

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOULOU
MAMMERI



FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

*Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme
Master 2 en Recherche Opérationnelle
Option : Méthodes et Modèles d'aide à la décision*

Thème :

**Optimisation Fractionnaire Linéaire
Multicritère en Nombres Entiers**

Présenté par : *M^{elle} BOUABBACHE Zahia*
et

M^{elle} ZABOT Nora

Devant le jury composé de :

Mr AOUANE M., Président

Mme RABIA F., Rapporteur

Mme GOUMEZIANE L., Examinatrice

Melle BELLAHCENE S., Examinatrice

Promotion : 2011/2012



Remerciements

- *Nous remercions dieu tout puissant d'avoir guidé nos pas vers les portes du savoir tout en illuminant notre chemin, et nous avoir donné suffisamment de courage et de persévérance pour mener notre travail à terme*

- *Nous tenons à adresser nos plus vifs remerciements à notre promotrice Madame F. Rabia qui a su nous guider et nous orienter. Nous lui exprimons notre plus grande gratitude pour l'attention et le temps qu'elle nous a consacré ainsi que les précieux conseils qu'elle nous a prodigués, nous tenons spécialement à la remercier de nous avoir enseigné le module Optimisation Multicritère ainsi que pour sa sincérité à notre égard. Sa présence constante à nos côtés, sa ponctualité et sa patience nous ont fait réaliser la chance que nous avons d'avoir côtoyé une personne aussi entière que Madame RABIA, merci.*

- *Nous remercions aussi les membres de la commission qui nous ont fait l'honneur d'en faire partie et qui ont eu la patience de nous écouter,*

- *Nous témoignons une reconnaissance particulière à l'ensemble des enseignants qui nous ont suivis pendant notre cursus,*

- *Enfin, nous remercions tous ceux qui nous ont encouragé tout au long de notre parcours universitaire et ceux qui ont contribué de près ou de loin à notre formation.*

Introduction générale :

Chapitre I : Introduction à l'optimisation multi-objectif

| | |
|---|---|
| I.1 Introduction..... | 1 |
| I.2 Formulation du problème..... | 1 |
| I.3 Définitions..... | 2 |
| I.4 Problématique..... | 4 |
| I.5 Classification des approches multicritères..... | 5 |

Chapitre II : Optimisation linéaire multi-objectif en nombres entiers

| | |
|--|----|
| II.1 Introduction | 10 |
| II.2 Formulation du problème..... | 10 |
| II.3 Définitions et théorèmes..... | 10 |
| II.4 Quelques méthodes de résolution d'un problème multi-objectif linéaire en nombres entiers..... | 12 |
| II.4.1 Méthode de Klein & Hannan..... | 12 |
| II.4.2 Méthode de Gupta | 15 |
| II.4.3 Méthode de Abbas et Moulai..... | 19 |
| II.4.4 Méthode de Sylva et Crema | 25 |

Chapitre III: La programmation fractionnaire linéaire uni-critère

| | |
|---|----|
| III.1 Introduction | 31 |
| III.2 Présentation et géométrie d'un programme linéaire fractionnaire | 31 |
| III.3 Géométrie de la programmation fractionnaire linéaire..... | 31 |
| III.4 Stratégies de résolution d'un programme fractionnaire linéaire..... | 33 |
| III.4.1 La résolution directe..... | 33 |
| III.4.1.1 Programme hyperbolique continu..... | 33 |
| III.4.1.2 Problème hyperbolique en variables entiers | 37 |
| III.4.2 Résolution par paramétrisation..... | 37 |

| | |
|---|----|
| III.4.2 Résolution d'un problème équivalent à objectif non fractionnaire..... | 38 |
| III.5 Méthode des pénalités..... | 42 |

Chapitre IV : La programmation fractionnaire linéaire multicritère

| | |
|---|----|
| IV.1 Introduction | 49 |
| IV.2 Présentation d'un programme fractionnaire linéaire multicritère | 49 |
| IV.3 Caractérisation de l'ensemble des solutions efficaces..... | 50 |
| IV.4 Propriétés des ensembles des solutions fortement efficaces et faiblement efficaces | 53 |
| IV.5 Détection graphique de l'ensemble des solutions f-efficace | 55 |
| IV.6 Quelques méthodes d'optimisation du problème fractionnaire linéaire multi-objectif. .. | 60 |
| IV.6.1 Méthode de Kormbluth et Steuer..... | 60 |
| IV.6.2 Méthode de Nykowski & Zolkiewski | 60 |

Chapitre V : programmation fractionnaire linéaire multicritère en nombres entiers

| | |
|--|----|
| V.1 Introduction | 64 |
| V.2 Formulation du problème..... | 64 |
| V.3 Méthodes de résolution d'un problème fractionnaire linéaire multi-objectif en nombres entiers..... | 65 |
| V.3.1 Méthode de Mohamed El Amine Chergui..... | 65 |
| V.3.2 Méthode de Moulai Mustapha..... | 74 |

Conclusion générale

L'une des principales missions pour lesquelles la recherche opérationnelle s'est vouée est l'aide à la décision et à la gestion.

Depuis les années 70, les activités de recherche en Recherche Opérationnelle au niveau mondiale n'ont cessé de se développer tant au niveau de ses concepts théoriques et de l'amélioration techniques de ses outils d'optimisation qu'au niveau applicatifs où elle intervient de manière cruciale dans des secteurs de plus en plus nombreux et diversifiés comme : « la production industrielle, la planification, le transport, l'informatique, les télécommunications, l'énergie, mais aussi dans les banques et les assurances.... etc.

Les modèles traditionnels développés dans le cadre des méthodes quantitatives de gestion considéraient en général un critère unique, pour lequel il existe une solution optimale. Les algorithmes mis au point consistent alors à définir un moyen d'atteindre, le plus rapidement possible, une telle solution. Cependant, dans de nombreux cas, cette modélisation ne traduit pas exactement la réalité.

La plupart des problèmes réels intervenant en mathématiques de décision sont de nature qui impose la prise en compte de plusieurs critères qui sont souvent antagonistes. Tout décideur est obligé de tenir compte du maximum d'éléments en sa possession, pour aboutir à la meilleure décision possible.

Ainsi pour mieux appréhender la réalité, l'approche multicritère devient incontournable. Il est utile dans ce cas de définir un concept d'optimalité, d'étudier les propriétés et les conditions d'existence des solutions et déterminer des méthodes pratiques de recherche des décisions relatives à ce concept d'optimalité.

Dans un problème multicritère, l'ordre introduit sur l'espace des critères est partiel, ce qui traduit l'impossibilité de comparer les solutions entre elles. L'ensemble des points de recherche tels qu'il n'existe aucun point qui est strictement meilleur que tous les autres simultanément sur tous les critères est appelé « *front de Pareto* » du problème. Il s'agit de l'ensemble des meilleurs « *compromis* » réalisables entre les critères. Le but de l'optimisation est d'identifier cet ensemble de compromis.

La première notion d'optimalité en multiobjectif a été introduite par *Edgeworth* en 1881. Elle a été utilisée de manière plus formelle par l'économiste italien *Pareto* [19]. Cette notion est appelée efficacité, optimalité selon Pareto ou encore non dominance.

Dans le cadre de la programmation mathématique multicritère, nous nous sommes particulièrement intéressés au cas où les critères sont linéaires fractionnaires, les contraintes sont linéaires et les variables de décision sont entières. Les problèmes en question sont connus sous le nom de problèmes linéaires multicritères fractionnaires en nombres entiers.

C'est ainsi que dans notre travail, nous présentons des méthodes exactes pour la résolution des problèmes fractionnaires linéaires en nombres entiers.

Pour cela nous avons structuré notre mémoire comme suit :

- ✚ Le premier chapitre expose une introduction générale à l'optimisation multicritère ; en rappelant les différentes définitions de base, les théorèmes d'existence des solutions efficaces et quelques méthodes utilisées pour résoudre ce type de problèmes.
- ✚ Le deuxième chapitre présente quelques méthodes de programmation linéaire multicritère en nombres entiers telles que la méthode de *Klein & Hannan* [14], la méthode de *Gupta* [12], la méthode de *Abbas & Moulaï* [3] et celle de *Sylva & Crema* [22].
- ✚ Le chapitre trois est consacré à la programmation fractionnaire linéaire uni-critère en présentant la géométrie d'un problème fractionnaire linéaire uni-critère et quelques stratégies de résolution tels que : la résolution directe où on utilise plusieurs approches telles que par exemple celle de *Cambini* [7], la technique de séparation et d'évaluation progressive, la variante des coupes de Gomory développée par *Granot* [13], la résolution par paramétrisation et la résolution d'un problème équivalent à objectif non fractionnaire. En dernier, nous présentons la méthode de résolution des problèmes fractionnaires linéaires en nombres entiers de *Moulaï* [5].
- ✚ Le chapitre quatre aborde la programmation linéaire fractionnaire multicritère. Des caractérisations de l'ensemble des solutions efficaces [9,10], leur détermination graphique, des propriétés géométriques des ensembles de solutions fortement et faiblement efficaces ainsi que quelques méthodes de résolution y sont présentées.
- ✚ Le chapitre cinq présente les méthodes exactes de résolution d'un programme fractionnaire linéaire multicritère en nombres entiers. Dans ce contexte, nous exposons deux approches : celle de *Chergui* [8] et celle de *Moulaï* [1,2,17].
- ✚ Le chapitre six finalise notre travail par l'implémentation de la méthode de *Cambini* pour la résolution d'un programme fractionnaire linéaire uni-critère en nombres entiers sur le logiciel **MATLAB**. Le programme sera utilisé ultérieurement pour l'implémentation de la méthode de *Chergui*.

Enfin, nous terminerons notre travail par une conclusion générale et la bibliographie utilisée.

I.1. Introduction

L'optimisation multi-objectif cherche à optimiser plusieurs composantes d'un vecteur de fonctions coûts. Contrairement à l'optimisation mono-objectif, la solution d'un problème multi-objectif (MOP) n'est pas une solution unique, mais un ensemble de solutions connues comme l'ensemble des solutions Pareto optimales (PO). Toute solution de cet ensemble est optimale dans le sens qu'aucune amélioration ne peut être faite sur un composant du vecteur sans la dégradation d'au moins un autre composant du vecteur.

I.2. Formulation du problème

Mathématiquement, un problème d'optimisation multi-objectif (MOP) peut être défini de la manière suivante :

$$(\text{MOP}) \begin{cases} \text{Max (Min)} Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_r(x)) \\ \text{s. c } x \in S \end{cases}$$

Où $r \geq 2$ est le nombre de fonctions objectifs, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est le vecteur représentant les variables de décisions, $S = \{x \in R^n / g_j(x) \leq 0, x > 0\}$ représente l'ensemble des solutions réalisables associées à des contraintes d'égalités, d'inégalités et des bornes explicites (espace de décision). $Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_r(x))$ est le vecteur des critères à optimiser.

Z_i et g_j sont des fonctions à valeurs réelles du vecteur de décision.

L'ensemble $Y = Z(S)$ représente les points réalisables dans l'espace des critères (espace objectif), et $Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_r(x))$ avec $Y_i = Z_i(x)$ représente un point de l'espace des critères

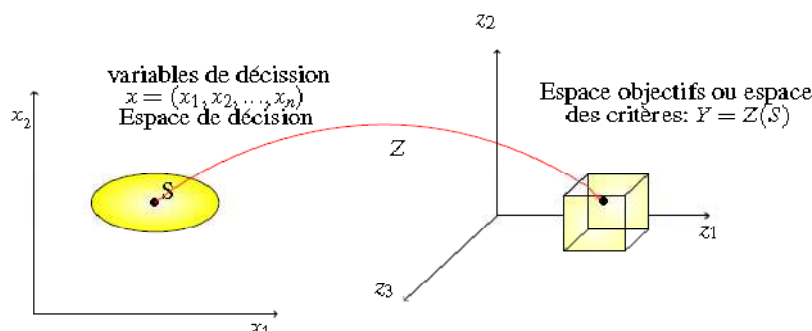


Fig.I.1. Représentation l'espace des décisions et l'espaces des objectifs correspondant

I.3. Définitions

Remarque : Ces relations sont définies pour un problème de minimisation.

❖ **Dominance**

Définition 1 : (Dominance)

Soient deux vecteurs critères $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$ et $z = (z_1, z_2, \dots, z_r)$, on dit que y domine z si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in [1, \dots, r] \quad y_i \leq z_i \\ \text{et } \exists i \in [1, \dots, r] \quad y_i < z_i \end{array} \right.$$

si y domine z , alors y est au moins aussi bon que z sur tous les critères et meilleurs que lui sur au moins un des critères.

Définition 2 : (Dominance forte)

Soient deux vecteurs critères $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$ et $z = (z_1, z_2, \dots, z_r)$, on dit que y domine fortement z si et seulement si :

$$\forall i \in [1, \dots, r] \quad y_i < z_i$$

Si y domine fortement z , alors y est meilleur que z sur tous les critères.

Définition 3 : (Dominance faible)

Soient deux vecteurs critères $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$ et $z = (z_1, z_2, \dots, z_r)$, on dit que y domine faiblement z si et seulement si :

$$\forall i \in [1, \dots, r] \quad y_i \leq z_i$$

Définition 4 : (Non-dominance)

Soit y^* un vecteur critère $\in Y$, on dit que y^* est non dominé si et seulement s'il n'existe aucun autre vecteur critère $y \in Y$ tel que :

$$\begin{array}{l} \forall i \in [1, \dots, r] \quad y_i \leq y_i^* \\ \text{et } y_i < y_i^* \text{ pour au moins un indice } i \end{array}$$

Dans le cas contraire, on dit que y^* est dominé.

❖ Efficacité

Définition 1 : (Pareto optimale)

Une solution $x^* \in S$ est Pareto optimale si et seulement s'il n'existe pas une solution $x \in S$, tel que $y(x)$ domine $y(x^*)$, ie $y_i(x) \leq y_i(x^*)$ pour au moins un indice i .

La définition de la Pareto optimalité découle directement de la notion de dominance. Elle signifie qu'il est impossible de trouver une solution qui améliore les performances sur un critère sans que cela entraîne une dégradation des performances sur au moins un autre critère. Elles forment le front Pareto. Les solutions Pareto optimales sont aussi connus sous le nom de solutions efficaces, non-dominées ou non inférieures.

Définition 2 : (Efficacité forte)

Une solution $x^* \in S$ est dite fortement efficace, s'il n'existe aucun vecteur $x \in S$ tel que $x \neq x^*$ et $y_i(x) < y_i(x^*)$

Une solution est fortement efficace si son vecteur critère est fortement non dominé.

Définition 3 : (efficacité faible)

Une solution $x^* \in S$ est dite faiblement efficace, s'il n'existe aucun vecteur $x \in S$ tel que $y_i(x) \leq y_i(x^*)$.

Une solution est faiblement efficace si son vecteur critère est faiblement dominé.

Définition 4 : (le point idéal)

Le vecteur idéal $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*)$ est le vecteur qui optimise chacune des fonctions objectives f_i , i.e. : $\overline{y_i^*} = \min(Z_i(x)), x \in S$

Il est clair que si le vecteur idéal est réalisable, il est la solution du problème (MOP), mais ce n'est pas en général possible à cause des conflits qui existent entre les critères.

Définition 5 : (point anti-idéal)

Le vecteur $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*)$ défini par :

$$\underline{y_i^*} = \max(Z_i(x)), x \in S \text{ est le point anti-idéal appelé aussi point Nadir.}$$

Définition 6 : (vecteur de référence)

Un vecteur de référence $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*)$ est un vecteur qui définit le but à atteindre par chaque objectif Z_i .

Définition 7 : (Front de Pareto)

C'est l'ensemble des vecteurs de décision qui ne sont pas dominés

$$FP^* = \{x \in X \mid \nexists x' \in X, x < x'\}$$

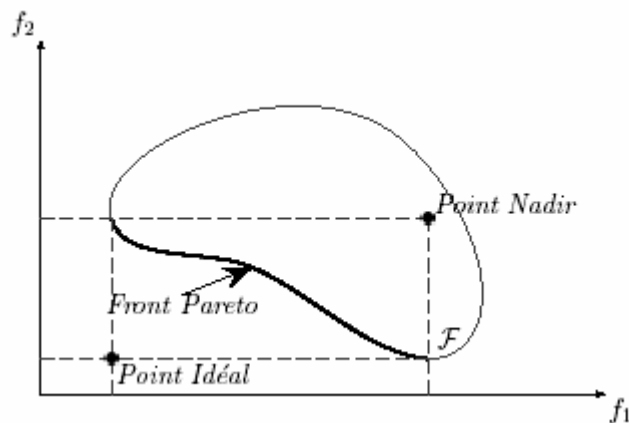


Fig.I.2. Point Nadir et point Idéal

Définition 8 : (Convexité)

Un ensemble \$A\$ est convexe, si et seulement si l'équivalence suivante est vérifiée :

$$x \in A \wedge y \in A \Leftrightarrow \text{segment}(x, y) \subset A$$

La convexité est le premier indicateur de la difficulté du problème. En effet, plusieurs méthodes d'optimisation sont incapables de résoudre d'une façon optimale des problèmes non convexes. Mais il existe d'autres indicateurs tout aussi importants, notamment la continuité, la nature des variables de décision (entières ou réelles), . . .

I.4. Problématique

La difficulté principale d'un problème multi-objectif est qu'il n'existe pas de définition de la solution optimale. Le décideur peut simplement exprimer le fait qu'une solution est préférable à une autre mais il n'existe pas une solution meilleure que toutes les autres.

Dès lors, résoudre un problème multi-objectif ne consiste pas à rechercher la solution optimale mais l'ensemble des solutions satisfaisantes pour lesquelles on ne pourra pas effectuer une opération de classement. Les méthodes de résolution des problèmes multi-objectifs sont donc des méthodes d'aide à la décision car le choix final sera laissé au décideur.

Pour répondre à ce problème, il existe deux types de comportement. Le premier et de ramener un problème multi-objectif à un problème uni-critère au risque d'enlever toute signification au

problème. Le second comportement est de d'apporter des réponses au problème au prenant en compte l'ensemble des critères. La différence entre ces deux communautés s'exprime dans le schéma ci-dessous.

- ✓ Soit le décideur intervient dès le début de la définition du problème, en exprimant sa préférence, afin de transformer un problème multi-objectif en un problème uni-critère.
- ✓ Soit le décideur effectue son choix dans l'ensemble des solutions proposées par le solveur multi-objectif.

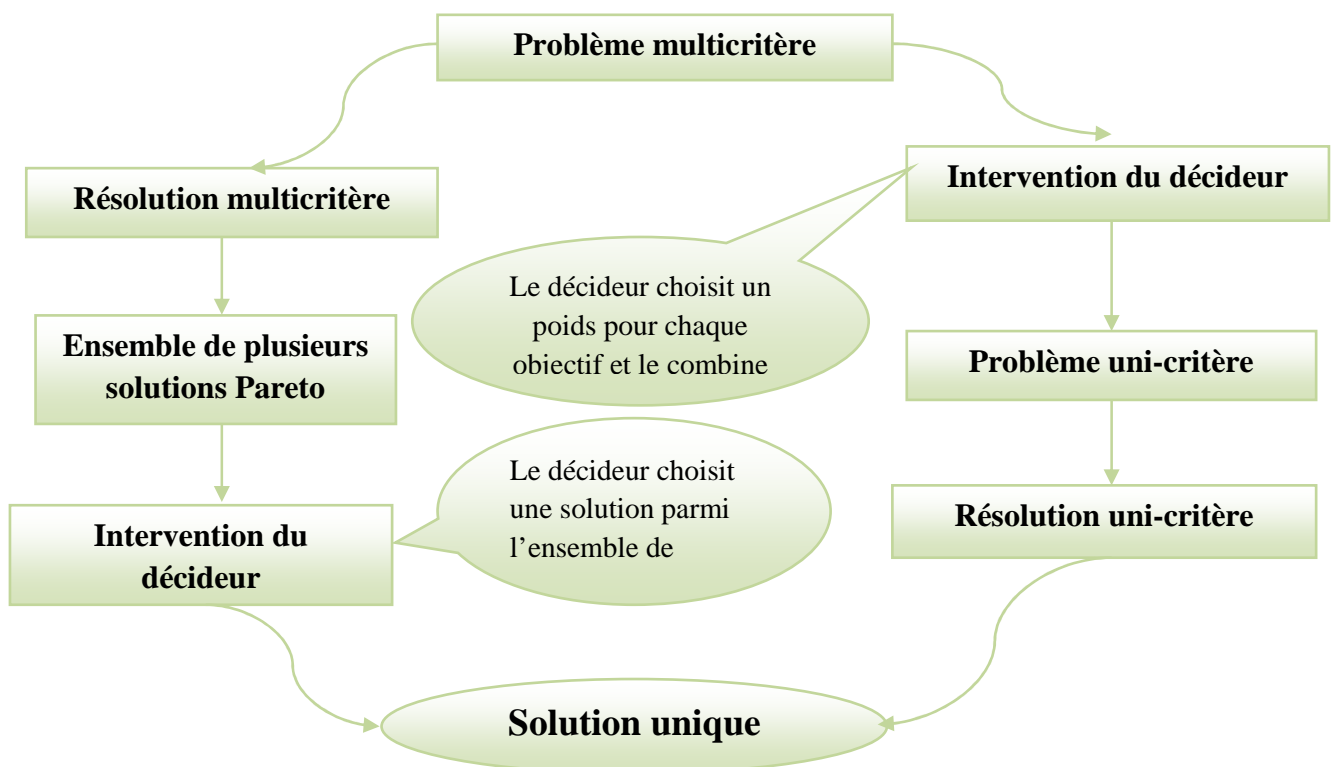


Figure I.3 : Mode de résolution

1.5. Classification des approches multicritères

La résolution des problèmes multi-objectifs relève de deux disciplines assez différentes. En effet, résoudre un problème multi-objectif peut être divisé en deux phases :

1. **la recherche des solutions de meilleur compromis** : C'est la phase d'optimisation multi-objectif.
2. **le choix de la solution à retenir** : C'est la tâche du décideur qui, parmi l'ensemble des solutions de compromis, doit extraire celle(s) qu'il utilisera. On parle alors ici de décision multi-objectif et cela fait appel à *la théorie de la décision*.

On distingue à cet égard, trois schémas possibles. Soit le décideur intervient dès le début de la définition du problème, en exprimant ses préférences, afin de transformer un problème multi-objectif en un problème mono-objectif. Soit le décideur effectue son choix dans l'ensemble des solutions proposées par le solveur multi-objectif :

- **Aide à la décision a priori (décideur → chercheur)**: les solutions proposées pour résoudre un (MOP) consiste souvent à combiner les différentes fonctions coût suivant une certaine fonction d'utilité. Dans ce cas le décideur est supposé connaître a priori le poids de chaque objectif. Ceci revient donc à transformer un (MOP) en un problème mono-objectif et le résoudre par des méthodes d'optimisation classiques. Cependant dans la plupart des cas, la fonction d'utilité n'est pas connue a priori du processus d'optimisations et les différents objectifs ne sont pas commensurables. De plus l'espace de recherche défini peut ne pas représenter effectivement le problème initial. Si le décideur n'est pas à même d'indiquer a priori le type de compromis qu'il souhaite réaliser entre les critères, il n'est pas pertinent de chercher une et une seule solution efficace réalisant une agrégation entre ces critères.

- **Aide à la décision a posteriori (chercheur → décideur)**: le décideur choisit une solution parmi les solutions de l'ensemble Pareto optimal (PO) fourni par le solveur. Cette approche est utilisable dans le cas où la cardinalité de l'ensemble PO est réduit. Dans le cas contraire, il convient de lui permettre d'explorer l'ensemble des solutions en fonction de ses préférences, afin qu'il puisse mieux appréhender les arbitrages à opérer entre les critères.

- **Aide à la décision interactive (décideur ↔ chercheur)**: dans ce cas, il y'a coopération progressive entre le décideur et le solveur. A partir des connaissances acquises pendant la résolution du problème, le décideur définit des préférences. Ces préférences sont prises en compte par le solveur dans la résolution du problème. Ce processus est réitéré pendant plusieurs étapes.

A l'issue de l'exploration guidée de l'ensemble PO, le décideur dispose d'une connaissance approfondie pour retenir une solution de l'ensemble PO représentant un compromis acceptable.

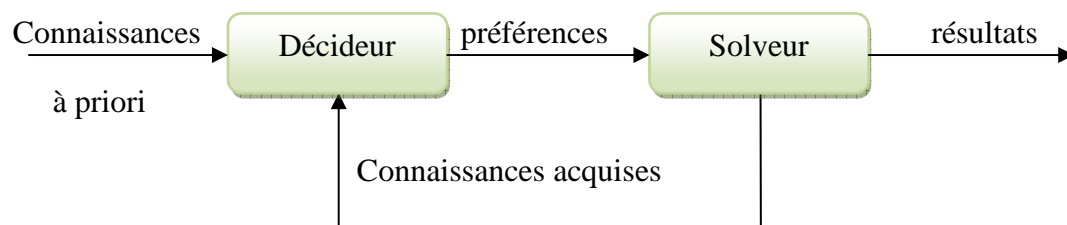


Fig.I.4 Approches interactives : coopération entre le solveur et le décideur

II.1. Introduction

Dans un problème d'optimisation multi-objectif, lorsque, les fonctions $f_i(x)$ pour $i=1, \dots, r$ sont linéaires et que l'ensemble des solutions réalisables S est défini par des contraintes linéaires, alors, on parle de problème linéaire multi-objectif (MOLP). Ainsi, si les variables x prennent des valeurs entières dans le problème (MOLP), on parle alors de problème d'optimisation multi-objectif linéaire en nombres entiers noté (MOLPE).

Cette classe de problèmes est la plus étudiée actuellement dans la littérature grâce au développement des méthodes de la programmation linéaire et leur vaste application dans la vie quotidienne ainsi qu'aux problèmes d'affectation, au problème de voyageur de commerce, aux problèmes de gestion et aux problème de transport, ...

II.2. Formulation du problème

Un problème (MOILP) est formulé comme suit :

$$(P) \begin{cases} \max (Z_1, Z_2, \dots, Z_r) \\ Z_i = C_i(x) \\ x \in S \end{cases} \quad i = 1, \dots, r$$

Où : $S = \{x \in R^n / Ax \leq b, x \geq 0, x \text{ entier}\}$

r : nombre d'objectifs (critères) à maximiser ou à minimiser.

C^i : Vecteur des coefficients pour $i = 1, \dots, r$.

A : la (m, n) matrice des contraintes, $rg A = m \leq r$

Z_i : Critère à maximiser ou à minimiser pour $i = 1, \dots, r$.

II.3. Définitions et théorèmes [23]

Définition 1 : (l'Optimalité de Pareto)

$x^* \in S$ est efficace si et seulement s'il n'existe aucun autre vecteur $x \in S$ tel que :

$$cx \geq cx^*, \quad cx \neq cx^*$$

Autrement dit :

$x^* \in S$ est efficace si et seulement s'il n'existe aucun autre vecteur $x \in S$ tel que

$Z_i(x) \geq Z_i(x^*)$ pour $i = 1, \dots, r$ et $Z_i(x) > Z_i(x^*)$ pour au moins un indice i .

Définition 2 : (l'optimalité de Slater ou faible efficacité)

$x^* \in S$ est dite faiblement efficace si et seulement s'il n'existe aucun autre vecteur $x \in S$ tel que $Cx > Cx^*$.

Autrement dit :

$x^* \in S$ est faiblement efficace si et seulement s'il n'existe aucun autre vecteur $x \in S$ tel que $Z_i(x) \geq Z_i(x^*)$ pour $i = 1, \dots, r$.

Remarque 1 : Dans le cas où le décideur veut minimiser les critères $f_i, i = 1, \dots, r$, on a des définitions analogue au définitions 1 et 2 ; il suffit d'inverser les inégalités correspondantes car $\min Z_i(x) = -\max(-Z_i(x))$.

Notons par X^S l'ensemble des solutions de Slater et par X^P l'ensemble des solutions de Pareto.

Théorème 1: Soit $x^0 \in X$, alors :

S'il existe $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \geq 0$ tel que $\sum_{i=1}^r \lambda_i f_i(x^0) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i(x)$; alors $x^0 \in X^S$.

S'il existe $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) > 0$ tel que $\sum_{i=1}^r \lambda_i f_i(x^0) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i(x)$; alors $x^0 \in X^P$.

Ce résultat signifie que pour trouver un optimum de Pareto ou de Slater, il suffit d'optimiser la fonction représentant une combinaison linéaire pondérée des critères. Cependant, le théorème 1 ne permet pas la caractérisation de toutes les solutions optimales selon Pareto ou selon Slater.

Par ailleurs, le résultat du théorème 2 assure que sous les hypothèses de convexité et de continuité, cette condition devient nécessaire.

Théorème 2: supposons que X est convexe et f_i est continue est concave pour tout $i=1, \dots, r$; alors on a les équivalences suivantes :

$$x^0 \in X^S \Leftrightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que : } \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i(x^0) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i(x)$$

$$x^0 \in X^P \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 \text{ tel que : } \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i(x^0) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i(x)$$

Ce théorème reste valide quand $\lambda \in \Lambda$ avec : $\Lambda = \{\lambda \in R^n / \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1, \lambda_i > 0\}$

Remarque 2: Dans le cas d'un problème de minimisation, il suffit de remplacer la condition f_i concave par f_i convexe.

Théorème 3 : on considère le problème (P), si $X^S \neq \emptyset$, alors il existe un point extrême $x \in X$ tel que $x \in X^S$.

II.4. Quelques méthodes de résolution d'un problème multi-objectif linéaire en nombres entiers

II.4.1. Méthode de Klein & Hannan [14]

La méthode de Klein & Hannan permet la détermination de l'ensemble efficace complet ou un sous-ensemble de solutions efficaces. Elle consiste à résoudre une séquence de programmes linéaires en nombres entiers à un seul objectif. Les contraintes additionnées qui sont auparavant exclues, génèrent les points efficaces et garantissent l'efficacité des nouvelles solutions générées. Les solutions sont créées dans l'ordre croissant des fonctions objectifs choisies.

Etant donné un problème (MOLPE), soit (P_0) le problème mono-objectif basé sur une fonction objectif arbitraire Z_s , pour un $s = 1, \dots, r$

$$(P_0) \begin{cases} \max z_s(x) = c^s(x) \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ x \text{ entier} \end{cases} \quad s = 1, \dots, r$$

Lemme 1:

- i. Si (P_0) admet une solution unique x^* , alors, x^* est une solution efficace du problème (MOLPE).
- ii. Si (P_0) admet plusieurs solutions qui composent l'ensemble X_0^* , X_0^{eff} est aussi efficace pour le problème (MOLPE).

Dans ce qui suit, nous allons définir la procédure séquentielle pour générer tous les points efficace du problème (P) ou bien les sous-ensembles efficaces.

Le problème (P_0) représente l'étape 0 de la procédure et soit (P_j) le problème résolu dans la $j^{\text{ème}}$ étape de la procédure. (P_j) est défini par :

$$(P_j) \begin{cases} \max z_s(x) = c^s(x) \\ Ax \leq b \\ x \geq 0, x \text{ entier} \\ \bigcap_{i=1}^r \left(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^p C^k x \geq C^k y^i - \lambda_k \right) \end{cases} \quad s = 1, \dots, r$$

Où $\lambda_k \geq 1$ est un entier pour $k = 1, \dots, p$ et y^i ($i = 1, \dots, r$) sont les points efficaces obtenus dans les étapes 0, 1, 2, ..., $(j - 1)$.

Si X_j^{eff} est l'ensemble de tous les points efficaces obtenus à l'étape j et Y^j est l'ensemble de tous les points efficaces accumulés jusqu'à la fin de la $j^{\text{ème}}$ étape, alors $Y^j = Y^{j-1} \cup X_j^{eff}$ pour $j \geq 1$ et $Y^0 = X_0^{eff}$.

Chapitre II Optimisation linéaire multicritère en nombres entiers

L'ensemble des contraintes : $\bigcap_{i=1}^r \left(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^p C^k x \geq C^k y^i - \lambda_k \right)$ représente les conditions d'efficacité imposées par les points Y^{j-1} dans la solution du problème (P_j) .

Le théorème suivant montre que tous les points générés de cette façon sont efficaces.

Théorème 4: Si le problème (P_j) admet X_j^* comme ensemble de solutions, alors, le sous ensemble de solutions efficaces X_j^{eff} dans X_j^* , est efficace dans (P) .

Preuve : Supposons que $x^* \in X_0^{eff}$ n'est pas efficace pour le problème (P) .

Alors, il existe un point x^0 efficace pour (P) tel que x^0 domine x^* . i.e. $C^k x^0 \geq C^k x^*$ avec au moins une inégalité stricte.

x^0 Satisfait les contraintes primaires de (P_j) i.e. $Ax \leq b, x \geq 0, x$ entier, puisque elles sont aussi des contraintes du problème (P) . De plus, puisque $\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^p C^k x^* \geq C^k y^i - \lambda_k$ pour $k = 1, \dots, p$ et puisque $C^k x^0 \geq C^k x^*$ pour tout k , alors $\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^p C^k x^0 \geq C^k y^i - \lambda_k$ pour tout $i = 1, \dots, p$. Ainsi x^0 satisfait toutes les contraintes de (P_j) et x^0 domine x^* dans (P_j) . Contradiction avec l'hypothèse x^* efficace dans X_j^* .

Corollaire 1 : Si (P_j) admet une solution unique, cette solution est efficace pour (P) .

La procédure continue jusqu'à ce que le problème $P(t)$ soit irréalisable.

On peut voir clairement que la procédure est finie (limitée) puisqu'il y a un nombre fini de solutions réalisables et puisque à chaque étape une solution réalisable est éliminée.

Le théorème suivant montre que si $\lambda_k=1$ pour chaque k , tous les points efficaces sont générés par la méthode ci-dessus.

Théorème 5: La méthode itérative décrite ci-dessus génère toutes les solutions efficaces du problème (P) lorsque $\lambda_k=1$ pour chaque k .

Preuve : Supposons qu'il existe un point x^0 efficace pour (P) et qui n'a pas été généré par la procédure ci-dessus. x^0 efficace dans (P) implique que x^0 est réalisable dans (P_0) . Soit Z_s^j la valeur optimale du problème (P_j) . Alors, pour un certain $w, (0 \leq w \leq t-1)$. $Z_s^w \geq Z^S \geq Z_s^{w+1}$ où t est l'indice de la dernière itération de la procédure.

- Si $Z_s^w = C^s x^0$ n'est pas trouvé, alors, par la définition de Y^w , x^0 est dominé par une autre solution de (P_w) .
- Si $Z \geq C^s x^0$ alors, x^0 est réalisable dans (P_{w-1}) ou bien elle est dominé dans Y^w

- Si x^0 est réalisable dans (P_{w+1}) alors, x^0 doit être une solution de (P_{w-1}) .

Ci-dessous est donné l'organigramme résumant la procédure de la génération séquentielle.

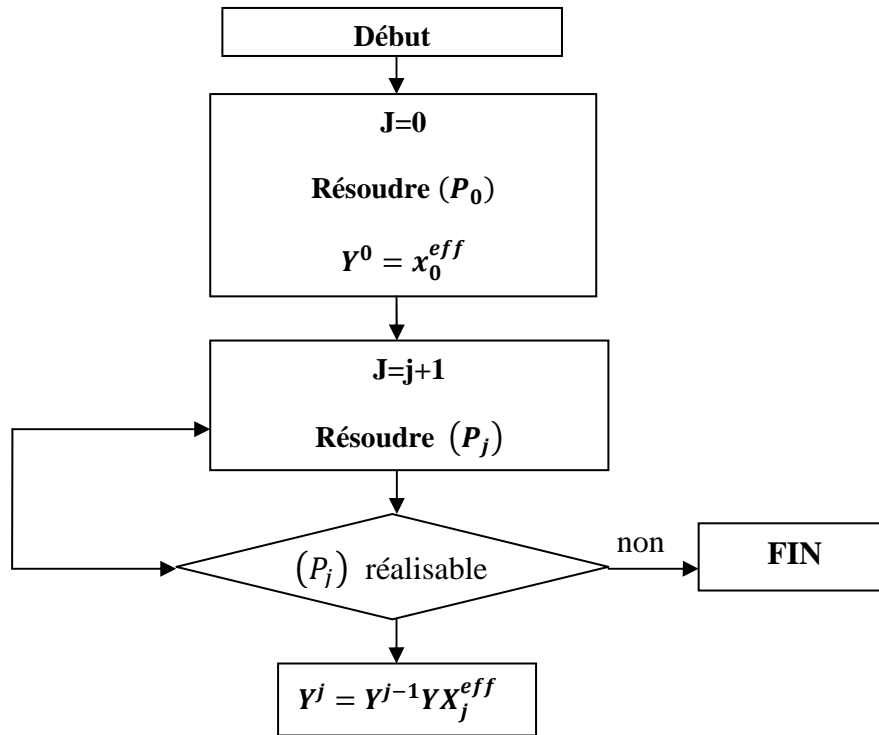


Fig.II.1 : Organigramme de la procédure de génération séquentielle

Conclusion : La procédure décrite auparavant et l'organigramme ci-dessus génère les solutions qui sont efficaces dans (P) . Si $\lambda_k=1$, tous les points efficaces sont générés. Si $\lambda_k>1$, pour un certain k , seuls les sous ensembles efficaces peuvent être générés.

II.4.2. Méthode de Gupta [12]

Gupta a proposé deux techniques pour la construction de l'ensemble des solutions efficaces d'un problème (MOLPE). La première procédure est basée sur la méthode des coupes qui consiste à restructurer l'ensemble S des solutions réalisables du problème relaxé correspondant (sans la condition d'intégrité). La deuxième procédure est basée sur le contrôle des fonctions objectifs et suggère une amélioration de la méthode de Klein & Hannan.

Soit le problème (P_1) qui maximise la premier objectif (ou un objectif quelconque) de (MOLPE), qui est défini comme suit :

$$(P_1) \quad \begin{cases} \max Z_1 = C^1 x \\ x \in S' \end{cases}$$

Chapitre II Optimisation linéaire multicritère en nombres entiers

Où $S' = \{x \in R^n / Ax = b, x \geq 0\}$ i.e c'est l'ensemble des solutions réalisables du problème relaxé.

Notons par :

S_1 : La région obtenue après application des coupes de Gomory .

$Z_1^* = Z_1^1$ = La valeur optimale de Z_1 dans le problème (P_1)

$x_1^1 = (x_{1,j})$: La solution entière correspondant à Z_1^* . C'est la solution basique réalisable de la région obtenue après de successives coupes de gomory sur S_1 .

Z_i^* : la valeur de Z_i pour $i \in I' = \{2, \dots, k, \dots, r\}$ correspondant à x_1^1 .

$(Z_1^1, Z_2^1, \dots, Z_r^1)$ Représente la premier r-uplet efficace.

x_1 = solution sous $(Z_1^1, Z_2^1, \dots, Z_r^1)$.

B_1 = base associée à X_1 .

a_{1j} : Vecteur activité de $x_{1,j}$ approprié à la région tronquée

$$y_{1j} = (B_1^{-1}) a_{1j}$$

$$I_1 = \{j/a_1, j \in B_1\}$$

$$N_1 = \{j/a_1, j \notin B_1\}$$

$$j_1 = \{j / j \in N_1 \text{ et } Z_{1,j}^{C^1} - C_j^1 = 0\} \text{ où :}$$

$Z_{1,j}^{C^1} = C_{B_1}^1 y_{1j}$, C_j^1 est la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur C^1 et $C_{B_1}^1$ est le vecteur des coûts des variables basiques associées à B_1 dans C^1 .

$$\Gamma_1 = \{j \in N_1 / Z_{1,j}^{C^1} - C_j^1 > 0 \text{ et } Z_{1,j}^{C^i} - C_j^i < 0 \text{ pour au moins un indic } i \in I'\}$$

Où $Z_{1,j}^{C^i} = C_{B_1}^i y_{1j}$, C_j^i est la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur C_i et $C_{B_1}^i$ est le vecteur des coûts des variables basiques associées à B_1 , dans C^i

Pour $k \geq 2$,

S_k : est la région de S_1 obtenue après l'application de la coupe $\sum_{j \in N_{k-1} \setminus \{j_{k-1}\}} x_j \geq 1$

$x_k = (x_{k,j})$ est la solution entière obtenue dans la région tronquée de la coupe par $\sum_{j \in N_{k-1} \setminus \{j_{k-1}\}} x_j \geq 1$ ou $j_{k-1} \in \Gamma_{k-1}$

B_k : Base associée à x_k .

a_{kj} : Vecteur activité de $x_{k,j}$ approprié à la région tronquée

$$y_{kj} = B_k^{-1} a_{kj}$$

$$I_k = \{j/a_{k,j}, j \notin B_k\}$$

$$N_k = \{j/a_{k,j}, j \notin B_k\}$$

$$\Gamma_k = \{j/j \in N_k, Z_{k,j}^{C^1} - C_j^1 > 0 \text{ et } Z_{k,j}^{C^i} - C_j^i < 0 \text{ pour au moins un indice } i \in I'\}$$

où : $Z_{k,j}^{C^i} = C_{B_k}^i y_{kj}$, $C_{B_k}^i$ est un vecteur des coûts des variables basiques associées à B_k dans C^i

Γ_k : L'ensemble correspondant à la solution x_k .

Définition 3 : Une arête E_{jk} incidente à x_k est définie par l'ensemble :

$$E_{jk} = \left\{ x = (x_i) \in R^n / \left[\begin{array}{l} x_i = x_{ki} - \theta_{jk} y_{k,i_{jk}}, i \in I_k \\ x_{jk} = \theta_{jk} \\ x_i = 0 \text{ pour tout } i \in N_k - \{j_k\} \end{array} \right] \right\}$$

Où : $0 \leq \theta_{jk} \leq \min \left\{ \frac{x_{ki}}{y_{k,i_{jk}}}, y_{k,i_{jk}} > 0 \right\}$ et θ_{jk} et $\theta_{jk} y_{k,i_{jk}}$ sont des entiers $\forall i \in I_k$

Définition 4 : L'arête incidente à un point entier réalisable est dite dominée si toutes les solutions le long de cette arête rendent dominé le r-uplet (Z_1, \dots, Z_r)

Théorème 6 : Toutes les solutions entières réalisables du problème (P_1) alternatives à la solution x_1 sur une arête E_{j_1} incidente à x_1 , ($j_1 \in \Gamma_1$) dans S' (ou dans une région tronquée S_k) sont dans le demi espace ouvert : $\sum_{j \in N_1 - \{j_1\}} x_j < 1$.

Théorème 7 : La solution entière réalisable du problème (P_1) qui n'est pas sur l'arête E_{j_1} , incidente à x_1 , ($j_1 \in \Gamma_1$) est dans le demi espace fermé :

$$\sum_{j \in N_1 - \{j_1\}} x_j \geq 1 \dots \dots \dots (1)$$

Corollaire 2 : La solution entière réalisable qui n'est pas sur l'arête E_{j_k} incidente à x_k dans la région tronquée de S_k , $j_k \in \Gamma_k$, $k \geq 2$, est dans le demi espace fermé

$$\sum_{j \in N_k - \{j_k\}} x_j \geq 1 \dots \dots \dots (2)$$

Remarque :

- 1- Les coupes (1) et (2) sont des généralisations des coupes de Dantzig. Dans le cas où Γ_1 (ou bien Γ_k) est vide, les coupes (1) et (2) correspondant aux coupes de Dantzig sont : $\sum_{j \in N_1} x_j \geq 1$ où $\sum_{j \in N_k} x_j \geq 1$.

Chapitre II Optimisation linéaire multicritère en nombres entiers

Les coupes (1) et (2) sont préférables à celle de Dantzig car elles éliminent seulement un point à la fois

- 2- Si pour un $a_j \in \Gamma_1 (\neq \emptyset)$, $\theta = \min \left\{ \frac{x_{ki}}{y_{k,i_jk}}, y_{k,i_jk} > 0 \right\} < 1$ où $y_{1,j}$ correspond à la solution X_1 , alors aucune solution entière réalisable ne peut être obtenue sur l'arête E_j .

Ci-dessus sont données les différentes étapes pour la résolution du problème (P).

Algorithme

Etape1 : Calculer la solution optimale entière X_1^1 du problème (P_1)

- Si $\Gamma_1 = \emptyset$, X_1^1 est l'unique solution optimale entière du problème (P_1) de valeur Z_1^1 . Calculer z_i^1 , $i \in I_k$ et enregistrer $(z_1^1, z_2^1, \dots, z_r^1)$ comme étant le premier r-uplet.
- Si $\Gamma_1 \neq \emptyset$, déterminer toutes les solutions alternatives X_1^1 ainsi leurs r-uplets. Supprimer tous les r-uplets dominés pour obtenir l'ensemble des r-uplets efficaces Eff_0 . Enregistrer $(z_1^1, z_2^1, \dots, z_r^1)$ comme étant le premier r-uplet efficace pour lequel z_2 a une valeur maximale pour tous les r-uplets appartenant à Eff_0 .
- Si toutes les deuxièmes composantes sont identiques, choisir un uplet avec la plus petite valeur z_3 . Continuer le processus chaque fois que cette contrainte se présente. Soit $(z_1^1, z_2^1, \dots, z_r^1)$ le r-uplet enregistré.

Etape2 : Choisir un indice $j_1 \in \Gamma_1$. Trouver le plus petit θ pour le prochain pivot.

- Si $\theta_{j_1} < 1$, aucune solution réalisable ne peut être sur l'arête E_{j_1} .
- Si $\theta_{j_1} \geq 1$, déterminer toutes les solutions entières réalisables le long de l'arête E_{j_1} .

Soit S_1 l'ensemble de tous les r-uplets correspondant à l'arête E_{j_1} . L'ensemble Eff_1 est l'ensemble de r-uplets de la forme $(z_1^1, z_2^1, \dots, z_r^1)$ potentiellement non dominés à l'étape 2.

-Tronquer l'arête E_{j_1} par la coupe : $\sum_{j \in N_1 - \{j_1\}} x_j \geq 1$.

-Appliquer la méthode duale du simplexe et les coupes de Gomory si c'est nécessaire pour avoir une solution entière réalisable $x = (x_{2,j})$ dans la région tronquée S_2

Etape3 :

- Choisir $j_2 \in \Gamma_2$ et balayer toutes les solutions qui sont sur l'arête E_{j_2} correspondant à j_2 .
- Lire les nouveaux r-uplets obtenus.
- Augmenter l'ensemble Eff_1 avec ces r-uplets pour construire l'ensemble Eff_2 .
- Supprimer tous les r-uplets dominés et poser Eff_2 l'ensemble restant.
- Tronquer l'arête E_{j_2} par la coupe : $\sum_{j \in N_2 - \{j_2\}} x_j \geq 1$.

Etape k:

- Choisir $j_{k-1} \in \Gamma_{k-1}$ et explorer l'arête $E_{j_{k-1}}$ pour avoir les solutions entières possibles.
- Lire les r -uplets correspondants et augmenter l'ensemble $\mathbb{E}ff_{k-2}$ en ajoutant ces r -uplets pour construire $\mathbb{E}ff_{k-1}$.
- Tronquer l'arête $E_{j_{k-1}}$ par la coupe : $\sum_{j \in N_{k-1} - \{j_{k-1}\}} x_j \geq 1$.
- Obtenir la solution entière optimale X_k de la région tronquée. Ceci marque le début de l'étape $(k + 1)$.

Etape (k+1): Ce processus se termine à l'étape $(k + 1)$ quand :

- L'ensemble $\Gamma_k = \emptyset$ et $z_{k,j}^{c^1} - C_j^1 > 0 \forall j \in N_k$
- $\Gamma_k \neq \emptyset$ mais tous les $j \in \Gamma_k$ produisent des arêtes dominés.

Remarque : Il arrive parfois que l'algorithme développé par Gupta s'arrête sans avoir énuméré toutes les solutions efficaces. Par conséquent des solutions efficaces pouvant intéresser le décideur peuvent être ratées.

II.4.3. Méthode de Abbas et Moulai [4]

C'est une méthode de coupes. Elle est appropriée à la résolution des problèmes (MOLPE). La première itération consiste à déterminer une solution entière réalisable pour le problème relaxé. La seconde itération nous permet de trouver toutes les solutions entières alternatives à la solution optimale obtenue (si elles existent) et obtenir la première solution entière efficace du problème principal. Dans la prochaine étape, nous introduisons une coupe afin de calculer les autres solutions entières efficaces restantes en utilisant la méthode duale du simplexe. L'algorithme s'arrête quand tout le domaine de décision est exploré.

Soit le problème (MOLPE) suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \max z_1(x) = c^1 x \\ \max z_2(x) = c^2 x \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \max z_r(x) = c^r x \\ \quad s. c \\ \quad x \in S \\ \quad x \text{ entier} \end{array} \right.$$

Cet algorithme adopte les mêmes notations que celles de la méthode de Gupta.

Procédure

Etape 1 : Résoudre le problème (P_1) et trouver la solution optimale entière x_1^1 du problème dans S_1 et construire Γ_1 .

Si $\Gamma_1 = \emptyset$, x_1^1 est l'unique solution optimale entière du problème (P_1) de valeur Z_1^1 .

- Calculer les valeurs de z_i^1 , $i \in 2, \dots, r$ et enregistrer $(z_1^1, z_2^1, \dots, z_r^1)$ comme étant le premier r-uplet.
- Tronquer le point x_1^1 par la coupe $\sum_{j \in N_1} x_j \geq 1$.

En appliquant la méthode duale du simplexe et des coupes de Gomory si nécessaire, on obtient une solution réalisable entière x_2^1 dans la région tronquée S_2

- Lire le r-uplet correspondant $(z_1^1, z_2^1, \dots, z_r^1)$ et l'ajouter à $\mathbb{E}ff_0$ s'il n'est pas dominé par l'un des r-uplets efficaces pour obtenir $\mathbb{E}ff_1$.

Si $\Gamma_1 \neq \emptyset$ choisir un indice $j_1 \in \Gamma_1$ et calculer le nombre θ_{j_1} correspond à x_1^1 .

- Si $\theta_{j_1} < 1$ choisir un indice $j_1 \in \Gamma_1$ et appliquer la coupe : $\sum_{j \in N_1 - j_1} x_j \geq 1$
 - En appliquant la méthode duale du simplexe et si nécessaire des coupes de Gomory successives, on obtient une solution réalisable entière x_2^1 dans la région tronquée S_2 .
 - Enregistrer $(z_1^2, z_2^2, \dots, z_r^2)$ r-uplet dans $\mathbb{E}ff_0$ s'il n'est pas dominé par l'un des r-uplets efficaces précédemment déterminés pour obtenir $\mathbb{E}ff_1$
- Si $\theta_{j_1} \geq 1$, déterminer toutes les solutions entières réalisables $x_1^q, q \in \{2, \dots, p_k\}$ alternatives à x_1^1 le long de l'arête E_{j_1} .
 - Tronquer le point x_1^1 par la coupe $\sum_{j \in N_1} x_j \geq 1$.
 - En appliquant la méthode duale du simplexe et des coupes de Gomory si nécessaire, on obtient une solution réalisable entière x_2^1 dans la région tronquée S_2 . Lire le r-uplet correspondant $(z_1^1, z_2^1, \dots, z_r^1)$ et l'ajouter à $\mathbb{E}ff_0$ s'il n'est pas dominé par l'un des r-uplets efficaces pour obtenir $\mathbb{E}ff_1$.

Exemple numérique

Soit le problème de programmation linéaire en nombres entiers à trois critères définis par ce qui suit :

$$(P) \begin{cases} \max z_1(x) = c^1 x = x_1 + 2x_2 \\ \max z_2(x) = c^2 x = 3x_1 - 2x_2 \\ \max z_3(x) = c^3 x = -x_1 + 2x_2 \\ \text{s. c} \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ 2x_1 \leq 11 \\ 2x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ \text{et entiers} \end{cases}$$

Etape 1 :

Résoudre le problème relâché (P_1) suivant :

$$(P_1) \begin{cases} \max z_1(x) = c^1 x = x_1 + 2x_2 \\ \text{s. c} \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ 2x_1 \leq 11 \\ 2x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution de base réalisable optimale de la région tronquée S_1 est donnée par le tableau II.1 suivant :

| B | x_B | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 |
|-------|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_1 | 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 |
| x_4 | 3 | 0 | 0 | -2 | 1 | 0 | 2 |
| x_2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| x_5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -2 |
| 10 | $z_j^1 - C_j^1$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | $z_j^2 - C_j^1$ | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | -5 |
| 2 | $z_j^3 - C_j^1$ | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 3 |

Tableau II.1

Chapitre II Optimisation linéaire multicritère en nombres entiers

$$I_1 = \{1,2,4,5\}, N_1 = \{3,6\}, \Gamma_1 = \left\{ \frac{j}{j} \in N_1, Z_{1,j}^1 - C_j^1 > 0 \text{ et } z_{1,j}^1 - C_j^1 = 0 \right\} = \emptyset,$$

$$z_1^1 = z_1(x_1^1) = 10, z_2^1 = z_2(x_1^1) = 6, z_3^1 = z_3(x_1^1) = 2$$

L'unique solution optimale $x_1^1 = (4,3)$ produit le premier triplet efficace $(10,6,2)$ par suite, $Eff_0 = \{(10,6,2)\}$

Etape2 :

$\Gamma_1 = \emptyset$, x_1^1 est unique. Ce point entier est tronqué en utilisant la coupe $x_3 + x_6 \geq 1$.

En utilisant le dual du simplexe, on obtient une solution réalisable $x_2^1 = (3,3)$ donnée par le tableau 2 optimal suivant

| B | x_B | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 |
|-------|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -2 | 1 |
| x_4 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | -2 |
| x_2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x_5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -2 | 0 |
| x_3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | -1 |
| 9 | $z_j^1 - C_j^1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | $z_j^2 - C_j^1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -8 | 3 |
| 3 | $z_j^3 - C_j^1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | -1 |

Tableau II.2

Le triplet $(9,3,3)$ correspondant à x_2^1 est non dominé par rapport aux précédents points de Eff_0 . Par conséquent, il est rajouté à Eff_0 pour obtenir $Eff_1 = \{(10,6,2), (9,3,3)\}$ avec :

$$I_2 = \{1,2,4,5\}, N_2 = \{6,7\}, \Gamma_2 = \{6\}$$

Etape3 :

Comme $\Gamma_2 \neq \emptyset$, prendre $j_2 = 6$. Après examen de l'arête E_6 , on a :

$$\theta_{j_2} \leq \min \left\{ \frac{5}{4}, 3, 1 \right\} = 1$$

La solution alternative $x_2^2 = (5,2)$ donne le triplet non dominé $(9,11,-1)$. Donc on augmente $Eff_2 = Eff_1 \cup (9,11,-1)$.

Chapitre II Optimisation linéaire multicritère en nombres entiers

L'arête E_6 est tronquée par la coupe : $x_7 \geq 1$, i.e. $-x_7 + x_8 = -1$ où x_8 est une variable d'écart.

Comme $x_8 = -1$, la solution ne sera pas réalisable. Donc, en appliquant la méthode duale du simplexe, on obtient une solution entière réalisable $x_3^1 = (2,3)$ dont le triplet correspondant $(8,0,4)$ est non dominé.

Etape 4 :

$\Gamma_3 \neq \emptyset$, prendre $j_3 = 6$. L'arête E_6 est examinée. $\emptyset_{j_3} \leq \min\left\{\frac{7}{4}, 3, 2\right\} = \frac{7}{4}$.

La solution alternative $x_3^2 = (4,2)$ relative au triplet $(8, 8,0)$ est non dominé par les triplets efficaces précédents. Donc $Eff_3 = Eff_2 \cup (8,8,0)$ procédant de la même manière, nous obtenons $Eff_9 =$

$\{(10,6,2), (9,3,3), (9,11, -1), (8,0,4), (8,8,0), (7, -3, 5), (7,13, -3), (6, -6,6), (5,15, -5)\}$

et une solution entière réalisable $x_{10}^1 = (1,0)$ donnant un triplet respectif dominé $(1,3, -1)$.

Donc : $Eff_{10} = Eff_9$, $I_{10} = \{1, k, 16\}$, $N_{10} = \{17,18\}$, $\Gamma_{10} = \{18\}$

Etape 11 : $\Gamma_{10} \neq \emptyset$, prendre $j_{10} = 18$. L'arête E_{18} est parcourue induisant $\emptyset_{j_{10}} \leq \min\left\{\frac{9}{4}, 0,6\right\} = 0$ correspondant à la valeur x_2 . La solution ne possède pas de solutions alternatives sur cette arête. Après sa troncature, le dual du simplexe nous fournit la solution entière réalisable $x_{11}^1 = (0,0)$ avec un triplet relatif dominé $(0, 0,0)$ donné par le tableau II.3 suivant :

| B | x_B | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_{18} | x_{19} |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -2 | 1 |
| x_4 | 11 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 | -2 |
| x_2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x_5 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -2 | 0 |
| x_3 | 7 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 |
| x_6 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 |

Chapitre II Optimisation linéaire multicritère en nombres entiers

| | | | | | | | | | |
|---|-----------------|---|---|---|---|---|---|----|----|
| 0 | $z_j^1 - C_j^1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | $z_j^2 - C_j^1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -8 | 3 |
| 0 | $z_j^3 - C_j^1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | -1 |

Tableau II.3

$I_{11} = \{1, k, 17\}$, $N_{11} = \{18, 19\}$, $\Gamma_{11} = \{18\}$.

Etape 12 :

$\Gamma_{11} \neq \emptyset$, prendre $j_{11} = 18$. La troncature de l'arête E_{18} donne $\emptyset_{j_{11}} \leq \min\left\{\frac{11}{4}, 0,7\right\} = 0$ correspondant à la valeur x_2 . La solution x_{11}^1 n'a pas d'alternatives sur cette arête. La troncature de l'arête E_{18} suivie de l'application du dual du simplexe provoque l'impossibilité de l'opération de pivot indiquant ainsi que toutes les solutions efficaces du problème (P) ont été trouvées. Cette infaisabilité est donnée par le tableau II.4

| B | x_B | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|----------|-----------------|------|---|---|---|---|---|------|---|
| x_6 | 3,5 | -0,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -0,5 | 1 |
| x_4 | 11 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_2 | -0,5 | 0,5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,5 | 0 |
| x_5 | 8 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| x_3 | 7,5 | 0,5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -0,5 | 1 |
| x_{21} | -0,5 | -0,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0,5 | 1 |
| -1 | $z_j^1 - C_j^1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | $z_j^2 - C_j^1$ | -4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| -1 | $z_j^3 - C_j^1$ | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Tableau II.4

La variable x_2 est sélectionnée pour sortir de la base B et x_1 ou x_{20} est la variable hors base entant en principe dans la base B, mais le vecteur ligne $a_{3,j}$ est positif ou nul. Ceci implique que l'opération pivot est impossible. Donc, il n'y a plus de solutions entières réalisables.

L'inconvénient principal de cette méthode est qu'il faut passer par tous les points entiers de la région réalisable. A chaque fois, on effectue un test pour former l'ensemble des r-uplets

Chapitre II Optimisation linéaire multicritère en nombres entiers

efficaces correspondants. Même si toutes les solutions efficaces ont été trouvées, tant qu'il reste des points entiers non visités dans la région réalisable, la procédure continue son déroulement.

II.4.4 Méthode de Sylva et Crema [22]

Cette méthode est une abréviation de la méthode de Klein et Hannan où au lieu d'optimiser à chaque étape une fonction objectif, on optimisera une combinaison positive de toutes les fonctions objectifs.

Théorème 8 : Si x^* est une solution optimale du problème à un seul critère $\max\{\lambda^t Cx\}$ pour un certain $\lambda \in R^n, \lambda > 0$, alors, x^* est une solution efficace du problème

$$\max\{Cx: x \in S\}$$

Proposition 1 : Soit x_1, x_2, \dots, x_l des solutions efficaces du problème, et soit x^* une solution efficace de

$$(P_l) : \max\{Cx: x \in \text{eff} - \cup_{s=1}^l D_s\}$$

alors x^* est une solution pour le problème principal.

II.4.4.1 Algorithme

Etape 1 : Choisir un vecteur $\lambda > 0$ et résoudre le problème à un seul critère suivant :

$$(P_0) \max\{\lambda^t Cx: Ax = b, x \geq 0, x \in Z_n^+\}$$

- Si (P_0) n'admet pas de solution, alors, le problème (MOLPE) n'admet pas de solution.
- Sinon, la solution optimale trouvée x_1 est efficace conformément au théorème 8.

Etape j : ($j \geq 1$)

Résoudre le problème :

$$(P_l) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } \lambda^t Cx \\ \text{s. c} \\ Ax = b \\ (Cx)_k \geq [(Cx^s)_k] y_k^s - M_k(1 - y_k^s) \\ \text{pour } s = 1, \dots, j-1; k = 1, \dots, p \\ \sum_{k=1}^p y_k^s \geq 1, y_k^s \in \{0,1\} \\ x \geq 0, x \in Z^n \end{array} \right.$$

Où : $-M_k$ est la borne inférieure pour toute valeur réalisable de la $k^{\text{ème}}$ fonction objectif.

Chapitre II Optimisation linéaire multicritère en nombres entiers

Pour un problème à une grande dimension, l'énumération de toutes les solution efficaces n'est pas pratique, alors, les sous ensemble efficaces sont générés en changeant le problème (P_l) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } \lambda^t Cx \\ \text{s. c} \\ Ax = b \\ (Cx)_k \geq [(Cx^s)_k + f_k]y_k^s - M_k(1 - y_k^s) \\ \text{pour } s = 1, \dots, j - 1; k = 1, \dots, p \\ \sum_{k=1}^p y_k^s \geq 1, y_k^s \in \{0,1\} \\ x \geq 0, x \in Z^n \end{array} \right.$$

Où : f_k est l'amélioration souhaitée pour la $k^{\text{ème}}$ fonction objectif.

Cette méthode peut résoudre les problèmes à deux fonctions objectifs, cependant, elle n'est pas performante pour un problème avec un très large nombre d'objectifs car l'énumération complète de tous les vecteurs non dominés est impossible, mais elle peut tout de même générer un ensemble partiel de solutions.

II.4.4.4 Exemple illustrative

Pour illustrer la technique, nous considérons le (MOLPE) à deux fonctions objectifs suivant :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max z_1 = x_1 - 2x_2 \\ \max z_2 = -x_1 + 3x_2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \in \{0,1,2\} \end{array} \right.$$

On pose $M_1 = 4$, $M_2 = 2$, les bornes inférieures des objectifs z_1 , z_2 , $f_k = 1, \forall k$ et $\lambda = (4,3)$

La fonction scalarisante est donnée par : $z_\lambda = x_1 + x_2$

Soit

$$(P_0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max z_\lambda = x_1 - 2x_2 \\ \text{S. C} \\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \in \{0,1,2\} \end{array} \right.$$

La résolution du problème (P_0) donne $x_1 = (2,2)$ de valeur optimale $z_\lambda(P_0) = 4$. Donc, x_1 est une solution efficace du problème (P) correspondant au vecteur non dominé $(-2,4)$ (voir la figure II.4.4.1)

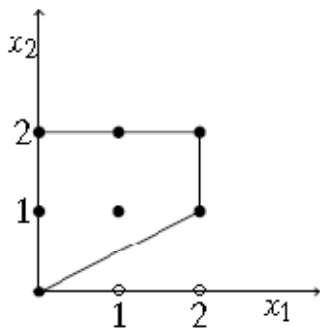


Fig. II.2 espace des décisions de (P)

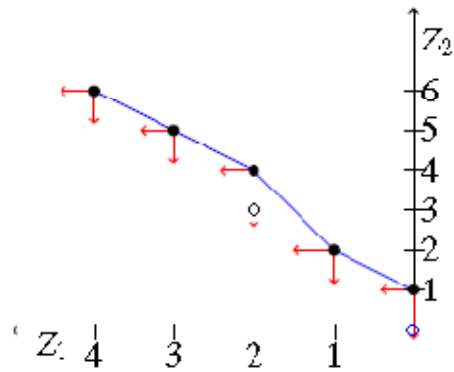


Fig. II.3 espace des critères de (P).

Le deuxième problème à résoudre est :

$$(P_1) \begin{cases} \max z_\lambda = x_1 - 2x_2 \\ x_1 - 2x_2 \geq -y_1^1 - 4(1 - y_1^1) \\ -x_1 + 3x_2 \geq 5y_2^1 - 2(1 - y_2^1) \\ y_1^1 + y_2^1 \geq 1 \\ x_1, x_2 \in \{0,1,2\} \\ y_1^1, y_2^1 \in \{0,1\} \end{cases}$$

La résolution de (P_1) donne $x_1 = 2, x_2 = 1, y_1^1 = 1, y_2^1 = 0$ avec valeur optimale $z_\lambda(P_1) = 4$. Donc $x_2 = (2,1)$ est un autre point efficace correspondant au couple non dominé $(0,1)$.

Formons le problème suivant (P_2) en ajoutant au domaine précédent D_1 de (P_1) cinq contraintes :

$$(P_2) \begin{cases} \max z_\lambda = x_1 - 2x_2 \\ x \in D_1 \\ x_1 - 2x_2 \geq -y_1^2 - 4(1 - y_1^2) \\ -x_1 + 3x_2 \geq 5y_2^2 - 2(1 - y_2^2) \\ y_1^2 + y_2^2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \in \{0,1,2\} \\ y_1^2, y_2^2 \in \{0,1\} \end{cases}$$

Une solution optimale à ce problème est $x_1 = 1, x_2 = 2, y_1^1 = y_1^2 = 1, y_2^1 = y_2^2 = 0$ avec valeur optimale $z_\lambda(P_2) = 2$. Cela correspond à un nouveau point efficace $x_3 = (1,2)$ avec un vecteur des valeurs des fonctions objectif égal à $(-3,5)$.

En ajoutant des contraintes qui effacent seulement le point efficace x_3 , on obtient le problème (P_3) :

$$(P_3) \quad \begin{cases} \max Z_\lambda = x_1 - 2x_2 \\ x \in D_2 \\ x_1 - 2x_2 \geq -y_1^3 - 4(1 - y_1^3) \\ -x_1 + 3x_2 \geq 5y_2^3 - 2(1 - y_2^3) \\ y_1^3 + y_2^3 \geq 1 \\ x_1, x_2 \in \{0,1,2\} \\ y_1^3, y_2^3 \in \{0,1\} \end{cases}$$

Une solution optimale au dernier problème est $x_1 = 0, x_2 = 2, y_1^1 = y_1^2 = y_1^3 = 0, y_2^1 = y_2^2 = y_2^3 = 1$ avec valeur optimale $z_\lambda(P_3) = 2$. Cela correspond à un nouveau point efficace $x_3 = (0,2)$ avec un vecteur des valeurs des fonctions objectif égal à $(-4,6)$:

Maintenant, problème (P_4) est défini :

$$(P_4) \quad \begin{cases} \max z_\lambda = x_1 - 2x_2 \\ x \in D_3 \\ x_1 - 2x_2 \geq -y_1^4 - 4(1 - y_1^4) \\ -x_1 + 3x_2 \geq 5y_2^4 - 2(1 - y_2^4) \\ y_1^4 + y_2^4 \geq 1 \\ x_1, x_2 \in \{0,1,2\} \\ y_1^4, y_2^4 \in \{0,1\} \end{cases}$$

Ce problème a un seul point réalisable $x_1 = x_2 = 1, y_1^1 = y_1^4 = y_1^3 = 1, y_1^2 = 0, y_2^1 = y_2^3 = y_2^4 = 0, y_2^2 = 1$ avec la valeur optimale $z_\lambda(P_3) = 2$. Cela correspond à un nouveau point efficace $x_4 = (1,1)$ avec un vecteur des valeurs des fonctions objectif égal à $(1,2)$.

Le prochain problème être résolu est le suivant :

$$(P_5) \quad \begin{cases} \max z_\lambda = x_1 - 2x_2 \\ x \in D_4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -y_1^5 - 4(1 - y_1^5) \\ -x_1 + 3x_2 \geq 5y_2^5 - 2(1 - y_2^5) \\ y_1^5 + y_2^5 \geq 1 \\ x_1, x_2 \in \{0,1,2\} \\ y_1^5, y_2^5 \in \{0,1\} \end{cases}$$

Comme ce problème est irréalisable, le processus s'arrête et nous avons l'ensemble complet de vecteurs objectifs non dominés ainsi que les points efficaces correspondants.

| (x_1, x_2) | (Z_1, Z_2) |
|--------------|--------------|
| (2,2) | (-2,4) |
| (2,1) | (0,1) |
| (1,2) | (-3,5) |
| (0,2) | (-4,6) |
| (1,1) | (-1,2) |

Tableau II.5 : Les solutions du problème (P)

L'inconvénient principal de cette méthode est qu'à chaque itération on ajoute plusieurs contraintes et variables en même temps, ce qui implique que la taille du problème augmente d'une itération à une autre.

III.1 Introduction

Les programmes fractionnaires consistent à optimiser un objectif donné sous forme d'un quotient de deux fonctions soumis à un ensemble de contraintes. Différentes versions de ce modèle existent. En ce qui concerne les objectifs, ils peuvent être linéaires ou non linéaires. Les variables peuvent être entières, binaires, continues ou mixtes. Les programmes fractionnaires apparaissent dans plusieurs domaines tels que les bases de données, l'optimisation combinatoire, la programmation stochastique et l'économie.

Dans ce chapitre, nous intéresserons uniquement aux problèmes fractionnaires linéaires dits problèmes hyperboliques. Nous allons présenter les trois grandes stratégies de résolution de ces problèmes : la résolution directe, la résolution par paramétrisation et la résolution d'un problème équivalent à objectifs simplifiés.

III.2 Présentation et géométrie d'un programme linéaire fractionnaire

Mathématiquement, un programme fractionnaire linéaire se présente comme suit :

$$(P) \begin{cases} \text{maximiser } Z(x) = \frac{c^t x + \alpha}{d^t x + \beta} \\ \text{s.c. } x \in S \end{cases}$$

Où $S = \{x \in \mathcal{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$, $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $b \in \mathcal{R}^m$; c et $d \in \mathcal{R}^n$ et $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$.

avec $d^t x + \beta > 0$ pour tout $x \in S$.

Les programmes linéaires fractionnaires présentent un intérêt particulier mis en évidence par la linéarité des courbes niveaux de leurs fonctions critères. En effet, pour illustrer cet aspect, considérons une \bar{Z} - courbe niveau quelconque de la fonction critère :

$$\bar{Z} = \frac{c^t x + \alpha}{d^t x + \beta}$$

Après simplification, nous obtenons :

$$\bar{Z}(d^t x + \beta) = c^t x + \alpha$$

Ce qui entraîne

$$\bar{Z}\beta - \alpha = (c - \bar{Z}d)^t x$$

qui est une expression linéaire de la \bar{Z} - courbe niveau de la fonction critère. Puisque \bar{Z} est quelconque, on voit que chaque courbe niveau du critère fractionnaire linéaire est linéaire sur S , à condition que le dénominateur ne soit pas nul sur S . Donc, si un programme fractionnaire linéaire mono-objectif possède une solution optimale, alors au moins un point extrême de S est optimal.

En dépit de la linéarité de la courbe niveau de la fonction objectif, les courbes niveaux ne sont pas parallèles (lorsque $c \neq 0, d \neq 0$ et $c \neq wd$ pour tout $w \in \mathcal{R}$) comme ils le sont en

Chapitre III Programmation fractionnaire linéaire uni-critère

programmation linéaire. L'ensemble rotation est l'ensemble de tous les points d'intersection entre la 0-courbe niveau du numérateur et la 0-courbe niveau du dénominateur.

L'ensemble rotation est appelé point de rotation dans \mathcal{R}^2 et axe de rotation dans \mathcal{R}^3 . Les points de cet ensemble sont déterminés par la résolution du système suivant :

$$\begin{aligned} c^t x &= -\alpha \\ d^t x &= -\beta \end{aligned}$$

Exemple illustratif

Considérons le programme fractionnaire linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } Z = \frac{x_1 + x_2 - 1}{5x_1 + x_2 - 1} \\ \text{S.C} \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

dont le graphe est donné par la figure suivante :

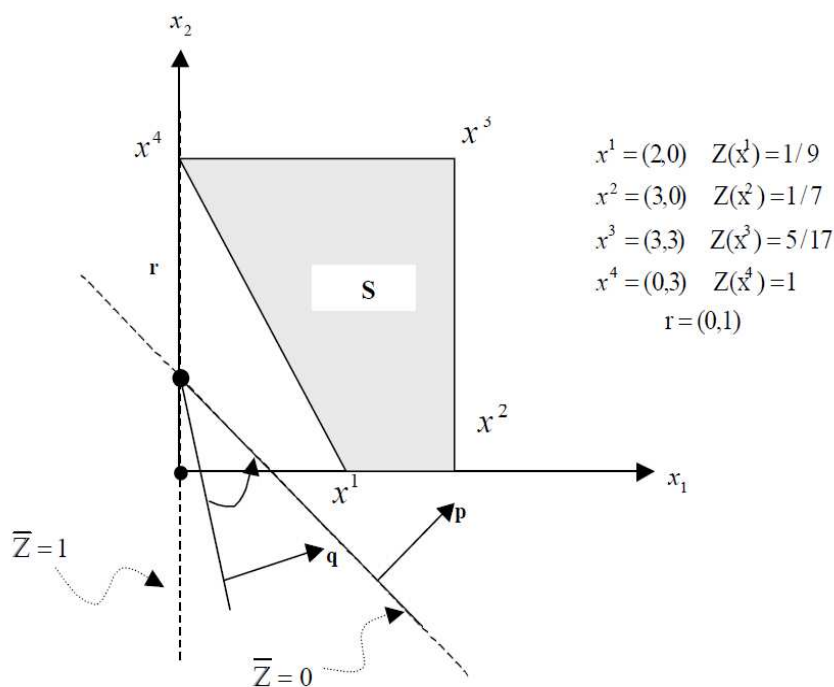


Fig. III.1 : Graphe de l'exemple

Donc la courbe de niveau \bar{Z} est l'ensemble des points $x = (x_1, x_2)$ satisfaisant l'équation :

$$(1 - 5\bar{Z})x_1 + (1 - \bar{Z})x_2 = (1 - \bar{Z})$$

Donc pour :

$$\bar{Z} = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 1 : \text{ Courbe de niveau 0}$$

$$\bar{Z} = 1 \Leftrightarrow x_1 = 0 : \text{ Courbe de niveau 1}$$

Le problème a quatre points extrêmes x_1, x_2, x_3 et x_4 dont les valeurs du critère sont indiquées sur la figure précédente. Les lignes discontinues représentent les 0-courbes niveaux du numérateur et du dénominateur dont l'intersection est le point de rotation $r = (0, 1)$.

La flèche circulaire dénote le gradient de la fonction fractionnaire linéaire critère et indique le sens et l'angle avec lequel se déplacent les courbes de niveaux. Donc, en faisant déplacer la courbe de niveau 0 autour du point de rotation suivant le sens de rotation trigonométrique, nous pouvons voir que le point optimal x_4 de valeur optimale $Z^* = 1$ est l'intersection du domaine S avec la courbe de niveau $\bar{Z} = 1$.

III.3 Stratégies de résolution d'un programme fractionnaire linéaire

Dans la littérature émergent trois grandes stratégies de résolution d'un programme fractionnaire.

III.3.1 La résolution directe

Elle est utilisée pour les problèmes hyperboliques en variables continues et entières. Le programme est traité sous la forme originale, c'est-à-dire sans modifier ni l'objectif ni l'ensemble des contraintes.

III.3.1.1 Programme hyperbolique continu

Plusieurs approches furent élaborées pour la recherche d'une solution optimale d'un programme hyperbolique en variables continues [6], [11], [16], [20]. On cite, en particulier celle de Cambini et al. [7] qui permet d'optimiser le problème hyperbolique sur un domaine de solution réalisables S non borné.

Considérons donc le programme hyperbolique continu (P) :

$$(P) \begin{cases} \text{maximiser } Z(x) = \frac{c x + \alpha}{d x + \beta} \\ \text{s. c. } Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Où α et $\beta \in \mathcal{R}$, c et $d \in \mathcal{R}^n$, $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathcal{R}^m$.

Désignons par $S = \{x \in \mathcal{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$.

Dans l'algorithme de Cambini, la forme initiale de la fonction objectif et la structure des contraintes sont maintenues. Les itérations sont exécutées dans un tableau simplexe augmenté qui compte $(m+3)$ lignes. Les m premières lignes correspondent aux contraintes initiales, la $(m+1)$ ième et $(m+2)$ ième lignes représentent le numérateur et le dénominateur de la fonction objectif fractionnaire respectivement. La dernière ligne correspond au gradient réduit de la fonction critère $\bar{\gamma}_j$.

Chapitre III Programmation fractionnaire linéaire uni-critère

Dans chaque itération de l'algorithme, les $(m+2)$ premières lignes sont modifiées selon l'opération de pivot habituelle, par contre la dernière ligne est mise à jour via la formule $\bar{\gamma}_j$.

Théorème 1 [5] : Le point x^0 de S est une solution optimale du problème (P) si et seulement si le vecteur gradient réduit $\bar{\gamma}_j = \bar{\alpha}_j \bar{d}_j - \bar{\beta}_j \bar{c}_j$ est tel que $\bar{\gamma}_j \leq 0$ pour tout indice hors base $j \in N$.

Corollaire 1 [5] : La solution optimale x^0 du problème (P) est unique si et seulement si le vecteur gradient réduit $\bar{\gamma}_j$ est tel que $\bar{\gamma}_j < 0$ pour tout indice $j \in N$.

L'algorithme génère une séquence finie $x_i, i = 1, \dots, k$ de solutions niveau optimales dont la première est trouvée de la façon suivante :

Résoudre le problème linéaire

$$(P_0) \begin{cases} \min(dx + \beta) \\ \text{s. c } x \in S \end{cases}$$

Soit x^0 sa solution optimale.

Si x^0 est unique, alors elle est aussi une solution niveau optimale, sinon résoudre le problème linéaire (P₁) :

$$(P_1) \begin{cases} \max(cx + \alpha) \\ \text{s. c } dx = dx^0 \\ x \in S \end{cases}$$

Si (P₁) n'a pas de solution, alors la valeur de la fonction objectif est infinie; sinon une solution optimale x^1 de (P₁) est aussi une solution niveau optimale de (P).

Algorithme :

Etape 1 : Trouver la solution optimale niveau x^1 .

Si une telle solution n'existe pas, alors $\sup_{x \in S} Z(x) = +\infty$. Terminer.

Sinon, poser $k = 1$ et aller à l'étape 2.

Etape 2 : Si $J = \{j/\bar{d}_j > 0\} = \emptyset$, terminer x^i est une solution optimale du problème (P).

Sinon, soit k tel que :

$$\frac{\bar{c}_k}{\bar{d}_k} = \max \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{d}_j}, j \in N; \bar{d}_j > 0 \right\}$$

Si $\bar{\gamma}_k > 0$, aller à l'étape 3.

si $\bar{\gamma}_k \leq 0$, terminer. x^i est une solution optimale de (P).

Etape 3 : La variable hors base x^k ; $k \in N$ entre dans la base moyennant une opération pivot.

Si une telle opération est possible, poser $i = i + 1$ et aller à l'étape 2.

Si une telle opération n'est pas possible. Terminer : $\sup_{x \in S} Z(x) = \frac{\bar{c}_k}{\bar{d}_k}$

Exemple d'application

Chapitre III Programmation fractionnaire linéaire uni-critère

Considérons le problème fractionnaire linéaire suivant :

$$(P) \begin{cases} \max \frac{3x_1 - x_2 - 22}{x_1 + 2x_2 + 2} \\ x_1 - 2x_2 \leq 3; \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 54; \\ x_2 \leq 8; \\ -2x_1 + x_2 \leq 4; \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

L'application de l'algorithme de Cambini débute par :

Etape 1 : La résolution graphique du problème $(P_0) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2 \\ s. c x \in S \end{cases}$ produit la solution de niveau optimale $x^0 = (0,0)$, en utilisant la méthode graphique. Le graphe du problème (P_0) est présenté dans la figure suivante :

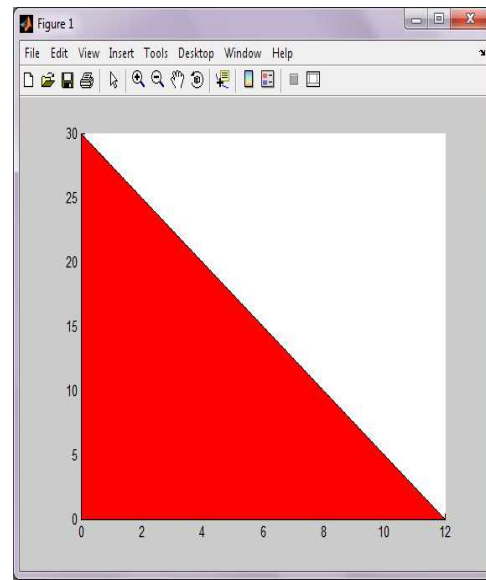


Fig. III.2 : solution de niveau optimal

Etape 2 : Le tableau simplexe associé à la solution x^0 est :

| | | | | | | | |
|-------|----|----|----|---|---|---|---|
| c | 22 | 3 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| d | -2 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_3 | 3 | 1 | -2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x_4 | 54 | 5 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x_5 | 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x_6 | 4 | -2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Tableau III.1

Chapitre III Programmation fractionnaire linéaire uni-critère

La première et la deuxième ligne représentent les coûts réduits du numérateur et du dénominateur respectivement.

$$d = (3, -1), \quad c = (1, 2), \quad B = \{3, 4, 5, 6\}, \quad N = \{1, 2\}.$$

Calculons les valeurs du vecteur gradient réduit de la fonction objectif tels que :

$$\bar{\gamma}_j = \bar{\alpha}_j \bar{d}_j - \bar{\beta}_j \bar{c}_j \quad \forall j \in N$$

On obtient

$$\bar{\gamma}_j = 2(3, -1) + 22(1, 2) = (28, 42)$$

A ce niveau nous remarquons que $\bar{\gamma}_j > 0, \forall j \in N$ et nous avons :

$$\frac{\bar{c}_k}{\bar{d}_k} = \max \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{d}_j}, j \in N; \bar{d}_j > 0 \right\} = \max \left\{ 3, -\frac{1}{2} \right\} = 3$$

$k = 1$. Donc la solution $x^1 = (3, 0)$ n'est pas optimale.

Étape3 : La variable x_1 entre dans la base et la ligne de pivot correspondante est la troisième ligne, d'où x_3 sort de la base.

Poser :

$B = \{1, 4, 5, 6\}, N = \{2, 3\}$ et aller à l'étape 2

| | | | | | | | |
|-------|----|---|----|----|---|---|---|
| c | 13 | 0 | 5 | -3 | 0 | 0 | 0 |
| d | -5 | 0 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x_1 | 3 | 1 | -2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x_4 | 39 | 0 | 13 | -5 | 1 | 0 | 0 |
| x_5 | 8 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x_6 | 10 | 0 | -3 | 2 | 0 | 0 | 1 |

Tableau III.2

À cette étape les valeurs du vecteur gradient réduit est:

$$\bar{\gamma}_j = 5(5, -3) + 13(4, 1) = (77, -2)$$

On remarque que $\bar{\gamma}_1 > 0$, donc la solution $x^1 = (3, 0)$ n'est pas optimale

$$\frac{\bar{c}_k}{\bar{d}_k} = \max \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{d}_j}, j \in N; \bar{d}_j > 0 \right\} = \max \left\{ 5/4, -\frac{3}{1} \right\} = 5/4, \text{ aller à l'étape 2}$$

x_1 entre dans la base et x_4 en sort.

Le tableau de simplexe correspondant est :

| | | | | | | | |
|-------|-----|---|---|--------|-------|---|---|
| c | -2 | 0 | 0 | -14/13 | -5/13 | 0 | 0 |
| d | -17 | 0 | 0 | 7/13 | -4/13 | 0 | 0 |
| x_1 | 9 | 1 | 0 | 3/13 | 2/13 | 0 | 0 |
| x_2 | 3 | 0 | 1 | -5/13 | 1/13 | 0 | 0 |
| x_5 | 5 | 0 | 0 | 5/13 | -1/13 | 1 | 0 |
| x_6 | 19 | 0 | 0 | 11/13 | 3/13 | 0 | 1 |

Tableau III.3

$$\bar{\gamma}_j = 17(-14/13, -5/13) + 2\left(\frac{7}{13}, -4/13\right)$$

$$\bar{\gamma}_j = (-252/13, -77/13)$$

Nous avons $\bar{\gamma}_j \leq 0$, $j \in N$. Ceci entraîne la fin du déroulement de l'algorithme.

D'où, la solution optimale du problème fractionnaire linéaire (P) est :

$$x_{opt} = (9,3), \quad Z_{opt} = 2/17$$

III.3.1.2 Problème hyperbolique à variables entières

Considérons, le problème de programmation fractionnaire linéaire en nombres entiers suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{maximiser } Z(x) = \frac{c x + \alpha}{d x + \beta} \\ \text{s.c. } Ax \leq b \\ x \geq 0, x \text{ entier} \end{cases}$$

Dans la méthode de Granot et al. [13], on rajoute aux m premières lignes de la matrice des contraintes A, les trois lignes (m+1), (m+2) et (m+3) relatives respectivement au vecteur numérateur c, dominateur d et aux valeurs du gradient réduit $\bar{\gamma}_j$ de la fonction objectif où :

$$\bar{\gamma}_j = \bar{\beta}\bar{c}_j - \bar{\alpha}\bar{d}_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

A chaque itération de l'algorithme, les (m+2) lignes sont modifiées à travers les opérations ordinaire de pivot, par contre la dernière ligne est modifiée selon la formule du gradient réduit cité ci-dessus.

Une fois que les valeurs du gradient réduit pour les variables hors base sont calculées, nous faisons le teste suivant :

- Si $\bar{\gamma}_j \leq 0$ pour tout indice hors base j, alors la solution ($x_B = \bar{\alpha}_0, x_N = 0$) est une solution optimale du problème (P) où B est l'ensemble des indices de base et N est celui des indices hors base.
- Sinon, il existe un indice k, $k \in N$ pour lequel $\bar{\gamma}_k > 0$.
Soit $\theta_k = \min\{\bar{\alpha}_{i0}/\bar{\alpha}_{ik}; \bar{\alpha}_{i0} > 0\}$

Alors toute ligne v, pour laquelle $[\bar{\alpha}_{v0}/\bar{\alpha}_{vk}] \leq \theta_k$ peut servir comme une ligne source pour générer une coupe de Gomory de la forme :

$$s + \sum_{j \in I_N} [\bar{\alpha}_{vj}/\bar{\alpha}_{vk}] x_j = [\bar{\alpha}_{v0}/\bar{\alpha}_{vk}], \quad s \geq 0$$

Cette coupe peut être rajoutée au problème initial et servir comme ligne pivot avec la k^{ième} colonne comme une colonne pivot. Puisque la valeur du pivot dans ce cas est $[\bar{\alpha}_{v0}/\bar{\alpha}_{vk}] = 1$, les nouveaux coefficients obtenus après l'opération de pivot usuelle sont tous entiers. Ici, [] désigne de la partie entière d'un nombre réel.

III.3.2 Résolution par paramétrisation [11]

A l'inverse de la résolution directe on construit un problème à objectif simplifié, combinaison linéaire du numérateur et du dénominateur par l'intermédiaire d'un paramètre λ tout en gardant inchangé l'ensemble des contraintes.

Une séquence de résolution de ce type de problème fournit une solution du programme fractionnaire. Cette méthode a été utilisée pour les différents programmes fractionnaires linéaires et non linéaires, en variables continues comme en variables discrètes sur des domaines bornés.

Soit le programme hyperbolique suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{maximiser } Z(x) = \frac{c x + \alpha}{d x + \beta} \\ \text{s.c. } Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Le programme paramétré correspondant au problème initial (P) est un programme linéaire dont l'objectif est en fonction de $\lambda \in \mathcal{R}$:

$$(\varphi(\lambda)) \begin{cases} \text{maximiser } (c - \lambda d)x + (\alpha - \lambda\beta) \\ \text{s.c. } Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Notons λ^* la valeur optimale de $\varphi(\lambda)$, le résultat fondamental liant le programme fractionnaire au programme paramétré associé est donné par :

Proposition 1: Toute solution optimale de $\varphi(\lambda^*)$ est une solution optimale de (P).

L'approche adoptée au cas des programmes fractionnaires en nombres entiers est présentée comme suit :

Algorithme

Étape 1 : soit x_0 une solution réalisable de (P), poser $i = 0$.

Étape 2 : poser $e_{i+1} = \frac{c x_i + \alpha}{d x_i + \beta}$.

Résoudre le problème linéaire en nombres entiers $\varphi(\lambda_{i+1})$.

Si x_i est une solution optimale de $\varphi(\lambda_{i+1})$, alors x_i est une solution optimale de (P).

Sinon, soit x_{i+1} une solution de $(\varphi(\lambda_{i+1}))$. poser $i = i + 1$ et répéter l'étape 2.

III.3.3 Résolution d'un problème équivalent à objectif non fractionnaire [6]

La transformation du programme fractionnaire linéaire en un programme équivalent à objectif non fractionnaire est obtenue par un changement de variables. A l'inverse de l'approche paramétrique, ce changement de variables induit l'ajout d'une contrainte et d'une variable. Plus précisément, cette transformation s'effectue en introduisant deux nouvelles variables

$$y = \left(\frac{1}{d x + \beta}\right) x \quad \text{et} \quad t = \frac{1}{d x + \beta} \quad \text{pour aboutir à un programme linéaire équivalent :}$$

$$(PE) \begin{cases} \max cy + \alpha t \\ \text{s. c } Ay - bt \leq 0 \\ dy + \beta t = 1 \\ y; t \geq 0 \end{cases}$$

Cette notion d'équivalence est précisée ci-dessous :

Proposition 2 [12] : Si (y^*, t^*) est une solution optimale de (PE), alors $t^* > 0$ et $x^* = \frac{y^*}{t^*}$ est une solution optimale de (P).

En fait, s'il existe une solution réalisable x telle que $\frac{cx + \alpha}{dx + \beta} > 0$, la contrainte d'égalité $dy + \beta t = 1$ peut être remplacée par la contrainte d'inégalité $dy + \beta t \leq 1$.

Exemple d'application :

Considérons le programme fractionnaire linéaire suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{maximise } Z = \frac{x_2 - 5}{-x_1 - x_2 + 9} \\ \text{s. c } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

En effectuant, le changement de variable, on aboutit à la formulation suivante:

$$(P') \begin{cases} \text{maximiser } y_2 - 5t \\ \text{s. c } \begin{cases} 2y_1 + 5y_2 - 10t \geq 0 \\ 4y_1 + 3y_2 - 20t \leq 0 \\ -y_1 + y_2 - 2t \leq 0 \\ -y_1 - y_2 + 9t = 1 \\ y_1, y_2, t \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Tel que : $y = \left(\frac{1}{-x_1 - x_2 + 9}\right)x$ et $t = \frac{1}{-x_1 - x_2 + 9}$

En ajoutant les variables d'écarts et artificielles nous obtenons:

$$(P') \begin{cases} \text{maximiser } y_2 - 5t - Mw \\ \text{s. c } \begin{cases} -2y_1 - 5y_2 + 10t + \mu_1 = 0 \\ 4y_1 + 3y_2 - 20t + \mu_2 = 0 \\ -y_1 + y_2 - 2t + \mu_3 = 0 \\ -y_1 - y_2 + 9t + w = 1 \\ y_1, y_2, t, \mu_i, w \geq 0; i = 1, 2, 3 \end{cases} \end{cases}$$

Où :

μ_i sont les variables d'écarts, $i = 1, 2, 3$. w est la variable artificielle.

Chapitre III Programmation fractionnaire linéaire uni-critère

Le premier
simplexe est :

| | | | | | | | | |
|---------|---|----|----|-----|---|---|---|---|
| μ_1 | 0 | -2 | -5 | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| μ_2 | 0 | 4 | 3 | -20 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| μ_3 | 0 | -1 | 1 | -2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| W | 1 | -1 | -1 | 9 | 0 | 0 | 0 | 1 |

tableau

Tableau III.4

$y_1 = 0, y_2 = 0$ et $t = 0$ n'est pas optimale ; car on a le vecteur des potentielles:

$$\Delta_3 = t'c_B - c_t = -9M + 5 < 0$$

Après le pivotage, on obtient :

| B | x_B | y_1 | y_2 | t | μ_1 | μ_2 | μ_3 | w |
|---------|-------|-------|-------|-----|---------|---------|---------|---|
| t | 0 | -1/5 | -1/2 | 1 | 1/10 | 0 | 0 | 0 |
| μ_2 | 0 | 0 | -7 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| μ_3 | 0 | -7/5 | 0 | 0 | 1/5 | 0 | 1 | 0 |
| W | 1 | 4/5 | 7/2 | 0 | -9/10 | 0 | 0 | 1 |

Tableau III.5

On a $\Delta_2 = y_2'c_B - c_{y_2} = 3 - 7M/2 < 0$, donc, $(y_1, y_2, t) = (0, 0 ; 0)$ n'est pas optimale

| B | x_B | y_1 | y_2 | t | μ_1 | μ_2 | μ_3 | w |
|---------|-------|-------|-------|-----|---------|---------|---------|-----|
| t | 1/7 | -3/35 | 0 | 1 | -1/35 | 0 | 0 | 1/7 |
| μ_2 | 2 | 8/5 | 0 | 0 | 1/5 | 1 | 0 | 2 |
| μ_3 | 0 | -7/5 | 0 | 0 | 1/5 | 0 | 1 | 0 |
| y_2 | 2/7 | 8/35 | 1 | 0 | -9/35 | 0 | 0 | 2/7 |

Tableau III.6

On a $\Delta_3 = \mu_1'c_B - c_{\mu_1} = -\frac{4}{35} < 0$; donc $(y_1, y_2, t) = (y_1 = 0, y_2 = 2/7 \text{ et } t = 1/7)$ n'est pas optimale

| B | x_B | y_1 | y_2 | t | μ_1 | μ_2 | μ_3 | w |
|---------|-------|-------|-------|-----|---------|---------|---------|-----|
| t | 1/7 | -2/7 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1/7 | 1/7 |
| μ_2 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 2 |
| μ_1 | 0 | -7 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | 0 |
| y_2 | 2/7 | -11/7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 9/7 | 2/7 |

Tableau III.7

$\Delta_4 = y_1' c_B - c_{y_1} = -\frac{1}{7} < 0$; donc $(y_1, y_2, t) = (0, 2/7, 1/7)$ n'est pas optimale

| B | x_B | y_1 | y_2 | t | μ_1 | μ_2 | μ_3 | w |
|---------|-------|-------|-------|-----|---------|---------|---------|------|
| t | 1/3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2/21 | 1/21 | 1/3 |
| y_1 | 2/3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1/3 | -1/3 | 2/3 |
| μ_1 | 14/3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 7/3 | -8/3 | 14/3 |
| y_2 | 4/3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 11/21 | 16/21 | 4/3 |

Tableau III.8

$\Delta_j > 0$, donc $(y_1, y_2, t) = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ est optimale pour (P') ; cela donnera $x_1 = (2,4)$ comme solution optimale du programme fractionnaire linéaire (P) .

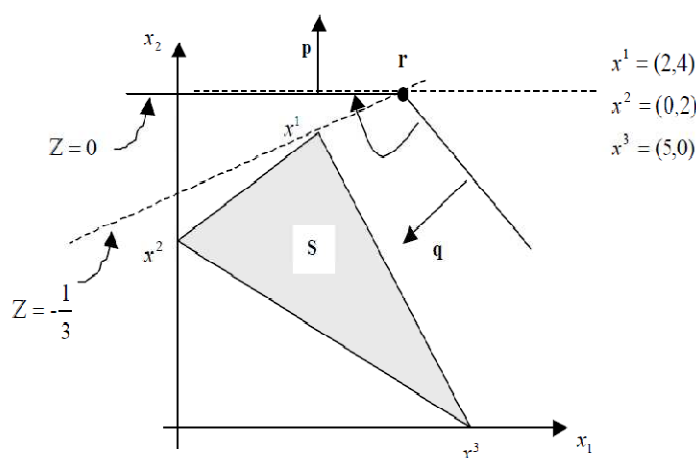


Fig. III.3 : Graphe de l'exemple

III.3.4 Méthode des pénalités [5]

Le programme fractionnaire linéaire en nombres entiers est donné sous la forme mathématique suivante :

$$(PE) \begin{cases} \max Z(x) = \frac{c^t x + \alpha}{d^t x + \beta} \\ x \in S; x \text{ entier} \end{cases}$$

En utilisant la transformation de Charnes & Cooper, plusieurs auteurs développent des méthodes basées sur la méthode de séparation et évaluation progressive pour résoudre le problème (PE) sur un domaine de contraintes souvent borné. Par contre d'autres maintiennent la structure initiale du problème et suggèrent des méthodes d'optimisation basées sur une technique de coupe. Le principe de cette méthode est le maintien de la structure initiale quel que soit le domaine admissible et le calcul de pénalités qui améliorent la stratégie de séparation et l'évaluation progressive.

Phase 1 : Résolution du problème relaxé

Considérons le problème relaxé (PER) associé à (PE). En introduisant les variables d'écart et en le résolvant par la méthode de Cambini & Martein, nous aboutissons à la solution optimale continue donnée par le tableau de simplexe suivant :

$$(PER) \begin{cases} \text{maximiser } Z(x) = \frac{\bar{\alpha} + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j}{\bar{\beta} + \sum_{j \in N} \bar{d}_j x_j} \\ \text{s. c.} \quad x_i + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j = e_i \quad ; i \in B \\ \quad \quad \quad x_j \geq 0 \quad ; j \in N \end{cases}$$

La solution optimale de base du problème (PER) est donnée par :

$$\begin{aligned} x_i &= e_i \quad ; \quad i \in B \\ x_j &= 0 \quad ; \quad j \in N \end{aligned}$$

et la valeur de la fonction objectif dans le tableau simplexe est $\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$

Si e_i est entier pour tout $i \in B$, alors la solution recherchée du problème (PER) est obtenue.

Sinon, soit e_k la valeur non entière de x_k pour un certain $k \in B$.

Nous notons le plus grand entier plus petit que e_k par $\lfloor e_k \rfloor$ et le plus petit entier plus grand que e_k par $\lceil e_k \rceil$. Du moment que x_k doit être entier, nous avons $x_k \leq \lfloor e_k \rfloor$ ou $x_k \geq \lceil e_k \rceil$.

L'inégalité $x_k \leq \lfloor e_k \rfloor$ donne lieu à la contrainte $x_k + s = \lfloor e_k \rfloor$. De plus, à partir du tableau simplexe, on a :

$$x_k + \sum_{j \in N} \bar{a}_{kj} x_j = e_k$$

Donc :

$$-\sum_{j \in N} \bar{a}_{kj} x_j + s = \lfloor e_k \rfloor - e_k$$

On obtient :

$$-\sum_{j \in N} \bar{a}_{kj} x_j \leq \lfloor e_k \rfloor - e_k$$

Il est évident de voir que l'expression $\lfloor e_k \rfloor - e_k$ est négative et la solution optimale de la solution optimale de (PER) donnée précédemment ne satisfait pas cette contrainte. En rajoutant cette dernière au problème (PER) nous obtenons une des branches de séparation.

D'une façon similaire, nous déduisons de $x_k \geq \lceil e_k \rceil$, la contrainte $-x_k + s = -\lceil e_k \rceil$.

Alors, $\sum_{j \in N} \bar{a}_{kj} x_j \leq e_k - \lceil e_k \rceil < 0$

En introduisant cette contrainte dans le problème (PER), nous obtenons l'autre branche. Ceci, avec les règles de sélection des variables de branchement, définit la stratégie d'exploration de l'arborescence.

Phase 2 : Calcul des pénalités

Après l'obtention de la solution optimale continue de (PER) la fonction objectif associée est donnée, dans le tableau optimal du simplexe.

Soit e_k la valeur non entière de x_k pour un certain $k \in B$. Pour sélectionner une nouvelle branche qui doit être ajoutée à (PER), nous calculons les pénalités π_r et $\pi_{r'}$ des contraintes $x_k \leq \lfloor e_k \rfloor$ et $x_k \geq \lceil e_k \rceil$ respectivement, données par :

$$\pi_r = \frac{e\Delta_r}{\bar{\beta}\left(\bar{\beta} + \frac{e d_r}{a_{kr}}\right)} ; \quad \pi_{r'} = \frac{(1-e)\Delta_{r'}}{\bar{\beta}\left(\bar{\beta} - \frac{(1-e) d_{r'}}{a_{kr'}}\right)}$$

Où :

$$\Delta_r = \min \left\{ \frac{\bar{y}_j}{-a_{kj}} / \bar{a}_{kj} > 0 \right\}, \quad \Delta_{r'} = \min \left\{ \frac{\bar{y}_j}{a_{kj}} / \bar{a}_{kj} < 0 \right\}$$

et :

$$e = e_k - \lfloor e_k \rfloor$$

La branche correspondante à la plus petite valeur des pénalités est sélectionnée. Ce qui entraîne le rajout de la contrainte associée au problème (PER) qui sera résolu par l'algorithme suivant.

Algorithme de résolution du problème (PE)

Etape 1 :

Trouver la solution continue optimale x^0 du problème (PER)

1. Si une telle solution n'existe pas, terminer.
 - a) Soit $\sup_{x \in S} Z(x) = +\infty$, lorsque la solution niveau de base optimale de (PER) n'existe pas.
 - b) Soit $\sup_{x \in S} Z(x) = \max_{d_j} \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_j}$, lorsque l'opération de pivot est impossible.
2. Sinon, poser $k = 1, l = 0$ et aller à l'étape 2.

Etape 2 :

1. Si x^0 est entier, terminer. x^0 est une solution optimale du problème (PE).
2. Sinon, soit $x_k, k \in B$, une composante non entière de x^0 ayant pour valeur e_k . Poser $\pi_l = 0$, et aller à l'étape 3.

Etape 3 :

1. Calculer π_{2k-1} et π_{2k} .
Poser $\pi_{2k-1} = \pi_{2k-1} + \pi_l, \pi_{2k} = \pi_{2k} + \pi_l$ et $\pi_l = +\infty$.
2. Calculer $\pi_l = \min_{1 \leq j \leq 2k} \{ \pi_j \}$.
3. Ajouter la contrainte au tableau simplexe optimal, effectuer les opérations de pivot et aller à l'étape 4.

Etape 4 :

1. Si x^l est une solution entière, terminer. x^l est une solution optimale de (PE).
2. Sinon,
 - a) Le problème augmenté n'a pas de solution, terminer.
 - b) Soit x_k^l une composante non entière de x^l ayant pour valeur e_k^l .
Poser $k = k + 1$ et aller à l'étape 3.

Chapitre III Programmation fractionnaire linéaire uni-critère

Théorème 2 [26] : La branche sélectionnée, ayant pour pénalité la valeur minimale $\pi_l = \min_{1 \leq j \leq 2k} \{ \pi_j \}$, correspond à la valeur optimale de la fonction objectif pour tous les sommets pendants j de l'arborescence.

Théorème 2.2.4.2 [26] : La solution optimale du problème (PE) est obtenue par l'algorithme en un nombre fini d'étapes.

Preuve :

Soit $x^l = (x_i)$, $i \in B$, la solution optimale continue du problème (PER) et soit x_k^l une composante non entière de x^l pour un certain $k \in B$. Puisque la solution réalisable de (PE) doit être entière, il nous est implicitement imposé les contraintes $x_k^l \leq [e_k]$ ou $x_k^l \geq [e_k]$.

Donc, la nouvelle branche est construite par le rajout de l'une de ces contraintes. Alors, la convergence de l'algorithme en un nombre fini d'itérations est assurée par le fait que le domaine des contraintes est borné. Dans le cas contraire, le maximum de la fonction objectif n'est pas atteint mais sa borne supérieure, lorsqu'elle existe, est donnée par l'expression : $\sup_{x \in S} Z(x) = \frac{\bar{c}_k}{d_k}$.

Exemple d'application 1

Considérons le problème fractionnaire linéaire en nombres entiers suivant :

$$(PE) \begin{cases} \text{maximiser } Z = \frac{7x_1 + 9x_2 + 3}{3x_1 + 4x_2 + 2} \\ \text{s. c} & \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1; x_2 &\geq 0, \text{ entiers} \end{aligned} \end{cases}$$

En introduisant les variables d'écart et en résolvant par la méthode de Cambini&Martein, on obtient :

| | | | | | |
|------------|----|---|---|---|---|
| c | -3 | 7 | 9 | 0 | 0 |
| d | -2 | 3 | 4 | 0 | 0 |
| x_3 | 6 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| x_4 | 5 | 3 | 2 | 0 | 1 |
| γ_N | | 5 | 6 | | |

Tableau III.9

| | | | | | |
|-------|-------|---|------|---|------|
| c | -44/3 | 0 | 13/3 | 0 | -7/3 |
| d | 7 | 0 | -2 | 0 | 1 |
| x_3 | 8/3 | 0 | 5/3 | 1 | -2/3 |
| x_1 | 5/3 | 1 | 2/3 | 0 | 1/3 |
| N | | | 1 | | -5/3 |

Tableau III.10

Chapitre III Programmation fractionnaire linéaire uni-critère

| | | | | | |
|------------|-------|---|---|----------|---------|
| c | 108/5 | 0 | 0 | -13/5 | -3/5 |
| d | 51/5 | 0 | 0 | 6/5 | 1/5 |
| x_3 | 8/3 | 0 | 1 | 3/5 | -2/5 |
| x_4 | 5/3 | 1 | 0 | -2/5 | 3/5 |
| γ_N | | | | -1311/25 | -261/25 |

Tableau III.11

Le tableau simplexe optimal peut être représenté par le programme fractionnaire linéaire suivant :

$$(PER)' \begin{cases} \text{maximiser } Z = \frac{13x_3 + 3x_4 + 108}{6x_3 + x_4 + 51} \\ \text{s.c} \quad \begin{cases} x_1 - 2/5x_3 + 3/5x_4 = 3/5 \\ x_2 + 3/5x_3 - 2/5x_4 = 8/5 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \end{cases}$$

La solution continue optimale est $x_1 = 3/5, x_2 = 8/5$ et $x_j = 0, j = 3, 4$; avec la valeur de $Z = 36/17$.

Puisque x_1 et x_2 ne sont pas entiers, on calcule les pénalités π_1 et π_2 associées aux contraintes $x_1 \leq [3/5]$ et $x_1 \geq [3/5]$ respectivement. Nous obtenons : $\pi_1 = 3/170$ et $\pi_2 = 1/153$.

La branche dont la valeur de la pénalité est la plus petite est sélectionnée et la contrainte respective est rajoutée au problème $(PER)'$.

La solution obtenue est $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$ et $x_j = 0, j \in N$. Elle est entière et donc elle est optimale pour le problème (PE) .

Exemple d'application 2

Considérons le problème fractionnaire linéaire en nombres entiers suivant :

$$(PE) \begin{cases} \text{maximiser } Z = \frac{2x_1 + 9x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \\ \text{s.c} \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{entiers} \end{cases} \end{cases}$$

En introduisant les variables d'écarts et en résolvant le problème par l'algorithme de Cambini&Martain :

| | | | | | |
|------------|----|----|----|---|---|
| c | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 |
| d | -1 | 1 | 2 | 0 | 0 |
| x_3 | 2 | -1 | 1 | 1 | 0 |
| x_4 | 1 | 1 | -2 | 0 | 1 |
| γ_N | | 2 | 3 | | |

Tableau III.12

| | | | | | |
|------------|----|---|----|---|----|
| c | -2 | 0 | 7 | 0 | -2 |
| d | -2 | 0 | 4 | 0 | -1 |
| x_3 | 6 | 0 | -1 | 1 | 1 |
| x_1 | 5 | 1 | -2 | 0 | 1 |
| γ_N | | | 6 | | -2 |

Tableau III.13

Chapitre III Programmation fractionnaire linéaire uni-critère

Puisque γ_2 est positive, alors x_2 entre dans la base. Cependant la colonne associée à la variable hors base est négative, ce qui entraîne l'impossibilité de l'opération de pivot, alors le maximum n'est pas atteint mais la valeur de la borne supérieure de Z est donnée par :

$$\sup_{x \in S} Z = \frac{c_2}{d_2} = \frac{7}{4}$$

IV.1. Introduction

La programmation linéaire fractionnaire multicritère (PLFM) représente un domaine de recherche très important qui a attiré l'attention de beaucoup de chercheurs dans le passé. Ces problèmes ont une multitude d'applications dans plusieurs domaines tels que : la planification de la production, la gestion, les ressources en eau, les opérations militaires et la planification hospitalière etc...

Le but de ce chapitre est de présenter quelques méthodes de résolution de problèmes linéaires fractionnaires multicritères.

IV.2. Présentation d'un programme fractionnaire linéaire multicritère

Mathématiquement, un programme fractionnaire linéaire multicritère est présenté comme suit :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \max Z_1(x) = \frac{c^1x + \alpha^1}{d^1x + \beta^1} \\ \max Z_2(x) = \frac{c^2x + \alpha^2}{d^2x + \beta^2} \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \max Z_k(x) = \frac{c^r x + \alpha^r}{d^r x + \beta^r} \\ \quad \text{s. c} \\ \quad x \in S \end{array} \right.$$

Où : r représente le nombre d'objectifs ($r \geq 2$).

α^i et β^i sont des scalaires et $c^i, d^i \in \mathcal{R}^n$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$.

$S = \{x \in \mathcal{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$ est l'ensemble des solutions réalisables. Il est compact et non vide. $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $b \in \mathcal{R}^m$; $d^i x + \beta^i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$.

IV.3. Caractérisation de l'ensemble des solutions efficaces

Définition 1 (face d'un domaine admissible)

- i) Soit A_1, A_2, \dots, A_n les vecteurs lignes de la matrice A .

Un sous ensemble T de S est dit face de S , s'il existe un sous ensemble $J \subset \{1, 2, \dots, m\}$ tel que T est l'ensemble des points de S vérifiant :

$$\begin{cases} A_i^t x = b; \forall i \in J \\ A_i^t x < b; \forall i \notin J \end{cases}$$

T est alors appelé la face correspondante à J .

Théorème 1 [23]: (condition de Khun-Tucker pour les critères multiples)

Un point dans la face T correspondante à $J = \{1, 2, \dots, l\}$

$(J \subset \{1, 2, \dots, m\})$ est efficace si et seulement si x^* est dans T et il existe des nombres réels $a_i \geq 0, i = 1, \dots, l$ ($l \leq m$) et $w_j \geq 1, j = 1, \dots, r$ tels que :

$$\sum_{i=1}^l a_i A_i = \sum_{j=1}^k w_j \nabla Z_j(x^*)$$

Exemple :

Etant donnée le programme fractionnaire linéaire multicritère suivant :

$$\begin{cases} \max Z_1(x) = \frac{x_1}{x_2} \\ \max Z_2(x) = x_3 \\ \max Z_3(x) = \frac{-x_1 - x_3}{x_2 + 1} \\ \text{s. c} \\ 1 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 4 \end{cases}$$

Dont le graphe est représenté par la figure suivante :

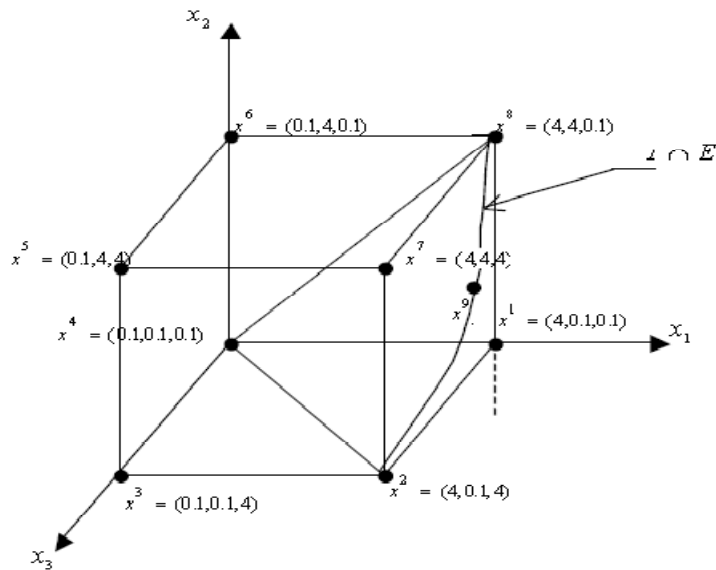


Fig. IV1 graphe de l'exemple

Lemme 1 [23] : Un point x^* dans T est efficace si et seulement s'il existe des nombres réels

a_1, a_2, \dots, a_n et $f_1, f_2, \dots, f_n; h_1, h_2, \dots, h_n$ tel que :

$$\sum_{i=1}^l a_i A_i = h_1 C^1 - f_1 d^1 + h_2 C^2 - f_2 d^2$$

Où $f_1 = C^1 x^* + \alpha^1, h_1 = d^1 x^* + \beta^1$ et $a_i \geq 0, i = 1, \dots, l$ et $h_i > 0, i = 1, 2$

De plus :

$$\beta^1 f_1 + \beta^2 f_2 - \alpha^1 h_1 - \alpha^2 h_2 = b_1 h_1 + \dots + b_s h_s$$

Où $b_i = A_i^t x^*; i = 1, \dots, l$

Et $b_i > A_i^t x^*; i = l + 1, \dots, m$

Du lemme précédent, nous voyons que la caractérisation des points efficaces dans T pour un problème bi-critère est donnée par un système d'équations et inéquations linéaires, qui amènent aux résultats suivants :

Corollaire 1 [23] : L'ensemble de tous les points efficaces de chaque face de S d'un programme fractionnaire linéaire bi-critère est convexe

Théorème 2 [23] : Pour un problème fractionnaire linéaire bi-critère $T \cap E$ est un ensemble de contraintes et E est une réunion finie d'ensembles de contraintes linéaires

Exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max Z_2(x) = \frac{x_1}{x_1 + x_2} \\ \max Z_2(x) = \frac{-3x_1 + 2x_2}{x_1 - x_2 + 3} \\ S.C \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

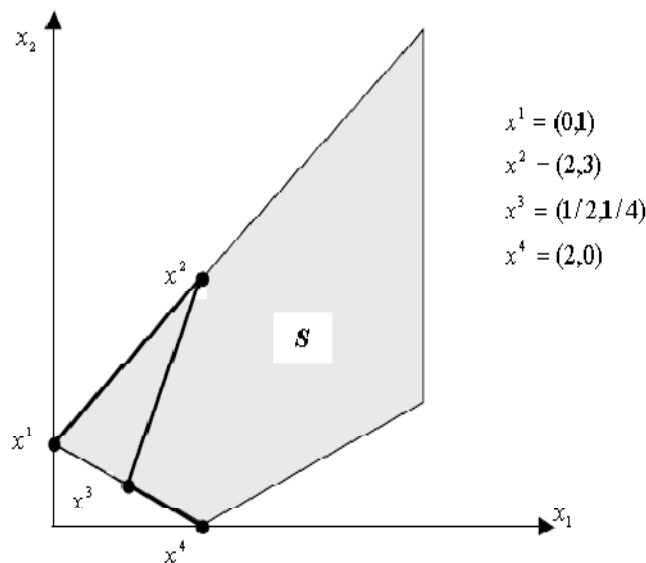


Figure IV. 2 graphe de l'exemple

Théorème 3 [23] : (efficacité et efficacité propre)

Si x^0 est une solution efficace d'un problème (PLFM), alors x^0 est proprement efficace

IV.4 Propriétés des ensembles de solutions fortement efficaces et faiblement efficaces

En programmation fractionnaire linéaire multicritère, on s'intéresse souvent aux points faiblement efficaces. La notion de l'efficacité faible doit être distinguée de la définition de l'efficacité forte.

Notons que l'ensemble de tous les points fortement efficaces (F-Eff) est une partie de l'ensemble de tous les points faiblement efficaces (f-Eff).

Il est facile de déterminer l'ensemble F-Eff car il est fermé contrairement que l'ensemble f-Eff qui ne peut pas être entièrement fermé. L'ensemble f-Eff est la fermeture de l'ensemble F-Eff.

Théorème 3 [23] : (fermeture de l'ensemble f-Eff)

L'ensemble f-Eff d'un programme fractionnaire linéaire multicritère est fermé.

Théorème 4 [23] : (convexité de f-Eff)

Etant donnée le compact S , toute paire de solutions faiblement efficaces sont connectées dans l'ensemble f-Eff par un chemin de segments linéaires.

IV.5. Détection graphique de l'efficacité et de la faible-efficacité

Pour tester l'efficacité d'un point donné $x \in S$, le concept d'ensemble dominant est introduit.

Définition 2 [21] : (cône)

Soit $v \in V \subset \mathcal{R}^n$, $V \neq 0$ alors, V est un cône si et seulement si $\alpha v \in V$, pour tout $\alpha \geq 0$

- L'origine $0 \in \mathcal{R}^n$ est contenue dans n'importe quel cône.
- Tous les cônes sont des ensembles convexes.
- Tous les cônes sont des ensembles non bornés, comme exemple le demi-espace fermé

$\{x \in \mathcal{R}^n / Cx \leq 0\}$ est un cône convexe mais le demi-espace ouvert $\{x \in \mathcal{R}^n / Cx < 0\}$ n'est pas un cône car il ne contient pas l'origine.

Définition 3 [21] : (cône polaire)

Soit $\bar{x} \in S$, le cône polaire semi-positif généré par les gradients des r fonctions objectifs est $C^{\geq} = \{y \in \mathcal{R}^n / Cy \geq 0, Cy \neq 0\} \cup \{0 \in \mathcal{R}^n\}$

Définition 4 [21] (ensemble dominant)

L'ensemble dominant $D_{\bar{x}}$ est donné par la somme directe des ensembles $\{\bar{x}\}$ et $C^{\geq 0}$ tel que :

$$D_{\bar{x}} = \{\bar{x}\} \oplus C^{\geq} = \{x \in \mathcal{R}^n / x = \bar{x} + y, Cy \geq 0, Cy \neq 0\}$$

L'ensemble dominant $D_{\bar{x}}$ contient tous les points dont les vecteurs critères dominent le vecteur critère relatif à $\bar{x} \in S$.

Théorème 5 [21] : (test d'efficacité)

Soit $D_{\bar{x}}$ l'ensemble dominant au $\bar{x} \in S$, alors \bar{x} est efficace si et seulement si $D_{\bar{x}} \cap S = \{\bar{x}\}$

Preuve :

(\Rightarrow) : Supposons $D_{\bar{x}} \cap S \neq \{\bar{x}\}$, alors, il existe $\hat{x} \in D_{\bar{x}} \cap S$ avec $\hat{x} \in D_{\bar{x}}$, écrivons :

$$\hat{x} = \bar{x} + y, \quad \text{où } y \in C^{\geq}.$$

Puisque $Cy \geq 0, Cy \neq 0$, nous avons $C\hat{x} \geq C\bar{x}, C\hat{x} \neq C\bar{x}$. Ceci contredit le fait que \bar{x} est efficace. Donc, si \bar{x} est efficace, $D_{\bar{x}} \cap S = \{\bar{x}\}$.

(\Leftarrow) : Si $D_{\bar{x}} \cap S = \{\bar{x}\}$, cela implique que si le vecteur critère de \tilde{x} domine le vecteur critère de \bar{x} , alors $\tilde{x} \notin S$.

D'où, le vecteur critère de \bar{x} est non dominé et par conséquent \bar{x} est efficace.

Donc ce théorème nous fournit un test de détection des points efficaces qui peuvent être initialisés géométriquement.

Si l'intersection de l'ensemble dominant avec l'ensemble des points réalisables S contient \bar{x} , alors \bar{x} est efficace.

IV.6 Quelques méthodes d'optimisation du problème fractionnaire linéaire multicritère

Malgré les difficultés que représente la résolution du problème (PLFM), un nombre appréciable de publications traitant ce sujet figure dans la littérature. Les plus utilisées sont la méthode de Kornbluth et al [15] et la méthode de Nykowski et al [18] présentées ici:

IV.6.1. Méthode de Kornbluth et Steuer[15]

Comme la recherche de l'ensemble Eff est difficile pour ce problème, les auteurs ont orienté leurs efforts dans la détermination de l'ensemble f-Eff.

Description de la méthode :

Les cinq étapes essentielles de cette méthode sont :

- (1) Détermination d'un sommet \bar{x} faiblement efficace de départ
- (2) Test de la faible efficacité initiale pour toutes les arêtes émanant de \bar{x}
- (3) Test d'existence d'un point de cassure pour toutes les arêtes initialement faiblement efficaces trouvées dans (1)
- (4) Chaque point de cassure détecté dans (1) est analysé pour identifier quels sont les critères, dans certaines courbes de niveaux associées, qui occasionnent ce point de cassure.
- (5) Les courbes de niveaux identifiées dans (4) seront insérées dans le programme (PLFM) assurant ainsi la connexité dans l'ensemble f-eff.

IV.6.2. Méthode de Nykowski & Zolkiewski [18]

Les auteurs Kornbluth&stewer [19] ont soulignés que « ...la forte efficacité est théoriquement la plus indiquée pour la résolution des problèmes (PLFM)... ». Partant de cette importante remarque, Nykowski&Zolkiewski [22] proposèrent quatre années plus tard une procédure permettant d'éviter à chaque fois qu'il est possible, le concept de la faible efficacité comme définition de solution de meilleur compromis pour les problèmes fractionnaires multicritères.

Procédure de la méthode

Considérons le problème (PLFM) suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \max Z_1(x) = \frac{c^1x + \alpha^1}{d^1x + \beta^1} \\ \max Z_2(x) = \frac{c^2x + \alpha^2}{d^2x + \beta^2} \\ \vdots \\ \max Z_r(x) = \frac{c^rx + \alpha^r}{d^rx + \beta^r} \\ \text{s. c} \\ x \in S = \{x \in \mathcal{R}^n / Ax \leq b, A \in \mathcal{R}^{m \times n}, b \in \mathcal{R}^m, x \geq 0\} \end{array} \right.$$

Où : $d^i x + \beta^i > 0$, pour tout $x \in S, i = 1, \dots, r$

Supposons que l'intérieur de S est non vide ($\text{Int}(S) \neq \emptyset$), on définit le problème linéaire multicritère (PL associé au problème (PLFM)) par :

$$(\Phi) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } \Phi(x) = Gx \\ \text{s. c} \\ x \in S \end{array} \right.$$

Où : $G_{2r \times n} = [C^1, C^2, \dots, C^r, d^1, d^2, \dots, d^r]^T$

Soit X_Φ l'ensemble de solutions fortement efficaces correspondant au problème Φ .

Si X_Φ appartient à la frontière de S, alors il n'existe pas de solutions fortement efficaces, pour le problème (PLFM), appartenant à $\text{Int}(S)$.

En d'autre terme, il n'existe pas de points de cassure ou autre irrégularité de l'ensemble des solutions fortement efficaces et donc on peut utiliser le concept de forte efficacité comme définition de solution de meilleur compromis pour le problème (PLFM). Ce résultat est formulé par le théorème de Nykowski et Zolkrewski [22] suivant :

Théorème 6 : Soit le problème test (T.1) donnée par le programme linéaire suivant :

$$(T.1) \quad \begin{cases} \text{maximiser } W \\ \text{s.c} \\ GZ - Gy + u = 0 \\ I^t u - v + w = 1 \\ Z, y, u, v \geq 0 \end{cases}$$

Le problème (T.1) possède une solution réalisable. Soit w^* la valeur optimale de la fonction objectif :

- Si $w^* = 0$, alors $X_\Phi \cap \text{Int}(S) = \emptyset$
- Si $w^* > 0$, alors $X_\Phi = S$

Algorithme de la méthode:

Etape 0 : Formuler le (PLM) associé au problème (PLFM) puis résoudre le problème (T.1)

- Si $w^* = 0$, aller à l'étape 2
- Si $w^* > 0$, aller à l'étape 1

Etape 1 : Générer l'ensemble de tous les points extrêmes de S faiblement efficaces $Eff_{ex}^{f_0}$, par l'algorithme de Kornbluth et Steuer et aller à l'étape 4

Etape 2 : Générer l'ensemble de tous les points extrêmes de S fortement efficaces $Eff_{ex}^{F_0}$ du problème associé (PLM), par les méthodes existants dans la littérature et aller à l'étape 3

Etape 3 : Pour tout $\tilde{x} \in Eff_{ex}^{F_0}$, résoudre le problème (T.2) de la programmation linéaire :

$$(T.2) \quad \begin{cases} \text{maximiser } t = N^T v \\ \text{s.c} \\ (\tilde{N}_i d^i - \tilde{D}_i C^i) x + v_i = \tilde{D}_i \alpha^i - \tilde{N}_i \beta^i \\ i = 1, 2, \dots, r \\ Ax \leq b \\ x, v \geq 0 \end{cases}$$

Où : $\tilde{N}_i = C^i x + \alpha^i$; $\tilde{D}_i = d^i x + \beta^i$ pour $i = 1, 2, \dots, r$.

Les solutions fortement efficaces du problème (PLFM) correspondant aux solutions du problème (T.2) réalisant un maximum nul $t^{max} = 0$. Enregistrer ces points et aller à l'étape 4.

Etape 4 : Notons :

$T = Eff_{ex}^{f_a}$ obtenu par l'algorithme Nykowski & Zolkiewski et $T = Eff_{ex}^{F_0}$ obtenu par l'algorithme de Kornbluth et Steuer.

- Si le choix du décideur appartient à T, terminer
- Si non, aller à l'étape 5

Etape 5 : Calculer

$$f_i^m = \max \left[f_i(\tilde{x}_j) = \frac{N_i(\tilde{x}_j)}{D_i(\tilde{x}_j)}, \quad j \in J_T \right]$$

$$f_i^m = \min \left[f_i(\tilde{x}_j) = \frac{N_i(\tilde{x}_j)}{D_i(\tilde{x}_j)}, \quad j \in J_T \right]$$

Pour $i = 1, 2, \dots, k$ et $J_T = \{j: \tilde{x}_j \in T\}$

Construire la matrice des gains normalisés :

$$g_i(\tilde{x}_j) = \frac{f_i^m - f_i(\tilde{x}_j)}{f_i^m - f_i}, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, k \text{ et } J_T = \{j: \tilde{x}_j \in T\}, \text{ aller à l'étape 6}$$

Etape 6 : En utilisant les données de la matrice des gains, calculer la solution de meilleur compromis en résolvant le problème de Tchebychff suivant :

$$\min\{\max[g_i(\tilde{x}_j)]\}, \quad j \in J_T, i = 1, 2, \dots, r.$$

Terminer.

V.1. Introduction

Dans ce chapitre on présente deux méthodes exactes de résolution du problème de programmation multicritère linéaire fractionnaire en nombres entiers (MOLFPE) basées sur le processus de Branch & Bound [8] et les coups de Gomory [1]

V.2. Formulation du problème

Considérons, le problème d'optimisation fractionnaire linéaire multicritère en nombres entiers (MOLFPE) donné sous la forme mathématique suivante :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \max Z_1(x) = \frac{c^1 x + \alpha^1}{d^1 x + \beta^1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \max Z_r(x) = \frac{c^r x + \alpha^r}{d^r x + \beta^r} \\ \text{s. c} \\ x \in S \\ x \text{ entier} \end{array} \right.$$

Où : k représente le nombre d'objectifs ($r \geq 2$).

$S = \{x \in \mathcal{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$ est l'ensemble des solutions réalisables.

A est une $m \times n$ matrice, $b \in \mathcal{R}^m$ et c^i, d^i sont des $1 \times n$ vecteurs, α^i et β^i sont des scalaires pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. ; $d^i x + \beta^i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$.

Le but de traiter ce type de problème (MOLFPE) est de déterminer toutes les solutions efficaces . Plusieurs approches utilisent le concept basé sur la résolution d'une séquence finie de programmes uni-critères fractionnaires linéaires en nombres entiers.

Considérons donc le programme fractionnaire linéaire uni-critère en nombres entiers donné sous la forme suivante :

$$(P_1) \begin{cases} \max Z_1(x) = \frac{c^1 x + \alpha^1}{d^1 x + \beta^1} \\ x \in S; x \text{ entier} \end{cases}$$

Notons qu'au lieu de Z_1 , on peut de la même manière considérer le problème (P_l) avec un autre objectif Z_l , $l \in \{1, \dots, r\}$.

V.3 Méthodes de résolution d'un problème d'optimisation fractionnaire linéaire multicritère en nombres entiers

V.3.1 La méthode de Chergui [8]

L'approche adoptée pour détecter toutes les solutions efficaces du problème (MOLFPE) est basée sur la résolution d'une séquence finie de programmes uni-critères fractionnaires linéaires en nombres entiers.

Soit le problème

$$(P_l) \begin{cases} \max Z_l(x) = \frac{c^l x + \alpha^l}{d^l x + \beta^l} \\ x \in S; x \text{ entier} \end{cases}$$

Soit un point x_l^* la première solution entière obtenue après avoir résolu le problème (P_l) par la méthode de Banch&Bound.

On définit par :

(B_l) : l'ensemble des indices des variables de base.

(N_l) : l'ensemble des indices des variables hors base.

$\bar{\gamma}_j^l$ est la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur gradient réduit $\bar{\gamma}^l$ défini comme suit :

$$\bar{\gamma}^l = \bar{\beta}^l \bar{c}^l - \bar{\alpha}^l \bar{d}^l, \text{ pour chaque } i \in \{1, 2, \dots, r\}.$$

Où \bar{c}^l , \bar{d}^l , $\bar{\alpha}^l$ et $\bar{\beta}^l$ sont des valeurs réelles.

Pour donner l'expression mathématique de cette coupe, nous définissons les ensembles suivants :

$$H_l = \{j \in N_l / \exists i \in \{1, 2, \dots, r\}; \bar{\gamma}_j^l > 0\} \cup \{j \in N_l / \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}; \bar{\gamma}_j^l = 0\}$$

$$S_{l+1} = \left\{ x \in S_l / \sum_{j \in H_l} x_j \geq 1 \right\}.$$

Une coupe efficace est une coupe qui supprime les solutions entières non efficaces.

Description de la méthode :

Nous commençons avec la solution optimale du problème fractionnaire linéaire où le domaine de solutions réalisables en nombres entiers est divisé en sous-domaines en utilisant le principe de Branch&Bound.

Dès qu'une solution en nombres entiers est trouvée dans un nouveau domaine, elle est comparée aux solutions déjà trouvées. L'ensemble de toutes les solutions potentiellement efficaces est mis à jour.

- Une coupe efficace est alors ajoutée pour supprimer les solutions entières qui ne sont pas efficaces. La recherche des solutions efficaces est faite dans chacun des sous domaines créés.
- Un domaine donné ne contient pas de solutions efficaces quand aucun critère ne peut s'améliorer. Ce dernier est dit domaine exploré.
- La recherche des solutions efficaces s'arrête si et seulement si tous les domaines créés ont été explorés.

Dans un premier temps, la méthode de Cambini et Martein [7] est utilisée pour résoudre le programme fractionnaire linéaire suivant : (*voir le chapitre III*)

$$(P_0) \begin{cases} \max Z_1(x) = \frac{c^1 x + \alpha^1}{d^1 x + \beta^1} , \text{ où } S_0 \subset S \\ x \in S_0 \end{cases}$$

Supposons que la solution optimale x_l du programme (P_l) n'est pas entière. Soit x_j un composant de x_l tel que $x_j = \alpha_j$; où α_j est le nombre fractionnaire.

Le nœud l est séparé en deux autres nœuds définis par les contraintes supplémentaires $x_j \leq [\alpha_j]$ et $x_j \geq [\alpha_j] + 1$; où $[\alpha_j]$ indique le plus grand nombre entier plus petit que α_j . Dans chaque nœud, le programme fractionnaire obtenu doit être résolu jusqu'à ce qu'on trouve une solution réalisable entière.

La coupe efficace $\sum_{j \in H_l} x_j \geq 1$ est ajoutée au programme et le nouveau programme est résolu en utilisant la méthode duale du simplexe. L'algorithme s'arrête quand tous les nœuds créés sont explorés.

Algorithme de la méthode

L'algorithme qui produit l'ensemble de toutes les solutions efficaces entières du programme (P) est présenté comme suit :

L'étape 1 : Initialisation : $l=0$;

- Créer le premier nœud avec le programme (P_0).
- poser $Eff = \emptyset$; (Eff est l'ensemble efficace en nombres entiers du programme (P)).

L'étape 2 : (l'étape générale)

- Choisir un nœud non exploré, ayant le plus grand nombre l .
- Résoudre le programme fractionnaire (P_l) correspondant, en utilisant la méthode duale du simplexe et la méthode de Cambini et Martein. (initialement pour résoudre le programme (P_0), seule la méthode Cambini et Martein est utilisée).
- Si le programme (P_l) n'a pas de solutions réalisables, alors le nœud correspondant est exploré; sinon poser \tilde{x}_l la solution optimale. Si \tilde{x}_l est entière, alors aller en 3 ; sinon aller à l'étape 4.

L'étape 3 : processus de division (partitionner le problème en sous-problèmes) :

- Choisissez un x_j de \tilde{x}_l tel que $x_j = \alpha_j$ avec α_j le nombre fractionnaire et séparer le nœud l de l'arbre en deux nœuds k et h ($k \geq l + 1$ et $h \geq l + 1$, $k \neq h$).
- Ajouter la contrainte $x_j \leq \lfloor \alpha_j \rfloor$ au tableau simplexe. Un nouveau domaine est considéré dans le nœud k . De la même façon on rajoute la contrainte $x_j \geq \lfloor \alpha_j \rfloor + 1$ pour obtenir le nœud h .

(Chacun des programmes doit être résolu en utilisant le même processus jusqu'à trouver une solution réalisable entière, aller en 2)

L'étape 4 :

- mettre à jour l'ensemble Eff :
 - Si $Z(\tilde{x}_l)$ est non dominé par $Z(x)$ pour chaque x de Eff, alors ; $Eff = Eff \cup \{\tilde{x}_l\}$.
 - S'il existe $x \in Eff$ tel que $Z(\tilde{x}_l)$ domine $Z(x)$; alors $= Eff / \{x\} \cup \{\tilde{x}_l\}$.
- Construire la coupe efficace :
 - Déterminer les ensembles N_l et H_l
 - ✓ Si $H_l \neq \emptyset$; alors le nœud correspondant est exploré, aller en 2.
 - ✓ Sinon rajouter la coupe efficace $\sum_{j \in H_l} x_j \geq 1$ au programme (P_l) et aller en 2.

Les théorèmes suivants montrent que l'algorithme produit toutes les solutions efficaces entières du programme (P) dans un nombre fini d'étapes.

Théorème 1 : supposons $H_l \neq \emptyset$ pour la solution entière x_l^* ; si x est une solution efficace entière dans le domaine $S_l / \{x_l^*\}$, alors ; $x \in S_{l+1}$.

Preuve : Soit x la solution entière dans le domaine $S_l / \{x_l^*\}$ tel que $x \notin S_{l+1}$, alors

$$\sum_{j \in H_l} x_j = 0, \text{ cela implique } x_j = 0 \text{ pour tout indice } j \in H_l.$$

Les critères sont évalués par :

$$Z_i(x) = \frac{\sum_{j \in N_l} \bar{c}_j^i x_j + \bar{\alpha}^i}{\sum_{j \in N_l} \bar{d}_j^i x_j + \bar{\beta}^i} \quad \text{pour tout } i \in \{1, 2, \dots, r\}$$

Où $\frac{\bar{\alpha}^i}{\bar{\beta}^i} = Z_i(x_l^*)$

Alors on peut écrire : $Z_i(x) = \frac{\sum_{j \in N_l/H_l} \bar{c}_j^i x_j + \bar{\alpha}^i}{\sum_{j \in N_l/H_l} \bar{d}_j^i x_j + \bar{\beta}^i}, \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$

et $\bar{\gamma}_j^i = \bar{\beta}^i \bar{c}_j^i - \bar{\alpha}^i \bar{d}_j^i \leq 0$, pour tout indice $j, j \in N_l/H_l$

$\bar{\gamma}_j^i = \bar{\beta}^i \bar{c}_j^i - \bar{\alpha}^i \bar{d}_j^i < 0$ pour au moins un critère, implique que $\bar{c}_j^i \leq \frac{\bar{\alpha}^i \bar{d}_j^i}{\bar{\beta}^i}$ pour tout $j \in N_l/H_l$

car, $\bar{\beta}^i = d^i x^* + \beta^i > 0$ pour tout critère $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, les variables de décision ne sont pas négatives, nous obtenons ceci :

$$\bar{c}_j^i x_j \leq \left(\frac{\bar{\alpha}^i \bar{d}_j^i}{\bar{\beta}^i} \right) x_j \text{ pour tout } j \in N_l/H_l ;$$

D'où : $\sum_{j \in N_l/H_l} \bar{c}_j^i x_j \leq \sum_{j \in N_l/H_l} \left(\frac{\bar{\alpha}^i \bar{d}_j^i}{\bar{\beta}^i} \right) x_j$

$$\Rightarrow \sum_{j \in N_l/H_l} \bar{c}_j^l x_j + \bar{\alpha}^l \leq \sum_{j \in N_l/H_l} \left(\frac{\bar{\alpha}^l \bar{d}_j^l}{\bar{\beta}^l} \right) x_j + \bar{\alpha}^l$$

Pour tout critère Z_i , $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ l'inégalité suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} Z_i(x) &= \frac{\sum_{j \in N_l/H_l} \bar{c}_j^l x_j + \bar{\alpha}^l}{\sum_{j \in N_l/H_l} \bar{d}_j^l x_j + \bar{\beta}^l} \\ \Rightarrow Z_i(x) &\leq \frac{\sum_{j \in N_l/H_l} \left(\frac{\bar{\alpha}^l \bar{d}_j^l}{\bar{\beta}^l} \right) x_j + \bar{\alpha}^l}{\sum_{j \in N_l/H_l} \bar{d}_j^l x_j + \bar{\beta}^l} \\ \Rightarrow Z_i(x) &\leq \frac{\left(\frac{\bar{\alpha}^l}{\bar{\beta}^l} \right)}{\sum_{j \in N_l/H_l} \bar{d}_j^l x_j + \bar{\beta}^l} \sum_{j \in N_l/H_l} \bar{d}_j^l x_j + \bar{\beta}^l \\ \Rightarrow Z_i(x) &\leq \frac{\bar{\alpha}^l}{\bar{\beta}^l} \\ \Rightarrow Z_i(x) &\leq Z_i(x_l^*) \end{aligned}$$

Par conséquent ; $Z_i(x) \leq Z_i(x_l^*)$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ et $Z_i(x) < Z_i(x_l^*)$ pour au moins un indice, d'où $Z(x_l^*)$ domine $Z(x)$ et la solution x n'est pas efficace.

Corollaire 1: supposons que $H_l \neq \emptyset$ pour la solution entière x_l^* ; alors la contrainte $\sum_{j \in H_l} x_j \geq 1$ est une coupe efficace.

Proposition 1: $H_l \neq \emptyset$ pour la solution courante x_l^* , alors $S_l/\{x_l^*\}$ est un domaine exploré.

Théorème 2 : l'algorithme décrit s'arrête après un nombre fini d'itérations et produit toutes les solutions efficaces du problème (P).

Preuve : L'ensemble S des solutions réalisables du problème (P) étant compact, il contient un nombre fini de solutions entières. A chaque itération une solution entière optimale x_l^* est calculée et la coupe efficace est ajoutée. Donc d'après le théorème précédent et le corollaire, au moins une solution x_l^* est éliminée quand on étudie tout les sous-problèmes (P_r) , $r > l$, mais aucune solution efficace n'est supprimée.

Exemple d'application

Considérons le problème fractionnaire linéaire multicritère suivant :

$$(P) \begin{cases} \max Z_1(X) = \frac{x_1 - 4}{-2x_2 + 3} \\ \max Z_2(X) = \frac{-x_1 + 4}{x_2 + 1} \\ \max Z_3(X) = -x_1 + x_2 \\ \text{s. c} \quad -x_1 + 4x_2 \leq 0 \\ \quad \quad 2x_1 - x_2 \leq 8 \\ \quad \quad x_1; x_2 \geq 0, \text{entiers} \end{cases}$$

L'algorithme de Cambini&Martein appliqué au problème (P_0) suivant

$$(P_0) \begin{cases} \max Z_1(X) = \frac{x_1 - 4}{-x_2 + 3} \\ \text{s. c} \quad -x_1 + 4x_2 \leq 0 \\ \quad \quad 2x_1 - x_2 \leq 8 \\ \quad \quad x_1; x_2 \geq 0, \text{entiers} \end{cases}$$

donne la solution optimale qui figure dans le tableau ci-après :

| B | Base | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_2 | 8/7 | 0 | 1 | 2/7 | 1/7 |
| x_1 | 32/7 | 1 | 0 | 1/7 | 4/7 |
| c^1 | -4/7 | 0 | 0 | -1/7 | -4/7 |
| d^1 | -13/7 | 0 | 0 | 2/7 | 1/7 |
| y^1 | | | | -3/7 | -8/7 |
| c^2 | 4/7 | 0 | 0 | 1/7 | 4/7 |
| d^2 | -15/7 | 0 | 0 | -2/7 | -1/7 |
| y^2 | | | | 1/7 | 8/7 |
| c^3 | 24/7 | 0 | 0 | -1/7 | 3/7 |

Tableau V.1

Nous avons donc $x_2 = 8/7$ et $x_1 = 32/7$. Cette solution n'est pas entière, par conséquent, deux branches sont possibles :

$x_1 \geq 5 \Leftrightarrow -1/7x_3 - 4/7x_2 \geq 13/7$, cette contrainte n'est pas valable.

$x_1 \leq 4 \Leftrightarrow -1/7x_3 - 4/7x_2 \leq -4/7$; Cette contrainte est rajoutée au tableau simplexe précédent. En appliquant la méthode duale du simplexe nous trouvons la solution optimale entière obtenue dans le tableau 2 suivant :

| B | Base | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_2 | 1 | 0 | 1 | 1/4 | 0 | 1/4 |
| x_1 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| x_4 | 1 | 0 | 0 | 1/4 | 1 | -7/4 |
| c^1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| d^1 | -2 | 0 | 0 | 1/4 | 0 | 1/4 |
| y^1 | | | | 0 | | -2 |
| c^2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 0 |
| d^2 | -2 | 0 | -1/4 | 0 | -1/4 | |
| y^2 | | | | 0 | | 2 |
| | 3 | 0 | 0 | -1/4 | 0 | 3/4 |

Tableau V.2

$\gamma_j^1 \leq 0$ pour tout $j \in J_2^1$; $J_2^1 = N_2 = \{2, 5\}$, alors la solution $(4, 1)$ est optimale.

$Eff = \{(4, 1)\}$, $H_2 = \{5\}$ et $S_3 = \{x \in S_2 / x_5 \geq 1\}$.

La contrainte $x_5 \geq 1$ est rajoutée aule tableau simplexe. Après le pivotage, nous obtenons le tableau suivant :

| B | Base | x_2 | x_6 |
|-------|------|-------|-------|
| x_2 | 3 | 4 | 1 |
| x_1 | 3 | 0 | 1 |
| x_4 | 2 | -1 | -2 |
| x_5 | 1 | 0 | -1 |
| c^1 | 1 | 0 | 1 |
| d^1 | -3 | -1 | 0 |
| y^1 | | -1 | 1 |
| c^2 | 1 | 0 | 1 |
| d^2 | -1 | 1 | 0 |
| y^2 | | -1 | 1 |
| c^3 | 3 | 1 | 1 |

Tableau V.3

$J_3^1 = \emptyset$, alors la solution entière $(3, 0)$ est optimale et $Eff = \{(4, 1); (3, 0)\}$.

En continuant à procéder de cette manière, nous obtenons le tableau suivant :

| B | Base | x_1 | x_{10} |
|-------|------|-------|----------|
| x_6 | 3 | 1 | 0 |
| x_3 | 0 | 1 | 4/3 |
| x_4 | 8 | 1 | -1 |
| x_5 | 4 | 1 | 0 |
| x_6 | 2 | 0 | -1 |
| x_7 | 1 | 3 | 8 |
| x_8 | 0 | 1 | 1 |
| x_2 | 0 | -1 | -1 |
| c^1 | 4 | 1 | 0 |
| d^1 | -3 | -1 | -1 |
| y^1 | | -1 | -4 |
| c^2 | -4 | -1 | 0 |
| d^2 | -1 | 1 | 1 |
| y^2 | | -5 | -4 |
| c^3 | 0 | 0 | 1 |

Tableau V.4

$J_3^1 = \emptyset$, alors la solution entière (0, 0) est optimale et $Eff = \{(4, 1); (3, 0); (0, 0)\}$,

$N_4 = \{1, 10\}$, $H_4 = \{10\}$ et $S_5 = \{x \in S_4 / x_{10} \geq 1\}$.

La contrainte $x_{10} \geq 1$ est ajoutée au tableau précédent et nous obtenons le tableau V.5 suivant :

| B | Base | x_{11} | x_{10} |
|-------|------|----------|----------|
| x_6 | 2 | 1 | -1 |
| x_3 | -1 | 1 | 1/3 |
| x_4 | 7 | 1 | -2 |
| x_5 | 3 | 1 | -1 |
| x_7 | 2 | 0 | -1 |
| x_9 | -2 | 3 | 5 |
| x_8 | -1 | 1 | 0 |
| x_2 | 1 | -1 | 0 |
| x_1 | 1 | -1 | 1 |
| c^1 | 3 | 1 | -1 |
| d^1 | -2 | -1 | 0 |
| y^1 | | -1 | 4 |
| c^2 | -3 | -1 | 1 |
| d^2 | -2 | 1 | 0 |
| y^2 | | -5 | -4 |
| c^3 | 0 | 0 | 1 |

Le dual n'est pas réalisable, alors le nœud correspondant est exploré.

L'ensemble des solutions entières efficaces du problème (P) est :
 $Eff = \{(4, 1); (3, 0); (2, 0); (1, 0); (0, 0)\}$.

V.3.2. La méthode de MOULAÏ Mustapha [1]

Considérons le problème fractionnaire linéaire en nombres entiers à objectifs multiples donné par

$$(P) \begin{cases} \max Z_1(x) = \frac{c^1 x + \alpha^1}{d^1 x + \beta^1} \\ \vdots \\ \max Z_r(x) = \frac{c^r x + \alpha^r}{d^r x + \beta^r} \\ \text{s. c} \\ x \in S \\ x \text{ entier} \end{cases}$$

Afin de résoudre (P), on cherche l'ensemble des solutions réalisables de (P_1) suivant :

$$(P_1) \begin{cases} \max Z_1(x) = \frac{c^1 x + \alpha^1}{d^1 x + \beta^1} \\ \text{s. c} \\ x \in S \\ x \text{ entier} \end{cases}$$

Les notations suivantes sont adoptées :

$S_1 = \{x \in B^x / A_1(x) \leq b_1, A_1 \in R^{m_1 \times n_1}, b_1 \in R^{m_1}, x \geq 0\}$ est la région tronquée de S obtenue par des coupes successives de Gomory.

Z_1^1 est la valeur optimale de Z_1 dans le Problème (P_1)

$x_1^1 = \{x_{1,j}^1\}$ est la solution entière de Z_1^1 obtenue sur S_1

Z_i^1 est la valeur de Z_i , $i \in \{2, \dots, r\}$ correspondant à la solution x_1^1

β_1^1 est la base de S_1

$a_{1,j}^1 \in R^{m_1 \times 1}$ sont les vecteurs d'activités de $x_{1,j}^1$ appropriés à la région tronquée S_1

$$y_{1,j}^1 = (y_{1,ij}^1) = (\beta_1^1)^{-1} a_{1,j}^1 \text{ ou } y_{1,j}^1 \in R^{m_1 \times 1}$$

$$I_1 = \{j: a_{1,j}^1 \in \beta_1^1\}$$

$$N_1 = \{j: a_{1,j}^1 \notin \beta_1^1\}$$

$$c_j^1 = \text{la } j^{\text{ème}} \text{ composante de vecteur } c^1$$

$$d_j^1 = \text{la } j^{\text{ème}} \text{ composante de vecteur } d^1$$

$$c_{1,1}^1 = \sum_{i \in I_1} c_i^1 y_{1,ij}^1$$

$$d_{1,1}^1 = \sum_{i \in I_1} d_i^1 y_{1,ij}^1$$

$$Z_1(x_1^1) = \frac{Z_{1,1}^1}{Z_{1,2}^1} \quad \text{Où } Z_{1,1}^1 = c^1 x_1^1 + \alpha^1 \quad \text{et } Z_{1,2}^1 = d^1 x_1^1 + \beta^1$$

$y_{1,j}^1 = Z_{1,2}^1(c_j^1 - c_{ij}^1) - Z_{1,1}^1(d_j^1 - d_{ij}^1)$ le coût réduit relatif à la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur gradient réduit $\overline{y_1^1}$

$$\Gamma_1 = \{j/J \in N_1 \text{ et } \overline{y_{1,j}^1} = 0\}$$

Pour $k \geq 2$

$S_k = \{x \in R^{n_k} / A_k x \leq b_k, A_k \in R^{m_k \times n_k}, b_k \in R^{m_k}, x \geq 0\}$ est la région tronquée courante de S obtenue par l'application de la coupe $\sum_{j \in N_{k-1} - \{j_{k-1}\}} x_j \geq 1$ où

$$j_{k-1} \in \Gamma_{k-1}$$

$x_k^1 = \{x_{k,j}^1\}$ est la $k^{\text{ème}}$ solution optimale entière du problème (P_1) obtenue sur S_k

β_k^1 est la base de S_k

$a_{k,j}^1 \in R^{m_k \times 1}$ sont les vecteurs activités de $x_{k,j}^1$ appropriés à la région courant S_{k-1}

$$y_{k,j}^1 = (y_{k,ij}^1) = (\beta_k^1)^{-1} a_{k,j}^1 \text{ où } y_{k,j}^1 \in R^{m_k \times 1}$$

$$I_k = \{j: a_{k,j}^1 \in \beta_k^1\}$$

$$N_k = \{j: a_{k,j}^1 \notin \beta_k^1\}$$

c_j^1 est la $j^{\text{ème}}$ composante de vecteur p^1

d_j^1 est la $j^{\text{ème}}$ composante de vecteur q^1

$$c_{k,1}^1 = \sum_{i \in I_1} c_i^1 y_{k,ij}^1$$

$$d_{k,1}^1 = \sum_{i \in I_1} d_i^1 y_{k,i}^1$$

$$Z_1(x_k^1) = \frac{Z_{k,1}^1}{Z_{k,2}^1} \quad \text{Où} \quad Z_{k,1}^1 = c^1 x_k^1 + \alpha^1 \quad \text{et} \quad Z_{k,2}^1 = d^1 x_k^1 + \beta^1$$

$\overline{y_{k,j}^1} = Z_{k,2}^1 (c_j^1 - c_{ij}^1) - Z_{k,1}^1 (d_j^1 - d_{ij}^1)$ le coût réduit relatif à la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur gradient réduit $\overline{y_k^1}$

$$\Gamma_k = \{j / j \in N_k \text{ et } \overline{y_{k,j}^1} = 0\}$$

Théorème 3 : Le point x_k^1 de S est une solution optimale du problème fractionnaire (P_1) si et seulement si le vecteur gradient réduit $\overline{y_{k,j}^1} \leq 0$ pour tout indice $j \in N_k$

Corollaire 2 : La solution x_k^1 du problème (P_1) est unique si et seulement si le vecteur gradient réduit $\overline{y_{k,j}^1} < 0$ pour tout indice $j \in N_k$.

Théorème 4 : Toutes les solutions réalisables x_k^q , $q \in \{2, \dots, p_k\}$ du problème fractionnaire linéaire (P_1) alternatives à x_k^1 sur l'arête E_{jk} de la région S (ou la région tronquée S_k) dans la direction d'un vecteur $\alpha_{k,jk}^1$, $j_k \in \Gamma_k$, existent dans le demi-espace ouvert $\sum_{j \in N_k - \{j_k\}} x_j < 1$.

Théorème 5 : Une solution réalisable entière du problème fractionnaire linéaire (P_1) n'appartient pas à l'arête E_{jk} , $j_k \in \Gamma_k$ de la région S_k à travers une solution réalisable entière x_k^1 du problème (P_1) appartient au demi-espace fermé $\sum_{j \in N_k - \{j_k\}} x_j \geq 1$.

Remarque : Les démonstrations de ces théorèmes sont trop longues, le lecteur intéressé sont invités à consulter [] et [].

Algorithme

Etape1 :

- Résoudre le problème (P_1) par la méthode de Cambini
- Donner la solution optimale entière x_k^1 sur S_1 , notons qu'à la place du problème (P_1) , on peut considérer d'une manière analogue le problème (P_i) avec un objectif Z_i pour un indice quelconque $i \in \{2, \dots, r\}$, construire l'ensemble Γ_1 .

Etape2 : Si $\overline{y_{1,j}^1} < 0$ pour tout indice $j \in N_1$, x_1^1 est l'unique solution optimale sur S_1 et Z_1^1 est la valeur optimale de Z_1 . Calculer les valeurs Z_i^1 de Z_i données par x_1^1 , $i \in \{2, \dots, r\}$. Enregistrer le premier vecteur efficace comme $(Z_1^1, Z_2^1, \dots, Z_r^1)$ pour construire l'ensemble Eff_0 . Si $\Gamma_1 = \emptyset$, l'arête E_{j_1} ne contient pas de solutions réalisables entières alternatives à x_1^1 . Tronquer le point x_1^1 par la coupe suivante : $\sum_{j \in N_k} x_j > 1$.

Par application de la méthode duale du simplexe, on obtient une solution réalisable entière $x_2^1 = (x_{2,j}^1)$ dans la région tronquée S_2 . Ajouter la valeur correspondante (Z_1, Z_2, \dots, Z_r) à l'ensemble des solutions efficaces Eff_0 s'il n'est pas dominé par l'un des précédents vecteurs entiers efficaces. Par conséquent Eff_0 devient Eff_1

S'il existe au moins un indice $j_1 \in N_1$ pour lequel $\overline{y_{1,j}^1} = 0$, calculer le nombre

$$\theta_{j_1} = \min_{i \in I_1} \left\{ \frac{x_{1,i}^1}{y_{1,i,j_1}^1} / y_{1,i,j_1}^1 > 0 \right\} \text{ correspondant à la solution } x_1^1.$$

a) Si $\theta_{j_1} \geq 1$, déterminer toutes les solutions entières réalisables x_1^q , $q \in \{2, \dots, p_1\}$ alternatives à x_1^1 le long de l'arête E_{j_1} et leurs vecteurs critères correspondants. Tronquer l'arête E_{j_1} par la coupe $\sum_{j \in N_1 - \{j_1\}} x_j > 1$. Une solution réalisable entière $x_2^1 = (x_{2,j}^1)$ dans la région tronquée S_2 est obtenue et son vecteur critère correspondant est ajouté à l'ensemble Eff_0 s'il n'est pas dominé par l'un des vecteurs critères efficaces précédemment déterminés pour obtenir Eff_1 .

b) Si $\theta_{j_1} < 1$ pour tout indice $j_1 \in \Gamma_1$, choisir un indice quelconque j_1 et appliquer directement la coupe $\sum_{j \in N_1 - \{j_1\}} x_j \geq 1$ pour déterminer une solution réalisable entière $x_2^1 = (x_{2,j}^1)$ dans la région tronquée S_2 . Son vecteur critère correspondant est ajouté à l'ensemble Eff_0 s'il n'est pas dominé par l'un des vecteurs précédemment déterminés. Eff_0 devient Eff_1 .

Etape k : Choisir un indice $j_{k-1} \in \Gamma_{k-1}$ et explorer l'arête $E_{j_{k-1}}$ pour déterminer les solutions entières réalisables x_{k-1}^q , $q \in \{2, \dots, p_k\}$ alternatives à x_{k-1}^1 . Augmenter l'ensemble Eff_{k-1} par les vecteurs critères non dominés correspondants pour construire Eff_k

L'arête $E_{j_{k-1}}$ est tronquée par la coupe $\sum_{j \in N_{k-1} - \{j_{k-1}\}} x_j \geq 1$.

La solution entière obtenue sur la région tronquée S_k sera soit une solution réalisable pour le problème (P_1) alternative à x_{k-1}^1 ou la prochaine meilleure solution x_k^1 ou un point non entier. Ceci marque le début de l'étape $k + 1$.

Etape finale : La procédure s'arrête lorsque la méthode duale du simplexe est irréalisable, indiquant ainsi que la région tronquée courante ne contient aucun point réalisable entier et que l'ensemble des points efficaces est complètement déterminé.

Exemple d'application :

Soit le problème de la programmation fractionnaire linéaire en nombres entiers à trois critères suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \max Z_1(x) = \frac{x_1 - 4}{-x_2 + 3} \\ \max Z_2(x) = \frac{-x_1 + 4}{x_2 + 1} \\ \max Z_3(x) = -x_1 + x_2 \\ \text{s. c} \\ -x_1 + 4x_2 \leq 0 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ \text{et } x_1, x_2 \text{ entiers} \end{array} \right.$$

Etape1 : Résoudre le problème relaxé (*) :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \max Z_1(x) = \frac{x_1 - 4}{-x_2 + 3} \\ \text{s. c} \\ -x_1 + 4x_2 \leq 0 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

La solution de base réalisable optimale du domaine tronqué est donnée par le tableau V.6 .

$$I_1 = \{1,3,4\}, \quad N_1 = \{2,5\}, \quad \Gamma_1 = \left\{ \frac{j}{j} \in N_1, \bar{y}_j = 0 \right\} = \{2\}, \quad Z_1^1 = Z_1(x_1^1) = 0,$$

$$Z_2^1 = Z_2(x_1^1) = 0, \quad Z_3^1 = Z_3(x_1^1) = -4$$

L'unique solution optimale $x_1^1 = (4,0)$ produit le premier triplet efficace $(0,0,-4)$ par suite, $Eff_0 = \{(0,0,-4)\}$.

| B | x_B | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_3 | 4 | 0 | 4 | 1 | 0 | 1 |
| x_4 | 0 | 0 | -1/2 | 0 | 1 | -1 |
| x_1 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| p_j | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| q_j | -3 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| $\overline{y_j}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3 |

Tableau V.6

Etape2: $\Gamma_1 = \phi$, prendre $j_1 = 2$ et parcourir l'arrête E_2 .

Comme $\theta_{j_1} = \min\left\{\frac{4}{4}\right\} = 1$, cela signifie que x_1^1 n'est pas unique et une solution qui lui est adjacente est possible. $(0,0,-3)$ domine le triplet $(0,0,-4)$ ce qui entraîne que $Eff_0 = \{(0,0,-3)\}$.

L'arête E_2 est tronquée par la coupe $x_5 \geq 1$ i.e. $-x_5 + x_6 = -1$ où x_6 est une variable d'écart. En appliquant la méthode duale du simplexe, on obtient une solution réalisable entière $x_2^1 = (3,0)$ donnée par le tableau du simplexe suivant :

| B | x_B | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_3 | 3 | 0 | 4 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| x_4 | 1 | 0 | -1/2 | 0 | 1 | 0 | -1 |
| x_1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| x_5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 |
| p_j | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| q_j | -3 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\overline{y_j}$ | -1/3 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | -3 |

Tableau V.7

Le triplet correspondant $(-1/3, 1, -3)$ et non dominé en tenant compte des solutions efficaces trouvées précédemment.

Donc $Eff_1 = \{(0, 0, -3); (-1/3, 1, -3)\}$, $N_2 = \{2, 6\}$, $\Gamma_1 = \emptyset$

Etape3 : Comme $\Gamma_2 = \emptyset$, x_2^1 est une solution unique. Ce point entier est tronqué par la coupe $x_2 + x_6 \geq 1$ i.e. $-x_2 - x_6 + x_7 = -1$ où x_7 est une variable d'écart supplémentaire

L'application de la méthode du simplexe produit la solution $x_3^1 = (2, 0)$ donnée par le tableau suivant :

| B | x_B | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | -3 |
| x_4 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | -1/2 |
| x_1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| x_5 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 |
| x_6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | -1 |
| x_2 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| p_j | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 |
| q_j | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| \bar{y}_j | -1/3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3 | -1 |

Tableau V.8

Le triplet non dominé $(-\frac{2}{3}; 2; -2)$ obtenu à cette étape est rajouté à l'ensemble Eff_1 pour construire Eff_2 tel que $Eff_2 = Eff_1 \cup \{(-\frac{2}{3}; 2; -2)\}$, $N_3 = \{7; 8\}$, $\Gamma_3 = \emptyset$.

Etape 4 : puisque $\Gamma_3 = \emptyset$, x_3^1 est une solution unique. Ce point entier est tronqué par la coupe $x_7 + x_8 \geq 1$ i.e. $-x_7 - x_8 + x_9 = -1$ ou x_9 est une variable d'écart supplémentaire. En appliquant la méthode duale du simplexe on aboutit à la solution $x_4^1 = (1, 0)$ donnée par le tableau suivant :

| B | x_B | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | $x_6 \dots\dots$ | x_9 | x_{10} |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------------------|-------|----------|
| x_3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| x_4 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | -1/2 |
| x_1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x_5 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| x_6 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 |
| x_2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| p_j | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| q_j | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| $\overline{y_j}$ | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3 | -3 |

Tableau V.9

Le triplet non dominé $(-1; 3; -1)$ est rajouté à l'ensemble Eff_2 pour construire Eff_3 tel que $Eff_3 = Eff_2 \cup \{(-1; 3; -1)\}$, $N_4 = \{9; 10\}$, $\Gamma_4 = \emptyset$.

Etape 5: $\Gamma_4 = \emptyset$, entraîne l'unicité de la solution x_4^1 . Ce point entier est tronqué par la coupe (5) $x_9 + x_{10} \geq 1$ i.e. $-x_9 - x_{10} + x_{11} = -1$ ou x_{11} est une variable d'écart supplémentaire. En appliquant la méthode dual du simplexe et éventuellement les coupes de gomory, la solution $x_4^1 = (1,0)$ donnée par le tableau5 suivant :

| B | x_B | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | $x_6 \dots\dots$ | x_{10} | x_{11} |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------------------|----------|----------|
| x_3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 |
| x_4 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | -1 |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| x_5 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| x_6 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | -1 |
| x_2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| p_j | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 |
| q_j | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| $\overline{y_j}$ | -4/3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -3 |

Tableau V.10

Le triplet non dominé $(-4/3; 4; 0)$ est rajouté à l'ensemble Eff_3 pour construire Eff_4 tel que $Eff_4 = Eff_3 \cup \{(-4/3; 4; 0)\}$, $N_5 = \{10; 11\}$, $\Gamma_5 = \emptyset$.

Etape 6: $\Gamma_5 = \emptyset$, la solution x_4^1 est unique. Ce point entier est tronqué par la coupe $x_{10} + x_{11} \geq 1$ i.e. $-x_{10} - x_{11} + x_{12} = -1$ où x_{12} est une variable d'écart supplémentaire.

Lors de l'application de la méthode duale du simplexe, l'opération usuelle de pivot devient impossible indiquant que le domaine restant ne contient aucun point entier réalisable et que toutes les solutions efficaces du problème étudié ont été obtenues. Cette impossibilité de pivoter est donnée par le tableau du simplexe suivant :

| B | x_B | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_{11} | x_{12} |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|----------|----------|
| x_3 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| x_4 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3/2 | -1 |
| x_1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -2 | 1 |
| x_5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| x_6 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | -1 |
| x_2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| p_j | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | -1 |
| q_j | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| $\overline{y_j}$ | -5/3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -3 |

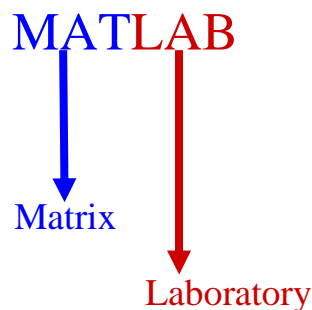
Tableau V.11

La variable x_3 est sélectionnée pour sortir de la base B et x_{10} est la variable qui doit rentrer dans la base. Seulement, le vecteur ligne $(\overline{a_{1,j}})$ a toutes ses composantes positives ce qui implique l'impossibilité de l'opération de pivot et par suite l'arrêt de l'algorithme.

VI.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnerons une petite introduction sur le logiciel MATLAB, puis nous présenterons notre application qui est basée sur la programmation de la méthode de Chergui sur MATLAB.

1. Qu'est ce que MATLAB ?



MATLAB est une application qui fournit un environnement de calcul matriciel simple, efficace, interactif permettant la mise en œuvre des algorithmes développés dans le cadre des projets *linpack* et *eispack*.

MATLAB est constitué d'un noyau relativement réduit, capable d'interpréter puis d'évaluer les expressions numériques matricielles qui lui sont adressées :

- Soit directement au clavier depuis une fenêtre de commande
- Soit sous forme de séquences d'expressions ou **scripts** enregistrées dans des fichiers-texte appelés *m-files* et exécutées depuis la fenêtre de commandes
- Soit plus rarement sous forme de fichiers binaires appelés *mex-files* ou fichiers *.mex* générés à partir d'un compilateur C ou Fortran.

Ce noyau est complété par une bibliothèque de fonctions prédéfinies, très souvent sous forme de fichiers *m-files*, et regroupés en paquetages ou *toolboxes*. A côté des *toolboxes* requises *local* et *matlab*, il est possible d'ajouter des *toolboxes* spécifiques à tel ou tel problème mathématique, *Optimization Toolbox*, *Signal Processing Toolbox* par exemple ou encore des *toolboxes* créés par l'utilisateur lui-même. Un système de chemin d'accès ou *path* permet de

préciser la liste des répertoires dans lesquels MATLAB trouvera les différents fichiers *m-files*.

MATLAB comporte un très grand nombre d'opérateurs, de commandes et de fonctions permettant de réaliser plusieurs opérations.

Dans MATLAB, on peut programmer et créer les fonctions et fichiers nous même sur M-file, puis les sauvegarder et les exécuter sur l'espace de travail. Il suffit juste d'introduire le nom du fichier ou de la fonction.

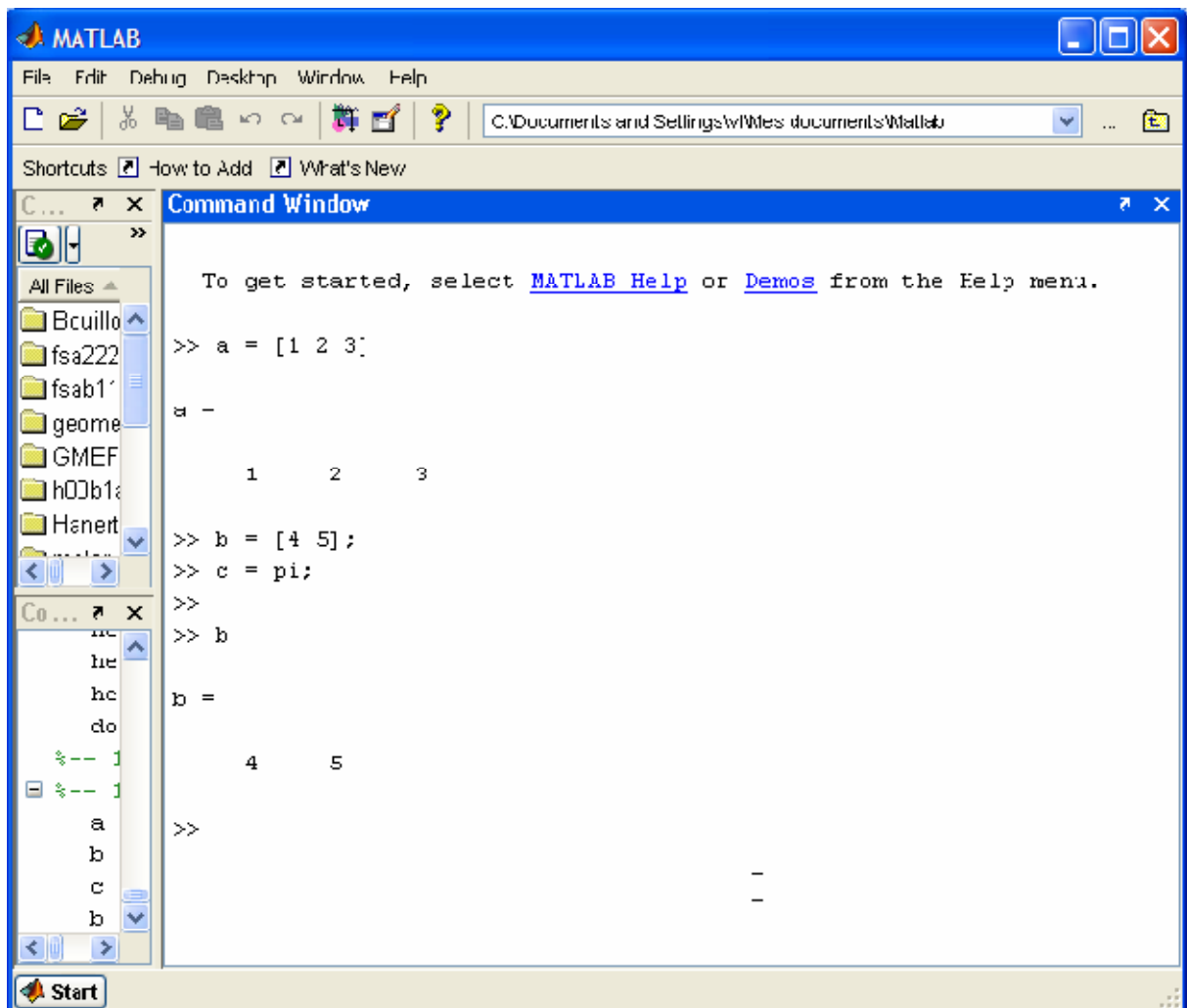
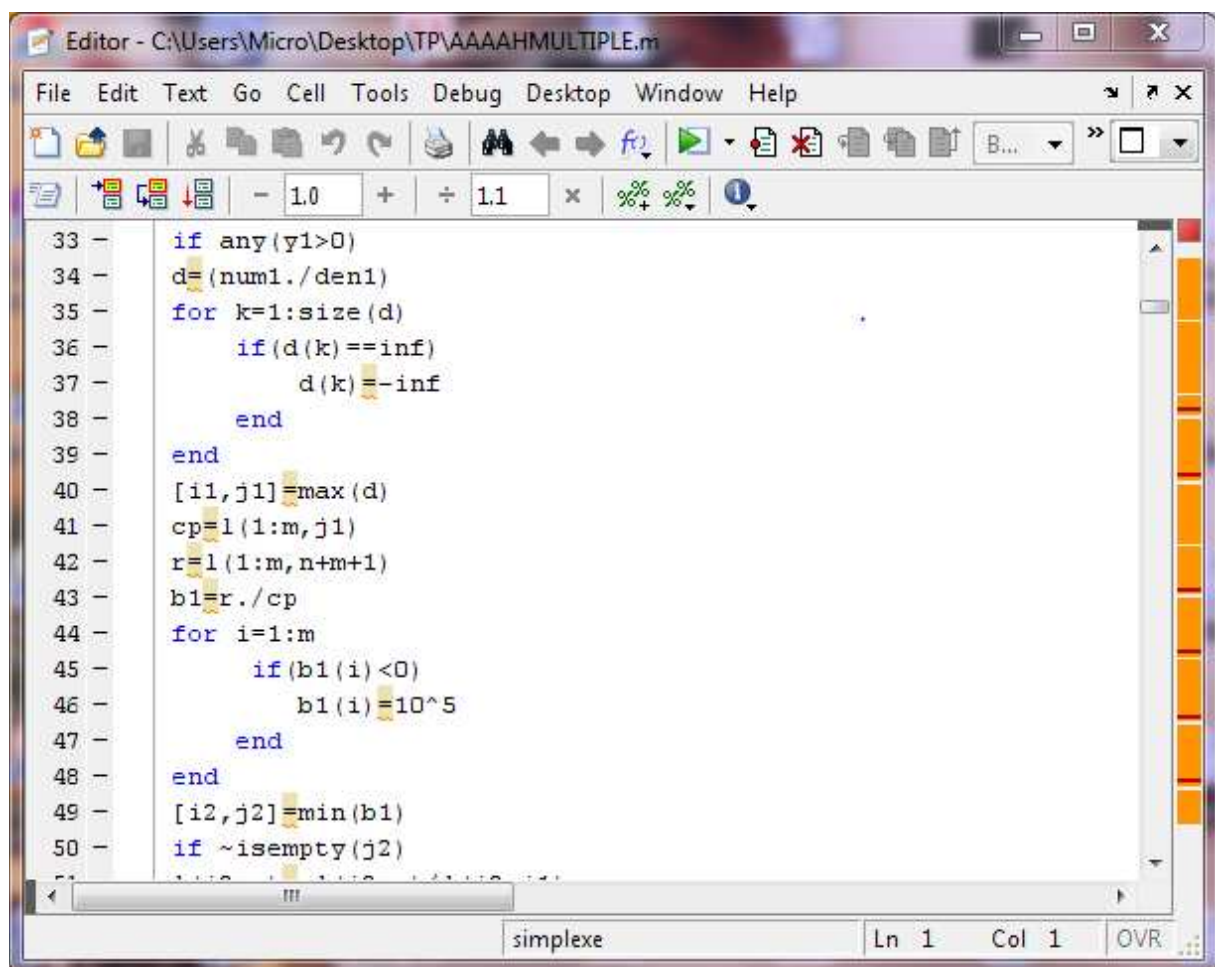


Fig.VI.1. Fenêtre de commandes Matlab

VI.2 Implémentation de la méthode

Pour notre implémentation nous avons pris l'exemple d'écrit dans le chapitre V.

On peut avoir la solution de cette exemple sur notre application, il suffit d'introduire le non de notre programme sur MATLAB (espace de travail) qu'on a nommé « Fractionnaire », d'introduire les données (la matrice, les fonctions objectifs, le vecteur b), puis cliquer sur la touche entrée. **Nous obtenons l'ensemble de solution efficace pour le problème**



```
33 -     if any(y1>0)
34 -     d=(num1./den1)
35 -     for k=1:size(d)
36 -         if(d(k)==inf)
37 -             d(k)=-inf
38 -         end
39 -     end
40 -     [i1,j1]=max(d)
41 -     cp=l(1:m,j1)
42 -     r=l(1:m,n+m+1)
43 -     b1=r./cp
44 -     for i=1:m
45 -         if(b1(i)<0)
46 -             b1(i)=10^5
47 -         end
48 -     end
49 -     [i2,j2]=min(b1)
50 -     if ~isempty(j2)
```

Fig. VI. 2 : Le m-file

Les étapes de cette implémentation :

- 1) Nous avons fait appelle a une fonction nommée `simplexe` pour calculer la solution de niveau optimale en maximisant la 3^{ème} fonction objectif sous les contraintes du problème (P).

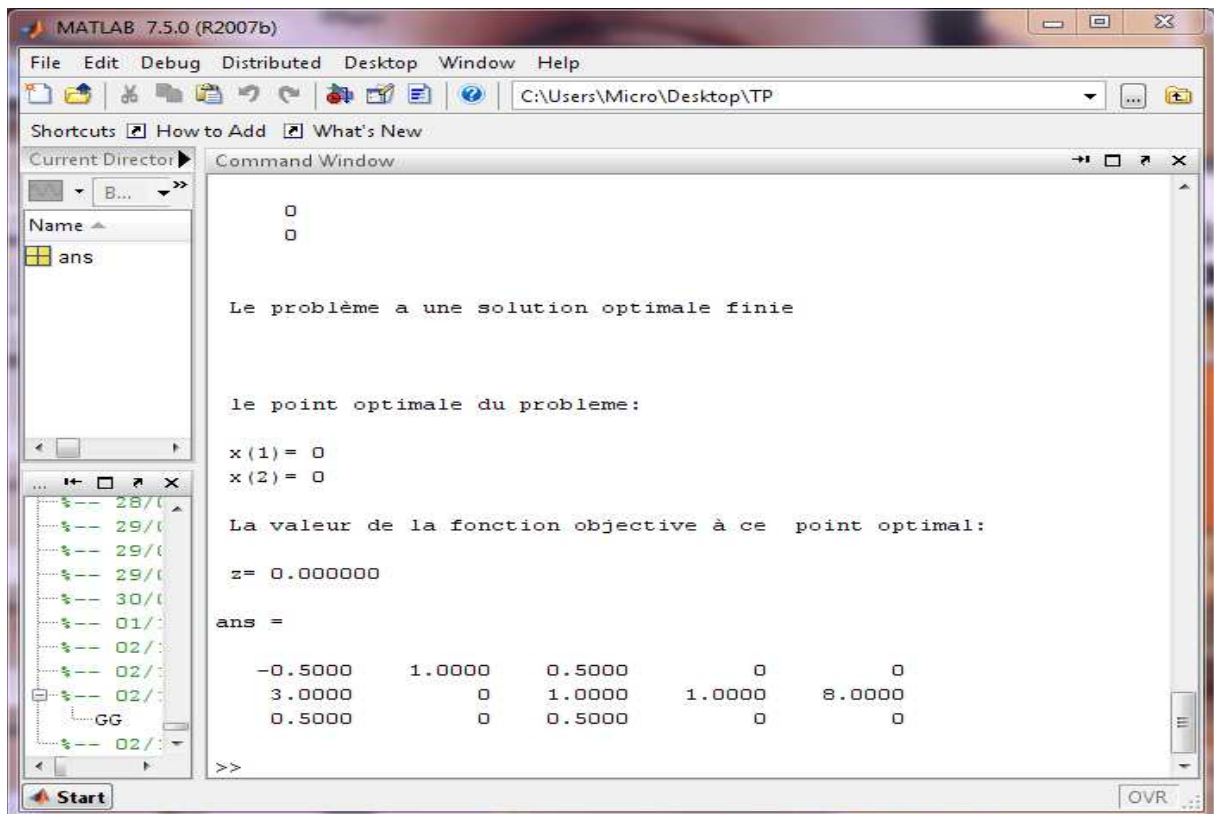


Fig. VI.3 : Le tableau simplexe optimal associé à cette solution.

L'optimisation multicritère est sans doute un axe de recherche très intéressant pour les scientifiques et les ingénieurs, non seulement à cause de nature multicritère de la plupart des problèmes réels, mais aussi parce que de nombreuses questions restent ouvertes dans ce domaine.

Dans ce modeste travail, on avons donné une vue panoramique des méthodes d'optimisation fractionnaire linéaire discrète uni-critère et multicritère. On peut conclure que ces méthodes sont basées sur l'optimisation continue, vu l'utilisation successives des algorithmes de la méthode du simplexe, et la méthode duale du simplexe.

Les deux méthodes exactes concernant l'optimisation fractionnaire linéaire en nombres entiers à objectifs multiples représentent un résultat important dans la littérature compte tenu des propriétés spécifiques du problème (MOLFPE). Bien que l'avantage principal de ces méthode soit le fait qu'aucune optimisation non linéaire n'est exigée, elle présente néanmoins un inconvénient alourdissant la complexité de l'algorithme. Cet inconvénient est caractérisé par la recherche de toutes les solutions réalisables entières du problème de programmation fractionnaire linéaire entier relaxé ($P1$).

Donc le problème reste ouvert aux autres chercheurs pour développer de meilleures méthodes de résolution de ce type de problèmes.

Références bibliographiques

- [1] Abbas M. et Moulai M., Integer linear fractional programming with multiple objective, Journal of the Italian operations research society, *Ricerca Operativa*, vol 2; pp. 256-265 (2002).
- [2] Abbas M. et Moulai M., Constrained multiple objective integer linear fractional programming problem, *European Journal of Operational Research*, Issue of the 12th Mini Euro Conférence, Brussels, Belgium April, 2 – 5, (2002).
- [3] Abbas M. et Moulai M., A modified version of Gupta's algorithm for multicriteria integer linear programs, *Quarterly Journal Belgium French and Italian of Operations Research Societies (4OR)*, pp. 22-35 (2002).
- [4] Abbas M. et Moulai M., Solving multiple objective integer linear programming, Journal of the Italian operations research society (*Ricerca operativa*), Vol. 29 n° 89 pp.15-38 (1999).
- [5] Abbas M., and Moulai M., Penalties Method for Integer Linear Fractional Programs, *Belgian Journal of Operations Research, Statistics and computer sciences*, Vol. 37/4 (1997)
- [6] Bitran G.R., and Novaes G., Linear Programming with a fractional objective function *Operations Research* 24, pp. 675-699, (1976).
- [7] Cambini A. et Martein L., A modified version of Marto's algorithm for the linear fractional problem, *Methods of Operational Research* 53, pp. 33-44 (1986).
- [8] Chergui M.E.A and Moulai M., An exact method for a discrete multiobjective linear fractional optimization, Hindawi Publishing Corporation, *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*, pp. 1-12 (2008).
- [9] Choo E.U., Proper efficiency and the linear fractional vector maximum problem, *Operational Research* 32(1) pp. 216-220, (1984).
- [10] Choo, E.U. and Atkins, D.R., Connectedness in Multiple Objective Linear Fractional Programming", *Management Science* Vol. 29, No 2, pp. 250-255, (1983).
- [11] Craven B. D., *Fractional Programming*, Helderman, Berlin, (1988).
- [12] Gupta R. and Malhorta R., Multi Criteria integer linear programming problem, *cahier de CERO* 34 (1992).
- [13] Granot D. and Granot F., On integer and mixed integer fractional programming problems, *Ann. Discrete Math.*, 1, pp. 221-231, (1977).
- [14] Klein D. and Hannan E., An algorithm for multiple objective integer linear programming problem, *European journal of operational research* 9, pp. 152-159, (1982).

Références bibliographiques

- [15] Kornbluth, J. S. H., and Steuer, R. E., Multiple objective linear fractional programming, *Management Science* 27 (1981), pp. 1024-1039.
- [16] Martos B., Hyperbolic programming, *Naval Res. Logist. Quart.*, 11, pp. 135-155, (1964).
- [17] Moulai M., Optimisation multicritère fractionnaire linéaire en nombres entiers. Thèse de Doctorat.2002.
- [18] Nykowski I. and Zolkiewski Z., A compromise procedure for the multiple objective linear fractional programming problem, *European Journal of Operational Research* 19(1), pp. 91-97, (1985).
- [19] Pareto A., *Cours d'économie politique*, vol. 1 et 2, F. Rouge, Lausanne, (1896).
- [20] Schaible S. and Ibaraki T., Fractional programming, *European Journal of Operational Research*, 12, pp. 325-338, (1983).
- [21] Steuer R., *Multiple Criteria Optimization : Theory, Computation and Applications*, Wiley & Sons, New-York (1985).
- [22] Sylva J. and Crema A., (2004), A method for finding the set of nondominated vectors for multiple objective integer linear programs, *European Journal of Operational Research*, 158 (1), 46-55.
- [23] Yann C., Siarry P., *Optimisation multiobjectif*, groupe Eyrolles, (2002).