



RESUME DE MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : GENIE MECANIQUE

Option : THERMOFLUIDES

Thème :

**SIMULATION NUMERIQUE DES
TRANSFERTS THERMIQUES ET
MASSIQUES DANS UN SOL NON
SATURE.**

Présenté par :

Noura BELKAID

Devant le jury composé de :

Noms et Prénoms	Grade	Lieu d'exercice	Qualité
M. KESSAL Mohand	Professeur	UMB Boumerdes	Président
M. MAKHLOUF Saïd	Maître de conférences A	UMMTO	Rapporteur
M. AISSANI Slimane	Professeur	UMB Boumerdes	Examineur
M. BOUTOUDJ Mohand Saïd	Maître de conférences A	UMMTO	Examineur
M. LAMROUS Nacer	Chargé de recherche	ENPEI Rouiba	Invité

Soutenu le : 21/05 /2011

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer mes remerciements et ma profonde reconnaissance à M. Saïd MAKHLOUF, Maître de conférences A, à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, qui est à l'origine de ce sujet. Ses idées et ses conseils ont été de grande valeur pour l'aboutissement de ce mémoire.

Je traduis par la même occasion ma reconnaissance à M. Nacer LAMROUS Chargé de recherche à l'université de Tizi-Ouzou, pour son aide permanente, pour les documents qu'il a mis à ma disposition et d'appréciables contributions, et surtout pour ses précieux conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer.

Mes sincères remerciements vont aussi à M. Moh DAHMANI, Maître de conférence B, à l'université de Tizi-Ouzou, de m'avoir aidé et initié à la programmation sous Matlab et pour sa grande patience. Qu'il trouve ici l'expression de ma très vive reconnaissance.

Je remercie également tous les membres du jury pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce mémoire. Qu'ils trouvent ici l'expression de mon profond respect.

Je n'oublie pas de remercier le personnel du service de la station météorologique de Tizi-Ouzou, pour leur disponibilité à me remettre toutes les données dont j'ai besoin.

J'adresse mes remerciements aux enseignants, bibliothécaires et administrateurs de l'institut de génie mécanique, au personnel du laboratoire de Mécanique Structure Et Energétique LMSE, à tous ceux qui ont contribué à ma formation et à tous ceux m'ont accompagnée amis et proches de près ou de loin ces dernières années.

SOMMAIRE

PAGE

Sommaire

Nomenclature

Introduction Générale.....	1
-----------------------------------	----------

Chapitre I :Généralités

Introduction.....	3
1 Caractéristiques physiques des sols	3
1.1. Origine du sol.....	3
1.2. Représentation physique d'un sol.....	3
1.3. Classification et caractères principaux des sols	4
1.3.a. Les sols grenus.....	4
1.3.b. Les limons (ou Silts).....	5
1.3.c. Les argiles.....	5
2. Caractéristiques hydrauliques des sols.....	6
2.1. L'état hydrique des sols	6
2.2. Les formes d'eau dans le sol.....	6
a) l'eau libre	7
b) l'eau capillaire :.....	7
c) l'eau hygroscopique et l'eau d'hydratation.....	7
2.3. Notion de potentiel de l'eau du sol.....	8
2.4. Géométrie de la phase liquide.....	9
2.4.a. Interface entre 2 fluides : l'eau et l'air.....	9
2.4.b. La rétention capillaire.....	10
3. Volume élémentaire représentatif.....	12
4. Variables descriptives fondamentales.....	12
4.1. Notion de porosité.....	13
4.2. Saturation.....	13
4.3. La teneur en eau	13
4.4. Saturation en fonction de la teneur en eau.....	14
5. Les différentes échelles d'observation.....	14

Chapitre II :Etude bibliographique

1. 1- Premières littéraires.....	16
2. D'autres approches de modélisation.....	17
2-1. Modèle basé sur l'équation de Richards.....	17
2.2. Le modèle diphasique et le modèle par écoulement fractionnel	18
2.3. Une modélisation incluant la pression capillaire dynamique	18
2.4. La modification du modèle de van Genuchten	19

2.5. Modélisation d'un milieu diphasique déformable.....	19
3. Modèle capillaro-poreux (milieu non déformable)	20
4. Modèles macroscopiques à composante unique	20
5. Les relations constitutives	21
5.1. La courbe de rétention d'eau	21
5.2. La pression capillaire.....	22
5.3. La conductivité hydraulique	24
6.1. Transfert d'humidité sous forme liquide.....	24
6.2. Transfert d'humidité sous forme gazeuse.....	25
7- Variations hydriques du sol.....	26
8- Variations thermiques du sol.....	27
Conclusion.....	28

Chapitre III :Modèle mathématique

introduction.....	29
1. Hypothèses simplificatrices.....	29
2. Caractéristiques des trois phases.....	30
a) la vapeur d'eau.....	30
b) La phase liquide	32
c) La phase solide	33
3. Formulations mathématiques des concepts de base	34
3.1. A l'échelle du pore	34
- Equation de conservation de la masse	34
- Equation de conservation de la quantité de mouvement	35
- Equation de conservation de l'énergie	35
3.1. a. Phase solide	36
3.1. b. Phase liquide	37
3.1. c. Phase gaz	37
3.2. Formulations des paramètres au niveau du VER	39
3.3. A l'échelle macroscopique (Système d'Equations Moyennées)	42
4. Calcul de la température à la surface du sol	45
5. Reformulation du système d'équations à résoudre en fonction de la teneur en eau, de la température et de la masse volumique apparente.....	48
6. Récapitulatif des Equations de Transfert en Sol Non Saturé.....	52
Conclusion.....	52

Chapitre IV :Modèle numérique

Introduction.....	53
1. La méthode des volumes finis.....	53
1.1 Principes généraux de la méthode.....	53
1.2 Principe de résolution numérique.....	53

2. Discrétisation des équations.....	54
a) Discrétisation de l'équation de conservation de l'eau	55
b) Discrétisation de l'équation de conservation de l'énergie.....	57
3. Formulation du système discrétisé.....	59
4. Résolution numérique par la méthode de Newton.....	60
5. L'algorithme de calcul numérique.....	62

Chapitre V :Résultats et interpretation

Introduction.....	63
I. PARTIE EXPERIMENTALE.....	63
1. Définition du pénétromètre	63
3. Principe d'utilisation du pénétromètre.....	64
4. Description des essais.....	65
I. PARTIE SIMULATION.....	67
1. Logiciel utilisé.....	67
2. Description du problème.....	67
3. Conditions initiales	68
4. Conditions aux limites	68
a. Conditions aux limites sur la face supérieure	68
b. Conditions aux limites sur la face inférieure	68
5. Calculs préliminaires.....	69
III. Résolution de l'équation du bilan à la surface.....	70
IV. Résultats de simulation et discussion.....	73
1. Courbe de convergence.....	73
2. Variations horaires de la température dans le sol.....	73
3. Variation annuelle de la température dans le sol.....	76
4. Variations horaires de la teneur en eau dans le sol	77
5. Evolution des paramètres physiques du sol	79
Conclusion.....	81
Conclusion générale.....	83

Références bibliographiques

Annexes

NOMENCLATURE

DESIGNATION LATINE

Symbole	désignation	unité
A_1, A_2	Coefficients de trouble relatifs à la région considérée	-
$C_{p,s}$	Capacité calorifique du solide	kJ/kgK
$C_{p,w}$	Capacité calorifique de l'eau	kJ/kgK
$C_{p,a}$	Capacité calorifique de l'air sec	kJ/kgK
$C_{p,g}$	Capacité calorifique du gaz	kJ/kgK
$C_{p,v}$	Capacité calorifique de la vapeur d'eau	kJ/kgK
d_{ts}	Coefficient de distance terre soleil	-
D_{eff}	Diffusivité effective	m ² /s
e	Indice des vides	-
Hr	Humidité relative	-
h	Enthalpie	kJ/kg
h_s	Enthalpie du solide	kJ/kg
h_1	Hauteur du soleil sur l'horizon	m
I_0	Constante solaire	W/m ²
J_e	Flux d'énergie	W
J_w	Flux de diffusion (vitesse massique de diffusion)	kg/m ² .s
K_E	Coefficient d'échange massique	W/m ² K
K_{sat}	Conductivité hydraulique à la saturation	m/s
K	Perméabilité intrinsèque	m ²
k_g	Perméabilité relative en gaz	-
k_w	Perméabilité relative en liquide	-
L_v	Chaleur latente d'évaporation	kJ/kg
M_w	Masse molaire de l'eau	kg/mole
M_v	Masse molaire de la vapeur	kg/mole
m_s	Masse de solide	kg
$\hat{n}_{w,s}$	Vecteur unitaire dirigé de la surface du solide vers la surface de l'eau	
PR	Pression de référence	Pa
Patm	Pression atmosphérique	Pa
Pg	Pression du gaz	Pa

P_v	Pression de vapeur d'eau	Pa
P_a	Pression d'air sec	Pa
P_c	Pression capillaire	Pa
P_{tot}	Pression totale	Pa
P_v^{sat}	Pression de vapeur d'eau à la saturation	Pa
q	Flux volumique d'eau	m/s
R	Constante des gaz parfaits	J/moleK
R_g	Rayonnement global	W/m ²
Re	Nombre de Reynolds	-
r	Rayon	m
S	Degré (ou taux) de saturation	%
T_R	Température de référence	K
T_a	Température ambiante	K
T_s	Température à la surface du sol	K
V	Volume	m ³
V_s	Volume du solide	m ³
V_g	Volume du gaz	m ³
V_l	Volume du liquide	m ³
v	Vitesse	m/s
v_w	Vitesse de l'eau	m/s
v_a	Vitesse de l'air sec	m/s
v_g	Vitesse du gaz	m/s
X	La teneur en eau liquide massique	kg _{eau} / kg _{solide}
y_a	concentration de l'air sec	-
y_v	concentration de la vapeur	-
z	Hauteur hydraulique	m

DESIGNATION GRECQUE

Symbole	Désignation	unité
ε	Porosité géométrique du milieu poreux	-
ρ_d	Masse volumique apparente	Kg/m ³
ρ_w	Masse volumique de l'eau	Kg/m ³
ρ_g	Masse volumique du gaz	Kg/m ³
ρ_a	Masse volumique de l'air sec	Kg/m ³
ρ_v	Masse volumique de la vapeur	Kg/m ³
$\overline{\rho C_p}$	Capacité thermique volumique moyenne du sol	J/m ³ K
ω	Teneur en eau massique	-
θ	Teneur en eau volumique	-
$\overline{\tau}$	Tenseur des contraintes visqueuses	-
λ_s	Conductivité thermique du solide	W/m.°C
λ_w	Conductivité thermique de l'eau	W/m.°C
λ_{eff}	Conductivité effective du sol	W/m.°C
ε_s	Fraction de la masse solide dans le volume total	-
ε_g	Fraction de la masse gazeuse dans le volume total	-
ε_w	Fraction de la masse de l'eau dans le volume total	-
ψ	Porosité du milieu	-
Ψ_g	Potentiel gravitaire	Pa
Ψ_o	Potentiel osmotique	Pa
Ψ_t	Potentiel tensiométrique	Pa
Ψ_c	Potentiel capillaire	Pa
σ	Tension superficielle	N/m
σ_B	Constante de Boltzmann	W/K ⁴
μ_w	Viscosité dynamique de l'eau	kg/ms
σ	Tension superficielle	N/m
$\delta_{v,a}$	Coefficient de diffusion moléculaire vapeur – air	m ² /s
Δh_v	Enthalpie d'évaporation	kJ/kg
α	Albédo du sol	-

INDICES

a	air sec
atm	atmosphérique
e	énergétique
E	Est
eff	effective
g	gaz
s	solide
sat	saturation
tot	totale
v	vapeur
w	eau
W	Ouest

Introduction générale

Introduction générale

On désigne communément par milieu poreux un solide de forme complexe renfermant des cavités appelées pores. On trouve de nombreux exemples de milieux poreux dans la vie courante : textiles, cuirs, papiers, tissus, matériaux de construction, matériaux plastiques, sols, filtres, revêtements d'échangeurs, plats, etc.

Le sol est le siège de multiples phénomènes physico-chimiques et de transport. L'étude de ces phénomènes nécessite la connaissance des propriétés de stockage des fluides (soit sous forme adsorbée sur le solide, soit remplissant les pores), des propriétés de transferts (masse, quantité de mouvement, énergie) et éventuellement des propriétés mécaniques. Comme pour tous les systèmes hétérogènes polyphasiques, ces propriétés sont évidemment fonction de la morphologie de la matrice et des phénomènes qui se développent et interagissent dans les différentes phases, ce qui rend le champ d'études des **transferts de chaleur sol non saturé** particulièrement vaste. De ce fait, les éléments développés ici qui traite des transferts de chaleur avec changement de phase n'ont pas la prétention d'épuiser le sujet. Ils tentent simplement, après l'introduction des notions indispensables concernant la caractérisation des milieux poreux, de constituer une synthèse et une initiation à des ouvrages plus spécialisés.

Ce travail s'inscrit consiste à l'élaboration d'un outil d'aide à l'étude des transferts thermiques et massiques intervenant dans un sol non saturé.

Nous étudions la distribution de la température et de la teneur en eau à différentes profondeurs jusqu'à la surface du sol et pour différentes périodes de l'année.

Le sol étudié est situé à l'université de Tizi-Ouzou où nous avons fait une petite expérience pour faire des relevées de température qui nous servent pour les conditions initiales.

Pour réaliser cet objectif, on se propose de développer un modèle mathématique se basant sur l'approche de WHITAKER qui a employé la technique des moyennes de volumes.

Whitaker propose une façon d'écrire les équations de transfert de chaleur et de masse dans les milieux poreux (Whitaker, 1977). Il démarre avec un système d'équations de conservation (chaleur et masse) pour les trois phases contenues dans le milieu (solide, liquide et gaz) et ensuite il applique pour chacune des phases la prise de moyenne en prenant un volume élémentaire représentatif (V.E.R) à l'échelle du pore ; ces paramètres moyennés permettent de considérer le milieu poreux comme un milieu continu équivalent. Le modèle développé par Whitaker est considéré comme rigoureux le plus avancé aujourd'hui. Par conséquent ce modèle sera utilisé ici dans ce travail.

Dans ce travail, le sol est représenté par un milieu triphasique, il est caractérisé par une masse volumique, une courbe de rétention en eau, les paramètres qui conditionnent les transferts d'eau en phase liquide ou en phase vapeur, les paramètres qui contrôlent les transferts de chaleur. La surface du sol est caractérisée par son albédo et son émissivité de surface. Chaque volume élémentaire est discrétisée en éléments délimités par des nœuds aux niveaux desquels seront calculées la teneur en eau et température dans le sol.

Le modèle nécessite comme conditions initiales un profil de teneur en eau et un profil de température. Les conditions aux limites supérieures sont fixées par un ensemble de données climatiques (à savoir : le rayonnement global, le rayonnement atmosphérique, la température de l'air, la pression partielle de vapeur d'eau de l'air et la vitesse du vent) qui vont permettre, à l'aide du bilan d'énergie, d'estimer le potentiel hydrique et la température de surface.

Les conditions à la limite inférieure sont fixées par le potentiel hydrique et la température.

Le présent mémoire est structuré en cinq principaux chapitres en plus de l'introduction générale et de la conclusion générale.

Dans le premier chapitre, une introduction courte dans laquelle nous donnerons quelques généralités de base au sujet du sol. La partie principale de ce chapitre est consacré à la définition des principales caractéristiques de différents types de sols et aux mécanismes physiques intervenant lors des transferts de masse et d'énergie.

Le deuxième chapitre concerne une étude bibliographique des travaux réalisés sur les milieux poreux en général et sur les sols non saturés en particulier.

Le troisième chapitre présente le modèle mathématique des transferts de chaleur et de masse qui décrit le sol non saturé en supposant quelques hypothèses simplificatrices.

Nous donnons dans le quatrième chapitre les outils numériques nécessaires à la discrétisation et à la résolution numérique des équations couplées non linéaires décrites dans le troisième chapitre. Nous discrétisons au premier lieu nos équations par la méthode des volumes finis puis pour résoudre ce système, nous avons eu recours à la méthode itérative de Newton- Raphson. Et par la suite nous donnons un algorithme de calcul afin de le résoudre ensuite sous le Code de Calcul MATLAB.

Dans le cinquième chapitre, nous exposerons l'ensemble des résultats obtenus numériquement et expérimentalement que nous essayerons d'interpréter.

Enfin nous terminerons par une conclusion générale et les perspectives à venir.

Chapitre I

Généralités

Introduction

On désigne généralement par milieu poreux un solide de forme quelconque délimitant et englobant des vides appelés pores. Ces vides, ou interstices, peuvent communiquer entre eux et contenir une ou plusieurs phases fluides pouvant s'écouler ou encore, échanger de l'énergie entre elles et/ou avec la matrice solide.

Le sol est un milieu poreux considéré généralement, comme un système triphasique mettant en jeu des interactions entre les phases solides (particules du sol), liquide (eau) et gazeuse (air).

1 Caractéristiques physiques des sols

1.1. Origine du sol

Selon *Tindall (1999)*: "Les sols peuvent être définis de manière générale comme le produit, remanié et organisé, de l'altération de la couche superficielle de la croûte terrestre, essentiellement sous l'action d'agents climatiques et biologiques. Les processus physiques qu'y participent sont : le gel, le dégel, l'humidification et dessèchement, les écoulements d'eau, le mouvement des glaces et l'abrasion par des particules de sable entraînées par le vent ou l'eau. Les petits morceaux de roches qui résultent des processus physiques deviennent le matériau parental du sol. La solubilisation, l'hydratation, l'oxydation, la réduction, la précipitation, le lessivage et autres processus physico-chimiques, décomposent encore les minéraux qui forment les particules de roche. À cause de la présence de microbes et autre faune, la décomposition biochimique de quelques éléments du matériau parental se transforme en matière organique, à laquelle s'ajoute le matériau de la décomposition des plantes et des animaux. C'est alors que les roches originales deviennent le sol d'aujourd'hui".

1.2. Représentation physique d'un sol

La zone non saturée des sols, siège des transferts que nous étudions, est un milieu poreux triphasique, composé de:

- d'une matrice solide formée par l'assemblage des particules minérales (appelées graviers, sables, limons et argiles en fonction de leur dimension). Les mouvements de fluide ont lieu à l'intérieur de cette trame dans les interstices laissés vides : pores.
- d'un mélange gazeux (essentiellement air et vapeur d'eau) occupant une fraction des pores. Ce mélange gazeux se trouve soit sous forme **d'une phase continue** qui s'écoule dans le milieu poreux et transporte des espèces volatiles, soit sous forme de bulles occluses piégées dans la matrice poreuse.
- d'eau occupant le reste de l'espace vide laissé dans les pores.

1.3. Classification et caractères principaux des sols

(International institute for water and environmental Engineering)

Nous distinguons fréquemment 2 notions importantes: la texture et la structure d'un sol.

La texture représente la distribution de taille des particules constituant le sol. Elle est une caractéristique statique du sol, facilement accessible. Il est commode de classer les sols dans des groupes texturaux, en fonction de la distribution de tailles des particules qui le composent.

La structure d'un sol représente l'arrangement relatif des particules qui le composent. La structure, par opposition à la texture, est une caractéristique dynamique du sol. La structure varie dans le temps et fortement dans l'espace. La structure du sol impose notamment la géométrie du réseau poral. Cette notion ne permet pas de distinguer des catégories de sols.

Les grains d'un sol ne sont pas liés par un ciment comme c'est le cas du béton, mais ils peuvent être soumis à des forces d'attraction intergranulaires diverses : des forces électriques, des forces de Van der Waals,... Ces forces sont en général faibles et diminuent rapidement lorsque la distance entre les grains augmente. Elles n'influencent que le comportement des sols à dimensions très faibles. Dans ce cas le sol est doté d'une cohésion.

Cette constatation va amener le géotechnicien à définir deux grandes familles de sol :

- les sols grenus qui sont de dimension supérieure à 20μ (0,02 mm),
- et les sols fins de dimensions inférieures à 20μ .

1.3.a. Les sols grenus

Les sols grenus sont ceux pour lesquels les caractéristiques géotechniques sont déterminées par des forces de volume ou de pesanteur. Ils sont en général pulvérulents. Ils sont surtout définis granulométriquement.

On distingue principalement deux sous-familles :

- Sables : 50% des grains au moins sont compris entre 0,02 et 2 mm
- Gravier : 50% des grains au moins sont compris entre 2 et 20 mm

A noter : Les dimensions extrêmes varient légèrement suivant le système de classement.

On peut ajouter pour préciser ces sols, d'autres caractères :

- Nature minéralogique (composition chimique même de la roche mère),
- Forme des grains (liée à la genèse de l'altération mécanique),
- Gisement et tri (ségrégation ou non).

Ainsi de part leurs altérations mécaniques on distingue:

- Les sables éoliens : transportés par le vent, se rencontrent généralement sous forme de dunes marines ou continentales.

- Les sables fluviatiles : se rencontrent dans les alluvions fluviatiles quelques fois sous forme de terrasses.
- Les sables marins : Comprennent aussi bien les sables littoraux que les sables marins anciens.
- Les sables résiduels ou arènes : Produits de la fragmentation sur place d'une roche mère propice et donnant alors aux Formes de grains les aspects suivantes :
 - Emoussés luisants : caractéristique du transport par l'eau
 - Ronds mats, émoussés et piquetés caractéristiques du transport par le vent
 - Non usé : caractéristiques des grains non transportés.

1.3.b. Les limons (ou Silts)

La définition la plus admise est celle d'un sol dont la majeure partie des grains est comprise entre $2\ \mu$ et $20\ \mu$ (définition purement descriptive).

Ils sont en grande partie formés de quartz.

On distingue suivant leurs origines :

- Les limons éluviaux formés par altération sur place d'un substratum favorables (à l'altération),
- Les limons de ruissellement et d'inondation qui se présentent en strates.

1.3.c. Les argiles

On peut les définir granulométriquement comme une roche dont les grains sont compris entre $0,2\ \mu$ et $2\ \mu$.

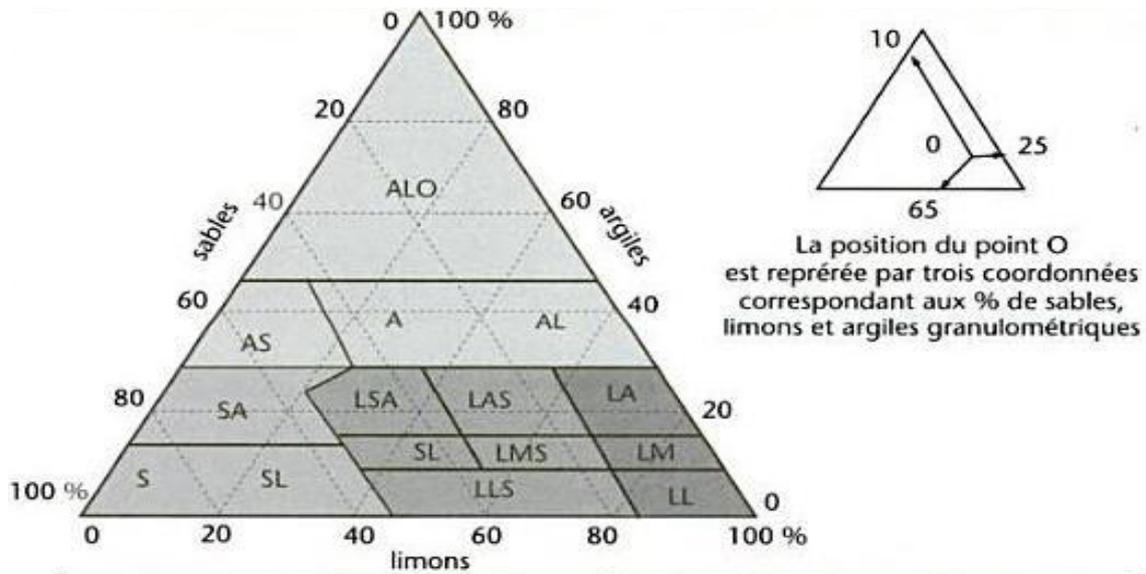
C'est une roche sédimentaire terreuse faisant pâte avec l'eau. On la dit plastique.

La plasticité d'un matériau est caractérisée par le fait qu'il peut être déformé d'une façon permanente, à volume constant, sans perdre sa cohésion interne.

On distingue suivant leur origine :

- Les argiles d'altération : formées principalement par l'altération des calcaires en climat tempérés ou l'altération des latérites en climat chaud et humide,
- Les argiles fluviatiles : Elles se déposent surtout dans le lit majeur des fleuves, lors des décrues,
- Les argiles lacustres : déposées dans les lacs et étangs,
- Les argiles marines : Ce sont des argiles d'origine continentale déposées en milieu marin, et généralement modifiées par la diagenèse.

Le sol est aussi classé en fonction de la proportion des grains appartenant aux trois classes principales qui sont représentées sous forme de triangle (Fig I.1)



Textures sableuses		Textures limoneuses	
S	sable	LL	limon léger
SL	sable limoneux	LM	limon moyen
SA	sable argileux	LA	limon argileux
Textures limono-sableuses		Texture argilo-sableuse	
LLS	limon léger sableux	AS	argile sableuse
LS	limon sableux	Textures argileuses	
LMS	limon moyen sableux	A	argile
LSA	limon sablo-argileux	AL	argile limoneuse
LAS	limon argilo-sableux	Texture très argileuse	
		ALO	argile lourde

Fig. I.1. Triangle des textures

(Service de la carte des sols de l’Aisne, France : d’après M. Jamagne, 1967)

2. Caractéristiques hydrauliques des sols

2.1. L’état hydrique des sols

L’état hydrique des sols correspond à la quantité d’eau qu’un sol est susceptible de renfermer, dans l’absolu et dans la réalité. Les sols contiennent plus ou moins d’humidité et leur état hydrique dépend de la capacité des réservoirs des matériaux à absorber et à conserver de l’eau. En fonction de la quantité d’eau présente dans le sol, il existe une grande variété de son état hydrique.

2.2. Les formes d’eau dans le sol

D’une manière générale, dans les sols on distingue quatre grands types d’eau en fonction de la taille des porosités : l’eau libre, l’eau capillaire, l’eau hygroscopique et l’eau d’hydratation.

a) l'eau libre (eau gravitaire)

Il s'agit de l'eau qui s'écoule librement, dans des macroporosités, des fissures larges de quelques centimètres ou plus petites, de la taille de quelques millimètres voire moins, mais qui permettent un écoulement sous l'effet de la gravité. Ces fissures se remplissent et se vident comme une tuyauterie domestique. Une grosse partie de cette eau libre circule en profondeur dans les fissures et les porosités des matériaux qui forment les versants pour rejoindre des nappes qui peuvent alimenter les cours d'eau.

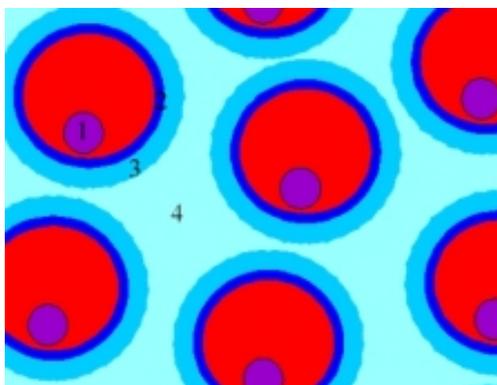
b) l'eau capillaire

Elle remplit des pores, si petits qu'ils ont la taille d'un cheveu : les déplacements dépendent des lois non plus de la gravité mais de la capillarité. Ceci est visible lorsque l'on place un bloc de roche sec ou même une éponge sèche sur une assiette plate remplie d'eau: le bloc ou l'éponge « aspirent » l'eau du bas vers le haut, défiant les lois de la gravité. Cette force de succion (= ascension par capillarité) se produit aussi lorsque des poils absorbants des racines des végétaux aspirent (= pression osmotique) l'eau des porosités de capillaire. En cas de sécheresse, lorsque les eaux des porosités de la proche surface sont absorbées par les végétaux, par capillarité, il monte de l'eau des profondeurs : l'eau libre et forcément l'eau de capillarité de profondeur peuvent être aspirées pour combler les vides laissés dans les porosités de la surface.

c) l'eau hygroscopique et l'eau d'hydratation

L'eau hygroscopique est l'eau qui est piégée à la surface des pores. L'eau d'hydratation est celle, encore plus microscopique, qui est incluse à l'intérieur des minéraux...

Ces deux eaux ne peuvent pas être déplacées par des processus physiques (gravité, pression atmosphérique, évaporation à l'air libre, pression osmotique...). Elles n'interviennent pas du tout dans les bilans et les transferts d'eau que l'on envisage.



- 1) l'eau d'hydratation (eau de constitution)
- 2) l'eau hygroscopique (fortement adsorbée)
- 3) réserve hydrique (eau de rétention capillaire)
- 4) réserve hydrologique (eau gravitaire)

Fig I.2. Les formes d'eau dans le sol.

2.3. Notion de potentiel de l'eau du sol

Il est indispensable de connaître la distribution d'énergie de l'eau du sol pour prédire son comportement. En effet, les gradients d'énergie régissent les flux de matière. Pour étudier la densité d'énergie de l'eau du sol, nous nous plaçons dans l'hypothèse simplificatrice où l'énergie cinétique de l'eau peut être négligée devant l'énergie potentielle.

C'est effectivement le cas lorsque la vitesse d'écoulement et le gradient de température sont suffisamment faibles (Roth, 1995)

L'énergie potentielle de l'eau contenue dans le sol est définie par le travail nécessaire pour porter un volume infinitésimal d'eau d'un état de référence à son état dans la matrice poreuse.

L'état de référence choisi est l'eau pure (ne contenant aucune espèce dissoute), libre (soumise uniquement à la force de gravité), à l'altitude z_0 , à la pression p_0 et à la température T_0 . L'énergie potentielle associée à cet état de référence est nulle.

Bien que l'énergie potentielle calculée dépende du choix de l'état de référence, ce n'est pas le cas du gradient d'énergie.

La densité volumique d'énergie potentielle de l'eau du sol est appelé potentiel de l'eau du sol, Ψ (en J/m^3). Traditionnellement (Bolt, 1976), Ψ se décompose en trois potentiels distincts:

- Ψ_g , le potentiel gravitaire est la densité d'énergie nécessaire pour apporter un volume élémentaire d'eau libre, pure, de l'altitude de référence z_0 , à l'altitude z . Si on suppose que l'axe des z est orienté positivement vers le bas, on obtient :

$$\psi_g = -\rho_w g(z - z_0) \quad [I.1]$$

- Ψ_o , le potentiel osmotique est la densité d'énergie nécessaire pour dissoudre dans un volume élémentaire d'eau pure porté à l'altitude z , les composants chimiques contenus dans l'eau du sol à cette même altitude. On néglige généralement la contribution du potentiel osmotique dans le calcul du potentiel de l'eau du sol. Cette hypothèse peut se révéler fautive dans des régions très arides où des espèces chimiques peuvent précipiter et s'accumuler dans certaines couches du sol.
- Ψ_t , le potentiel tensiométrique est la densité d'énergie nécessaire pour apporter un volume élémentaire d'eau du sol (contenant les espèces dissoutes) libre à l'altitude z et à la pression p_0 , dans le sol de façon réversible et à température constante.

Lorsque le sol est indéformable, que la solution du sol développe une force ionique négligeable, que la pression de l'air est constante et uniforme et vaut p_0 , la seule contribution au potentiel tensiométrique provient de la densité d'énergie nécessaire pour qu'un volume d'eau élémentaire traverse l'interface air-eau. Dans ce cas le potentiel tensiométrique est égal au seul potentiel matriciel ou potentiel capillaire, Ψ_c .

$$\psi_c = p_w - p_0 = \rho_w g h \quad [\text{I. 2}]$$

avec h (m) hauteur manométrique au point considéré (on choisit généralement la pression atmosphérique comme pression de référence, p_0). Dans la zone non saturée, h est négative, on l'appelle alors tension, ou succion. Au niveau de la surface libre de la nappe, h est nulle, et dans la zone saturée, h est positive (pression hydrostatique).

Dans le cas simple d'un milieu poreux non saturé, indéformable où l'air est à la pression atmosphérique prise comme pression de référence et avec $z_0 = 0$, le potentiel total de l'eau du sol s'exprime par :

$$\psi = \psi_g - \psi_c = \rho_w g (h - z) \quad [\text{I. 3}]$$

Darcy, 1856 a introduit la notion de charge hydraulique h (m) pour exprimer le potentiel de l'eau du sol. Par définition :

$$h = \frac{\psi}{\rho_w g} \quad [\text{I. 4}]$$

h correspond à la hauteur d'une colonne d'eau au repos au potentiel Ψ , lorsque le pied de la colonne est pris comme niveau de référence.

2.4. Géométrie de la phase liquide

2.4.a. Interface entre 2 fluides : l'eau et l'air

La géométrie de la phase liquide (dans notre cas : de l'eau développant une force ionique faible) est liée à la géométrie de l'espace poral et à la valeur θ de la teneur volumique en eau.

Quelle que soit la valeur θ de la teneur volumique en eau, la géométrie de la phase liquide est déterminée par l'état d'énergie totale minimum. A l'équilibre, l'énergie totale est déterminée par la position des molécules d'eau dans le champ gravitationnel, dans le champ électrique externe créé par la matrice solide et dans le champ électrique interne créé par le moment dipolaire des molécules d'eau.

Près de la surface des minéraux constituant la matrice solide, le champ électrique est si grand que les interactions entre les molécules d'eau elles-mêmes peuvent être négligées.

Par conséquent, la matrice solide est toujours recouverte d'un film d'eau très fin, même à des teneurs en eau très faibles. Cette eau « adsorbée » a des propriétés physiques très différentes de l'eau libre, ce n'est pas un fluide.

Lorsque la teneur en eau augmente, l'épaisseur du film mince augmente ainsi que la distance moyenne des molécules d'eau par rapport à la surface solide. Lorsque cette distance est suffisante pour pouvoir négliger l'interaction des molécules d'eau avec la matrice solide, l'énergie totale ne dépend plus que de la force de gravité et des forces d'attraction entre les molécules d'eau. En se plaçant dans le cas où la quantité d'eau adsorbée représente une fraction négligeable de la teneur en eau, il est possible d'établir une relation simple entre le rayon de courbure de l'interface eau-air et la densité d'énergie par unité de surface d'interface, appelée tension de surface, σ en J/m^2 .

Dans le cas où la géométrie de l'interface est correctement décrite par une sphère, on établit (Roth, 1995) la relation suivante entre la différence de pression Δp qui règne de part et d'autre de l'interface eau-air, la tension de surface et le rayon de la sphère :

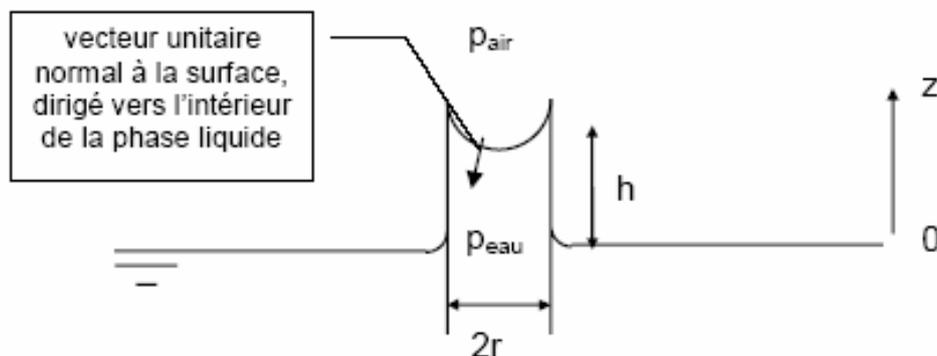
$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \quad [\text{I. 5}]$$

Dans un cas plus général, où la forme de l'interface est approchée par un ellipsoïde dont les rayons de courbures sont notés r_1 et r_2 , on montre que l'équation I-5 devient :

$$\Delta p = \sigma \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] \quad [\text{I. 6}]$$

2.4.b. La rétention capillaire

Expérimentalement, lorsqu'on plonge un tube capillaire de rayon r dans un réservoir d'eau on constate que le niveau de l'eau dans le tube s'élève à une hauteur h au dessus du niveau de l'eau dans le réservoir (c.f. Figure I-4). Plus le diamètre du tube est petit, plus la hauteur h est grande.



FigI.2. Description de la géométrie du système « tube capillaire ».

Nous distinguons deux cas :

➤ **le fluide parfaitement mouillant**

En supposant que le fluide est parfaitement mouillant, que le solide est toujours recouvert d'un film d'eau, et que l'interface eau-air est une demi-sphère de rayon r , on obtient la relation suivante entre la hauteur capillaire et le rayon du tube capillaire :

$$h = \frac{2\sigma}{\rho_w g r} \quad [I. 7]$$

En rapprochant l'équation I-6 et l'équation I-8, on retrouve l'équation I-3 :

$$\Delta p = p_{air} - p_{eau} = \rho_w g h \quad [I. 8]$$

➤ **le fluide n'est pas parfaitement mouillant**

Dans un cas plus général, où le fluide n'est pas parfaitement mouillant, l'angle de contact φ entre les phases liquide et solide caractérise l'attraction ou la répulsion des molécules d'eau par la surface solide (c.f. Figure I-3). Si $\varphi > 90^\circ$, la phase solide est hydrophobe (c'est le cas de la matière organique par exemple), si $\varphi < 90^\circ$, la phase solide est hydrophile.

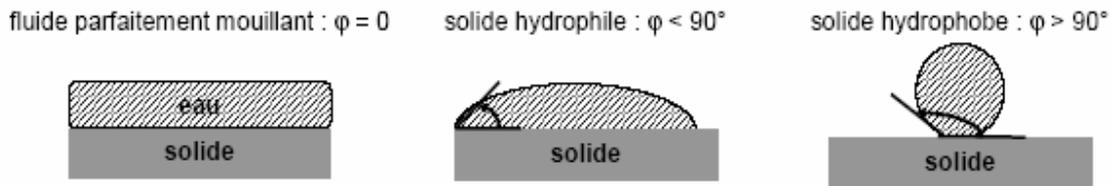


Fig I.3. Notion d'angle de contact entre la phase solide et l'interface eau-air

De la même façon que dans le cas du fluide parfaitement mouillant, on peut établir la relation liant la hauteur capillaire et le diamètre du tube capillaire, on obtient une expression faisant intervenir cette fois le cosinus de l'angle de contact :

$$h = \frac{2\sigma \cos(\varphi)}{\rho_w g r} \quad [I. 9]$$

En rapprochant l'équation I-5 et l'équation I-9, on obtient cette fois la relation :

$$\Delta p = p_{air} - p_{eau} = \rho_w g h = \frac{2\sigma \cos(\varphi)}{r} \quad [I. 10]$$

La géométrie réelle du réseau poral est considérablement plus complexe qu'un ensemble de tubes capillaires de diamètres différents. Même les modèles de tubes capillaires les plus sophistiqués simulant l'interconnexion des pores (Childs et Collis-George, 1950) ne sont pas capables de décrire correctement la structure des sols (Mualem, 1976). Ce constat a de

lourdes répercussions pour l'estimation de paramètres macroscopiques liés à la structure microscopique du sol.

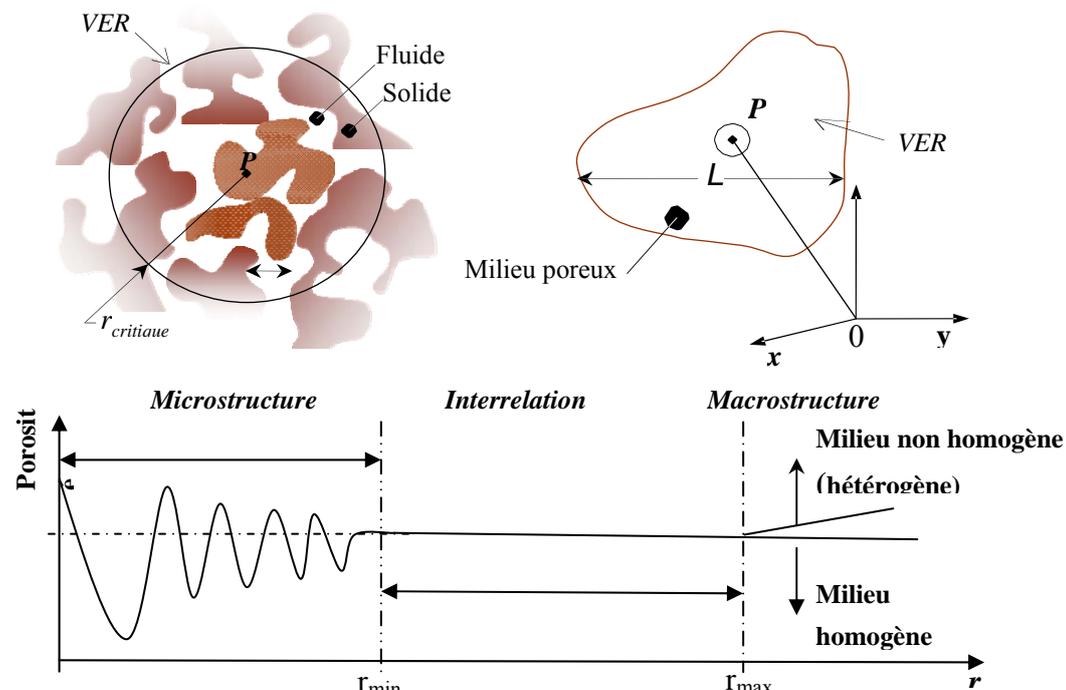
L'échec des modèles géométriques pour décrire la structure du réseau poral a conduit les auteurs à construire des modèles empiriques pour prévoir le comportement de l'eau dans le sol à l'échelle de mesure.

3. Volume élémentaire représentatif

Le concept du volume élémentaire représentatif V.E.R, introduit par Bear (1972), correspond à un volume assez grand pour contenir un nombre de pores suffisamment important ce qui est nécessaire à une analyse statistique de ceux-ci. Cependant, ce volume doit aussi être suffisamment petit, relativement à l'étendue du domaine étudié, pour que les variations des paramètres de ce V.E.R restent du second ordre lorsque celui-ci subit un déplacement élémentaire.

Le milieu poreux est alors assimilé à un milieu continu fictif équivalent où les différentes phases (solide, liquide et gaz), occupant tout l'espace géométrique se superposent et sont caractérisées par des champs continus de variables qui représentent une valeur moyenne sur un V.E.R. Les paramètres de transfert définis à partir de grandeurs macroscopiques (par exemple teneur en eau), sont par conséquent aussi des paramètres macroscopiques.

Il faut se placer à l'échelle macroscopique pour pouvoir considérer le milieu poreux comme un milieu continu.



FigI.4. Illustration de la notion d'élément de volume représentatif d'un milieu poreux (Gaudet, 1978).

4. Variables descriptives fondamentales

Dans la suite, les symboles m et V font référence à une masse (kg) et à un volume (m^3). Les indices $()_w$, $()_s$, $()_g$ et $()_t$ désignent respectivement des quantités relatives à la phase liquide, solide, gazeuse et à l'ensemble des 3 phases. Les variables sont définies à l'échelle du V.E.R.

4.1. Notion de porosité

La porosité d'un matériau caractérise l'importance des vides (pores) qu'il contient. Elle représente donc la fraction volumique de vide c'est à dire le rapport entre le volume de l'espace poreux précédemment défini V_{pores} et le volume total du milieu poreux V_{total} :

$$\psi = V_{pores} / V_{total} \quad [I. 11]$$

Les pores forment des réseaux de vides plus ou moins complexes ayant une influence directe sur les phénomènes hydriques et thermiques. On distingue deux types de pores : les pores connectés ou interconnectés, reliés entre eux par des canaux qui permettent le transfert de fluide et les pores isolés, connectés à aucun autre pore.

4.2. Saturation

La saturation d'une phase i est définie comme étant le rapport entre le volume de la phase fluide p , notée V_p et le volume des pores connectés :

$$S_i = V_i / V_{pores} \quad 0 \leq S_i \leq 1 \quad \sum_i S_i = 1 \quad [I. 12]$$

4.3. La teneur en eau

On distingue la teneur en eau massique X , définie comme le rapport entre la masse d'eau et la masse de solide contenues dans le V.E.R

$$X = \frac{m_w}{m_s} \quad [I. 13]$$

et la teneur en eau volumique θ , définie comme le rapport entre le volume d'eau contenu dans le V.E.R et le volume de l'ensemble.

$$\theta = \frac{V_w}{V_t} \quad [I. 14]$$

4.4. Saturation en fonction de la teneur en eau

Le degré (ou taux) de saturation en eau S : s'exprime comme le rapport entre la teneur en eau volumique et la porosité géométrique.

$$S = \frac{V_w}{V_w + V_g} = \frac{V_w}{V_v} = \frac{X(1-\psi) \cdot \rho_s}{\psi \cdot \rho_w} \quad [I. 15]$$

Tableau I.1. Quelques caractéristiques de sédiments meubles, d'après l'U.S. Geological Survey

Sol	Diamètre (mm)	Porosité	Porosité effective	Teneur en eau	Masse volumique sèche ρ_d	Masse Volumique humide ρ'_d	Perméabilité (m^2)
Sable homogène	0,250- 0,005	46 – 34	30	32 - 19	1430 - 1750	1890 – 2090	10^{-14}
limon		40 – 35	25	25 – 16	1590 - 1860	2160 - 1770	10^{-16}
Argile	0,0002	55 – 37	15	45 – 22	1600-1940	1770 – 2070	10^{-19}

5. Les différentes échelles d'observation

Le milieu poreux, ainsi que divers phénomènes tels que les écoulements de fluides et le transport de polluant, peuvent être observés à plusieurs échelles :

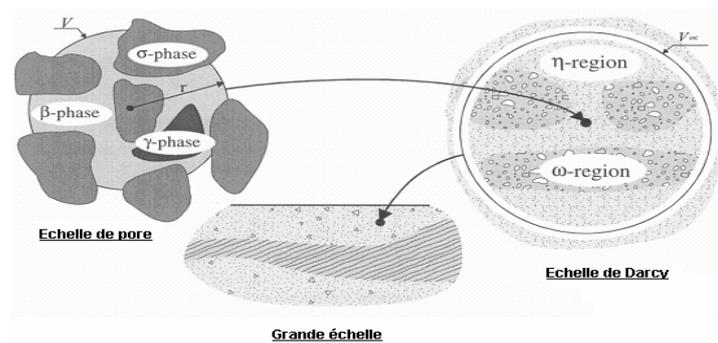


Fig I.5. Les différentes échelles d'observation

➤ L'échelle du pore dite microscopique :

À cette échelle, les grandeurs caractéristiques sont celles du diamètre moyen du pore dans le cas d'un milieu consolidé et celles du diamètre du grain dans un milieu non consolidé. A titre d'exemple, le comportement mécanique des fluides newtoniens à cette échelle est décrit par les équations de Navier-Stokes.

➤ **L'échelle locale dite macroscopique (échelle de Darcy) :**

Elle décrit les phénomènes pour des éléments de volume suffisamment grands par rapport au volume moyen du pore (ou des grains). L'échelle de Darcy est basée sur l'existence d'un Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R) qui permet la définition de quantités macroscopiques comme la moyenne sur ce V.E.R de la même quantité prise à l'échelle microscopique. La taille de ce V.E.R doit être suffisamment grande pour que les hétérogénéités présentes à l'échelle microscopique ne soient plus apparentes à l'échelle macroscopique. La description des phénomènes est faite en terme de milieu continu équivalent et les paramètres observés sont des valeurs moyennes.

➤ **L'échelle globale dite grande échelle :**

C'est l'échelle considérant des mécanismes décrits pour des distances métriques ou kilométriques.

Le passage d'une échelle à l'autre se fait à l'aide de différentes méthodes de changement d'échelle. Outre la méthode d'homogénéisation (voir par exemple Bensoussan et al., 1978 et Sanchez-Palencia, 1980), on peut citer la prise de moyenne volumique (Quintard et Whitaker, 1994; Whitaker, 1999) en particulier utilisée pour prévoir les propriétés macroscopiques du transport à partir d'informations sur la microstructure du milieu.

Dans cette étude, l'échelle d'observation est l'échelle de Darcy. Les notions de saturation et de porosité sont définies à cette même échelle.

Chapitre II

Etude bibliographique

Introduction

Les phénomènes physiques mis en jeu au cours du transfert de masse et de chaleur d'un milieu poreux non saturé ont souvent été discutés. La description mathématique proposée pour les transferts d'humidité au cours des transferts hydriques et thermiques dépend de l'état local de l'eau présente dans le milieu poreux considéré.

1- Premières littéraires

La bibliographie sur des modèles macroscopiques décrivant les transferts d'eau en milieu poreux est très riche et très ancienne. Nous commençons donc par décrire certains travaux que nous jugeons représentatifs de l'évolution des modèles macroscopiques de transfert d'eau en milieux poreux.

Philip (1957) est l'un des premiers auteurs à décrire les transferts hydriques en milieux poreux. Il applique la loi de Darcy à la phase liquide d'un système non saturé à partir des résultats expérimentaux. Il montre que la perméabilité au liquide décroît rapidement en fonction de la teneur en eau. Pour la phase gazeuse, il exprime le mouvement diffusif de la vapeur d'eau à partir du gradient de la masse volumique de vapeur.

Bénet, (1981) considère la phase gazeuse comme constitué d'air sec et de vapeur d'eau, son modèle est fondé sur une étude thermodynamique des processus irréversibles et met en évidence la source d'entropie de son système. Son étude prend en compte le changement de phase de l'eau et un transfert de chaleur entre la phase solide et les autres phases. Il fait le choix d'une vitesse massique moyenne pour décrire la vitesse du mélange gazeux. Il suppose enfin que cette vitesse est négligeable et que la pression de gaz est constante.

Moyné (1987, 1988) est l'un des premiers à prendre en compte les mouvements du mélange gazeux sous gradient de pression. Il considère aussi une phase gazeuse constituée d'air sec et de vapeur d'eau, et un régime non isotherme.

Bazant (1972) se base dans son modèle sur une équation de diffusion non linéaire de la teneur en eau.

Crausse (1983) étudie les transferts couplés de chaleur et d'humidité à partir de deux équations de diffusion non linéaires écrites en saturation et température.

2- D'autres approches de modélisation

Les différentes approches de modélisation des écoulements en milieux non saturés portent notamment sur la formulation du modèle mathématique de l'écoulement, sur le caractère des courbes de pression capillaire ou encore sur le modèle hydraulique de Mualem - van Genuchten.

2-1. Modèle basé sur l'équation de Richards

La description mathématique de l'écoulement vertical est obtenue en considérant :

- d'une part l'équation dite de continuité qui exprime la conservation de la masse d'eau dans un volume élémentaire représentatif du sol.
- d'autre part l'équation de conservation de la quantité de mouvement (équation de Darcy, 1856).

La combinaison de ces deux équations donne l'équation de Richards :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right] \quad [\text{II.1}]$$

L'équation de Richards (équation de diffusion classique) ne prend en compte que les transferts d'eau sous forme liquide. De plus, le couplage avec l'atmosphère par des relations physiques est possible si les transferts de chaleurs sont pris en compte. Si tel n'était pas le cas, le recours à des relations semi empiriques donnant le flux d'évaporation en fonction du climat et d'état hydrique du sol est alors nécessaire. Plusieurs relations empiriques se trouvent dans la littérature, (Chanzy (1991), telle que la relation de Penman-Monteith). Dans cette dernière, l'effet de l'état hydrique du sol sur le flux d'évaporation est pris en compte par la résistance de surface du sol qui est reliée à l'humidité du sol.

Finalement, seule l'équation traduisant le mouvement de la phase liquide est écrite et le caractère multiphasique du système intervient de part la dépendance de la conductivité et de la pression capillaire vis à vis de la saturation. Ainsi, « Lorenzo A. Richards a concrétisé les efforts de plusieurs générations antérieures de physiciens du sol, en formulant une théorie macroscopique générale pour la description du mouvement de l'eau dans les sols non saturés » (Raats, 2001).

2-2. Le modèle diphasique et le modèle par écoulement fractionnel

Les expériences de laboratoire et les simulations numériques ont montré que l'hypothèse sur la pression de l'air et sa mobilité n'est pas toujours réaliste. Ainsi, une partie de l'air peut être piégée et voir sa pression augmenter. Celia et Binning (1992)

soulignent le caractère dynamique de la phase gazeuse lors d'un processus d'infiltration d'eau. Par conséquent, ils rappellent la nécessité de traiter indépendamment le mouvement de la phase gazeuse pour le transport de contaminants volatiles dans la zone non saturée. Les questions de remédiation par injection d'air sont également concernées par ce type d'approche.

Les équations de Richards et de Darcy peuvent être écrites spécifiquement pour chaque phase et une équation de conservation de la saturation des pores est alors ajoutée. Roth, (2005).

Raats (2001) et Roth (2005) suggèrent par ailleurs une modification du calcul du flux selon laquelle, la vitesse d'une phase dépendrait du gradient de pression des deux phases :

$$q_{\alpha} = \sum_{i=L,G} K_{i\alpha} \cdot \nabla H_i \quad [\text{II.2}]$$

D'autres modélisations ont également été proposées, notamment dans le domaine de l'ingénierie pétrolière. Chavent (1981) a introduit le concept de pression globale, définie par l'équation [II.3], afin de définir la vitesse totale uniquement à partir du gradient de cette variable non physique et indépendamment des gradients de saturation.

$$P = \frac{1}{2}(P_G - P_L) - \int_{s_c}^{s_L} (f_L - \frac{1}{2}) \frac{dP_C}{dS} dS \quad [\text{II.3}]$$

où f_L représente la fonction d'écoulement fractionnelle.

Plutôt que de considérer les pressions de chaque phase comme inconnues du problème, les équations sont écrites en termes de pression globale et de saturation d'eau. Deux équations (une en pression et l'autre en saturation) sont alors requises pour modéliser l'écoulement.

2-3. Une modélisation incluant la pression capillaire dynamique

Le modèle de Richards est en partie fondé sur le concept de pression capillaire statique. Les courbes fonctionnelles associant pression et saturation sont alors établies dans des conditions de quasi-équilibre thermodynamique parfois difficilement atteignables. Hassanizadeh et al. (2002) ont répertorié un grand nombre d'expériences mettant en évidence, depuis plus d'un demi-siècle, les effets dynamiques sur la pression capillaire.

2-4. La modification du modèle de van Genuchten

Le modèle de Brooks et Corey présente une discontinuité de la dérivée de la teneur au niveau de la pression d'entrée d'air. Cette caractéristique mathématique a motivée le développement du modèle continûment différentiable de van Genuchten. Cependant, les sols à texture fine peuvent alors être moins bien représentés par ce modèle, notamment à proximité de la saturation. Par conséquent, des modifications ont été proposées pour introduire l'équivalent d'une pression d'entrée d'air, mais avec des valeurs restreintes par rapport au modèle de Brooks et Corey (Vogel et al (2001)):

$$S_e = \begin{cases} \frac{1}{S_E^*} [1 + (\alpha|h|)^n]^{-m} & , h < -h_a \\ 1, & h \geq -h_a \end{cases} \quad [\text{II.4}]$$

Avec

$$S_E^* = [1 + (\alpha h_a)^n]^{-m} \quad [\text{II.5}]$$

h_a : représente la pression d'entrée d'air de l'ordre de quelques centimètres.

D'après une analyse basée sur une large gamme de sols, Schaap et van Genuchten (2006) proposent une description améliorée de la conductivité hydraulique à proximité de la saturation.

Modélisation d'un milieu diphasique déformable

La modélisation du transport dans les milieux poreux diphasiques déformables, requiert une analyse détaillée des phénomènes de transport concerné. Ces phénomènes sont décrits au travers d'équations issues de la mécanique des milieux continus pour chaque phase. Une première difficulté se trouve alors dans l'application de ces équations quand les milieux ne sont pas homogènes, car ses propriétés changent dans toutes les directions de l'espace. La morphologie peut nous donner des discontinuités des phases dans certains endroits et par conséquent la détermination du comportement mathématique d'une variable devient parfois délicate. Les techniques d'homogénéisation des milieux aident fortement à simplifier toutes ces problématiques.

Une des ces techniques est la prise de moyenne volumique par lesquels les volumes élémentaires représentatifs V.E.R sont variables dans le temps du fait du caractère déformable du milieu.

3- Modèle capillaro-poreux (milieu non déformable)

Ce modèle prend en compte le caractère hygroscopique du matériau par la fraction massique de vapeur d'eau et décrit de manière précise les transferts de chaleur et de masse dans le milieu, tout en tenant compte de la vitesse du fluide en utilisant la loi de Darcy Généralisée dont le terme moteur est le gradient de pression. Cette modélisation est très utile dans l'étude de séchage de milieux poreux triphasiques car elle utilise la notion de pression capillaire (Couture (1995) ; Prat (2002) ; Plourde et Prat (2003) ; Dantas et al. (2003)), quantité accessible par la mesure.

Une connaissance basique de certains concepts ou relations est requise avant d'aborder la modélisation d'un milieu capillaro-poreux.

Dans la plupart des études, les modèles physiques décrivant le transfert d'humidité sont basés sur l'existence de deux régions différentes désignées sous le nom de « région nonhygroscopique » et « région hygroscopique ». Cette dernière région est caractérisée par la présence dominante de l'eau liée (Perré and Degiovanni (1990) ; Goyeneche et al. (2001)). Dans la région non-hygroscopique, l'eau libre occupe la partie principale des pores dans le milieu et est maintenue par les forces capillaires.

Whitaker propose une nouvelle façon d'écrire les équations de transfert de chaleur et de masse dans les milieux poreux (Whitaker (1977)). Il démarre avec un système d'équations de conservation (thermique et hydrique) pour les trois phases contenues dans le milieu (solide, liquide et gaz) et ensuite il applique pour chacune des phases la prise de moyenne en prenant un volume élémentaire représentatif (V.E.R) à l'échelle du pore ; ces paramètres moyennés permettent de considérer le milieu poreux comme un milieu continu équivalent.

4- Modèles macroscopiques à composante unique

Luikov (1968, 1972) a développé un ensemble d'équations aux dérivées partielles couplées pour décrire le transfert de chaleur et de masse dans les matériaux poreux en supposant que le transfert d'humidité est analogue au transfert thermique et que le transfert de masse est proportionnel au gradient d'humidité et de température. Son modèle a été basé sur les relations réciproques d'Onsagers de la thermodynamique des processus irréversibles, donnant un ensemble d'équations de transfert avec les coefficients phénoménologiques qui sont des fonctions du milieu poreux. Deux groupes principaux de modèles ont dérivé de l'approche de Luikov pour le séchage du bois, soit les modèles de diffusion et les modèles basés sur un potentiel énergétique.

5- Les relations constitutives

Les propriétés hydrodynamiques d'un sol sont définies par la courbe de rétention et par la courbe de conductivité hydraulique. La courbe de rétention représente la relation entre le potentiel matriciel et la teneur en eau du sol. Elle indique la quantité d'eau que le sol peut retenir à un potentiel donné. Cette propriété est influencée à la fois par la texture et par la structure du sol. Les sols qui ont une texture fine, tels que les sols argileux, retiennent plus d'eau que ceux à texture grossière, comme les sols sableux. La conductivité hydraulique caractérise la capacité d'un sol à transmettre l'eau.

Les relations entre variables d'état, qui ont été évoquées dans les modèles précédents, sont décrites par des relations constitutives ou fonctionnelles traditionnellement réparties en deux groupes (Raats (2001)):

➤ Le premier groupe de fonctionnelles permet de linéariser l'équation de transfert, par le biais de transformations, une résolution analytique de l'écoulement. Dans cette catégorie figurent les modèles où la diffusivité D est constante (modèle linéaire), varie suivant une fonction échelon (modèle de Green-Ampt) ou une fonction puissance (modèle de Brooks et Corey).

Les modèles de Gardner (relation exponentielle entre la conductivité et la pression) non linéaires sont également utilisés.

➤ Le second groupe de relations constitutives est préféré dans les études numériques. La démarche constitutive consiste à définir un modèle de courbe de rétention d'eau qui exprime la relation entre la teneur en eau et la pression. La conductivité relative est ensuite calculée à partir de considérations microscopiques sur la distribution des tailles de pores.

Les modèles de Mualem – van Genuchten et Mualem – Brooks et Corey sont les plus fréquemment utilisés.

5-1. La courbe de rétention d'eau

En supposant que l'eau et l'air sont les deux phases mobiles présentes dans le milieu poreux incompressible, la teneur en eau réduite, ou saturation effective S_e , est généralement exprimée par la relation :

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad [\text{II.6}]$$

où θ_s correspond à la teneur en eau à saturation, et θ_r représente la teneur en eau résiduelle.

Tableau [II.1]: Formulation de la courbe de rétention d'eau pour différents modèles

Références	Formulation et Condition	Paramètres
van Genuchten (1980)	$Se = 1 / \left[1 + (\alpha h ^n) \right]^m$ $h < 0$	$m = 1 - 1/n$ Mualem (suggéré) n et α : paramètres de forme
Brutsaert (1966), Ahuja-Swartzendruber (1972)	$Se = 1 / \left[1 + (\alpha h ^n) \right]$ $h < 0$	n et α : paramètres de forme
Fredlund et Xing (1994)	$Se = 1 / \left[\ln(e + (\alpha h ^n)) \right]^m$ $h < 0$	$\alpha = 1/ h_{inf} $; m et n : paramètres de forme
Brooks – Corey (1964)	$Se = 1 / (\alpha h)^\lambda$ $\alpha h < 1$	$\alpha = 1/ h_a $; λ : paramètre lié aux tailles de pores
Tani (1982), Russo (1988), Ross <i>et al.</i> (1993)	$Se = [1 + (\alpha h)] \exp(-\alpha h)$ $h < 0$	$\alpha = 1/ h_{inf} $
Kosugi (1996)	$Se = 1/2 \operatorname{erfc} \left\{ \frac{[\ln(\alpha h)]}{2\sigma} \right\}$ $h < 0$	σ : paramètre lié aux tailles de pores ; $Se(h = 1/ \alpha) = 0.5$

Pour tous les modèles précédents, $Se = 1$ si la condition sur la pression n'est pas respectée

Ce Tableau récapitule quelques modèles décrivant la courbe de rétention d'eau tels que répertoriés par Raats (2001) et Kosugi et al. (2002).

5-2. La pression capillaire

Dans un milieu poreux la pression capillaire est fonction de la quantité de phase mouillante occupant l'espace des pores, c'est à dire de la saturation. L'hypothèse de pores cylindriques n'est donc pas applicable et une modélisation de cette évolution de manière théorique est difficilement réalisable. Leverett (1940) a développé une relation semi-empirique donnant des corrélations entre la pression capillaire et la saturation. Leverett a tracé une pression capillaire dimensionnelle J (fonction de Leverett) en fonction de la saturation :

$$P_c = \sqrt{\frac{\psi}{K}} \cdot \sigma J(s) \tag{II. 7}$$

$\sqrt{\frac{K}{\psi}}$ longueur caractéristique représentant la dimension moyenne des pores et en négligeant l'effet de la mouillabilité.
 $J(s)$ c'est la fonction de Leverett.

Cette corrélation rejoignait relativement bien les données expérimentales, une pour l'imbibition (déplacement de la phase non mouillante par la phase mouillante, également appelée « saturation ») et l'autre pour le drainage (ou « désaturation »).

Kaviany (1995) recense des corrélations basées sur la formulation de Leverett:

Tableau [II.2] Corrélations pour la pression capillaire, Kaviany (1995)

	Corrélations
(a) Eau-air-sable	$P_c = \sqrt{\frac{\psi}{K}} \cdot \sigma [0.364(1-\exp(-40+40s))+0.221(1-s)+0.005/(s-0.08)]$
(b) Eau-air-sol et grès	$s = s_{ir} + \frac{1 - s_{ir} - s_{irg}}{\left[1 + \left(\alpha_1 \frac{P_c}{\rho_l g}\right)^n\right]^{n-1/n}}$ <p>quand $n > 1$, α_1 est constante, n et α_1 dependent du processus de drainage ou d'imbibition</p>
(c) Imbibitions, sable non-consolidé, Données de Leverett (1941) eau- air	$P_c = \sqrt{\frac{\psi}{K}} \cdot \sigma [1.417(1-S) - 2.120(1-S)^2 + 1.263(1-S)^3]$ $S = \frac{s - s_{ir}}{1 - s_{ir} - s_{irg}}$
(d) Drainage, huile-eau dans du grès	$P_c = \sqrt{\frac{\psi}{K}} \cdot \sigma [\alpha_1 - \alpha_2 \ln(s - s_{ir})]$ $\alpha_1 = 0.30 \quad \alpha_2 = 0.0633 \quad s_{ir} = 0.15$

- a) Scheidegger (1974) de l'expérience de Leverett (1941);
- b) Van Genuchten (1980);
- c) Udeil (1985)
- d) Pavone (1989) .

Tableau III.1. Quelques valeurs ajustées de la relation proposée par Van Genuchten

Source : le sol : propriétés et fonctions de Raoul CALVET Volume2

SOL	θ_m	θ_r	α	m
Sable	0.25	0.153	0.0079	0.9038
Limon sableux	0.469	0.190	0.00505	0.8734
Limon	0.52	0.218	0.0115	0.5169
Sol argileux	0.45	0.286	0.00202	0.3711

5-3. La conductivité hydraulique

La conductivité relative macroscopique est obtenue par intégration de la contribution des pores donnée par la relation de Poiseuille. La distribution statistique des tailles de pores, la définition de modèles de tortuosité et de connectivité sont alors nécessaires, en plus de la relation précédente entre pression et teneur en eau.

Plusieurs études ont été faites

- (Tietje et Hennings 1996) pour la conductivité hydraulique à saturation,
- (Bohne et al. 2000), (Wagner et al. 2001) et (Wanger et al. 2002) pour la conductivité hydraulique en condition non saturée,
- (Wagner et al. 2004) pour l'ensemble des propriétés hydrodynamiques.

Le Tableau suivant récapitule l'expression de la conductivité relative dans le cas particulier du modèle de Mualem.

Tableau [II.3]: Expression de la conductivité relative pour différents modèles

Références	Formulation
Van Genuchten (1980)	$K_r = Se^L \left[1 - (1 - Se^{1/m})^m \right]^2$
Brooks – Corey (1964)	$K_r = Se^{L+2+2/\lambda}$
Tani (1982), Russo (1988), Ross et Smetten (1993)	$K_r = Se^L \exp(-\alpha h)$
Kosugi (1996)	$K_r = Se^L \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\operatorname{erfc}^{-1}(2Se) + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right] \right\}^2$

6- Transfert d'humidité

➤ **sous forme liquide**

A l'échelle macroscopique, le flux massique de liquide J est donné par la loi de DARCY :

$$\vec{J} = -\rho_w k_w \overrightarrow{\operatorname{grad}} h_w \tag{II.8}$$

où k_w est le coefficient de perméabilité à l'eau liquide (m/s), h_w est la charge hydraulique de l'eau et ρ_w est la masse volumique de l'eau liquide. La charge hydraulique, quant à elle, est définie par :

$$h_w = \frac{P_w}{\rho_w g} + z \quad [\text{II.9}]$$

avec P_w pour la pression d'eau liquide, z définissant la cote verticale positive vers le bas et g l'accélération de la pesanteur. Avec la relation [II.6] et en négligeant l'action de la gravité, nous pouvons réécrire la loi de Darcy sous une forme plus couramment utilisée dans la littérature :

$$\vec{J} = -\rho_w \frac{K_w}{\mu_w} \overrightarrow{\text{grad}P_w} \quad [\text{II.10}]$$

De manière à exprimer le flux d'eau liquide sur toute la plage d'humidité (loi de Darcy généralisée), on écrit souvent la perméabilité à l'eau liquide K_w sous la forme :

$$K_w = Kk_w(S_w) \quad [\text{II.11}]$$

où K est la perméabilité intrinsèque du matériau (telle que la définit la loi de DARCY pour un milieu saturé) et k_w est la perméabilité relative (comprise entre 0 et 1) qui est fonction du degré de saturation S_w .

La prédiction des propriétés de perméabilité d'un matériau poreux n'est pas chose aisée. Une étude détaillée des approches utilisées a été proposée par Marchand et Gerard, 1995.

➤ Sous forme gazeuse

Dans le cadre de la thermodynamique des milieux poreux, la positivité de la dissipation (conséquence du second principe (Coussy, 1991) associée au transfert de la phase gazeuse permet de montrer que le transfert d'humidité est lié :

- à un phénomène de type perméation (loi de Darcy) sous gradient de pression totale (c'est à dire pression d'air + pression de vapeur d'eau),
- à un phénomène de type diffusion (loi de Fick) lié aux gradients de concentration.

Cependant, la littérature considère souvent que la pression totale est constante dans le matériau et néglige dès lors le transfert d'humidité associé aux gradients de pression totale [Granger, 1996. et Baroghel, 1994].

Ainsi, les mouvements d'eau sous forme vapeur peuvent être correctement décrits par une loi de Fick exprimant le flux massique de vapeur d'eau par

Le Potier C., 1999:

$$\vec{J} = -\rho_g D \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\rho_v}{\rho_g} \quad [\text{II.12}]$$

Où ρ_g est la masse volumique de la phase gazeuse, ρ_v est la masse volumique de la phase vapeur et D est le coefficient de diffusion libre de la vapeur dans le milieu poreux.

Dans un milieu poreux non saturé, la vitesse de déplacement de la vapeur d'eau est inférieure à celle obtenue dans le cas d'une diffusion dans l'air. On peut alors introduire un facteur de résistance f tel que (Coussy, 1991) :

$$D = f \cdot \delta_{va} \quad [\text{II.13}]$$

où δ_{va} est le coefficient de diffusion libre de la vapeur d'eau dans l'air. Il vaut $2,47 \cdot 10^{-5}$ m²/s pour $T = 20^\circ\text{C}$ et $P = P_{atm}$ (Daian J.F., 1986).

Il est donné en fonction de la température et de la pression par Krischer, 1992 :

$$\delta_{va}(T, P) = 2.26 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{T}{T_R} \right)^{1.81} \frac{P_R}{P_g} \text{ en m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad [\text{II.14}]$$

La phase gazeuse n'est pas présente dans tout le volume poreux mais uniquement dans la zone non occupée par les phases capillaire ou adsorbée. Le facteur de résistance f doit donc tenir compte de la section réelle Σ_{eff} de passage du flux de vapeur définie par :

$$\Sigma_{eff} = \psi - \theta = \psi(1 - S) \quad [\text{II.15}]$$

où θ est teneur en eau volumique et ψ la porosité du milieu.

7- Variations hydriques du sol

Les propriétés hydrodynamiques du sol sont variées temporellement et spatialement. Ce qui signifie que le suivi du régime hydrique du sol n'est pas une tâche facile et que le profil de la teneur en eau du sol est hétérogène et irrégulier.

Le problème est encore plus compliqué notamment dans les sols travaillés, (les premiers 30 centimètres du sol). Grayson et al. (1997), a souligné que l'hétérogénéité spatiale du profil de la teneur en eau est contrôlée par plusieurs facteurs parmi eux les propriétés hydrodynamiques du sol.

Dans les sols nus et cultivés, l'existence d'une croûte à la surface du sol influence fortement les propriétés hydrodynamiques du sol, le taux de ruissellement et la rugosité de la surface du sol (Le Bissonais et al. 2005), (Hebrard et al. 2006).

8- Variations thermiques du sol

La température du sol présente de variations continues sous l'influence des conditions climatiques, qui déterminent l'intensité des échanges énergétiques entre le sol et l'atmosphère

Les variations de conditions climatiques, et notamment l'intensité du rayonnement solaire, s'effectuent d'une manière relativement stable selon des cycles périodiques, notamment à l'échelle quotidienne et à l'échelle annuelle.

Musy et Soutter, 1991 : Guyot : 1999) ont modélisé la variation temporelle de la température du régime thermique du sol par l'expression très utilisée et qui est donnée par :

$$T(z, t) = \bar{T} + A_0 e^{-z/d} \sin\left(\omega t + \phi_0 + \frac{z}{d}\right) \quad [\text{II.16}]$$

$\phi_0 = \omega t_0$ est la constante de phase et d la profondeur d'amortissement.

Le déphasage augmentant avec la profondeur, il existe une profondeur à laquelle les maxima sont en phase avec ceux de la courbe de température superficielle.

shao et al.(1998) suppose que la densité de flux de l'eau (W) est périodique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + [A + B \sin(\omega t)] \frac{\partial T}{\partial z} \quad [\text{II.17}]$$

Avec A et B sont des constantes avec les dimensions d'une vitesse.
 a est la diffusivité thermique

Ils ont en outre dérivé une solution analytique au problème, il y a deux processus séparés incorporés dans la solution analytique. Leur méthode exige non seulement la température de surface de sol, mais également un profil initial de la température de sol, qui compliquerait son utilisation dans les modèles numériques.

Gao et al. (2003) résout analytiquement l'équation unidimensionnelle de conduction-convection thermique dans le sol en appliquant la méthode harmonique. Ces études représentent les derniers développements dans les prédictions de la distribution de la température du sol et la densité de flux d'eau.

Heusinkveld et al.(2004), montre la variation journalière des températures de sol en surface (0 m) et en profondeurs (0.015 m, 0.034 m, 0.050 m, et 0.100 m au sol de désert.

La figure ci-après montre qu'il ya diminution de l'amplitude thermique avec la profondeur en raison de l'amortissement de l'onde thermique, cela veut dire que les variations de température de la surface du sol n'ont plus d'effet (on remarque que ces ondes commencent disparaître à partir de 10 cm).

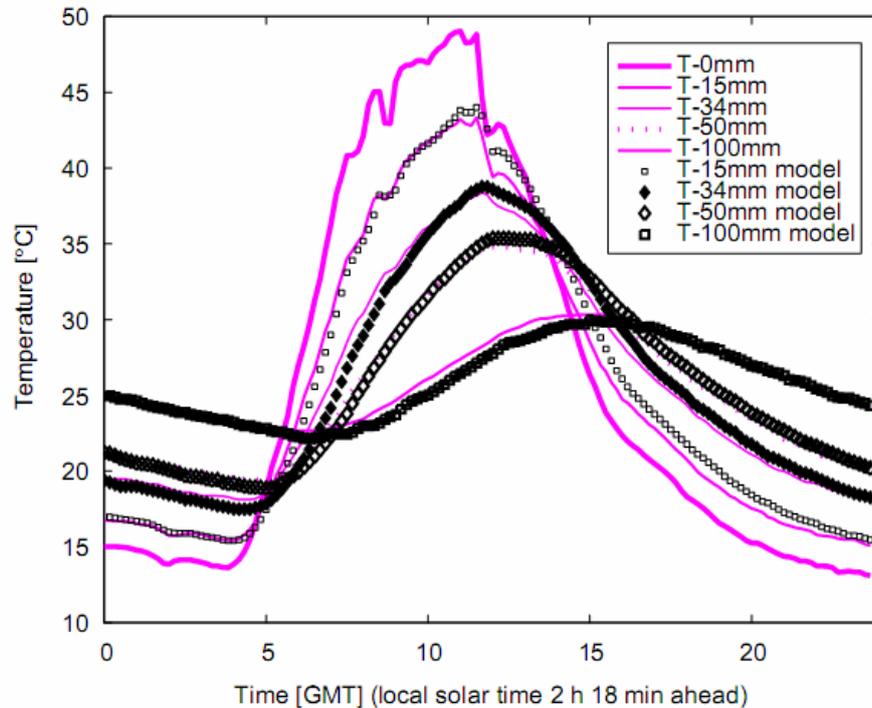


Fig. II.1 variation de la température (mesure et modèle: analyse harmonique) à la surface et aux niveaux peu profonds d'un sol de désert [Heusinkveld et al.(2004)]

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principales études des écoulements dans les milieux poreux.

La méthode de prise de moyenne volumique étant la méthode de changement d'échelle la plus adaptée à l'étude de notre problème. Elle est basée sur la définition d'un opérateur de moyenne volumique qui, appliqué aux équations de transport gouvernant le phénomène à l'échelle microscopique, permet de dériver les équations de transport de ce même phénomène à l'échelle macroscopique. Cet opérateur de moyenne est défini sur un volume de prise de moyenne appelé volume élémentaire représentatif.

Le choix de la taille du volume élémentaire représentatif est important. En effet, cette taille doit être suffisamment grande, afin que les quantités filtrées aient un sens et suffisamment petite afin de préserver le plus d'information possible.

Chapitre III

Modèle mathématique

Introduction

Le transfert hydrique dans les milieux poreux a été souvent abordé dans différents champs d'application tels que la science de sol, le génie civil, l'agronomie...etc. Il se distingue généralement par un transport lent dû essentiellement à la structure poreuse du milieu.

La résolution d'un problème de transfert de masse et de chaleur dans un sol non saturé revient à déterminer en toute profondeur du sol et à tout instant les grandeurs caractéristiques telles que: la température, la teneur en eau et la masse volumique des 3 phases. Ce qui permet ensuite de calculer les flux de chaleur et de masse.

Pour calculer ces paramètres indiqués ci dessus, il est nécessaire d'établir ou de disposer des équations qui décrivent le mouvement des fluides, on fait souvent appel à :

- des lois empiriques de type Darcy – Fick, dérivés de l'observation expérimentale et ayant pour principe le suivant : le transport s'effectue sous l'effet des gradients des potentiels (capillaires, chimiques, osmotiques, ou thermiques).
- Aux principes de conservation de la mécanique et de la thermodynamique.

Ainsi on obtient les équations de conservations de la masse, de la quantité de mouvement (équation vectorielle équivalente à trois équations scalaires), de l'énergie, et ce, pour les 3 phases.

Une fois les équations sont posées, nous aboutirons à un modèle qui est régi par un système d'équations que nous devrions résoudre par l'une des méthodes numérique, dans notre cas la résolution se fera par la méthode des volumes finis.

1. Hypothèses simplificatrices

Afin de nous limiter aux phénomènes que l'on estime dominants et de simplifier un certain nombre de calculs, on adopte les hypothèses suivantes :

- H1** : Les déformations de la phase solide sont négligées, sa vitesse est donc nulle.
- H2** : La phase liquide, qui occupe une partie de l'espace inter-granulaire, ne réagit pas chimiquement avec les autres constituants.
- H3** : Le phénomène de changement de phase se produit aux interfaces liquide-gaz, liquide-solide et gaz-solide. Le refroidissement est localisé sur cette interface et on admet qu'il y a équilibre thermique entre les phases liquide, solide et gaz, ce qui se traduit par une température locale identique pour ces trois phases.
- H4** : On suppose que les accélérations des phases et des constituants sont faibles.

- H5** : La phase liquide est considérée comme de l'eau pure. Cette hypothèse est nécessaire pour ne pas avoir à prendre en compte les perturbations induites par la présence d'ions sur l'équilibre liquide-vapeur-solide de l'eau, la masse volumique de l'eau ou encore sa viscosité.
- H6** : La phase liquide est incompressible. Cette hypothèse nous permet de ne pas prendre en compte la variation de la masse volumique en fonction de la pression de la solution interstitielle. Cette hypothèse est très souvent admise.
- H7** : La phase gazeuse est constituée d'un mélange gazeux d'air sec et de vapeur d'eau. Ces deux gaz sont supposés se comporter comme des gaz parfaits, et le mélange obéit aussi à la loi des gaz parfaits (mélange idéal).
- H8** : Le mélange gazeux est à pression totale constante et uniforme.
- H9** : Il n'y a pas de prise en compte des forces de gravité. Ces dernières sont négligées devant les forces capillaires. Cette hypothèse ne pose pas de problème pour la phase gazeuse, et est aussi particulièrement vraie pour la phase liquide à faible saturation.
- H10** : Nous supposons de petites variations de masse volumique des constituants.

2. Caractéristiques des trois phases

a) la vapeur d'eau

➤ L'humidité de l'air

La loi de Dalton indique que la pression totale de l'air, est la somme des pressions partielles de vapeur et d'air. Ce qui donne :

$$P_{atm} = P_g = P_v + P_a \text{ soit } P_a = P_{tot} - P_v \quad [\text{III.1}]$$

La quantité de vapeur d'eau contenue dans l'air est variable. L'air est sec s'il ne contient pas d'eau, il est humide dans le cas contraire. Cependant, la masse d'eau dans l'air ne peut dépasser une valeur limite correspondant à une pression partielle égale à la pression de vapeur saturante de l'eau à la température considérée. L'éventuel excédent de vapeur d'eau se condensera sous forme de gouttelettes, soit dans le volume d'air (brouillard, pluie), soit à la surface du sol ou des objets (rosée, buée).

➤ Humidité absolue

On définit l'humidité absolue «*x*» de l'air comme la masse «*m*» de vapeur d'eau contenue dans l'air sec :

$$x = \frac{m_{\text{vapeur}}}{m_{\text{air sec}}} \quad [\text{III.2}]$$

➤ **Humidité relative**

L'humidité relative « Hr » de l'air (exprimée en %) à la température T , par le rapport entre la pression partielle P_v de la vapeur d'eau et la pression de vapeur saturante P_v^{sat} d'où on a :

$$Hr = \frac{P_v}{P_v^{sat}(T)} = \begin{cases} 1 & \text{Si } X > X_{irr} \\ \frac{X}{X_{irr}} \left(2 - \frac{X}{X_{irr}} \right) & \text{Si } X \leq X_{irr} \end{cases} \quad \text{[III.3]}$$

➤ **la pression de vapeur à la saturation**

C'est la pression maximale que la vapeur d'eau peut atteindre à une température donnée lors de sa saturation.

Elle est donnée en fonction de la température T (en °C) par Vargaftik, N., (1996),

$$P_v^{sat}(T) = 133.32 \exp \left[18.584 - \frac{3984.2}{233.426 + T} \right] \quad \text{[III.4]}$$

➤ **Coefficient de diffusion libre de la vapeur**

La vapeur migre d'une zone de concentration forte vers une zone de concentration plus faible. Ce processus s'appelle diffusion moléculaire ou diffusion. La diffusion existera tant qu'un gradient de concentration existe, même si le fluide ne s'écoule pas. La masse de fluide diffusée est proportionnelle au gradient de concentration qui peut s'exprimer par la loi de Fick. On définit le coefficient de diffusion de vapeur δ_{va} , calculé par l'équation donnée par Schirmer, 1992 :

$$\delta_{va}(T, P) = 2.26 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{T}{T_R} \right)^{1.81} \frac{P_R}{P_g} \quad \text{[III-5]}$$

➤ **La perméabilité relative en gaz**

Elle est donnée par [van Genuchten, 1980]:

$$k_g(S) = \left(1 - (S)^b \right)^{2m} \sqrt{1 - S} \quad \text{[III-6]}$$

Avec $m=1/b$

b et m sont des paramètres de calage spécifique pour tout type de milieu poreux. Leurs valeurs sont données dans le tableau III.1.

b) La phase liquide**➤ Tension superficielle en milieu poreux**

La tension superficielle $\sigma(T)$ [N/m] est l'énergie (travail) requise pour créer une nouvelle unité de surface à l'interface entre deux fluides non miscibles. On distingue la tension superficielle, qui est présente entre deux fluides non miscibles, de la tension de surface, qui se produit entre un liquide et sa vapeur.

Son expression en fonction de la température T (en °C) est donnée par Vargaftik, (1996), et qui est:

$$\sigma(T) = -1.3 \cdot 10^{-7} T^2 - 1.58 \cdot 10^{-4} T + 0.07606 \quad \text{[III-7]}$$

➤ La pression capillaire en milieu poreux

Pour que ce modèle de transfert soit complet, on doit encore relier la pression capillaire en fonction de la saturation en eau liquide. A l'échelle d'un pore, lorsque deux phases fluides (l'une liquide et l'autre gazeuse) sont présentes, elles sont séparées par une interface courbe. La pression est discontinue à la traversée de cette interface. La différence de pression entre la phase non mouillante (gaz) et la phase mouillante (eau) est la pression capillaire.

Van Genuchten (1980) a proposé une expression analytique simple qui permet la représentation des courbes capillaires en établissant la relation entre la saturation effective S_{we} avec la pression capillaire P_c (Pa) à l'aide de deux paramètres empiriques, α (Pa⁻¹) et m .

$$P_c = \frac{1}{\alpha} \left[(S_{we})^{\frac{1}{m}} - 1 \right]^{1-m} \quad \text{[III-8]}$$

$$S_{we} = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_m - \theta_r} \quad \text{[III-9]}$$

➤ La masse volumique de l'eau

Elle peut être estimée à l'aide d'une équation empirique qui dépend de la température et qui s'écrit :

$$\rho_w = 999,9 + 0,0315(T - 273,15) - 0,0057(T - 273,15)^2 \quad \text{[III-10]}$$

➤ La viscosité dynamique liquide

Elle ne dépend que de la température. Elle diminue avec l'augmentation de la température:

$$\mu_w = -1.27.10^{-9}T^3 + 3.42.10^{-7}T^2 - 3.43.10^{-5}T + 1.56.10^{-3} \quad \text{[III-11]}$$

Où T est la température en °C.

➤ **La conductivité thermique de l'eau.**

Elle est exprimée en fonction de la température T (en °C) par Vargaftik, (1996):

$$\lambda_w(T) = -2.9.10^{-11}T^4 + 4.1.10^{-8}T^3 - 0.016.10^{-3}T^2 + 2.5.10^{-3}T + 0.55 \quad \text{[III-12]}$$

➤ **La teneur en eau liquide massique**

Elle est définie dans l'équation [I. 13] comme la masse d'eau sur la masse de solide, et on peut aussi l'écrire en combinant les équations de définition, en fonction de la porosité et de la saturation en eau sous la forme suivante:

$$X = \frac{\psi \rho_w S}{(1 - \psi) \rho_s} \quad \text{[III-13]}$$

➤ **La perméabilité relative en eau liquide**

Elle est donnée par [van Genuchten, 1980]:

$$k_w(S) = \left(1 - \left(1 - (S)^b\right)^m\right)^2 \sqrt{S} \quad \text{[III-14]}$$

c) La phase solide

➤ **La conductivité effective de diffusion de vapeur**

L'expression de la conductivité effective de diffusion de vapeur $\lambda_{eff}(S, T)$, est donnée par :

$$\lambda_{eff}(S, T) = (1 - \psi) \cdot \lambda_s + S \cdot \psi \cdot \lambda_w(T) \quad \text{[III-15]}$$

λ_s la conductivité thermique du sol.

Le sol étudié dans ce travail, est situé à l'université de Tizi-Ouzou.

Le Laboratoire Central Des Travaux Publics de Tizi-Ouzou LCTP nous a remis ces données :

- La masse volumique du sol : $\rho_s = 1515 \text{ kg/m}^3$
- La conductivité thermique : $\lambda_s = 1 \text{ W/mK}$
- La capacité thermique du sol : $C_{p,s} = 1270 \text{ J/kgK}$
- La porosité du sol : $\psi = 40\%$
- La perméabilité intrinsèque $K = 10^{-14} \text{ m}^2$

3. Formulations mathématiques des concepts de base

La prise de moyenne volumique est une technique d'homogénéisation par changement d'échelle.

Comme nous l'avons vu, la description à la première échelle, que nous appellerons échelle des phases (ou microscopique), est assurée par l'écriture des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie au sein de chaque phase.

L'intégration de ces équations sur un volume élémentaire représentatif (V.E.R.) conduit à la modélisation des phénomènes de transport au sein d'un milieu équivalent macroscopiquement homogène. A cette échelle, dite échelle locale, le V.E.R. devient un point géométrique.

Rappelons que les variables utilisées sont définies à l'échelle du V.E.R. et que les équations découlent de l'approche macroscopique adoptée.

La loi de conservation de la masse appliquée aux phases liquide et gazeuse pour un écoulement vertical s'écrit sous la forme:

$$\frac{\partial(\rho_i \cdot \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i \cdot v_i)}{\partial x} - \rho_i q_i = 0 \quad \text{[III-16]}$$

ρ , la masse volumique de la phase i (kg/m^3);

q_i , le débit source ou puits de la phase i par unité de volume de sol (en s^{-1}), positif s'il y a apport de matière;

v_i est la vitesse de Darcy de la phase i (en m/s),

$i = w$ pour l'eau et $i = g$ pour le gaz;

Les vitesses de Darcy sont données par la loi de Darcy généralisée au cas des écoulements dans la zone insaturée.

3.1. A l'échelle du pore

Vers la fin des années 70 et du début des années 80, Whitaker (1977; 1980) présentait un ensemble d'équations pour décrire le transfert de la chaleur et de la masse d'un milieu poreux. Ce modèle est basé sur les lois traditionnelles de conservation

➤ Equation de conservation de la masse

Les équations de conservation sont écrites pour chaque constituant dans chaque phase

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad \text{[III-17]}$$

Pour un milieu multiphasique (i représente la phase)

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{v}_i) = 0 \quad \text{avec } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad \text{[III-18]}$$

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{\rho} \mathbf{v}_i \quad \text{[III-19]}$$

$$\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i \quad \text{[III-20]}$$

➤ **Equation de conservation de la quantité de mouvement**

Elle est déduite du principe fondamental de la dynamique pour la masse intérieure à l'élément de volume considéré.

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} \quad \text{[III-21]}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad \text{[III-22]}$$

\mathbf{T} représente le tenseur des contraintes.

NB :

Cette équation n'intervient pas dans nos équations car les mouvements des phases se font lentement (voir hypothèse H4).

➤ **Equation de conservation de d'énergie**

Elle est déduite du premier principe de la thermodynamique

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(\rho E)}_{\text{variation de l'énergie interne}} = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T)}_{\text{flux de chaleur (conduction)}} - \underbrace{P \vec{\nabla} \cdot (\vec{v})}_{\text{effet de la pression (processus réversible)}} + \underbrace{\bar{\tau} : \vec{\nabla} \vec{v}}_{\text{dissipation visqueuse (processus irréversible)}} + \underbrace{\Phi}_{\text{sources de chaleur internes: rayonnement thermique, réactions chimiques...}} \quad \text{[III-23]}$$

Ou alors :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)}_{\text{terme de transition}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho h \mathbf{v})}_{\text{terme de convection}} = \underbrace{-\nabla \cdot \mathbf{q}}_{\text{terme de conduction}} + \underbrace{\frac{dP}{dt}}_{\text{terme de pression}} + \underbrace{\tau : \nabla \mathbf{v}}_{\text{terme de viscosité}} + \underbrace{\Phi}_{\text{terme source}} \quad \text{[III-24]}$$

Tels que :

h : enthalpie par unité de masse

$\bar{\tau}$: Tenseur des contraintes visqueuses

$\bar{\tau} : \nabla v$ Dissipation visqueuse

$\frac{dP}{dt}$: Le travail de compression

Φ : Source d'énergie.

Le flux conductif q est donné par la loi de Fourier :

$$q = -\lambda \nabla T \quad [\text{III-25}]$$

Dans cette étude : $\tau : \nabla v = 0$ et $\frac{dP}{dt} = 0$

Donc l'équation d'énergie est réduite à :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \nabla \cdot (\rho h v) = -\nabla \cdot q \quad [\text{III-26}]$$

On suppose que l'enthalpie est indépendante de la pression et que la capacité calorifique est constante :

$$h = C_p(T - T_R) \quad [\text{III-27}]$$

T_R température de référence

Les lois de conservation discutées ci-dessus sont maintenant appliquées à chaque phase.

3.1. a. Phase solide

La phase solide est considérée comme rigide et fixe dans l'espace sa vitesse est donc nulle

$$v_s = 0 \quad [\text{III-28}]$$

Ceci signifie que pour cette phase nous devons étudier seulement la conservation de l'énergie

$$\rho_s \frac{\partial h_s}{\partial t} = -\nabla \cdot q_s \quad [\text{III-29}]$$

On remplace q et h par leurs expressions données précédemment :

$$\rho_s C_{p,s} \frac{\partial T_s}{\partial t} = \lambda_s \nabla^2 T_s \quad [\text{III-30}]$$

3.1.b. Phase liquide

Pour la phase liquide, qui contient l'eau comme seul composant, l'équation de conservation de la masse est :

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{v}_w) = 0 \quad \text{[III-31]}$$

L'équation d'énergie est :

$$\rho_w C_{p,w} \left(\frac{\partial T_w}{\partial t} + \mathbf{v}_w \cdot \nabla T_w \right) = \lambda_w \nabla^2 T_w \quad \text{[III-32]}$$

3.1.c. Phase gaz

La phase gazeuse est plus compliquée que la phase solide ou liquide car elle contient deux composants: air et vapeur. La conservation de la masse de la phase gazeuse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{v}_g) = 0 \quad \text{[III-33]}$$

Dans cette phase on a

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_g + \mathbf{u}_i \quad \text{[III-34]}$$

\mathbf{v}_i : vitesse de l'espèce i

\mathbf{u}_i : vitesse de diffusion de l'espèce i

\mathbf{v}_g : vitesse moyenne du gaz

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{v}_i) = -\nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i) \quad \text{avec } i = a, v \quad \text{[III-35]}$$

On exprime le flux diffusif $\rho_i \mathbf{u}_i$ par :

$$\rho_i \mathbf{u}_i = -\rho \delta_{v,a} \nabla \left(\frac{\rho_i}{\rho_g} \right) \quad \text{[III-36]}$$

$\delta_{v,a}$ le coefficient de diffusion vapeur – air. Il est calculé par l'équation [III-5].

T_R et P_g sont la température et la pression de référence.

D'où l'équation de conservation de la masse devient :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{v}_g) = \nabla \cdot \left[\rho_g \delta_{v,a} \nabla \left(\frac{\rho_i}{\rho_g} \right) \right] \quad i = a, v \quad \text{[III-37]}$$

L'équation d'énergie pour un milieu multiphasique s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^N \rho_i h_i \right) + \nabla \cdot \left(\sum_{i=1}^N \rho_i h_i \mathbf{v}_i \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} \quad \text{[III-38]}$$

Avec h_i est l'enthalpie par unité de masse de la phase i et h est l'enthalpie moyenne :

$$h = \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{\rho} h_i \quad \text{[III-39]}$$

Donc l'équation d'énergie devient :

$$\rho_g C_{p,g} \underbrace{\left(\frac{\partial T_g}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla T_g \right)}_{\text{Dérivée particulaire}} = \lambda_g \nabla^2 T_g - \nabla \cdot (\rho_a h_a \mathbf{v}_a + \rho_v h_v \mathbf{v}_v) \quad \text{[III-40]}$$

Tel que :

$$C_{p,g} = (\rho_a C_{p,a} + \rho_v C_{p,v}) / \rho_g \quad \text{[III-41]}$$

Notons que les pressions se calculent par la loi des gaz parfaits :

$$P_i = \frac{\rho_i R T}{M_i} \quad \text{[III-42]}$$

$i = g, a$ ou v ; R = la constante des gaz parfaits ;

M_i = masse molaire de l'air, gaz ou de la vapeur

$$P_a + P_v = P_g \quad \text{[III-43]}$$

Conditions aux limites

Pour compléter l'ensemble des équations ci-dessus, nous devons spécifier les conditions aux limites des trois phases séparées.

Les conditions aux limites pour l'interface solide eau sont :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_w = 0 \\ q_s \cdot \hat{\mathbf{n}}_{w,s} = q_w \cdot \hat{\mathbf{n}}_{w,s} \\ T_s = T_w \end{cases} \quad \text{[III-44]}$$

Tel que $\hat{\mathbf{n}}_{w,s}$ représente le vecteur unitaire dirigé de la surface du solide vers la surface de l'eau

$$\hat{\mathbf{n}}_{s,w} = -\hat{\mathbf{n}}_{w,s}$$

Les conditions aux limites pour l'interface solide-gaz sont :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_g = 0 \\ q_s \cdot \hat{\mathbf{n}}_{s,g} = q_g \cdot \hat{\mathbf{n}}_{s,g} \\ T_s = T_g \end{cases} \quad \text{[III-45]}$$

Les conditions aux limites pour l'interface liquide-gaz sont :

$$\begin{cases} \rho_v (\mathbf{v}_v - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{gw} = \rho_w (\mathbf{v}_w - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{gw} \\ \rho_a (\mathbf{v}_a - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{gw} = 0 \\ \rho_g (\mathbf{v}_g - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{gw} = \rho_w (\mathbf{v}_w - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{gw} \\ \rho_w (h_v - h_w) (\mathbf{v}_w - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{gw} = (q_w - q_g) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{gw} \\ T_w = T_g \end{cases} \quad \text{[III-46]}$$

\mathbf{w} représente la vitesse de l'interface liquide-gaz.

3.2. Formulations des paramètres au niveau du VER

Le volume total est égal à la somme des volumes de toutes les phases :

$$V = V_s + V_w + V_g \quad \text{[III-47]}$$

Les paramètres précédemment définis sont essentiellement des caractéristiques macroscopiques du milieu poreux.

Si χ est une grandeur associée au milieu poreux considéré alors la grandeur χ à l'échelle macroscopique est définie comme la moyenne des grandeurs χ à l'échelle microscopique sur un volume équivalent au volume élémentaire représentatif soit :

$$\langle \chi \rangle = \frac{1}{V} \int_V \chi dV \quad [\text{III-48}]$$

$$\langle T_s \rangle = \frac{1}{V} \int_V T_s dV \quad [\text{III-49}]$$

$$\langle T_s \rangle^s = \frac{1}{V_s} \int_{V_s} T_s dV \quad [\text{III-50}]$$

$$\varepsilon_s = \frac{V_s}{V} \quad \varepsilon_w = \frac{V_w}{V} \quad \varepsilon_g = \frac{V_g}{V} \quad [\text{III-51}]$$

$$\varepsilon_s + \varepsilon_w + \varepsilon_g = 1 \quad [\text{III-52}]$$

$$\langle T_s \rangle = \varepsilon_s \langle T_s \rangle^s \quad [\text{III-53}]$$

D'après le théorème des moyennes :

➤ La moyenne d'un gradient est :

$$\langle \nabla \chi_w \rangle = \nabla \langle \chi_w \rangle + \frac{1}{V} \int_{S_{ws}} \hat{n}_{ws} \cdot \chi_w dS + \frac{1}{V} \int_{S_{wg}} \hat{n}_{wg} \cdot \chi_w dS \quad [\text{III-54}]$$

➤ La moyenne d'une divergence est :

$$\langle \nabla \cdot v_w \rangle = \nabla \cdot \langle v_w \rangle + \frac{1}{V} \int_{S_{ws}} v_w \cdot \hat{n}_{ws} dS + \frac{1}{V} \int_{S_{wg}} v_w \cdot \hat{n}_{wg} dS \quad [\text{III-55}]$$

Pour la moyenne des dérivées des paramètres par rapport au temps est :

$$\left\langle \frac{\partial T_w}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{V} \int_{V_w} \frac{\partial T_w}{\partial t} dV \quad [\text{III-56}]$$

$$\left\langle \frac{\partial T_w}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle T_w \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{S_{wg}} T_w w \cdot \hat{n}_{wg} dS - \frac{1}{V} \int_{S_{ws}} T_w w \cdot \hat{n}_{ws} dS \quad [\text{III-57}]$$

Appliquons tous ces paramètres moyennés dans l'équation de conservation pour la phase liquide et intégrons l'équation de conservation de la masse par rapport à V_w et divisons la sur le volume V .

$$\frac{1}{V} \int_{V_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial t} dV + \frac{1}{V} \int_{V_w} \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{v}_w) dV = 0 \quad [\text{III-58}]$$

D'une autre manière :

$$\left\langle \frac{\partial \rho_w}{\partial t} \right\rangle + \langle \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{v}_w) \rangle = 0 \quad [\text{III-59}]$$

Nous avons :

$$\left\langle \frac{\partial \rho_w}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \rho_w \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{S_{wg}} \rho_w w \hat{n}_{wg} dS - \frac{1}{V} \int_{S_{ws}} \rho_w w \hat{n}_{ws} dS \quad [\text{III-60}]$$

La vitesse à l'interface w-s est nulle donc l'équation de conservation s'écrit :

$$\frac{\partial \langle \rho_w \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{S_{wg}} \rho_w w \hat{n}_{wg} dS + \langle \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{v}_w) \rangle = 0 \quad [\text{III-61}]$$

On a d'après l'équation [III-55]

$$\langle \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{v}_w) \rangle = \nabla \cdot \langle \rho_w \mathbf{v}_w \rangle + \frac{1}{V} \int_{V_{ws}} \rho_w \mathbf{v}_w \cdot \hat{n}_{ws} dS + \frac{1}{V} \int_{V_{wg}} \rho_w \mathbf{v}_w \cdot \hat{n}_{wg} dS \quad [\text{III-62}]$$

Vu que l'interface w-s est imperméable $v_w \cdot \hat{n}_{ws} = 0$ alors :

$$\frac{\partial \langle \rho_w \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_w \mathbf{v}_w \rangle + \frac{1}{V} \int_{S_{wg}} \rho_w (\mathbf{v}_w - w) \cdot \hat{n}_{wg} dS = 0 \quad [\text{III-63}]$$

la variation de la masse volumique ρ_w est négligeable donc

$$\langle \rho_w \rangle = \varepsilon \langle \rho_w \rangle^w = \varepsilon_w \rho_w \quad [\text{III-64}]$$

Finalement l'équation de conservation de masse moyennée de la phase liquide :

$$\rho_w \frac{\partial \varepsilon_w}{\partial t} + \rho_w \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_w \rangle + \langle \dot{m} \rangle = 0 \quad [\text{III-65}]$$

Avec :

$$\langle \dot{m} \rangle = \frac{1}{V} \int_{S_{wg}} \rho_w (\mathbf{v}_w - w) \cdot \hat{n}_{wg} dS \quad [\text{III-66}]$$

3.3. A l'échelle macroscopique (Système d'Equations Moyennées)

- L'équation de conservation de la masse pour la phase liquide:

$$\rho_w \frac{\partial \varepsilon_w}{\partial t} + \rho_w \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_w \rangle + \langle \dot{m} \rangle = 0 \quad [\text{III-67}]$$

- L'équation de conservation de la masse de la vapeur d'eau:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_g \langle \rho_v \rangle^g \right) + \nabla \cdot \left(\langle \rho_v \rangle^g \langle \mathbf{v}_g \rangle \right) - \langle \dot{m} \rangle = \nabla \cdot \left[\langle \rho_g \rangle^g D_{eff} \cdot \nabla \left(\frac{\langle \rho_v \rangle^g}{\langle \rho_g \rangle^g} \right) \right] \quad [\text{III-68}]$$

- L'équation de conservation de la masse de l'air sec:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_g \langle \rho_a \rangle^g \right) + \nabla \cdot \left(\langle \rho_a \rangle^g \langle \mathbf{v}_g \rangle \right) = \nabla \cdot \left[\langle \rho_g \rangle^g D_{eff} \cdot \nabla \left(\frac{\langle \rho_a \rangle^g}{\langle \rho_g \rangle^g} \right) \right] \quad [\text{III-69}]$$

- L'équation de conservation d'énergie

$$\langle \rho \rangle C_p \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \left[\rho_w C_{p,w} \langle \mathbf{v}_w \rangle + \langle \rho_g \rangle^g \langle C_p \rangle^g \langle \mathbf{v}_g \rangle \right] \cdot \nabla \langle T \rangle + \Delta h_v \langle \dot{m} \rangle = \nabla \cdot (\lambda_{eff} \nabla \langle T \rangle) \quad [\text{III-70}]$$

Tel que :

$$\langle \rho \rangle C_p = \varepsilon_s \rho_s C_{p,s} + \varepsilon_w \rho_w C_{p,w} + \varepsilon_g \langle \rho_v \rangle^g C_{p,v} + \varepsilon_g \langle \rho_a \rangle^g C_{p,a} \quad [\text{III-71}]$$

Avec :

$$\langle \rho \rangle = \varepsilon_s \rho_s + \varepsilon_w \rho_w + \varepsilon_g \langle \rho_v \rangle^g + \varepsilon_g \langle \rho_a \rangle^g \quad [\text{III-72}]$$

$$\langle \mathbf{v}_w \rangle = - \frac{K \cdot k_w}{\mu_w} \cdot \nabla \langle P_w \rangle^w \quad [\text{III-73}]$$

$$\langle \mathbf{v}_g \rangle = - \frac{K \cdot k_g}{\mu_g} \cdot \nabla \langle P_g \rangle^g \quad [\text{III-74}]$$

Δh_v est l'enthalpie d'évaporation à 273°C égale à $2.5 \cdot 10^6$ J/kgK

$\lambda_{eff}(S, T)$ est la conductivité effective de diffusion de vapeur, son expression est donnée par :

$$\lambda_{eff}(S, T) = (1 - \psi) \cdot \lambda_s + S \cdot \psi \cdot \lambda_w(T) \quad [III-75]$$

λ_s la conductivité thermique du sol.

Remarque

➤ Les équations qui régissent le mouvement [III-67] ÷ [III-70] sont de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi - \nabla \cdot J = 0 \quad [III-76]$$

Par la suite, pour ne pas encombrer l'écriture des équations les termes moyennés seront notés sans l'indice : $\langle \rangle$ C'est-à-dire $\langle T \rangle$ sera notée par T, $\langle Pa \rangle^g$ par Pa... etc.

En additionnant les équations [III-67] et [III-68] nous obtenons l'équation de conservation de l'eau et de la vapeur d'eau suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_w \varepsilon_w + \rho_v \varepsilon_g) + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{v}_w + \rho_v \mathbf{v}_g) = \nabla \cdot \left[\rho_g D_{eff} \cdot \nabla \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \right] \quad [III-77]$$

L'équation de conservation de l'air sec s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_a \varepsilon_g) + \nabla \cdot (\rho_a \mathbf{v}_g) = \nabla \cdot \left[\rho_g D_{eff} \cdot \nabla \left(\frac{\rho_a}{\rho_g} \right) \right] \quad [III-78]$$

L'équation de conservation d'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_s \rho_s C_{p,s} + \varepsilon_w \rho_w C_{p,w} + \varepsilon_g \rho_v C_{p,v} + \varepsilon_g \rho_a C_{p,a}) \frac{\partial T}{\partial t} + \\ & \left[\varepsilon_w C_{p,w} \mathbf{v}_w + (\rho_v C_{p,v} + \rho_a C_{p,a}) \mathbf{v}_g \right] \cdot \nabla T + \Delta h_v \dot{m} = \nabla \cdot (\lambda_{eff} \nabla T) \end{aligned} \quad [III-79]$$

Le premier terme de cette équation s'écrit (en tenant compte de l'équation [III-27]):

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_s \rho_s C_{p,s} + \varepsilon_w \rho_w C_{p,w} + \varepsilon_g \rho_v C_{p,v} + \varepsilon_g \rho_a C_{p,a}) \frac{\partial T}{\partial t} = \\ & \varepsilon_s \rho_s \frac{\partial}{\partial t} h_s + \varepsilon_w \rho_w \frac{\partial}{\partial t} h_w + \varepsilon_g \rho_v \frac{\partial}{\partial t} h_v + \varepsilon_g \rho_a \frac{\partial}{\partial t} h_a \end{aligned} \quad [III-80]$$

En utilisant :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_i \rho_i h_i) = \varepsilon_i \rho_i \frac{\partial}{\partial t}(h_i) + h_i \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_i \rho_i) \quad [\text{III-81}]$$

Et :

$$h_s \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_s \rho_s) = 0 \quad [\text{III-82}]$$

On obtient :

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_s \rho_s C_{p,s} + \varepsilon_w \rho_w C_{p,w} + \varepsilon_g \rho_v C_{p,v} + \varepsilon_g \rho_a C_{p,a}) \frac{\partial T}{\partial t} = \\ & \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_s \rho_s h_s + \varepsilon_w \rho_w h_w + \varepsilon_g \rho_v h_v + \varepsilon_g \rho_a h_a) - \left[h_w \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_w \rho_w) + h_v \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_g \rho_v) + h_a \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_g \rho_a) \right] \end{aligned} \quad [\text{III-83}]$$

Sachant que :

$$\nabla \cdot (\rho h \mathbf{v}) = (\rho \mathbf{v}) \cdot \nabla h + h \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad [\text{III-84}]$$

Le deuxième terme de l'équation [III-78] s'écrit :

$$\begin{aligned} & \left[\varepsilon_w C_{p,w} \mathbf{v}_w + (\rho_v C_{p,v} + \rho_a C_{p,a}) \mathbf{v}_g \right] \cdot \nabla T = \\ & \nabla \cdot \left[\varepsilon_w h_w \mathbf{v}_w + (\varepsilon_v h_v + \varepsilon_a h_a) \mathbf{v}_g \right] - \left[h_w \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{v}_w) + h_v \nabla \cdot (\rho_v \mathbf{v}_g) + h_a \nabla \cdot (\rho_a \mathbf{v}_g) \right] \end{aligned} \quad [\text{III-85}]$$

L'enthalpie d'évaporation est donnée par :

$$\Delta h_v = h_v - h_w \quad [\text{III-86}]$$

Alors ;

$$\Delta h_v \dot{m} = h_v \dot{m} - h_w \dot{m} \quad [\text{III-87}]$$

Les équations [III-67] et [III-68] nous donnent 2 valeurs de \dot{m} :

$$\dot{m} = -\rho_w \frac{\partial \varepsilon_w}{\partial t} - \rho_w \nabla \cdot \mathbf{v}_w \quad [\text{III-88}]$$

et

$$\dot{m} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_g \rho_v) + \nabla \cdot (\rho_v \mathbf{v}_g) - \nabla \cdot \left[\rho_g D_{eff} \cdot \nabla \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \right] \quad [\text{III-89}]$$

En substituant les équations [III-83], [III-85], [III-87], [III-88] et [III-89] dans l'équation de conservation d'énergie [III-79] après plusieurs transformations on arrive finalement à :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_s \rho_s h_s + \varepsilon_w \rho_w h_w + \varepsilon_g \rho_v h_v + \varepsilon_g \rho_a h_a) + \nabla \cdot [\rho_w h_w v_w + (\rho_v h_v + \rho_a h_a) v_g] =$$

$$\nabla \cdot \left[\rho_g h_a D_{eff} \cdot \nabla \left(\frac{\rho_a}{\rho_g} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho_g h_v D_{eff} \cdot \nabla \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \right] + \nabla \cdot (\lambda_{eff} \nabla T) \quad [III-90]$$

4. Calcul de la température à la surface du sol

La température du sol est déterminée par les échanges d'énergie avec l'environnement, l'atmosphère principalement.

➤ Les échanges radiatifs

- Le rayonnement solaire : les longueurs d'ondes correspondantes sont comprises entre 0.3 et 3 μ m (rayonnement à hautes fréquences). Le système sol- plantes-atmosphère est soumis au rayonnement solaire qui est la principale source d'énergie de la terre. Ce rayonnement reçu est partiellement absorbé diffusé et transmis dans des proportions différentes.
- Le rayonnement terrestre : toute l'énergie reçue n'est pas stockée dans le sol, une partie étant émise en direction de l'atmosphère.
- Le rayonnement net : le bilan radiatif à la surface du sol représente le rayonnement net (R_n) qui est défini par :

$$Rn = (1 - \alpha)Rg + \varepsilon \sigma_B (Ta - 6)^4 - \varepsilon \sigma_B Ts^4 \quad [III-91]$$

σ_B est la constante de Boltzmann.

Le rayonnement global est donné par la relation suivante :

$$Rg = 0.271 I_0 d_{ts} A_1 \sinh_1 + 0.706 I_0 A_1 \sinh_1 \exp\left(-\frac{A_2}{\sinh_1}\right) \quad [III-92]$$

I_0 est la constante solaire, donnée par Brichambaut.

$$I_0 = 1367(1 + 0,034 \cos(0,986N - 2)) \quad [III-93]$$

N est le quantième de l'année compté à partir du 1^{er} janvier.

d_{ts} est coefficient de distance terre soleil donné par G.Menguey.

$$d_{ts} = 1 + 0,034 \cos((N - 3)360/365) \quad [III-94]$$

h_1 est la hauteur du soleil sur l'horizon donnée par G.Menguey :

$$\sinh_1 = \sin(lat) \sin \delta + \cos(lat) \cos \delta \cos w_s \quad [III-95]$$

Tel que : lat , δ , w_s sont respectivement la latitude de lieu, la déclinaison du soleil et l'angle horaire du soleil

A_1, A_2 Coefficients de trouble relatifs à la région considérée

	Ciel dégagé et très pur	Conditions normales	Zone industrielle
A1	0.87	0.88	0.91
A2	0.17	0.26	0.43

➤ **Les échanges de chaleur sensible**

C'est le transport d'énergie entre le sol et l'atmosphère, dû à l'agitation thermique : il a lieu par convection thermique. Elle se produit simultanément par convection naturelle sous l'action de gradients de température, c'est la thermo-diffusion et par convection forcée sous l'action des mouvements de vent.

On exprime ces échanges par :

$$H = h_c (Ts - Ta) \quad [III-96]$$

h_c est le coefficient d'échange thermique.

Selon Frank. E Jones (1992), Brutsaert (1965) a fait un rapport au sujet des surfaces naturelles : « les conditions dans la nature sont habituellement telles que l'écoulement de l'air juste au dessus de la surface terrestre est turbulent ». En effet l'étude de la couche limite atmosphérique (dans notre cas : surface du sol) est analogue à l'étude de la couche limite sur une plaque plane.

Pour un écoulement laminaire, on a :

➤ Le nombre de Nusselt :

La relation qui lie les trois nombres adimensionnels (Nu, Gr, Pr, Re) est empirique et de la forme :

- En convection naturelle $Nu = 0.54 Ra^{0.5}$ [III-97]

- En convection forcée $Nu = 0.664.Re_L^{0.5} Pr^{1/3}$ [III-98]

Avec Ra est le nombre de Raleigh, Re le nombre de Reynolds, Pr le nombre de Prandtl.

Leurs expressions :

$$Ra = Pr.Gr. \quad [III-99]$$

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot L}{\mu} \quad [\text{III-100}]$$

Exprime le rapport des forces d'inertie sur les forces de viscosité et la vitesse de l'air et μ la viscosité dynamique

$$Pr = \frac{\mu \cdot C_p}{\lambda} \quad [\text{III-101}]$$

La corrélation à retenir dans le cas flux ascendant pour une plaque plane horizontale est:

$$Nu = 0.54 R a^{0.5} \quad [\text{III-102}]$$

➤ Le coefficient de transfert de chaleur h_c :

$$h_c = 1.38 \left(\frac{\Delta T}{L} \right)^{0.25} + 3.9 \left(\frac{u}{L} \right)^{0.5} \quad [\text{III-103}]$$

$$\Delta T = |T_{sol} - T_a| \quad [\text{III-104}]$$

Avec : L c'est la longueur caractéristique de la plaque

➤ **Les échanges de chaleur latente**

Le flux de chaleur latente est d'énergie d'évaporation ; il est exprimé par le produit du flux d'eau, E , par la chaleur latente d'évaporation, L_v .

Le flux de chaleur latente est calculé par la loi de Stefan :

On a :

$$L_v E = \frac{L_v K_E M_v}{R T_a} (P_v^{sat}(T_s) - p_v(T_a)) \quad [\text{III-105}]$$

Tel que $p_v(T_a)$ désigne la pression de vapeur à la température ambiante

$$p_v(T_a) = \varphi \cdot P_v^{sat}(T_a) \quad [\text{III-106}]$$

φ est l'humidité relative de l'air.

K_E est le coefficient de transfert de masse:

$$K_E = \frac{h_c}{\rho C_p} \quad [\text{III-107}]$$

Finalement, Le bilan d'énergie au niveau de la surface du sol :

$$R_n = L_v E + H + G \quad \text{[III-108]}$$

L'emmagasinement net de la chaleur dans l'eau (ou dans le sol) au cours d'une période de 24 heures (représentant une journée) est généralement peu important par rapport aux autres flux, la plus grande partie de la radiation nette journalière se partagent entre la chaleur latente et la chaleur sensible (Fennessy et al, 1996 ; Saïghi, 2002 ; W.E. Eichinger et al, 2003).

Donc on peut dire que :

$$G \cong 0 \quad \text{[III-109]}$$

On obtient alors :

$$R_n = L_v .E + H \quad \text{[III-110]}$$

En combinant toutes ces relations, on obtient la relation suivante :

$$(1 - \alpha)R_g + \varepsilon\sigma_B(T_a - 6)^4 - \varepsilon\sigma_B T_s^4 - h_c(T_s - T_a) = \frac{L_v K_E M_v}{RT_a} (P_v^{sat}(T_s) - p_v(T_a)) \quad \text{[III-111]}$$

Cette relation sera utilisée comme condition à la frontière supérieure du sol et nous permet de calculer la température à cette surface en fonction de la température ambiante.

La résolution de l'équation [III-111] permet de calculer la température à la surface du sol T_s à chaque instant de la journée en fonction de : rayonnement net R_n , la température T_a de l'air ambiant, l'humidité relative moyenne de l'air hr et la vitesse du vent V . La résolution de cette équation a été effectuée par une méthode de Dichotomie (Saïghi, 2002). La valeur de la température T_s calculée à chaque instant nous permet d'accéder à la densité surfacique du flux d'eau évaporé à la surface.

Cette équation se résout à l'aide de la méthode de dichotomie.

5. Reformulation du système d'équations à résoudre en fonction de la teneur en eau, de la température et de la masse volumique apparente

Tout d'abord résumons notre système d'équations à résoudre formulé dans le paragraphe précédent. Il se compose de 6 équations :

- l'équation de conservation de l'eau, combinée avec celle de la vapeur
- l'équation de conservation de l'air sec
- l'équation de conservation de l'énergie totale
- l'équation de vitesse de Darcy de la phase liquide
- l'équation de vitesse de Darcy de la phase gaz
- L'équation de la température à la surface du sol (qui est découplée du système)

1. l'équation de conservation de l'eau, combinée avec celle de la vapeur:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w \varepsilon_w + \rho_v \varepsilon_g) + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{v}_w + \rho_v \mathbf{v}_g) = \nabla \cdot \left[\rho_g D_{eff} \cdot \nabla \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \right] \quad \text{[III-112]}$$

2. l'équation de conservation de l'air sec:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_g \rho_a) + \nabla \cdot (\rho_a \mathbf{v}_g) = \nabla \cdot \left[\rho_g D_{eff} \cdot \nabla \left(\frac{\rho_a}{\rho_g} \right) \right] \quad \text{[III-113]}$$

3. l'équation de conservation de l'énergie totale:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_s \rho_s h_s + \varepsilon_w \rho_w h_w + \varepsilon_g \rho_v h_v + \varepsilon_g \rho_a h_a) + \nabla \cdot [\rho_w h_w \mathbf{v}_w + (\rho_v h_v + \rho_a h_a) \mathbf{v}_g] \\ & = \nabla \cdot \left[\rho_g h_a D_{eff} \cdot \nabla \left(\frac{\rho_a}{\rho_g} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho_g h_v D_{eff} \cdot \nabla \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \right] + \nabla \cdot (\lambda_{eff} \nabla T) \end{aligned} \quad \text{[III-114]}$$

4. l'équation de vitesse de Darcy de la phase liquide

$$\mathbf{v}_w = -\frac{K k_w}{\mu_w} \cdot \nabla P_w \quad \text{[III-115]}$$

5. l'équation de vitesse de Darcy de la phase gaz

$$\mathbf{v}_g = -\frac{K k_g}{\mu_g} \cdot \nabla P_g \quad \text{[III-116]}$$

6. L'équation de la température à la surface du sol

$$(1 - \alpha)Rg + \varepsilon\sigma(Ta - 6)^4 - \varepsilon\sigma_B Ts^4 - h_c(Ts - Ta) = \frac{L_v K_E M_v}{RT_a} (P_v^{sat}(Ts) - p_v(Ta)) \quad \text{[III-117]}$$

Pour mieux cerner ce problème, nous réécrivons ces équations en fonction des variables principales qui sont : la teneur en eau, la masse volumique apparente et la température : X , T et $\bar{\rho}_a$

➤ **l'équation de conservation de l'eau, combinée avec celle de la vapeur:**

$$\text{On pose } X = \frac{(\varepsilon_w \rho_w)}{(\varepsilon_s \rho_s)} \quad \bar{\rho}_a = \varepsilon_g \rho_a \quad \text{[III-118]}$$

y_v : La fraction massique de la vapeur $y_v = \frac{\rho_v}{\rho_g}$

$$P_w = P_g - P_c(T, X) \quad [\text{III-119}]$$

En utilisant la loi des gaz parfaits

$$P_g = P_a + P_v = \rho_a \frac{RT}{M_a} + P_v(X, T) = \frac{\bar{\rho}_a}{\varepsilon_g} \frac{RT}{M_a} + P_v(X, T) \quad [\text{III-120}]$$

Avec la fraction de volume de la phase gazeuse est exprimée :

$$\varepsilon_g = 1 - \varepsilon_s - \varepsilon_w = (1 - \varepsilon_s) - \frac{\varepsilon_s \rho_s}{\rho_w} X \quad [\text{III-121}]$$

$$\rho_v = \frac{P_v M_v}{RT} \quad \rho_a = \frac{P_a M_a}{RT} \quad \rho_g = \rho_a + \rho_v \quad [\text{III-122}]$$

D'où :

$$y_v = \frac{\rho_v}{\rho_g} = \frac{P_v}{P_g} \frac{M_v}{M_a + (M_v - M_a) \frac{P_v}{P_g}} \quad [\text{III-123}]$$

$$J_w = \rho_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \nabla P_w + \rho_v \frac{Kk_g}{\mu_g} \nabla P_g + \rho_g D_{eff} \nabla y_v \quad [\text{III-124}]$$

Remarque

L'hypothèse H8 nous permet d'écrire

$$\nabla P_g = 0 \quad [\text{III-125}]$$

Ce qui nous permet d'écrire aussi :

$$v_g = -\frac{Kk_g}{\mu_g} \nabla P_g = 0 \quad [\text{III-126}]$$

D'où

$$J_w = \rho_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \nabla P_w + \rho_g D_{eff} \nabla y_v \quad [\text{III-127}]$$

On remplace tout dans l'équation [III-112], on obtient :

$$\varepsilon_s \rho_s \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_g \rho_v) - \nabla \left(\rho_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \nabla P_w + \rho_g D_{eff} \nabla y_v \right) = 0 \quad [\text{III-128}]$$

➤ **Equation de conservation de l'air sec dans la phase gazeuse.**

On pose:

$$y_a = \frac{\rho_a}{\rho_g} = \frac{\bar{\rho}_a}{\varepsilon_g \rho_g} = \frac{\bar{\rho}_a}{\varepsilon_g \left(\frac{\bar{\rho}_a}{\varepsilon_g} + \frac{P_v M_v}{RT} \right)} \quad [\text{III-129}]$$

$$J_a = \rho_a \frac{Kk_g}{\mu_g} \nabla P_g + \rho_g D_{eff} \nabla y_a \quad [\text{III-130}]$$

Or $\nabla P_g = 0$ (Equation [III-125])

D'où

$$J_a = \rho_g D_{eff} \nabla y_a \quad [\text{III-131}]$$

D'où l'équation [III-112] devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}_a) - \nabla J_a = 0 \quad [\text{III-132}]$$

Ou alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}_a) - \nabla (\rho_g D_{eff} \nabla y_a) = 0 \quad [\text{III-133}]$$

➤ **l'équation de conservation de l'énergie totale**

On pose :

$$\begin{aligned} \Psi &= (\varepsilon_s \rho_s h_s + \varepsilon_w \rho_w h_w + \varepsilon_g \rho_v h_v + \varepsilon_g \rho_a h_a) \\ &= (\varepsilon_s \rho_s c_s + \varepsilon_w \rho_w c_w + \varepsilon_g \rho_v c_v + \varepsilon_g \rho_a c_a) (T - T_R) + \varepsilon_g \rho_v \Delta h_{v0} \end{aligned} \quad [\text{III-134}]$$

$$\overline{\rho C_p} = \langle \rho \rangle C_p = \varepsilon_s \rho_s c_s + \varepsilon_w \rho_w c_w + \varepsilon_g \rho_v c_v + \varepsilon_g \rho_a c_a \quad [\text{III-135}]$$

D'où :

$$\Psi = \overline{\rho C_p} (T - T_R) + \varepsilon_g \rho_v \Delta h_{v0} \quad [\text{III-136}]$$

$$\begin{aligned} J_e &= \rho_g h_a D_{eff} \cdot \nabla y_a + \rho_g h_v D_{eff} \cdot \nabla y_v + \lambda_{eff} \nabla T + \\ &\quad \left[\rho_w h_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \nabla P_w + (\rho_v h_v + \rho_a h_a) \frac{Kk_g}{\mu_g} \nabla P_g \right] \end{aligned} \quad [\text{III-137}]$$

Puisque $\nabla P_g = 0$ (Equation [III-125])

Donc :

$$J_e = \rho_g h_a D_{eff} \cdot \nabla y_a + \rho_g h_v D_{eff} \cdot \nabla y_v + \lambda_{eff} \nabla T + \rho_w h_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \nabla P_w \quad [III-138]$$

D'où l'équation [III-113] devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi - \nabla \cdot J_e = 0 \quad [III-139]$$

D'où :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\overline{\rho C_p} (T - T_R) + \varepsilon_g \rho_v \Delta h_{v0} \right] - \nabla \cdot \left[\rho_g h_a D_{eff} \cdot \nabla y_a + \rho_g h_v D_{eff} \cdot \nabla y_v + \lambda_{eff} \nabla T + \rho_w h_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \nabla P_w \right] = 0 \quad [III-140]$$

6. Récapitulatif des Equations de Transfert en Sol Non Saturé

L'hypothèse H8 nous a permis d'écrire $\nabla P_g = 0$, ce qui rend l'équation [III-133]

linéairement dépendante avec les deux autres équations.

Notre système d'équations se réduit donc à deux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_s \rho_s \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_g \rho_v) - \nabla \cdot \left(\rho_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \nabla P_w + \rho_g D_{eff} \nabla y_v \right) = 0 \quad [III-141] \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\overline{\rho C_p} (T - T_R) + \varepsilon_g \rho_v \Delta h_{v0} \right] - \nabla \cdot \left[\rho_g h_a D_{eff} \cdot \nabla y_a + \rho_g h_v D_{eff} \cdot \nabla y_v + \lambda_{eff} \nabla T + \rho_w h_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \nabla P_w \right] = 0 \quad [III-142] \end{array} \right.$$

Conclusion

Ce chapitre a permis d'explicitier le modèle mathématique utilisé pour représenter les processus d'écoulements dans le sol (milieu non saturé) et les lois qui le décrivent et qui sont le transfert thermique et le transfert de masse.

En conclusion nous pouvons observer que nous avons un système de deux équations non linéaire à deux inconnues, ne peut généralement pas être résolue analytiquement et doit faire l'objet d'une résolution numérique.

Chapitre IV

Modèle numérique

Introduction

La modélisation mathématique des transferts en milieu poreux repose sur la résolution des équations différentielles assorties de conditions initiales et de conditions aux limites. Puisque l'obtention et l'utilisation d'une solution analytique s'avère impossible, la résolution numérique constitue la seule alternative. En plus de gagner en souplesse, les méthodes numériques permettent d'introduire des termes sources et de modifier les conditions aux limites et la représentation des échanges.

Nous donnons dans cette section les outils numériques nécessaires à la discrétisation et à la résolution numérique des équations couplées non linéaires décrites dans la section précédente.

1. La méthode des volumes finis

1.1 Principes généraux de la méthode

La méthode des volumes finis est une méthode de discrétisation bien adaptée à la résolution numérique des équations de conservation de grandeurs extensives telles que la masse, la quantité de mouvement, l'énergie. Cette méthode possède diverses propriétés telles que la conservation locale des flux, le respect du principe du maximum (cette propriété est définie dans la suite), la possibilité de l'appliquer à des maillages quelconques (maillages structurés ou non structurés) qui la rendent attractive. Un autre avantage de cette méthode est qu'elle conduit à des schémas numériques robustes. Cela explique pourquoi cette méthode est largement employée dans divers domaines : la mécanique des fluides, le transfert de chaleur et de masse, la simulation de réservoirs dans le génie pétrolier. . .

La méthode des volumes finis repose sur une formulation intégrale du problème continu que l'on a à traiter.

1.2 Principe de résolution numérique

Le problème traité est limité à celui d'une géométrie plane ; les équations dépendent donc d'une seule variable d'espace x , dans le sens vertical. Par ailleurs, on suppose le milieu suffisamment grand dans les autres directions ce qui nous permet de négliger les effets des bords; on peut donc supposer que les phénomènes de transfert à étudier sont indépendants des variables y et z (largeur et longueur). En conclusion, les considérations précédentes nous permettent de nous ramener à un problème unidirectionnel. La seule variable spatiale que l'on retient est suivant la coordonnée x profondeur du sol (à partir de la face inférieure à un point donné).

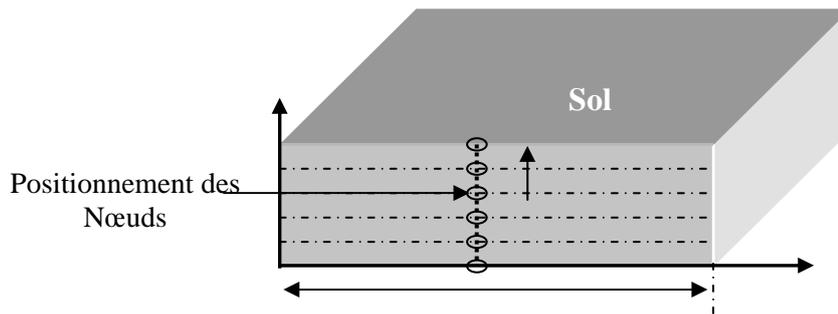


Fig IV.1. Modélisation du sol

2. Discrétisation des équations

On note Ω le domaine de calcul 1D représentant l'éprouvette. La discrétisation de ce domaine est représenté sur la figure (Fig. IV.2). Le domaine Ω comprend un nombre fini de segments P_i que nous appelons par la suite volume de contrôle

Les centres x_i des volumes de contrôle sont les points où sont localisés les inconnues de notre problème.

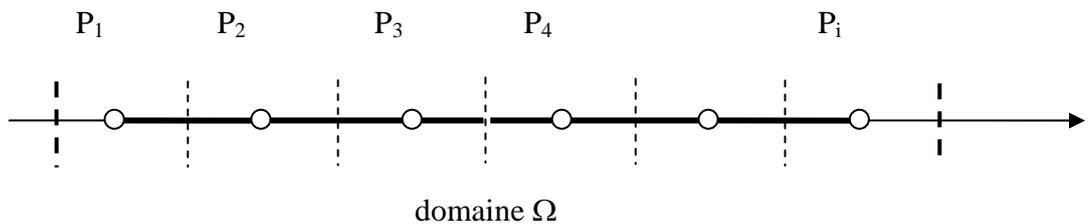


Fig. IV.2. Maillage des volumes de contrôle

Le domaine est d'abord discrétisé à l'aide d'une grille unidimensionnelle orientée positivement vers la droite.

Pour écrire le schéma de discrétisation en un point P, nous désignerons par E et W les nœuds situés immédiatement à sa droite et à sa gauche (Fig. IV.3). Le " volume " de contrôle centré en P a donc ici pour dimension Δx .

Nous désignerons enfin les points situés aux limites de ce volume par w et e respectivement.

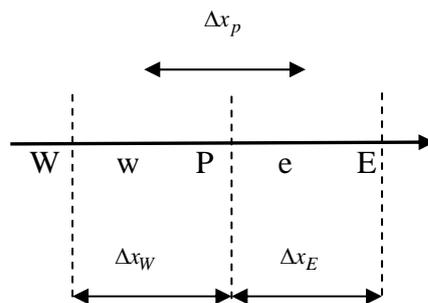


Fig. IV.3. Discrétisation spatiale

Le principe de la méthode des volumes finis consiste à intégrer chacune des équations à résoudre sur chacun des volumes de contrôle.

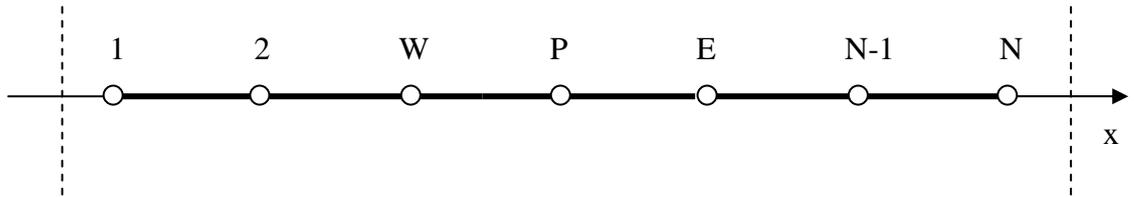
Comme nous l'avons vu au chapitre précédent le système à résoudre est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_s \rho_s \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_g \rho_v) - \nabla \left(\rho_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \nabla P_w + \rho_g D_{eff} \nabla y_v \right) = 0 \end{array} \right. \quad [IV - 1]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left[\overline{\rho C_p} (T - T_R) + \varepsilon_g \rho_v \Delta h_{v0} \right] - \\ \nabla \cdot \left[\rho_g h_a D_{eff} \nabla y_a + \rho_g h_v D_{eff} \nabla y_v + \lambda_{eff} \nabla T + \rho_w h_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \nabla P_w \right] = 0 \end{array} \right. \quad [IV - 2]$$

Nous discrétisons chacune des équations de ce système

a) Discrétisation de l'équation de conservation de l'eau (l'équation [IV.1])



$$\Delta x_p = \frac{1}{2} (\Delta x_w + \Delta x_E) \quad [IV.3]$$

Intégrons l'équation [IV.1] sur le volume de contrôle au nœud P

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{x_w}^{x_E} \left[\varepsilon_s \rho_s \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_g \rho_v) \right] dV dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_w}^{x_E} \nabla J_w dV dt = 0 \quad [IV.4]$$

Or le volume de contrôle $dV = S \cdot dx$ d'où :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{x_w}^{x_E} \left[\varepsilon_s \rho_s \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_g \rho_v) \right] dx dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_w}^{x_E} \nabla J_w dx dt = 0 \quad [IV.5]$$

Le terme à gauche de l'équation [IV.5] est discrétisé comme suit :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{x_w}^{x_E} \left[\varepsilon_s \rho_s \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_g \rho_v) \right] dx dt = \Delta x_p \left[(\varepsilon_s \rho_s X + \varepsilon_g \rho_v)_P^{t+\Delta t} - (\varepsilon_s \rho_s X + \varepsilon_g \rho_v)_P^t \right] \quad [IV.6]$$

Le terme à droite de l'équation [IV.5] est discrétisé comme suit :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{x_w}^{x_E} \nabla J_w dx dt = \int_t^{t+\Delta t} [(J_w)_e - (J_w)_w] dt \quad [IV.7]$$

L'intégrale en temps de J_w est :

$$\int_t^{t+\Delta t} J_w dt = [f J_w^{t+\Delta t} + (1-f) J_w^t] \Delta t \quad [IV.8]$$

f est un coefficient compris entre 0 et 1.

- Si $f = 0$ on a un schéma explicite
- Si $f = 0.5$ on a un schéma semi implicite (Cranck Nicolson)
- Si $f = 1$ on a un schéma implicite

Il est souvent intéressant de pouvoir spécifier le pas d'intégration sans se soucier des contraintes de stabilité numérique. Ceci implique alors l'utilisation de schémas implicites qui sont inconditionnellement stables, d'où:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{x_w}^{x_E} \nabla J_w dx dt = [(J_w)_e^{t+\Delta t} - (J_w)_w^{t+\Delta t}] \Delta t \quad [IV.9]$$

La discrétisation de l'équation [IV.1) en temps et en espace :

$$\frac{(\Delta x_w + \Delta x_E)}{2\Delta t} \left[(\varepsilon_s \rho_s X + \varepsilon_g \rho_v)_P^{t+\Delta t} - (\varepsilon_s \rho_s X + \varepsilon_g \rho_v)_P^t \right] - [(J_w)_e^{t+\Delta t} - (J_w)_w^{t+\Delta t}] = 0 \quad [IV.10]$$

Les termes de pression et de fraction de vapeur dans l'équation [IV.1] se calculent par la méthode des différences finies:

$$\nabla P_w|_w = \frac{(P_w)_P - (P_w)_W}{\Delta x_w}; \quad \nabla y_v|_w = \frac{(y_v)_P - (y_v)_W}{\Delta x_w} \quad [IV.11]$$

$$\nabla P_w|_e = \frac{(P_w)_E - (P_w)_P}{\Delta x_w}; \quad \nabla y_v|_e = \frac{(y_v)_E - (y_v)_P}{\Delta x_w} \quad [IV.12]$$

D'où les flux aux interfaces e et w :

$$(J_w)_e^{t+\Delta t} = \left(\rho_w \frac{K k_w}{\mu_w} \right)_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(P_w)_E^{t+\Delta t} - (P_w)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x_E} + (\rho_g D_{eff})_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_E^{t+\Delta t} - (y_v)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x_E} \quad [IV.13]$$

$$(J_w)_w^{t+\Delta t} = \left(\rho_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \right)_{A_w}^{t+\Delta t} \frac{(P_w)_P^{t+\Delta t} - (P_w)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x_W} + (\rho_g D_{eff})_{A_w}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_P^{t+\Delta t} - (y_v)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x_W} \quad [IV.14]$$

Donc la discrétisation de l'équation [IV.1] en temps et en espace est :

$$\frac{(\Delta x_W + \Delta x_E)}{2\Delta t} \left[(\varepsilon_s \rho_s X + \varepsilon_g \rho_v)_P^{t+\Delta t} - (\varepsilon_s \rho_s X + \varepsilon_g \rho_v)_P^t \right] + \left[(J_w)_e^{t+\Delta t} - (J_w)_w^{t+\Delta t} \right] = 0 \quad [IV.15]$$

Finalement :

$$\begin{aligned} & \frac{(\Delta x_W + \Delta x_E)}{2\Delta t} \left[(\varepsilon_s \rho_s X + \varepsilon_g \rho_v)_P^{t+\Delta t} - (\varepsilon_s \rho_s X + \varepsilon_g \rho_v)_P^t \right] + \\ & \left[\left(\rho_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \right)_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(P_w)_E^{t+\Delta t} - (P_w)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x_E} + (\rho_g D_{eff})_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_E^{t+\Delta t} - (y_v)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x_E} \right] - \\ & \left[\left(\rho_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \right)_{A_w}^{t+\Delta t} \frac{(P_w)_P^{t+\Delta t} - (P_w)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x_W} + (\rho_g D_{eff})_{A_w}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_P^{t+\Delta t} - (y_v)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x_W} \right] = 0 \end{aligned} \quad [IV.16]$$

Pour le nœud 1:

$$\frac{(\Delta x_E)}{2\Delta t} \left[(\varepsilon_s \rho_s X + \varepsilon_g \rho_v)_1^{t+\Delta t} - (\varepsilon_s \rho_s X + \varepsilon_g \rho_v)_1^t \right] + (J_w)_{A_E}^{t+\Delta t} = 0 \quad [IV.17]$$

Avec : $(J_w)_{A_w}^{t+\Delta t} = 0$

Pour le nœud N:

$$\frac{(\Delta x_W)}{2\Delta t} \left[(\varepsilon_s \rho_s X + \varepsilon_g \rho_v)_N^{t+\Delta t} - (\varepsilon_s \rho_s X + \varepsilon_g \rho_v)_N^t \right] + \left[(J_w)_N^{t+\Delta t} - (J_w)_{A_w}^{t+\Delta t} \right] = 0 \quad [IV.18]$$

Une autre équation (découplée du système) nous permet de connaître la température à la surface du sol qui est considérée comme une condition à la frontière supérieure.

$$(1 - \alpha)Rg + \varepsilon\sigma(Ta - 6)^4 - \varepsilon\sigma_B T_s^4 - h_c(T_s - Ta) = \frac{L_v K_E M_v}{RT_a} (P_v^{sat}(T_s) - p_v(Ta)) \quad [IV.19]$$

b) Discrétisation de l'équation de conservation de l'énergie (l'équation [IV.2])

La discrétisation de l'équation en temps et en espace [IV.2] est :

$$\frac{(\Delta x_W + \Delta x_E)}{2\Delta t} \left[\Psi_P^{t+\Delta t} - \Psi_P^t \right] + \left[(J_e)_{A_E}^{t+\Delta t} - (J_e)_{A_w}^{t+\Delta t} \right] = 0 \quad [IV.20]$$

Tels que:

$$\Psi = \overline{\rho C_p} (T - T_R) + \varepsilon_g \rho_v \Delta h_{v0} \quad [IV.21]$$

$$\text{Avec } \overline{\rho C_p} = \langle \rho \rangle C_p = \varepsilon_s \rho_s C_s + \varepsilon_w \rho_w C_w + \varepsilon_g \rho_v c_v + \varepsilon_g \rho_a C_a \quad [IV.22]$$

$$J_e = \rho_g h_a D_{eff} \cdot \nabla y_a + \rho_g h_v D_{eff} \cdot \nabla y_v + \lambda_{eff} \nabla T + \rho_w h_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \nabla P_w \quad [IV.23]$$

Avec

$$h_a = C_a (T - T_{réf}) \quad [IV.24]$$

$$h_w = C_w (T - T_{réf}) \quad [IV.25]$$

$$h_v = C_v (T - T_{réf}) + \Delta h_{v0} \quad [IV.26]$$

D'où :

$$J_e = C_a \rho_g D_{eff} (T - T_{réf}) \nabla y_a + C_v \rho_g D_{eff} (T - T_{réf}) \nabla y_v + \rho_g D_{eff} \Delta h_{v0} \nabla y_v + \lambda_{eff} \nabla T + C_w \rho_w (T - T_{réf}) \frac{Kk_w}{\mu_w} \nabla P_w \quad [IV.27]$$

La discrétisation des deux termes ψ et J_e :

$$\Psi_P^{t+\Delta t} = \left(\overline{\rho C_p} (T - T_R) + \varepsilon_g \rho_v \Delta h_{v0} \right)_P^{t+\Delta t} \quad [IV.28]$$

$$\Psi_P^t = \left(\overline{\rho C_p} (T - T_R) + \varepsilon_g \rho_v \Delta h_{v0} \right)_P^t \quad [IV.29]$$

$$(J_e)_{A_E}^{t+\Delta t} = (T_{A_E}^{t+\Delta t} - T_{réf}) \left[(C_a \rho_g D_{eff})_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(y_a)_E^{t+\Delta t} - (y_a)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x_E} + (C_v \rho_g D_{eff})_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_E^{t+\Delta t} - (y_v)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x_E} + \left(\rho_w C_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \right)_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(P_w)_E^{t+\Delta t} - (P_w)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x_E} \right] + (\Delta h_{v0} \rho_g D_{eff})_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_E^{t+\Delta t} - (y_v)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x_E} + (\lambda_{eff})_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(T)_E^{t+\Delta t} - (T)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x_E} \quad [IV.30]$$

$$(J_w)_{A_W}^{t+\Delta t} = (T_{A_W}^{t+\Delta t} - T_{réf}) \left[(C_a \rho_g D_{eff})_{A_W}^{t+\Delta t} \frac{(y_a)_P^{t+\Delta t} - (y_a)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x_W} + (C_v \rho_g D_{eff})_{A_W}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_P^{t+\Delta t} - (y_v)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x_W} + \left(\rho_w C_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \right)_{A_W}^{t+\Delta t} \frac{(P_w)_P^{t+\Delta t} - (P_w)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x_W} \right] + (\Delta h_{v0} \rho_g D_{eff})_{A_W}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_P^{t+\Delta t} - (y_v)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x_W} + (\lambda_{eff})_{A_W}^{t+\Delta t} \frac{(T)_P^{t+\Delta t} - (T)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x_W} \quad [IV.31]$$

D'où :

$$\frac{(\Delta x_w + \Delta x_E)}{2\Delta t} \left[\left[\overline{\rho C_p} (T - T_R) + \varepsilon_g \rho_v \Delta h_{v0} \right]_P^{t+\Delta t} - \left[\overline{\rho C_p} (T - T_R) + \varepsilon_g \rho_v \Delta h_{v0} \right]_P^t \right] + \left[(J_e)_{A_E}^{t+\Delta t} - (J_e)_{A_w}^{t+\Delta t} \right] = 0 \quad [IV.32]$$

Pour le nœud 1:

$$\frac{\Delta x_E}{2\Delta t} \left[\Psi_1^{t+\Delta t} - \Psi_1^t \right] + (J_e)_{A_E}^{t+\Delta t} = 0 \quad [IV.33]$$

Pour le nœud N:

$$\frac{\Delta x_E}{2\Delta t} \left[\Psi_N^{t+\Delta t} - \Psi_N^t \right] + \left[(J_e)_N^{t+\Delta t} - (J_e)_{A_w}^{t+\Delta t} \right] = 0 \quad [IV.34]$$

3. Formulation du système discrétisé

Ecrivons le système d'équations sous forme discrétisée ci-dessus:

$$\begin{cases} F1(X_P^{t+\Delta t}) + F2(X_P^t) + b = 0 \\ F1'(T_P^{t+\Delta t}) + F2'(T_P^t) + b' = 0 \end{cases} \quad [IV.35]$$

$F1$, $F2$ sont des constantes (elles dépendent de : ε_s , ρ_s , Δx et Δt) qui sont des constantes. $F1'$, $F2'$, b et b' sont des coefficients non linéaires variables (implicitement) en fonction de : $X_P^{t+\Delta t}$, $X_{P-1}^{t+\Delta t}$, $X_{P+1}^{t+\Delta t}$, X_P^t , $T_P^{t+\Delta t}$, $T_{P-1}^{t+\Delta t}$, $T_{P+1}^{t+\Delta t}$ et T_P^t .

En prenant un pas d'espace régulier $\Delta x_w = \Delta x_E$, on obtient :

$$\frac{(\Delta x_w + \Delta x_E)}{2\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad [IV.36]$$

$$F1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} \varepsilon_s \rho_s \quad [IV.37]$$

$$F2 = -\frac{\Delta x}{\Delta t} \varepsilon_s \rho_s \quad [IV.38]$$

$$F1' = \frac{\Delta x}{\Delta t} \left(\overline{\rho C_p} \right)_P^{t+\Delta t} - \frac{(\lambda_{eff})_{A_w}^{t+\Delta t}}{\Delta x} - \frac{(\lambda_{eff})_{A_E}^{t+\Delta t}}{\Delta x} \quad [IV.39]$$

$$F2' = \frac{\Delta x}{\Delta t} \left(\overline{\rho C_p} \right)_P^t \quad [IV.40]$$

$$b = \frac{\Delta x}{\Delta t} \left[\left(\varepsilon_g \rho_v \right)_P^{t+\Delta t} - \left(\varepsilon_g \rho_v \right)_P^t \right] + \left[\left(\rho_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \right)_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(P_w)_E^{t+\Delta t} - (P_w)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x_E} + \left(\rho_g D_{eff} \right)_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_E^{t+\Delta t} - (y_v)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x_E} \right] - \left[\left(\rho_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \right)_{A_W}^{t+\Delta t} \frac{(P_w)_P^{t+\Delta t} - (P_w)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x_W} + \left(\rho_g D_{eff} \right)_{A_W}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_P^{t+\Delta t} - (y_v)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x_W} \right] \quad [IV.41]$$

$$b' = \frac{\Delta x}{\Delta t} \left[\left[\overline{\rho C}_p (-T_R) + \varepsilon_g \rho_v \Delta h_{v0} \right]_P^{t+\Delta t} - \left[\overline{\rho C}_p (-T_R) + \varepsilon_g \rho_v \Delta h_{v0} \right]_P^t \right] + (T_{A_E}^{t+\Delta t} - T_{ref}^{t+\Delta t}) \left[\left(C_a \rho_g D_{eff} \right)_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(y_a)_E^{t+\Delta t} - (y_a)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \left(C_v \rho_g D_{eff} \right)_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_E^{t+\Delta t} - (y_v)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \left(\rho_w C_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \right)_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(P_w)_E^{t+\Delta t} - (P_w)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right] + \left[\left(\Delta h_{v0} \rho_g D_{eff} \right)_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_E^{t+\Delta t} - (y_v)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \lambda_{eff} \frac{(T)_E^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right] - (T_{A_W}^{t+\Delta t} - T_{ref}^{t+\Delta t}) \left[\left(C_a \rho_g D_{eff} \right)_{A_W}^{t+\Delta t} \frac{(y_a)_P^{t+\Delta t} - (y_a)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \left(C_v \rho_g D_{eff} \right)_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_P^{t+\Delta t} - (y_v)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \left(\rho_w C_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \right)_{A_W}^{t+\Delta t} \frac{(P_w)_P^{t+\Delta t} - (P_w)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right] - \left[\left(\Delta h_{v0} \rho_g D_{eff} \right)_{AW}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_P^{t+\Delta t} - (y_v)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \left(\lambda_{eff} \right)_{A_W}^{t+\Delta t} \frac{(T)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right] \quad [IV.42]$$

4. Résolution numérique par la méthode de Newton

➤ Principe de la méthode

A la fin du paragraphe précédent, nous avons vu que la discrétisation en temps et en espace des équations couplées aux dérivées partielles par un schéma de volumes finis conduit à la résolution d'un ensemble d'équations non linéaires de la forme :

$$F_{i,j}(U^{t+\Delta t}, U^t, \Delta t) = 0 \quad \text{pour } i \in \Omega_d, j = 1, \dots, N \quad [IV.43]$$

$$\text{Tel que } (U^{t+\Delta t}) = \begin{pmatrix} X_1 \\ T_1 \\ \vdots \\ X_N \\ T_N \end{pmatrix}^{t+\Delta t} \quad \text{et} \quad (U^t) = \begin{pmatrix} X_1 \\ T_1 \\ \vdots \\ X_N \\ T_N \end{pmatrix}^t \quad [IV.44]$$

Pour résoudre ce système, nous avons recours à la méthode de Newton (c'est une méthode itérative) qui consiste à initialiser la valeur U^0 et à définir une suite de systèmes linéaires tangents:

$$J^m.(U^{m+1} - U^m) = -F^m(U^m) \quad [IV.45]$$

dans lesquels U^m est le vecteur de l'ensemble des inconnus à l'itération m et où J_m désigne la matrice jacobienne définie par :

$$J_{k,i,L,j}^m = \frac{\partial F_{k,i}^{m+1}}{\partial U_{L,j}}(U^m) \quad [IV.46]$$

On est donc amené à résoudre ; à chaque itération de Newton ; un système linéaire dont la solution est donnée par :

$$\Delta U^m = U^{m+1} - U^m \quad [IV.47]$$

Pour chaque itération m , on calcule U^{m+1} en fonction de U^m grâce à la relation : $U^{m+1} = U^m + \Delta U^m$. On passe ensuite à l'itération suivante jusqu'à ce que le critère de convergence soit satisfait. Remarquons que dans cette étude, le problème à résoudre est instationnaire.

Cela signifie que le schéma de Newton-Raphson doit être imbriqué dans la boucle de calcul d'intégration temporelle. A chaque pas de temps, on démarre les itérations de Newton avec les valeurs convergées au pas précédent. Comme les itérations du schéma de Newton sont bien imbriquées dans la boucle de calcul d'intégration temporelle, il est essentiel d'obtenir la convergence de la méthode Newton pour que le schéma global fonctionne. Une telle exigence impose parfois des limites très strictes sur le pas de temps afin que le candidat initial de la méthode de Newton soit suffisamment proche de la solution. On peut montrer qu'il est inutile d'exiger une précision plus grande pour la convergence du schéma de Newton-Raphson, que celle du schéma d'intégration temporelle. On peut aussi renforcer les propriétés de convergence en utilisant un paramètre de sous-relaxation

$$\omega_m (0 < \omega_m \leq 1) \quad [IV.48]$$

On calcule $\Delta \tilde{U}^m$ par

$$J^m . \Delta \tilde{U}^m = -E^m(U^m) \quad [IV.49]$$

Si $\|\Delta \tilde{U}^m\|$ est trop grand, alors on pose :

$$\Delta U^m = \min\left(1, \frac{\omega_m}{\|\Delta \tilde{U}^m\|}\right) . \Delta \tilde{U}^m \quad [IV.50]$$

5. L'algorithme de calcul numérique

Etape initiale

Donner toutes les constantes du problème ;

Donner la valeur de la tolérance (tol) et du pas de temps et d'espace (Δt et Δx) ;

Donner la valeur du vecteur initial $X_1^0, T_1^0, X_2^0, T_2^0, X_3^0, T_3^0, \dots, T_N^0, X_N^0$;

Boucle1 Tant que $t < t_{final}$

$$\widehat{U}^{t+\Delta t} = U^t$$

Boucle2 Tant que la norme du vecteur $\left\| F_{i,j}(\widehat{U}^{t+\Delta t}, U^t, \Delta t) \right\| > tol$

➤ Etape1

Calculer $F1, F2, F1', F2', b$ et b'

Calculer $R = F_{i,j}(\widehat{U}^{t+\Delta t}, U^t, \Delta t)$ en utilisant le système [IV.35]

➤ Etape2

Calculer la correction $\delta U = - \left(\frac{\partial R}{\partial \widehat{U}^{t+\Delta t}} \right)^{-1} . R$

$$\text{Avec } \frac{\partial R_i}{\partial \widehat{U}_j} = \frac{R_i(U + \delta U) - R_i(U)}{\Delta U_j}$$

Dans notre cas $\Delta U_j = 10^{-9}$

➤ Etape3

Trouver la valeur de

$$\lambda \text{ tel que } \left\| F_{i,j}(\widehat{U}^{t+\Delta t} + \lambda \delta U, U^t, \Delta t) \right\| < \left\| F_{i,j}(\widehat{U}^{t+\Delta t}, U^t, \Delta t) \right\|$$

Si non-trouvé réduire Δt . $\widehat{U}^{t+\Delta t} = U^t$ et aller à **Etape1**

➤ Etape4

Recalculer de nouveau $\widehat{U}^{t+\Delta t} = \widehat{U}^{t+\Delta t} + \lambda \delta U$

Fin de boucle2

$$U^{t+\Delta t} = \widehat{U}^{t+\Delta t}$$

Fin de boucle1

Donner les résultats.

Chapitre V

Simulation et résultats

Introduction

La résolution numérique du problème permet de suivre l'évolution des paramètres physiques moteurs des transferts thermiques et massiques dans le sol, à savoir la température et la teneur en eau, mais les calculs sont lourds du fait d'un système d'équations fortement couplées et non linéaires.

Le but assigné à ce travail n'est pas tellement la multiplication des calculs numériques mais plutôt la compréhension de la physique du sol non saturé ; pour faciliter et accélérer la résolution nous faisons appel au logiciel de calcul Matlab.

I. PARTIE EXPERIMENTALE

Le travail théorique effectué, élaboration du modèle d'équations et le programme informatique, est suivi d'une partie expérimentale, nécessaire pour mieux saisir les phénomènes et pour établir une base de comparaison entre les valeurs théoriques et celles qui sont mesurées. Ces dernières ont notamment été utilisés comme conditions initiales et aux limites.

Cette expérience a été menée sur le terrain du campus de l'université de Tizi-Ouzou.

Ce travail consiste à mesurer, tout au long de la journée, la température du sol à différentes profondeurs, à intervalles horaires fixes de la journée. Pour cela, nous utilisons un pénétromètre.

1. Description du pénétromètre

Le pénétromètre est un appareil utilisé en géotechnique et qui permet de calculer la résistance en pointe et la contrainte maximum admissible.

Il existe deux sortes de pénétromètre : des pénétromètres dynamiques et des pénétromètres statiques. Un pénétromètre dynamique est constitué d'une tige munie d'une enclume. Un "mouton", c'est-à-dire une masse qui tombe sur l'enclume, ce qui permet d'enfoncer la tige dans le sol.

En géotechnique, l'avantage du pénétromètre est qu'il permet d'avoir, presque en continu, la résistance du sol.

Cet appareil nous l'avons adapté à nos besoins pour faire un trou dans le sol et effectuer les relevés de températures en profondeur.

L'ensemble pénétromètre complet comprend :

- 01 pénétromètre PM10.
- 12 tiges de fonçage ; Longueur 1 mètre.

- 01 tige guide ; Longueur 0.7 mètres.
- 01 embout porte-pointe.
- 23 goujons de raccordement ; M14 x 60mm.
- 14 pointes perdues ; diamètre 35 mm.
- 01 extracteur de tige.
- 03 clés de serrage.



Fig V.1. L'ensemble pénétromètre

2. Principe d'utilisation du pénétromètre

Pour réaliser l'essai de pénétration dynamique d'un sol, il est pratique de procéder par tranches identiques d'enfoncement.

Le principe de ce type d'essai consiste à faire pénétrer dans le sol par battage, une pointe métallique portée par un train de tiges permettant d'atteindre la profondeur voulue.

Le pénétromètre étant disposé bien verticalement, on laisse tomber le mouton de 10 daN d'une hauteur constante. On recommence jusqu'à atteindre la profondeur voulue du trou.

3. Description des essais

Une fois le trou fait, nous avons placé un tube en PVC de 3 mètres de longueur de même diamètre que la pointe (35 mm) dans le trou de sorte que l'extrémité supérieure soit au même niveau que le sol. Par la suite, on couvre ce tube pour que l'air ne pénètre pas. On laisse l'équilibre thermique se produire avec le sol avoisinant, avant d'effectuer les mesures.

Des relevés de température ont été faits à différentes profondeurs et nous avons également relevé celle de l'air ambiant.

Les tableaux ci-après résument les valeurs mesurées:

Tableau V.1. Valeurs des températures mesurées pour la journée du 21 Janvier 2009

Températures mesurées le 21 JANVIER 2009										
Profondeur	0 m	0,1 m	0,25m	0,5m	1 m	1,5 m	2 m	2,5 m	3 m	Tamb
9H00	6	7	8	11	11,5	12	14	16	16	7
11H00	9	7	8	11	13	13	14	15	16	8
13H00	10	10	9	11	13	13	15	15	17	12
15H00	11	12	11	11	13	14	15	16	17	12
17H00	9	10	11	10	11	13	14	15	16	11
Remarque	CIEL CLAIR									

Tableau V.2. Valeurs des températures mesurées pour la journée du 21 Février 2009

Températures mesurées le 21 FEVRIER 2009										
Profondeur	0 m	0,1 m	0,25m	0,5m	1 m	1,5 m	2 m	2,5 m	3 m	Tamb
9H00	7	7	8	11	11,5	12	14	16	16	8
11H00	9	7	8	11	13	13	14	15	16	8
13H00	10	11	10	11	13	13	15	15	17	12
15H00	11	12	11	11	13	14	15	16	17	13
17H00	8	10	11	10	11	13	14	15	16	11
Remarque	CIEL CLAIR									

Tableau V.3. Valeurs des températures mesurées pour la journée du 21 Mai 2009

Températures mesurées le 21 MAI 2009										
Profondeur	0 m	0,1 m	0,25m	0,5m	1 m	1,5 m	2 m	2,5 m	3 m	Tamb
8H00	17	15	13	16	16	16	17	17	17	20
9H00	18	17	15	17	16	18	17	17	17	21
11H00	22	20	18	18	18	17	17	17	17	23
15H00	23	22	21	20	20	19	19	17	17	26
18H00	15	15	17	18	19	18	18	17	17	22
Remarque	CIEL CLAIR									

Tableau V.4. Valeurs des températures mesurées pour la journée du 21 Juin 2009

Températures mesurées le 21 JUIN 2009										
Profondeur	0 m	0,1 m	0,25m	0,5m	1 m	1,5 m	2 m	2,5 m	3 m	Tamb
8H00	24	23	20	19	19	18	18	17	17	26
10H00	28	23	22	20	19	18	18	17	17	31
14H00	32	28	24	21	20	19	18	18	17	35
17H00	30	28	25	22	20	20	19	18	17	32
Remarque	CIEL CLAIR									

Interprétation

Un regard général sur les valeurs relevées des températures rend compte de l'importance **de l'inertie thermique du sol**. On remarque ainsi qu'à partir d'une certaine profondeur, les températures ne dépendent plus des conditions ambiantes externes. Les gradients de température sont beaucoup plus importants dans les cinquante premiers centimètres.

Du fait de la faible conductivité thermique du sol, la diffusion de la chaleur en profondeur se fait en déphasage avec les conditions ambiantes à la surface. La chaleur apportée par les radiations solaires n'affecte les couches inférieures qu'en fin de journée. A ce moment, la température en surface du sol est généralement plus élevée que la température ambiante, le transfert de chaleur se fait alors du sol vers l'air après refroidissement de l'air en absence du rayonnement solaire.

II. PARTIE SIMULATION

1. Logiciel utilisé

Il s'agit du code de calcul scientifique MATLAB (qui est une abréviation de *Matrix Laboratory*).

MATLAB est un environnement puissant, complet et facile à utiliser et est destiné aux calculs scientifiques. Il apporte aux ingénieurs, chercheurs et à tout scientifique un système interactif intégrant le calcul numérique et la visualisation. C'est un environnement performant, ouvert et programmable qui permet de remarquables gains de productivité et de créativité.

MATLAB permet le travail interactif, soit en mode commande, soit en mode programmation, tout en ayant toujours la possibilité de faire des visualisations graphiques. Considéré comme un des meilleurs langages de programmations (C ou Fortran), MATLAB possède les particularités suivantes par rapport à ces langages :

- la programmation facile,
- la gamme étendue des nombres et leurs précisions,
- la bibliothèque mathématique très compréhensive,
- l'outil graphique qui inclut les fonctions d'interface graphique et les utilitaires,
- la possibilité de liaison avec les autres langages classiques de programmations.

2. Description du problème

Nous avons choisi une représentation plane unidimensionnelle (1D) du sol avec une épaisseur de 3 m (épaisseur dans laquelle on peut obtenir une évolution significative des paramètres tels que la température et la teneur en eau).

Le milieu est défini par :

- des paramètres (vecteur position x , temps t),
- des variables (pressions, température),
- des grandeurs intrinsèques (apports massiques, chaleur, enthalpies, flux thermiques...)
- caractéristiques du sol (masse volumique, porosité, perméabilité, conductivité thermique...)

Les hypothèses effectuées sont les suivantes :

- évolutions thermodynamiques réversibles,
- comportement isotrope,
- les gaz sont considérés comme des gaz parfaits,
- mélange idéal de gaz parfaits (pression totale = somme des pressions partielles),

- équilibre thermodynamique entre les phases d'un même constituant.

3. Conditions initiales

Il faut fournir au modèle numérique des conditions initiales qui représentent l'état du sol à l'instant où commence la simulation. Toutefois, ces conditions initiales ne constituent qu'une base de démarrage.

Initialement nous avons imposé un profil linéaire pour la teneur en eau massique.

En ce qui concerne la température nous avons choisi comme valeurs initiales les valeurs relevées expérimentalement en fonction des profondeurs. Notons que le pas d'espace varie de 10 à 50 cm, et la profondeur maximale est prise égale à 3m (profondeur pour laquelle la température du sol reste invariable).

4. Conditions aux limites

Nous distinguons deux types de conditions aux limites:

- Condition de type *Neumann* ou *Fourier* ou condition dite de troisième espèce :

Elle nécessite un traitement particulier qui consiste à intégrer l'équation sur les volumes finis situés sur les frontières. Nous obtenons ainsi des équations algébriques supplémentaires qui s'ajoutent aux équations algébriques déterminées sur les nœuds intérieurs du domaine pour former le système final à résoudre.

- Conditions de première espèce (Dirichlet)

Les conditions aux limites de type Dirichlet sont introduites directement dans le système à résoudre.

a. Conditions aux limites sur la face supérieure

- La température sur la limite supérieure est le résultat d'un bilan d'énergie effectué au niveau de la surface du sol.
- Le flux d'eau évaporatif est calculé sur la base de la loi de Steffan.

b. Conditions aux limites sur la face inférieure

- Nous avons imposé un flux thermique nul à la face inférieure.
- Nous considérons que le sol est saturé à une certaine profondeur. La teneur en eau de saturation est évaluée à partir de la porosité.

5. Calculs préliminaires

Pour simuler le comportement du sol soumis aux conditions climatiques de Tizi-Ouzou (latitude $36^{\circ}71'$, longitude 4°), nous nous sommes appuyés sur les données météorologiques recueillies au niveau de la station locale. Nous avons utilisé les valeurs de la température ambiante, de la température du sol en surface et de l'humidité relative, en évolution horaire, relevées pour les journées types pour les douze mois de l'année.

Afin de déterminer l'influence du quantième de l'année, de la température ambiante et de la vitesse du vent sur bon nombre de paramètres, essentiellement sur la frontière supérieure (surface du sol), nous avons pris une journée type pour chaque mois, (une moyenne mensuelle est prise pour chaque mois de l'année).

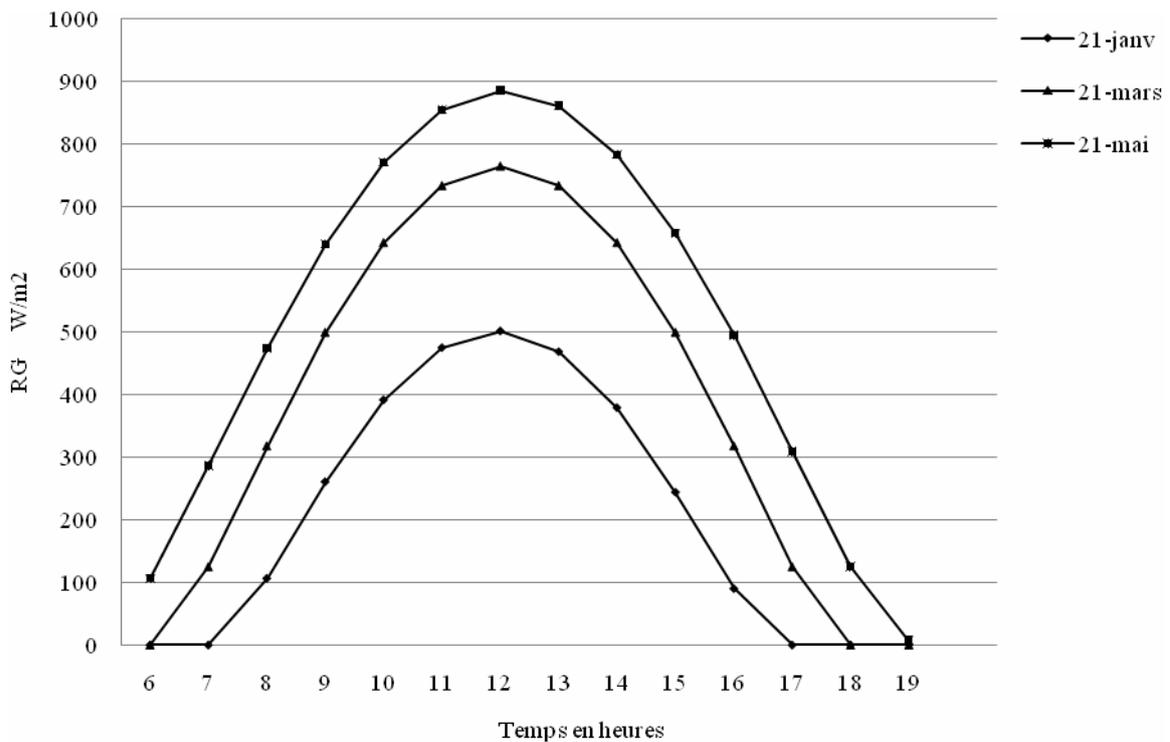


Fig.V.2. Evolution du rayonnement global

Le tableau ci-après récapitule les résultats de calcul des moyennes du rayonnement global, de la température à la surface du sol, de la vitesse du vent, de la température ambiante et de l'humidité relative, au cours de l'année.

Tableau V.5. Données métrologiques annuelles de l'air ambiant

Mois	Ray. Global moyen en W/m ²	Vit. moy. du vent en m/s	humidité rel. moy de l'air (%)	Temp. moy. ambiante (°C)
Janvier	121	0,5	84	7,4
Février	167	0,8	65	10,6
Mars	224	1,4	64	12,7
Avril	273	2,4	60	15,4
Mai	302	2,2	54	20,5
Juin	310	3,1	47	25,2
Juillet	300	2,8	41	28,2
Août	271	2,3	46	26,8
Septembre	224	1,8	53	23,2
Octobre	150	1,1	56	20,5
Novembre	112	1	63	13,8
Décembre	104	1	65	10,6

III. Résolution de l'équation du bilan à la surface

La résolution de l'équation [III-117] permet de calculer la température à la surface du sol à chaque instant de la journée en fonction des données tabulées des grandeurs suivantes : le rayonnement global R_g , la température de l'air ambiant, l'humidité relative moyenne de l'air et la vitesse du vent.

La résolution de cette équation a été effectuée par la méthode de Dichotomie. La valeur de la température en surface calculée à chaque instant nous permet de fixer la condition à la limite supérieure du sol étudié.

Le tableau V.6 résume les valeurs calculées de la température moyenne mensuelle en surface du sol.

Tableau V.6. Calcul des températures mensuelles moyennes à la surface du sol

	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Temp. moy à la surface du sol (°C)	5,8	6,9	10,5	14,6	17,6	21,6	22,6	20,7	17,9	14,3	9,1	6,6

La figure V.3 compare les températures moyennes en surface du sol à celles de l’ambiance.

NB : notons que l’évolution de la température ambiante correspond aux valeurs moyennes mesurées pour 10 ans par le service météorologique de la région de Tizi-Ouzou.

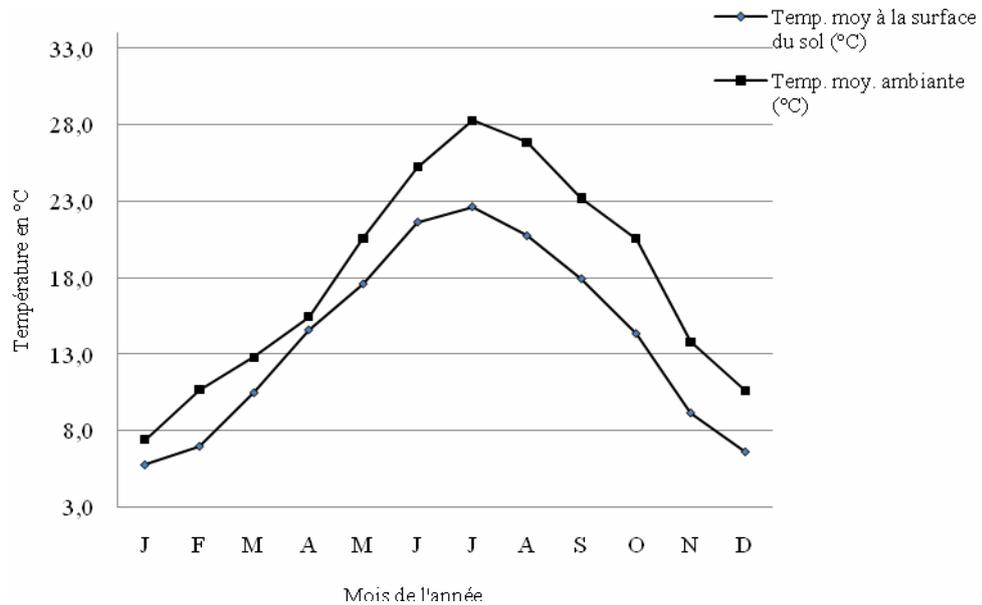


Fig. V.3. Evolution de la température ambiante et de la température à la surface du sol

Les figures V.4 et V.5 montrent que le profil de température en surface du sol est assimilé à celui de l’air et ce pour les 2 journées types du 21 Mai et du 21 Janvier.

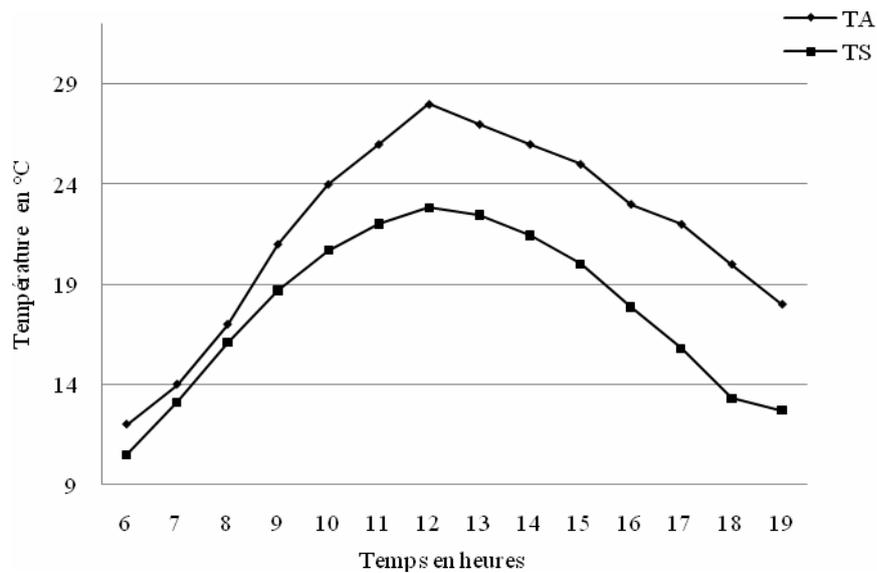


Fig V.4. Evolution horaire des températures ambiante et de la surface du sol (21 Mai)

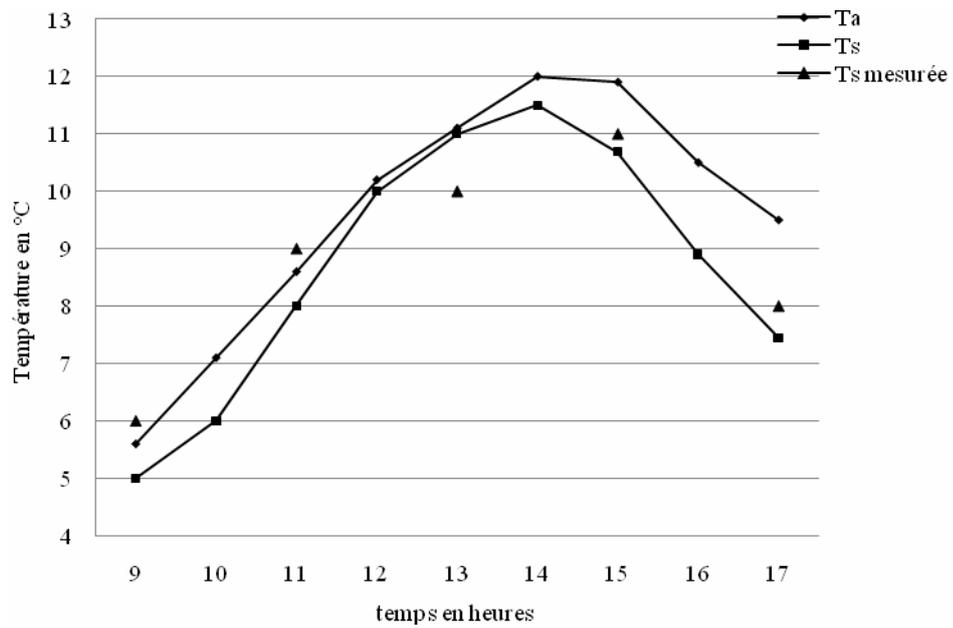


Fig V.5. Evolution horaire des températures ambiante et de la surface du sol (21 Janvier)

La figure V.6 montre que selon la saison, la distribution des températures moyennes quotidiennes en surface du sol, donnée par l'expression [III-110], est en bon accord avec les résultats numériques.

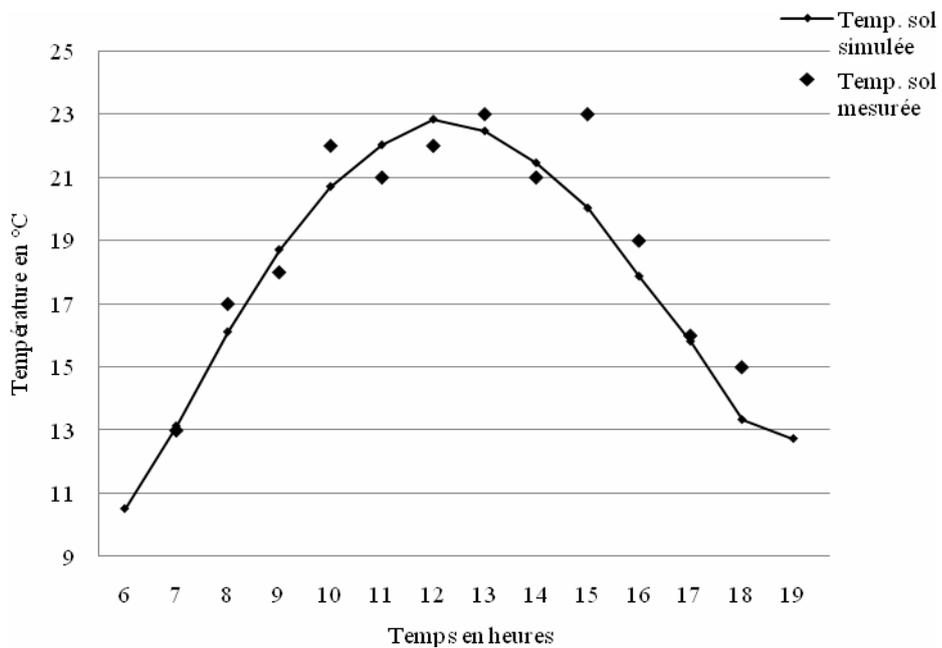


Fig V.6. Comparaison des profils, numérique et expérimental des températures moyennes en surface du sol (21 Mai)

IV. Résultats de simulation et discussion

1. Courbe de convergence

La convergence de la méthode de simulation (Méthode de Newton-Raphson), dont l'algorithme est décrit en fin de chapitre IV, est atteinte lorsque la condition

$$\left\| F_{i,j} \left(\widehat{U}^{t+\Delta t}, U^t, \Delta t \right) \right\| < tol \text{ est satisfaite.}$$

F représente la matrice des résidus pour chaque équation du problème et U^t le vecteur des variables (teneurs en eau et températures successives de chaque nœud).

La tolérance est de 10^{-2}

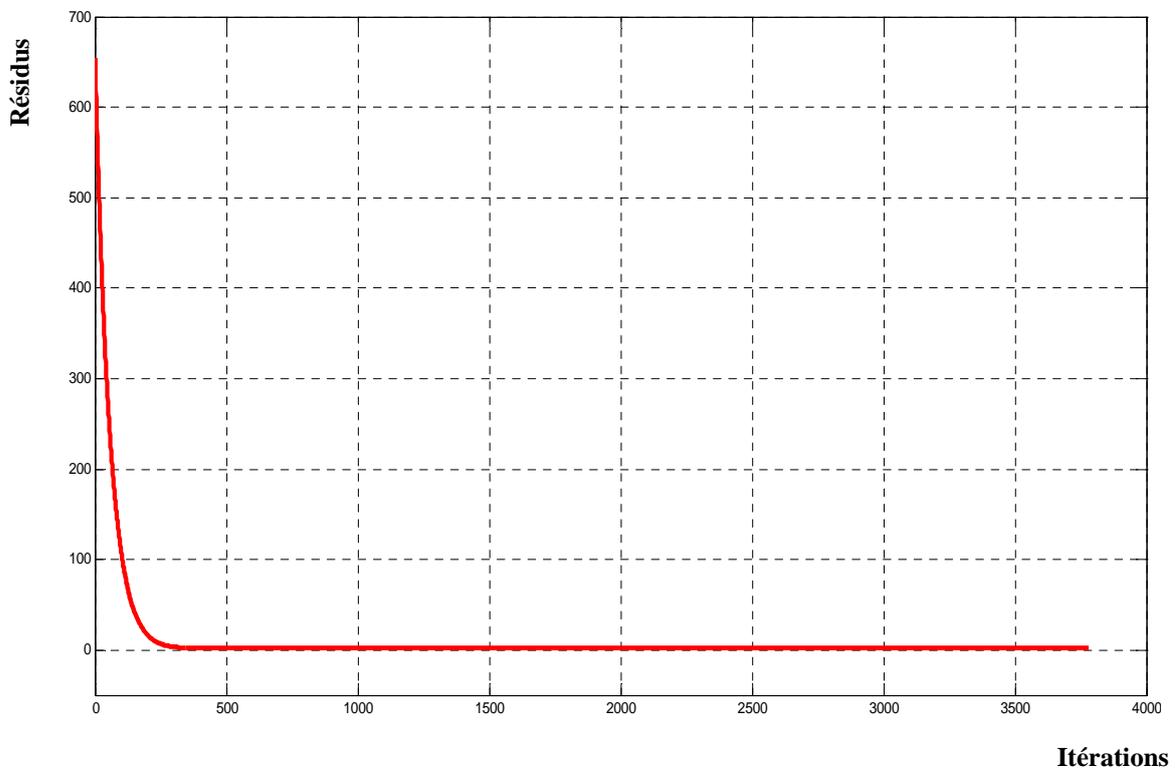


Fig V.7. Courbe de convergence des calculs

2. Variations horaires de la température dans le sol

La distribution de température dans le sol reste constante dans les couches inférieures durant la journée et variable en moyenne selon le quantième du jour de l'année. Elle est le résultat de l'amortissement de la distribution moyenne journalière de la température en surface. En revanche, les variations des conditions climatiques extérieures au cours de la journée affectent les couches supérieures du sol, environ 50 cm (dans le cas des caractéristiques du sol étudié).

Les figures V.8 et V.9 montrent les profils de températures pour différentes profondeurs, au cours de la journée type du mois de Mai, la température maximale atteinte au sol à 12h 30 est de 22°C, et elle passe à 18°C pour un point situé à 30 cm de profondeur.

La courbe en rouge représente l'allure que suivent tous les maximums (amplitudes). On remarque que c'est un profil exponentiel.

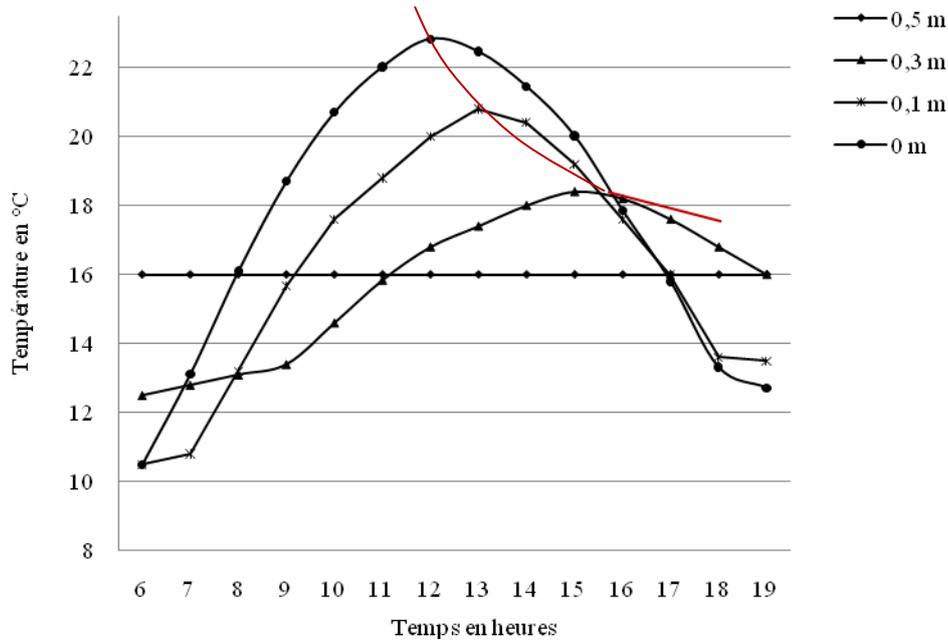


Fig V.8. Evolution horaire de la température au cours de la journée du 21 Mai

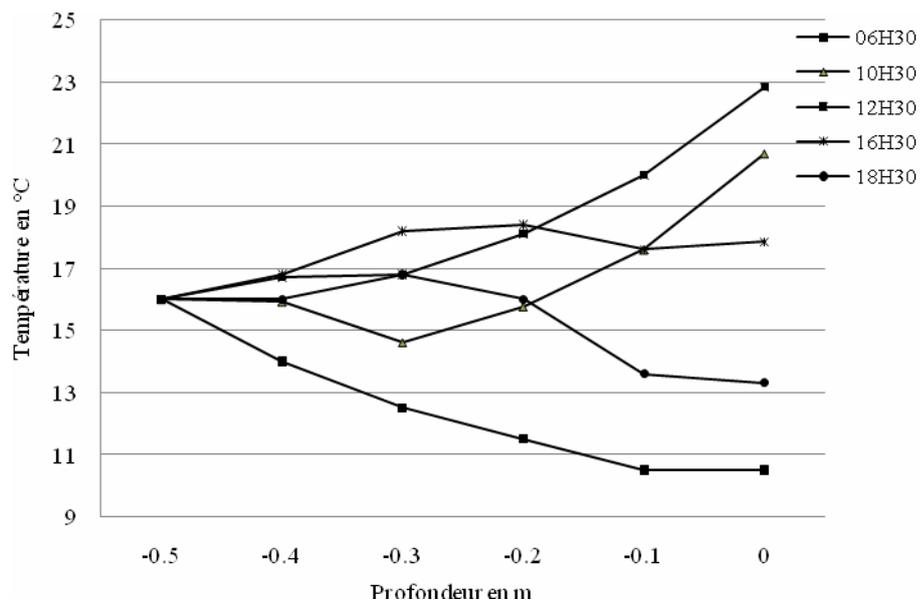


Fig V.9. Evolution horaire de la température en fonction de la profondeur (en m) pour la journée du 21 Mai

Nous remarquons également au mois de Janvier (Fig V.10. et Fig V.11.), le même profil de températures mais avec des maxima inférieurs comparés aux résultats du mois de Mai avec un décalage (déphasage) plus important vers l'après-midi.

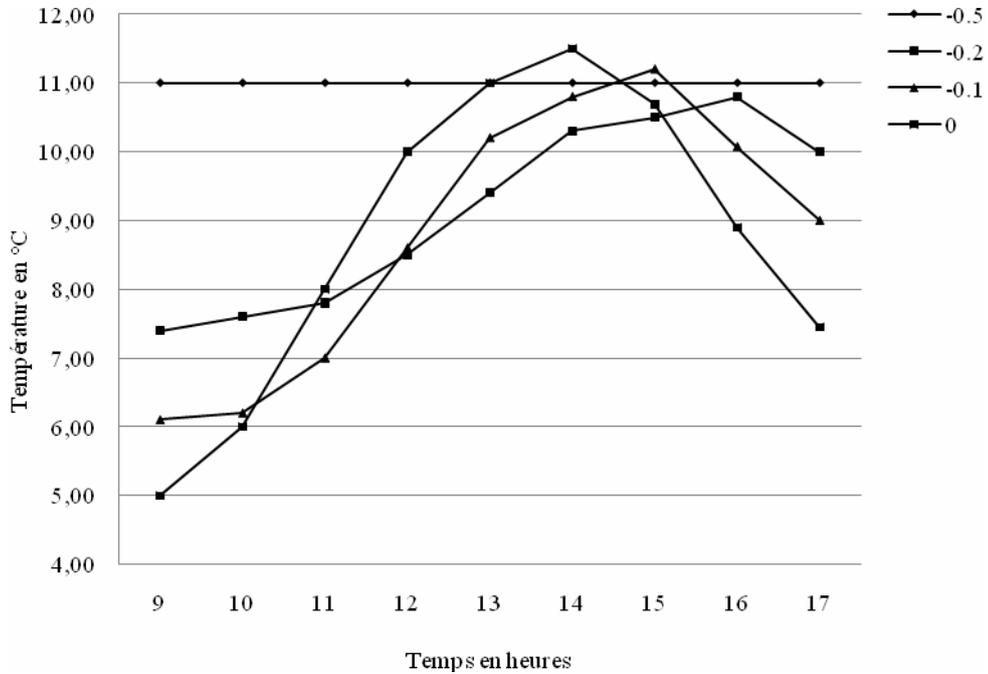


Fig V.10. Evolution horaire de la température pour la journée du 21 Janvier

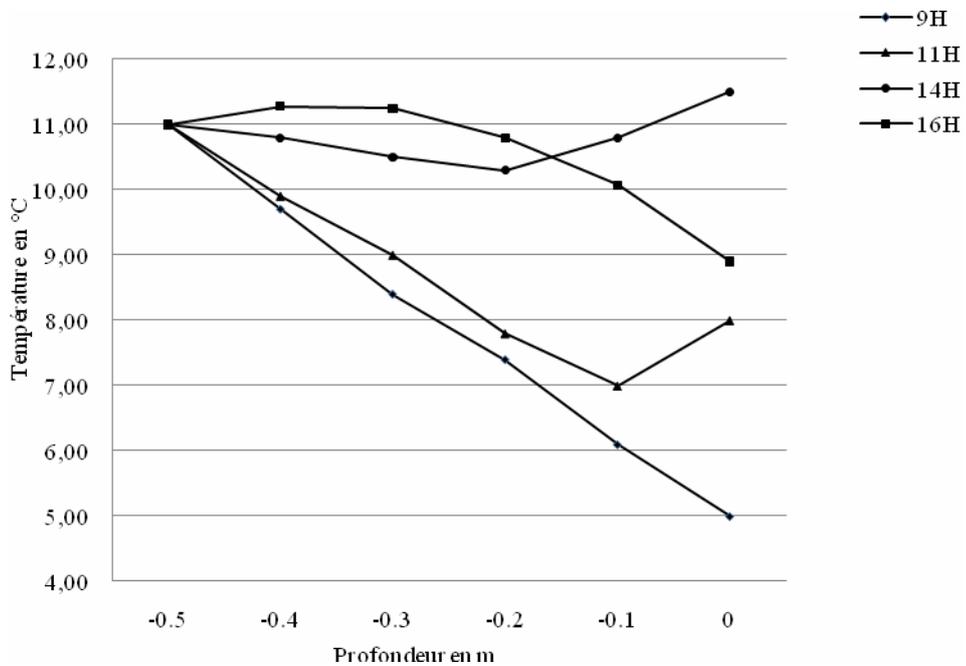


Fig V.11. Evolution horaire de la température en fonction de la profondeur (en m) pour la journée du 21 Janvier

Au cours d'une période de 24 heures, le profil de température en surface est sensiblement la réponse au rayonnement diurne reçu. L'inertie du sol n'intervient alors qu'en profondeur. Dans ce cas, les paramètres du sol, entre autres la conductivité thermique, sont alors déterminants dans les échanges avec les profondeurs du sol.

A 9h du matin, avec un rayonnement faible, la température en surface est nettement plus basse que celles des profondeurs (on passe de 5°C en surface à 11°C à -50 cm).

A 11h, la couche superficielle du sol est réchauffée par le rayonnement, ce qui contribue à faire monter la température de surface à 8°C. Les couches en profondeur ne sont pas encore atteintes par l'onde thermique. La remontée de température en profondeur correspond à la chaleur emmagasinée durant l'année.

A 14h, le rayonnement étant plus important, l'énergie reçue affecte la couche de 20 cm.

A 16h, le rayonnement extérieur chute, la température en surface diminue de manière significative. La diminution de température affecte les 20 premiers centimètres du sol.

3. Variation annuelle de la température dans le sol

Dans les courbes ci-dessous, chaque point représente la valeur moyenne mensuelle établie sur la base des valeurs moyennes journalières.

Les résultats montrent que, selon la saison, l'inertie du sol occasionne un déphasage entre le champ de température en surface et en profondeur. Au-delà de 3 mètres de profondeur, la température se stabilise pour atteindre la valeur moyenne mesurée en surface du sol pendant une période d'une année.

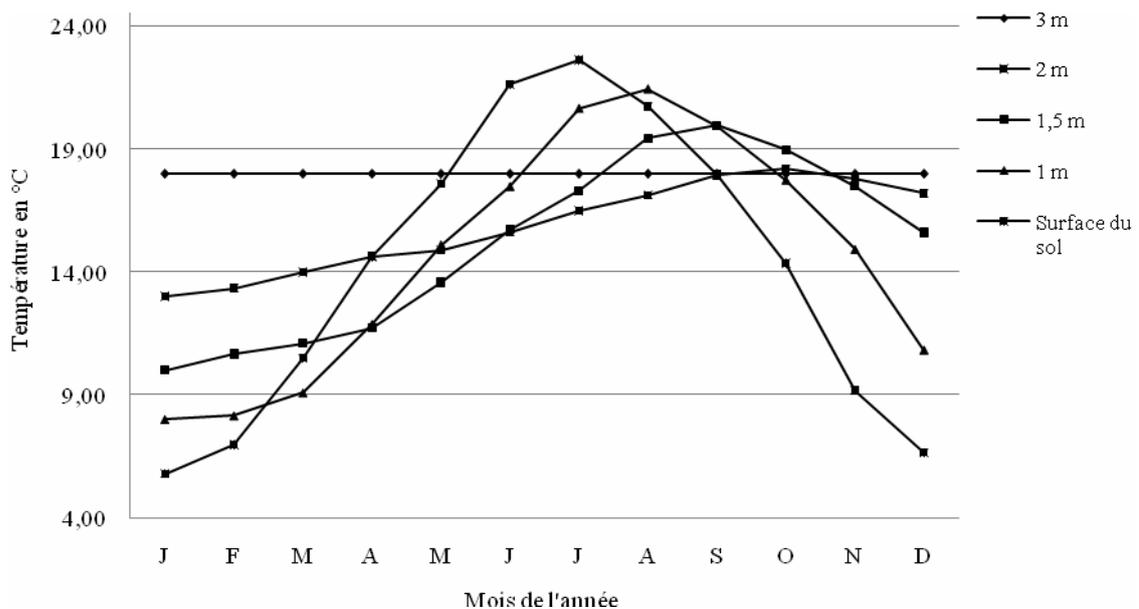


Fig V.12. Evolution annuelle de la température pour différentes profondeurs du sol

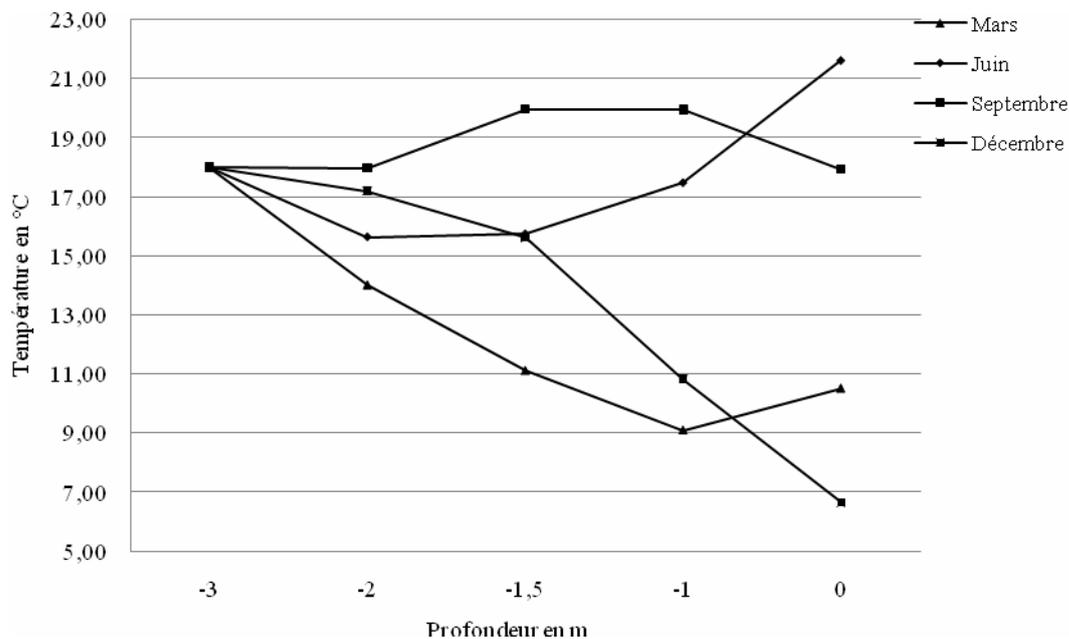


Fig V.13. Evolution de la température moyenne mensuelle en fonction de la profondeur

Au mois de Décembre, la température de surface est nettement plus basse que celle des profondeurs (6.5 °C en surface et 18°C à 3 m).

Au mois de Mars, on constate que la température moyenne de surface est remontée à 11°C. Par contre en profondeur, (1m, 1.5m, 2m) la température est plus basse que celle enregistrée au mois de Décembre ; ceci est dû au refroidissement des couches inférieures durant la période hivernale.

Au mois de Juin, il y a une remontée des températures des couches superficielles ; l'onde thermique atteint la profondeur de 2 m.

Au mois de Septembre, le rafraîchissement de l'air fait chuter les températures des couches superficielles.

4. Variation horaire de la teneur en eau dans le sol

La teneur en eau est très peu affectée par les variations climatiques durant la journée. On constate cependant une légère remontée de sa valeur en surface à l'instant le plus chaud de la journée.

En profondeur, la teneur en eau augmente jusqu'à atteindre la saturation à 3m (condition à cette limite) avec un profil linéaire, profil pour lequel le modèle est initialisé

Les figures V.14 et V.15 présentent l'évolution de la teneur en eau de la couche 0-50 cm au cours de temps.

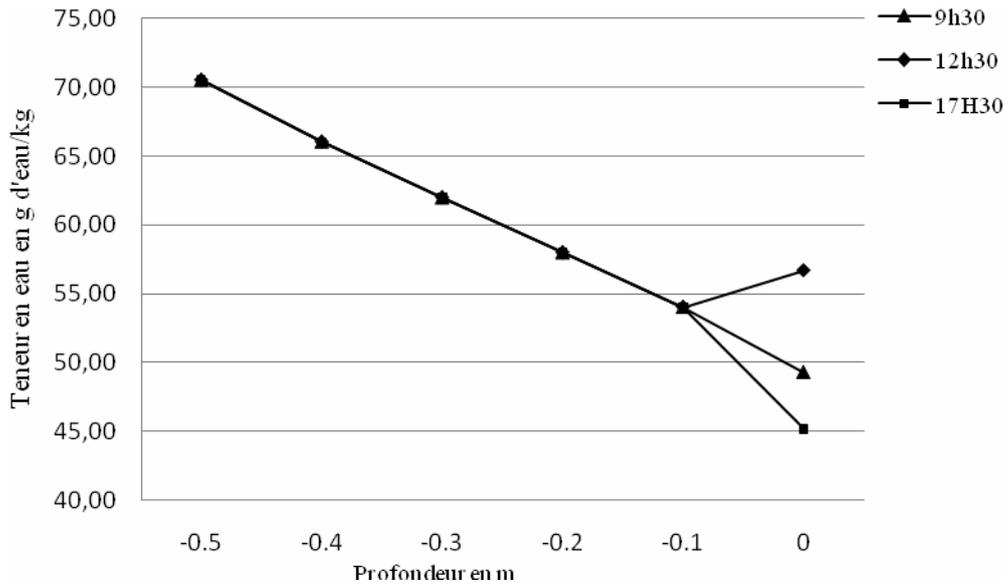


Fig V.14. Evolution horaire de la teneur en eau en fonction de la profondeur (en m) pour la journée du 21 Mai

Sur cette figure, on peut constater une remontée d'eau sur la couche superficielle dans la première partie de la journée, correspondant à l'échauffement en surface du sol. A 12h 30mn la teneur en surface est supérieure à celle se trouvant à -10 cm, ce qui n'est pas le cas à 9h 30mn où la teneur en eau la plus basse est en surface. Pour l'après midi et en fin de journée, la teneur en eau en surface est de nouveau la plus basse en raison de l'évaporation qui a précédé. Au delà de 10 cm de profondeur, la teneur en eau reste la même quelle que soit l'heure de la journée. Le constat qui peut être fait ici est que la teneur en eau ne suit pas de manière directe le profil de température dans le sol.

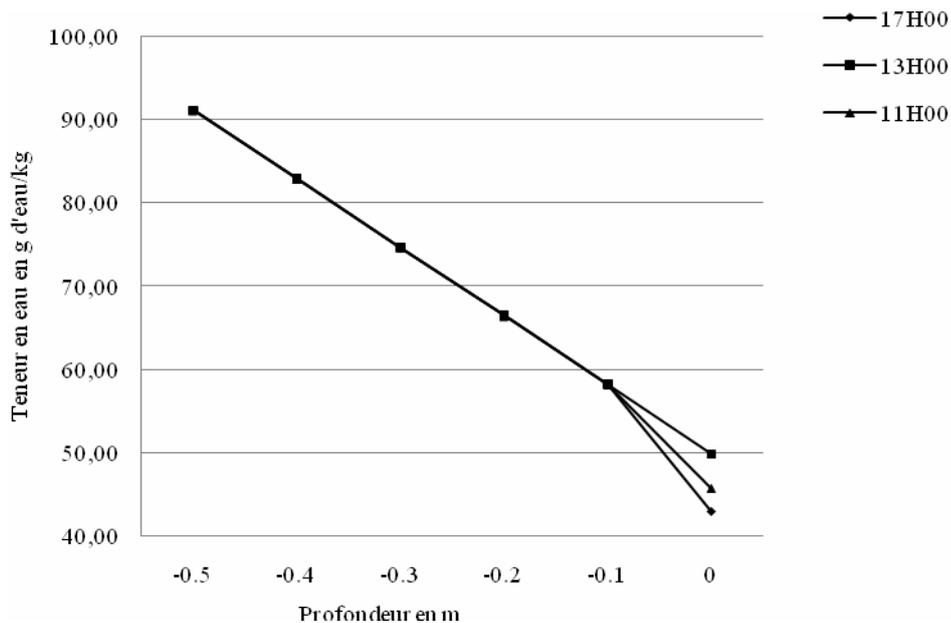


Fig V.15. Evolution horaire de la teneur en eau en fonction de la profondeur pour la journée du 21 Janvier

En période hivernale, le constat n'est pas tout à fait le même. Les basses températures enregistrées en surface ne permettent pas une évaporation d'eau superficielle. De plus, en raison des gradients de température inversés et faibles, entre la surface et les profondeurs, il n'y a pas de remontée d'eau.

5. Evolution des paramètres physiques du sol

Les courbes de simulation ci-dessous montrent l'évolution des paramètres physiques d'un sol limoneux à une profondeur de 3 mètres (condition de saturation imposée à la limite inférieure) :

➤ La perméabilité relative

La perméabilité relative est calculée à partir de la loi de Darcy généralisée. Les courbes de perméabilité relative en fonction de la saturation sont obtenues. La figure V.16 illustre l'évolution de la perméabilité relative du liquide aux différents nœuds. Nous remarquons que son évolution suit le profil de la saturation en eau liquide.

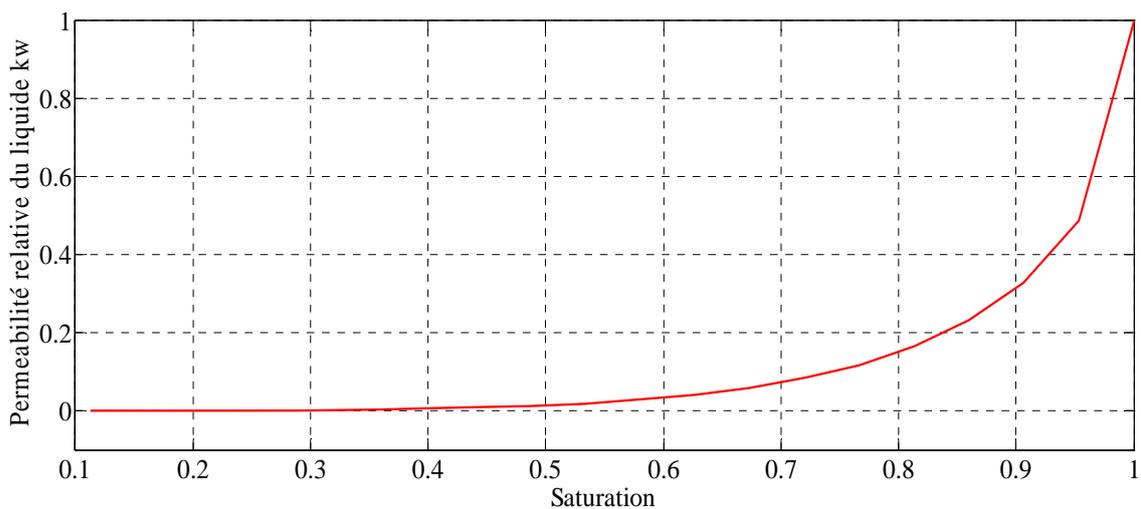


Fig V.16. Profil de la perméabilité relative liquide en fonction de la saturation

➤ La conductivité thermique effective

La figure V.17 montre l'évolution de la conductivité effective du sol à différentes profondeurs; nous remarquons qu'elle suit le profil des teneurs en eau.

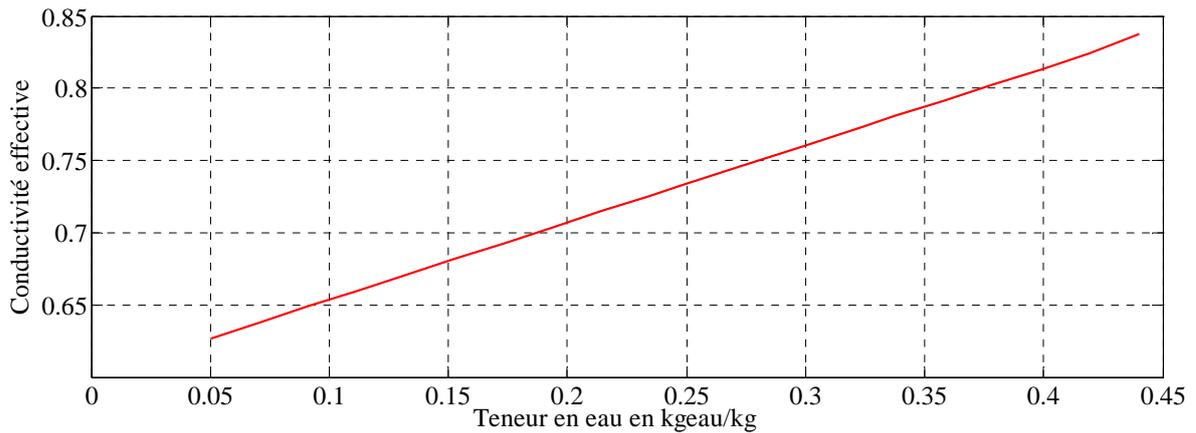


Fig V.17. Profil de la conductivité effective du sol en fonction de la teneur en eau

➤ La pression capillaire

On remarque dans la figure V.18 une augmentation de la pression d’eau liquide en fonction de la saturation et une diminution de la pression capillaire; ce qui est justifié par les relations [I. 2] et [III-8]

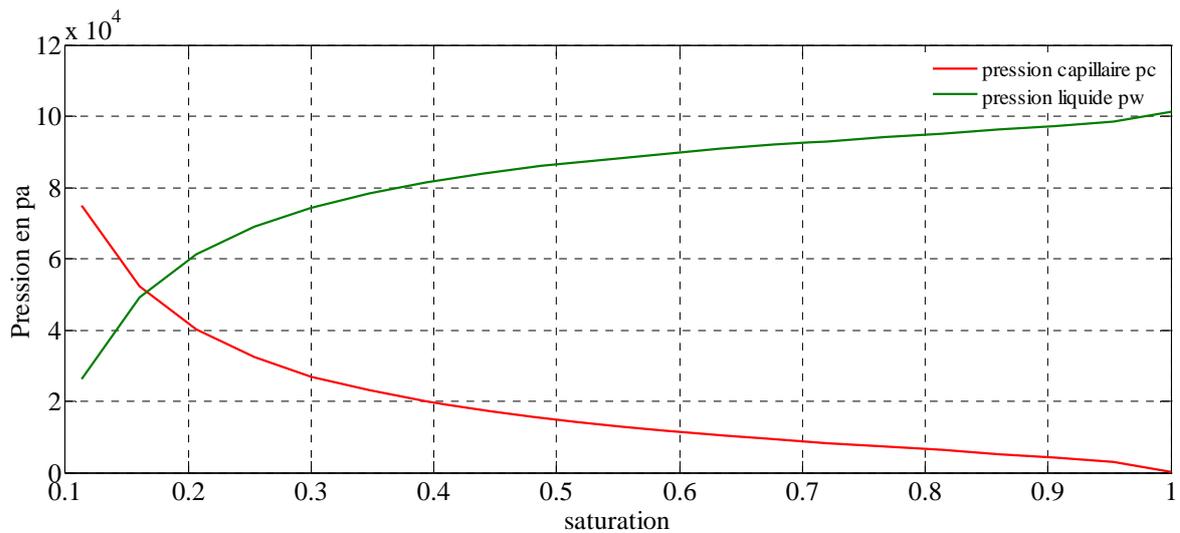


Fig V.19. Profils des pressions liquide et capillaire en fonction de la saturation

Le profil de la pression capillaire en fonction de la saturation a une allure logarithmique:

$$P_c = -22749 \ln(S) + 67246$$

Avec un résidu R tel que: $R^2 = 0,9768$

A la saturation (en profondeur), la pression capillaire s’annule. A l’inverse de la pression liquide. Rappelons que les deux pressions P_c et P_w sont liées par la relation: $P_c = P_{atm} - P_w$

➤ La vitesse de Darcy

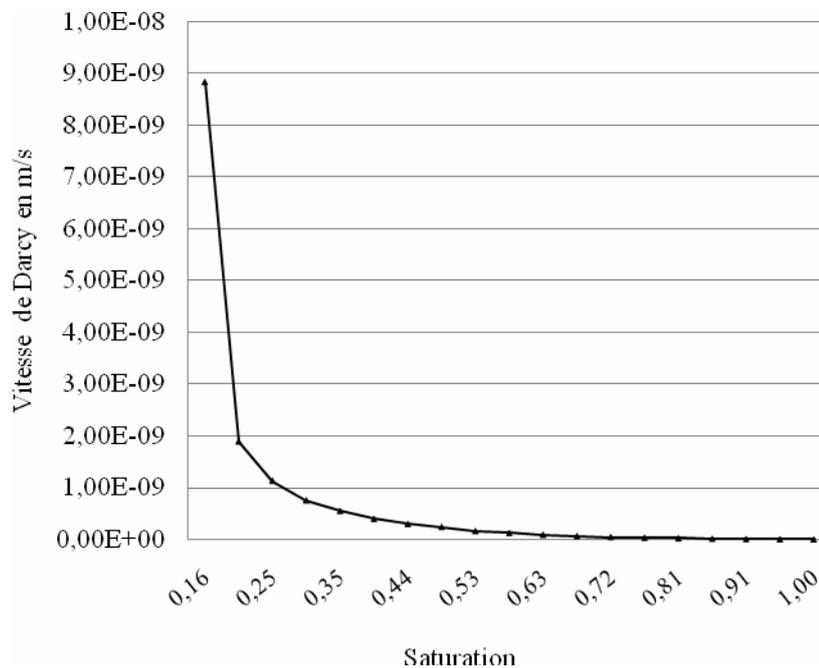


Fig V.20. Evolution de la vitesse de Darcy en fonction de la saturation

La vitesse de remontée d'eau (vitesse de Darcy) en fonction de la saturation est représentée sur la figure V. 20.

On remarque que la vitesse augmente en remontant en surface, ceci est dû à la pression capillaire maximale à ce niveau et au flux évaporatif.

La vitesse moyenne journalière : $v_w = 7,75E-10$ m/s

La quantité d'eau/ $m^2 =$ vitesse de darcy moyenne $\times 3600 \times 24$

$$=6,70E-05 \text{ m}^3 \text{ par m}^2$$

$$=6,70E-02 \text{ litres par m}^2 \text{ de surface par jour}$$

Conclusion

Il apparaît clairement que les variations des conditions climatiques extérieures au cours de la journée n'affectent que les couches supérieures du sol, environ 50 cm dans le cas des caractéristiques du sol étudié. Le signal de température en surface subit une atténuation en profondeur et il est affecté d'un déphasage progressif lié à l'inertie du sol. Ainsi, au cours de la journée type du mois de Mai, la température maximale du sol, atteinte à 12h 30mn, est de 22°C, et elle passe à 18°C pour un point situé à 30 cm de profondeur, avec un décalage de 3 h.

Ce phénomène se reproduit également au mois de Janvier avec cependant des maxima de températures inférieurs et un décalage plus important l'après-midi. Ce résultat ainsi que

l'évolution de la température dans cette couche supérieure sont confirmés par des travaux antérieurs sur ce thème (NEBBALI R., 2008) et (GAO Z., 2007).

Dans les couches inférieures, les températures sont constantes au cours de la journée (résultat vérifié au cours des mesures effectuées *in situ*). Les températures évoluent jusqu'à atteindre la valeur de la température mensuelle moyenne du sol (17°C le 21 Mai) à 3 m de profondeur.

La teneur en eau est très peu affectée par les variations climatiques de la journée. On constate cependant une légère remontée de sa valeur en surface à l'instant le plus chaud de la journée. En profondeur, la teneur en eau augmente jusqu'à atteindre la saturation à 3 m (condition imposée à cette limite) avec un profil linéaire, lequel est probablement lié au choix sur le profil initial des teneurs en eau.

Conclusion générale

Conclusion générale

La modélisation des transports de masse et de chaleur reste encore l'une des problématiques à explorer, malgré la diversité des travaux et leurs multitudes. Dans le cadre du présent travail l'objectif est d'élaborer un modèle de transfert de chaleur et de masse dans un sol non saturé.

Cet objectif a été réalisé en cinq (05) phases développées dans les chapitres de ce mémoire ;

La modélisation nécessite une caractérisation du produit (le système) afin de déterminer ses diverses propriétés physiques et mécaniques, la résolution d'un problème de transfert de masse et de chaleur revient à déterminer alors les grandeurs caractéristiques à savoir, la température, la teneur en eau massique et masse volumique, ce qui permet le calcul des flux de chaleur et de masse.

Pour calculer les paramètres suscités nous avons établi un modèle en se basant sur les principes de conservation de la mécanique des fluides et thermodynamique à savoir l'équation de continuité (conservation de la masse) l'équation de mouvement (conservation de la quantité de mouvement) et l'équation d'énergie aussi avec les lois empirique de Darcy-Fick pour le transfert de masse. Un modèle numérique est développé en utilisant la méthode des volumes finis qui est une méthode de discrétisation des équations de système développé précédemment, il sera question de les discrétiser dans l'espace et dans le temps.

La résolution du système s'est faite à l'aide de la méthode Newton-Raphson qui est une méthode itérative qui consiste à initialiser la valeur des paramètres et à définir une suite de système linéaire tangent, le schéma de Newton-Raphson est imbriqué dans la boucle de calcul d'intégration temporelle, à chaque pas de temps. On démarre les itérations avec les valeurs convergées aux pas précédent par la suite nous donnons l'algorithme de calcul afin de le résoudre sous le logiciel de calcul Matlab.

Ce programme nous a permis de simuler un sol non saturé et de montrer l'influence de la température et de la teneur en eau ; moteurs des transferts de chaleur et masse ; sur les caractéristiques hydriques et diffusives du sol.

De même, ce programme nous a permis de caractériser le comportement thermique et hydrique du sol à l'échelle d'une année et à l'échelle d'une journée.

S'agissant de la période de 24 heures, les variations de température en surface affectent le sol dans une couche qui n'excède pas 60 cm d'épaisseur.

Ces premiers résultats obtenus ont montré que l'objectif initial a été atteint, en effet le modèle simule le transport de masse dans un milieu poreux non saturé, il donne aussi des résultats généralement satisfaisants en faisant la comparaison avec des travaux déjà effectués auparavant, en ce qui concerne l'évolution des températures dans le sol et la teneur en eau massique. Notre simulation s'est faite sur des valeurs moyennées de climat extérieur à savoir la température et le rayonnement solaire.

Perspectives

Compte tenu du travail effectué et des résultats obtenus, des prolongements à la fois numériques, théoriques et expérimentaux méritent d'être envisagés, à savoir :

- Détermination expérimentale précise des propriétés du milieu et surtout celles de transport (K et P_c) et mécaniques (E et ν) qui sont d'après l'étude de sensibilité des paramètres clés de la modélisation,
- Maîtrise des conditions à l'interface milieu environnement puisqu'on utilise des conditions aux limites classiques constantes du type flux mais il fallait plutôt faire une étude fine à l'interface,
- Prise en compte de 3 dimensions dans la simulation afin d'avoir une meilleure description des transports,
- Validation expérimentale complète du modèle et surtout en ce qui concerne les profils internes d'humidité,
- Faire une étude de sensibilité du modèle en élargissant la gamme de variation des paramètres du modèle.
- Valider le modèle pour différents types de sol qu'ils soient couverts de végétations ou non,
- Rajouter le phénomène du gel et dégel au modèle pour reproduire fidèlement des situations réelles de grand gel et dégel en surface.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

S. Azizi, C. Moyne, et A. Degiovanni. Approche expérimentale et théorique de la conductivité thermique des milieux poreux humides –I expérimentation. *Int. J. Heat Mass Transfert*, 31(11) :2305-2317, 1988.

Baroghel-Bouny V. « Caractérisation des pâtes de ciment et des bétons - Méthodes, Analyse, Interprétations ». Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris, 1994, 468 pages.

Z.P. Bazant, Constitutive equation for concrete creep and shrinkage based on thermodynamics of multiphase systems. *Matériaux et Constructions*, 3(13):3-36, 1970.

Z.P. Bazant et L.N. Najjar. Nonlinear water diffusion in nonsaturated concrete. *Matériaux et Constructions* , 5(25):3-20, 1972.

J.C. Bénet. Contribution à l'étude thermodynamique des milieux poreux non saturés avec changement de phase. Thèse de doctorat, Université des sciences et techniques du Languedoc, 1981

A. Bensoussan A., J. L. Lion, G. Papanicolaou, Asymptote analysis for periodic structures, North-Holland Publishing Compagny, Amsterdam, The Netherlands (1978).

Bear J., 1972. Dynamics of Fluids in Porous Media. American Elsevier. New-York.

Bolt G.H., 1976. Soil physics terminology. International Society of Soil Science. Bull. 49, 16-22.

CH. Brichambaut, CH. Vauge. Gisement solaire: évaluation de la ressource énergétique.

Raoul CALVET, le sol : propriétés et fonctions Volume2

Celia, M. A. et Binning, P. : 1992, A mass conservative numerical solution for two-phase flow in porous media with application to unsaturated flow, *Water Resources Research*, 28 (10), 2819-2828.

Celia, M. A. et Binning, P. : 1992, A mass conservative numerical solution for two-phase flow in porous media with application to unsaturated flow, *Water Resources Research*, 28 (10), 2819-2828.

Chavent, G. : 1981, The global pressure, a new concept for the modelization of compressible two-phase flows in porous media, in Flow and Transport in porous Media, A.Verruijt and F. Barends eds., Balkema, 191-198. (Proceedings of euromech).

Childs E.C. and Collis-George N., 1950. The permeability of porous materials. Proc. R. Soc. London. Ser. A (201), 392-405.

Coussy O. « Mécanique des milieux poreux ». Paris : Editions TECHNIP, 1991, 437 pages.

P. Crausse. Etude fondamentale des transferts couplés de chaleur et d'humidité en milieu poreux non saturé. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1983

Daian J.F. « Processus de condensation et de transfert d'eau dans un matériau méso et macroporeux. Etude expérimentale du mortier de ciment ». Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, 1986, 319 pages.

A. Degiovanni et C. Moyne. Conductivité thermique des matériaux poreux humides : évaluation théorique et possibilité de mesure. Int. J. Heat Mass Transfert, 30(11) :2225-2245, 1987.

Gaudet J.P., 1978. Transferts d'eau et de soluté dans les sols non saturés. Mesures et simulation. Thèse présentée à l'Université Scientifique et Médicale et l'Institut National Polytechnique de Grenoble pour le grade de docteur d'Etat.

Granger L. « Comportement différé du béton dans les enceintes de centrales nucléaires : Analyse et modélisation ». Thèse de doctorat Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris, 1996, 381 pages.

Hassanizadeh, S. M., Celia, A. M. et Dahle, H. K. : 2002, Dynamic effect in the capillary Pressure-Saturation relationship and its impacts on unsaturated flow, Vadose Zone Journal, 1, 38-57.

International institute for water and environmental Engineerig.

Kaviany (M), 1995, Principles of Heat Transfer in Porous Media, Edition Springer, Second Edition.

Kaye, G.W.C et Laby, T.H. 1973, Table of chemical and physical constants. 14th edition Longman.

Kosugi, K., Hopmans, J. W. et Dane, J. H. : 2002, Parametric models, (chapitre 3.3.4 dans *Methods of soil analysis: Part 4 - Physical methods*, SSSA Book series n°5.

Krischer, O. and Kast, W. (1992), *Die wissenschaftlichen Grundlagen der Trocknungstechnik, erster Band, dritte Auflage*, Springer, Berlin.

Luikov, VA. 1968. *Theory of Drying (in Russian)*. Energija, Moskva.

Luikov, V.A. 1972. *Handbook of Heat and Mass Transfer (in Russian)*. Energija, Moskva.

Marchand J., Gérard B. «Ion transport mechanisms in cement based materials». ACI Special Publication SP- 154. 1995. Pages 169-210.

G. Menguy et R. Bernard. *Le rayonnement solaire conversion thermique et applications*

Mualem Y., 1976. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resour. Res.* 12, 513-522.

Nebbali R., *Modélisation de la dynamique du climat interne distribué dans une serre de culture*. Thèse de doctorat de l'Université de Franche-Comté. France 2008.

Philip J.R, De Vries D.A., 1957. Moisture Movement in porous materials under temperature gradients, *Trans. Am. Geophys. Un.* 38, 222-232

Le Potier C. « Mise en œuvre dans CASTEM2000 d'un modèle thermohydraulique ». Rapport DMT/SEMT/MTMS/RT/99-003-A, Commissariat de l'Energie Atomique, Centre d'études de Saclay, Département de Mécanique et de Technologie Saclay, 1999, 62 pages.

M. Quintard, S. Whitaker, Convection, Dispersion, and Interfacial Transport of Contaminants: Homogeneous Porous Media, *Advances in Water Resources* (17) (1994) 221-239.

Raats, P. A. C., Zhang, Z. F., Ward, A. L. et Gee, G. W.: 2004, The relative connectivity-tortuosity tensor for conduction of water in anisotropic unsaturated soils, *Vadose Zone Journal*, 3 (4),1471–1478.

Raats, P. A. C.: 2001, Developments in soil-water physics since the mid 1960s, *Geoderma*, 100 (3-4), 355-387.

Roth K., 1995. Soil Physics, lecture notes.

Roth, K. : 2005, Soil Physics, Lecture Notes. Institute of Environmental Physics, University of Heidelberg, 252 p.

E. Sanchez-Palencia, Nonhomogeneous media and vibration theory. Springer, Berlin (1980).

Schaap, M. G. et van Genuchten M. Th. : 2005, A Modified Mualem–van Genuchten Formulation for Improved Description of the Hydraulic Conductivity Near Saturation, *Vadose Zone Journal*, 5, 27-34.

Scheidegger (AE), 1963, The physics of flow through porous media, University of Toronto Press, Revised Edition

Tindall, J. A., Kunkel J. R.. 1999. Unsaturated zone hydrology for scientist and engineers. Prentice-Hall. Inc. New Jersey, U. S. A.

U.S. Geological Survey: Institut d'études géologiques des États-Unis

Vargaftik, N. B., Vinogradov, J. K. and Yargin, V. S. (1996), Handbook of physical properties of liquids and gases : pure substances and mixtures, 3rd Edition, Begell House, New York.

Vogel, T., van Genuchten, M. T. et Cislerova, M. : 2001, Effect of the shape of the soil hydraulic functions near saturation on variably-saturated flow predictions, *Advances in Water Resources*, 24 (2), 133-144.

Whitaker S., 1977: Simultaneous heat, mass, and momentum transfer in porous media: a theory of drying. *Advances in heat transfer*, 13, pp 119-203.

Whitaker, S. (1980), Heat and mass transfer in granular porous media. In: *Advances in Drying 1*, Mujumdar, A. S. (Ed.), Hemisphere Publ. Corp., Washington DC, pp. 23÷61.

Whitaker, S. (1999) The method of volume averaging, Kluwer academic Publishers.

Annexes

Constantes du problème

<u>Symbole</u>	<u>désignation</u>	<u>unités</u>	<u>valeurs</u>
A_1	Coefficients de trouble atmosphérique	-	0.88
A_2	Coefficients de trouble atmosphérique	-	0.26
$C_{p,s}$	Capacité calorifique du sol	J/kgK	1270
$C_{p,w}$	Capacité calorifique de l'eau	J/kgK	4185
$C_{p,a}$	Capacité calorifique de l'air sec	J/kgK	1006
$C_{p,v}$	Capacité calorifique de la vapeur d'eau	J/kgK	1874
K	Perméabilité intrinsèque	m ²	10 ⁻⁴
L_v	Chaleur latente d'évaporation de l'eau	J/kg	2,5.10 ⁵
M_w	Masse molaire de l'eau	kg/mole	0.018
PR	Pression de référence	Pa	101325
Patm	Pression atmosphérique	Pa	101325
R	Constante des gaz parfaits	J/moleK	8.314
T _R	Température de référence	K	273
ρ_{sol}	Masse volumique du sol	Kg/m ³	1500
λ_s	Conductivité thermique du sol	W/m.°C	1
ψ	Porosité du milieu	-	40%
σ_B	Constante de Boltzmann	W/K ⁴	5.67E-8
α	Albédo du sol	-	0.2
Δt	Pas de temps	s	600
Δx	Pas d'espace	m	0.2
Lat.	Latitude de la ville de Tizi-Ouzou	-	36.71
Long	longitude de la ville de Tizi-Ouzou	-	4.035



المخبر المركزي للأشغال العمومية
LABORATOIRE CENTRAL DES TRAVAUX PUBLICS

RAPPORT DE FORAGE Sondage N°: SC2

ETUDE : Laboratoire de recherche
LIEU : Hasnaoua II/Tizi-Ouzou
CLIENT : Université Mouloud Mammeri
DATE DEBUT : 22/03/2009
DATE FIN : 22/03/2009
NIVEAU NAPPE : m

PROFONDEUR TOTALE : 10 ML
COORDONNEES : X = Y =
Z =

BOUE DE FORAGE :
TYPE FORAGE : carotté
TYPE DE MACHINE :

Prof (m)	Récupération				S.P.T	R.Q.D	φ Tub	φ Carottier	Echant Profond Ech (m)	Coupe	DESCRIPTION	Cu Bar	Φ _u (°)	W _n %	γ _d T/m ³	I _p %	Class. LPC	Type Essai	
	0	25	50	75															100
0,5																			
1,0																			
1,5																			
2,0																			
2,5																			
3,0																			
3,5																			
4,0																			
4,5																			
5,0																			
5,5																			
6,0																			
6,5																			
7,0																			
7,5																			
8,0																			
8,5																			
9,0																			
9,5																			
10,0																			



المخبر المركزي للأشغال العمومية
LABORATOIRE CENTRAL DES TRAVAUX PUBLICS

RAPPORT DE FORAGE Sondage N°: SC3

ETUDE : Laboratoire de recherche
LIEU : Hasnaoua II/Tizi-Ouzou
CLIENT : Université Mouloud Mammeri
DATE DEBUT : 17/04/2009
DATE FIN : 18/04/2009
NIVEAU NAPPE : m

PROFONDEUR TOTALE : 10 ML
COORDONNEES : X = Y =
Z =

BOUE DE FORAGE :
TYPE FORAGE : carotté
TYPE DE MACHINE :

Prof (m)	Récupération				S.P.T	R.Q.D	φ Tub	φ Carottier	Echant Profond Ech (m)	Coupe	DESCRIPTION	Cu Bar	φ _u (°)	W _n %	γ _d T/m ³	I _p %	Class. LPC	Type Essai
	0	25	50	75														
0,5										0,40	remblai en TVO							
1,0										1,30	remblai argilo-limoneux à inclusions diverses							
1,5											argile limoneuse							
2,0																		
2,5																		
3,0			100 %															
3,5																		
4,0																		
4,5																		
5,0																		
5,5																		
6,0																		
6,5																		
7,0																		
7,5			66 %															
8,0																		
8,5																		
9,0																		
9,5			100 %															
10,0																		



المخبر المركزي للأشغال العمومية
LABORATOIRE CENTRAL DES TRAVAUX PUBLICS

RAPPORT DE FORAGE Sondage N°: SC4

ETUDE : Laboratoire de recherche

LIEU : Hasnaoua II/Tizi-Ouzou

CLIENT : Université Mouloud Mammeri

DATE DEBUT : 18/04/2009

PROFONDEUR TOTALE : 10 ML

BOUE DE FORAGE :

DATE FIN : 19/04/2009

COORDONNEES : X = Y =

TYPE FORAGE : carotté

NIVEAU NAPPE : m

Z =

TYPE DE MACHINE :

Prof (m)	Récupération				S.P.T	R.Q.D	φ Tub	φ Carottier	Echant	Profond Ech (m)	Coupe	DESCRIPTION	Cu Bar	φ _u (°)	W _n %	γ _d T/m ³	I _p %	Class. LPC	Type Essai	
	0	25	50	75																100
0,5																				
1,0																				
1,5																				
2,0																				
2,5																				
3,0																				
3,5																				
4,0																				
4,5																				
5,0																				
5,5																				
6,0																				
6,5																				
7,0																				
7,5																				
8,0																				
8,5																				
9,0																				
9,5																				
10,0																				