

*République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère De l'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERY de Tizi-ouzou
Faculté de Génie de la construction
Département De Génie Civil*



Mémoire de fin d'étude

*Présenté par
AHMED ZAID Amine*

*Pour obtenir le grade de :
Master*

*Spécialité
Construction Métallique*

*Thème
**Etude fiabiliste d'une structure
métallique***

Encadré par : DEHMOUS Hocine

Promotion 2016/2017

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Mr Dehmous Hocine qui m'a encadré au cours de ce projet pour son écoute, ces conseils et sa disponibilité. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens à remercier aussi Mr Dahmani Lahlou pour son aide précieuse tout au long du travail et Mr Missoum Djamel pour ces qualités d'enseignant.

Je remercie ma famille pour le soutien qui m'on apporté non seulement durant ce travail mais tout au long de mon cursus universitaire.

Je souhaiterais remercier tout mes amis qui mon aider chacun à sa manière afin de réaliser ce projet de fin d'étude.

Enfin, Je remercie les membres du jury pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Dédicace

C'est avec une profonde gratitude que je dédie ce modeste travail à mes chers parents, qui ont sacrifié leur vie pour ma réussite.

Je dédie aussi ce travail à toute ma famille et mes amis avec qui j'ai travaillé tout au long de la réalisation de ce projet de fin d'étude et surtout mes meilleurs amis qui me sont très chers.

Résumé

Ce projet de fin d'étude porte sur les approches probabilistes qu'on a appliqué aux structures métalliques. Dans ce projet la structure étudiée est un portique à nœuds déplaçable avec des encastremets à la base des deux poteaux.

On fera en premier lieu une analyse déterministe qui consiste à faire un dimensionnement et les vérifications nécessaire en se basant sur les lois dictées par l'Eurocode 3. Par la suite on entame la partie fiabilité en intégrant les données incertaines par des variables aléatoires. Ceci va nous permettre d'évaluer la probabilité de défaillance de la structure.

Enfin, afin d'avoir une probabilité de défaillance voulue on a fait une optimisation qui consiste à modifier les paramètres géométriques et mécaniques des éléments.

Abstract

This end-of-study project deals with the probabilistic approaches applied to metallic structures. In this project the structure studied is a gantry with displaceable knots with recesses at the base of the two columns.

First, a deterministic analysis is carried out, which consists of sizing and the necessary checks based on the law dictated by Eurocode 3. Subsequently, the reliability part begins by integrating uncertain data with random variables. This will enable us to evaluate the probability of failure of the structure.

Finally, in order to have a probability of failure, an optimization has been done which consists of modifying the geometric and mechanical parameters of the elements

Table des matières

Introduction générale	1
Chapitre 1 : Généralités sur la construction métallique	2
1.1. Introduction	2
1.2. Charges et actions	2
1.3. Les éléments d'une structure métallique	4
1.4. Les différents types d'assemblages	8
1.5. Conclusion	9
Chapitre 2 : Généralités sur les approches probabilistes	10
2.1. Introduction	10
2.2. La fiabilité.....	10
2.3. Problématique	10
2.4. Variables aléatoires de bases	11
2.5. Lois de distributions	12
2.6. Fonction de performance	13
2.7. Indicateurs de fiabilité	15
2.8. Principales approches probabilistes	16
2.9. Conclusion	19
Chapitre 3 : Analyse déterministe d'une structure métallique	20
3.1. Introduction	20
3.2. Pré-dimensionnement	20
3.3. Analyse de la structure	37
3.4. Analyse globale du portique	40
3.5. Vérification de la résistance en section et des éléments du portique.....	40
3.6. Calcul des assemblages	44

3.7. Conclusion	57
Chapitre 4 : Analyse fiabiliste d'un portique en charpente métallique	58
4.1. Introduction	58
4.2. Définition de la simulation probabiliste	58
4.3. Estimation de la probabilité de défaillance.....	58
4.4. Introduction a Matlab	59
4.5. Génération de nombre aléatoire.....	59
4.6. Organigramme de calcul.....	60
4.7. Choix des variables aléatoires	60
4.8. Choix de la fonction d'état limite	61
4.9. Résultats de l'analyse fiabiliste	66
4.10. Conclusion	76
Conclusion générale.....	77
Bibliographie.....	78

Liste des figures

Chapitre 1

Figure 1.1 : Représentation de la charge de la neige.

Figure 1.2 : Représentation du vent sur un hangar.

Figure 1.3 : Représentation du séisme.

Figure 1.4 : Représentation des poteaux.

Figure 1.5 : Représentation des potelets.

Figure 1.6 : Représentation des pannes.

Figure 1.7 : Représentation des contreventements.

Figure 1.8 : Représentation d'une poutre ferme.

Figure 1.9 : Représentation d'un assemblage poteau-poutre.

Figure 1.10 : Vue en plan d'un assemblage du pied de poteau.

Chapitre 2

Figure 2.1 : Domaines de sûreté et de défaillance dans le cas de deux variables aléatoires $\{X\} = \{X_1, X_2\}$.

Figure 2.2 : Domaine de défaillance, état limite et domaine de sécurité.

Figure 2.3 : Méthode de Monte Carlo: tirages aléatoires et évaluations de la fonction de performance G dans le cas de deux variables aléatoires $\{X\} = \{X_1, X_2\}$.

Figure 2.4 : Recherche de l'indice de fiabilité β et du point de conception P^* dans l'espace standard pour deux variables aléatoires $\{U\} = \{U_1, U_2\}$.

Chapitre 3

Figure 3.1 : Représentation du portique sous les différents chargements.

Figure 3.2 : Représentation de l'élément (1-2) sous la combinaison $W1$.

Figure 3.3 : Représentation de l'élément (2-4) sous la combinaison $W2$.

Figure 3.4 : Représentation de l'élément (3-4).

Figure 3.5: Représentation de la disposition des boulons pour l'assemblage du nœud 2.

Figure 3.6: Représentation de la disposition des boulons pour l'assemblage du nœud 4.

Chapitre 4

Figure 4.1 : Organigramme de calcul de la probabilité de défaillance avec la Méthode de Monte Carlo.

Figure 4.2 : Distribution de la charge permanente.

Figure 4.3 : Distribution de la neige.

Figure 4.4 : Distribution du vent.

Figure 4.5 : Evolution de la probabilité de défaillance en fonction de la valeur moyenne.

Liste des tableaux

Chapitre 2

Tableau 2.1: Principales lois de distribution.

Tableau 2.2: Correspondance entre l'indice de fiabilité β et la probabilité de défaillance

Chapitre 3

Tableau 3.1 : Choix de la courbe de flambement.

Tableau 3.2: Facteur d'imperfection α .

Tableau 3.3 : Facteur de moment uniformément équivalent β_M .

Tableau 3.4 : Coefficient de frottement selon l'Eurocode 3.

Tableau 3.5 : Expression des paramètres de l'équation quadratique.

Chapitre 4

Tableau 4.1 : Variables aléatoires et loi de distribution des paramètres.

Tab 4.2 : Probabilités de défaillance en fonction de nombre de tirage.

Tableau 4.3 : Evolution de la probabilité de défaillance selon les différents critères.

Tableau 4.4 : effet de la variabilité sur la probabilité de défaillance selon les différents critères.

Tableau 4.5 : effet de la moyenne sur la probabilité de défaillance selon les différents critères.

Tableau 4.6 : Evolution de la probabilité de défaillance en fonction de la valeur moyenne.

Tableau 4.7 : Effet de la loi de distribution sur la probabilité de défaillance.

Tableau 4.8 : Effet des coefficients de sécurité sur la probabilité de défaillance.

Tableau 4.9 : Probabilité de défaillance pour différent profilés.

Symboles utilisés

Charges

G : Charges permanentes.

N : Surcharge climatique de Neige.

V : Surcharge climatique de Vent.

Sollicitation

M_{ed} : Moment fléchissant de calcul.

N_{ed} : Effort normal.

V_{ed} : Effort tranchant.

$N_{pl,Rd}$: Résistance plastique de la section brute à l'effort normal.

$V_{pl,Rd}$: Résistance plastique de la section brute à l'effort tranchant.

$M_{pl,Rd}$: Moment fléchissant de résistance plastique.

Caractéristique du matériau

E : Module d'élasticité longitudinale.

f_y : Limite élastique du matériau.

f_u : Limite à la rupture du matériau ou résistance à la traction minimale spécifiée.

Caractéristiques géométriques et mécaniques des sections

A : Aire de la section brute.

I_y : Moment d'inertie suivant l'axe yy .

t_f : Épaisseur de la semelle.

t_w : Épaisseur de l'âme.

b : Largeur de la semelle.

h : Hauteur de la section.

L : Longueur de l'élément.

$W_{pl,y}$: Module de résistance plastique de la section suivant l'axe yy .

G_p : Poids propre.

Caractéristiques géométriques et mécaniques des boulons

d : Diamètre des boulons.

d_0 : Diamètre des trous de fixation.

A_s : Section des boulons.

f_{ub} : Résistance à la traction des boulons.

f_{yb} : Limite d'élasticité des boulons.

Autres symboles

γ_{M_0} : Facteur partiel de sécurité du matériau.

Ψ : Coefficient de combinaison.

λ : Elancement.

λ_1 : Elancement Eulérien.

$\bar{\lambda}$: Elancement réduit vis-à-vis du flambement.

$\bar{\lambda}_{LT}$: Elancement réduit vis-à-vis du déversement.

χ : Facteur de réduction vis-à-vis du flambement.

χ_{LT} : Facteur de réduction vis-à-vis du déversement.

α : Facteur d'imperfection pour le flambement.

α_{LT} : Facteur d'imperfection pour le déversement.

Introduction générale

La construction métallique est un domaine du génie civil qui s'intéresse à la construction d'ouvrages en métal et plus particulièrement en acier, elle constitue un domaine important d'utilisation des produits laminés sortis de la forge.

Les structures métalliques présentent plusieurs avantages dans le domaine de la construction : la légèreté, la rapidité de mise en œuvre, l'adaptation aux transformations ultérieures et les propriétés mécaniques élevées (limite élastique, ductilité), ce qui a permis de réaliser des structures efficaces de longue portée et poids réduit.

Le dimensionnement des structures est fondé sur une démarche déterministe dans laquelle l'ensemble des paramètres précités prennent une valeur fixe.

Précisément, les paramètres incertains sont décrits par une valeur caractéristique défavorable. Associée à des coefficients de sécurité, l'analyse conduit alors à une réponse binaire ("sûreté" ou "défaillance") vis-à-vis d'un critère donné, qui traduit d'une certaine manière la confiance que l'on peut accorder à ce dimensionnement précis. L'approche déterministe utilise par conséquent une marge volontairement pessimiste conduisant le plus souvent à un surdimensionnement injustifié.

Dans le cadre du présent mémoire, on s'intéresse à l'étude fiabiliste en construisant une modélisation probabiliste dans laquelle les données incertaines sont représentées par des variables aléatoires. On peut ensuite évaluer la probabilité de défaillance de la structure ainsi que mesurer la sensibilité de cette probabilité par rapport à chacune des variables aléatoires introduites.

Pour estimer la probabilité de défaillance de notre structure métallique on s'est basé sur ces différentes simulations :

- L'effet de variabilité des paramètres ;
- L'effet des coefficients de sécurité ;
- L'effet de l'écart type ;
- L'effet de la moyenne,
- L'effet des lois de distribution des paramètres.

Chapitre 1 : Généralités sur la construction métallique

1.1.Introduction

L'industrie sidérurgique s'est développée à la fin du 19ème siècle en proposant des produits de construction laminés adaptés à la construction d'ossatures métalliques.

Une ossature métallique est constituée de barres ou poutres métalliques reliées entre elles par des assemblages.

Compte tenue de la légèreté des ossatures métallique, les charges transmises au sol sont considérablement réduites.

Ces éléments de construction permettent de dégager de grands espaces utiles au sol, ce qui est adaptées à la réalisation de constructions telles que salles de sports, entrepôts, usines... Leur réalisation est rapide (assemblage direct d'éléments préfabriqués) et donc d'un prix très compétitif, et compte tenue de la légèreté des ossatures métallique, les charges transmises au sol sont considérablement réduites.

1.2.Charges et actions

Une bonne connaissance des charges et des actions est nécessaire pour l'analyse d'une structure.

Ces charges et ces actions comprennent les charges permanentes, les charges d'exploitations, les charges climatiques et les actions accidentelles.

1.2.1. Charges permanentes

Une charge permanente est notée par la lettre G, c'est l'ensemble du poids propre et du poids des équipements de l'ouvrage.

1.2.2. Charges d'exploitation

Ce sont les charges venant de l'utilisation de l'ouvrage. Par exemple, le poids des personnes ou bien le poids des voitures sur un parking. Ces charges sont variables et sont notées par la lettre Q.

1.2.3. Charges climatiques

1.2.3.1. La neige

L'action de la neige S (Snow) est une action climatique qui varie en fonction de la localisation géographique et de l'altitude du lieu considéré.

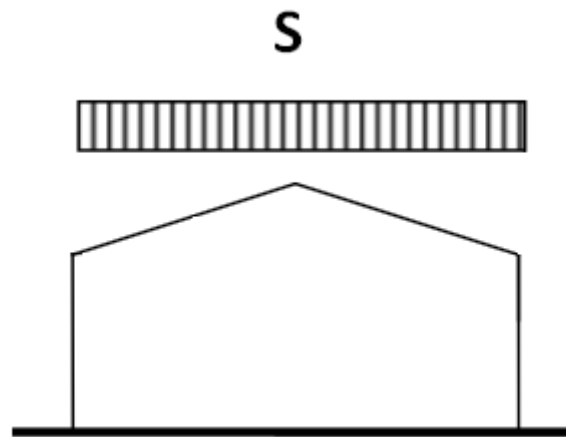


Figure 1.1 : Représentation de la charge de la neige.

1.2.3.2. Le vent

L'action du vent W (Wind) est une action variable climatique, elle est supposée généralement horizontale d'après le règlement Algérien neige et vent (RNV65).

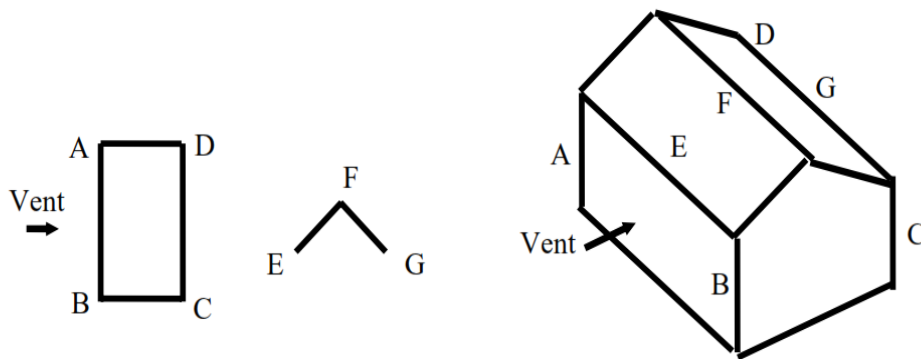


Figure 1.2 : Représentation du vent sur un hangar.

1.2.3.3. Action accidentelle (le séisme)

Le séisme est un phénomène naturel majeur qui cause des dégâts matériels et des pertes humaines considérables. L'action du séisme est horizontale et les efforts entraînés par ce dernier sont de nature dynamique.

Malgré les développements que le domaine du parasismique a connu ce phénomène reste imprévisible. C'est donc par une approche statistique probabiliste que le problème est appréhendé. Plus encore que pour les autres catastrophes naturelles [1].

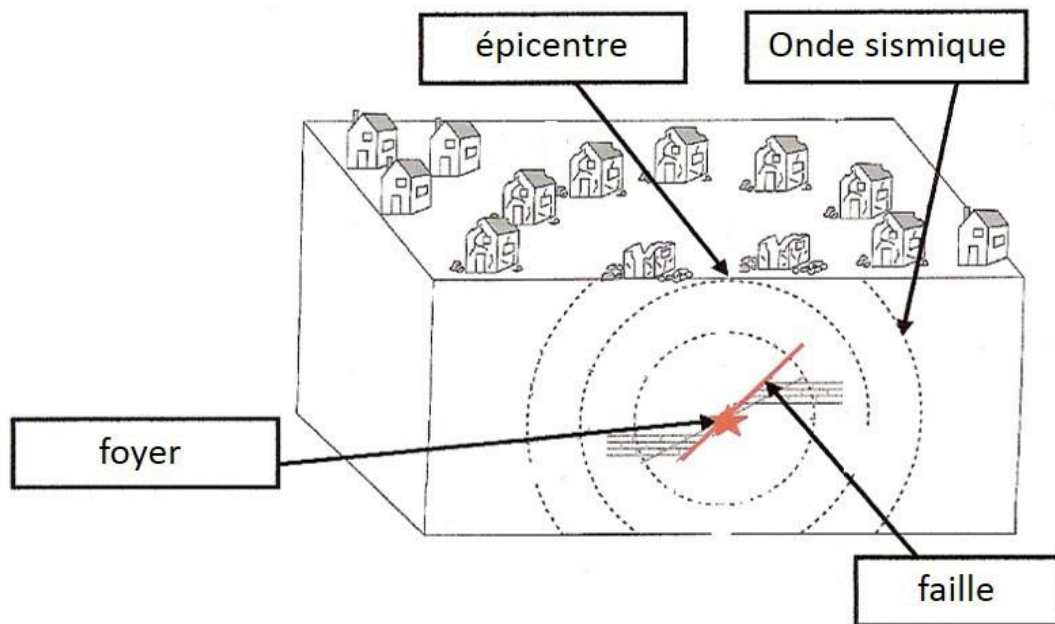


Figure 1.3 : Représentation du séisme.

1.3. Les éléments d'une structure métallique

1.3.1. Les poteaux

Les poteaux sont des éléments verticaux d'un ouvrages sur lesquels se concentrent de façon ponctuelle les charges de la superstructure et par lesquels ces charges se transmettent aux fondations, ils sont soumis principalement à de la compression et leur résistance est notamment limitée par le risque de flambement, par ailleurs ils peuvent être soumis a des forces horizontales comme le vent.

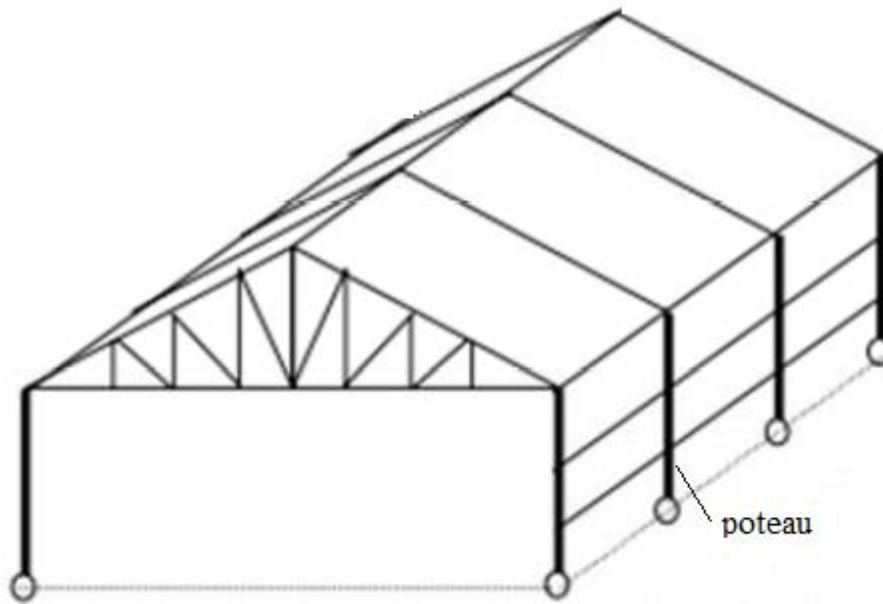


Figure 1.4 : Représentation des poteaux.

1.3.2. Les poutres

Les poutres sont des éléments horizontaux reposant sur les poteaux, elles supportent les charges qui seront par la suite transmises aux poteaux sur lesquels elles s'appuient, elles sont conçues pour résister à la flexion.

Une poutre est caractérisée par sa section rectangulaire dont la hauteur est plus grande que la largeur ($h > b$).

1.3.3. Les potelets

Les potelets sont généralement des profilés en I ou en H, ils sont considérés articulés aux deux extrémités. Ils sont sollicités par leur poids propre, bardage et poids des lisses ainsi que les surcharges climatiques dues au vent [6].

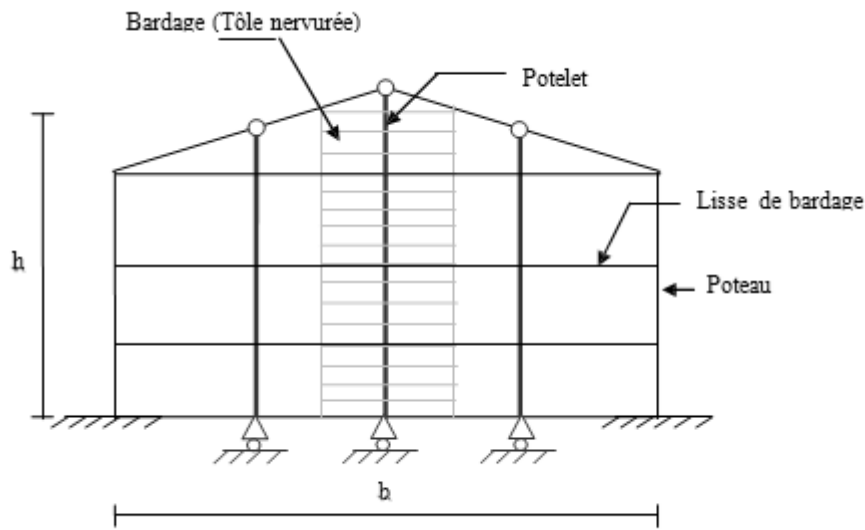


Figure 1.5 : Représentation des potelets.

1.3.4. Les lisses de bardage

Les lisses de bardage sont des produits complémentaires (ou secondaire) d'une charpente métallique utilisés principalement dans les murs. Elles sont disposées horizontalement et fixées entre deux poteaux. Une lisse de bardage est considérée comme une poutre reposant sur deux appuis [6].

1.3.5. Les pannes

La panne est une pièce de charpente posée horizontalement sur les fermes. Elle relie les fermes et sert de support au système de couverture.

En fonction de sa position dans la charpente, la panne prend un nom particulier :

- La panne faîtière, située au sommet de la charpente d'un toit ;
- La panne sablière, située en bas de pente ;
- Les pannes intermédiaires, situées entre la panne sablière et la panne faîtière, sont appelées pannes ventrières.

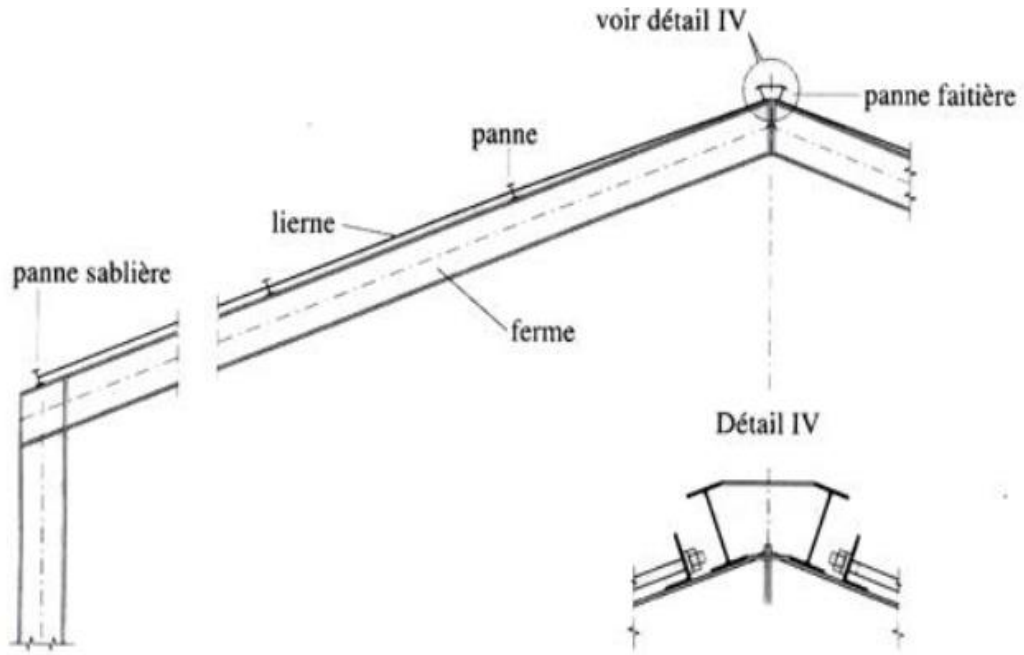


Figure 1.6 : Représentation des pannes.

1.3.6. Les contreventements

Un contreventement est un système statique destiné à assurer la stabilité globale d'un ouvrage vis-à-vis des effets horizontaux issus des éventuelles actions sur celui-ci (par exemple : vent, séisme). Ils sont disposés en toiture dans le plan des versants (poutre au vent) et en façade (palée de stabilité) [6].

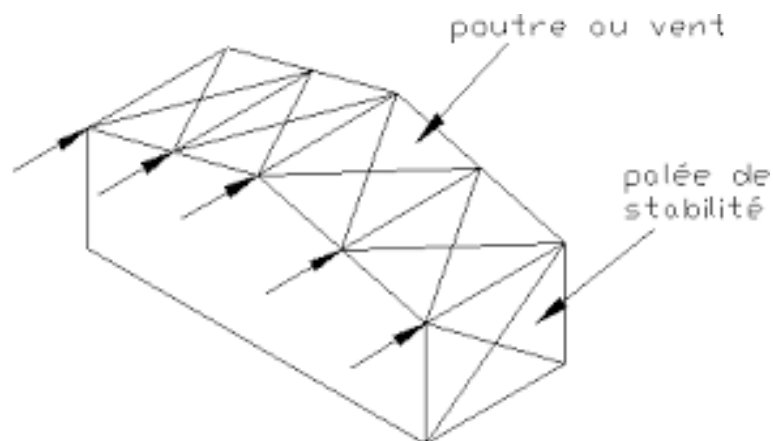


Figure 1.7 : Représentation des contreventements.

1.3.7. Traverses et fermes

Les portiques constitués de poteaux et traverses sont généralement les plus utilisés de nos jours pour des raisons de simplicité en comparaison avec les portiques (poteaux fermes). Leurs utilisations sont par contre est limitées à cause de leurs porté ($l \leq 40m$). Pour les portiques de longues portées, il est préférable pour des raisons économiques d'opter pour des poutres à treillis (fermes).

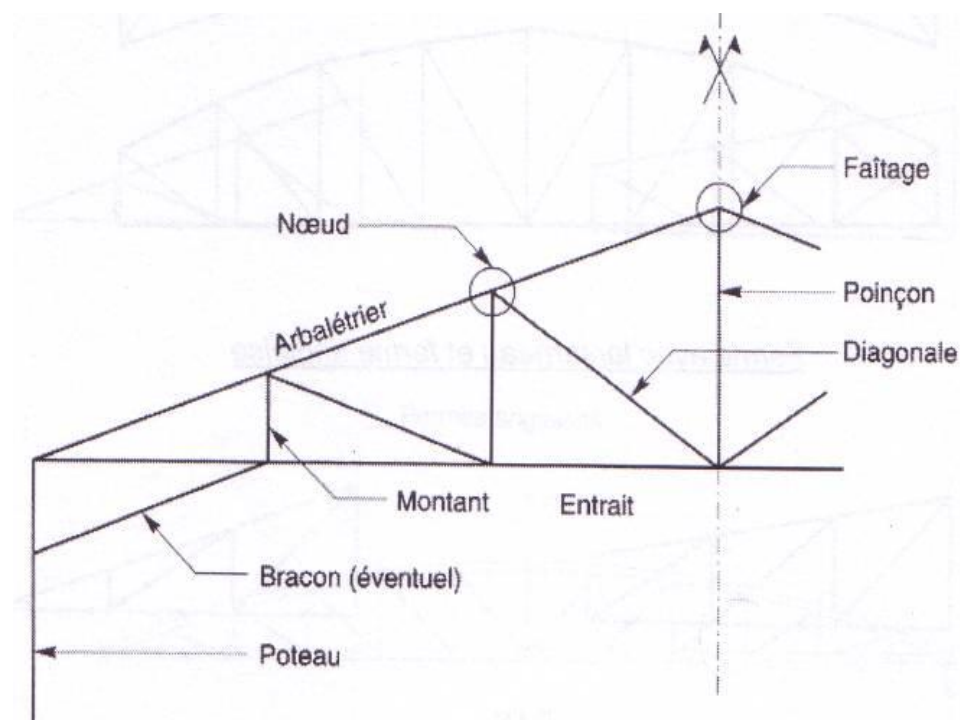


Figure 1.8 : Représentation d'une poutre ferme.

1.4. Les différents types d'assemblages

Un assemblage est un dispositif qui permet de réunir plusieurs pièces entre elles en assurant la bonne transmission des efforts.

1.4.1. Assemblage poteau-poutre

L'assemblage poutre-poteau est réalisé à l'aide d'une platine soudée à la poutre qui est boulonnée au poteau.

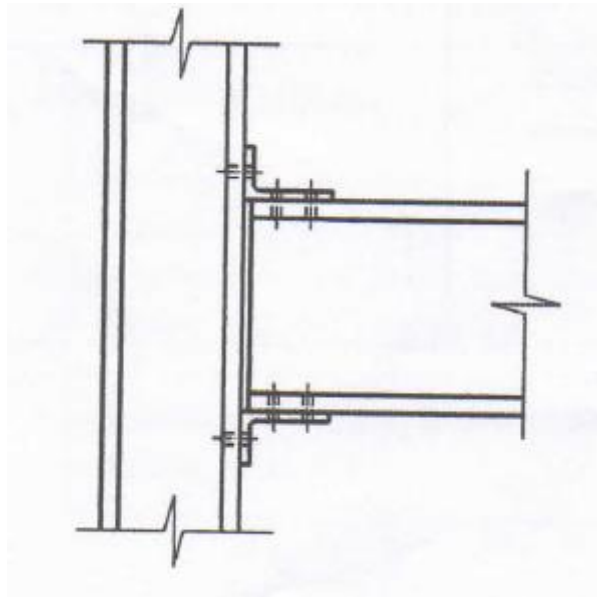


Figure 1.9 : Représentation d'un assemblage poteau-poutre.

1.4.2. Assemblage du pied de poteau

Le pied du poteau est assemblé à l'aide d'une plaque d'assise soudée au poteau qui est boulonnée à la fondation en béton en utilisant des tiges d'encrages.

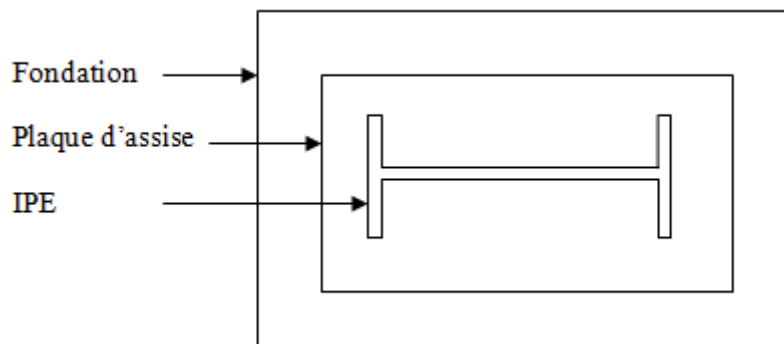


Figure 1.9 : Vue en plan d'un assemblage du pied de poteau.

1.5. Conclusion

A travers ce chapitre nous avons présenté les différents éléments constituant d'une construction métallique, les différents types d'assemblage existants afin d'assembler ces éléments entre eux et les diverses sollicitations auxquelles ils sont soumis.

Chapitre 2 : Généralités sur les approches probabilistes

2.1.Introduction

La mécanique probabiliste est un domaine de fiabilité qui permet de tenir compte des incertitudes concernant un système physique et d'étudier l'impact de ces incertitudes sur la réponse du modèle qui représente le système étudié. D'un point de vue scientifique, ce domaine est apparu dans les années 70 dans des études de génie civil bien que les premières contributions soient apparues au cours de la première partie du 20ème siècle [4], [7], [9]. La mécanique probabiliste correspond à un couplage entre d'une part, la modélisation d'un phénomène physique (ex. génie civil, génie mécanique, etc.) et d'autre part, les mathématiques appliquées (ex. statistiques, théorie des probabilités et simulation numérique).

2.2.La fiabilité

La fiabilité est l'étude des défaillances des systèmes, essentiellement des produits manufacturés (mécanique, électronique, génie civil...). La fiabilité d'une structure se caractérise par la performance de celle-ci à remplir une fonction définie sous des conditions données, pendant une durée fixée et en respectant le niveau de sécurité exigé.

La difficulté dans l'évaluation de la fiabilité provient de la nature incertaine des Phénomènes mis en jeu sur la structure considérée (variabilités des propriétés des matériaux, imprécisions géométriques, incertitude sur les chargements appliqués,..), qui vont avoir un impact significatif sur les performances du système [5].

2.3.Problématique

Traditionnellement, le dimensionnement des structures est fondé sur une démarche déterministe dans laquelle l'ensemble des paramètres précités prennent une valeur fixe. Précisément, les paramètres incertains sont décrits par une valeur caractéristique défavorable. Associée à des coefficients de sécurité, l'analyse conduit alors à une

réponse binaire ("sûreté" ou "défaillance") vis-à-vis d'un critère donné, qui traduit d'une certaine manière la confiance que l'on peut accorder à ce dimensionnement précis. L'approche déterministe utilise par conséquent une marge volontairement pessimiste conduisant le plus souvent à un surdimensionnement injustifié.

Dans la démarche fiabiliste en revanche, on construit une modélisation probabiliste dans laquelle les données incertaines sont représentées par des variables aléatoires. On peut ensuite évaluer la probabilité de défaillance de la structure ainsi que mesurer la sensibilité de cette probabilité par rapport à chacune des variables aléatoires introduites.

Deux applications sont envisageables :

- Soit on connaît les caractéristiques de la structure et on vérifie que sa fiabilité est satisfaisante ;
- Soit on optimise le dimensionnement de celle-ci de façon à respecter un niveau de fiabilité donné.

Par un traitement plus rationnel des incertitudes, l'approche fiabiliste permet donc une meilleure appréciation des marges de sécurité à l'aide d'indicateurs de confiance objectifs, et constitue en ce sens un outil adéquat pour l'aide à la décision en phases de conception et de maintenance.

L'analyse fiabiliste est basée sur les trois étapes suivantes :

- La sélection des variables aléatoires de base, qui vont intégrer les incertitudes mises en jeu à travers leur loi de distribution ;
- Le choix d'une fonction de performance définissant la défaillance du système ;
- Le calcul des indicateurs de fiabilité, qui vont fournir une évaluation quantitative et qualitative de la fiabilité de celui-ci.

2.4. Variables aléatoires de bases

L'enjeu à ce stade est de préciser les paramètres incertains pouvant jouer un rôle significatif sur la fiabilité de la structure, appelés variables aléatoires de base ou variables de conception, et de quantifier leur variabilité.

La sélection des variables aléatoires est une étape cruciale pour le modèle fiabiliste qui nécessite une connaissance fine du matériau étudié (origine, comportement mécanique) et de la structure considérée (fabrication, actions).

Ces incertitudes proviennent le plus souvent de variabilités liées au processus de fabrication, aux imperfections des conditions d'essais de caractérisation, à des facteurs incontrôlés tels que les fluctuations du chargement ou simplement de la difficulté d'accéder à certaines données ou informations.

Ainsi le choix des variables aléatoires est guidé par plusieurs critères :

- L'objectif de l'étude fiabiliste : par exemple, l'utilisation des propriétés mécaniques suffira à évaluer la probabilité de défaillance d'un matériau donné, en revanche, pour la conception d'un nouveau matériau, le recours à des données supplémentaire sera plus pertinent ;
- L'explication physique des aspects du comportement mécanique du matériau, notamment le mode de défaillance et les causes de sa mise en place suivant la sollicitation envisagée ;
- La disponibilité de résultats expérimentaux : les modèles probabilistes associés aux variables aléatoires doivent effectivement être physiquement justifiés pour aboutir à une représentation réaliste.

2.5.Lois de distributions

De nombreuses situations pratiques peuvent être modélisées à l'aide de variables aléatoires qui sont régies par des lois spécifiques. Il importe donc d'étudier ces modèles probabilistes qui pourront nous permettre par la suite d'analyser les fluctuations de certains phénomènes en évaluant, par exemple, les probabilités que tel événement ou tel résultat soit observé.

Il existe plusieurs lois de distribution décrivant les variables aléatoires dans la littérature. Les plus utilisées pour décrire les incertitudes en génie civil sont la loi normale, la loi log normale et la loi bêta, dont les caractéristiques sont données dans le tableau ci-dessous :

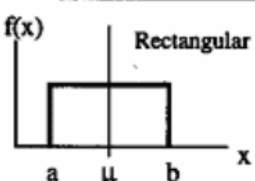
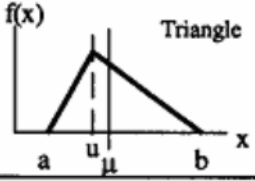
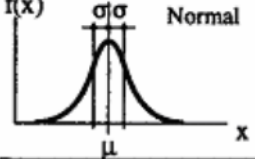
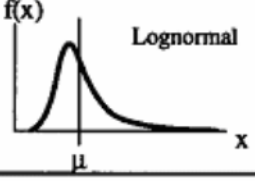
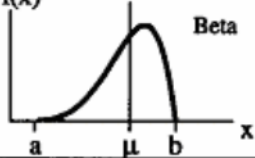
 <p>Rectangular</p>	$-\infty < a < b < +\infty$ $\mu = \frac{a+b}{2}$ $\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$	$a \leq x \leq b$ $f(x) = \frac{1}{b-a}$ $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$	
 <p>Triangle</p>	$-\infty < a < b < +\infty$ $\mu = \frac{1}{3}(a+b+u)$ $\sigma = \sqrt{\frac{1}{18}(a^2+b^2+u^2-ab-au-bu)}$	$a \leq x \leq u$ $f(x) = \frac{2}{b-a} \left(\frac{x-a}{u-a} \right)$ $F(x) = \frac{x^2-2ax+a^2}{(b-a)(u-a)}$	$u \leq x \leq b$ $f(x) = \frac{2}{b-a} \left(\frac{b-x}{b-u} \right)$ $F(x) = 1 - \frac{x^2-2bx+b^2}{(b-a)(b-u)}$
 <p>Normal</p>	$-\infty < \mu < +\infty$ $\sigma > 0$ μ σ	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$ $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dx$	
 <p>Lognormal</p>	λ, ζ $\mu = \exp\left(\lambda + \frac{\zeta^2}{2}\right)$ $\sigma = \mu \sqrt{\exp(\zeta^2) - 1}$	$f(x) = \frac{1}{\zeta x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right)$ $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\zeta x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right) dx$	
 <p>Beta</p>	$-\infty < a < b < +\infty$ $r, s \geq 1$ $\mu = a + (b-a) \cdot \frac{r}{r+s}$ $\sigma = \frac{b-a}{r+s} \cdot \sqrt{\frac{r \cdot s}{r+s+1}}$	$f(x) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r) \cdot \Gamma(s)} \cdot \frac{(x-a)^{r-1} (b-x)^{s-1}}{(b-a)^{r+s-1}}$ $F(x) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r) \cdot \Gamma(s)} \cdot \int_a^x \frac{(u-a)^{r-1} (b-u)^{s-1}}{(b-a)^{r+s-1}} du$	

Tableau 2.1: Principales lois de distribution.

2.6. Fonction de performance

Il s'agit là de construire un scénario de défaillance de la structure, autrement dit, préciser l'état limite au-delà du quel cette structure n'est plus considérée comme fiable.

Ces états limites correspondent principalement à des exigences en termes de tenue mécanique (la défaillance est associée à la rupture du matériau ou la ruine de la structure) ou d'aptitude au service (la défaillance est associée à des déformations ou un endommagement excessif) [9].

Un critère de défaillance est défini à l'aide d'une fonction d'état limite, notée G , et qui dépend des variables aléatoires du modèle. Par convention, on définit le domaine de sûreté D_s et le domaine de défaillance D_f comme suit :

Dans le cas des études fiabilistes, on introduit généralement plus d'un paramètre aléatoire. L'ensemble des k variables X_i du problème constitue dans ce cas un vecteur

$$\{X\} = \{X_i\}_{i=1..k} \text{ de } \mathbb{R}^k \quad \mathbf{R}_k\{X\} = \{X_i\}_{i=1..k} \text{ de } \mathbb{R}^k$$

$$D_s = \{\{X\} \in \mathbb{R}^k, G(\{X\}) > 0\}$$

$$D_f = \{\{X\} \in \mathbb{R}^k, G(\{X\}) \leq 0\}$$

Où

\mathbb{R}^k : Ensemble des K variable ;

La frontière $\{\{X\} \in \mathbb{R}^k, G(\{X\}) = 0\}$ est la surface d'état limite. La figure 2.1 illustre cette définition sur le cas de deux variables aléatoires de base.

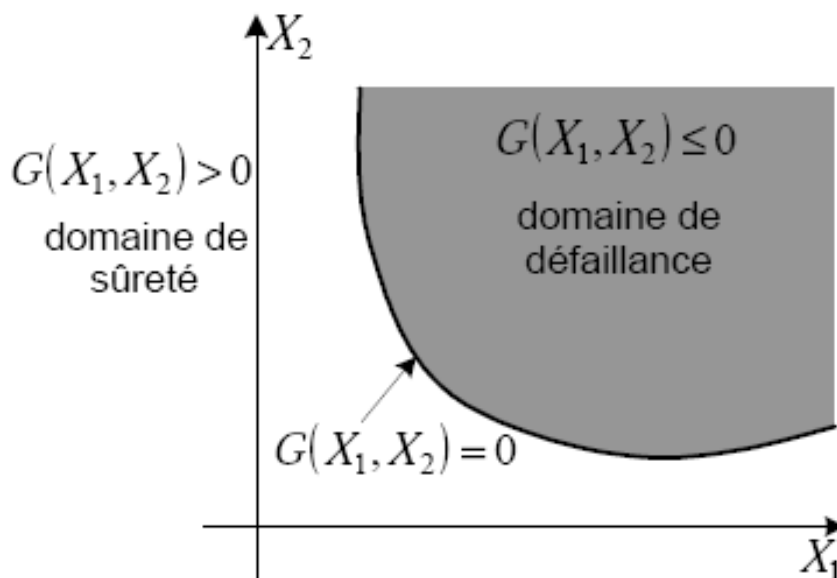


Figure 2.1 : Domaines de sûreté et de défaillance dans le cas de deux variables aléatoires $\{X\} = \{X_1, X_2\}$.

Les points importants concernant le critère de défaillance sont les suivants :

- Le choix de la fonction de performance se doit d'être dicté par la cause physique de la défaillance de façon à en obtenir une représentation réaliste ;
- Si la forme du critère est généralement du type :

$$\mathbf{G} = \mathbf{R} - \mathbf{S}$$

Avec R une caractéristique de résistance et S une donnée relative à la sollicitation appliquée.

La fonction G n'est pas forcément une fonction explicite des variables de base, elle peut dépendre en effet de la réponse de la structure (par exemple contraintes ou déformations) et son évaluation nécessite alors un calcul mécanique préalable (le plus souvent par éléments finis) faisant intervenir une loi de comportement (couplage mécano-fiabiliste).

Une valeur donc positive de G signifie que les réalisations des variables aléatoires conduisent à une situation de sécurité et une valeur négative signifie qu'elles conduisent à une situation de défaillance. La courbe représentant $G = 0$ est appelée courbe d'état limite.

- $G(R, S) < 0$: domaine de défaillance ;
- $G(R, S) = 0$: état limite ;
- $G(R, S) > 0$: domaine de sécurité.

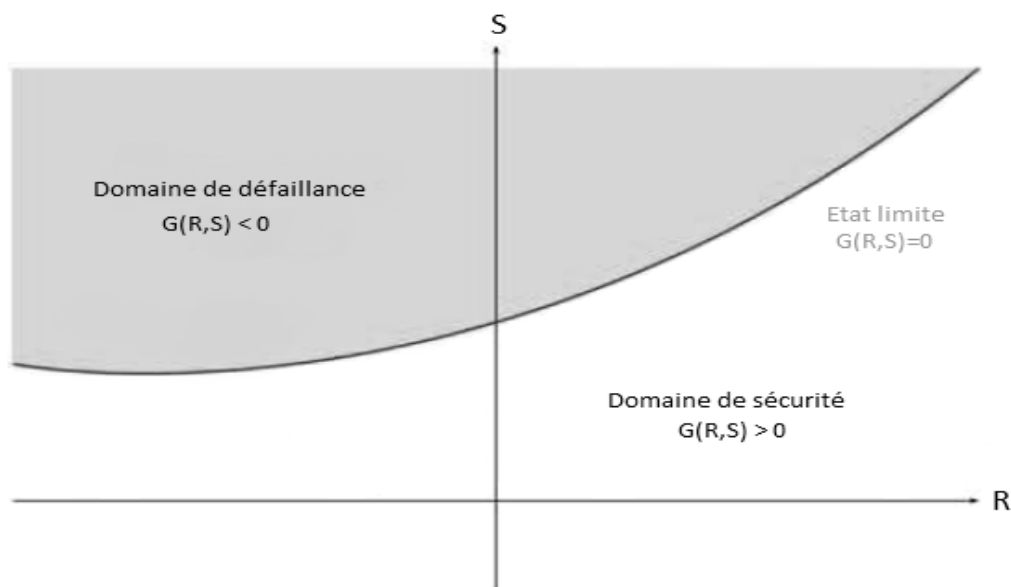


Figure 2.2: Domaine de défaillance, état limite et domaine de sécurité.

2.7. Indicateurs de fiabilité

La fiabilité R (en anglais, Reliability) d'une structure est conventionnellement définie de la façon suivante :

$$R = 1 - P_f$$

Où P_f probabilité de défaillance (Probability of failure) correspond à la probabilité que l'événement $G(\{X\}) \leq 0$ se présente:

$$P_f = P(G(\{X\}) \leq 0)$$

Cet indicateur de confiance constitue le résultat essentiel d'un calcul fiabiliste. Si l'on introduit la densité de probabilité conjointe $f\{X\}$ des variables aléatoires $\{X\}$ du modèle, la probabilité de défaillance s'écrit alors comme suit :

$$P_f = \int_{D_f} f\{X\}(\{x\}) \prod_{i=1}^k dx_i$$

Il est très rare que cette intégrale puisse être étudiée analytiquement voire numériquement. Dans la pratique, on ne dispose pas généralement de la densité de probabilité conjointe du vecteur, on doit se contenter le plus souvent des lois marginales relatives à chaque variable X_i et à certaines informations sur leur corrélation. De plus, le domaine d'intégration peut être défini de façon implicite et complexe selon le modèle mécanique retenu.

Diverses méthodes de résolution ont ainsi été développées pour pallier ces difficultés [8]. Classiquement, on distingue deux grandes familles : les méthodes basées sur des simulations et les méthodes recourant à une approximation.

2.8.Principales approches probabilistes

Il existe plusieurs méthodes afin d'évaluer la probabilité de défaillance d'un événement quelconque, et parmi ces méthodes nous avons choisi d'en présenter deux grandes familles d'études qui nous paraissent les plus répandues dans le calcul de la fiabilité [2]:

2.8.1. Monte Carlo : méthode a base de simulation

Le terme méthode de Monte-Carlo, désigne une famille de méthodes algorithmiques visant à calculer une valeur numérique approchée en utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes. Le nom de cette méthode

fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo qui est un quartier de Monaco. Il abrite le célèbre casino de Monte-Carlo.

Il s'agit de la technique la plus ancienne et la plus intuitive d'évaluation de la probabilité de défaillance. Basée sur l'application de la loi des grands nombres, elle consiste à déterminer un estimateur de P_f par succession de tirages aléatoires indépendants.

On réalise ainsi un nombre N_t important de tirages des variables aléatoires en accord avec leur loi de distribution conjointe (si elle existe) ou en accord avec la loi marginale de chaque variable et avec leurs éventuelles corrélations. Pour chaque tirage, la fonction de performance est calculée et l'on dénombre les tirages $N_{t,f}$ conduisant à la réalisation $G(\{X\}) \leq 0$ (figure 3.3). On en déduit alors la probabilité de défaillance par un traitement statistique direct :

$$P_f = \frac{N_{t,f}}{N_t}$$

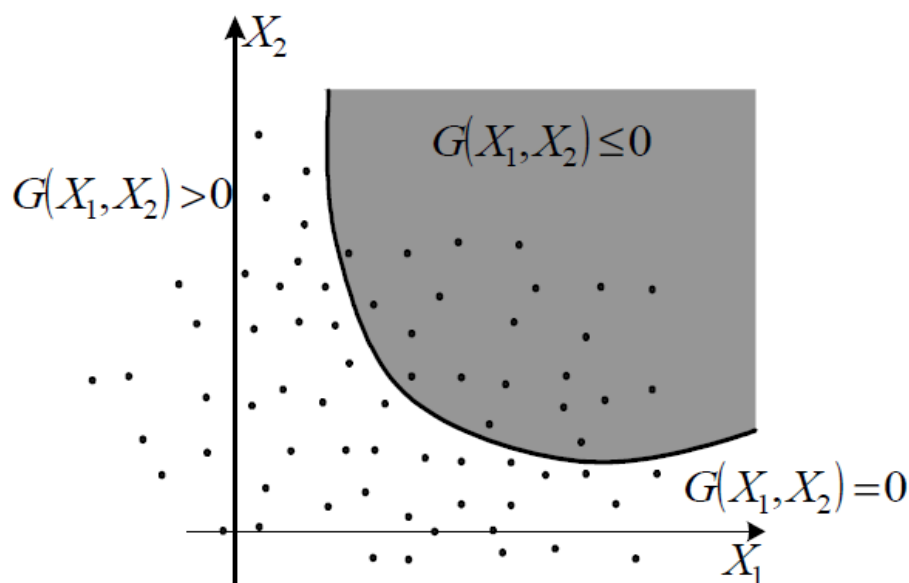


Figure 2.3: Méthode de Monte Carlo: tirages aléatoires et évaluations de la fonction de performance G dans le cas de deux variables aléatoires $\{X\} = \{X_1, X_2\}$.

Cette méthode présente avant tout l'avantage d'une simplicité de mise en œuvre et d'une absence d'exigences mathématiques spécifiques pour la fonction G . En revanche, une attention particulière doit être portée à la convergence des résultats obtenus, i.e. à la stabilité de la valeur de P_f quel que soit N_t . Pour des valeurs de P_f de

l'ordre de 10^{-k} avec $k \geq 5$, il est ainsi nécessaire de réaliser un minimum de $N_{t,\min} = 10^{k+2}$ simulations pour assurer cette condition. Il faut veiller également à l'indépendance de la probabilité de défaillance vis-à-vis de la génération d'échantillonnage en effectuant pour cela des mesures de Pf pour des tirages de taille N_t croissante jusqu'à $N_{t,\min}$. Outre la difficulté de satisfaire à ces deux exigences dans le cas de faibles probabilités de défaillance, le temps de calcul induit dans cette méthode peut s'avérer conséquent et parfois difficilement conciliable avec une analyse par éléments finis.

2.8.2. Méthodes d'approximation FORM/SORM

En fiabilité des structures, les méthodes FORM (First Order Reliability Method) et SORM (Second Order Reliability Method) sont des méthodes d'approximation permettant de déterminer un point particulier appelé point de conception de la structure, et donc d'estimer la probabilité de défaillance. Ces méthodes sont donc intrinsèquement liées à ce fameux point de conception, plus précisément à la distance qui sépare ce point à la surface de défaillance dans l'espace d'origine. Cette distance est appelée en fiabilité : Indice de fiabilité β ou de sécurité.

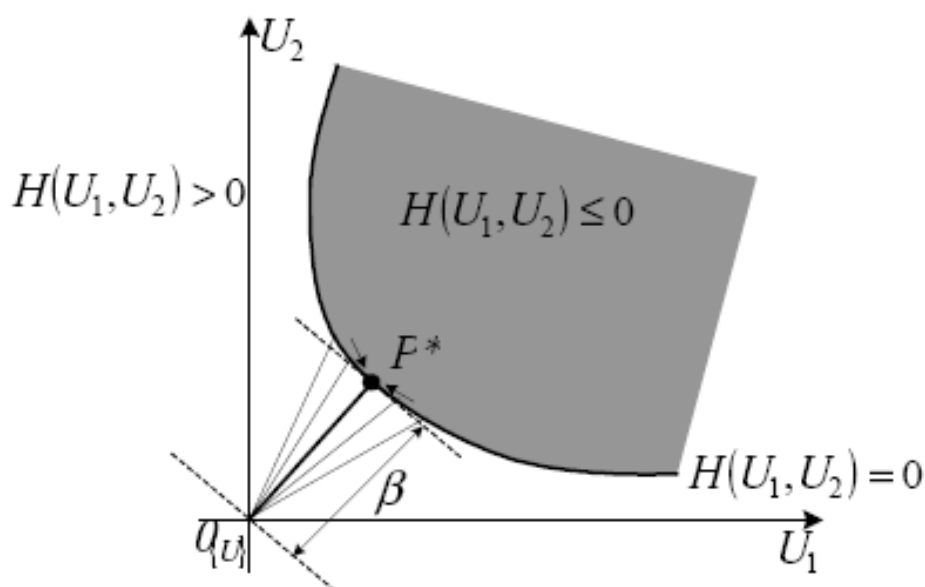


Figure 2.4: Recherche de l'indice de fiabilité β et du point de conception P^* dans l'espace standard pour deux variables aléatoires $\{U\} = \{U_1, U_2\}$.

Plusieurs définitions sont possibles pour β mais celle préconisée par Hasofer et Lind, est aujourd'hui la plus largement employée compte tenu de son invariance vis-à-vis de la représentation de la fonction de performance.

β	P_f
0	0.5
1	0.16
2	2.28×10^{-2}
3	1.35×10^{-3}
4	3.17×10^{-5}
5	2.87×10^{-7}
6	9.87×10^{-10}

Tableau2.2: Correspondance entre l'indice de fiabilité β et la probabilité de défaillance

2.9. Conclusion

Le principe des approches probabilistes appliquées à l'analyse des structures présenté dans ce chapitre est important puisqu'il servira de base lors de l'analyse fiabiliste de notre structure.

Chapitre 3 : Analyse déterministe d'une structure métallique

3.1.Introduction

Dans ce chapitre nous ferons une analyse déterministe de notre structure qui consiste en un dimensionnement des éléments en se référant aux lois de l'Eurocode 3, par la suite on doit vérifier la résistance et la stabilité de ces derniers.

3.2.Pré-dimensionnement

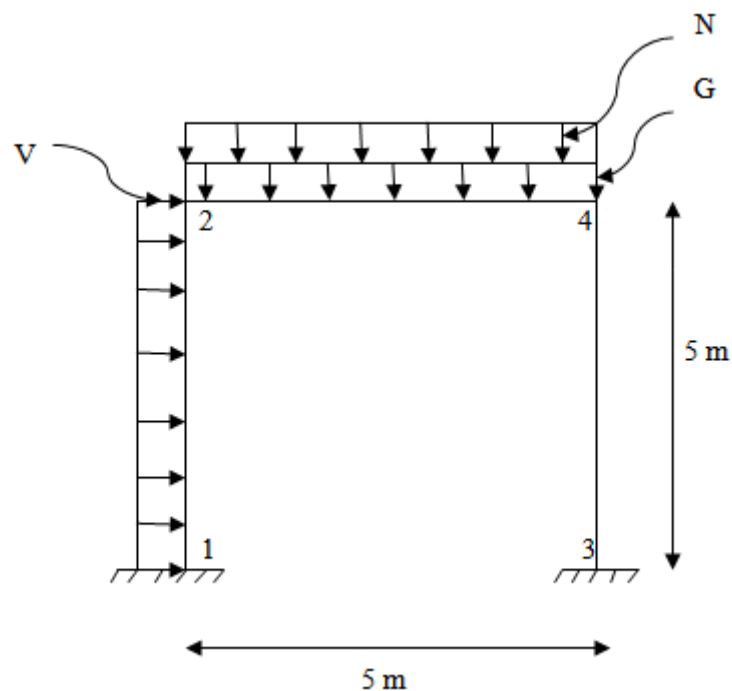


Figure 3.1 : Représentation du portique sous les différents chargements.

3.2.1. Chargement

$G = 2.5 \text{ kN/ml}$, $N = 3 \text{ kN/ml}$, $V = 3.5 \text{ kN/ml}$.

3.2.2. Combinaison de charge

$W_1 = 1.5 \times V = 1.5 \times 3.5 = 5.25 \text{ kN/ml}$.

$W_2 = 1.35 \times G + 1.5 \times N = 1.35 \times 2.5 + 1.5 \times 3 = 7.875 \text{ kN/ml}$.

3.2.3. Barre 1-2 (Poteau)

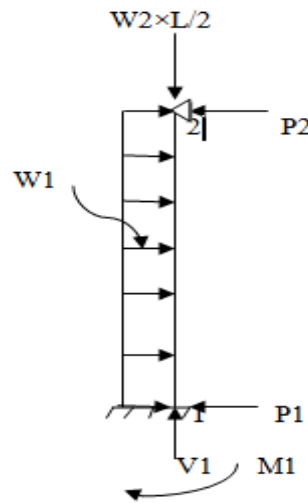


Figure 3.2: Représentation de l'élément (1-2) sous la combinaison W_1 .

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_1 - \frac{W_2 \times L}{2} = 0 \quad \Rightarrow V_1 = \frac{W_2 \times L}{2} = -\frac{7.875 \times 5}{2} = 19.69 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P_1 + P_2 - (W_1 \times L) = 0 \quad \Rightarrow P_1 + P_2 = W_1 \times L = 5.25 \times 5 = 26.25 \text{ kN}$$

$$\Sigma M/2 = 0 \quad \Rightarrow M_1 + P_1 \times L - \frac{W_1 \times L^2}{2} = 0 \dots (*)$$

Pour déterminer P_1 , P_2 et M_1 on doit utiliser la méthode des trois moments car en a que deux équations.

On remplace l'encastrement au nœud 1 par une travée fictive de longueur $L_0 = 0$.

$$\text{On a : } M'_{i-1} \times L_i + 2M'_i \times (L_i + L_{i+1}) + M'_{i+1} \times L_{i+1} = - \left(\frac{q_i \times L_i^3}{4} + \frac{q_{i+1} \times L_i^3 + 1}{4} \right)$$

$$\text{Pour } i=0 : 0 + 10M'_0 + 0 = - \frac{q_1 \times L_1^3}{4} = - \frac{5.25 \times 5^3}{4} = -164.063$$

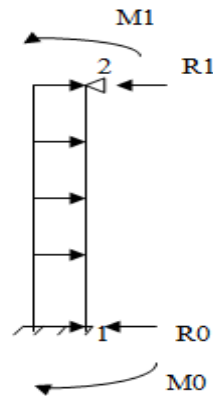
$$\text{Pour } i=1 : 5M'_0 + 10M'_1 + 0 = - \frac{q_1 \times L_1^3}{4} = - \frac{5.25 \times 5^3}{4} = -164.063$$

On a deux équations :

$$10M'_0 = -164.063 \quad \text{et} \quad 5M'_0 + 10M'_1 = -164.063$$

Après résolution :

$$M'_0 = -16.4063 \quad \text{et} \quad M'_1 = -8.2031$$



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_0 + R_1 - q \times x = 0 \Rightarrow R_0 + R_1 = q \times x = 5.25 \times 5 = 26.25 \text{ kN}$$

$$\Sigma M/1 = 0 \Rightarrow 5R_0 + M'_0 - M'_1 - \frac{q \times L^2}{2}$$

$$R_0 = 14.766 \text{ kN} \quad \text{et} \quad R_1 = 26.25 - 14.766 = 11.484 \text{ kN}$$

D'où:

$$P_1 = R_0 = 14.766 \text{ kN}, P_2 = R_1 = 11.484 \text{ kN};$$

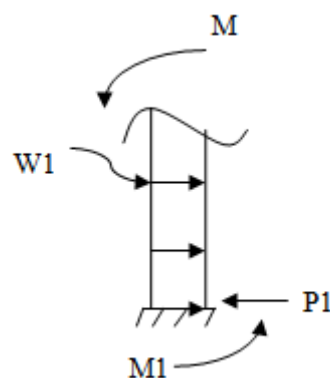
On remplace avec P_1 et P_2 dans l'équation (*), on aura :

$$M_1 = -P_1 \times L + \frac{W_1 \times L^2}{2} = -14.766 \times 5 + \frac{5.25 \times 5^2}{2} = -8.205 \text{ kN.m}$$

$$M_1 = -8.205 \text{ kN.m}$$

3.2.3.1. Détermination des efforts internes

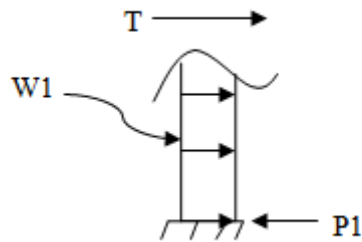
- **Moment fléchissant**



$$M = -M_1 + P_1 \times X - \frac{W_1 \times X^2}{2} = -8.205 + 14.766 \times X - \frac{5.25 \times X^2}{2}$$

$$X = 0 \text{ m} \Rightarrow M = -8.205 \text{ kN.m} \quad \text{et} \quad X = 5 \text{ m} \Rightarrow M = 0 \text{ kN.m}$$

- **Effort tranchant**



$$T = P_1 - W_1 \times X = 14.766 - 5.25 \times X$$

$$X = 0 \text{ m} \Rightarrow T = 14.766 \text{ kN} \quad \text{et} \quad X = 5 \text{ m} \Rightarrow T = -11.484 \text{ kN}$$

- **Détermination du moment max**

$$T = P_1 - W_1 \times X = 0 \quad \Rightarrow X = \frac{P_1}{W_1} = \frac{14.766}{5.25} = 2.813 \text{ m}$$

Le moment max est a $X = 2.813 \text{ m}$

$$M_{\max} = M(X=2.813\text{m}) = -8.205 + 14.766 \times 2.813 - \frac{5.25 \times 2.813^2}{2} = 12.56 \text{ kN.m}$$

- **Effort normal**

$$N = V_1 = 19.69 \text{ kN}$$

Pour le pré-dimensionnement en prend une section de classe 1 en acier S235

La barre 1-2 est soumise aux sollicitations suivantes :

$$M_{ed} = 12.56 \text{ kN.m}, V_{ed} = 14.766 \text{ kN}, N_{ed} = 19.69 \text{ kN}$$

3.2.3.2. Critère de résistance

$$M_{pl,Rd} \geq M_{ed} \quad \text{avec: } M_{pl,Rd} = W_{pl} \times \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \geq M_{ed}$$

$$W_{pl} \geq \frac{M_{ed} \times f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{12.56 \times 10^6 \times 1.1}{235} = 58.79 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Pour un IPE120 on a:

$$W_{pl} = 60.7 \times 10^3 \text{ mm}^3 > 58.79 \times 10^3 \text{ mm}^3 \quad (\text{vérifiée})$$

3.2.3.3. Vérification de la résistance en section

- **Interaction entre l'effort tranchant V et le moment fléchissant M**

$$V_{pl,Rd} = \frac{A_{vz} \times f_y}{\sqrt{3} \times \gamma_{M0}} = \frac{6.31 \times 10^2 \times 235}{\sqrt{3} \times 1.1} \times 10^{-3} = 77.83 \text{ kN}$$

$$0.5V_{pl,Rd} = 0.5 \times 77.83 = 38.9 \text{ kN} > V_{ed} = 14.766 \text{ kN}$$

Il n'y a pas d'interaction entre V et M

$$V_{pl,Rd} = 77.83 \text{ kN} > V_{ed} = 14.766 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée})$$

- **Interaction entre l'effort normal N et le moment fléchissant M**

$$N_{pl,Rd} = A \times \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = (13.2 \times 10^2 \times \frac{235}{1.1}) \times 10^{-3} = 282 \text{ kN}$$

$$\frac{N_{ed}}{N_{pl,Rd}} = \frac{13.125}{282} = 0.05 < 0.25 \quad (\text{vérifiée})$$

$$0.5 \times \frac{h_w \times t_w \times f_y}{\gamma_{M0}} = (0.5 \times \frac{93.4 \times 4.4 \times 235}{1.1}) \times 10^{-3}$$

$$= 43.9 \text{ kN} > N_{ed} = 19.69 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée})$$

Il n'y a pas d'interaction entre N et M, donc on doit vérifier :

$$M_{ed} \leq M_{pl,Rd}$$

$$M_{pl,Rd} = W_{pl} \times \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = (60.7 \times 10^3 \times \frac{235}{1.1}) \times 10^{-6} = 12.97 \text{ kN.m} > M_{ed} = 12.56 \text{ kN.m}$$

⇒ La section est vérifiée.

3.2.3.4. Vérification de l'élément

- **Flexion composée avec risque de flambement**

$$\text{On doit vérifier : } \frac{N_{ed}}{\chi_{\min} \times N_{pl,Rd}} + \frac{K_y \times M_{y,ed}}{M_{pl,Rd}} \leq 1$$

- **Longueur de flambement**

$$L_y = L_z = 0.7 \times L = 0.7 \times 5 = 3.5 \text{ m}$$

- **Calcul de l'élancement**

$$\lambda_y = \frac{L_y}{i_y} = \frac{3500}{49} = 71.43 \quad \text{et} \quad \lambda_z = \frac{L_z}{i_z} = \frac{3500}{14.5} = 241.38$$

- **Calcul de l'élancement réduit**

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}} = \sqrt{\frac{235}{235}} = 1, \quad \lambda_1 = 93.9 \times \varepsilon = 93.9 \times 1 = 93.9$$

$$\bar{\lambda}_y = \frac{\lambda_y}{\lambda_1} = \frac{71.43}{93.9} = 0.76 \quad \text{et} \quad \bar{\lambda}_z = \frac{\lambda_z}{\lambda_1} = \frac{241.38}{93.9} = 2.57$$

$$\phi_y = 0.5 \times (1 + \alpha \times (\bar{\lambda}_y - 0.2) + \bar{\lambda}_y^2) \quad \text{avec : } \alpha : \text{facteur d'imperfection}$$

- **Choix de la courbe de flambement**

Le tableau 5.5.3 de l'Eurocode 3, partie 1-1 nous donne le choix de la courbe de flambement en fonction du type de la section.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{h}{b} = \frac{120}{64} = 1.875 > 1.2 \\ t_f = 6.3 \text{ mm} < 40 \text{ mm} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{suivant y-y : courbe a} \\ \text{suivant z-z : courbe b} \end{array}$$

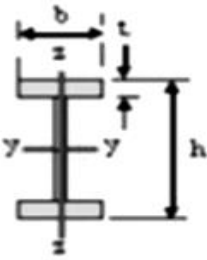

Type de Section	limites	Axe de flambement	Courbe de flambement
Section en I laminées 	$h/b > 1.2$ $t_f \leq 40mm$	$y - y$ $z - z$	a b
	$40mm < t_f \leq 100mm$	$y - y$ $z - z$	b c
	$h/b \leq 1.2$ $t_f \leq 100mm$ $t_f > 100mm$	$y - y$ $z - z$ $y - y$ $z - z$	b c d d
Sections en U, L, T et sections pleines 		Quel qu'il soit	c

Tableau3.1 : Choix de la courbe de flambement [3].

Le tableau 5.5.1 de l'Eurocode 3, partie 1-1 nous donne les valeurs du facteur d'imperfection α en fonction de la courbe de flambement.

Courbe de flambement	a	b	c	D
Facteur D'imperfection α	0.21	0.34	0.49	0.76

Tableau 2.2: Facteur d'imperfection α [3].

Suivant y-y : $\alpha = 0.21$ et suivant z-z : $\alpha = 0.34$

$$\phi_y = 0.5 \times (1 + 0.21 \times (0.76 - 0.2)) + 0.76^2 = 0.848$$

$$\phi_z = 0.5 \times (1 + \alpha \times (\bar{\lambda}_z - 0.2) + \bar{\lambda}_z^2) = 0.5 \times (1 + 0.34 \times (2.57 - 0.2) + 2.57^2) = 4.205$$

$$\chi_y = \frac{1}{\phi_y + \sqrt{\phi_y^2 - \bar{\lambda}_y^2}} = \frac{1}{0.848 + \sqrt{0.848^2 - 0.76^2}} = 0.817$$

$$\chi_z = \frac{1}{\Phi_z + \sqrt{\Phi_z^2 - \lambda_z^2}} = \frac{1}{4.205 + \sqrt{4.205^2 - 2.57^2}} = 0.133$$

$$\chi_{\min} = \min(\chi_y, \chi_z) = 0.133$$

• Calcul de K_y

$$K_y = 1 - \frac{\mu_y \times N_{ed}}{\chi_y \times A \times f_y} \leq 1.5$$

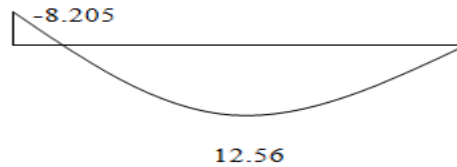
$$\mu_y = \bar{\lambda}_y \times (2\beta_{M,y} - 4) + \left(\frac{W_{pl,y} - W_{el,y}}{W_{el,y}} \right) \leq 0.9$$

$\beta_{M,y}$: Facteur de moment uniforme, il est déterminé a partir du tableau 5.5.3 de l'Eurocode 3, partie 1-1 en fonction du diagramme des moments.

Diagramme de moment	Facteur de moment uniformément équivalent β_M
<p>Moments d'extrémités</p> <p>$-1 \leq \psi \leq 1$</p>	$\beta_{M,\psi} = 1.8 - 0.7\psi$
<p>Moments dus à des charges transversales</p>	$\beta_{M,Q} = 1.3$ $\beta_{M,Q} = 1.4$
<p>Moments dus à des charges transversales plus des moments d'extrémités</p>	$\beta_M = \beta_{M,\psi} + \frac{M_Q}{\Delta M} (\beta_{M,Q} - \beta_{M,\psi})$ <p>$M_Q = \max M$ dû aux charges transversales seulement</p> $\Delta M = \begin{cases} \max M & \text{pour diagramme de moment sans changement de signe} \\ \max M + \min M & \text{pour diagramme de moment avec changement de signe} \end{cases}$

Tableau 3.2 : Facteur de moment uniformément équivalent β_M [3].

- **Diagramme des moments**



$$\beta_{M,y} = \beta_{M,\psi} + \frac{M_Q}{\Delta M} \times (\beta_{M,Q} - \beta_{M,\psi}) \quad \text{avec : } \beta_{M,\psi} = 1.8 - 0.7 \times \psi \quad \text{et : } \psi = 0$$

$$\beta_{M,\psi} = 1.8$$

$$M_Q = |\max M| = 12.56 \text{ kN.m}$$

$$\Delta M = |\max M| + |\min M| = 8.205 + 12.56 = 20.765 \text{ kN.m}$$

$$\beta_{M,Q} = 1.3 \quad \Rightarrow \quad \beta_{M,y} = 1.8 + \frac{12.56}{20.765} \times (1.3 - 1.8) = 1.498$$

$$\mu_y = 0.76 \times (2 \times 1.498 - 4) + \left(\frac{(60.7 - 53) \times 10^3}{53 \times 10^3} \right) = -0.618 < 0.9$$

$$K_y = 1 - \frac{-0.618 \times 19.69 \times 10^3}{0.817 \times 1320 \times 235} = 1.048$$

$$\frac{19.69 \times 10^3}{0.133 \times 282 \times 10^3} + \frac{1.048 \times 12.56 \times 10^6}{12.56 \times 10^6} = 1.54 > 1 \quad (\text{non vérifiée})$$

On doit augmenter la section

Soit un IPE160 en acier S235, section de classe 1 en compression.

- **Calcul de l'élancement**

$$\lambda_y = \frac{L_y}{i_y} = \frac{3500}{65.8} = 53.19 \quad \text{et} \quad \lambda_z = \frac{L_z}{i_z} = \frac{3500}{18.4} = 190.22$$

- **Calcul de l'élancement réduit**

$$\bar{\lambda}_y = \frac{\lambda_y}{\lambda_1} = \frac{53.19}{93.9} = 0.566 \quad \text{et} \quad \bar{\lambda}_z = \frac{\lambda_z}{\lambda_1} = \frac{190.22}{93.9} = 2.026$$

- **Choix de la courbe de flambement**

$$\left. \begin{array}{l} \frac{h}{b} = \frac{160}{82} = 1.95 > 1.2 \\ t_f = 7.4 \text{ mm} < 40 \text{ mm} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{suitant y-y : courbe a} \\ \text{suitant z-z : courbe b} \end{array}$$

Suivant y-y : $\alpha = 0.21$ et suivant z-z : $\alpha = 0.34$

$$\Phi_y = 0.5 \times (1 + 0.21 \times (0.566 - 0.2) + 0.566^2) = 0.699$$

$$\Phi_z = 0.5 \times (1 + 0.34 \times (2.026 - 0.2) + 2.026^2) = 2.863$$

$$\chi_y = \frac{1}{\Phi_y + \sqrt{\Phi_y^2 - \lambda_y^2}} = \frac{1}{0.699 + \sqrt{0.699^2 - 0.566^2}} = 0.902$$

$$\chi_z = \frac{1}{\Phi_z + \sqrt{\Phi_z^2 - \lambda_z^2}} = \frac{1}{2.863 + \sqrt{2.863^2 - 2.026^2}} = 0.205$$

$$\chi_{\min} = \min(\chi_y, \chi_z) = 0.205$$

• Calcul de K_y

$$\mu_y = 0.566 \times (2 \times 1.498 - 4) + \left(\frac{(124 - 109) \times 10^3}{109 \times 10^3} \right) = -0.431 < 0.9$$

$$K_y = 1 - \frac{-0.431 \times 19.69 \times 10^3}{0.902 \times 20.1 \times 10^2 \times 235} = 1.02 < 1.5$$

$$\frac{19.69 \times 10^3}{0.205 \times 429.4 \times 10^3} + \frac{1.02 \times 12.56 \times 10^6}{26.49 \times 10^6} = 0.707 < 1 \quad (\text{vérifiée})$$

3.2.4. Barre 2-4 (Poutre)

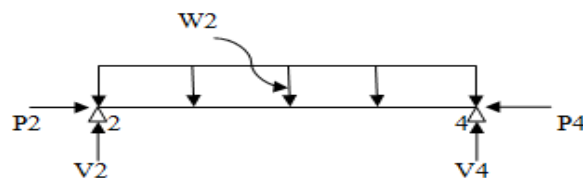


Figure 3.3 : Représentation de l'élément (2-4) sous la combinaison W2.

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 + V_4 - W_2 \times L = 0$$

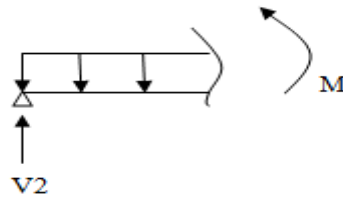
$$V_2 + V_4 = W_2 \times L = 7.875 \times 5 = 39.375 \text{ kN}, \quad P_2 = P_4 = \frac{W_1 \times L}{2} = \frac{5.25 \times 5}{2} = 13.125 \text{ kN}$$

$$\Sigma M/4 = 0 \Rightarrow V_2 \times L - \frac{W_2 \times L^2}{2}$$

$$V_2 = \frac{W_2 \times L}{2} = \frac{7.875 \times 5}{2} = 19.69 \text{ kN} \quad \text{et} \quad V_4 = 39.375 - 19.69 = 19.69 \text{ kN}.$$

3.2.4.1. Détermination des efforts internes

- **Moment fléchissant**

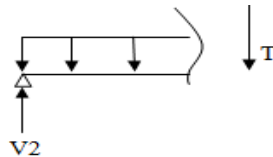


$$M = V_2 \times X - \frac{W_2 \times X^2}{2}$$

$$X = 0\text{m} \Rightarrow M = 0 \quad \text{et} \quad X = 5\text{m} \Rightarrow M = 0$$

$$M_{\max} = M(X/2) = 24.61 \text{ kN.m}$$

- **Effort tranchant**



$$T = V_2 - W_2 \times X$$

$$X = 0\text{m} \Rightarrow T = 19.69 \text{ kN} \quad \text{et} \quad X = 5\text{m} \Rightarrow T = -19.69 \text{ kN}$$

- **Effort normal**

$$N = P_2 = P_4 = T(1-2) = 11.84 \text{ kN}$$

T(1-2) : effort tranchant dans la barre 1-2

Pour les vérifications on considère le même profilé (IPE160) pris auparavant.

La barre 2-4 est soumise aux sollicitations suivantes :

$$M_{ed} = 24.61 \text{ kN.m}, V_{ed} = 19.69 \text{ kN}, N_{ed} = 11.84 \text{ kN}$$

La barre 2-4 est soumise à la flexion composée.

3.2.4.2. Vérification de la résistance en section

- **Interaction entre l'effort tranchant V et le moment fléchissant M**

$$V_{pl,Rd} = \frac{A_{vz} \times f_y}{\sqrt{3} \times \gamma_{M0}} = \frac{9.66 \times 10^2 \times 235}{\sqrt{3} \times 1.1} \times 10^{-3} = 119.15 \text{ kN}$$

$$0.5V_{pl,Rd} = 0.5 \times 119.15 = 59.58 \text{ kN} > V_{ed} = 19.69 \text{ kN}$$

Il n'y a pas d'interaction entre V et M

$$V_{pl,Rd} = 119.15 \text{ kN} > V_{ed} = 19.69 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée})$$

- **Interaction entre l'effort normal N et le moment fléchissant M**

$$N_{pl,Rd} = A \times \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = (20.1 \times 10^2 \times \frac{235}{1.1}) \times 10^{-3} = 429.4 \text{ kN}$$

$$\frac{N_{ed}}{N_{pl,Rd}} = \frac{11.84}{429.4} = 0.028 < 0.25 \quad (\text{vérifiée})$$

$$0.5 \times \frac{h_w \times t_w \times f_y}{\gamma_{M0}} = (0.5 \times \frac{127.2 \times 5 \times 235}{1.1}) \times 10^{-3}$$

$$= 67.94 \text{ kN} > N_{ed} = 11.84 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée})$$

Il n'y a pas d'interaction entre N et M, donc on doit vérifier :

$$M_{ed} \leq M_{pl,Rd}$$

$$M_{pl,Rd} = W_{pl} \times \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = (124 \times 10^3 \times \frac{235}{1.1}) \times 10^{-6} = 26.49 \text{ kN.m} > M_{ed} = 24.61 \text{ kN.m}$$

⇒ La section est vérifiée.

3.2.4.3. Vérification de la résistance de l'élément

- **Flexion composée avec risque de flambement**
- **Longueur de flambement**

$$L_y = L_z = L = 5 \text{ m}$$

- **Calcul de l'élanement**

$$\lambda_y = \frac{L_y}{i_y} = \frac{5000}{65.8} = 75.99 \quad \text{et} \quad \lambda_z = \frac{L_z}{i_z} = \frac{5000}{18.4} = 271.74$$

- **Calcul de l'élanement réduit**

$$\bar{\lambda}_y = \frac{\lambda_y}{\lambda_1} = \frac{75.99}{93.9} = 0.809 \quad \text{et} \quad \bar{\lambda}_z = \frac{\lambda_z}{\lambda_1} = \frac{271.74}{93.9} = 2.894$$

- **Choix de la courbe de flambement**

$$\left. \begin{array}{l} \frac{h}{b} = \frac{160}{82} = 1.95 > 1.2 \\ t_f = 7.4 \text{ mm} < 40 \text{ mm} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{suivant y-y : courbe a} \\ \text{suivant z-z : courbe b} \end{array}$$

$$\text{Suivant y-y : } \alpha = 0.21 \quad \text{et} \quad \text{suivant z-z : } \alpha = 0.34$$

$$\phi_y = 0.5 \times (1 + 0.21 \times (0.809 - 0.2) + 0.809^2) = 0.891$$

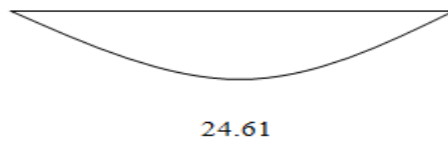
$$\phi_z = 0.5 \times (1 + 0.34 \times (2.894 - 0.2) + 2.894^2) = 5.146$$

$$\chi_y = \frac{1}{\Phi_y + \sqrt{\Phi_y^2 - \bar{\lambda}_y^2}} = \frac{1}{0.891 + \sqrt{0.891^2 - 0.809^2}} = 0.791$$

$$\chi_z = \frac{1}{\Phi_z + \sqrt{\Phi_z^2 - \bar{\lambda}_z^2}} = \frac{1}{5.146 + \sqrt{5.146^2 - 2.894^2}} = 0.106$$

$$\chi_{\min} = \min(\chi_y, \chi_z) = 0.106$$

- Calcul de K_y
- Diagramme des moments



$$\beta_{M,y} = 1.3$$

$$\mu_y = 0.809 \times (2 \times 1.3 - 4) + \left(\frac{(124 - 109) \times 10^3}{109 \times 10^3} \right) = -0.995 < 0.9$$

$$K_y = 1 - \frac{-0.995 \times 11.84 \times 10^3}{0.902 \times 20.1 \times 10^2 \times 235} = 1.028 < 1.5$$

$$\frac{11.84 \times 10^3}{0.106 \times 429.4 \times 10^3} + \frac{1.028 \times 24.61 \times 10^6}{26.49 \times 10^6} = 1.22 > 1 \quad (\text{non vérifiée})$$

On doit augmenter la section.

Soit un IPE180 en acier S235, section de classe 1 en compression.

- Calcul de l'élancement

$$\lambda_y = \frac{L_y}{i_y} = \frac{5000}{74.2} = 67.39 \quad \text{et} \quad \lambda_z = \frac{L_z}{i_z} = \frac{5000}{20.5} = 243.9$$

- Calcul de l'élancement réduit

$$\bar{\lambda}_y = \frac{\lambda_y}{\lambda_1} = \frac{67.39}{93.9} = 0.718 \quad \text{et} \quad \bar{\lambda}_z = \frac{\lambda_z}{\lambda_1} = \frac{243.9}{93.9} = 2.597$$

$$\Phi_y = 0.5 \times (1 + \alpha \times (\bar{\lambda}_y - 0.2) + \bar{\lambda}_y^2)$$

- Choix de la courbe de flambement

$$\left. \begin{array}{l} \frac{h}{b} = \frac{180}{91} = 1.98 > 1.2 \\ t_f = 8 \text{ mm} < 40 \text{ mm} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{suitant y-y : courbe a} \\ \text{suitant z-z : courbe b} \end{array}$$

Suivant y-y : $\alpha = 0.21$ et suivant z-z : $\alpha = 0.34$

$$\Phi_y = 0.5 \times (1 + 0.21 \times (0.718 - 0.2) + 0.718^2) = 0.812$$

$$\Phi_z = 0.5 \times (1 + 0.34 \times (2.597 - 0.2) + 2.597^2) = 4.279$$

$$\chi_y = \frac{1}{\Phi_y + \sqrt{\Phi_y^2 - \bar{\lambda}_y^2}} = \frac{1}{0.812 + \sqrt{0.812^2 - 0.718^2}} = 0.839$$

$$\chi_z = \frac{1}{\Phi_z + \sqrt{\Phi_z^2 - \bar{\lambda}_z^2}} = \frac{1}{4.279 + \sqrt{4.279^2 - 2.597^2}} = 0.130$$

$$\chi_{\min} = \min(\chi_y, \chi_z) = 0.130$$

• Calcul de K_y

$$\beta_{M,y} = 1.3$$

$$\mu_y = 0.718 \times (2 \times 1.3 - 4) + \left(\frac{(166 - 146) \times 10^3}{146 \times 10^3} \right) = -0.868 < 0.9$$

$$K_y = 1 - \frac{-0.868 \times 11.84 \times 10^3}{0.839 \times 23.9 \times 10^2 \times 235} = 1.022 < 1.5$$

$$\frac{11.84 \times 10^3}{0.130 \times 510.6 \times 10^3} + \frac{1.022 \times 24.61 \times 10^6}{35.46 \times 10^6} = 0.888 > 1 \quad (\text{vérifiée})$$

• Flexion composée avec risque de déversement

$$\text{On doit vérifier : } \frac{N_{ed}}{\chi_z \times N_{pl,Rd}} + \frac{K_{LT} \times M_{y,ed}}{\chi_{LT} \times M_{pl,Rd}} \leq 1$$

$$C_1 = 1.88 - 1.40 \times \psi + 0.52 \times \psi^2 \leq 2.7$$

$$\Psi = 0 \quad \Rightarrow C_1 = 1.88 < 2.7$$

$$\lambda_{LT} = \frac{L/i_z}{C_1^{0.5} \times \left(1 + \frac{1}{20} \times \left(\frac{L/i_z}{h/t_f} \right)^2 \right)^{0.25}} = \frac{5000/20.5}{1.88^{0.5} \times \left(1 + \frac{1}{20} \times \left(\frac{5000/20.5}{180/8} \right)^2 \right)^{0.25}} = 109.85$$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \frac{\lambda_{LT}}{\lambda_1} = \frac{109.85}{93.9} = 1.169$$

$$\Phi_{LT} = 0.5 \times (1 + \alpha_{LT} \times (\bar{\lambda}_{LT} - 0.2) + \bar{\lambda}_{LT}^2) \text{ avec : } \alpha_{LT} = 0.21 \text{ (section laminée)}$$

$$\Phi_{LT} = 0.5 \times (1 + 0.21 \times (1.169 - 0.2) + 1.169^2) = 1.285$$

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} = \frac{1}{1.285 + \sqrt{1.285^2 - 1.169^2}} = 0.331$$

$$\text{On a : } \chi_z = 0.130 \quad \text{et} \quad \beta_{M,LT} = 1.3$$

$$\mu_{LT} = 0.15 \times \bar{\lambda}_z \times \beta_{M,LT} - 0.15 \leq 0.9, \quad \mu_{LT} = 0.15 \times 2.597 \times 1.3 - 0.15 = 0.356 < 0.9$$

$$K_{LT} = 1 - \frac{\mu_{LT} \times N_{ed}}{\chi_z \times A \times f_y} \leq 1.5, \quad K_{LT} = 1 - \frac{0.356 \times 11.84 \times 10^3}{0.130 \times 13.9 \times 10^2 \times 235} = 0.9 < 1.5$$

$$\frac{11.84 \times 10^3}{0.130 \times 510.6 \times 10^3} + \frac{0.9 \times 24.61 \times 10^6}{0.331 \times 35.46 \times 10^6} = 2.065 > 1 \quad (\text{non vérifiée})$$

On doit augmenter la section.

Soit un IPE220 en acier S235, section de classe 1 en compression.

$$\lambda_{LT} = \frac{L/i_z}{C_1^{0.5} \times \left(1 + \frac{1}{20} \times \left(\frac{L/i_z}{h/t_f}\right)^2\right)^{0.25}} = \frac{5000/24.8}{1.88^{0.5} \times \left(1 + \frac{1}{20} \times \left(\frac{5000/24.8}{220/9.2}\right)^2\right)^{0.25}} = 100.66$$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \frac{100.66}{93.9} = 1.072$$

$$\Phi_{LT} = 0.5 \times (1 + 0.21 \times (1.072 - 0.2) + 1.072^2) = 1.166$$

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} = \frac{1}{1.166 + \sqrt{1.166^2 - 1.072^2}} = 0.615$$

$$\lambda_z = \frac{L_z}{i_z} = \frac{5000}{24.8} = 201.6 \quad \Rightarrow \bar{\lambda}_z = \frac{\lambda_z}{\lambda_1} = \frac{201.6}{93.9} = 2.147$$

$$\Phi_z = 0.5 \times (1 + 0.34 \times (2.147 - 0.2) + 2.147^2) = 3.136$$

$$\chi_z = \frac{1}{\Phi_z + \sqrt{\Phi_z^2 - \bar{\lambda}_z^2}} = \frac{1}{3.136 + \sqrt{3.136^2 - 2.147^2}} = 0.148$$

$$\mu_{LT} = 0.15 \times \bar{\lambda}_z \times \beta M_{LT} - 0.15 \leq 0.9 \text{ avec : } \beta M_{LT} = 1.3$$

$$\mu_{LT} = 0.15 \times 2.147 \times 1.3 - 0.15 = 0.269 < 0.9$$

$$K_{LT} = 1 - \frac{\mu_{LT} \times N_{ed}}{\chi_z \times A \times f_y} = 1 - \frac{0.269 \times 11.84 \times 10^3}{0.148 \times 33.4 \times 10^2 \times 235} = 0.973 < 1.5$$

$$\frac{11.84 \times 10^3}{0.148 \times 713.55 \times 10^3} + \frac{0.973 \times 24.61 \times 10^6}{0.615 \times 60.89 \times 10^6} = 0.752 < 1 \quad (\text{vérifiée})$$

3.2.4.4. Vérification de la flèche a l'ELS

$$f = \frac{5}{384} \times \frac{q \times L^4}{E \times I_y} = \frac{5}{384} \times \frac{5.5 \times 5000^4}{2.1 \times 10^5 \times 2772 \times 10^4} = 7.69 \text{ mm}$$

$$f_{adm} = \frac{L}{200} = \frac{5000}{200} = 25 \text{ mm} \quad (\text{vérifiée})$$

La barre 2-4 est vérifiée.

3.2.5.

Barre 3-4 (poteau)

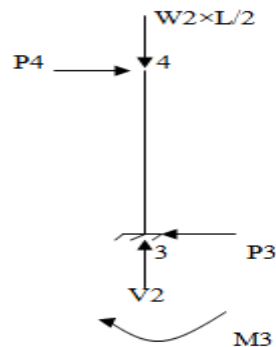


Figure 3.4: Représentation de l'élément (3-4).

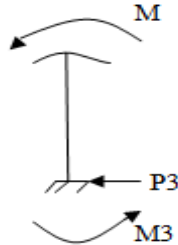
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_2 + \frac{W_2 \times L}{2} = 0 \quad \Rightarrow V_2 = \frac{W_2 \times L}{2} = \frac{7.875 \times 5}{2} = 19.69 \text{ kN}$$

$$P_3 = P_4 = 13.125 \text{ kN}$$

$$\Sigma M/4 = 0 \Rightarrow M_3 + P_3 \times L = 0 \quad \Rightarrow M_3 = -P_3 \times L = -13.125 \times 5 = -65.63 \text{ kN.m}$$

3.2.5.1.

Effort internes

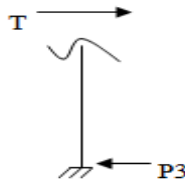


- **Moment fléchissant**

$$M = P_3 \times X - M_3$$

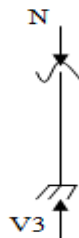
$$X = 0 \text{ m} \Rightarrow M = -M_3 = 65.63 \text{ kN.m} \quad \text{et} \quad X = 5 \text{ m} \Rightarrow M = P_3 \times 5 - M_3 = 0 \text{ kN.m}$$

- **Effort tranchant**



$$T = P_3 = 13.125 \text{ kN}$$

- **Effort normal**



$$N = V_2 = 19.69 \text{ kN}$$

La barre 3-4 est soumise aux sollicitations suivantes :

$$M_{ed} = 65.63 \text{ kN.m}, V_{ed} = 13.125 \text{ kN}, N_{ed} = 19.69 \text{ kN}$$

Soit un IPE 220 en acier S235, la section est de classe 1 en compression.

La barre 2-4 est soumise à la flexion composée.

3.2.5.2. Vérification de la résistance en section

- **Interaction entre l'effort tranchant V et le moment fléchissant M**

$$V_{pl,Rd} = \frac{A_{vz} \times f_y}{\sqrt{3} \times \gamma_{M0}} = \frac{15.9 \times 10^2 \times 235}{\sqrt{3} \times 1.1} \times 10^{-3} = 196.12 \text{ kN}$$

$$0.5V_{pl,Rd} = 0.5 \times 196.12 = 98.1 \text{ kN} > V_{ed} = 13.125 \text{ kN}$$

Il n'y a pas d'interaction entre V et M

$$V_{pl,Rd} = 196.12 \text{ kN} > V_{ed} = 13.125 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée}).$$

- **Interaction entre l'effort normal N et le moment fléchissant M**

$$N_{pl,Rd} = A \times \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = (33.4 \times 10^2 \times \frac{235}{1.1}) \times 10^{-3} = 713.55 \text{ kN}$$

$$\frac{N_{ed}}{N_{pl,Rd}} = \frac{19.69}{713.55} = 0.028 < 0.25 \quad (\text{vérifiée})$$

$$0.5 \times \frac{h_w \times t_w \times f_y}{\gamma_{M0}} = (0.5 \times \frac{177.6 \times 5 \times 235}{1.1}) \times 10^{-3}$$

$$= 94.85 \text{ kN} > N_{ed} = 19.69 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée})$$

Il n'y a pas d'interaction entre N et M, donc on doit vérifier :

$$M_{ed} \leq M_{pl,Rd}$$

$$M_{pl,Rd} = W_{pl} \times \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = (285 \times 10^3 \times \frac{235}{1.1}) \times 10^{-6} = 60.88 \text{ kN.m} < M_{ed} = 65.63 \text{ kN.m} (\text{non vérifiée})$$

On doit augmenter la section.

Soit un IPE240 en acier S235, section de classe 1 en compression.

$$M_{pl,Rd} = W_{pl} \times \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = (367 \times 10^3 \times \frac{235}{1.1}) \times 10^{-6} = 78.4 \text{ kN.m} > M_{ed} = 65.63 \text{ kN.m}$$

3.2.5.3. Vérification de la résistance de l'élément

- **Flexion composée avec risque de flambement**
- **Longueur de flambement**

$$L_y = L_z = 0.7 \times L = 3.5 \text{ m}$$

- **Calcul de l'élancement**

$$\lambda_y = \frac{L_y}{i_y} = \frac{3500}{99.7} = 35.1 \quad \text{et} \quad \lambda_z = \frac{L_z}{i_z} = \frac{3500}{26.9} = 130.11$$

- **Calcul de l'élancement réduit**

$$\bar{\lambda}_y = \frac{\lambda_y}{\lambda_1} = \frac{35.1}{93.9} = 0.374 \quad \text{et} \quad \bar{\lambda}_z = \frac{\lambda_z}{\lambda_1} = \frac{130.11}{93.9} = 1.386$$

- **Choix de la courbe de flambement**

$$\left. \begin{array}{l} \frac{h}{b} = \frac{240}{120} = 2 > 1.2 \\ t_f = 9.8 \text{ mm} < 40 \text{ mm} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{suisant y-y : courbe a} \\ \text{suisant z-z : courbe b} \end{array}$$

Suisant y-y : $\alpha = 0.21$ et suisant z-z : $\alpha = 0.34$

$$\Phi_y = 0.5 \times (1 + 0.21 \times (0.374 - 0.2) + 0.374^2) = 0.558$$

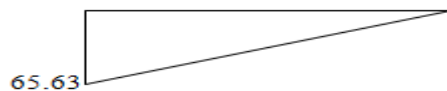
$$\Phi_z = 0.5 \times (1 + 0.34 \times (1.386 - 0.2) + 1.386^2) = 1.662$$

$$\chi_y = \frac{1}{\Phi_y + \sqrt{\Phi_y^2 - \bar{\lambda}_y^2}} = \frac{1}{0.558 + \sqrt{0.558^2 - 0.374^2}} = 1.029$$

$$\chi_z = \frac{1}{\Phi_z + \sqrt{\Phi_z^2 - \bar{\lambda}_z^2}} = \frac{1}{1.662 + \sqrt{1.662^2 - 1.386^2}} = 0.388$$

$$\chi_{\min} = \min(\chi_y, \chi_z) = 0.388$$

- **Calcul de K_y**
- **Diagramme des moments**



$$\beta_{M,y} = \beta_{M,\psi} = 1.8 - 0.7\psi \quad \text{avec : } \psi = 0$$

$$\beta_{M,y} = 1.8$$

$$\mu_y = 0.374 \times (2 \times 1.8 - 4) + \left(\frac{(376 - 324) \times 10^3}{324 \times 10^3} \right) = 0.011 < 0.9$$

$$K_y = 1 - \frac{0.011 \times 19.69 \times 10^3}{1.029 \times 39.1 \times 10^2 \times 235} = 0.999 < 1.5$$

$$\frac{19.69 \times 10^3}{0.388 \times 835.32 \times 10^3} + \frac{0.999 \times 65.63 \times 10^6}{78.4 \times 10^6} = 0.897 > 1 \quad (\text{vérifiée})$$

La barre 3-4 est vérifiée.

3.3. Analyse de la structure

Pour l'analyse de notre structure en utilise la méthode matricielle. L'analyse peut se faire par la méthode des forces ou matrices de flexibilité (appelée aussi matrice de souplesse), ou par la méthode des déplacements ou matrices de rigidité [11], dans notre cas on a opté pour la méthode des déplacements.

3.3.1. Méthode des déplacements

Dans cette méthode, ce sont les déplacements des nœuds qui sont considérés comme les inconnues. On écrit un système d'équations simultanées qui établissent les relations entre les déplacements et les charges, en tenant compte des caractéristiques de rigidité des éléments. Dans la notation matricielle, ce système d'équations s'écrit sous la forme [11] :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}\delta$$

\mathbf{Q} = matrice colonne des charges extérieures ;

\mathbf{K} = matrice de rigidité de la structure ;

δ = matrice colonne des déplacements.

En résolvant le système d'équations, on obtient les valeurs des déplacements.

3.3.2. Détermination des matrices de rigidité des barres

Les éléments de la matrice de rigidité son données par [11] :

$$\begin{aligned} k_{11} &= [(AE/L) c^2 + (12EI/L^3) s^2]; & k_{21} &= k_{12} = [(AE/L) + (12EI/L^3)] sc; \\ k_{22} &= [(AE/L) s^2 + (12EI/L^3) c^2]; & k_{31} &= k_{13} = - (6EI/L^2) s; \\ k_{32} &= k_{23} = (6EI/L^2) c; & k_{33} &= 4EI/L; \\ k_{41} &= k_{14} = - [(AE/L) c^2 + (12EI/L^3) s^2]; & k_{42} &= k_{24} = - [(AE/L) + (12EI/L^3)] sc; \\ k_{43} &= k_{34} = (6EI/L^2) s; & k_{44} &= [(AE/L) c^2 + (12EI/L^3) s^2]; \\ k_{51} &= k_{15} = - [(AE/L) + (12EI/L^3)] sc; & k_{52} &= k_{25} = - [(AE/L) s^2 + (12EI/L^3) c^2]; \\ k_{53} &= k_{35} = - (6EI/L^2) c; & k_{54} &= k_{45} = [(AE/L) + (12EI/L^3)] sc; \\ k_{55} &= [(AE/L) s^2 + (12EI/L^3) c^2]; & k_{61} &= k_{16} = - (6EI/L^2) s; \\ k_{62} &= k_{26} = (6EI/L^2) c; & k_{63} &= k_{36} = 2EI/L; \\ k_{64} &= k_{46} = (6EI/L^2) s; & k_{65} &= k_{56} = - (6EI/L^2) c; \end{aligned}$$

$$k_{66} = 4EI/L.$$

Avec : $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$

A = section de la barre. I = inertie.

L = longueur de la barre. E = module Young.

La structure a trois degrés de liberté à chacun des nœuds 2 et 4. Les nœuds 1 et 3 étant encastres, les déplacements sont nuls

$$u_1 = v_1 = w_1 = u_3 = v_3 = w_3 = 0$$

Comme les charges extérieures sont appliquées entre les nœuds, la charge W_1 et W_2 respectivement entre les nœuds 1 et 2 et entre 2 et 4 et que les nœuds 2 et 4 sont déplaçables, il faut procéder en deux étapes.

1^{ère} étape : On applique les forces requises pour empêcher tout déplacement des nœuds 2 et 4, les forces en question sont les forces et les moments d'encastres [11].

3.3.3. Combinaison de charge

$$W_1 = 1.35 \times G_p + 1.5 \times V = 1.35 \times 0.307 + 1.5 \times 3.5 = 5.7 \text{ kN/ml.}$$

$$W_2 = 1.35 \times (G_p + G) + 1.5 \times N = 1.35 \times (0.307 + 2.5) + 1.5 \times 3 = 7.875 \text{ kN/ml.}$$

Avec: G_p : Poids propre de l'IPE240.

3.3.4. Calcul des forces et des moments d'encastres

$$\text{Au nœud 1 : } P_{1e} = -\frac{W_1 \times L}{2} \quad \text{et} \quad M_{1e} = \frac{W_1 \times L^2}{12}$$

Au nœud 2 :

$$\text{Barre 1-2 : } P_{2e} (1-2) = -\frac{W_1 \times L}{2} \quad \text{et} \quad M_{2e} = -\frac{W_1 \times L^2}{12}$$

$$\text{Barre 2-4 : } V_{2e} (2-4) = \frac{W_2 \times L}{2} \quad \text{et} \quad M_{2e} (2-4) = \frac{W_2 \times L^2}{12}$$

Au nœud 2 on aura :

$$P_{2e} = -\frac{W_1 \times L}{2}, \quad V_{2e} = \frac{W_2 \times L}{2} \quad \text{et} \quad M_{2e} = -\frac{W_1 \times L^2}{12} + \frac{W_2 \times L^2}{12}$$

$$\text{Au nœud 4 : } V_{4e} = \frac{W_2 \times L}{2} \quad \text{et} \quad M_{4e} = -\frac{W_2 \times L^2}{12}$$

2^{ème} étape : analyse de la structure :

On applique au nœud 2 une forces horizontale P_2 , une forces verticale V_2 et un moment M_2 , et au nœud 4 une forces verticale V_4 et un moment M_4 .

$$P_2 = -P_{2e}, \quad V_2 = -V_{2e}, \quad M_2 = -M_{2e}, \quad V_4 = -V_{4e}, \quad M_4 = -M_{4e}$$

Pour déterminer les déplacements des nœuds, dans le système globale de coordonnées on assemble la matrices de rigidité de la structure à partir des matrices de rigidité des barres.

3.3.5. Matrice de rigidité de la structure

$$A = 39.1 \times 10^2 \text{ mm}^2, \quad I = 3892 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$E = 210 \text{ kN/mm}^2, \quad L = 5000 \text{ mm}$$

Après avoir déterminé les matrices de rigidité des barres et assemblé la matrice de rigidité de la structure, on peut calculer les déplacements aux nœuds 2 et 4 en résolvant le système suivant :

$$\begin{pmatrix} P2 \\ V2 \\ M2 \\ P4 \\ V4 \\ M4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 165.005 & 0 & 1961.57 & -164.22 & 0 & 0 \\ 0 & 165.005 & 1961.57 & 0 & -0.7846 & 1961.57 \\ 1961.57 & 1961.57 & 13077120 & 0 & -1961.57 & 3269280 \\ -164.22 & 0 & 0 & 165.005 & 0 & 1961.57 \\ 0 & -0.7846 & -1961.57 & 0 & 165.005 & -1961.57 \\ 0 & 1961.57 & 3269280 & 1961.57 & -1961.57 & 13077120 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u2 \\ v2 \\ w2 \\ u4 \\ v4 \\ w4 \end{pmatrix}$$

Après résolution on a les valeurs des déplacements aux nœuds 2 et 4 :

$$u_2 = 11.7165 \text{ mm}, \quad v_2 = -0.1016 \text{ mm}, \quad w_2 = -0.0022 \text{ rad.}$$

$$u_4 = 11.6594 \text{ mm}, \quad v_4 = -0.1511 \text{ mm}, \quad w_4 = 0.0001 \text{ rad.}$$

3.3.6. Détermination des forces et des moments extérieurs aux nœuds 1 et 3

Des matrices de rigidité des barres on peut déterminer les forces et les moments extérieurs aux nœuds 1 et 3 :

$$P_1 = -4.88 \text{ kN}, \quad V_1 = 16.68 \text{ kN}, \quad M_1 = 15.79 \text{ kN.m.}$$

$$P_3 = -9.34 \text{ kN}, \quad V_3 = 24.81 \text{ kN}, \quad M_3 = 23.2 \text{ kN.m.}$$

En superposant ces valeurs aux valeurs obtenues dans la première étape, on a :

$$P_1 = -19.13 \text{ kN} \quad M_1 = 27.67 \text{ kN.}$$

3.3.6.1. Effort internes

A partir des valeurs obtenues précédemment, par la statique, on peut déterminer les efforts internes dans la structure. On trouve ainsi :

- **Moments fléchissant**

$$M_{12} = -27.67 \text{ kN.m}, M_{21} = -3.27 \text{ kN.m}, M_{24} = -3.27 \text{ kN.m}$$

$$M_{42} = -23.62 \text{ kN.m}, M_{34} = 23.2 \text{ kN.m}, M_{43} = -23.62 \text{ kN.m}$$

- **Effort tranchants**

$$V_{12} = 19.13 \text{ kN}, V_{21} = -9.37 \text{ kN}, V_{24} = 16.68 \text{ kN}$$

$$V_{42} = -24.82 \text{ kN}, V_{34} = 9.34 \text{ kN}, V_{43} = 9.34 \text{ kN}$$

- **Effort normal**

$$N_{12} = N_{21} = -16.68 \text{ kN}, N_{24} = N_{42} = -14.25 \text{ kN}, N_{34} = N_{43} = -24.81 \text{ kN}$$

3.4. Analyse globale du portique

Calcul de α_{cr} :

$$\alpha_{cr} = \left(\frac{H}{V}\right) \times \left(\frac{h}{\delta_H}\right)$$

H : réaction horizontale à la partie inférieure de l'étage.

$$H = 19.13 + 9.34 = 28.47 \text{ kN.}$$

V : réaction verticale totale à la partie inférieure.

$$V = 16.68 + 24.81 = 41.49 \text{ kN.}$$

h : Hauteur d'étage = 5 m.

δ_H : Déplacement horizontal de la partie supérieure.

$$\delta_H = 11.7165 \text{ mm.}$$

$$\alpha_{cr} = \left(\frac{28.47}{41.49}\right) \times \left(\frac{5000}{11.7165}\right) = 292.83 > 15$$

⇒ La structure n'est pas sensible aux effets du second ordre.

$$H = 5.7 \times 5 = 28.5 \text{ kN}, \quad V = 8.3 \times 5 = 41.5 \text{ kN.}$$

$$0.15 \times V = 6.23 \text{ kN} < H$$

⇒ Les défauts d'aplomb ne sont pas à considérer.

3.5. Vérification de la résistance en section et des éléments du portique

Les éléments du portique sont en IPE240 en acier S235 et sont tous soumis à une flexion composée, la section est de classe 1 en compression donc on doit faire les vérifications dans le domaine plastique.

3.5.1. Vérification de la résistance en section

3.5.1.1. Interaction entre l'effort tranchant V et le moment fléchissant M

$$V_{ed} \leq 0.5V_{pl,Rd} \quad \text{avec: } V_{pl,Rd} = \frac{A_{vz} \times f_y}{\sqrt{3} \times \gamma_{M0}}$$

Si la condition est vérifiée, il n'y a pas d'interaction entre V et M, si non on doit vérifier :

$$M_{v,Rd} \leq M_{p,Rd} \quad \text{avec: } M_{pl,Rd} = W_{pl} \times \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$M_{v,Rd} = \left(W_{pl,y} - \left(\frac{\rho \times A_{vz}^2}{4t_w} \right) \right) \times \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \quad \text{avec: } \rho = \left(\frac{2V_{ed}}{V_{pl,Rd} - 1} \right)^2$$

3.5.1.2. Interaction entre l'effort normal N et le moment fléchissant M

$$\frac{N_{ed}}{N_{pl,Rd}} \leq 0.25 \quad \text{et} \quad N_{ed} \leq 0.5 \times \frac{h_w \times t_w \times f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$N_{pl,Rd} = A \times \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

Si la condition est vérifiée, il n'y a pas d'interaction entre N et M, on doit vérifier :

$$M_{ed} \leq M_{pl,Rd}$$

Si non, on doit vérifier :

$$M_{ed} \leq M_{n,Rd}$$

$$\text{Avec: } M_{n,Rd} = M_{pl,Rd} \times \left(1 - \left(\frac{N_{ed}}{N_{pl,Rd}} \right)^2 \right)$$

3.5.2. Vérification de la résistance de l'élément

3.5.2.1. Flexion composée avec risque de flambement

$$\text{On doit vérifier que : } \frac{N_{ed}}{\chi_{min} \times N_{pl,Rd}} + \frac{K_y \times M_{y,ed}}{M_{pl,Rd}} \leq 1$$

- **Calcul de la longueur de flambement**

$$L_y = 0.7L \quad \text{et} \quad L_z = 0.7L \quad \text{pour les barres 1-2 et 3-4 (articulé-encastéré)}$$

$$L_y = L \quad \text{et} \quad L_z = L \quad \text{pour la barre 2-4 (articulé-articulé)}$$

- **Calcul de l'élanement**

$$\lambda_y = \frac{L_y}{i_y} \quad \text{et} \quad \lambda_z = \frac{L_z}{i_z}$$

- **Calcul de l'élanement réduit**

$$\bar{\lambda}_y = \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \quad \text{et} \quad \bar{\lambda}_z = \frac{\lambda_z}{\lambda_1}$$

$\lambda_1 = 93.9 \times \varepsilon$: élanement Eulérien

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$$

$$\chi_y = \frac{1}{\Phi_y + \sqrt{\Phi_y^2 - \bar{\lambda}_y^2}} \quad \text{et} \quad \chi_z = \frac{1}{\Phi_z + \sqrt{\Phi_z^2 - \bar{\lambda}_z^2}}$$

$$\chi_{\min} = \min(\chi_y, \chi_z)$$

$$\Phi_y = 0.5 \times (1 + \alpha \times (\bar{\lambda}_y - 0.2) + \bar{\lambda}_y^2) \quad \text{et} \quad \Phi_z = 0.5 \times (1 + \alpha \times (\bar{\lambda}_z - 0.2) + \bar{\lambda}_z^2)$$

α : facteur d'imperfection.

- **Choix de la courbe de flambement**

Le tableau 5.5.3 de l'Eurocode 3, partie 1-1 nous donne le choix de la courbe de flambement en fonction du type de la section.

Pour les profilés laminés :

$$\frac{h}{b} \geq 1.2 \quad \text{et} \quad t_f \leq 40 \text{ mm}$$

Suivant y-y : courbe a et suivant z-z : courbe b

Le tableau 5.5.1 de l'Eurocode 3, partie 1-1 nous donne les valeurs du facteur d'imperfection α en fonction de la courbe de flambement.

Suivant y-y : $\alpha = 0.21$ et suivant z-z : $\alpha = 0.34$

- **Calcul de K_y**

$$K_y = 1 - \frac{\mu_y \times N_{ed}}{\chi_y \times A \times f_y} \leq 1.5$$

$$\mu_y = \bar{\lambda}_y \times (2\beta_{M,y} - 4) + \left(\frac{W_{pl,y} - W_{el,y}}{W_{el,y}} \right) \leq 0.9$$

$\beta_{M,y}$: facteur de moment uniforme, il est déterminé à partir du tableau 5.5.3 de l'Eurocode 3, partie 1-1 en fonction du diagramme des moments.

Pour la barre 1-2 :

$$\beta_{M,y} = \beta_{M,\psi} + \frac{M_Q}{\Delta M} \times (\beta_{M,Q} - \beta_{M,\psi}) \quad \text{avec} : \beta_{M,\psi} = 1.8 - 0.7\psi$$

$$\psi = \frac{-3.27}{-27.67} = 0.118 \quad \Rightarrow \beta_{M,\psi} = 1.8 - 0.7 \times 0.118 = 1.7174$$

$$M_Q = |\max M| = 27.67 \text{ kN.m} \quad \text{et} \quad \Delta M = |\max M| = 27.67 \text{ kN.m}$$

$$\beta_{M,Q} = 1.3 \quad \Rightarrow \beta_{M,y} = 1.7174 + (1.3 - 1.7174) = 1.3$$

$$\frac{16.68 \times 10^3}{0.388 \times 835.32 \times 10^3} + \frac{1.007 \times 27.67 \times 10^6}{78.4 \times 10^6} = 0.407 < 1 \quad (\text{vérifiée})$$

Pour la barre 2-4 :

$$\beta_{M,y} = 1.3$$

$$\frac{14.25 \times 10^3}{0.213 \times 835.32 \times 10^3} + \frac{1.01 \times 23.62 \times 10^6}{78.4 \times 10^6} = 0.384 < 1 \quad (\text{vérifiée})$$

Pour la barre 3-4 :

$$\beta_{M,y} = \beta_{M,\psi} = 1.8 - 0.7\psi \quad \text{avec : } \psi = \frac{23.2}{-23.62} = -0.982$$

$$\beta_{M,y} = 1.8 + 0.7 \times 0.982 = 2.487$$

$$\frac{24.81 \times 10^3}{0.388 \times 835.32 \times 10^3} + \frac{0.987 \times 23.62 \times 10^6}{78.4 \times 10^6} = 0.374 < 1 \quad (\text{vérifiée})$$

3.5.2.2. Flexion composée avec risque de déversement

$$\text{On doit vérifier : } \frac{N_{ed}}{\chi_z \times N_{pl,Rd}} + \frac{K_{LT} \times M_{y,ed}}{\chi_{LT} \times M_{pl,Rd}} \leq 1$$

$$C_1 = 1.88 - 1.40 \times \psi + 0.52 \times \psi^2 \leq 2.7$$

$$\lambda_{LT} = \frac{L/i_z}{C_1^{0.5} \times \left(1 + \frac{1}{20} \times \left(\frac{L/i_z}{h/t_f} \right)^2 \right)^{0.25}}$$

$$\Phi_{LT} = 0.5 \times (1 + \alpha_{LT} \times (\bar{\lambda}_{LT} - 0.2) + \bar{\lambda}_{LT}^2) \quad \text{avec : } \alpha_{LT} = 0.21 \quad (\text{section laminée})$$

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}}$$

$$\mu_{LT} = 0.15 \times \bar{\lambda}_z \times \beta_{M_{LT}} - 0.15 \leq 0.9 \quad \text{avec : } \beta_{M_{LT}} = \beta_{M,y}$$

$$K_{LT} = 1 - \frac{\mu_{LT} \times N_{ed}}{\chi_z \times A \times f_y} \leq 1.5$$

Pour la barre 1-2 :

$$\frac{16.68 \times 10^3}{0.388 \times 835.32 \times 10^3} + \frac{0.994 \times 27.67 \times 10^6}{0.614 \times 78.4 \times 10^6} = 0.623 < 1 \quad (\text{vérifiée})$$

Pour la barre 2-4 :

$$\frac{14.25 \times 10^3}{0.213 \times 835.32 \times 10^3} + \frac{0.983 \times 23.62 \times 10^6}{0.608 \times 78.4 \times 10^6} = 0.567 < 1 \quad (\text{vérifiée})$$

Pour la barre 3-4 :

$$\frac{24.81 \times 10^3}{0.388 \times 835.32 \times 10^3} + \frac{0.999 \times 23.62 \times 10^6}{0.761 \times 78.4 \times 10^6} = 0.472 < 1 \quad (\text{vérifiée})$$

Le portique est vérifié à l'ELU.

3.5.3. Vérification à l'ELS

Vérification de la flèche pour la barre 2-4 :

$$f = \frac{5}{384} \times \frac{q \times L^4}{E \times I_y} = \frac{5}{384} \times \frac{5.807 \times 5000^4}{2.1 \times 10^5 \times 3892 \times 10^4} = 5.78 \text{ mm}$$

$$f_{\text{adm}} = \frac{L}{200} = \frac{5000}{200} = 25 \text{ mm} \quad (\text{vérifiée})$$

La flèche est vérifiée.

3.6. Calcul des assemblages

3.6.1. Assemblage poteau-poutre

3.6.1.1. Nœud 2

Les sollicitations au niveau du nœud 2 sont :

$$M_{\text{ed}} = 3.27 \text{ kN.m}, V_{\text{ed}} = 16.68 \text{ kN}, N_{\text{ed}} = 14.25 \text{ kN}$$

Coefficients de sécurités :

$$\gamma_{M_b} = 1.25, \gamma_{M_b} = 1.5 \text{ (traction)}, \gamma_{M_2} = 1.25, \gamma_{M_0} = \gamma_{M_1} = 1.1$$

- **Détermination du nombre de boulons**

On utilise pour l'assemblage des boulons précontraints ou boulons HR (haute résistance), constitués d'acier à haute limite élastique.

- **Résistance au glissement**

$$F_{s,Rd} \geq V_{\text{ed}} \quad \text{avec : } F_{s,Rd} = \frac{K_s \times m \times \mu}{\gamma_{M_2}} \times F_{p,Rd}$$

$F_{p,Rd}$ = effort de calcul de précontrainte.

μ = coefficient de frottement dépendant de la classe de traitement de surface, donné par le tableau ci-dessous :

Type de surface	Classe	μ
Surface décapée par grenailage ou sablage • avec enlèvement de toutes les plaques de rouille non adhérentes et sans piqûres de corrosion • métallisées par projection d'aluminium • métallisées par projection d'un revêtement à base de zinc garantissant un coefficient de frottement $\mu \geq 0.5$	A	0.5
Surface décapée par grenailage ou sablage et recouvertes d'une couche de peinture au silicate de zinc alcalin d'épaisseur 50 à 80 mm	B	0.4
Surface nettoyée par brossage métallique ou à la flamme avec enlèvement de toutes les plaques de rouille non adhérentes	C	0.3
Surfaces non traitées	D	0.2

Tableau 3.3 : Coefficient de frottement selon l'Eurocode 3 [3].

m = nombre de surface de frottement.

$K_s = 1$ pour les trous à tolérance normal.

$\mu = 0.3$ (classe C) et $m = 1$

$$F_{p,cd} = 0.7 \times f_{ub} \times A_s$$

$$F_{s,Rd} = \frac{K_s \times m \times \mu}{\gamma_{M2}} \times 0.7 \times f_{ub} \times A_s \geq V_{ed}$$

$$f_{ub} \times A_s \geq \frac{V_{ed} \times \gamma_{M2}}{0.7 \times K_s \times m \times \mu} = \frac{16.68 \times 10^3 \times 1.25}{0.7 \times 0.3} = 99285.7 \text{ N}$$

Soit un boulon HR8.8 M8 (8 mm).

$$f_{ub} = 800 \text{ N/mm}^2 \quad \text{et} \quad f_{yb} = 640 \text{ N/mm}^2$$

A_s = section du boulon = 36.6 mm².

$$\text{Pour un boulon : } f_{ub} \times A_s = 800 \times 36.6 = 29280 \text{ N}$$

$$\frac{99285.7}{29280} = 3.4 \Rightarrow \text{On prend 4 boulons HR8.8 M8.}$$

• Calcul de l'effort de précontrainte

$$F_{p,cd} = 0.7 \times f_{ub} \times A_s = 0.7 \times 800 \times 36.6 = 20495 \text{ N}$$

• Disposition des boulons

Les distances entre les axes des boulons et entre les axes du boulon et les bords de la pièce doivent être comprises entre certaines limites pour les raisons suivantes :

- Faciliter la mise en place et éviter la rupture de la tôle, pour les valeurs minimales ;
- Garder un contact entre les pièces assemblées et limiter le risque de corrosion, pour les valeurs maximales.

$$e_1 \geq 1.2d_0, \quad e_2 \geq 1.5d_0, \quad p_1 \geq 2.2d_0, \quad p_2 \geq 3d_0.$$

Avec : $d_0 = \text{diamètre du trou} = d + 1 \text{ mm}$.

$d = \text{diamètre du boulon}$ et $d_0 = 8 + 1 = 9 \text{ mm}$.

$e_1 \geq 1.2 \times 9 = 10.8 \text{ mm}$, $e_2 \geq 1.5 \times 9 = 13.5 \text{ mm}$, $p_1 \geq 2.2 \times 9 = 19.8 \text{ mm}$.

$p_2 \geq 3 \times 9 = 27 \text{ mm}$, $e_1, e_2 \leq 12t$ ou 150 mm , $p_1, p_2 \leq 14t$ ou 200 mm .

Soit :

$e_1 = 80 \text{ mm}$, $e_2 = 30 \text{ mm}$, $p_1 = 120 \text{ mm}$, $p_2 = 60 \text{ mm}$.

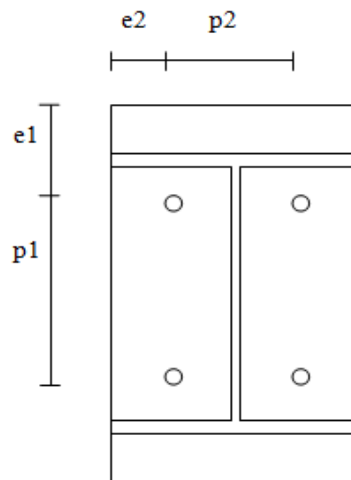


Figure 3.5: Représentation de la disposition des boulons pour l'assemblage du nœud 2.

- **Vérification de l'assemblage au cisaillement et à la traction**

$$V_{ed} \leq F_{s,Rd} = \frac{K_s \times m \times \mu}{\gamma_{M2}} \times (n \times F_{p,cd} - 0.8 \times N_{ed}) \text{ avec: } n = \text{nombre de boulons.}$$

$$F_{s,Rd} = \frac{0.3}{1.25} \times (4 \times 20496 \times 10^{-3} - 0.8 \times 14.25) = 16.94 \text{ kN} > V_{ed} = 16.68 \text{ kN (vérifiée).}$$

- **Dimensionnement de la platine (Résistance à la pression diamétrale)**

$$V_{ed} \leq F_{b,Rd} \quad \text{avec: } F_{b,Rd} = \frac{2.5 \alpha \times f_u \times d \times t}{\gamma_{M2}}$$

$$\alpha = \min \left(\frac{e_1}{3d_0}; \frac{p_1}{3d_0} - \frac{1}{4}; \frac{f_{ub}}{f_u}; 1 \right) = \min (2.96; 4.19; 2.22; 1) = 1$$

$$t \geq \frac{V_{ed} \times \gamma_{M2}}{2.5 \alpha \times f_u \times d \times n} = \frac{16.68 \times 10^3 \times 1.25}{2.5 \times 360 \times 8 \times 4} = 0.72 \text{ mm.}$$

Pour plus de sécurité on prend $t = t_f = 9.8 \text{ mm}$ (largeur de la semelle du poteau).

- **Calcul de la hauteur de la partie comprimé**

$$\chi = t_{fb} \times \sqrt{\frac{b_b}{t_{wb}}} = 9.8 \times \sqrt{\frac{120}{6.2}} = 43.11 \text{ mm}$$

- **Calcul du moment résistant effectif de l'assemblage**

$$M_{Rd} = \frac{n \times F_p \times \Sigma d_i^2}{d_1}$$

$n = 2$: le nombre de boulons dans une range horizontale.

$d_1 = 175.1 \text{ mm}$ et $d_2 = 55.1 \text{ mm}$.

$$\Sigma d_i^2 = d_1 + d_2 = 175.1^2 + 55.1^2 = 33696.02 \text{ mm}^2.$$

$$M_{Rd} = \left(\frac{2 \times 20496 \times 33696.02}{175.1} \right) \times 10^{-6} = 7.89 \text{ kN.m} > M_{ed} = 3.27 \text{ kN.m (vérifiée)}.$$

- **Résistance de l'assemblage sous l'effort tranchant**

$$V_{ed} \leq V_{Rd} \quad \text{avec: } V_{Rd} = \frac{K_s \times m \times \mu \times F_p \times n}{\gamma_{M2}} = \frac{0.3 \times 20496 \times 10^{-3} \times 4}{1.25}$$

$$V_{Rd} = 19.68 \text{ kN} > V_{ed} = 16.68 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée}).$$

- **Vérification à la résistance de l'âme du Poteau dans la zone tendue**

$$F_v \leq F_{t,Rd} \quad \text{avec: } F_v = \frac{M_{ed}}{h - t_f} = \left(\frac{3.27 \times 10^6}{240 - 9.8} \right) \times 10^{-3} = 14.21 \text{ kN}.$$

$$F_{t,Rd} = t_{wc} \times b_{eff} \times \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \quad \text{avec: } b_{eff} = p_1 = 120 \text{ mm}.$$

$$F_{t,Rd} = 6.2 \times 120 \times \frac{235}{1.1} \times 10^{-3} = 158.95 \text{ kN} > F_v = 14.21 \text{ kN (vérifiée)}.$$

- **Vérification à la résistance de l'âme du Poteau dans la zone comprimée**

$$N_{ed} \leq F_{c,Rd} \quad \text{avec: } F_{c,Rd} = \frac{K_c \times \rho \times b_{eff} \times t_{wc} \times f_y}{\gamma_{M1} \times \sqrt{\left(1 + 1.3 \times \left(\frac{b_{eff}}{h} \right)^2 \right)}}$$

$$b_{eff} = t_{fb} \times 2 \times a_p \times \sqrt{2} + 5 \times (t_{fc} + r) + 2 \times t_p$$

a_p = épaisseur de la gorge de la soudure.

- **Dimensionnement de la gorge de la soudure**

Soit $a_p = 3 \text{ mm}$ (valeur minimale).

- **Vérification de la résistance de la gorge de la soudure**

- **Au moment fléchissant**

C'est les cordons de semelles qui vont reprendre le moment fléchissant.

$$\sqrt{\sigma_{\perp}^2 + 3 \times \tau_{\perp}^2} \leq \frac{f_u}{\beta_w \times \gamma_{Mw}} \quad \text{avec: } \beta_w = 0.8 \quad \text{et} \quad \gamma_{Mw} = 1.25$$

$$\sigma_{\perp} = \tau_{\perp} = \frac{F_t}{\sqrt{2} \times \sum a_f \times l}$$

$$F_t \leq \frac{f_u \times \sum a_f \times l}{\sqrt{2} \times \beta_w \times \gamma_{Mw}} = \frac{360 \times 2 \times 120 \times 3}{\sqrt{2} \times 0.8 \times 1.25} \times 10^{-3} = 183.3 \text{ kN}$$

$$M_{Rdsoudures} = F_t \times (h_b - t_{fb}) = 183.3 \times (240 - 9.8) \times 10^{-3}$$

$$= 42.2 \text{ kN.m} > M_{ed} = 3.27 \text{ kN.m} \quad (\text{verifiée}).$$

- **A l'effort tranchant**

C'est les cordons d'âme qui vont reprendre l'effort tranchant.

$$\sqrt{\tau_{\parallel}^2} \leq \frac{f_u}{\beta_w \times \gamma_{Mw}} \quad \text{avec : } \tau_{\parallel} = \frac{F_v}{\sum a_w \times l}$$

$$F_v \leq \frac{f_u \times \sum a_w \times l}{\sqrt{3} \times \beta_w \times \gamma_{Mw}} = \frac{360 \times 2 \times 190.4 \times 3}{\sqrt{3} \times 0.8 \times 1.25} \times 10^{-3} = 237.44 \text{ kN}$$

$$V_{Rdsoudures} = F_v = 237.44 \text{ kN} > V_{ed} = 16.68 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée}).$$

- **A l'effort axial**

C'est tout les cordons qui vont résistés à l'effort axial.

$$F \leq \frac{f_u \times \sum a_l \times l}{\sqrt{2} \times \beta_w \times \gamma_{Mw}} = \frac{360 \times 3 \times (2 \times 190.4 + 4 \times 120)}{\sqrt{2} \times 0.8 \times 1.25} \times 10^{-3} = 657.37 \text{ kN}$$

$$N_{Rdsoudures} = 657.37 \text{ kN} > N_{ed} = 14.25 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée}).$$

$$b_{eff} = 9.8 \times 2 \times 3 \times \sqrt{2} + 5 \times (9.8 + 15) + 2 \times 9.8 = 161.89 \text{ mm}$$

$$K_c = 1, \text{ si } \bar{b}_{c,sd} \leq 0.7f_y$$

$$K_c = \frac{1.7 - \bar{b}_{c,sd}}{f_y}, \text{ si } \bar{b}_{c,sd} > 0.7f_y$$

$$\bar{b}_{c,sd} = \frac{V_{ed}}{A} + \frac{M_{ed} \times Z_{max}}{I_y} \quad \text{avec : } Z_{max} = \frac{h}{2} = \frac{240}{2} = 120 \text{ mm}$$

$$\bar{b}_{c,sd} = \frac{16.68 \times 10^3}{3910} + \frac{3.27 \times 10^6 \times 120}{3892 \times 10^4} = 14.35 \text{ N/mm}^2 < 0.7f_y = 0.7 \times 235$$

$$= 164.5 \text{ N/mm}^2 \quad \Rightarrow K_c = 1.$$

$$\rho = 1, \text{ si } \bar{\lambda}_p \leq 0.72$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0.2}{\bar{\lambda}_p^2}, \text{ si } \bar{\lambda}_p > 0.72$$

$$\bar{\lambda}_p = 0.932 \times \sqrt{\frac{b_{eff} \times d_{wc} \times f_y}{E \times t_{wc}^2}} = 0.932 \times \sqrt{\frac{161.89 \times 190.4 \times 235}{2.1 \times 10^5 \times 6.2^2}} = 0.883 > 0.72$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0.2}{\bar{\lambda}_p^2} = \frac{0.883 - 0.2}{0.883^2} = 0.876$$

$$F_{c,Rd} = \frac{0.876 \times 161.89 \times 6.2 \times 235 \times 10^{-3}}{1.1 \times \sqrt{\left(1 + 1.3 \times \left(\frac{161.89}{240}\right)^2\right)}} = 148.9 \text{ kN}$$

$N_{ed} = \sum N_i$: somme des efforts dans les boulons tendus.

$$N_i = \frac{M_{ed} \times d_i}{\sum d_i^2}$$

$$N_1 = \frac{M_{ed} \times d_1}{\sum d_i^2} = \left(\frac{3.27 \times 10^6 \times 175.1}{33696.02} \right) \times 10^{-3} = 16.99 \text{ kN}$$

$$N_2 = \frac{M_{ed} \times d_2}{\sum d_i^2} = \left(\frac{3.27 \times 10^6 \times 55.1}{33696.02} \right) \times 10^{-3} = 5.35 \text{ kN}$$

$$\sum N_i = N_1 + N_2 = 16.99 + 5.35 = 22.34 \text{ kN}$$

$$N_{ed} = 22.34 \text{ kN} < F_{c,Rd} = 150.36 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée}).$$

- **Vérification à la résistance de l'âme du poteau dans la zone cisillée**

$$F_v \leq V_{Rd} \quad \text{avec : } V_{Rd} = \frac{0.58 \times f_y \times h \times t_w}{\gamma_{M0}}$$

$$V_{Rd} = \frac{0.58 \times 235 \times 240 \times 6.2 \times 10^{-3}}{1.1} = 184.38 \text{ kN} > F_v = 14.21 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée}).$$

3.6.1.2. Nœud 4

$$M_{ed} = 23.62 \text{ kN.m}, V_{ed} = 24.82 \text{ kN}, N_{ed} = 14.25 \text{ kN}.$$

- **Détermination du nombre de boulons (résistance au glissement)**

$$F_{s,Rd} \geq V_{ed} \quad \text{avec : } F_{s,Rd} = \frac{K_s \times m \times \mu}{\gamma_{M2}} \times F_{p,Rd}$$

$$F_{s,Rd} = \frac{K_s \times m \times \mu}{\gamma_{M2}} \times 0.7 \times f_{ub} \times A_s \geq V_{ed}$$

$$f_{ub} \times A_s \geq \frac{V_{ed} \times \gamma_{M2}}{0.7 \times K_s \times m \times \mu} = \frac{24.82 \times 10^3 \times 1.25}{0.7 \times 0.3} = 147738.1 \text{ N}$$

Soit un boulon HR8.8 M8 (8 mm).

$$f_{ub} = 800 \text{ N/mm}^2 \quad \text{et} \quad f_{yb} = 640 \text{ N/mm}^2.$$

$$A_s = 36.6 \text{ mm}^2.$$

$$\text{Pour un boulon : } f_{ub} \times A_s = 800 \times 36.6 = 29280 \text{ N}.$$

$$\frac{147738.1}{29280} = 5.05 \quad \Rightarrow \text{On prend 6 boulons HR8.8 M8}.$$

- **Calcul de l'effort de précontrainte**

$$F_{p,cd} = 0.7 \times f_{ub} \times A_s = 0.7 \times 800 \times 36.6 = 20495 \text{ N}$$

- **Disposition des boulons**

$$d_0 = 8 + 1 = 9 \text{ mm}$$

$$e_1 \geq 1.2 \times 9 = 10.8 \text{ mm}, e_2 \geq 1.5 \times 9 = 13.5 \text{ mm}, p_1 \geq 2.2 \times 9 = 19.8 \text{ mm}$$

$$p_2 \geq 3 \times 9 = 27 \text{ mm}, e_1, e_2 \leq 12t \text{ ou } 150 \text{ mm}, p_1, p_2 \leq 14t \text{ ou } 200 \text{ mm}$$

$$\text{Soit : } e_1 = 80 \text{ mm}, e_2 = 30 \text{ mm}, p_1 = 60 \text{ mm}, p_2 = 60 \text{ mm}$$

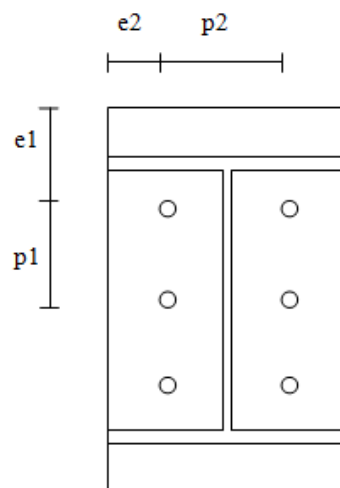


Figure 3.6: Représentation de la disposition des boulons pour l'assemblage du nœud 4.

- **Vérification de l'assemblage au cisaillement et à la traction**

$$V_{ed} \leq F_{s,Rd} = \frac{K_S \times m \times \mu}{\gamma_{M2}} \times (n \times F_{p,cd} - 0.8 \times N_{ed})$$

$$F_{s,Rd} = \frac{0.3}{1.25} \times (6 \times 20496 \times 10^{-3} - 0.8 \times 14.25) = 26.78 \text{ kN} > V_{ed} = 24.82 \text{ kN} \text{ (vérifiée).}$$

- **Dimensionnement de la platine (Résistance à la pression diamétrale)**

$$V_{ed} \leq F_{b,Rd} \quad \text{avec: } F_{b,Rd} = \frac{2.5\alpha \times f_u \times d \times t}{\gamma_{M2}}$$

$$\alpha = \min \left(\frac{e_1}{3d_0}; \frac{P_1}{3d_0} - \frac{1}{4}; \frac{f_{ub}}{f_u}; 1 \right) = \min (2.96; 1.97; 2.22; 1) = 1$$

$$t \geq \frac{V_{ed} \times \gamma_{M2}}{2.5\alpha \times f_u \times d \times n} = \frac{24.82 \times 10^3 \times 1.25}{2.5 \times 360 \times 8 \times 6} = 0.72 \text{ mm}$$

Pour plus de sécurité on prend $t = t_f = 9.8 \text{ mm}$ (largeur de la semelle du poteau).

- **Calcul de la hauteur de la partie comprimé**

$$\chi = t_{fb} \times \sqrt{\frac{b_b}{t_{wb}}} = 9.8 \times \sqrt{\frac{120}{6.2}} = 43.11 \text{ mm.}$$

- **Calcul du moment résistant effectif de l'assemblage**

$$M_{Rd} = \frac{n \times F_p \times \Sigma d_i^2}{d_1} \quad \text{avec: } n = 2$$

$$d_1 = 175.1 \text{ mm}, \quad d_2 = 115.1 \text{ mm} \quad \text{et} \quad d_3 = 55.1 \text{ mm.}$$

$$\Sigma d_i^2 = d_1 + d_2 = 175.1^2 + 115.1^2 + 55.1^2 = 47013.18 \text{ mm}^2$$

$$M_{Rd} = \left(\frac{2 \times 20496 \times 47013.18}{175.1} \right) \times 10^{-6} = 11.01 \text{ kN.m} < M_{ed} = 23.62 \text{ kN.m} \text{ (non vérifiée)}$$

On augmente la section des boulons \Rightarrow Soit 6 boulons HR8.8 M12.

$$A_s = 84.3 \text{ mm}^2 \text{ et } F_p = 0.7 \times 800 \times 84.3 = 47208 \text{ N}$$

$$M_{Rd} = \left(\frac{2 \times 47208 \times 47013.18}{175.1} \right) \times 10^{-6} = 25.35 \text{ kN.m} > M_{ed} = 23.62 \text{ kN.m} \text{ (vérifiée).}$$

On doit vérifier les limites que doit satisfaire les distances entre axes des boulons parce que les dimensions des boulons ont augmentées.

$$d_0 = d + 1\text{mm} = 12 + 1 = 13 \text{ mm.}$$

$$e_1 = 80\text{mm} > 1.2 \times 13 = 15.6 \text{ mm, } e_2 = 30\text{mm} > 1.5 \times 13 = 19.5 \text{ mm.}$$

$$p_1 = 60\text{mm} > 2.2 \times 13 = 28.6 \text{ mm, } p_2 = 60\text{mm} > 3 \times 13 = 39 \text{ mm.}$$

- **Résistance de l'assemblage sous l'effort tranchant**

$$V_{ed} \leq V_{Rd} \quad \text{avec: } V_{Rd} = \frac{K_S \times m \times \mu \times F_p \times n}{\gamma_{M2}} = \frac{0.3 \times 47208 \times 10^{-3} \times 6}{1.25}$$

$$V_{Rd} = \frac{0.3 \times 47208 \times 10^{-3} \times 6}{1.25} = 67.98 \text{ kN} > V_{ed} = 24.82 \text{ kN (vérifiée).}$$

- **Vérification à la résistance de l'âme du Poteau dans la zone tendue**

$$F_v \leq F_{t,Rd} \quad \text{avec: } F_v = \frac{M_{ed}}{h - t_f} = \left(\frac{23.62 \times 10^6}{240 - 9.8} \right) \times 10^{-3} = 102.61 \text{ kN}$$

$$F_{t,Rd} = t_{wc} \times b_{eff} \times \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \quad \text{avec: } b_{eff} = p_1 = 60 \text{ mm}$$

$$F_{t,Rd} = 6.2 \times 60 \times \frac{235}{1.1} \times 10^{-3} = 79.47 \text{ kN} > F_v = 102.61 \text{ kN (non vérifiée).}$$

On doit prévoir un raidisseur, en général on utilise des raidisseurs de 14 mm d'épaisseur.

- **Vérification de la résistance des soudures**

$$M_{Rdsoudures} = F_t \times (h_b - t_{fb}) = 183.3 \times (240 - 9.8) \times 10^{-3} \\ = 42.2 \text{ kN.m} > M_{ed} = 23.62 \text{ kN.m} \quad (\text{vérifiée}).$$

$$V_{Rdsoudures} = F_v = 237.44 \text{ kN} > V_{ed} = 24.82 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée}).$$

$$N_{Rdsoudures} = 657.37 \text{ kN} > N_{ed} = 14.25 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée}).$$

- **Vérification à la résistance de l'âme du Poteau dans la zone comprimée**

$$N_{ed} \leq F_{c,Rd} \quad \text{avec: } F_{c,Rd} = \frac{K_c \times \rho \times b_{eff} \times t_{wc} \times f_y}{\gamma_{M1} \times \sqrt{\left(1 + 1.3 \times \left(\frac{b_{eff}}{h}\right)^2\right)}}$$

$$b_{eff} = t_{fb} \times 2 \times a_p \times \sqrt{2} + 5 \times (t_{fc} + r) + 2 \times t_p \quad \text{avec: } a_p = 3 \text{ mm}$$

$$b_{eff} = 9.8 \times 2 \times 3 \times \sqrt{2} + 5 \times (9.8 + 15) + 2 \times 9.8 = 161.89 \text{ mm}$$

$$\bar{b}_{c,sd} = \frac{V_{ed}}{A} + \frac{M_{ed} \times Z_{max}}{I_y} \quad \text{avec: } Z_{max} = \frac{h}{2} = \frac{240}{2} = 120 \text{ mm}$$

$$\bar{b}_{c,sd} = \frac{24.82 \times 10^3}{3910} + \frac{23.62 \times 10^6 \times 120}{3892 \times 10^4} = 79.17 \text{ N/mm}^2 < 0.7 f_y = 0.7 \times 235$$

$$= 164.5 \text{ N/mm}^2 \quad \Rightarrow K_c = 1.$$

$$\bar{\lambda}_p = 0.932 \times \sqrt{\frac{b_{\text{eff}} \times d_{\text{wc}} \times f_y}{E \times t_{\text{wc}}^2}} = 0.932 \times \sqrt{\frac{161.89 \times 190.4 \times 235}{2.1 \times 10^5 \times 6.2^2}} = 0.883 > 0.72$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0.2}{\bar{\lambda}_p^2} = \frac{0.883 - 0.2}{0.883^2} = 0.876$$

$$F_{c,Rd} = \frac{0.876 \times 161.89 \times 6.2 \times 235 \times 10^{-3}}{1.1 \times \sqrt{\left(1 + 1.3 \times \left(\frac{167.54}{240}\right)^2\right)}} = 148.9 \text{ kN}$$

$$N_{ed} = \sum N_i \quad \text{avec : } N_i = \frac{M_{ed} \times d_i}{\sum d_i^2}$$

$$N_1 = \frac{M_{ed} \times d_1}{\sum d_i^2} = \left(\frac{23.62 \times 10^6 \times 175.1}{47013.18} \right) \times 10^{-3} = 87.97 \text{ kN}$$

$$N_2 = \frac{M_{ed} \times d_2}{\sum d_i^2} = \left(\frac{23.62 \times 10^6 \times 115.1}{47013.18} \right) \times 10^{-3} = 57.83 \text{ kN}$$

$$N_3 = \frac{M_{ed} \times d_3}{\sum d_i^2} = \left(\frac{23.62 \times 10^6 \times 55.1}{47013.18} \right) \times 10^{-3} = 27.68 \text{ kN}$$

$$\sum N_i = N_1 + N_2 + N_3 = 87.97 + 57.83 + 27.68 = 173.48 \text{ kN}$$

$$N_{ed} = 173.48 \text{ kN} > F_{c,Rd} = 150.36 \text{ kN} \quad (\text{non vérifiée}).$$

On doit prévoir un raidisseur de 14 mm d'épaisseur.

- **Vérification à la résistance de l'âme du poteau dans la zone cisailée**

$$F_v \leq V_{Rd} \quad \text{avec : } V_{Rd} = \frac{0.58 \times f_y \times h \times t_w}{\gamma_{M0}}$$

$$V_{Rd} = \frac{0.58 \times 235 \times 240 \times 6.2 \times 10^{-3}}{1.1} = 184.38 \text{ kN} > F_v = 102.61 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée}).$$

3.6.2. Calcul des bases des poteaux

3.6.2.1. Nœud 1

Le nœud 1 est soumis aux sollicitations suivantes :

$$N_{ed} = 16.68 \text{ kN}, \quad V_{ed} = 19.13 \text{ kN}$$

Données :

Fondation en béton de classe C25/30 : $f_{ck} = 25 \text{ N/mm}^2$, $\gamma_c = 1.5$ (béton).

- **Résistance du béton à la compression**

$$f_{cd} = \frac{\alpha_{cc} \times f_{ck}}{\gamma_c} \quad \text{avec : } \alpha_{cc} = 1 \text{ (valeur recommandée)}$$

$$f_{cd} = \frac{25}{1.5} = 16.7 \text{ N/mm}^2$$

- **Résistance de calcul à l'écrasement du matériau de scellement**

$f_{jd} = \alpha \times \beta_j \times f_{cd}$ avec : $\beta_j = 2/3$ (coefficient du matériau de scellement).

On prend : $\alpha = 1.5 \Rightarrow f_{jd} = 1.5 \times \frac{2}{3} \times 16.7 = 16.7 \text{ N/mm}^2$

- **Estimation de l'aire de la plaque d'assise**

$$A_{C0} = \frac{1}{h_c \times b_{fc}} \times \left(\frac{N_{ed}}{f_{cd}} \right)^2 = \frac{1}{240 \times 120} \times \left(\frac{16.68 \times 10^3}{16.7} \right)^2 = 34.6 \text{ mm}^2$$

$$A_{C0} = \frac{N_{ed}}{f_{cd}} = \frac{16.68 \times 10^3}{16.7} = 998.8 \text{ mm}^2$$

On prend la plus grande des deux valeurs : $A_{C0} = 998.8 \text{ mm}^2$

- **Choix du type de la plaque d'assise**

Dans notre cas le poteau est encastré, d'où nécessité d'une plaque d'assise à projection étendue.

- **Vérification de la résistance de calcul de la plaque d'assise**

- **Calcul de la largeur d'appuis additionnel c**

$$c = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Les expressions de A, B et C sont données en fonction du type de la plaque d'assise selon le tableau 3.4 :

Constante	Plaque d'assise à projection courte	Plaque d'assise à projection étendue	
	Tronçons en T équivalents non recouvrants	Tronçons en T équivalents non recouvrants	Recouvrement anticipé des tronçons en T équivalents
A	2	2	2
B	$-(b_{fc} - t_{wc} + h_c)$	$+(2b_{fc} - t_{wc} + h_c)$	$+(b_{fc} + h_c)$
C	$+(N_{sd}/2f_{jd}) - (2b_{fc}t_{fc} + 4t_{fc}^2 + 0.5h_c t_{wc} - t_{fc}t_{wc})$	$+(b_{fc}t_{fc} + 0.5h_c t_{wc} - t_{fc}t_{wc}) - (N_{sd}/2f_{jd})$	$+(b_{fc}h_c)/2 - (N_{sd}/2f_{jd})$

Tableau 3.4 : Expression des paramètres de l'équation quadratique [10].

$$A = 2$$

$$B = 2b_{fc} - t_{wc} + h_c = 2 \times 120 - 6.2 + 240 = 473.8 \text{ mm}$$

$$C = (b_{fc} \times t_{fc} + 0.5h_c \times t_{wc} - t_{fc} \times t_{wc}) - \left(\frac{N_{ed}}{2f_{jd}} \right)$$

$$C = (120 \times 9.8 + 0.5 \times 240 \times 6.2 - 9.8 \times 6.2) - \left(\frac{16.68 \times 10^3}{2 \times 16.7} \right) = 1359.84 \text{ mm}$$

$$c = \frac{-473.8 - \sqrt{473.8^2 - 4 \times 2 \times 1359.84}}{2 \times 2} = -233.9 \text{ mm}$$

Vu que la valeur de c est négative on doit la calculé autrement, avec la relation suivante :

On posant $t = 15 \text{ mm}$ (épaisseur de la plaque d'assise)

$$c = t \times \left(\frac{f_{yp}}{3f_{jd} \times \gamma_{M0}} \right)^{0.5} = 15 \times \left(\frac{235}{3 \times 16.7 \times 1.1} \right)^{0.5} = 31 \text{ mm}$$

- **Dimension de la plaque d'assise**

$$b_p \geq b_{fc} + 2c = 120 + (2 \times 31) = 182 \text{ mm.}$$

$$h_p \geq h_c + 2c = 240 + (2 \times 31) = 302 \text{ mm.}$$

$$\text{Soit : } b_p = 190 \text{ mm} \quad \text{et} \quad h_p = 310 \text{ mm.}$$

- **Calcul de la section efficace A_{eff}**

$$A_{eff} = A_{C0} = h_p \times b_p = 310 \times 190 = 58900 \text{ mm}^2$$

- **Calcul de la résistance à l'effort axial**

$$N_{ed} \leq N_{Rd}$$

$$N_{Rd} = f_{jd} \times [2 (b_{fc} + 2c) (2c + t_{fc}) + (h_c - 2c - 2t_{fc}) (2c + t_{wc})]$$

$$N_{Rd} = 16.7 \times [2 (120 + 62) (62 + 9.8) + (240 - 62 - 2 \times 9.8) (62 + 6.2)] \times 10^{-3}$$

$$N_{Rd} = 616.87 \text{ kN} > N_{ed} = 16.68 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée}).$$

- **Calcul de la résistance de la plaque d'assise au moment fléchissant**

- **Calcul du moment résistant**

$$M_{Rd} = \frac{t^2 \times f_y}{6 \gamma_{M0}} = \frac{15^2 \times 235}{6 \times 1.1} = 8011.36 \text{ N.mm/mm}$$

- **Calcul du moment de flexion**

$$M_{ed} = \frac{\left(\frac{c^2}{2}\right) \times N_{ed}}{A_{eff}} = \frac{\left(\frac{31^2}{2}\right) \times 16.68 \times 10^3}{58900}$$

$$M_{ed} = 136.07 \text{ n.mm/mm} < M_{Rd} = 8011.36 \text{ N.mm/mm} \quad (\text{vérifiée}).$$

- **Vérification de la résistance au cisaillement du scellement de la plaque d'assise**

$$V_{ed} \leq F_{v,Rd} \quad \text{avec: } F_{v,Rd} = F_{f,Rd} = C_{f,d} \times N_{ed}$$

$$F_{v,Rd} = 0.2 \times 16.68 = 3.34 \text{ kN} < V_{ed} = 19.13 \text{ kN} \quad (\text{non vérifiée}).$$

L'effort de cisaillement sera repris par les tiges d'ancrages.

- **Résistance des tiges d'ancrages au cisaillement**

$$V_{ed} \leq F_{v,Rd} \quad \text{avec : } F_{v,Rd} = F_{f,Rd} + n_b \times F_{vb,Rd}$$

$$F_{f,Rd} = 3.34 \text{ kN}$$

$$F_{vb,Rd} = \frac{\alpha_{cb} \times f_{ub} \times A_s}{\gamma_{M2}} \quad \text{avec: } \alpha_{cb} = 0.44 - 0.0003 \times f_{yb}$$

$$235 \text{ N/mm}^2 \leq f_{yb} \leq 640 \text{ N/mm}^2$$

n_b = nombre de tiges.

Soit 4 tiges M16 classe 4.6.

$$f_{yb} = 240 \text{ N/mm}^2, \quad f_{ub} = 400 \text{ N/mm}^2, \quad A_s = 157 \text{ mm}^2$$

$$F_{vb,Rd} = \frac{(0.44 - 0.0003 \times f_{yb}) \times f_{ub} \times A_s}{\gamma_{M2}} = \frac{(0.44 - 0.0003 \times 240) \times 400 \times 157 \times 10^{-3}}{1.25}$$

$$F_{vb,Rd} = 18.5 \text{ kN}$$

$$F_{v,Rd} = 3.34 + 4 \times 18.5 = 77.34 \text{ kN} > V_{ed} = 19.13 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée}).$$

- **Vérification de la résistance des soudures**

$$M_{Rdsoudures} = F_t \times (h_b - t_{fb}) = 183.3 \times (240 - 9.8) \times 10^{-3}$$

$$= 42.2 \text{ kN.m} > M_{ed} = 27.67 \text{ kN.m} \quad (\text{vérifiée}).$$

$$V_{Rdsoudures} = F_v = 237.44 \text{ kN} > V_{ed} = 19.13 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée}).$$

$$N_{Rdsoudures} = 657.37 \text{ kN} > N_{ed} = 16.68 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée}).$$

- **Calcul de la contrainte d'adhérence f_{bd}**

$$f_{bd} = \frac{0.36 \times \sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} = \frac{0.36 \times \sqrt{25}}{1.5} = 1.2 \text{ N/mm}^2$$

- **Calcul de la longueur totale requise de la tige**

$$l_{b,rqd} = 0.144d \times \frac{f_{ub}}{f_{bd}} = 0.144 \times 16 \times \frac{400}{1.2} = 768 \text{ mm}.$$

3.6.2.2. Nœud 3

Le nœud 1 est soumis aux sollicitations suivantes :

$$N_{ed} = 24.81 \text{ kN}, \quad V_{ed} = 9.34 \text{ kN}$$

- **Estimation de l'aire de la plaque d'assise**

$$A_{C0} = \frac{1}{h_c \times b_{fc}} \times \left(\frac{N_{ed}}{f_{cd}} \right)^2 = \frac{1}{240 \times 120} \times \left(\frac{24.81 \times 10^3}{16.7} \right)^2 = 76.64 \text{ mm}^2$$

$$A_{C0} = \frac{N_{ed}}{f_{cd}} = \frac{24.81 \times 10^3}{16.7} = 1485.63 \text{ mm}^2$$

On prend la plus grande des deux valeurs : $A_{C0} = 1485.63 \text{ mm}^2$

- **Choix du type de la plaque d'assise**

Dans notre cas le poteau est encasté, d'où nécessité d'une plaque d'assise à projection étendue.

- **Vérification de la résistance de calcul de la plaque d'assise**

- **Calcul de la largeur d'appuis additionnel c**

$$c = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$A = 2$$

$$B = 2b_{fc} - t_{wc} + h_c = 2 \times 120 - 6.2 + 240 = 473.8 \text{ mm}$$

$$C = (b_{fc} \times t_{fc} + 0.5h_c \times t_{wc} - t_{fc} \times t_{wc}) - \left(\frac{N_{ed}}{2f_{jd}} \right)$$

$$C = (120 \times 9.8 + 0.5 \times 240 \times 6.2 - 9.8 \times 6.2) - \left(\frac{24.81 \times 10^3}{2 \times 16.7} \right) = 1116.43 \text{ mm}$$

$$c = \frac{-473.8 - \sqrt{473.8^2 - 4 \times 2 \times 1116.43}}{2 \times 2} = -234.5 \text{ mm}$$

Vu que la valeur de c est négative on doit la calculé autrement, avec la relation suivante :

On posant $t = 15 \text{ mm}$ (épaisseur de la plaque d'assise)

$$c = t \times \left(\frac{f_{yp}}{3f_{jd} \times \gamma_{M0}} \right)^{0.5} = 15 \times \left(\frac{235}{3 \times 16.7 \times 1.1} \right)^{0.5} = 31 \text{ mm}$$

- **Dimension de la plaque d'assise**

$$b_p \geq b_{fc} + 2c = 120 + (2 \times 31) = 182 \text{ mm}$$

$$h_p \geq h_c + 2c = 240 + (2 \times 31) = 302 \text{ mm}$$

$$\text{Soit : } b_p = 190 \text{ mm} \quad \text{et} \quad h_p = 310 \text{ mm}$$

- **Calcul de la section efficace A_{eff}**

$$A_{eff} = A_{C0} = h_p \times b_p = 310 \times 190 = 58900 \text{ mm}^2$$

- **Calcul de la résistance à l'effort axial**

$$N_{ed} \leq N_{Rd}$$

$$N_{Rd} = f_{jd} \times [2(b_{fc} + 2c)(2c + t_{fc}) + (h_c - 2c - 2t_{fc})(2c + t_{wc})]$$

$$N_{Rd} = 16.7 \times [2(120 + 62)(62 + 9.8) + (240 - 62 - 2 \times 9.8)(62 + 6.2)] \times 10^{-3}$$

$$N_{Rd} = 616.87 \text{ kN} > N_{ed} = 24.81 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée}).$$

- **Calcul de la résistance de la plaque d'assise au moment fléchissant**

- **Calcul du moment résistant**

$$M_{Rd} = \frac{t^2 \times f_y}{6\gamma_{M0}} = \frac{15^2 \times 235}{6 \times 1.1} = 8011.36 \text{ N.mm/mm.}$$

- **Calcul du moment de flexion**

$$M_{ed} = \frac{\left(\frac{c^2}{2}\right) \times N_{ed}}{A_{eff}} = \frac{\left(\frac{31^2}{2}\right) \times 24.81 \times 10^3}{58900}$$

$$M_{ed} = 215.76 \text{ N.mm/mm} < M_{Rd} = 8011.36 \text{ N.mm/mm} \quad (\text{vérifiée}).$$

- **Vérification de la résistance au cisaillement du scellement de la plaque d'assise**

$$V_{ed} \leq F_{v,Rd} \quad \text{avec: } F_{v,Rd} = F_{f,Rd} = C_{f,d} \times N_{ed} = 0.2 \times 24.81$$

$$F_{v,Rd} = 496 \text{ kN} < V_{ed} = 9.34 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée}).$$

L'effort de cisaillement sera repris par les tiges d'ancrages.

- **Résistance des tiges d'ancrages au cisaillement**

$$V_{ed} \leq F_{v,Rd} \quad \text{avec : } F_{v,Rd} = F_{f,Rd} + n_b \times F_{vb,Rd}$$

$$F_{f,Rd} = 4.96 \text{ kN}$$

$$F_{vb,Rd} = \frac{(0.44 - 0.0003 \times f_{yb}) \times f_{ub} \times A_s}{\gamma_{M2}}$$

$$235 \text{ N/mm}^2 \leq f_{yb} \leq 640 \text{ N/mm}^2.$$

Soit 4 tiges M16 classe 4.6.

$$f_{yb} = 240 \text{ N/mm}^2, \quad f_{ub} = 400 \text{ N/mm}^2, \quad A_s = 157 \text{ mm}^2$$

$$F_{vb,Rd} = \frac{(0.44 - 0.0003 \times 240) \times 400 \times 157 \times 10^{-3}}{1.25} = 18.5 \text{ kN}$$

$$F_{v,Rd} = 4.96 + 4 \times 18.5 = 78.96 \text{ kN} > V_{ed} = 9.34 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée}).$$

- **Vérification de la résistance des soudures**

$$M_{Rdsoudures} = F_t \times (h_b - t_{fb}) = 183.3 \times (240 - 9.8) \times 10^{-3}$$

$$= 42.2 \text{ kN.m} > M_{ed} = 23.2 \text{ kN.m} \quad (\text{verifiée}).$$

$$V_{Rdsoudures} = F_v = 237.44 \text{ kN} > V_{ed} = 9.34 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée}).$$

$$N_{Rdsoudures} = 657.37 \text{ kN} > N_{ed} = 24.81 \text{ kN} \quad (\text{vérifiée}).$$

- **Calcul de la longueur totale requise de la tige**

$$l_{b,rqd} = 0.144d \times \frac{f_{ub}}{f_{bd}} = 0.144 \times 16 \times \frac{400}{1.2} = 768 \text{ mm}.$$

3.7. Conclusion

A travers ce chapitre nous avons fait des calculs et des vérifications sous les différentes sollicitations et ces dernières peuvent engendrer plusieurs phénomènes comme la flexion, le cisaillement, le flambement, le déversement, ...etc.

Ces derniers sont vérifiés à partir des lois de l'Eurocode 3.

Chapitre 4 : Analyse fiabiliste d'un portique en charpente métallique

4.1.Introduction

Les données relatives aux structures de génie civil (actions appliquées, propriétés des matériaux, géométrie) présentent des incertitudes de nature aléatoire. De même, les hypothèses simplificatrices retenues dans la conception de ces structures, les approximations nécessaires à leur modélisation et les coefficients de sécurité conduisent à des incertitudes, qui amplifient celles liées aux données et au comportement du système mécanique. Ces données constituent donc des variables aléatoires.

La simulation probabiliste est incontournable lorsqu'il s'agit de gérer des phénomènes aléatoires, elle permet d'aborder cette discipline réputée théorique et ardue, par la voie de l'expérimentation.

4.2.Définition de la simulation probabiliste

La simulation est une méthode de mesure et d'étude consistant à remplacer un phénomène ou un système par un modèle plus simple mais ayant un comportement analogue. Le système ou phénomène analysé peut être schématisé sous forme d'un modèle mécanique.

La simulation probabiliste est un outil important pour traiter des expériences aléatoires, elle permet d'expliquer le déroulement de celles-ci et d'aborder des problèmes compliqués par le biais d'une démarche expérimentale.

4.3.Estimation de la probabilité de défaillance

Pour la simulation, nous avons mis en place un outil de calcul sous Matlab ; qui nous permettra d'effectuer tous les calculs nécessaires afin d'aboutir à la probabilité de défaillance de notre structure.

4.4.Introduction a Matlab

Matlab « matrix laboratory » est un langage de programmation utilisé à des fins de calcul numérique développé par la société The MathWorks. Le logiciel Matlab constitue un système interactif et convivial de calcul numérique et de visualisation graphique. Destiné aux ingénieurs, aux techniciens et aux scientifiques, c'est un outil très utilisé, dans les universités comme dans le monde industriel, qui intègre certaines fonctions mathématiques et d'analyse numérique (calcul matriciel, traitement de signal, traitement d'images, visualisations graphiques, etc.).

4.5.Génération de nombre aléatoire

Pour les besoins de la simulation nous utilisons un generateur de variables aléatoire. Ainsi plusieurs échantillons sont ainsi obtenus pour chaque paramètre de notre structure, choisi comme variable aléatoire. Chaque paramètre suit une loi de distribution avec une moyenne et un écart type.

4.6. Organigramme de calcul

L'organigramme ci-dessous, illustre la procédure de calcul de la probabilité de défaillance par la méthode de Monte Carlo.

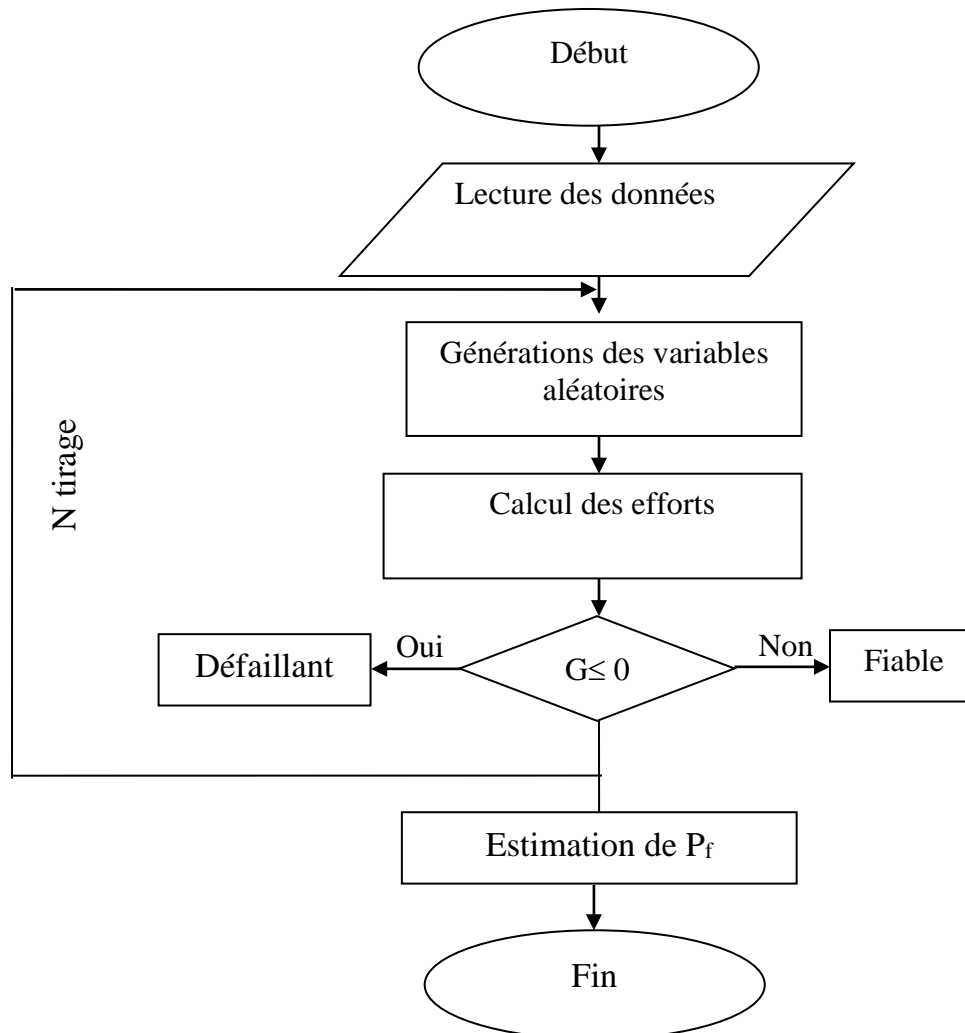


Figure 4.1 : Organigramme de calcul de la probabilité de défaillance
Méthode de Monte Carlo

4.7. Choix des variables aléatoires

La modélisation du comportement du portique est affectée par de nombreuses incertitudes, dont il est difficile d'estimer quantitativement les variabilités associées.

Les sources d'incertitudes retenues dans notre étude sont relatives aux charges appliquées. Reste donc à préciser leur loi de distribution : étant donné que l'on

travaille avec des données issues de la littérature qui portent sur des valeurs moyennes, il semble plus pertinent de recourir à la loi normale qui fournit les proportions de valeurs comprises dans des intervalles centrés sur la moyenne.

4.8.Choix de la fonction d'état limite

La notion de probabilité (mode) de défaillance est étroitement liée à la notion de fonction d'état limite(ou fonction de défaillance) G . Alors, si l'on désire estimer la probabilité de défaillance de notre portique, nous devons définir l'état limite au-delà duquel le système physique n'est plus considéré comme fiable (stable). Ces états limites correspondent principalement à des exigences en termes de tenue mécanique (la défaillance est associée à la ruine du système étudié) ou d'aptitude au service (la défaillance est associée à des dépassements excessifs de la capacité).

Pour définir cette fonction d'état limite, nous devons considérés le comportement mécanique de notre portique. Autrement dit, nous devons identifiées tous les modes de rupture possibles. Pour chaque mode de rupture, il faudra définir une fonction d'état limite G .

$$G = R - S$$

Avec :

R : une caractéristique de résistance ;

S : une donnée relative à la sollicitation appliquée.

Ainsi, en considérant le comportement mécanique du portique, nous pouvons définir les différents modes de rupture suivants :

- Rupture par effort tranchant (barre 1-2) :

$$V_{ed} \leq V_{pl,Rd} \rightarrow G1$$

- Rupture par moment fléchissant (barre 1-2) :

$$M_{ed} \leq M_{pl,Rd} \rightarrow G2$$

- Rupture par effort normal (barre 1-2) :

$$N_{ed} \leq N_{pl,Rd} \rightarrow G3$$

- Rupture par incidence de l'effort tranchant avec le moment fléchissant (barre 1-2) :

$$V_{ed} \leq 0.5V_{pl,Rd} \rightarrow G4$$

- Rupture par incidence de l'effort normal avec le moment fléchissant (barre 1-2) :

$$\frac{N_{ed}}{N_{pl,Rd}} \leq 0.25 \quad \text{et} \quad N_{ed} \leq 0.5 \times \frac{h_w \times t_w \times f_y}{\gamma_{M0}} \rightarrow G5$$

- Rupture par flambement (barre 1-2) :

$$\frac{N_{ed}}{\chi_{min} \times N_{pl,Rd}} + \frac{K_y \times M_{y,ed}}{M_{pl,Rd}} \leq 1 \rightarrow G6$$

- Rupture par déversement (barre 1-2):

$$\frac{N_{ed}}{\chi_z \times N_{pl,Rd}} + \frac{K_{LT} \times M_{y,ed}}{\chi_{LT} \times M_{pl,Rd}} \leq 1 \rightarrow G7$$

- Rupture par effort tranchant (barre 2-4) :

$$V_{ed} \leq V_{pl,Rd} \rightarrow G8$$

- Rupture par moment fléchissant (barre 2-4) :

$$M_{ed} \leq M_{pl,Rd} \rightarrow G9$$

- Rupture par effort normal (barre 2-4) :

$$N_{ed} \leq N_{pl,Rd} \rightarrow G10$$

- Rupture par incidence de l'effort tranchant avec le moment fléchissant (barre 2-4) :

$$V_{ed} \leq 0.5 V_{pl,Rd} \rightarrow G11$$

- Rupture par incidence de l'effort normal avec le moment fléchissant (barre 2-4) :

$$\frac{N_{ed}}{N_{pl,Rd}} \leq 0.25 \quad \text{et} \quad N_{ed} \leq 0.5 \times \frac{h_w \times t_w \times f_y}{\gamma_{M0}} \rightarrow G12$$

- Rupture par flambement (barre 2-4) :

$$\frac{N_{ed}}{\chi_{min} \times N_{pl,Rd}} + \frac{K_y \times M_{y,ed}}{M_{pl,Rd}} \leq 1 \rightarrow G13$$

- Rupture par déversement (barre 2-4):

$$\frac{N_{ed}}{\chi_z \times N_{pl,Rd}} + \frac{K_{LT} \times M_{y,ed}}{\chi_{LT} \times M_{pl,Rd}} \leq 1 \rightarrow G14$$

- Rupture par flèche (barre 2-4):

$$f \leq f_{adm} \rightarrow G15$$

- Rupture par effort tranchant (barre 3-4) :

$$V_{ed} \leq V_{pl,Rd} \rightarrow G16$$

- Rupture par moment fléchissant (barre 3-4) :

$$M_{ed} \leq M_{pl,Rd} \rightarrow G17$$

- Rupture par effort normal (barre 3-4) :

$$N_{ed} \leq N_{pl,Rd} \rightarrow G18$$

- Rupture par incidence de l'effort tranchant avec le moment fléchissant (barre 3-4) :

$$V_{ed} \leq 0.5V_{pl,Rd} \rightarrow G19$$

- Rupture par incidence de l'effort normal avec le moment fléchissant (barre 3-4) :

$$\frac{N_{ed}}{N_{pl,Rd}} \leq 0.25 \quad \text{et} \quad N_{ed} \leq 0.5 \times \frac{h_w \times t_w \times f_y}{\gamma_{M0}} \rightarrow G20$$

- Rupture par flambement (barre 3-4) :

$$\frac{N_{ed}}{\chi_{min} \times N_{pl,Rd}} + \frac{K_y \times M_{y,ed}}{M_{pl,Rd}} \leq 1 \rightarrow G21$$

- Rupture par déversement (barre 3-4):

$$\frac{N_{ed}}{\chi_z \times N_{pl,Rd}} + \frac{K_{LT} \times M_{y,ed}}{\chi_{LT} \times M_{pl,Rd}} \leq 1 \rightarrow G22$$

- Rupture par pression diamétrale de l'assemblage (nœud 2):

$$V_{ed} \leq F_{b,Rd} \rightarrow G23$$

- Rupture par glissement de l'assemblage (nœud 2) :

$$V_{ed} \leq F_{s,Rd} \rightarrow G24$$

- Rupture par cisaillement et traction de l'assemblage (nœud 2) :

$$V_{ed} \leq F_{s,Rd} \rightarrow G25$$

- Rupture par moment fléchissant (nœud 2) :

$$M_{ed} \leq M_{Rd} \rightarrow G26$$

- Rupture par effort tranchant (nœud 2) :

$$V_{ed} \leq V_{Rd} \rightarrow G27$$

- Rupture par traction de l'âme du poteau (nœud 2) :

$$F_v \leq F_{t,Rd} \rightarrow G28$$

- Rupture par compression de l'âme du poteau (nœud 2) :

$$N_{ed} \leq F_{c,Rd} \rightarrow G29$$

- Rupture par cisaillement de l'âme du poteau (nœud 2) :

$$F_v \leq V_{Rd} \rightarrow G30$$

- Rupture par moment fléchissant (soudures au nœud 2) :

$$M_{ed} \leq M_{Rd \text{ soudure}} \rightarrow G31$$

- Rupture par effort tranchant (soudures au nœud 2) :

$$V_{ed} \leq V_{Rd \text{ soudure}} \rightarrow G32$$

- Rupture par effort axial (soudures au nœud 2) :

$$N_{ed} \leq N_{Rd \text{ soudure}} \rightarrow G33$$

- Rupture par pression diamétrale de l'assemblage (nœud 4):

$$V_{ed} \leq F_{b,Rd} \rightarrow G34$$

- Rupture par glissement de l'assemblage (nœud 4) :

$$V_{ed} \leq F_{s,Rd} \rightarrow G35$$

- Rupture par cisaillement et traction de l'assemblage (nœud 4) :

$$V_{ed} \leq F_{s,Rd} \rightarrow G36$$

- Rupture par moment fléchissant (nœud 4) :

$$M_{ed} \leq M_{Rd} \rightarrow G37$$

- Rupture par effort tranchant (nœud 4) :

$$V_{ed} \leq V_{Rd} \rightarrow G38$$

- Rupture par traction de l'âme du poteau (nœud 4) :

$$F_v \leq F_{t,Rd} \rightarrow G39$$

- Rupture par compression de l'âme du poteau (nœud 4) :

$$N_{ed} \leq F_{c,Rd} \rightarrow G40$$

- Rupture par cisaillement de l'âme du poteau (nœud 4) :

$$F_v \leq V_{Rd} \rightarrow G41$$

- Rupture par moment fléchissant (soudures au nœud 4) :

$$M_{ed} \leq M_{Rd \text{ soudure}} \rightarrow G42$$

- Rupture par effort tranchant (soudures au nœud 4) :

$$V_{ed} \leq V_{Rd \text{ soudure}} \rightarrow G43$$

- Rupture par effort axial (soudures au nœud 4) :

$$N_{ed} \leq N_{Rd \text{ soudure}} \rightarrow G44$$

- Rupture par effort axial (nœud 1) :

$$N_{ed} \leq N_{Rd} \rightarrow G45$$

- Rupture par moment fléchissant (nœud 1) :

$$M_{ed} \leq M_{Rd} \rightarrow G46$$

- Rupture par cisaillement du scellement de la plaque d'assise (nœud 1) :

$$V_{ed} \leq F_{v,Rd} \rightarrow G47$$

- Rupture par cisaillement des tiges d'encrage (nœud 1):

$$V_{ed} \leq F_{v,Rd} \rightarrow G48$$

- Rupture par moment fléchissant (soudures au nœud 1) :

$$M_{ed} \leq M_{Rd \text{ soudure}} \rightarrow G49$$

- Rupture par effort tranchant (soudures au nœud 1) :

$$V_{ed} \leq V_{Rd \text{ soudure}} \rightarrow G50$$

- Rupture par effort axial (soudures au nœud 1) :

$$N_{ed} \leq N_{Rd \text{ soudure}} \rightarrow G51$$

- Rupture par effort axial (nœud 3) :

$$N_{ed} \leq N_{Rd} \rightarrow G52$$

- Rupture par moment fléchissant (nœud 3) :

$$M_{ed} \leq M_{Rd} \rightarrow G53$$

- Rupture par cisaillement du scellement de la plaque d'assise (nœud 3) :

$$V_{ed} \leq F_{v,Rd} \rightarrow G54$$

- Rupture par cisaillement des tiges d'encrage (nœud 3):

$$V_{ed} \leq F_{v,Rd} \rightarrow G55$$

- Rupture par moment fléchissant (soudures au nœud 3) :

$$M_{ed} \leq M_{Rd \text{ soudure}} \rightarrow G56$$

- Rupture par effort tranchant (soudures au nœud 3) :

$$V_{ed} \leq V_{Rd \text{ soudure}} \rightarrow G57$$

- Rupture par effort axial (soudures au nœud 3) :

$$N_{ed} \leq N_{Rd \text{ soudure}} \rightarrow G58$$

4.9. Résultats de l'analyse fiabiliste

L'analyse fiabiliste consiste à étudier l'effet de la variabilité des paramètres d'entrée d'un système mécanique sur sa réponse ; flèche, contrainte,etc.

Dans ce qui suit, on présentera quelques résultats issus des différentes simulations effectuées.

4.9.1. Variabilité des paramètres d'entrée

Les variables d'entrée considérées comme aléatoires sont représentées dans le tableau suivant :

Paramètres	Loi de distribution	Moyenne	Ecart type
Charge permanente G (kN/ml)	Normal	2.5	10%
Neige S (kN/ml)	Normal	3	10%
Vent W (kN/ml)	Normal	3.5	10%

Tableau 4.1 : Variables aléatoires et loi de distribution des paramètres

Ainsi sur les figures 2 à 4, nous représentons la distribution de ces trois paramètres aléatoires.

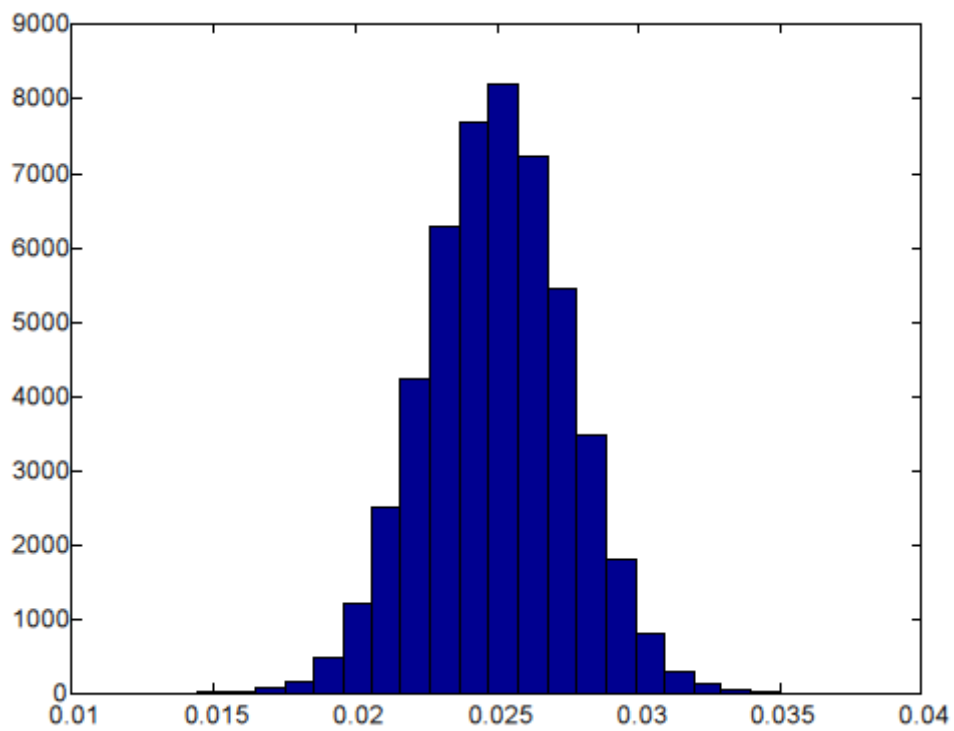


Figure 4.2 : Distribution de la charge permanente

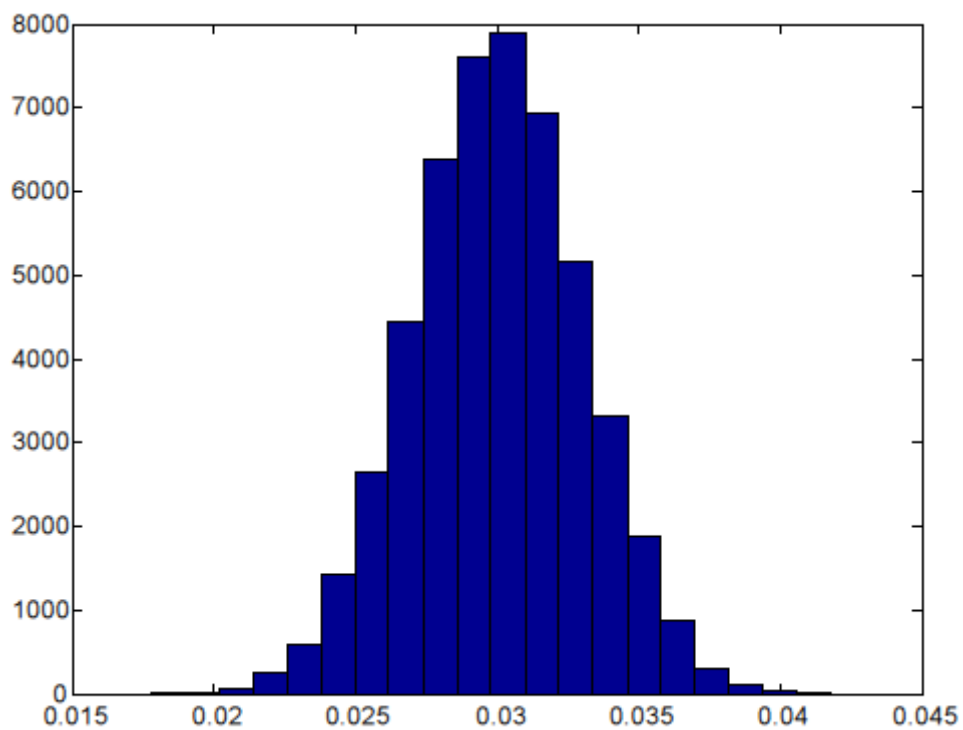


Figure 4.3 : Distribution de la neige

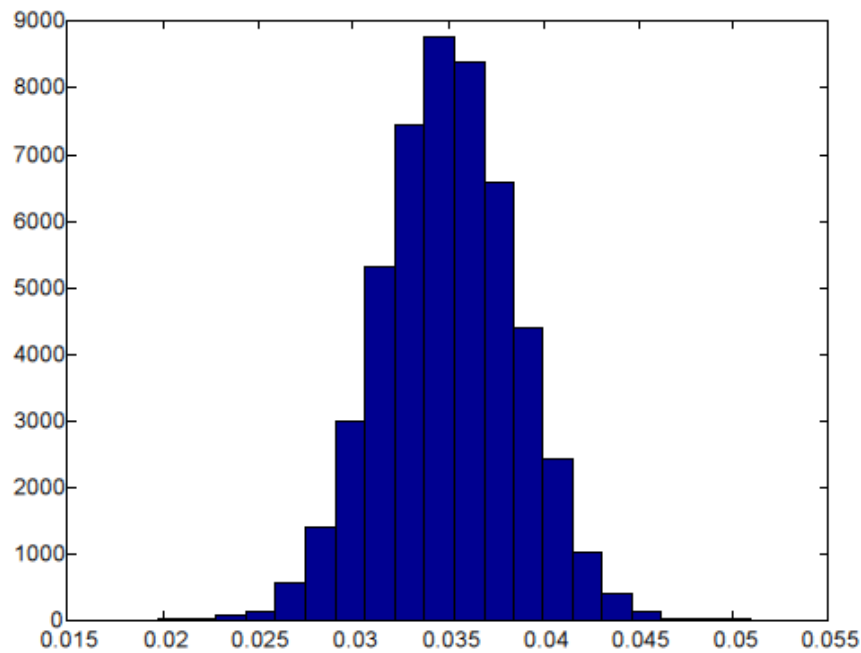


Figure 4.4 : Distribution du vent

4.9.2. Evolution de la probabilité de défaillance en fonction du nombre de tirage

L'utilisation de la méthode de Monte Carlo nécessite un certain nombre de tirage. Ainsi nous présentons dans le tableau ci-dessous l'évolution de la probabilité de défaillance en fonction du nombre de tirage.

Critères	Ntirages			
	5000	10000	50000	100000
6	0.9998	0.9999	1	1
7	0.9998	0.9999	1	1
13	0.9998	0.9999	1	1
14	0.9998	0.9999	1	1
21	0.9998	0.9999	1	1
22	0.9998	0.9999	1	1
24	0.0202	0.0189	0.0200	0.0207
25	0.4302	0.4186	0.4229	0.4238
27	0.0202	0.0189	0.0200	0.0207
29	0.9030	0.9072	0.9053	0.9051
37	0.0984	0.1024	0.0996	0.0987
39	0.9998	1	1	1
40	0.9930	0.9926	0.9923	0.9924
47	1	1	1	1
54	1	1	1	1

Tableau 4.2 : Probabilités de défaillance en fonction de nombre de tirage

Selon les critères 6, 7, 13, 14, 21, 22, 39, nous constatons qu'à partir de 50 000 tirages la probabilité de défaillance tend à se stabiliser (convergence).

4.9.3. Evolution de la probabilité de défaillance

Sur le tableau ci-dessous nous présentons l'évolution de la probabilité de défaillance du portique et ce en considérant les différents critères de rupture indiqués précédemment (avec 10% d'écart type). Le but de cette procédure est de mettre en évidence le critère le plus sévère qui conduit à la rupture de notre structure.

Critères	Probabilité de défaillance
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	1
7	1
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0
13	1
14	1
15	0
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0
21	1
22	1
23	0
24	0.0200
25	0.4229
26	0
27	0.0200
28	0
29	0.9053
30	0
31	0
32	0
33	0

34	0
35	0
36	0
37	0.0996
38	0
39	1
40	0.9923
41	0
42	0
43	0
44	0
45	0
46	0
47	1
48	0
49	0
50	0
51	0
52	0
53	0
54	1
55	0
56	0
57	0
58	0

Tableau 4.3 : Evolution de la probabilité de défaillance selon les différents critères

En analysant les résultats du tableau 4.3 nous constatons que les critères 6, 7, 13, 14, 21, 22, 39, 47, 54 sont plus susceptible de causer une rupture de la structure.

Remarque : les critères 39 et 40 (Rupture par traction de l'âme du poteau respectivement des nœuds 2 et 4) et les critères 47 et 54 (Rupture par cisaillement du scellement de la plaque d'assise respectivement des nœuds 1 et 3) présentent une probabilité de défaillance si élevé parce que c'est des critères qui ne sont pas vérifiés dans le calcul déterministe.

Pour les critères 39 et 40 on prévoit des raidisseurs et pour les deux autres les efforts de cisaillement seront repris par les tiges d'ancrages.

4.9.4. Effet de la variabilité (écart type) sur la probabilité de défaillance

L'analyse de cette variabilité permet d'identifier les paramètres dont il faudra contrôler au mieux la valeur. Pour ce fait, on a augmenté l'écart type de chaque variable aléatoire de 20% puis de 30% et on a calculé la probabilité de défaillance selon chaque critère.

Critères	Ntirages=50000		
	Cv=10%	Cv=20%	Cv=30%
6	1	0.9911	0.9427
7	1	0.9911	0.9832
13	1	0.9971	0.9652
14	1	0.9990	0.9800
18	0	0	2.0000e-005
21	1	1	0.9953
22	1	1	0.9966
24	0.0200	0.1503	0.2507
25	0.4229	0.4612	0.4763
26	0	0.0180	0.0844
27	0.0200	0.1503	0.2507
29	0.9053	0.7594	0.7025
37	0.0996	0.2753	0.3714
39	1	0.9738	0.9060
40	0.9923	0.8954	0.8128
41	0	0	7.4000e-004
42	0	0	9.0000e-004
47	1	0.9999	0.9897
49	0	0.0085	0.0562
54	1	1	0.9990

Tableau 4.4 : effet de la variabilité sur la probabilité de défaillance selon les différents critères

Le tableau 4.4 montre l'évolution de la probabilité de défaillance en fonction de l'écart type. Nous constatons que lorsque l'écart type augmente la probabilité de défaillance augmente si elle est inférieure à 0.5 selon les critères 15, 18, 24, 25, 26, 27, 37, 41, 42, 49 et elle diminue si elle est supérieure à 0.5 comme le montre les critères 6, 7, 13, 14, 21, 22, 29, 39, 40, 47, 54.

4.9.5. Effet de la moyenne sur la probabilité de défaillance

L'analyse de la variation des valeurs moyennes permettent de savoir sur quels paramètres il est intéressant de jouer en priorité pour obtenir une structure plus fiable.

Dans le but de mettre en évidence l'effet de chaque paramètre sur la probabilité de défaillance, nous présentons l'évolution de cette probabilité de défaillance en faisant varier la valeur de la moyenne de chaque paramètre séparément de 10%.

C-à-d. :

1. On augmente la moyenne Gm de 10% et on garde les moyennes initiales de Nm et Vm ;
2. On augmente la moyenne Nm de 10% et on garde les moyennes initiales de Gm et Vm ;
3. On augmente la moyenne Vm de 10% et on garde les moyennes initiales de Gm et Nm.

Critères	Ntirages=50000								
	Gm=0.025+10%			Nm=0.03+10%			Vm=0.035+10%		
	Cv=10%	Cv=20%	Cv=30%	Cv=10%	Cv=20%	Cv=30%	Cv=10%	Cv=20%	Cv=30%
6	1	0.9949	0.9571	1	0.9953	0.9585	1	0.9934	0.9494
7	1	0.9994	0.9872	1	0.9995	0.9873	1	0.9994	0.9867
13	1	0.9970	0.9681	1	0.9971	0.9703	1	0.9983	0.9754
14	1	0.9991	0.9821	1	0.9991	0.9844	1	0.9995	0.9856
15	0	0	6.2e-004	0	0	9.8e-004	0	0	2.4e-004
18	0	0	2e-005	0	0	1.8e-004	0	0	0.0004
21	1	1	0.9968	1	0.9999	0.9967	1	1	0.9965
22	1	1	0.9975	1	1	0.9975	1	1	0.9974
24	0.0766	0.2412	0.3184	0.1127	0.2762	0.3432	0.0100	0.1248	0.2231
25	0.6505	0.5804	0.5526	0.7158	0.6154	0.5770	0.3883	0.4478	0.4647
26	6e-005	0.0355	0.1099	2e-004	0.0433	0.1215	0	0.0105	0.0621
27	0.0766	0.2412	0.3184	0.1127	0.2762	0.3432	0.0100	0.1248	0.2231
28	0	0	2e-005	0	0	2e-005	0	0	2e-005
29	0.9478	0.8053	0.7299	0.9573	0.8170	0.7406	0.9777	0.8591	0.7779
37	0.1766	0.3301	0.4092	0.2101	0.3489	0.4239	0.3344	0.4364	0.4929
39	1	0.9807	0.9206	1	0.9822	0.9261	1	0.9861	0.9331
40	0.9966	0.9197	0.8359	0.9975	0.9258	0.8437	0.9988	0.9425	0.8645
41	0	0	6.6e-004	0	0	8e-004	0	6e-005	0.0049
42	0	0	7.2e-004	0	0	8.6e-004	0	6e-005	0.0053
47	1	0.9998	0.9891	1	0.9998	0.9900	1	0.9999	0.9930
49	0	0.0073	0.0544	0	0.0071	0.0529	3.2e-004	0.0423	0.1277
54	1	1	0.9989	1	1	0.9989	1	1	0.9990
56	0	0	4e-005	0	0	0	0	0	8e-005

Tableau 4.5 : effet de la moyenne sur la probabilité de défaillance selon les différents critères.

Critères	Référence	Gm+10%	Nm+10%	Vm+10%
24	0,02	0,0766	0,1127	0,01
25	0,4229	0,6505	0,7158	0,3883
27	0,02	0,0766	0,1127	0,01
29	0,9053	0,9478	0,9573	0,9777
37	0,0996	0,1766	0,2101	0,3344
40	0,9923	0,9966	0,9975	0,9988

Tableau 4.6 : Evolution de la probabilité de défaillance en fonction de la valeur moyenne.

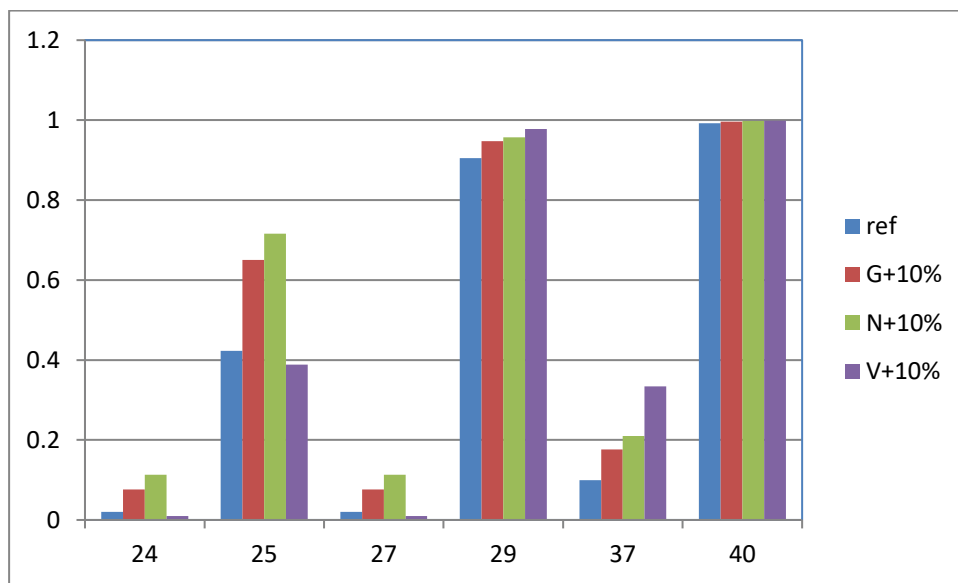


Figure 4.5 : Evolution de la probabilité de défaillance en fonction de la valeur moyenne.

A travers cette figure nous constatons l'effet de la valeur moyenne sur la probabilité de défaillance selon quelques critères. A titre d'exemple, concernant le critère 25 l'effet de la valeur moyenne de la neige et du poids propre est plus important que celui du vent. Ajouter à cela le vent joue dans ce cas un rôle de résistance puisque son augmentation diminue la probabilité de défaillance. Concernant le critère 40, nous constatons que l'effet est moindre si ce n'est faible. Ainsi cette démarche permet d'identifier et de quantifier l'effet de la valeur moyenne des paramètres.

4.9.6. Effet de la loi de distribution sur la probabilité de défaillance

Critères	Probabilité de défaillance	
	Loi normale	Loi log normale
6	1	1
7	1	1
13	1	1
14	1	1
21	1	1
22	1	1
24	0.0200	0.0260
25	0.4229	0.4108
27	0.0200	0.0260
29	0.9053	0.9099
37	0.0996	0.1016
39	1	1
40	0.9923	0.9955
47	1	1
49	0	6.0000e-005
54	1	1

Tableau 4.7 : Effet de la loi de distribution sur la probabilité de défaillance

On constate que le choix de la loi de distribution a une influence sur la probabilité de défaillance. Cette influence est légère dans l'exemple traité mais elle peut être autre pour un autre exemple. Nous constatons aussi que la probabilité de défaillance est supérieure dans le cas de la loi log normal.

4.9.7. Effet des coefficients de sécurité

Nous avons indiqués précédemment que dans l'approche déterministe, la prise en compte des incertitudes sur les paramètres d'une structure donnée est effectuée par l'introduction de coefficients de sécurité. Afin de mettre en évidence l'effet de ces coefficients de sécurité nous avons déterminé la probabilité de défaillance en introduisant ces coefficients. Les résultats ainsi obtenus sont présentés dans le tableau suivant :

Critères	Probabilité de défaillance		Différence
	Avec coefficient de sécurité	Sans coefficient de sécurité	
6	1	0.0126	0.9874
7	1	0.2880	0.7120
13	1	0.9456	0.0544
14	1	0.9938	6.2000e-003
21	1	0.9482	0.0518
22	1	0.9677	0.0323
24	0.0200	0	0.0200
25	0.4229	0	0.4223
27	0.0200	0	0.0200
29	0.9053	0	0.9053
37	0.0996	0	0.0996
39	1	0	1
40	0.9923	0	0.9923
47	1	1	0
54	1	1	0

Tableau 4.8 : Effet des coefficients de sécurité sur la probabilité de défaillance

A travers le tableau nous constatons que l'introduction des coefficients de sécurité a pour résultat l'augmentation de la probabilité de défaillance et ce pour une même valeur de la force appliquée.

4.9.8. Optimisation

Optimiser: permettre d'obtenir le meilleur résultat possible par une action adaptée.

L'analyse fiabiliste constitue un outil d'aide à la décision. En effet si l'on désire obtenir une probabilité de défaillance donnée il suffit de modifier un ou plusieurs paramètres.

Dans le cadre de cette étude, on se permet de modifier les paramètres de notre système mécanique pour une valeur de la probabilité de défaillance exigée.

Nous présentons dans le tableau ci-dessous les résultats de la probabilité de défaillance pour différents profilés :

Critères	IPE 240	IPE 270	IPE 300	IPE 330
6	1	0.9871	0.4081	0.0297
7	1	0.9996	0.7765	0.1347
13	1	1	0.9964	0.9573
14	1	1	0.9988	0.9754
21	1	1	0.9999	0.9967
22	1	1	1	0.9987
26	0	2.0000e-005	0	0
29	0.9053	0.4351	0.0212	0
39	1	0.9096	0.0507	0
40	0.9923	0.8555	0.2283	0.0025
47	1	1	1	1
54	1	1	1	1

Tableau 4.9 : Probabilité de défaillance pour différent profilés

Les résultats obtenus dans le tableau ci-dessus nous montre bien la diminution de la probabilité de défaillance en augmentant les caractéristique géométriques et mécaniques des éléments de la structure.

4.10. Conclusion

A travers ce chapitre nous avons présenté les différentes étapes à suivre pour obtenir les valeurs de la probabilité de défaillance d'une structure à savoir un portique en charpente métallique.

Les résultats ont montrés que la rupture dans les éléments du portique est causée principalement par le flambement et le déversement.

Conclusion générale

Le travail exposé dans ce projet a porté sur les approches probabilistes appliquées aux structures métalliques. Cette approche nous a permis d'identifier la probabilité de défaillance de chaque élément en considérant les différents chargements comme variables aléatoires.

Il s'est avéré que le flambement et le déversement sont les deux phénomènes qui présente la probabilité de défaillance la plus élevée par conséquent plus de danger pour la stabilité du portique.

La majoration des charges et l'introduction des coefficients de sécurité a une grande influence sur la probabilité de défaillance vue la différence entre les résultats obtenus lors de la comparaison entre les deux cas (avec et sans coefficients de sécurité) et on a remarqué que cette différence est supérieur à 90% selon quelques critères, ce qui est logique, car la majoration des charges nous donne automatiquement des efforts plus importants, en plus des coefficient des sécurité, on aura une résistance plus faible que la résistance réel des éléments.

L'écart type et la moyenne présentent aussi une influence sur la probabilité de défaillance. D'autres critères ont un effet positif ou négatif sur cette dernière.

Bibliographie

- [1] M. Lemaire, Structural Reliability. ISTE/ Wiley, 2009.
- [2] ADIL.FAHSI, Application des techniques de fiabilité pour l'estimation des incertitudes des résultats de simulations numérique en hydrodynamique des rivières, Ecole de technologie supérieure, université du Québec, 2009.
- [3] Eurocode3, les normes Européennes de conception, de dimensionnement et de justification des structures de bâtiment et de génie civil.
- [4] Freudenthal, A., The safety of structures, Transactions ASCE. 1947.
- [5] Hocine DEHMOUS, Fiabilité et micromécanique des matériaux composites. Application à la passerelle de Laroin, Institut National Polytechnique de Toulouse. Ecole doctorale Matériaux - Structure – Mécanique, 2007.
- [6] Lyonnet P., Ingénierie de la fiabilité, Ed. Tec & Doc, Lavoisier, Paris, 2006.
- [7] ministère de l'écologie et du développement, Direction de la Prévention des pollutions et des risques - Sous-direction de la Prévention des risques majeurs, juin 2004.
- [8] Maynadier J., Approches statistiques et fiabilistes en dynamique des structures, thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 2003.
- [9] Madsen, H.O., S. Krenk and N.C. Lind, Methods of structural safety, Dover Publications, 1986.
- [10] Lahlou DAHMANI. Calcul des Eléments de construction Métallique selon l'Eurocode 3, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2012.
- [11] Aram Samikian, analyse et calcul des structures, gaetan morin éditeur ltée, 1994.

