_1 \quad (2.67)$$

En introduisant la fonction level set dans l'équation (2.65), le modèle de CV défini dans le domaine continu s'exprime alors avec la fonctionnelle suivante

$$E(l, f^0, \lambda) = \int_{\Omega} \|\nabla l(x)\|_1 + \lambda \int_{\Omega} (l(x)(c_1 - f^0(x))^2 + (1 - l(x))(c_2 - f^0(x))^2) dx \quad (2.68)$$

λ étant un terme de pondération porté sur le premier terme de l'équation (2.65).

Le problème de la segmentation par le modèle de CV revient donc à chercher la fonction $l(x)$ qui minimise la fonctionnelle (2.68).

En négligeant les termes qui ne dépendent pas de la fonction $l(x)$, la fonctionnelle précédente peut être réécrite d'une manière plus condensée:

$$E(l, f^0, \lambda) = \int_{\Omega} \|\nabla l\|_1 + \lambda \int_{\Omega} g(f^0)(x)l(x) dx \quad (2.69)$$

avec

$$g(f^0) = (c_1 - f^0)^2 - (c_2 - f^0)^2 \quad (2.70)$$

Ce modèle correspond à un cas particulier défini dans le domaine continu du modèle variationnel discret. La version discrète définie sur des graphes du modèle de CV, pour une fonction initiale l est [25]:

$$\min_{l:V \rightarrow \{0,1\}} \{\mathcal{E}(l, f^0, \lambda) = \mathcal{R}_{w,1}^*(l) + \lambda g(f^0)l\} \quad (2.71)$$

avec

$$\mathcal{R}_{w,1}^*(l) = \sum_{u \in V} \|\nabla_w l(u)\|_1 \quad (2.72)$$

Sa résolution peut s'effectuer de la manière suivante:

$$\frac{\partial \mathcal{E}(l, f^0, \lambda)}{\partial f(u)} = 0 \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}(l, f^0, \lambda)}{\partial l(u)} = \frac{\partial}{\partial m(u)} (\mathcal{R}_{w,1}(l) + \lambda g(f^0)l) \quad (2.74)$$

$$= \frac{\partial}{\partial l(u)} (\mathcal{R}_{w,1}(l)) + \lambda g(f^0) \quad (2.75)$$

comme

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{w,1}(l)}{\partial l(u)} = (\Delta_{w,1}^a l)(u) \quad (2.76)$$

on déduit:

$$\frac{\partial \mathcal{E}(l, f^0, \lambda)}{\partial l(u)} = (\Delta_{w,1}^a l)(u) + \lambda g(f^0)(u) \quad (2.77)$$

En utilisant l'expression du 1-Laplacien anisotrope (Eq.2.25), nous obtenons l'équation d'Euler-Lagrange suivante

$$\sum_{v \sim u} \sqrt{w_{uv}} (l(u) - l(v)) |l(u) - l(v)|^{-1} + \lambda g(f^0)(u) = 0 \quad (2.78)$$

Ce qui est équivalent au système suivant

$$l(u) = \frac{\sum_{v \sim u} \sqrt{w_{uv}} |l(u) - l(v)|^{-1} l(v) - \lambda g(f^0)(u)}{\sum_{v \sim u} \sqrt{w_{uv}} |l(u) - l(v)|^{-1}} \quad (2.79)$$

L'approximation de la solution du système (2.74) en un sommet $u \in V$ est donnée par le schéma itératif suivant:

$$\begin{cases} l^{n+1}(u) = \frac{\sum_{v \sim u} \sqrt{w_{uv}} |l^n(u) - l^n(v)|^{-1} l^n(v) - \lambda g(f^0)(u)}{\sum_{v \sim u} \sqrt{w_{uv}} |l^n(u) - l^n(v)|^{-1}} \\ l^{(n)}(u) = m(u) \quad \text{pour } n = 0 \end{cases} \quad (2.80)$$

où $m: V \rightarrow \{0,1\}$ est une fonction binaire représentant un marqueur initial ou une courbe initiale.

La version discrète définie sur des graphes du modèle de CV peut être finalement résolu via l'algorithme ci-dessous. Notons que la convergence de l'algorithme est obtenue après un nombre N d'itérations ou quand

$$\|l^{n+1} - l^n\|_2 < \tau$$

Entrées : un graphe pondéré $G=(V,E,W)$, un contour initial $m: V \rightarrow \{0,1\}$, une fonction initiale $l: V \rightarrow [0,1]$

Données : une fonction $f^0: V \rightarrow \mathbb{R}$.

Résultat : une fonction $l: V \rightarrow \{0,1\}$ approximant le système (2.72)

1 **pour tous les** sommets $u \in V$ **faire** $l^{(0)}(u) = m(u)$

2 $c_1 = \text{moyenne}(f^0)$ si $m = 1$; $c_2 = \text{moyenne}(f^0)$ si $m = 0$

3 **tant que** $n \neq N$ ou $\|l^{n+1} - l^n\|_2 < \tau$ **faire**

4 **Pour tous les** sommets $u \in V$ **faire**

5 $\beta_{uv}^{f^n} = c \sqrt{w_{uv}} |l^n(u) - l^n(v)|_\epsilon^{-1}$

6 $\gamma^{l^n}(u) = \max \left(\min \left(\frac{\sum_{v \sim u} \beta_{uv}^{f^n} l^n(v) - \lambda ((c_1 - f^0(u))^2 - (c_2 - f^0(u))^2)}{\sum_{v \sim u} \beta_{uv}^{f^n}}, 1 \right), 0 \right)$

7 $l^{n+1}(u) = \gamma^{l^n}(u)$

8 $c_1 = \text{moyenne}(f^0)$ si $\gamma^{l^n} \leq 0.5$; $c_2 = \text{moyenne}(f)$ si $\gamma^{l^n} > 0.5$

9 **Pour tous les** sommets $u \in V$ **faire**

Si $m(u) > \frac{1}{2}$ **alors** $m(u) = 1$ **sinon** $m(u) = 0$

Algorithme 1 : Algorithme discret approximant le modèle de CV .

9. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une autre manière de définir les opérateurs gradient et Laplacien d'une image, représenté par un graphe pondéré. Celle-ci est basée sur la différence pondérée qui est considérée comme la version discrète définie sur un graphe de l'opérateur de dérivée. À partir de ces opérateurs, des versions discrètes des opérations morphologiques d'érosion et de dilatation définies sur graphes ont été présentées. Ces deux opérations, décrits par des équations aux différences partielles, sont exprimés dans le cas discret à l'aide des équations aux dérivées partielles. À partir de ces deux opérateurs, nous avons proposé d'autres opérateurs morphologiques comme l'ouverture, la fermeture, le gradient morphologique et le chapeau haut de forme. D'autre part, une méthode de segmentation d'images basée sur une version discrète du modèle de Chan et Vese définie sur des graphes a été présentée. L'algorithme correspondant offre un moyen plus simple pour segmenter un image contrairement à l'approche classique des level sets.

Chapitre 3

Tests et Résultats

1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter les résultats des différents opérateurs définis sur les graphes et qui ont été présentés dans le chapitre précédent. Ces opérateurs correspondent principalement au gradient, aux opérateurs morphologiques telles que l'érosion, la dilatation, l'ouverture, la fermeture, gradient et chapeau haut de forme. Les résultats de la segmentation basée sur la version discrète définie sur graphes du modèle de Chan et Vese seront également présentés.

Ces résultats seront confrontés avec ceux obtenus avec les mêmes opérateurs mais qui font appel des traitements classiques.

2. Préambule

Pour évaluer les résultats des différents opérateurs définis sur graphes, nous avons réalisé certains tests sur quatre images. Ces images de tailles (128×128) sont présentées sur la figure (3.1). Ces images seront représentées par des graphes de similarité de type ε -voisinage. Les sommets des graphes correspondent aux pixels ou aux régions dans le cas des traitements sur les RAG. Dans le cas où les sommets des graphes sont des pixels, les attributs des nœuds correspondent aux niveaux de gris. Dans le cas d'un RAG, les attributs associés aux sommets correspondent aux valeurs moyennes des régions. La figure (3.2) montre les images RAG correspondants aux images tests de la figure (3.1). Rappelons que ces images RAG ont été obtenues après application de l'algorithme (LPE) ligne de partage des eaux. Le nombre de régions dans chaque image sont respectivement 827, 840, 789 et 774.

Les différents traitements définis sur graphes sont réalisés en utilisant des graphes pondérés. Le poids des arêtes est déterminé par la relation suivante:

$$W_{uv} = \frac{1}{d(uv) + \sigma} \quad (3.1)$$

Où $d(uv)$ est la distance spatiale euclidienne entre les deux sommets u et v et $\sigma = 1$.

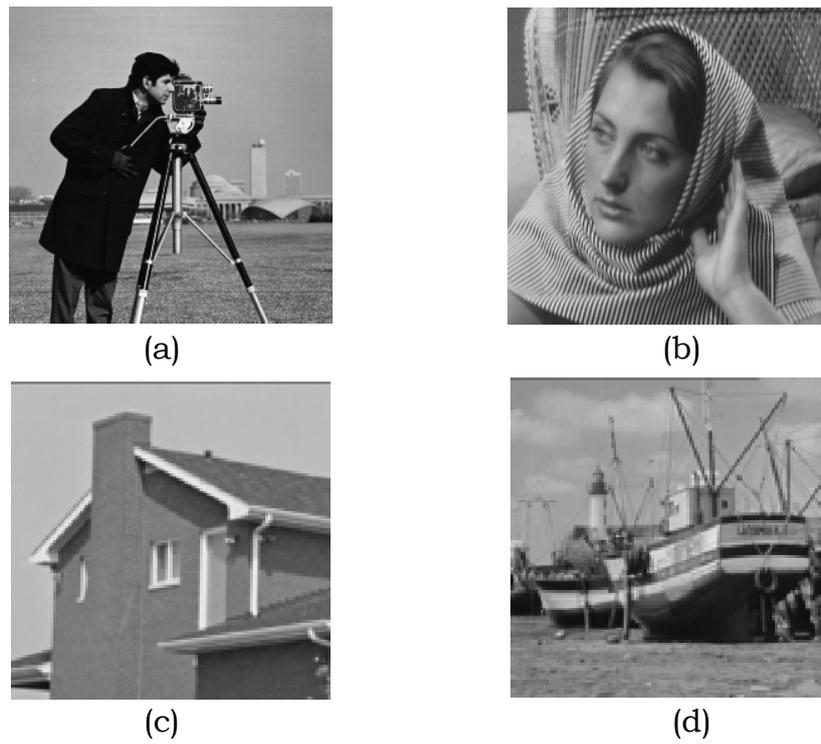


Figure 3.1: Images tests
 (a)Cameramen (b)Women (c)House (d) Boats

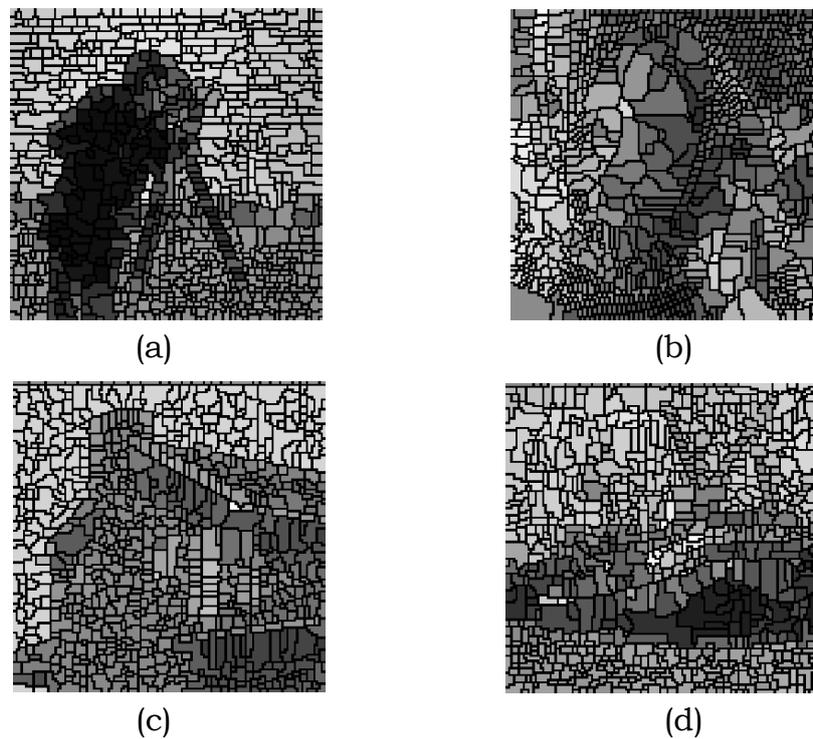


Figure 3.2: Images RAG des images de la figure (3.1)
 a)Cameramen (b)Women (c)House (d) Boats

Dans le cas où les sommets u et v sont des pixels de l'image, la distance $d(uv)$ est la distance euclidienne entre les positions de ces sommets dans l'image. Dans le cas où les sommets u et v sont des régions de l'image (RAG), la distance $d(uv)$ est la distance euclidienne entre les positions des centres de gravité des régions correspondantes.

Pour déterminer les sommets v connectés au sommet u dans le graphe de similarité ε -voisinage, nous devons déterminer le voisinage de celui-ci. Ce voisinage est défini par l'une des deux relations :

$$N(u) = \{v/v \in V \text{ et } \|f(u) - f(v)\|_2 \leq \varepsilon\} \quad (3.2)$$

$$N(u) = \{v/v \in V \text{ et } \|u - v\|_2 \leq \varepsilon\}$$

$\|f(u) - f(v)\|_2$ représente la distance radiométrique euclidienne entre les attributs des sommets u et v et $\|u - v\|_2$ la distance spatiale euclidienne entre leurs coordonnées.

3. Opérateur gradient

En principe le gradient est un outil permettant de détecter les zones de changement de luminosité dans une image.

Le gradient de l'image est l'opérateur de base pour l'extraction des contours de l'image. Le gradient classique d'une image f est défini par :

$$\nabla f = (G_x, G_y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) \quad (3.3)$$

C'est un vecteur caractérisé par un module $|\nabla f|$ et une direction \emptyset . Les expressions usuelles de ces grandeurs en norme euclidienne sont:

$$|\nabla f| = \sqrt{G_x^2 + G_y^2} \quad \text{et} \quad \emptyset = \text{Arg}(\nabla f) = \arctan\left(\frac{G_y}{G_x}\right) \quad (3.4)$$

Pratiquement, le gradient est obtenu par un produit de convolution de l'image par deux filtres permettant de détecter séparément les contours verticaux et horizontaux. Ces filtres sont représentés par des matrices, généralement, de taille (3x3) appelés masques. Les masques de l'opérateur de Sobel, que nous avons utilisés dans notre travail, sont définis comme suit:

$$G_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } G_y = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Quant au gradient défini sur graphe, il est donné par l'une des équations suivantes :

$$\|(\nabla_w f)(u)\|_p = \left[\sum_{v \sim u} w_{uv}^{p/2} |f(v) - f(u)|^p \right]^{1/p} \quad (3.5)$$

pour $0 < p < +\infty$

$$\text{et } \|(\nabla_w f)(u)\|_\infty = \max_{v \sim u} (\sqrt{w_{uv}} |f(v) - f(u)|) \quad (3.6)$$

pour $p = \infty$

Pour nos tests, nous avons utilisé la formule (3.6) avec une fonction poids w_{uv} définie par l'équation (3.1).

La figure (3.3) présente les résultats de l'application de l'opérateur gradient, classique et celui défini sur les graphes, sur les images tests de la figure 3.1.

Nous pouvons constater que les deux types de gradient donnent des résultats presque identiques. Ils permettent de mettre en évidence les contours de l'image. Cependant, grâce au poids des arrêtes, le gradient défini sur des graphes de ε -voisinage est plus marqué par rapport au gradient classique.

4. Opérateurs de Morphologie Mathématique

La morphologie mathématique offre un large panel d'opérateurs pour appréhender divers problèmes de traitement d'image. Les traitements morphologiques peuvent être également définis en terme d'opérations algébriques sur des ensembles ou en terme d'équations aux dérivées partielles (EDP).

Les deux opérateurs fondamentaux de la morphologie mathématique sont la dilatation et l'érosion. Ils sont habituellement formulés comme des opérations sur des ensembles ou des treillis et leurs implantations sont habituellement faites dans un cadre algébrique (discret) [24].

Dans cette section, nous appliquons les opérateurs de la morphologie mathématique (érosion, dilatation, fermeture, ouverture, gradient et chapeau haut de forme) sur les images la figure (3.1). Nous comparons ensuite leurs résultats avec ceux obtenus par les opérateurs morphologiques classiques.

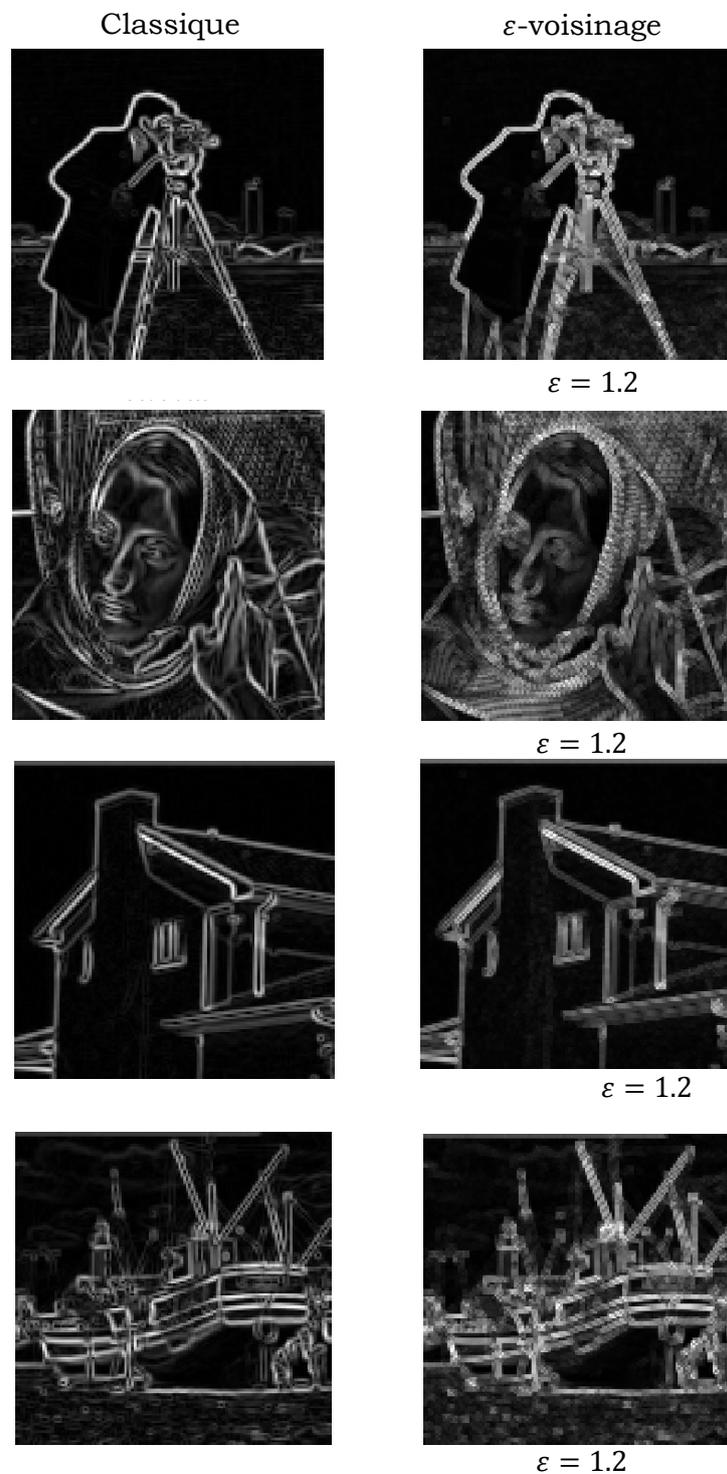


Figure 3.3 : Résultats de l'opérateur gradient classique et celui défini sur des graphes ε -voisinage

4.1. L'érosion et la Dilatation

Pour les opérateurs morphologiques classiques (planaire), la dilatation δ et l'érosion ε d'une image en niveaux de gris sont définies par

$$\delta_B(f) = (f \oplus B) \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_B(f) = (f \ominus B) \quad (3.8)$$

Dans la suite de ce chapitre, l'élément structurant B utilisé pour effectuer les opérateurs morphologiques classiques est un losange de paramètre $r = 1$, r étant la distance entre le centre de l'élément structurant et ses sommets.

Concernant les opérateurs morphologiques définis sur des graphes, la dilatation δ et l'érosion ε sont définies par les deux équations (2.32) et (2.33). Ces opérateurs morphologiques sont définies sur des graphes non pondérés de ε -voisinage.

Les figures (3.4) et (3.5) montrent respectivement les résultats de l'érosion et de la dilatation. La première ligne de ces figures correspond à l'érosion (dilatation) classique, la deuxième ligne à l'opérateur d'érosion (dilatation) définies sur des graphes de ε -voisinage

Nous remarquons visuellement que comme prévu, les opérateurs érosion et dilatation définis sur des graphes de ε -voisinage ont fournis les mêmes résultats que ceux obtenus avec les mêmes opérateurs classiques.

4.2. L'ouverture et la fermeture

L'ouverture est obtenue par l'application de l'opérateur érosion suivie de celle de l'opérateur dilatation avec le même élément structurant.

La fermeture est l'opération inverse de l'ouverture. Elle consiste en une dilatation suivie d'une érosion avec le même élément structurant.

La figure (3.6) montre des résultats de l'opérateur ouverture classique et celui défini sur des graphes de ε -voisinage.

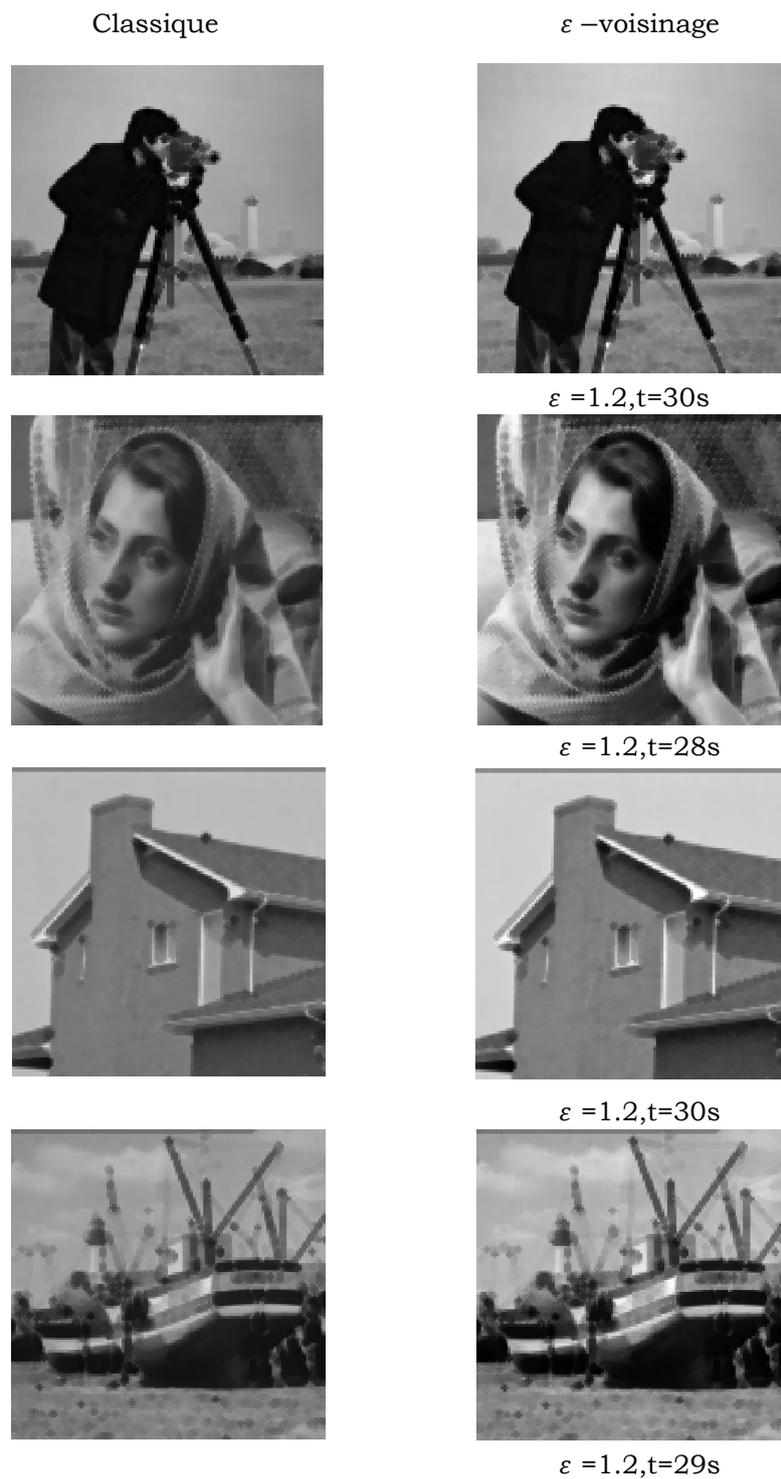


Figure 3.4 : Résultats de l'opérateur érosion classique et celui défini sur des graphes de ε -voisinage .

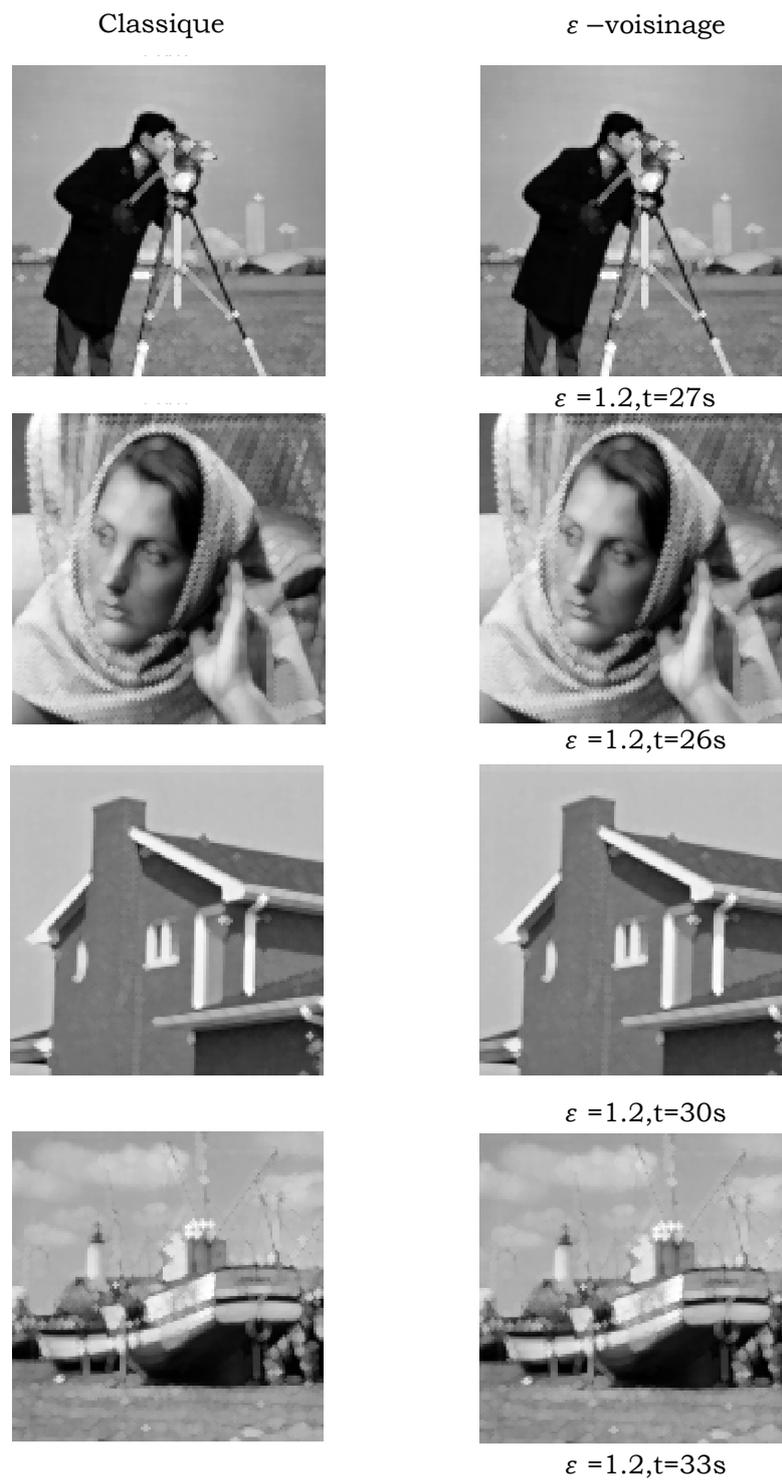


Figure 3.5 : Résultats de l'opérateur dilatation classique et celui défini sur des graphes de ε -voisinage

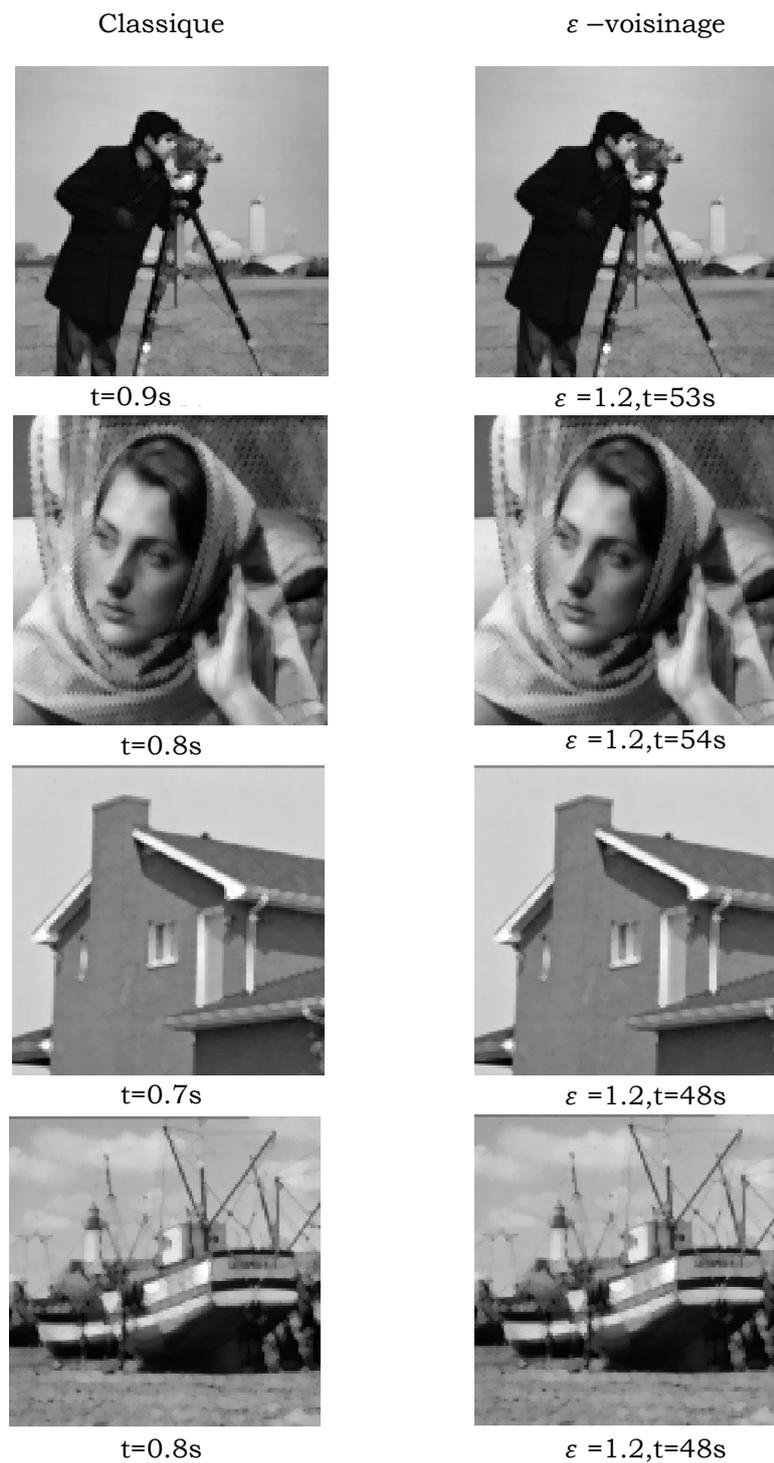


Figure 3.6 : Résultats de l'opérateur ouverture classique et celui défini sur des graphes de ε -voisinage

La figure (3.7) montre les résultats des opérateurs fermeture classique et celui défini sur des graphes de ε -voisinage.

Comme pour les opérateurs d'érosion et de dilatation, les opérateurs d'ouverture et de fermeture classiques et ceux définis sur des graphes ont donné pratiquement les mêmes résultats. Cependant les traitements définis sur des graphes de ε -voisinage sont coûteux en termes de temps de calcul comparativement aux traitements classiques.

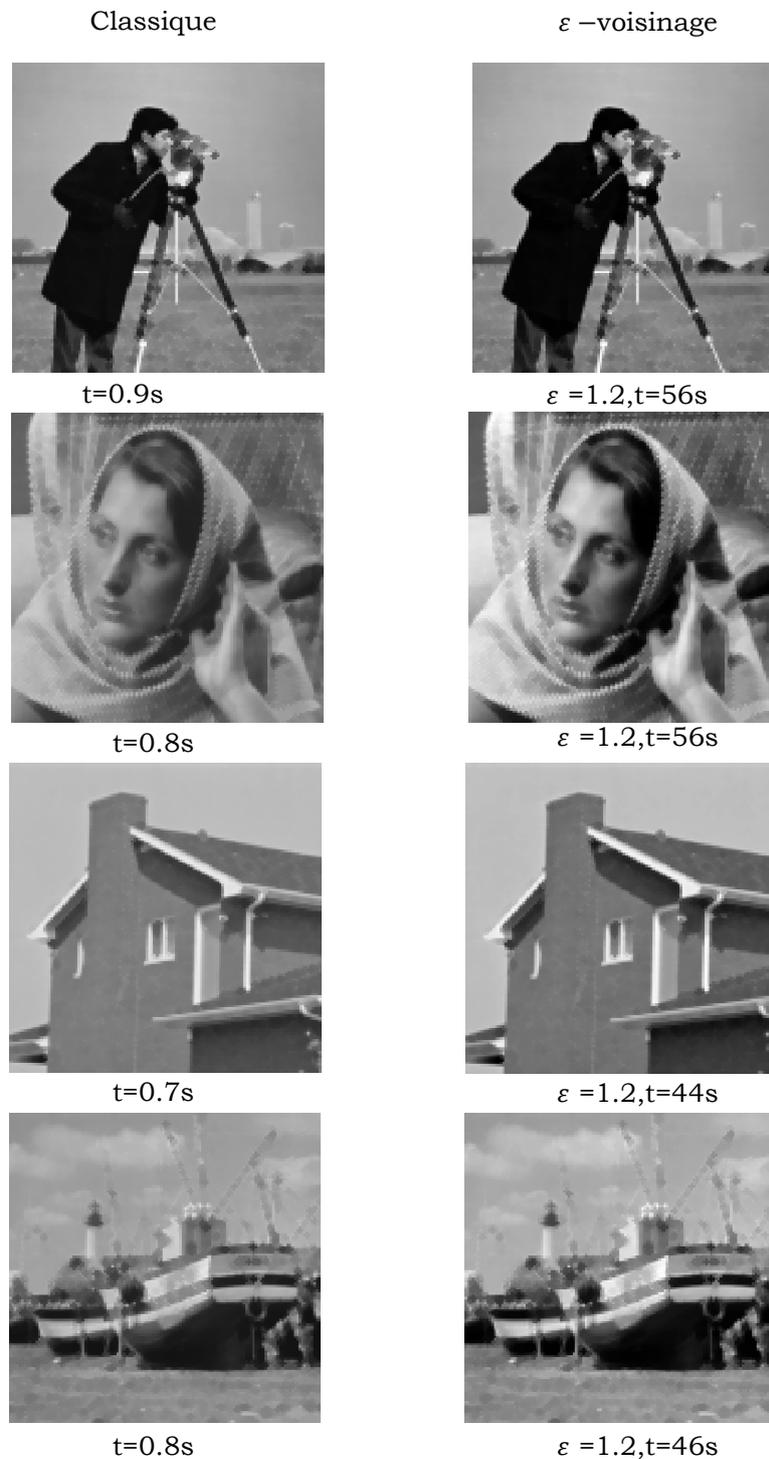


Figure 3.7 : Résultats d'un opérateur fermeture classique et celui défini sur des graphes de ε -voisinage

4.3. Gradient morphologique

La figure (3.8) montre les résultats de l'application des opérateurs de gradient et Laplacien morphologique définis dans le chapitre 2 sur l'image test "cameraman".

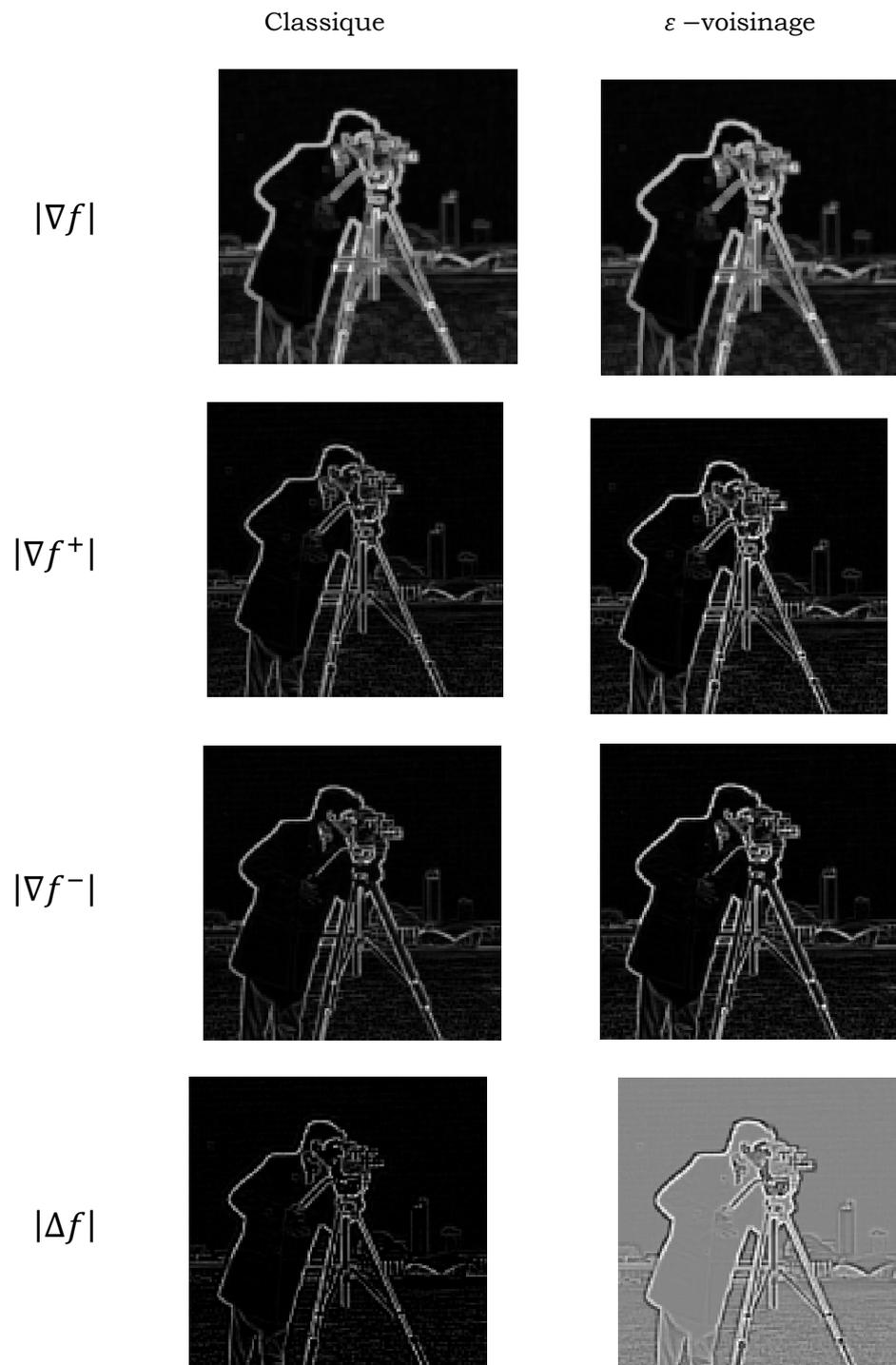


Figure 3.8 : Résultats des opérateurs gradient et Laplacien morphologique sur une image en niveaux de gris.

Les gradients morphologiques obtenus par les opérateurs classiques et ceux définis sur des graphes pondérés ont aboutis presque au même résultat. Cependant, la différence entre ces opérateurs est mise en évidence à travers l'opérateur Laplacien et chapeau de forme comme on peut le voir ci après.

4.4. Chapeau haut forme

La figure (3.9) montre les résultats de l'application des deux opérateurs (chapeau haut de forme blanc et chapeau haut de forme noire) sur l'image cameraman.

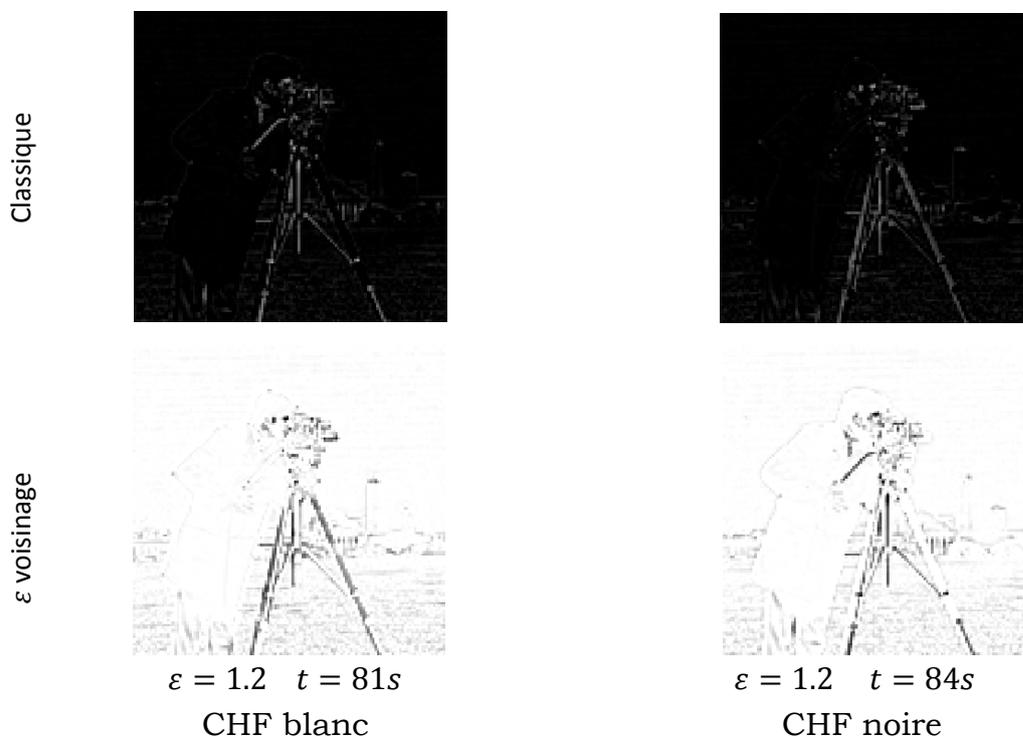


Figure 3.9 : Résultats de l'application des deux opérateurs chapeau haut forme (blanc et noire) sur l'image Cameraman.

5. Influence du paramètre ε

Pour effectuer les traitements définies sur des graphes pondérées de type ε -voisinage, on doit choisir la valeur de ε .

La figure (3.10) présente les résultats de l'application de l'opérateur gradient défini sur des graphes de ε -voisinage pour différentes valeurs de ε .

Nous pouvons constater que plus la valeur de ε augmente plus les lignes de fort gradient augmente, ce qui permet de détecter des contours plus épais, chose qu'on ne peut obtenir avec l'opérateur classique. Cependant le temps de calcul devient plus élevé ce ci s'explique par le fait que le nombre de nœuds voisins utilisés dans les traitements devient important.

Ainsi, pour réduire le temps de calcul, il est d'usage de réduire le nombre de nœuds. L'un des moyens pouvant atteindre cet objectif est d'utiliser un RAG. Le tableau (3.1) présente le temps de calcul du gradient avec la méthode classique et celle définie sur un graphe de ε -voisinage et sur un RAG. Il confirme le gain de temps apporté par le RAG.

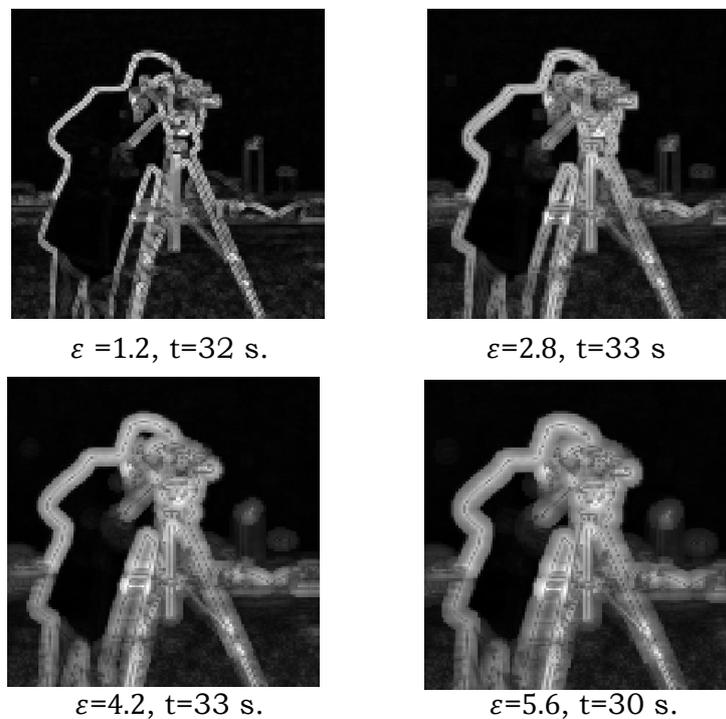


Figure 3.10 : Résultats de l'opérateur gradient défini sur des graphes de ε -voisinage.

| | Gradient classique | Gradient ε -voisinage | Gradient défini sur un RAG |
|-----------|--------------------|-----------------------------------|----------------------------|
| Image (a) | 9s | 32s | 1s |
| Image(b) | 8s | 33s | 1s |
| Image(c) | 7s | 32s | 1s |
| Image (d) | 7s | 31s | 1s |

Tableau 3.1 : Temps de calcul de l'opérateur gradient

6. Résultats de la segmentation

Il s'agit dans ce paragraphe de présenter les résultats de la segmentation d'images en niveaux de gris basée sur le modèle Chan et Vese et les graphes pondérés, décrite dans le chapitre 2.

La figure (3.11) montre le résultat de la segmentation d'une image en niveaux de gris. Le contour de l'objet ou de la région d'intérêt a été en partie correctement mis en évidence après quelques itérations. De plus, l'algorithme converge pratiquement vers le même contour final quelque soit la position du contour initial (Fig. 3.12), ce qui n'est pas le cas du modèle classique de Chan et Vese. Cependant le temps de calcul de l'algorithme reste tout de même assez élevé.

7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques résultats de l'application sur une image de l'opérateur gradient et des opérateurs de morphologie mathématique définis sur graphes. Ces derniers englobent la dilatation, l'érosion, l'ouverture, la fermeture, le gradient morphologique et chapeau haut de forme. Ces opérateurs morphologiques découlent de la formulation des deux opérateurs de base érosion et dilatation par des équations aux différences partielles définies sur des graphes.

Les résultats obtenus montrent que ces opérateurs aboutissent presque aux mêmes résultats que ceux obtenus avec les opérateurs classiques étant donné que les graphes considérés étaient non pondérés. Cependant, l'introduction d'un poids dans les traitements morphologiques aurait permis de capturer plus d'informations. Les traitements définis sur des graphes restent toute de même coûteux en termes de temps de calcul. L'utilisation des graphes d'adjacence de régions constitue une bonne alternative pour réduire les temps de calcul.

En plus de ces opérateurs, nous avons également présenté les résultats de la segmentation d'images en niveaux de gris basée sur la version discrète définie sur graphes du modèle de Chan et Vese. Ils montrent que; contrairement au modèle classique de Chan et Vese, la méthode converge

presque toujours vers le même contour quelque soit le contour initial et ceci à cause de l'aspect non local considéré par le graphe ε -voisinage représentant l'image.

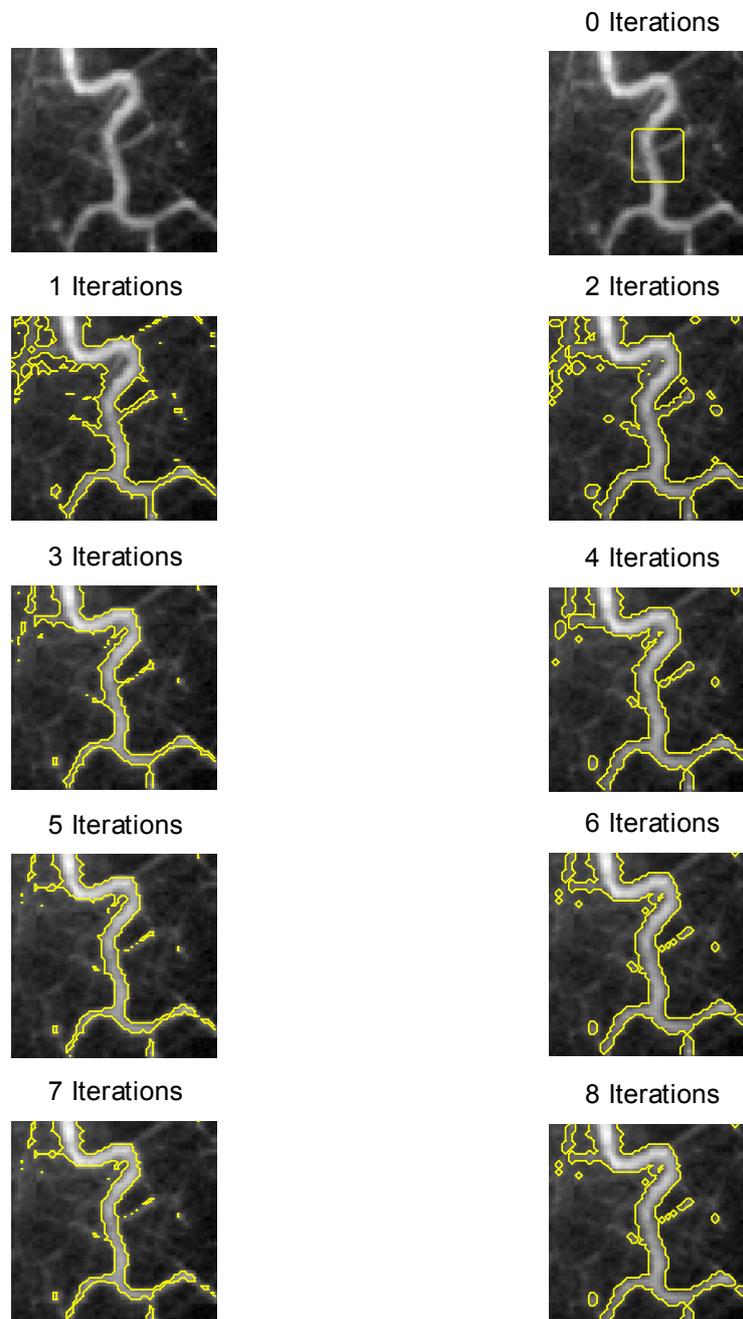


Figure 3.11: Résultat de la segmentation d'une image

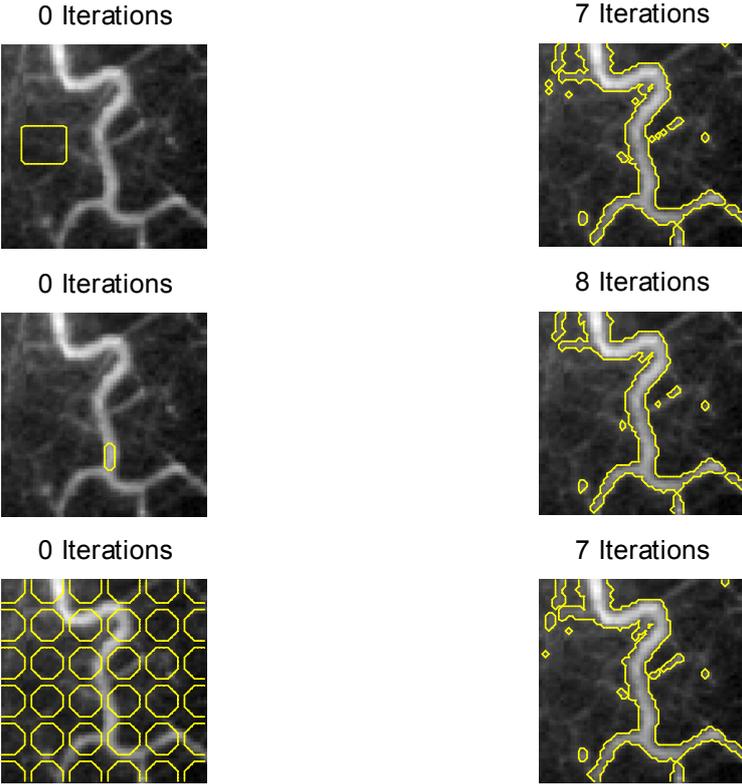


Figure 3.12: Résultat de la segmentation de l'image 3.11.a avec un autre contour initial

Conclusion générale

Conclusion générale

Nous avons présenté dans ce mémoire une autre approche pour définir des opérateurs bien connus en traitement d'images tels que le gradient, le Laplacien et les opérateurs morphologiques. Cette approche est basée sur la représentation d'une image par un graphe pondéré.

Le gradient est définie par une différence pondérée qui est considérée comme la version discrète définie sur un graphe de l'opérateur de dérivée. Les tests effectués ont montré que cet opérateur permet d'obtenir des contours bien marqués et plus épais contrairement au gradient classique.

A partir de ces opérateurs (gradient et Laplacien), des versions discrètes des opérations morphologiques d'érosion et de dilatation définies sur graphes sont décrits par des équations aux différences partielles qui, dans le cas discret, sont exprimés à l'aide des équations aux dérivées partielles. Des tests ont montré que ces opérateurs aboutissent presque aux mêmes résultats que opérateurs classiques car nous n'avons pas pris en compte le poids entre les nœuds du graphe. Cependant, l'introduction d'un poids dans les traitements morphologiques nous aurait permis de capturer plus d'informations donc aboutir à de meilleurs résultats.

D'autre part, une méthode de segmentation d'images basée sur une version discrète du modèle de Chan et Vese définie sur des graphes a été présentée. L'algorithme correspondant offre un moyen plus simple pour segmenter un image et reste moins sensible au contour initial contrairement à l'approche classique des level sets.

Finalement, ce travail a montré le potentiel de l'utilisation des graphes pondérés en traitement d'images.

Les perspectives à ce mémoire sont nombreuses.

L'utilisation d'autres attributs autre que le niveau de gris comme les attributs couleur, de texture en vue d'une segmentation des images couleur et/ou texturées. L'utilisation des patches nous permettraient d'aboutir à des traitement non locaux plus prometteurs.

Dans ce travail, nous avons utilisé le graphe de similarité ε -voisinage, il serait aussi intéressant de tester d'autres types de graphes comme le graphe des k plus proches voisins.

Nous nous sommes contenté dans ce travail à quelques opérateurs comme le gradient et les opérateurs morphologiques. Il serait intéressant d'étendre ce travail à d'autres opérateurs morphologiques tels que l'amincissement, l'épaississement ou autres transformations comme le filtrage.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] R. Lambiotte, L.Tabourier," Théorie des graphes",Université de Namur, 2014.
- [2] Y. Champelaux, "Un modèle de recherche d'information basé sur les graphes et les similarités structurelles pour l'amélioration du processus de recherche d'information", thèse de doctorat, Université Toulouse III, décembre 2009.
- [3] N. Belharrat, théorie des graphes en recherche opérationnelle, éditions page blues, 2009.
- [4] C. Rossignol, "Graphes pondérés, graphes étiquetés, graphes probabilistes", support de cours, académie de Grenoble, 2009.
- [5] O. LézoRay, "Traitement d'images par modèles discrets sur graphes et classification de données d'images par apprentissage", thèse d'habilitation à diriger des recherches, Université de Caen Basse-Normandie, Novembre 2007.
- [6] U. Von Luxburg, "A Tutorial on Spectral Clustering", Statistics and Computing, 17 (4), 2007.
- [7] T.Vinh thong," Equations aux différences partielles définies sur des graphes pour le traitement d'images et de données", thèse de doctorat, Université de Caen Basse-Normandie, décembre 2009.
- [8] A. Rosenfeld, Adjacency in digital pictures ,information and controle, 26(1),pp.24-33,1974.
- [9] S. Alkama, "Segmentation des images multi-composantes", Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Polytechnique, 2013.
- [10] A. Capri," Caractérisation des objets dans une image en vue d'une aide à l'interprétation et d'une compression adaptée au contenu : application aux images échographiques", thèse de doctorat, Université d'Orléans, 2007.
- [11] M. Lehamel, "Segmentation d'images texturées à partir des attributs fractals", Mémoire de Magister en Automatique, UMMTO, 2013.
- [12] Yaroslavsky, P. Leonid, "Digital Picture Processing. Springer-Verlag", 1985
- [13] J.-S. Lee, "Digital image smoothing and the sigma filter ", Computer Vision, Graphics and Image Processing, 24(2) : 255 – 269, 1983.
- [14] A. Buades, B.,Coll, et J.-M. Morel, , " Nonlocal image and movie denoising ". International Journal of Computer Vision, 76(2) : 123 – 139, 2008.

- [15] C. Tomasi , R. Manduchi," Bilateral filtering for gray and color images ". In Proceedings of International Conference on Computer Vision (Iccv), pages 839 – 846, 1998.
- [16] S. Bougleux, A. Elmoataz, M. Melkemi, "Local and non local discrete régularisation on weighted graphs for image and Mesh Processing ", *int.j.comput.vis*,vol 84,pp.220-236,2009.
- [17] A. Elmoataz, O. Lézoray, S. Bougleux, "non Local discrete regularization on weighted graphs: Aframework for image and manifold processing", *IEEE trans. Image process*, vol 57,107,pp1047-1060,2008
- [18] Bougleux, S. Elmoataz, A. et Melkemi, M. (2009). Local and nonlocal discrete regularization on weighted graphs for image and mesh processing. *International Journal of Computer Vision*, 83(2) : 220 – 236. Special Issue of SSVM 2007.
- [19] S. Beucher, "Segmentation d'images et morphologie mathématique", Thèse de Doctorat, École nationale supérieure des mines de Paris,1990.
- [20] D. Sheeren, S. Lefèvre et J. Weber,"La morphologie mathématique binaire pour l'extraction automatique des bâtiments dans les images THRS ", *Revue Internationale de Géomatique*, Lavoisier, 17 (3-4), pp.333-352,2007.
- [21] R. W. Brockett and P. Maragos. " Evolution equations for continuous-scale morphological filtering". *IEEE TSP*, 42(12) :3377–3386, 1994.
- [22] F. Guichard, P. Maragos, and J.-M. Morel, "Partial Differential Equations for Morphological Operators", volume 183, pages 369–390. Springer, 2007.
- [23] Rivest, J.-F., Soille, P. et Beucher, S. "Morphological gradients", *Journal of Electronic Imaging*, 2(4): 326 – 336, 1993.
- [24] Chan, T. F. et Vese, L. A. "Active contours without edges", *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(2) : 266 – 277, 2001.
- [25] A. Dirami, "Segmentation d'images bruitées utilisant la dérivée topologique", Thèse de Doctorat, *UMMTO*, 2014.