

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOULOU D MAMMERI DE TIZI-OUZOU
FACULTÉ DE GENIE ELECTRIQUE ET D' INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

THÈSE

Présentée pour obtenir le diplôme de
Doctorat 3^{ème} Cycle LMD
Spécialité : AUTOMATIQUE & SYSTÈMES

Par :

Ahcene HAMOUDI

THEME

Contribution à la conception
d'observateurs non linéaires pour la synchronisation
des systèmes chaotiques sous contraintes de communication

SOUTENUE DEVANT LE JURY :

Président	MANSOURI Rachid	Professeur, Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou
Rapporteur	DJEGHALI Nadia	M.C.A, Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou
Co-Rapporteur	BETTAYEB Maamar	Professeur, Université de Sharjah, Emirats Arabes Unis
Examineur	MELLAH Rabah	Professeur, Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou
Examinatrice	DJAMAH Tounsia	Professeur, Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou
Examineur	LADACI Samir	Professeur, École Nationale Polytechnique d'Alger

ANNÉE : 26 MAI 2022

Remerciements

Ce travail de thèse a été effectué au Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP) de la faculté de Génie Électrique et Informatique de l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Je tiens d'abord à remercier ma directrice de thèse, Madame DJEGHALI Nadia, Maître de Conférences Classe A à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Il n'existe pas de mots suffisamment forts pour traduire le plaisir et la gratitude que j'ai eu à travailler sous sa direction. Je lui serai toujours reconnaissant pour la confiance qu'elle m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail, pour ses multiples et précieux conseils et pour sa rigueur scientifique, sa persévérance et sa patience, elle a su me guider tout au long de cette thèse. Qu'elle trouve, à travers ces lignes l'expression de ma profonde gratitude.

Je témoigne toute ma reconnaissance à mon co-directeur de thèse, Monsieur BETTAYEB Maamar, Professeur à l'université de Sharjah (Emirats Arabes Unis), pour sa collaboration, son aide précieuse et sa disponibilité. Je tiens à le remercier pour toute l'attention qu'il m'a apportée tout au long de ma thèse.

Je tiens à remercier Monsieur MANSOURI Rachid, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou pour l'honneur et le plaisir qu'il m'a faits en acceptant de présider le jury et d'évaluer notre travail. Ses précieuses remarques et suggestions permettront sans aucun doute d'améliorer la qualité de ce manuscrit. Qu'il trouve dans ces lignes l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie énormément Monsieur MELLAH Rabah, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou ainsi que Madame DJAMAH Tounsia, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou et Monsieur LADACI Samir, Professeur à l'École Nationale Polytechnique d'Alger, d'avoir accepté de faire partie de ce jury de soutenance et pour l'honneur qu'ils me font par leurs présences. Je leur suis infiniment reconnaissant de porter leurs regards d'experts sur notre travail et notre manuscrit de thèse. Leurs suggestions intéressantes, leurs remarques avisées et leurs discussions constructives m'aideront certainement à améliorer ce travail et me

serviront à l'avenir pour en réaliser d'autres.

Mes remerciements s'adressent également à tous mes amis et collègues du Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP) sans exception, pour leurs riches connaissances, leurs qualités humaines et leur bonne humeur, m'ont permis d'avancer dans mes travaux dans les meilleures conditions.

La réalisation de ce travail n'aurait pu aboutir sans ma famille qui m'a toujours soutenu et encouragé tout au long de mes études. Les mots ne peuvent exprimer combien je suis reconnaissant pour leur confiance et sacrifice.

Je remercie tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de cette thèse.

A la mémoire de mon petit frère
A mes très chers parents et à mon petit frère Sofidi
A ma très chère Meriem

Résumé

Récemment, de plus en plus d'attention a été accordée à l'utilisation du chaos dans la transmission sécurisée de données. En effet, depuis le travail pionnier de Pecora et Carrol, qui ont démontré la possibilité de synchroniser deux systèmes chaotiques avec des conditions initiales différentes, l'utilisation de systèmes chaotiques dans une communication sécurisée a révolutionné les méthodes de cryptage traditionnelles.

Dans les systèmes de communication basés sur le chaos, le message secret est masqué par le signal pseudo-aléatoire généré par le système chaotique entraîné (émetteur ou maître) conduisant à un signal inintelligible qui est transmis par le canal public au système chaotique de réponse (récepteur ou esclave). La récupération du message d'origine est possible si l'émetteur et le récepteur sont synchronisés. Cependant, l'un des problèmes majeurs de la configuration maître-esclave est l'apparition d'un retard dans le canal de transmission entre l'émetteur et le récepteur, qui est généralement causé par la distance entre les deux systèmes, et qui constitue un élément très néfaste à la synchronisation. En effet, si la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur n'est pas correctement réalisée, il serait alors impossible de reconstruire le message secret.

Par ailleurs, l'introduction des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire dans la conception des schémas de communication sécurisée augmente grandement la sécurité. En effet, les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire améliorent la sécurité en considérant les ordres de dérivation comme des paramètres supplémentaires de la clé de sécurité. Ainsi, une grande attention a été accordée à la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.

L'objectif de cette thèse est de développer des nouvelles méthodes de synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre entier et fractionnaire à base d'observateurs en présence de retard dans le canal de communication (retard sur la mesure) et de perturbations (incertitudes paramétriques et perturbations externes). Dans les techniques proposées, le système esclave est composé de deux éléments : un observateur à mode glissant d'ordre supérieur qui permet d'estimer les états retardés en temps fini et sans chattering, et un prédicteur d'état qui permet de compenser le retard et ainsi d'assurer une bonne synchronisation entre les systèmes maître et esclave.

Les conditions de convergence des méthodes de synchronisation proposées sont établies et des exemples numériques sont donnés pour démontrer l'efficacité des approches de synchronisation proposées.

Mots-clés : Observateurs non linéaires, systèmes chaotiques, synchronisation chaotique, observateurs à mode glissant d'ordre supérieur, systèmes à retard, prédicteur d'état, systèmes d'ordre fractionnaire, transmission sécurisée.

Abstract

Recently, more and more attention has been paid to the use of chaos in the secure data transmission. Indeed, since the pioneering work of Pecora and Carrol, who demonstrated the possibility of synchronizing two chaotic systems with different initial conditions, the use of chaotic systems in secure communication has revolutionized traditional encryption methods.

In chaos-based communication systems, the secret message is masked by the pseudo-random signal generated by the driven chaotic system (emitter or master) leading to an unintelligible signal which is transmitted through the public channel to the chaotic response system (receiver or slave). Recovery of the original message is possible if the emitter and receiver are synchronised. However, one of the major problems of the master-slave configuration is the appearance of a delay in the transmission channel between the transmitter and the receiver, which is generally caused by the distance between the two systems, and which constitutes a very detrimental element to synchronisation. Indeed, if the synchronisation of the transmitter and the receiver is not correctly carried out, then it would be impossible to reconstruct the secret message.

Moreover, the introduction of fractional-order chaotic systems in the design of secure communication schemes greatly increases security. Indeed, chaotic fractional-order systems improve security by considering derivation orders as additional parameters of the security key. Thus, much attention has been paid to the synchronisation of fractional-order chaotic systems.

The objective of this thesis is to develop new methods of synchronisation of integer-order and fractional-order chaotic systems by using observers in the presence of delay in the communication channel (output delay) and perturbations (parametric uncertainties and external disturbances). In the proposed techniques, the slave system is composed of two elements : a high-order sliding mode observer which permits to estimate the delayed states in finite time and without chattering, and a state predictor which compensates for the delay and thus ensure a good synchronisation between master and slave systems.

The convergence conditions of the proposed synchronisation methods are established and numerical examples are given to demonstrate the effectiveness of the proposed synchronisation approaches.

Keywords :Nonlinear observers, chaotic systems, chaotic synchronisation, high-order sliding mode observers, delayed systems, state predictor, fractional-order systems, secure transmission.

Table des matières

Table des figures	xii
Liste des tableaux	xv
Symboles et Notations	xvii
Liste des travaux scientifiques	xix
Introduction générale	1
1 Observabilité et synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires	9
1.1 Introduction	9
1.2 Notions de base sur les observateurs d'états	10
1.3 Observabilité des systèmes linéaires	11
1.3.1 Observabilité des systèmes à retard	12
1.4 Différents types d'observateurs	13
1.5 Observateurs des systèmes linéaires	15
1.5.1 Observateur de Luenberger	15
1.5.2 Filtre de Kalman-Bucy	15
1.5.3 Observateur à entrée inconnue	16
1.5.4 Observateur à modes glissants	19
1.6 Observabilité des systèmes non linéaires	25
1.7 Synthèse d'observateurs non linéaires	28
1.7.1 Observateur de Luenberger étendu	28
1.7.2 Filtre de Kalman étendu	29
1.7.3 Observateur de Thau	30

1.7.4	Observateur à grand gain	32
1.7.5	Observateur adaptatif	34
1.7.6	Observateur à état étendu	36
1.7.7	Observateur à mode glissant	37
1.8	Conclusion	41
2	Systèmes chaotiques et synchronisation	43
2.1	Introduction	43
2.2	Systèmes chaotiques	44
2.2.1	Définitions	45
2.2.2	Propriétés du chaos	46
2.2.3	Exemple d'illustration	48
2.2.4	Analyse mathématique des systèmes chaotiques	50
2.3	Utilisation des systèmes chaotiques dans les schémas de communication sécurisée	54
2.3.1	Introduction à la cryptographie	55
2.3.2	Principe de la cryptographie	55
2.3.3	Objectifs de la cryptographie	55
2.3.4	Cryptographie chaotique	56
2.4	Synchronisation des systèmes chaotiques	57
2.4.1	Historique	58
2.4.2	Principe de la synchronisation des systèmes chaotiques	59
2.4.3	Types de synchronisation	59
2.4.4	Techniques et méthodes de synchronisation	62
2.5	Synchronisation à base d'observateurs	67
2.5.1	Schémas de communication basés sur la synchronisation des systèmes chaotiques à base d'observateurs	68
2.6	Conclusion	72
3	Synchronisation chaotique avec et sans retard dans le canal de communication	73
3.1	Introduction	73
3.2	Synchronisation d'un système TS chaotique sans retard dans le canal de communication	76

3.2.1	Structure du modèle TS	77
3.2.2	Synthèse de l'observateur PI	78
3.3	Application à la synchronisation des systèmes chaotiques	81
3.4	Synchronisation chaotique avec retard dans le canal de communication (mesure retardée)	85
3.4.1	Système maître	85
3.4.2	Synthèse du système esclave	86
3.5	Application à la synchronisation des systèmes chaotiques à sortie retardée	96
3.5.1	Système chaotique de Rössler	96
3.5.2	Système chaotique de Genesio	102
3.6	Conclusion	105
4	Systèmes d'ordre fractionnaire	107
4.1	Introduction	107
4.2	Outils mathématiques	108
4.2.1	La fonction Gamma d'Euler	109
4.2.2	La fonction de Mittag-Leffler	109
4.2.3	Intégrale et dérivée d'ordre fractionnaire	110
4.3	Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire	113
4.3.1	Équation différentielle généralisée	114
4.3.2	Fonction de transfert fractionnaire	115
4.3.3	Représentation d'état des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire	115
4.3.4	Commandabilité, stabilité et observabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire	116
4.3.5	Matrice de transition fractionnaire	118
4.3.6	Solution de l'équation d'état fractionnaire	119
4.4	Systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire	120
4.4.1	Observabilité	120
4.5	Systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire	123
4.6	Conclusion	127

5 Synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire soumis à des mesures retardées	129
5.1 Introduction	129
5.2 Système maître	131
5.3 Synthèse du système esclave	132
5.3.1 Synthèse de l'observateur	133
5.3.2 Synthèse du prédicteur	138
5.4 Application à la synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires	141
5.4.1 Système chaotique de Genesio Tesi	141
5.4.2 Système chaotique de Genesio avec des paramètres différents	155
5.5 Conclusion	156
Conclusion Générale	159
Bibliographie	163

Table des figures

2.1	Attracteur étrange du système de Rössler.	48
2.2	Évolution aléatoire des trajectoires du système.	49
2.3	Sensibilité aux conditions initiales de l'état $x(t)$ du système de Rössler.	49
2.4	Spectre de puissance.	50
2.5	Exposants de Lyapunov du système (2.3)	53
2.6	Diagrammes de bifurcation en fonction des paramètres a, b et c	53
2.7	Schéma d'un cryptosystème	55
2.8	Schéma de couplage : (1) unidirectionnel, (2) bidirectionnel	60
2.9	Principe de la synchronisation à base d'observateurs	67
2.10	Schéma représentatif de la technique de masquage chaotique	68
2.11	Schéma représentatif de la méthode par modulation paramétrique.	69
2.12	Schéma représentatif de la technique par commutation chaotique.	70
2.13	Schéma représentatif de la technique par inclusion.	70
2.14	Schéma représentatif de la technique de transmission à deux voies	71
2.15	Schéma représentatif de la technique de cryptage combiné	72
3.1	Schéma de synchronisation proposé.	77
3.2	Attracteur chaotique de Rössler sans entrée inconnue (bleu), avec en (rouge). . .	83
3.3	États réels (en noir), états estimés (en rouge).	83
3.4	Entrée inconnue (en noir), entrée inconnue estimée (en rouge).	83
3.5	Erreurs entre les états et leurs estimations.	84
3.6	Erreur entre l'entrée inconnue (message audio) et son estimation.	84
3.7	Schéma observateur-prédicteur.	85
3.8	Portraits de phase de l'attracteur chaotique du système (3.69) : $(z_1 - z_2)$ et $(z_2 - z_3)$. . .	99

3.9	Sortie sans retard.	100
3.10	États réels (en couleur noire) et états prédits (en couleur rouge) pour $\tau = 0s$. . .	100
3.11	États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour $\tau = 0.3s$	101
3.12	États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour $\tau = 0.6s$	101
3.13	États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour $\tau = 0.8s$	102
3.14	Portraits de phase de l'attracteur chaotique de Genesisio.	103
3.15	États réels (en noir) états prédits (en rouge) pour $\tau = 0s$	104
3.16	États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour $\tau = 0.3s$	104
4.1	Région de stabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire dans le plan s^α pour $0 < \alpha < 1$	117
4.2	Attracteur étrange du système de Lorenz d'ordre fractionnaire.	125
4.3	Trajectoires aléatoires des états du système de Lorenz d'ordre fractionnaire. . . .	125
4.4	Sensibilité aux conditions initiales de l'état $x(t)$ du système de Lorenz d'ordre fractionnaire.	125
4.5	Sensibilité à l'ordre de dérivation de l'état $x(t)$ du système de Lorenz d'ordre fractionnaire.	126
4.6	Attracteur étrange du système de Rössler d'ordre fractionnaire.	127
4.7	Trajectoires aléatoire des états du système de Rössler d'ordre fractionnaire. . . .	127
5.1	Schéma observateur-prédicteur fractionnaire.	133
5.2	Portrait de phase du système chaotique.	145
5.3	Signal de sortie sans retard.	146
5.4	États réels (en noir), états estimés (en rouge) pour l'observateur (5.53) avec $\tau = 0s$.	146
5.5	États réels (en noir), états estimés (en rouge) pour l'observateur (5.55) avec $\tau = 0s$.	147
5.6	États réels (en noir), états estimés (en rouge) pour l'observateur (5.56) avec $\tau = 0s$.	147
5.7	États réels (en noir), états estimés (en rouge) pour l'observateur (5.57) avec $\tau = 0s$.	148

5.8 États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.53) avec $\tau = 0.2s$	148
5.9 États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.55) avec $\tau = 0.2s$	149
5.10 États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.56) avec $\tau = 0.2s$	149
5.11 États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.57) avec $\tau = 0.2s$	150
5.12 États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.53) avec $\tau = 0.4s$	150
5.13 États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.55) avec $\tau = 0.4s$	151
5.14 États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.56) avec $\tau = 0.4s$	151
5.15 États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.57) avec $\tau = 0.4s$	152
5.16 États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.53) avec $\tau = 0.6s$	152
5.17 États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.55) avec $\tau = 0.6s$	153
5.18 États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.56) avec $\tau = 0.6s$	153
5.19 États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.57) avec $\tau = 0.6s$	154
5.20 États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.53) avec $\tau = 0.3s$	156

Liste des tableaux

2.1	Différents régimes d'un système dynamique non linéaire.	52
2.2	Analogie entre les systèmes cryptographiques et chaotiques	57
3.1	Temps de convergence par rapport au retard affectant la sortie.	99

Symboles et Notations

\mathbb{R} :	Ensemble des nombres réels
\mathbb{R}_+ :	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls
\mathbb{R}^n :	Espace vectoriel de dimension n dans l'ensemble des réels
$\mathbb{R}^{n \times m}$:	Ensemble des matrices réelles de dimensions $n \times m$
\mathbb{C} :	Ensemble des nombres complexes
t :	Variable temporelle
$x \in \mathbb{R}$:	Variable d'état
x^T :	Transposée du vecteur x
$ x $:	Valeur absolue de x
$\ x\ _2$:	Norme euclidienne de x
$\dot{x}(t)$:	Dérivée temporelle de l'état x
A^T :	Transposée de la matrice A
A^{-1} :	Inverse de la matrice A
A^\dagger :	Pseudo-inverse de la matrice A
I_n :	Matrice d'identité de dimension $n \times n$
$\lambda_{min}(A)$:	Plus petite valeur propre de la matrice A
$\lambda_{max}(A)$:	Plus grande valeur propre de la matrice (A)
\mathcal{C} :	Matrice de commandabilité
\mathcal{O} :	Matrice d'observabilité
$\ f\ _\infty$:	Norme H_∞

$I^k f(t) :$	$(k \in \mathbb{N})$, L'intégration répétée k fois de la fonction $f(t)$
$I^\alpha f(t) :$	$(\alpha \in \mathbb{R})$, L'intégration non entière d'ordre α de la fonction $f(t)$
${}^{RL}D_t^\alpha f(t) :$	Dérivée d'ordre α de la fonction $f(t)$ selon la définition de Riemann-Liouville
${}^C D_t^\alpha f(t) :$	Dérivée d'ordre α de la fonction $f(t)$ selon la définition de Caputo
$D^\alpha :$	Opérateur de dérivation d'ordre non entier α
$\Gamma :$	Fonction Gamma d'Euler
$\mathcal{P}_\alpha(t) :$	Facteur d'oubli
$\binom{\alpha}{j} :$	$(\alpha \in \mathbb{R}_+)$, désigne le binôme de Newton généralisé à des ordres réels
$D^\alpha f(kh) :$	désigne la valeur de la $\alpha^{\text{ème}}$ dérivée de $f(t)$ à l'instant kh
$E_\alpha :$	Fonction Mittag-Leffler
$D^\alpha x :$	$(x \in \mathbb{R}^n)$, tous les éléments du vecteur $x(t)$ sont dérivés au même ordre α
$D^{(\alpha)}(x) :$	$(\alpha \in \mathbb{R}_+^n, x \in \mathbb{R}^n)$, le $i^{\text{ème}}$ élément du vecteur $x(t)$ est dérivé à la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur α
$\mathcal{L} :$	Transformée de Laplace
$\mathcal{L}^{-1} :$	Transformée de Laplace inverse.
$LTI :$	Linear Time Invariant
$LTV :$	Linear Time variant
$SISO :$	Single Input, Single Output
$BIBS :$	Bounded Input, Bounded State
$LMI :$	Linear Matrix Inequality
$UIO :$	Unknown Input Observer
$TS :$	Takagi-Sugeno
$STA :$	Super-Twisting Algorithm

Liste des travaux scientifiques

Publications dans des revues internationales

[1] **Hamoudi, A.**, Djeghali, N., Bettayeb, M. (2020). Predictor-based super-twisting sliding mode observer for synchronisation of nonlinear chaotic systems with delayed measurements. *International Journal of Systems Science*, 51(15), 3013-3029. (publié)

[2] **Hamoudi, A.**, Djeghali, N., Bettayeb, M. (2022) High-order sliding mode based synchronisation of fractional-order chaotic systems subject to output delay and unknown disturbance. *International Journal of Systems Science*. (publié)

Conférences internationales avec actes et comité de lecture

[1] **Hamoudi, A.**, Djeghali, N., Bettayeb, M. (2021, March). Speech encryption based on synchronisation of chaotic Takagi-Sugeno systems using PI observer. In 2021 18th International Multi-Conference on Systems, Signals Devices (SSD'21). Sfax, Tunisia, pp. 1285-1290. (publié)

[2] **Hamoudi, A.**, Djeghali, N., Bettayeb, M. (Novembre, 2021). Video encryption-decryption based on synchronisation of chaotic systems for secure communication. 4^{ème} Conférence internationale sur la Vision Artificielle (CVA'21). Tizi-Ouzou, Algérie. (accepté et présenté)

Introduction Générale

De nos jours, la sécurisation de transmission de l'information est un sujet de recherche pour lequel il y a actuellement un fort regain d'intérêt, notamment pour deux raisons. D'une part, c'est une conséquence du formidable développement des télécommunications via le support réseau, notamment l'internet [1,2]. D'autre part, la sécurité est également apparue naturellement à la suite de la vulgarisation des échanges d'informations confidentielles. En effet, la notion de confidentialité s'est largement étendue du champ qui ne concernait initialement que la diplomatie, l'armée et les gouvernements. Cette confidentialité est devenue nécessaire à chaque individu à travers la banalisation des échanges d'informations sur les grands réseaux de communication comme l'internet. Les échanges d'informations privées concernent, par exemple, les transactions financières suite à des achats électroniques, la transmission de données médicales confidentielles ou, plus simplement, la correspondance électronique entre individus. Par conséquent, le chiffrement de message, de parole ou d'image est devenu un défi de plus en plus sérieux et urgent.

Bien que l'efficacité des algorithmes de chiffrement classique [3–5] soit reconnue, leur temps de calcul est long, ce qui conduit à une diminution du débit des messages transmis. Le développement constant des techniques de cryptanalyse, provoqué par la puissance croissante des ordinateurs disponibles [6], réduit le niveau de confidentialité de ces algorithmes. Ces failles ont poussé la recherche vers le développement de nouveaux systèmes. L'utilisation du chaos était l'une des alternatives proposées. Récemment, de plus en plus d'attention a été accordée à l'utilisation de la théorie du chaos pour développer de nouveaux schémas de chiffrement. Les propriétés des systèmes chaotiques, qui sont des systèmes déterministes au comportement complexe et imprévisible, très sensibles aux conditions initiales et aux variations paramétriques, motivent l'utilisation du chaos dans les applications de communication sécurisée. En effet, depuis le travail pionnier de Pecora et Carrol [7], qui ont démontré la possibilité de synchroniser deux systèmes chaotiques avec des conditions initiales différentes, l'utilisation des systèmes chaotiques dans une

communication sécurisée a révolutionné les méthodes de cryptage traditionnelles. Dans les cryptosystèmes basés sur le chaos, le message secret est masqué par le signal d'aspect aléatoire généré par le système chaotique entraînant (émetteur ou maître) conduisant à un signal inintelligible qui est transmis par le canal public au système chaotique de réponse (récepteur ou esclave). La récupération du message d'origine est possible si l'émetteur et le récepteur sont synchronisés.

Le phénomène de synchronisation peut être décrit comme étant un processus d'ajustement des rythmes des événements répétitifs par l'intermédiaire des faibles interactions. Huygens a observé ce phénomène pour la première fois en 1673 en étudiant un système de deux pendules couplés [8]. Depuis le constat de Huygens, la synchronisation des systèmes dynamiques a trouvé des applications en théorie et en pratique, et plusieurs types de synchronisation ont été distingués, notamment l'auto-synchronisation, qui se manifeste par des interactions internes entre les systèmes considérés et la synchronisation commandée, qui nécessite une intervention externe pour forcer deux systèmes ou plus à se synchroniser [9]. La synchronisation maître-esclave appartient à la catégorie de la synchronisation par commande, dans laquelle un système dominant (le système maître) impose son rythme à un second système (le système esclave). Ainsi, plusieurs méthodes de synchronisation à base de commande ont été proposées dans la littérature et ce dans le cas des systèmes chaotiques d'ordre entier [10–12].

Par ailleurs, avec le développement du calcul d'ordre fractionnaire [13, 14], l'attention a été portée à l'utilisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire dans la conception des schémas de communication sécurisée ce qui augmente grandement la sécurité. En effet, les ordres de dérivations sont considérés comme des paramètres supplémentaires de la clé de sécurité. Il est pratiquement impossible pour un intrus d'identifier les ordres fractionnaires à partir des mesures observées, ce qui améliore le niveau de sécurité. Plusieurs méthodes de synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire et leur application à la transmission sécurisée de données sont développées dans la littérature [15, 16].

En 1997, Nijmeijer et Mareels [17] ont démontré que la synchronisation de deux systèmes chaotiques est un problème de conception d'observateurs où le système esclave est conçu à base d'un observateur d'état pour le système maître. Le problème de l'estimation d'état et de la synthèse d'observateurs pour les systèmes dynamiques a été étudié depuis les années 1960 et est encore un domaine très actif aujourd'hui. En effet, de nombreuses applications, telles que la détection de défauts, la commande, l'identification et la synchronisation des systèmes dynamiques,

nécessitent une estimation d'état. Il s'agit de concevoir un système dynamique appelé observateur dont le but est de reconstruire les états du système en utilisant uniquement des informations partielles, telles que les signaux d'entrée et de sortie.

Dans ce contexte, diverses stratégies de synthèse d'observateurs pour différentes classes des systèmes linéaires et non linéaires ont été développées, telles que les systèmes Lipschitziens, les systèmes satisfaisant les propriétés du secteur et de restriction de pente, les systèmes ayant des formes particulières telle que la forme canonique observable et pour lesquelles plusieurs types d'observateurs linéaires et non linéaires ont été proposés tels que l'observateur de Luenberger [18,19], le filtre de Kalman [20], l'observateur à grand gain [21,22], l'observateur de Thau [23], l'observateur d'Arcak [24], etc.

Ces observateurs ont été utilisés et mis en œuvre avec succès dans des conditions idéales. Cependant, dans la pratique, on est fréquemment confronté à des situations dans lesquelles ces stratégies ne parviennent pas à estimer avec précision l'état du système. Il s'agit de contraintes et d'incertitudes imposées par l'environnement extérieur et les imperfections des circuits électroniques, qui se manifestent par des incertitudes paramétriques, des perturbations, des dynamiques non modélisées, des entrées inconnues, des défauts, des bruits de mesure, des retards, etc. Ces imperfections sont particulièrement courantes dans le contexte de la synchronisation maître-esclave et ses applications dans les systèmes de communication, où elles sont souvent négligées ou seulement analysées et quantifiées.

Afin d'améliorer les performances d'un observateur d'état dans de telles circonstances, les chercheurs ont développé des stratégies plus avancées qui tiennent compte des considérations pratiques : les stratégies robustes et adaptatives ont ainsi vu le jour.

Par conséquent, les observateurs à entrées inconnues [25,26] ont été développés dans le but d'estimer l'état du système tout en découplant les entrées inconnues ; les observateurs à modes glissants [27–29] basés sur la théorie de la commande à structure variable sont des observateurs robustes qui permettent l'estimation simultanée de l'état et de l'entrée inconnue ; et les observateurs adaptatifs [30–32] ont été développés dans le but de reconstruire simultanément les états et les paramètres inconnus.

Indéniablement, les observateurs à modes glissants sont une solution simple aux problèmes cités ci-dessus. Cependant, la présence des termes discontinus induisent le phénomène de chattering (réticence ou broutement) qui se traduit par de fortes oscillations à des hautes fréquences.

Néanmoins, le recours aux modes glissants d'ordre supérieur permet de conserver les avantages du mode glissant d'ordre un (convergence en temps fini, précision et la robustesse vis à vis des incertitudes) tout en réduisant le phénomène de chattering [33].

Par ailleurs, le problème de la conception d'observateurs non linéaires, en présence d'un retard affectant la sortie, a pris de l'ampleur ces dernières années. Les techniques d'immersion et d'invariance ont été étudiées pour concevoir des observateurs pour des systèmes non linéaires lorsque la sortie est soumise à un retard constant [34]. Un observateur à grand gain sous mesures retardées est développé dans [35]. Un observateur pour les systèmes non linéaires Lipschitziens soumis à un retard variable dans le temps est proposé dans [36]. Le premier travail traitant de la conception d'observateurs non linéaires à sortie retardée est présenté dans [37], pour une classe de systèmes uniformément observables. Les auteurs proposent un "observateur en chaîne" composé d'observateurs successifs en cascade. Chaque observateur considère qu'il y a eu un retard à chaque instant retardé. Cette idée a été étendue dans [38–40]. La conception d'observateur-prédicteur en cascade est une approche efficace pour compenser le problème du retard dans les systèmes non linéaires [41–43]. Cette approche se compose de deux étapes. Dans la première étape, un observateur est conçu pour estimer l'état retardé. L'observateur est alimenté par les mesures retardées pour obtenir l'estimation de l'état retardé. Cet observateur fonctionne comme dans une situation de retard libre. Dans la deuxième étape, le prédicteur est utilisé pour compensé le retard.

La théorie des observateurs non linéaires a joué un rôle fondamental dans le développement des méthodes de synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre entier et d'ordre fractionnaire et de leurs applications dans les systèmes de transmission de données sécurisés. Plusieurs observateurs ont été développés dans la littérature, parmi eux, on peut citer l'observateur synergétique [44, 45], l'observateur proportionnel intégral [46], l'observateur à mode glissant [47, 48], l'observateur exponentiel non fragile [49] et l'observateur adaptatif [50, 51].

Cependant, dans la plupart des méthodes de synchronisation proposées dans la littérature, les moyens de communication sont considérés comme idéaux. En effet, plusieurs contraintes de communication, telles que retard dans le canal de transmission (retard sur la mesure), les incertitudes et les perturbations externes ne sont pas prises en considération. Ces contraintes peuvent dégrader la synchronisation. Ainsi, un retard dû au délai de communication peut altérer la réalisation de la synchronisation. Si la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur n'est pas

correctement réalisée, il serait alors impossible de reconstruire le message secret. Par conséquent, il est souhaitable que les méthodes de synchronisation tiennent compte de ces contraintes.

Objectifs de la thèse

L'objectif majeur de cette thèse est d'apporter des réponses aux problèmes rencontrés dans les applications de communication basées sur la synchronisation de systèmes chaotiques soumis à des contraintes de communication (retard, incertitudes paramétriques et perturbations externes), en utilisant des techniques issues de l'automatique, notamment la théorie des observateurs non linéaires. Les résultats attendus se résument comme suit :

- Développement de nouvelles méthodes de synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre entier et d'ordre fractionnaire en présence des incertitudes et du retard dans le canal de transmission (retard sur la mesure) en utilisant les observateurs à mode glissant d'ordre supérieur.
- Synthèse d'un prédicteur d'état d'ordre entier et d'ordre fractionnaire permettant d'atténuer et éliminer les effets du retard et ainsi d'obtenir les estimations des états à l'instant présent.
- Synthèse d'une méthode de synchronisation d'un système chaotique de Takagi-Sugeno (TS) à base d'un observateur proportionnel intégral (PI) avec application à la transmission sécurisée d'un message audio.

La structure de cette thèse est ponctuée en cinq chapitres dont le contenu est présenté ici de manière introductive.

Le chapitre 1 : Dans le chapitre, nous rappellerons les principales notions liées aux observateurs d'états et à l'observabilité dans le cas des systèmes linéaires et non linéaires.

Dans la suite de ce chapitre, nous présentons une liste non exhaustive d'observateurs linéaires et non linéaires, une attention particulière sera portée aux observateurs à mode glissant qui feront l'objet de cette thèse.

Le chapitre 2 : La première partie de ce chapitre sera consacrée aux systèmes chaotiques ainsi qu'à leurs propriétés, telles que la sensibilité aux conditions initiales, l'aspect aléatoire, l'attracteur étrange, etc. Puis, les outils d'analyse mathématique de ces systèmes seront pré-

sentés. Ensuite, nous nous intéressons à l'analogie entre les systèmes chaotiques et les systèmes cryptographiques, ainsi qu'à leur utilisation dans les schémas de communication sécurisée. Puis, nous passerons à la synchronisation des systèmes chaotiques, en présentant les différents types et méthodes de synchronisation. Enfin, l'accent sera mis sur la synchronisation basée sur les observateurs, qui fera l'objet de notre travail.

Le chapitre 3 : contient la première contribution de cette thèse.

Dans un premier temps, la synchronisation de systèmes chaotiques sans retard dans le canal de transmission sera présentée. Cette méthode est basée sur l'utilisation d'une structure multimodèle, dans laquelle un système chaotique sous la forme de Takagi-Sugeno est synchronisé avec un observateur proportionnel intégral (PI) à entrée inconnue, où cette dernière est un message audio à transmettre via le canal de transmission et à récupérer grâce au système esclave.

La synchronisation des systèmes chaotiques avec un retard affectant le signal de sortie sera abordée dans la deuxième partie de ce chapitre. La méthode de synchronisation proposée repose sur l'utilisation d'un observateur à mode glissant du second ordre basé sur l'algorithme de Super-Twisting pour estimer les états retardés du système, qui sont ensuite introduits dans un prédictor d'état qui compense le retard causé par le canal de transmission, ce qui entraîne la synchronisation entre le système maître et esclave. Les approches de synchronisation proposées sont validées par des simulations.

Le chapitre 4 : est consacré aux concepts fondamentaux de la dérivation et de l'intégration d'ordre non entier. Les définitions de Caputo, de Riemann-Liouville et de Grünwald-Letnikov sont particulièrement mises en avant. Plusieurs autres représentations de ces systèmes sont également détaillées. La deuxième partie de ce chapitre porte sur la commandabilité, la stabilité et l'observabilité des systèmes d'ordre fractionnaire. Cette dernière étant particulièrement étudiée. Ensuite, nous examinons les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire, ainsi que les conditions qui doivent être remplies pour qu'un système d'ordre fractionnaire non linéaire se comporte de manière chaotique.

Ce chapitre contient toutes les définitions nécessaires à la compréhension des notions présentées dans le chapitre 5.

Le chapitre 5 : Une autre contribution de cette thèse est l'extension de la contribution présentée dans le chapitre 3 à la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire soumis à un retard dans le canal de transmission. Cette méthode utilise un observateur à mode glissant d'ordre supérieur fractionnaire pour estimer les états et la perturbation totale retardés, qui sont ensuite introduits dans un prédicteur d'état d'ordre fractionnaire, permettant de compenser le retard causé par le canal de transmission. Des simulations sont présentées pour montrer l'efficacité de la méthode proposée.

Enfin, cette thèse se termine par une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre 1

Observabilité et synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires

1.1 Introduction

L'intérêt pour les observateurs d'état se trouve dans une variété de domaines et d'applications, y compris le contrôle, la supervision, le diagnostic des systèmes, etc. Plusieurs stratégies de commande utilisent l'état du système pour calculer la loi de commande qui permet au système d'accomplir sa tâche. Comme le vecteur d'état n'est pas toujours disponible au moment de la mesure, un observateur est alors nécessaire pour l'estimer.

Depuis plusieurs décennies, l'étude de l'observabilité et la conception ds observateurs occupent une place centrale dans la théorie du contrôle des systèmes linéaires [52, 53] et non linéaires [54, 55]. Concrètement, l'étude de la dynamique d'un système physique donné est en bonne partie permise grâce à la mesure de ses grandeurs physiques. Cependant, de nombreuses raisons (coût ou incapacité de mesurer une grandeur par exemple) nous poussent à ne mesurer que certaines des grandeurs physiques du système étudié. L'observation des systèmes est le domaine permettant d'estimer les grandeurs qui ne sont pas mesurées, et l'observateur est l'outil mathématique jouant le rôle de capteur logiciel, permettant de fournir une estimation de l'état inconnu recherché. Malgré les efforts dans ces activités de recherche, beaucoup de problèmes d'observation demeurent ouverts.

L'observabilité d'un processus est un concept très important dans le domaine de l'estimation

d'état. En effet, pour reconstruire les états inaccessibles d'un système, il faut savoir, à priori, si les variables d'état sont observables ou non. L'observabilité d'un système est la propriété qui permet de dire si l'état peut être déterminé uniquement à partir de la connaissance des signaux d'entrées et de sorties. Dans le cas des systèmes non linéaires, la notion d'observabilité dépend des entrées (la notion d'entrée uniforme) et des conditions initiales (la notion de discernabilité).

Dans ce chapitre, nous dressons une revue de littérature non exhaustive des propriétés d'observabilité et de la synthèse d'observateurs.

1.2 Notions de base sur les observateurs d'états

- Principe d'un observateur

Soit le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t) \\ y(t) = h(x, u, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ représente le vecteur de sortie mesurée. Les fonctions f et h sont supposées de classes C^∞ .

Définition 1.1 *Un observateur pour le système (1.1) est un système dynamique auxiliaire qui a comme entrées, les entrées/sorties du système (1.1) et comme sorties, les états estimés \hat{x} .*

Afin de produire l'estimation de x , nous avons besoin de concevoir deux fonctions Φ et Ψ telles que l'observateur est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \Psi(\xi, u, y, t) \\ \hat{x}(t) = \Phi(\xi, u, t) \end{cases} \quad (1.2)$$

avec $\xi \in \mathbb{R}^s$, $s \leq n$ et $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, vérifie les deux conditions suivantes :

- (C1) Si $\hat{x}(0) = x(0)$ alors $\hat{x}(t) = x(t) \quad \forall t \geq 0$.
- (C2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0$

La condition (C1) signifie que si l'observateur (1.2) et le système (1.1) possèdent le même état initial, alors l'état estimé devrait être égal à l'état réel à tout instant t .

La condition (C2) signifie que l'état estimé $\hat{x}(t)$ converge asymptotiquement vers $x(t)$. On dit alors que le système (1.2) est un observateur asymptotique.

Si la condition (C2) est satisfaite $\forall x(t); \hat{x}(t)$, l'observateur (1.2) est dit global.

Si la convergence (C2) est exponentielle, l'observateur est dit exponentiel.

1.3 Observabilité des systèmes linéaires

Soit un système continu à temps invariant décrit par les équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du système. Les matrices A , B et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

L'observabilité du système linéaire (1.3) est garantie si et seulement si le critère de rang de Kalman est satisfait, ou si le Grammien d'observabilité est une matrice définie positive ou bien si le critère de Hautus-Belevitch-Popov est vérifié.

Theorem 1.2 [52] *Le système (1.3) est observable si et seulement si l'un des critères suivants est vérifié :*

- *Le critère de Kalman suivant est satisfait :*

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = \text{rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

- $\forall t > 0$, le Grammien d'observabilité

$$W_{(A,C)} = \int_{t_0}^t e^{A^T(t-t_0)} C^T C e^{A(t-t_0)} dt \quad (1.4)$$

est une matrice définie positive.

- *Le critère de Hautus-Belevitch-Popov suivant est vérifié :*

$$\text{rang} \begin{pmatrix} sI - A \\ C \end{pmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Depuis une vingtaine d'années, la commande et l'analyse des systèmes à retard font l'objet de nombreuses études et contributions. Les chercheurs se sont particulièrement penchés sur l'analyse de l'observabilité des systèmes retardés [56, 57].

1.3.1 Observabilité des systèmes à retard

Considérons le système retardé décrit par le modèle d'état suivant [56] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^N A_i x(t - i\tau) + \sum_{i=0}^N B_i u(t - i\tau) \\ y(t) = \sum_{i=0}^N C_i x(t - i\tau) \end{cases} \quad (1.5)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ représente le vecteur de sortie, $\tau \in \mathbb{R}_+$ représente le retard, et N représente la valeur maximale de retard. A_i, B_i, C_i sont des matrices de dimensions appropriées. $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [-N\tau, 0]$ est la fonction des conditions initiales [56].

Le système (1.5) peut être réécrit comme un modèle d'anneau suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\nabla)x(t) + B(\nabla)u(t) \\ y(t) = C(\nabla)x(t) \end{cases} \quad (1.6)$$

Avec ∇ est l'opérateur de retard défini pour toute fonction continue $f(t)$ par $\nabla f(t) = f(t - \tau)$ et $\nabla^i f(t) = f(t - i\tau)$.

Les matrices A, B, C sont des matrices polynomiales dans ∇ données par : $A(\nabla) = \sum_{i=0}^N \nabla^i A_i$,

$$B(\nabla) = \sum_{i=0}^N \nabla^i B_i \text{ et } C(\nabla) = \sum_{i=0}^N \nabla^i C_i.$$

L'extension de base de l'observabilité des systèmes à retard est l'observabilité initiale :

Chaque état initial $(x(0), \varphi(t), t \in [-N\tau, 0])$ est observable si la sortie du système autonome n'est pas identiquement nulle pour les systèmes à retard sur $[0, \infty)$.

On définit la matrice d'observabilité du système (1.6) comme suit [56, 57] :

$$\left\langle \frac{C(\nabla)}{A(\nabla)} \right\rangle = \begin{bmatrix} C(\nabla) \\ C(\nabla)A(\nabla) \\ \vdots \\ C(\nabla)A^{n-1}(\nabla) \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Avec $\left\langle \frac{C(\nabla)}{A(\nabla)} \right\rangle$ est la matrice d'observabilité polynomiale.

– **Observabilité forte** : Le système (1.6) est observable sur un anneau $\mathbb{R}[\nabla]$ si $x(t)$ peut être reconstruit dans un temps t .

– **Observabilité faible** : Le système (1.6) est observable sur un anneau $\mathbb{R}[\nabla]$ si

$$\text{rang} \left\langle \frac{C(\nabla)}{A(\nabla)} \right\rangle = n \quad (1.8)$$

- Système linéaire à sortie retardée

Considérons le système linéaire continu à temps invariant suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y_r(t) = Cx(t - \tau) \end{cases} \quad (1.9)$$

où : $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y_r \in \mathbb{R}^p$ représente le vecteur de sortie retardée. $\tau \in \mathbb{R}_+$ représente le retard. Les matrices A, B et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

A partir de (1.9) et avec $u(t) = 0$ on aura :

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_r(t) = C\dot{x}(t - \tau) \\ = CAx(t - \tau) \\ \cdot \\ \vdots \\ y_r^{n-1}(t) = CA^{n-1}x(t - \tau) \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} y_r(t) \\ \dot{y}_r(t) \\ \cdot \\ \vdots \\ y_r^{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(t - \tau) \quad (1.11)$$

Soit :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Le système (1.9) est observable si $\text{rang}(\mathcal{O}) = n$. Ce qui est identique au cas sans retard.

1.4 Différents types d'observateurs

La technique de l'observateur est connue dans la théorie classique du contrôle comme une méthode permettant la reconstruction des états d'un système en utilisant les entrées et sorties

mesurées. Luenberger a proposé et développé l'observateur d'état classique pour la première fois en 1964 [19]. Depuis, la technique des observateurs a progressé rapidement et régulièrement. Plusieurs approches de synthèse d'observateurs sont développées dans la littérature.

De nombreuses études ont été menées sur la synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires. Deux principaux observateurs sont utilisés dans le contexte des systèmes linéaires : L'observateur de Kalman pour les systèmes variants dans le temps et l'observateur de Luenberger pour les systèmes linéaires invariants dans le temps. Initialement, Kalman-Bucy ont introduit ce qui est actuellement plus connu sous l'appellation de filtre de Kalman pour la reconstruction d'état d'un système stochastique également utilisé pour des systèmes déterministes [20]. Luenberger a proposé une nouvelle théorie de l'observation connue sous le nom d'observateur de Luenberger. Son idée est d'ajouter au modèle un terme correctif entre la sortie réelle et estimée [18].

Les approches de synthèse d'observateurs linéaires ont fortement inspiré les chercheurs pour généraliser les méthodes déjà développées au cas non linéaire. En effet, la structure de base des observateurs non linéaires proposés est celle de l'observateur de Luenberger. L'observateur le plus largement utilisé pour les systèmes non linéaires est le filtre de Kalman étendu (EKF) [58]. Cette technique consiste à appliquer les équations du filtre de Kalman (standard) au système non linéaire, linéarisé en utilisant la formule de Taylor du premier ordre. Cependant, la preuve de convergence de cet estimateur développée pour le cas linéaire ne peut être généralisée aux systèmes non linéaires. Il est à noter que plusieurs observateurs ont été proposés depuis, dont : l'observateur à grand gain [59], l'observateur à mode glissant basé sur la théorie des systèmes à structure variable [60], et plusieurs autres.

La synthèse de l'observateur exploite les informations disponibles, à savoir le modèle dynamique du système considéré, ses entrées et ses sorties mesurées. Lorsqu'une partie (ou la totalité) des entrées n'est pas disponible, l'observateur est dit à entrées inconnues. Le problème devient alors plus difficile, puisqu'il faut estimer l'état du système malgré la présence d'entrées qui interagissent effectivement avec la dynamique du système mais ne peuvent pas être incluses dans la dynamique de l'observateur, ou estimer l'état du système et les entrées inconnues simultanément.

1.5 Observateurs des systèmes linéaires

La synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires est complètement caractérisée par des conditions nécessaires et suffisantes bien établies. En effet, les premiers travaux sur les observateurs d'état ont été publiés par Kalman-Bucy dans un contexte stochastique [58] suivi par Luenberger dans un contexte déterministe [18,19].

1.5.1 Observateur de Luenberger

Une solution très simple au problème d'estimation d'état pour les systèmes linéaires déterministes a été proposée par Luenberger [18]. Considérons le système linéaire invariant dans le temps ayant la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.13)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ représente le vecteur de sortie. A , B et C sont des matrices constantes. Si le système (1.13) est observable, l'observateur de Luenberger est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - C\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.14)$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état estimé.

L'observateur de Luenberger est un observateur d'état asymptotique, c-à-d que l'erreur d'observation $e = x - \hat{x}$ converge asymptotiquement vers 0. Il suffit de choisir la matrice de gain L , de telle sorte que la matrice $(A - LC)$ soit stable. Ce choix est obtenu en utilisant la méthode de placement de pôles.

1.5.2 Filtre de Kalman-Bucy

Dans le cas où le système est linéaire à temps variant, l'observateur de Luenberger (1.14) n'est plus valable. Pour cela, il faut utiliser le filtre de Kalman-Bucy [58] qui vise à estimer l'état d'un système d'équations qui évolue dans le temps en fonction des états précédents, des entrées de commande et des mesures bruitées. Sa mise en œuvre nécessite la disponibilité du modèle de l'ensemble des perturbations affectant le système d'équations stochastique. L'état estimé est optimal en termes de variance (l'erreur entre l'état réel et son estimé).

La synthèse d'un filtre de Kalman standard considère un système linéaire à temps variant défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + M(t)w(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + v(t) \end{cases} \quad (1.15)$$

où $w \in \mathbb{R}^q$ et $v \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement le bruit interne et le bruit de mesure du système.

Les signaux $w(t)$ et $v(t)$ sont des bruits blancs gaussiens centrés non corrélés de densité spectrale de puissance W et V , respectivement. Tel que W est généralement non mesurable, et V est mesurable.

La covariance de l'erreur sur l'état estimé notée P , permet de tester la qualité de l'estimation et elle est définie par :

$$P(t) = E \left[(x(t) - \hat{x}(t)) \cdot (x(t) - \hat{x}(t))^T \right] \quad (1.16)$$

Si le système (1.15) est uniformément observable et que les matrices $A(t)$, $C(t)$ sont bornées, alors, le filtre de Kalman est défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + L(t)(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C(t)\hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.17)$$

où $L(t)$ est le gain du filtre de Kalman, donné par :

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + M(t)WM^T(t) - L(t)C(t)P(t) \\ L(t) = P(t)C(t)W^{-1} \end{cases} \quad (1.18)$$

où $P(t)$ est la matrice de covariance de l'erreur d'estimation. Cette dernière est la solution de l'équation de Riccati (1.18), et devient constante au régime permanent.

1.5.3 Observateur à entrée inconnue

Les systèmes physiques sont souvent soumis à des perturbations dues généralement à l'environnement, aux bruits de capteurs ou défauts des actionneurs, biais ou offset d'un composant et, dans certains cas aux erreurs de modélisation.

Ces perturbations peuvent avoir des effets indésirables sur l'évolution du système ; leur estimation peut servir à la conception de systèmes de commande capables d'atténuer ces effets. Ces perturbations sont souvent désignées par le terme "entrées inconnues" et notées généralement $d(t)$. Plusieurs travaux ont été réalisés dans le domaine d'observation des systèmes avec des entrées inconnues [25, 61].

Considérons le système dynamique linéaire soumis à une entrée inconnue décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.19)$$

où $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, d \in \mathbb{R}^q$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, de commande, l'entrée inconnue et la sortie du système. Les matrices A, B, E et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

L'objectif de l'estimation d'état en présence d'entrées inconnues est de déterminer un observateur qui, à partir des entrées et des sorties $u(t)$ et $y(t)$, permet l'obtention de l'estimé $\hat{x}(t)$ de telle sorte que l'erreur d'observation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ converge asymptotiquement vers 0.

Remarque 1.3 *Il est à noter que l'erreur d'observation est indépendante de l'entrée inconnue $d(t)$.*

Un observateur à entrées inconnues existe pour le système (1.19) si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} & - \text{rang}(CE) = \text{rang}(E) \\ & - \forall s \in \mathbb{C}, \mathbb{R}_e(s) \geq 0 : \text{rang} \begin{bmatrix} sI_n - A & E \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + q \end{aligned}$$

Avec $\mathbb{R}_e(s)$ représente la partie réelle de la variable complexe s .

On suppose que la matrice E est de plein rang colonne et que la paire (A, C) est observable. L'objectif est d'obtenir une estimation complète du vecteur d'état malgré la présence de l'entrée inconnue $d(t)$.

Considérons l'observateur d'ordre plein :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Nz(t) + Mu(t) + Gy(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) + Fy(t) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Avec $z(t)$ est le vecteur d'état de l'observateur, $\hat{x}(t)$ est le vecteur d'état estimé du système.

Les matrices de gains N, M, G et F sont déterminées de manière à ce que l'erreur d'estimation d'état $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ converge vers zéro quelque soit les conditions initiales du système et la perturbation $d(t)$.

L'erreur d'observation est définie comme suit :

$$\begin{cases} e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \\ = x(t) - z(t) - Fy(t) \\ = (I_n - FC) x(t) - z(t) \end{cases} \quad (1.21)$$

En définissant la matrice :

$$P = (I_n - FC) \quad (1.22)$$

Alors l'erreur d'observation est donnée par :

$$e(t) = Px(t) - z(t) \quad (1.23)$$

Sa dérivée est alors donnée par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= PAx(t) + PBu(t) + PE d(t) - Nz(t) - Mu(t) - Gy(t) \\ &= (PA - GC - NP)x(t) + (PB - M)u(t) + PE d(t) + Ne(t) \end{aligned} \quad (1.24)$$

L'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro si et seulement si les matrices N, G, M et F sont choisies de sorte que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$\begin{aligned} PA - GC - NP &= 0 \\ PB - M &= 0 \\ PE &= 0 \\ N &\text{ est Hurwitzienne} \end{aligned} \quad (1.25)$$

En tenant compte de la définition (1.22), l'égalité $PE = 0$ admet la solution suivante :

$$F = E (CE)^\dagger \quad (1.26)$$

où $(CE)^\dagger$ désigne la pseudo-inverse de (CE) définie par :

$$(CE)^\dagger = \left((CE)^T (CE) \right)^{-1} (CE) \quad (1.27)$$

On peut déduire alors la valeur de P comme suit :

$$P = I_n - E (CE)^\dagger C \quad (1.28)$$

La matrice M est déterminée à partir de la deuxième relation de (1.25) et de l'expression de P :

$$M = \left(I_n - E (CE)^\dagger C \right) B \quad (1.29)$$

On définit une matrice auxiliaire $R = G - NF$, donc la première relation de (1.25) va se réécrire $N = PA - RC$.

D'où :

$$N = \left(I_n - E(CE)^\dagger C \right) A - RC \quad (1.30)$$

La matrice G est définie comme suit : $G = R + NF$.

L'obtention des gains de l'observateur, se fait en déterminant R par placement de pôles de la matrice N afin de garantir la stabilité.

Donc, si le système d'équations (1.25) est satisfait, la dynamique de l'erreur d'estimation d'état se réduit à :

$$\dot{e}(t) = Ne(t) \quad (1.31)$$

Compte tenu des propriétés de la matrice N , alors l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers zéro.

1.5.4 Observateur à modes glissants

Plusieurs types d'observateurs à mode glissant ont été proposés dans la littérature ; pour les systèmes linéaires, on peut citer l'observateur d'Utkin [27, 62], l'observateur d'Edwards-Spurgeon [28], et l'observateur de Walcott-Zak [29]. Dans le cas des systèmes non linéaires, il est souvent nécessaire d'obtenir une forme spécifique du système appelée "forme canonique observable". Ces observateurs seront présentés dans la section "Observateurs non linéaires".

Le but de cette méthode est de forcer le système à atteindre, en temps fini, une surface de glissement qui dépend généralement de l'erreur d'observation de la sortie mesurable [28]. Cette technique n'est rien d'autre qu'un cas particulier de la théorie des systèmes à structure variable présentée par Filippov en 1960 [63]. Cette théorie est utilisée depuis la publication d'Emelyanov [64] et d'Utkin [27]. La robustesse aux bruits, aux perturbations et aux incertitudes de modélisation rend ces observateurs plus adaptés à l'estimation d'état et à la synchronisation.

Les premiers travaux qui ont mentionné ce type d'observateur sont ceux de Walcott et al. [65], Walcott et Zak [29], Slotine [66], et Canudas [67]. Les différentes étapes de synthèse d'un observateur à mode glissant sont connues et clairement identifiées dans [28, 68].

Principe des observateurs à mode glissant

Le principe des observateurs à mode glissants consiste à contraindre la dynamique d'un système

d'ordre n à converger vers une variété S de dimension $(n - p)$ appelée surface de glissement (p étant la dimension du vecteur de mesure) [66]. L'attraction vers cette surface est assurée par des conditions dites de glissement. Si ces conditions sont vérifiées, le système converge vers la surface de glissement et évolue selon une dynamique d'ordre $(n - p)$. Dans le cas des observateurs à mode glissant, les dynamiques concernées sont celles des erreurs d'observation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

A partir des valeurs initiales $e(0)$, les erreurs convergent vers les valeurs d'équilibre en deux étapes :

- Les trajectoires des erreurs d'observation évoluent vers la surface de glissement où les erreurs entre la sortie du système réel et la sortie de l'observateur $e_y(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ sont nulles. Cette étape, généralement rapide, est connue sous le nom de mode d'atteinte.
- Les trajectoires des erreurs d'observation glissent sur la surface de glissement avec des dynamiques imposées de manière à annuler toutes les erreurs d'observation. Ce dernier mode est appelé mode de glissement.

- Observateur d'Utkin

Considérons un système dynamique linéaire décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.32)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie mesurée. Supposons que la paire (A, C) est observable.

Lors de la reconstruction des états sur la base des sorties mesurées, il est naturel d'effectuer un changement de coordonnées de telle sorte que les sorties du système apparaissent directement comme des composantes du vecteur d'état. La matrice de sortie peut être écrite comme suit :

$$C = [C_1 \quad C_2]$$

où : $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}$ et $C_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, avec $\det(C_2) \neq 0$. Alors, il existe une matrice de transformation non singulière :

$$T = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

Telle que la nouvelle matrice de sortie s'écrit comme suit :

$$\tilde{C} = CT^{-1} = [0 \quad I_p]$$

Donc les nouvelles matrices d'état et d'entrée s'écrivent :

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}; \quad \tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Le système nominal (1.32) peut alors être écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}y(t) + B_1u(t) \\ \dot{y}(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}y(t) + B_2u(t) \end{cases} \quad (1.33)$$

où : $[x_1(t) \quad y(t)]^T = Tx(t)$ et $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n-p}$.

L'observateur d'Utkin est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = A_{11}\hat{x}_1(t) + A_{12}\hat{y}(t) + B_1u(t) + Lv(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) = A_{21}\hat{x}_1(t) + A_{22}\hat{y}(t) + B_2u(t) - v(t) \end{cases} \quad (1.34)$$

L est le gain de l'observateur. Les composantes du vecteur discontinu $v(t)$ sont définies par :

$$v(t) = M \text{sign}(\hat{y}(t) - y(t)) \quad (1.35)$$

où : (\hat{x}_1, \hat{y}) sont les estimés de (x_1, y) . M est la matrice de gain de l'observateur.

La fonction discontinue sign est définie comme suit :

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (1.36)$$

Les erreurs d'estimation d'état et de sortie sont :

$$\begin{cases} e_1(t) = \hat{x}_1(t) - x_1(t) \\ e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t) \end{cases} \quad (1.37)$$

Ainsi, les dynamiques des erreurs sont :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = A_{11}e_1(t) + A_{12}e_y(t) + Lv(t) \\ \dot{e}_y(t) = A_{21}e_1(t) + A_{22}e_y(t) - v(t) \end{cases} \quad (1.38)$$

Comme la paire (A_{11}, A_{21}) est observable, alors L peut être choisi pour que la matrice $(A_{11} + LA_{21})$ soit Hurwitzienne.

Définissons maintenant le nouveau changement de variable suivant :

$$T_s = \begin{bmatrix} I_{n-p} & L \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = T_s \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Après ce changement de variable, les dynamiques des erreurs d'estimation s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{e}'_1(t) = A'_{11}e'_1(t) + A'_{12}e_y(t) \\ \dot{e}_y(t) = A_{21}e'_1(t) + A'_{22}e_y(t) - v(t) \end{cases} \quad (1.39)$$

avec : $e'_1(t) = e_1(t) + Le_y(t)$, $A'_{11} = A_{11} + LA_{21}$, $A'_{12} = A_{12} + LA_{22} - A'_{11}L$ et $A'_{22} = A_{22} - A_{21}L$.

On peut montrer, en utilisant la théorie des perturbations singulières, que pour un gain M assez grand, un mouvement glissant peut prendre naissance sur l'erreur de sortie $\dot{e}_y(t)$.

Donc, après un temps fini t_s , l'erreur $e_y(t)$ et sa dérivée $\dot{e}_y(t)$ sont nulles.

On obtient alors :

$$\dot{e}'_1(t) = A'_{11}e'_1(t) \quad (1.40)$$

En choisissant correctement la matrice de gain L (pour que la matrice A'_{11} soit stable), l'erreur $e'_1(t)$ tend vers 0 quand t tend vers ∞ .

Nous avons : $x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]^T$, alors le vecteur d'état $x_2(t)$ peut être reconstruit dans le système de coordonnées originales comme suit :

$$\hat{x}_2(t) = C_2^{-1}(y(t) - C_1\hat{x}_1(t)) \quad (1.41)$$

La difficulté pratique principale de cette approche réside dans le choix d'un gain approprié M pour induire un mouvement glissant dans un temps fini.

- Observateur de Edwards-Spurgeon

Considérons un système dynamique incertain décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Df(x(t), u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.42)$$

avec $f(x(t), u(t))$ est une fonction continue en x , utilisée pour décrire les incertitudes non linéaires du système et satisfait :

$$\|f(x(t), u(t))\| \leq \rho \quad (1.43)$$

L'objectif est d'estimer les vecteurs d'état $\hat{x}(t)$ et de sortie $\hat{y}(t)$ tel que les trajectoires soient forcées d'atteindre la surface de glissement $\{e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t) = 0\}$ en temps fini.

Hypothèse 1.1 $\text{Rang}(CD) = \text{Rang}(D)$ et les zéros invariants de (A, D, C) doivent être dans \mathbb{C}_- .

Le système (1.42) peut être réécrit sous la forme canonique suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) \\ \dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) + D_2f(x(t), u(t)) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases} \quad (1.44)$$

Avec A_{11} est stable. L'observateur de Edwards-Spurgeon possède la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = A_{11}\hat{x}_1(t) + A_{12}\hat{x}_2(t) + B_1u(t) - A_{12}e_y(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = A_{21}\hat{x}_1(t) + A_{22}\hat{x}_2(t) + B_2u(t) - (A_{22} - A_{22}^s)e_y(t) + v \\ \hat{y}(t) = \hat{x}_2(t) \end{cases} \quad (1.45)$$

avec A_{22}^s est stable et v est une fonction discontinue donnée par :

$$v = \begin{cases} -\rho \|D_2\| \frac{P_2 e_y}{\|P_2 e_y\|} & \text{si } e_y \neq 0 \\ 0 & \text{si } e_y = 0 \end{cases} \quad (1.46)$$

où P_2 est la solution de l'équation :

$$(A_{22}^s)^T P_2 + P_2 A_{22}^s = -Q_2$$

avec Q_2 est une matrice définie positive.

- Observateur de Walcott-Zak

Considérons le système incertain suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(x(t), u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.47)$$

L'approche de Walcott et Zak [29, 65] consiste à estimer l'état d'un système décrit par (1.47) de sorte que l'erreur d'estimation tende vers zéro d'une manière exponentielle et ce malgré la présence des incertitudes $f(x(t), u(t))$ considérées. La fonction $f(x(t), u(t))$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f(x(t), u(t)) = R\zeta(x(t), u(t))$$

où la fonction ζ est une fonction bornée et inconnue, telle que :

$$\|\zeta(x(t), u(t))\| \leq \rho \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0$$

Hypothèse 1.2 On suppose que la paire (A, C) est observable et qu'il existe deux matrices définies positives P et Q et une matrice F respectant la contrainte structurelle suivante :

$$\begin{aligned} (A - LC)^T P + P (A - LC) &= -Q \\ C^T F^T &= PR \end{aligned} \quad (1.48)$$

Avec L est la matrice des gains, tel que $(A - LC)$ soit Hurwitzienne.

L'observateur de Walcott-Zak est de la forme :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(C\hat{x}(t) - y(t)) + v(t) \quad (1.49)$$

La fonction discontinue v est définie par :

$$v = \begin{cases} -\rho \frac{P^{-1}C^T F^T F C e(t)}{\|F C e(t)\|} & \text{si } F C e(t) \neq 0 \\ 0 & \text{si } F C e(t) = 0 \end{cases} \quad (1.50)$$

où : $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$.

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est régie par l'équation :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) \\ &= A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(C\hat{x} - y(t)) + v(t) - (Ax(t) + Bu(t) + R\zeta(x(t), u(t))) \\ &= (A - LC)e(t) + v(t) - R\zeta(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t) = e^T(t) P e(t) \quad (1.51)$$

La dérivée de $V(t)$ le long de la trajectoire de l'erreur d'estimation s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= e^T(t) P \dot{e}(t) \\ &= (A - LC)e(t) + v(t) - R\zeta(x(t), u(t))^T P e(t) + e^T(t) P (A - LC)e(t) + v(t) - R\zeta(x(t), u(t)) \\ &= -e^T(t) Q e(t) + 2e^T(t) P v(t) - 2e^T P R \zeta(x(t), u(t)) \\ &= -e^T(t) Q e(t) + 2e^T(t) P v(t) - 2e^T(t) C^T F^T \zeta(x(t), u(t)) \end{aligned} \right. \quad (1.52)$$

On distingue alors deux cas :

Cas 1 : Lorsque $F C e(t) \neq 0$, en remplaçant l'expression de $v(t)$, la dérivée de la fonction de Lyapunov devient :

$$\dot{V}(e(t)) = -e^T(t) Q e(t) - 2e^T(t) \rho \frac{C^T F^T F C e(t)}{\|F C e(t)\|} - 2e^T(t) C^T F^T \zeta(x(t), u(t))$$

$$= -e^T(t)Qe(t) - 2\rho \|Fce(t)\| - 2e^T(t)C^T F^T \zeta(x(t), u(t))$$

En utilisant le fait que la fonction inconnue $\zeta(x(t), u(t))$ est bornée par un scalaire positif ρ , la dérivée de la fonction de Lyapunov peut être majorée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &\leq -e^T(t)Qe(t) - 2\rho \|Fce(t)\| + 2\rho \|Fce(t)\| \\ &\leq -e^T(t)Qe(t) < 0 \end{aligned}$$

Cas 2 : Lorsque $Fce(t) = 0$, en remplaçant l'expression de $v(t)$, la dérivée de la fonction de Lyapunov devient :

$$\dot{V}(e(t)) = -e^T(t)Qe(t) < 0$$

Donc, dans les deux cas, la dérivée de la fonction de Lyapunov est négative ce qui montre que l'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro.

Notons que la discontinuité de v engendre en pratique un phénomène oscillatoire à hautes fréquences "Chattering" qui apparaît dans la dynamique des états estimés. C'est l'inconvénient principal de la technique des modes glissant d'ordre un.

1.6 Observabilité des systèmes non linéaires

Avant de concevoir un observateur pour un système dynamique, il est essentiel de s'assurer de son observabilité, c'est-à-dire de s'assurer que l'état peut être estimé à partir des données d'entrée et de sortie. Dans le cas des systèmes non linéaires, cette définition est liée aux entrées et aux conditions initiales. Dans cette partie, nous présenterons quelques définitions et notions sur l'observabilité des systèmes non linéaires [69–71].

Considérons, le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(t), & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = h(x) \end{cases} \quad (1.53)$$

Les champs de vecteurs $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ainsi que $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont des fonctions continues et dérivables pour $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ où \mathcal{D} est le domaine d'étude.

Définition 1.4 Indiscernabilité

Soient x_0 et x_1 deux conditions initiales du système (1.53), et soit $X_u(t, x_0)$ et $X_u(t, x_1)$ les solutions de l'équation d'état. La paire (x_0, x_1) est dite indiscernable si $\forall u \in \mathbb{R}^m, \forall t \geq 0 :$

$$h(X_u(t, x_0)) = h(X_u(t, x_1)) \quad (1.54)$$

Un état x est dit indiscernable de x_0 si la paire (x, x_0) est indiscernable.

Définition 1.5 Observabilité

Le système non linéaire (1.53) est dit observable en x_0 s'il n'existe aucun état indiscernable de x_0 .

Un système est également dit observable s'il n'admet aucune paire indiscernable. Cependant, comme les systèmes non linéaires ont un fonctionnement particulier, il faut tenir compte des entrées qui pourraient affecter l'observabilité, c'est la notion "d'observabilité uniforme".

Définition 1.6 Espace d'observabilité

L'espace d'observabilité du système (1.53) est défini comme le plus petit sous-espace vectoriel $\mathcal{O}(h)$, de fonctions de classe C^∞ contenant les fonctions de sortie h_i , $i = 1, 2, \dots, p$ et tel que pour toute entrée $u \in \mathcal{U}$ et pour toute fonction $\tau \in \mathcal{O}$, nous avons $L_{\tilde{F}_u}(\tau) \in \mathcal{O}$ avec $\tilde{F}_u = f(x) + g(x)u$ et $L_{(\cdot)}(\tau)$ désigne la dérivée de Lie de τ le long du champ de vecteur \tilde{F}_u .

Définition 1.7 Condition du rang

On dit que le système (1.53) satisfait la condition du rang d'observabilité en $x_0 \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, si la condition suivante est satisfaite :

$$\forall x, \dim d\mathcal{O}(h)|_{x_0} = \{d\tau|_{x_0}, \tau \in \mathcal{O}\} = n$$

avec $d\mathcal{O}$ est l'espace des différentielles des éléments de l'ensemble \mathcal{O} .

- Un système non linéaire défini par (1.53) satisfaisant la condition du rang d'observabilité en x_0 est localement faiblement observable en x_0 .
- Un système non linéaire défini par (1.53) satisfaisant la condition du rang d'observabilité est localement faiblement observable.
- Inversement, un système défini par (1.53) est localement faiblement observable s'il satisfait la condition de rang génériquement.

Pour la plupart des systèmes, la condition du rang est insuffisante pour la conception d'un observateur. Cela est dû au fait que l'observabilité dépend des entrées du système, et qu'il est indispensable de vérifier s'il existe parmi elles, une entrée susceptible d'influencer l'observabilité du système.

Définition 1.8 Entrées universelles

Soient x_0 et x_1 deux conditions initiales, et soient $X_u(t, x_0)$ et $X_u(t, x_1)$ les solutions de

l'équation d'état. L'entrée u est dite universelle si :

$\forall x_0 \neq x_1, \exists \tau > 0$ tel que :

$$h(X_u(\tau, x_0)) \neq h(X_u(\tau, x_1)) \quad (1.55)$$

Remarque 1.9 *Une entrée est dite singulière si elle n'est pas universelle.*

Définition 1.10 *Observabilité uniforme*

Un système est uniformément observable si toutes ses entrées sont universelles.

Il existe une relation entre les systèmes uniformément observables et leur transformation sous forme canonique observable.

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = h(x) \end{cases} \quad (1.56)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie du système. Soit la transformation Φ :

$$\Phi(x) = z = \begin{bmatrix} h(x) \\ L^1 f h(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ L^{n-1} f h(x) \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

où :

$$L^k f h(x) = Lf [L^{k-1} f h(x)]$$

avec $L^k f h$ est la $k^{\text{ième}}$ dérivée de Lie de h dans la direction de f , tel que $L^0 f h(x) = h(x)$.

Dans le cas où le système (1.56) est uniformément observable, alors il existe un sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$, ouvert et dense tel que, $\forall x^0 \in M$, il \exists un voisinage \mathcal{Y} , tel que la transformation Φ est un difféomorphisme de \mathcal{Y} dans son domaine.

Le difféomorphisme de \mathcal{Y} permet de transformer le système (1.56) en un système ayant la forme canonique suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + \Psi(z, u) \\ y(t) = Cz(t) \end{cases} \quad (1.58)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : \\ : & : & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(z, u) = \begin{pmatrix} \Psi_1(z_1) \\ \Psi_2(z_1, z_2) \\ : \\ \Psi_n(z_1, z_2, \dots, z_n, u) \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1.7 Synthèse d'observateurs non linéaires

La grande majorité des processus présentent un comportement non linéaire, ce qui incite les chercheurs à développer des observateurs non linéaires.

À l'heure actuelle, le problème de la conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires reste non résolu. Diverses approches ont été proposées pour développer des observateurs d'état pour diverses classes de systèmes non linéaires, on cite à titre d'exemple l'observateur à grand gain [71, 72], l'observateur à mode glissant [73, 74], le filtre de Kalman étendu [75, 76] et l'observateur de Luenberger étendu [77].

1.7.1 Observateur de Luenberger étendu

L'observateur de Luenberger étendu est une généralisation de l'observateur de Luenberger classique au cas des systèmes non linéaires. Le modèle linéaire peut être obtenu par linéarisation autour d'un point d'équilibre. Le gain de l'observateur est alors calculé par la technique de placement de pôles [77]. Cependant, cette méthode ne peut être utilisée que si l'on est sûr que l'état du système reste au voisinage du point de fonctionnement. Des instabilités des erreurs d'estimation peuvent survenir dès que l'on s'éloigne du point de fonctionnement. Une autre approche de synthèse d'un observateur de Luenberger pour les systèmes non linéaires utilise un modèle linéaire obtenu par un changement de coordonnées [78].

Considérons le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.59)$$

L'observateur de Luenberger étendu qui correspond au système (1.59) est de la structure suivante

[77] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + L[y(t) - \hat{y}(t)] \\ \hat{y}(t) = h(\hat{x}(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.60)$$

où L est le gain de l'observateur calculé de telle sorte que la matrice $(A - LC)$ soit Hurwitzienne. A et C résultent de la linéarisation du modèle non linéaire (1.59).

1.7.2 Filtre de Kalman étendu

Le filtre de Kalman étendu est l'une des méthodes d'estimation les plus utilisées et les plus étudiées dans le domaine d'estimation d'état des systèmes dynamiques non linéaires. Schmidt [79] a été le premier à le mettre en œuvre. Sa conception est basée sur la généralisation du filtre de Kalman linéaire en utilisant les techniques traditionnelles de linéarisation dynamique non linéaire [80,81]. En conséquence, les matrices A et C sont remplacées par les matrices jacobiniennes de f et h , qui sont évaluées en $\hat{x}(t)$. Le système considéré est linéarisé à chaque instant sur un ensemble de trajectoires estimées.

Considérons le système non linéaire dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) + Mw(t) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) + v(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.61)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du système, $x(t_0)$ est la condition initiale à l'instant initial t_0 , $w(t)$ et $v(t)$ sont des bruits gaussiens de moyenne nulle et de matrice de covariance W et V , respectivement.

Le filtre de Kalman étendu pour le système (1.61) est représenté par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + L(\hat{x}(t), u(t))(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = h(\hat{x}(t), u(t)) \\ L(\hat{x}(t), u(t)) = P(t)H^T(\hat{x}(t), u(t))V^{-1} \\ \dot{P}(t) = F(\hat{x}(t), u(t))P(t) + P(t)F^T(\hat{x}(t), u(t)) + MWMT \\ - P(t)H^T(\hat{x}(t), u(t))V^{-1}H(\hat{x}(t), u(t))P(t) \\ F(\hat{x}(t), u(t)) = \frac{\partial f(\hat{x}(t), u(t))}{\partial \hat{x}(t)} \\ H(\hat{x}(t), u(t)) = \frac{\partial h(\hat{x}(t), u(t))}{\partial \hat{x}(t)} \\ \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 \end{cases} \quad (1.62)$$

Remarque 1.11 *Le principal problème du filtre de Kalman étendu est sa convergence. Il a fallu attendre le début des années 1990 pour que de telles démonstrations soient données dans des cas spécifiques. A titre d'exemple, Gauthier et al. ont proposé un observateur non linéaire à grand gain en 1992 [82]. Deza et al. [83] ont démontré la convergence exponentielle des filtres de Kalman étendu continu-continu et continu-discrets sous des conditions particulières, et notamment le choix des matrices V et W , sans omettre la démonstration de convergence exponentielle de Reif et al. [81] pour un filtre de Kalman étendu légèrement modifié.*

1.7.3 Observateur de Thau

Une classe de systèmes non linéaires a particulièrement attiré l'attention des chercheurs dans la littérature des observateurs non linéaires, sa représentation est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + g(x(t), u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.63)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, tel que la paire (A, C) est observable.

La fonction $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction non linéaire vectorielle continûment différentiable, qui satisfait la condition de Lipschitz suivante :

$$\|g(x_1(t), u(t)) - g(x_2(t), u(t))\| \leq \alpha \|x_1(t) - x_2(t)\|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \quad (1.64)$$

où $\alpha > 0$ est la constante de Lipschitz.

Ces systèmes peuvent présenter diverses non-linéarités, notamment des fonctions trigonométriques utilisées dans diverses applications en robotiques et des fonctions polynomiales. La fonction $g(x(t), u(t))$ peut également être considérée comme une perturbation du système. Alternativement, un système avec une fonction non linéaire de classe C^1 ayant une solution globalement bornée peut être transformé en utilisant des techniques d'extension de Lipschitz pour appartenir à la classe des systèmes (1.63) qui satisfont la condition de Lipschitz. Ainsi, on remarque bien que cette classe de systèmes couvre plusieurs types des systèmes non linéaires.

Thau [23] a développé un observateur pour l'estimation d'état de ces systèmes non linéaires lipschitziens. La conception de cet observateur est basée sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov.

L'observateur de Thau est défini par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + g(\hat{x}(t), u(t)) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \\ \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 \end{cases} \quad (1.65)$$

L'erreur d'estimation est donnée par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (1.66)$$

Sa dynamique est donnée par l'équation :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + g(x(t), u(t)) - g(\hat{x}(t), u(t)) \quad (1.67)$$

Thau a démontré que si le gain d'observation $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est choisi de sorte que $(A - LC)$ est Hurwitzienne, alors il existe deux matrices symétriques définies positives $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que :

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) = -Q \quad (1.68)$$

Considérons la fonction de Lyapunov définie comme suit :

$$V(e(t)) = e^T(t)Pe(t) \quad (1.69)$$

telle que $V(e(t)) > 0$.

Theorem 1.12 [23] *L'erreur d'observation $e(t)$ converge asymptotiquement vers zéro si la condition suivante est vérifiée.*

$$\alpha \leq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \quad (1.70)$$

telle que $(\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$ sont les valeurs propres minimale et maximale des matrices Q et P , respectivement.

Le résultat de Thau a motivé par la suite plusieurs autres chercheurs qui ont essayé d'améliorer la méthode de conception de l'observateur et de relaxer les conditions utilisées. Une méthode constructive a été proposée dans Raghavan et Hedrick en 1994 [84] où une solution explicite et systématique du choix du gain de l'observateur est établie, pour résoudre l'équation algébrique de Riccati.

Theorem 1.13 [84] *Considérons le système (1.63) et l'observateur (1.65). S'il existe un $\eta > 0$ tel que l'équation de Riccati :*

$$A^T P + P A + P \left(\alpha^2 I - \frac{1}{\eta} C^T C \right) + I + \eta I = 0 \quad (1.71)$$

admette une solution P symétrique définie positive, alors le gain de l'observateur :

$$L = \frac{1}{2\eta} P C^T \quad (1.72)$$

stabilise asymptotiquement la dynamique de l'erreur d'estimation.

Ensuite, dans [85], ce problème a été transformé en un problème de minimisation H_∞ , et un algorithme itératif pour la synthèse d'observateur a été développé. Récemment, dans [86], un nouveau problème d'optimisation LMI (inégalité matricielle linéaire) a été étudié pour la conception d'un observateur H_∞ en présence de perturbations dans la dynamique du système considéré.

1.7.4 Observateur à grand gain

Les observateurs à grand gain [87] sont des observateurs qui présentent d'excellentes propriétés globales, qui prennent en compte la structure non linéaire du système. Ils s'appliquent sur des systèmes uniformément observables qui possèdent une forme triangulaire complète ou partielle. Pour de tels systèmes, sous l'hypothèse que les non linéarités sont Lipschitziennes, Gauthier et al [55, 88] ont développé un algorithme garantissant la convergence exponentielle de l'erreur d'observation vers zéro et une stabilité avec une vitesse de convergence réglable. Cet algorithme est communément appelé observateur à grand gain.

Considérons le système non linéaire affine en l'entrée, décrit par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t)) u(t) \\ y(t) = h(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.73)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du système, $x(t_0)$ est la condition initiale à l'instant initial t_0 .

Si le degré relatif du système est égal à n , alors il existe un difféomorphisme $\phi(x)$, tel que :

$$\phi(x) = z = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} \quad (1.74)$$

qui permet d'écrire le système (1.73) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + F(z(t)) + G(z(t))u(t) \\ y(t) = z_1(t) = Cz(t) \end{cases} \quad (1.75)$$

avec :

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix}; G(z(t)) = \begin{bmatrix} g_1(z_1(t)) \\ g_2(z_1(t), z_2(t)) \\ \vdots \\ g_{n-1}(z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)) \\ g_n(z_1(t), \dots, z_n(t)) \end{bmatrix}; F(z(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \varphi(z(t)) \end{bmatrix} \quad (1.76)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (1.77)$$

Le système (1.75) est sous la forme canonique d'observabilité.

L'observateur à grand gain possède la forme suivante :

$$\dot{\hat{z}}(t) = A\hat{z}(t) + F(\hat{z}(t)) + G(\hat{z}(t))u(t) - S_\theta^{-1}C^T(C\hat{z}(t) - y(t)) \quad (1.78)$$

où S_θ est la solution de l'équation suivante :

$$A^T S_\theta + S_\theta A + \theta S_\theta = C^T C \quad (1.79)$$

L'observateur dans les coordonnées d'origine se réécrit :

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t)) + g(\hat{x}(t))u(t) - \phi(\hat{x})^{*-1}S_\theta^{-1}C^T(h(\hat{x}(t)) - y(t)) \quad (1.80)$$

où $\phi(x)^*$ est la matrice jacobienne de $\phi(x)$.

Theorem 1.14 [87] *Le système (1.78) est un observateur exponentiel pour le système (1.73), c-à-d qu'il existe un $K(\theta) > 0$ tel que :*

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq K(\theta)e^{-\theta t} \|\hat{x}_0 - x_0\| \quad (1.81)$$

θ est choisi suffisamment grand pour régler la vitesse de convergence de l'observateur.

Le gain de l'observateur est défini en considérant la linéarité du système, tandis que l'effet de la non linéarité est atténué en choisissant une valeur de θ suffisamment grande. Cet observateur fournit une réponse exponentielle aussi rapide que souhaité en augmentant la valeur de θ . Cette méthode est très utilisée et permet d'établir des conditions suffisantes pour la convergence de l'état estimé \hat{x} vers l'état réel x .

Remarque 1.15 *L'avantage d'un observateur à grand gain est d'avoir un seul paramètre de conception à déterminer. Cependant, parfois il est difficile d'aboutir à la construction d'une structure triangulaire du système, en plus nous pouvons avoir une sensibilité au bruit de mesure dans le cas d'un choix du gain très élevé.*

1.7.5 Observateur adaptatif

En pratique, il est souvent nécessaire d'estimer à la fois les paramètres et les états du système. Les observateurs adaptatifs ont donc vu le jour. Leur principe est d'intégrer une connaissance a priori du système avec des mesures d'entrée et de sortie en temps réel pour estimer les états et/ou les paramètres du système en même temps.

Kreisselmeier [89], Lüders et Narendra [90] ont développé le premier observateur adaptatif pour les systèmes linéaires dans les années 1970. Il est intéressant de noter qu'il existe de nombreux travaux sur les observateurs adaptatifs dans la littérature [30, 91]. Des algorithmes permettant d'estimer l'état de manière asymptotique malgré des paramètres inconnus sont proposés dans [92, 93]. De plus, si la condition d'excitation persistante est vérifiée, ils permettent également l'estimation des paramètres. Leur modèle suppose l'existence d'une fonction de Lyapunov.

Considérons le système non linéaire affine par rapport aux paramètres [93] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t) + g(x, u, t) \gamma \\ y(t) = h(x, t) \end{cases} \quad (1.82)$$

Avec $u \in U$ est l'ensemble des entrées admissibles, et $\gamma \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur des paramètres inconnus.

L'observateur adaptatif pour le système (1.82) est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(y, \hat{z}, u, t) + g(y, \hat{z}, u, t) \hat{\gamma} + k(h(\hat{x}) - y, t) \\ \hat{x} = [\hat{y}, \hat{z}]^T \end{cases} \quad (1.83)$$

où $\hat{\gamma}$ est mis à jour selon la loi d'adaptation suivante :

$$\dot{\hat{\gamma}} = -\Lambda \Upsilon^T (\hat{y} - y, y, \hat{z}, u, t) \quad (1.84)$$

Avec $\Upsilon = \Upsilon^T > 0$ est une matrice symétrique définie positive.

Afin de garantir la convergence paramétrique, la fonction $g(x, u, t)$ doit satisfaire la condition d'excitation persistante.

Définition 1.16 [93, 94] Soit g une fonction, $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^q$ satisfait la propriété d'excitation persistante s'il existe $T, k_1, k_2 > 0$, tel que pour $t \geq 0$

$$k_1 I_q \geq \int_t^{t+T} g^T(x(\tau), u(\tau), \tau) g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \geq k_2 I_q \quad (1.85)$$

Avec : I_q est une matrice d'identité de dimension $q \times q$.

On définit $e_y = \hat{y} - y$, $e_z = \hat{z} - z$ et $e = \hat{x} - x$.

La proposition suivante représente une formulation généralisée de la convergence des observateurs adaptatifs pour les systèmes de la forme (1.82).

Theorem 1.17 [93] Le système (1.83) est un observateur asymptotique pour le système (1.82) avec $\dot{\gamma} = 0$, s'il existe une fonction $V(t, e)$ décroissante définie positive de classe \mathbb{C}^1 , et une fonction continue $k(e_y, t)$ bornée par rapport à t et avec $k(0, t) = 0$, tel que $\forall u \in U$, $\forall e = [e_y; e_z]^T \in \mathbb{R}^n$ avec $e_y \in \mathbb{R}^p$, $\forall y \in \mathbb{R}^p$ et $\forall z \in \mathbb{R}^{n-p}$, $\forall \alpha > 0$, tel que pour $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} & - \\ & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial e} [f(y, z, u(t), t) - f(y, z - e_z, u(t), t) \\ & + g(y, z, u(t), t) - g(y, z - e_z, u(t), t) \gamma + k(e_y, t)] \leq -\alpha \|e\|^2 \end{aligned} \quad (1.86)$$

$$\begin{aligned} & - \\ & \frac{\partial V}{\partial e} g(y, z, u(t), t) = \Upsilon(e_y, y, z, u(t), t) \end{aligned} \quad (1.87)$$

– g est globalement bornée et les fonctions f et g sont globalement lipschitziennes par rapport à z , pour tout (u, y, t) .

Si en plus $g(u, y, t)$ satisfait la condition d'excitation persistante (1.85) et \dot{g} est bornée alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\gamma} - \gamma\| = 0 \quad (1.88)$$

1.7.6 Observateur à état étendu

J. Han a proposé un nouvel estimateur baptisé observateur à état étendu (Extended State Observer) [95, 96]. L'idée derrière cet observateur est de rassembler les perturbations externes ainsi que les incertitudes du systèmes dans un état supplémentaire à estimer.

Considérons le système SISO d'ordre n suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ : \\ \dot{x}_n(t) = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) + bu(t) + w(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (1.89)$$

où w représente les perturbations externes. Il est important de noter que la dynamique du système (qui se retrouve dans f) n'a pas besoin d'être explicitée. En effet, elle sera incluse dans la quantité à estimer. En agissant ainsi, il est possible de compenser toutes les erreurs de modélisation qui auraient perturbé la dynamique du système. La perturbation totale est donc définie par $f(t, x) + w(t)$. L'idée de J. Han étant d'estimer cette quantité afin de l'annuler avec une loi de commande appropriée.

Soit le système équivalent :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ : \\ \dot{x}_n(t) = x_{n+1}(t) + \bar{b}u(t) \\ \dot{x}_{n+1}(t) = h(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (1.90)$$

où $x_{n+1}(t) = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) + (b - \bar{b})u(t) + w(t)$, et h est la dérivée de cette quantité. Cette variable d'état supplémentaire représente donc l'incertitude totale.

L'estimateur de J. Han associé au système (1.90) est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) - g_1(\hat{x}_1(t) - y(t)) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_3(t) - g_2(\hat{x}_1(t) - y(t)) \\ : \\ \dot{\hat{x}}_n(t) = \hat{x}_{n+1}(t) - g_n(\hat{x}_1(t) - y(t)) + \bar{b}u(t) \\ \dot{\hat{x}}_{n+1}(t) = -g_{n+1}(\hat{x}_1(t) - y(t)) \end{cases} \quad (1.91)$$

L'estimateur est donc de dimension $n + 1$, car l'objectif est d'estimer non seulement les états du système (x_1, x_2, \dots, x_n) mais aussi estimer la dynamique incertaine plus les perturbations externes, d'où le terme d'estimateur à état étendu.

Il paraît évident que la convergence de l'estimateur va dépendre du choix des fonctions g_i pour $i = 1, 2, \dots, n + 1$. De nombreuses études sur ce sujet sont présentées dans la littérature, il s'avère que pour des choix bien particuliers de ces fonctions, nous pouvons obtenir de très bonnes performances de l'estimateur quant à sa robustesse et sa vitesse de convergence.

1.7.7 Observateur à mode glissant

La technique des modes glissants pour les systèmes non linéaires a été largement étudiée et développée au cours des dernières années.

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (1.92)$$

où : $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. Les fonctions f et h sont des champs de vecteurs supposés suffisamment continûment différentiables. L'entrée u est localement bornée et mesurable.

L'observateur à mode glissant est défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) - L \text{sign}(\hat{y}(t) - y(t)) \\ \hat{y}(t) = h(\hat{x}(t)) \end{cases} \quad (1.93)$$

où : L est la matrice de gain de l'observateur.

Remarque 1.18 *L'observateur obtenu est de la même forme que le modèle du système avec un terme correcteur qui établit la convergence de l'état estimé \hat{x} vers l'état réel x .*

La surface de glissement est donnée par :

$$S(x) = \hat{y}(t) - y(t) \quad (1.94)$$

Pour que l'état estimé converge vers l'état réel du système, l'observateur à mode glissant doit satisfaire les deux conditions suivante :

- La surface de glissement est attractive si la fonction de Lyapunov $V(x) = \frac{1}{2} S^T S$ vérifie la condition : $\dot{V}(x) < 0$, c'est-à-dire $S\dot{S} < 0$ pour $S \neq 0$.

- La matrice de gain L agit de manière à satisfaire la condition d'invariance suivantes : $\dot{S} = 0$ et $\dot{S} = 0$.

Remarque 1.19 *La condition d'attractivité $S\dot{S} < 0$ ne garantit qu'une convergence asymptotique vers la surface de glissement $S(x) = 0$. Afin d'assurer une convergence en temps fini t_f , la condition $S\dot{S} < 0$ est remplacée par la condition dite " η -attractivité", donnée par Slotine en 1986 [66].*

La condition η -attractivité est définie par :

$$S\dot{S} < \eta|S| \quad \text{avec } \eta > 0 \quad (1.95)$$

Le temps fini de convergence est obtenu en résolvant l'inégalité (1.95), comme suit :

$$|S(x, t)| - |S(x, 0)| < -\eta t \quad (1.96)$$

Ainsi, la surface $S(x) = 0$ est atteinte en temps fini t_f , tel que :

$$t_f \leq \frac{|S(x, t)|}{\eta} \quad (1.97)$$

Une autre catégorie d'observateurs à modes glissants sont les observateurs à mode glissant étape par étape. Cependant, l'application de ce type d'observateur nécessite d'abord l'obtention au préalable d'une forme particulière du système. Cette forme particulière est la forme canonique observable. Cette méthode permet de déterminer les conditions sur les gains de l'observateur afin d'assurer la convergence de l'erreur d'observation en temps fini. Dans le cas de systèmes non linéaires, cette convergence en temps fini de l'observateur étape par étape est nécessaire. En effet, du fait que le théorème de séparation n'est pas vérifié en général, il est essentiel que l'observateur converge en un temps fini suffisamment petit et réglable par le choix des gains. On distingue les observateurs à modes glissants d'ordre un et les observateurs à modes glissants d'ordre supérieur. Ces derniers permettent d'éliminer le phénomène de réticence "chattering" en garantissant une meilleure précision de convergence tout en préservant les avantages des observateurs à modes glissants d'ordre un telles que la stabilité en temps fini et la robustesse.

- Observateur à mode glissant étape par étape d'ordre 1

Considérons le système non linéaire sous la forme triangulaire suivante [97] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + g_1(x_1(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) + g_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) \\ : \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) + g_{n-1}(x_1(t), \dots, x_{n-1}(t), u(t)) \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) + g_n(x_1(t), \dots, x_{n-1}(t), u(t)) \\ y(t) = x_1(t) \end{array} \right. \quad (1.98)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du système. f_n et $g_i, i = 1, \dots, n$ sont des fonctions scalaires.

La structure de l'observateur à mode glissant étape par étape d'ordre un est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) + g_1(x_1(t), u(t)) + \lambda_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_3(t) + g_2(x_1(t), \tilde{x}_2(t), u(t)) + E_1 \lambda_2 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ : \\ \dot{\hat{x}}_{n-1}(t) = \hat{x}_n(t) + g_{n-1}(x_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, x_{n-1}(t), u(t)) + E_{n-2} \lambda_{n-1} \text{sign}(\tilde{x}_{n-1} - \hat{x}_{n-1}) \\ \dot{\hat{x}}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t)) + g_n(x_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t), u(t)) + E_{n-1} \lambda_n \text{sign}(\tilde{x}_n - \hat{x}_n) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}_1(t) \end{array} \right. \quad (1.99)$$

où les variables $\tilde{x}_i(t)$ sont données par :

$$\tilde{x}_i(t) = \hat{x}_i(t) + E_{i-1} \lambda_{i-1} \text{sign}(\tilde{x}_{i-1} - \hat{x}_{i-1}) \quad \text{pour } i = 2, \dots, n \quad (1.100)$$

Avec :

$$E_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{x}_j(t) - \hat{x}_j(t) = 0, \quad \forall j \leq i \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

La convergence des erreurs d'observation en temps fini n'est assurée que si le système est à entrées bornées et à états bornés pour une durée finie. Si cette condition est vérifiée, alors les λ_i peuvent être choisis tel que les états de l'observateur $\hat{x}_i(t)$ convergent en un temps fini vers les états réels $x_i(t)$ du système. L'inconvénient des observateurs d'ordre 1 est qu'ils introduisent un phénomène de réticence (Chattering).

Pour remédier à ce problème, on peut remplacer la fonction discontinue *sign* par d'autres fonctions, telles que les fonctions sigmoïdes (la fonction arc-tangente, la tangente hyperbolique, etc) ou encore en insérant un filtre passe bas. Cependant, l'insertion d'un filtre ne permet pas d'assurer la convergence en temps fini. Le recours aux observateurs d'ordre supérieur est alors préconisé.

- Observateur à mode glissant étape par étape d'ordre supérieur

Les observateurs à modes glissants d'ordre supérieur [74, 98, 99] sont conçus essentiellement pour éviter le phénomène de "Chattering" tout en préservant les avantages des observateurs à modes glissants ordre un tels que la convergence en temps fini et la robustesse aux entrées inconnues et aux perturbations.

Considérons le système non linéaire sous la forme triangulaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ y(t) = x_1(t) \end{array} \right. \quad (1.101)$$

L'observateur à modes glissants d'ordre 2 étape par étape basé sur l'algorithme du Super Twisting est formulé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_1 = \tilde{x}_2 + \lambda_1 |x_1 - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \alpha_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = E_1 [\tilde{x}_3 + \lambda_2 |\tilde{x}_2 - \hat{x}_2|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2)] \\ \dot{\hat{x}}_3 = E_1 [\alpha_2 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2)] \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n = E_{n-2} [\alpha_{n-1} \text{sign}(\tilde{x}_{n-1} - \hat{x}_{n-1})] \\ \dot{\hat{x}}_n = E_{n-1} [\tilde{f} + \lambda_n |\tilde{x}_n - \hat{x}_n|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_n - \hat{x}_n)] \\ \dot{\tilde{f}} = E_{n-1} [\alpha_n \text{sign}(\tilde{x}_n - \hat{x}_n)] \end{array} \right. \quad (1.102)$$

où les variables $\tilde{x}_i(t)$ et les paramètres E_i sont définis comme suit :

$$\tilde{x}_i(t) = \hat{x}_i(t) + E_{i-1} \lambda_{i-1} \text{sign}(\tilde{x}_{i-1} - \hat{x}_{i-1}) \quad \text{pour } i = 2, \dots, n \quad (1.103)$$

$$E_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{x}_j(t) - \hat{x}_j(t) = 0, \quad \forall j \leq i \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

On définit les erreurs d'observation $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$ pour $i = 1, \dots, n$. Les gains de l'observateur λ_i et α_i sont des scalaires positifs à déterminer.

La dynamique de l'erreur d'observation est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = x_2 - \tilde{x}_2 - \lambda_1 |e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) \\ \dot{e}_2(t) = \alpha_1 \text{sign}(e_1) - E_1[\tilde{x}_3 + \lambda_2 |e_2|^{1/2} \text{sign}(e_2)] \\ : \\ \dot{e}_i(t) = E_{i-2} \alpha_{i-1} \text{sign}(e_{i-1}) - E_{i-1}[\tilde{x}_{i+1} + \lambda_i |e_i|^{1/2} \text{sign}(e_i)] \quad i = 3, \dots, n-1 \\ \dot{e}_n(t) = E_{n-2} \alpha_{n-1} \text{sign}(e_{n-1}) - E_{n-1}[\tilde{f} + \lambda_n |e_n|^{1/2} \text{sign}(e_n)] \end{cases} \quad (1.104)$$

Les erreurs d'observations $e_i(t)$ convergent vers zéro en temps fini.

1.8 Conclusion

Ce chapitre avait pour but de donner quelques rappels sur le principe des observateurs et l'observabilité des systèmes pour le cas linéaire sans et avec retard ainsi que pour les systèmes non linéaires.

Nous avons ainsi vu que la notion d'observabilité pour les systèmes linéaires sans et avec retard sont similaires. En ce qui concerne l'observabilité dans le cas des systèmes non linéaires, celle-ci n'est pas unique à l'instar du cas linéaire, et qu'elle peut notamment dépendre de l'entrée du système et des conditions initiales.

D'autre part, nous avons présenté un état de l'art non exhaustif des différentes techniques de synthèse d'observateurs pour les systèmes continus linéaires et non linéaires. Nous avons vu qu'il n'y a pas de méthodologie générale pour la construction d'observateurs pour les systèmes non linéaires. C'est un domaine de recherche où il reste encore beaucoup de problèmes non résolus.

Chapitre 2

Systemes chaotiques et synchronisation

2.1 Introduction

La théorie du chaos, en tant que nouvelle branche de la physique et des mathématiques, a fourni une nouvelle façon de voir l'univers et un outil important pour comprendre le comportement de plusieurs processus et systèmes physiques [100]. Cette théorie commence à prendre forme dans la seconde moitié du vingtième siècle après l'observation de différents systèmes qui, en dépit de la connaissance de leurs règles d'évolution et de leurs conditions initiales, leur futur semblait être arbitraire et imprévisible. La théorie du chaos a connu ces dernières années de multiples applications dans divers domaines de la science et de l'ingénierie.

Une attention particulière a été accordée au développement des techniques pour la communication en utilisant des systèmes chaotiques. En effet, les signaux chaotiques sont irréguliers, non périodiques, non corrélés, à large bande et impossible de prévoir leur comportement à long terme. Ce sont les propriétés exigées en matière de signaux appliqués à des systèmes de communications sécurisées.

L'utilisation du chaos dans ce type de systèmes ayant pris encore plus d'ampleur depuis les années 90 et ce grâce aux travaux de Pecora et Carroll [7] qui ont montré que deux systèmes chaotiques identiques avec des conditions initiales différentes, peuvent éventuellement se synchroniser s'ils sont couplés d'une certaine manière, c'est-à-dire sous certaines conditions.

Dans ce chapitre, nous allons définir les systèmes chaotiques et leurs caractéristiques, ainsi que leur utilisation dans les schémas de communication sécurisée. Puis, nous aborderons la notion de synchronisation, ainsi que les différentes méthodes permettant de réaliser cette dernière.

2.2 Systèmes chaotiques

Tout au long de l'histoire des sciences, et vers la fin du *XIX^{ème}* siècle, les scientifiques ont utilisé la théorie physique déterministe pour interpréter les phénomènes naturels. L'état actuel d'un phénomène physique est le produit d'un état antérieur et l'origine d'un état futur, selon la théorie déterministe. Néanmoins, un certain nombre de comportements dynamiques existants à l'époque, tels que les phénomènes météorologiques, ne pouvaient être expliqués par cette vision déterministe. Henri Poincaré, au début du vingtième siècle, a expliqué ces phénomènes par leur sensibilité aux conditions initiales.

«Une cause très petite, et qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la Nature et la situation de l'Univers à l'instant initial, nous pourrions prédire la situation de ce même Univers à l'instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que les petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes différences dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières (conditions initiales) produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit.»

Henri Poincaré, 1908 [101]

En 1967, Edwards Lorenz a proposé un système déterministe ayant un comportement complexe se manifestant par un attracteur étrange et caractérisé par une grande sensibilité aux conditions initiales [102]. Quatre ans plus tard, James Yorke a inventé le mot chaos pour décrire pour la première fois des processus déterministes et imprévisibles [103]. Suite à ces découvertes, la théorie du chaos a trouvé des applications en mathématiques, en physique, en électronique, en biologie, en médecine et, plus récemment, en télécommunications [104].

Il est très délicat de définir ce qu'est un système chaotique, étant donné qu'il n'existe pas une définition précise. En pratique, on peut dire qu'un système chaotique a un comportement borné

en régime permanent qui ne correspond pas à un point d'équilibre, qu'il n'est ni périodique, ni quasi-périodique. Parmi les caractéristiques principales permettant d'évoquer un comportement chaotique, on peut retenir les trois caractéristiques suivantes :

- Un système chaotique est un système déterministe ;
- Il exhibe une extrême sensibilité aux conditions initiales ;
- Il présente un comportement asymptotique apériodique.

En général, les trajectoires d'un système dynamique chaotique sont attirées vers un attracteur étrange, qui est un objet géométrique issu de l'évolution des systèmes chaotiques, il est formé d'une suite infinie de points qui dépendent des conditions initiales du système. L'attracteur étrange est caractérisé par :

- Un volume nul ;
- Une séparation exponentiellement rapide de trajectoires initialement proches ;
- Une dimension souvent fractale (non entière) caractérisant le concept de système chaotique fractionnaire.

La naissance d'un attracteur étrange est liée à l'existence de deux processus, à savoir l'étirement, responsable de l'instabilité et de la sensibilité aux conditions initiales, et le repliement, responsable du côté étrange et fractal de l'attracteur. En pratique, la vérification de quelques propriétés d'un système dynamique suffit pour pouvoir le considérer comme chaotique :

- Vérifier la sensibilité aux conditions initiales ;
- Tracer les trajectoires des états et leur spectre de puissance ;
- Tracer différents attracteurs ;
- Tracer un diagramme de bifurcation.

2.2.1 Définitions

Le mot "chaos" a été inventé par les Grecs pour décrire l'infiniment vide qui, selon eux, existait avant l'apparition de tout. Ce terme ne fait pas référence à une absence d'ordre ; il désigne plutôt un mélange d'ordre et de désordre, que l'on appelle "chaos déterministe".

- Systèmes dynamiques

Les systèmes dynamiques décrivent des phénomènes évoluant au cours du temps, ils sont représentés par des équations différentielles, qui ont deux types de variables (dynamiques et

statiques), les variables dynamiques sont les états du système variant dans le temps, tandis que les variables statiques sont constantes.

Définition 2.1 [105] *Considérons le système dynamique continu suivant :*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)); \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

Le système (2.1) est dit chaotique s'il existe un ensemble compact $\Omega \in \mathbb{R}^n$ et un ensemble ouvert Ω_0 tels que toutes les trajectoires du système initialisées à $x(0) \in \Omega_0$ vérifient la condition suivante :

$$\liminf_{t \rightarrow \infty, \omega \in \Omega} |x(t) - \omega| = 0 \quad (2.2)$$

et que toute trajectoire $x(t, x(0))$ qui commence dans Ω est instable au sens de Lyapunov.

2.2.2 Propriétés du chaos

Les systèmes chaotiques sont des systèmes dont les trajectoires évoluent dans une région bornée avec un caractère stable mais sans jamais converger vers un point fixe ou un cycle limite. Ces trajectoires qui restent denses dans cette région sont très sensibles aux conditions initiales : tel que deux conditions initiales très proches conduisent à deux trajectoires qui s'éloignent rapidement l'une de l'autre. Les solutions des équations différentielles non linéaires ne peuvent être calculées de manière analytique car il n'existe pas de méthodes de résolution analytiques pour ces équations, sauf pour des cas spécifiques. Elles sont alors déterminées numériquement, et le comportement du système est étudié par simulation. En réalité, la sensibilité aux conditions initiales, l'attracteur étrange, l'évolution aléatoire et le spectre qui caractérisent le comportement des systèmes chaotiques, sont mis en évidence par simulation ou expérimentation.

Un système chaotique présente des caractéristiques, qui lui sont inhérentes, elles sont présentées comme suit :

- Non linéarité

Pour un système dynamique non linéaire, les propriétés de stabilité sont essentiellement plus compliquées que dans le cas linéaire. Quand des non linéarités sont présentes, plusieurs caractéristiques peuvent apparaître comme les cycles limites ou le phénomène du chaos. La non linéarité est une condition nécessaire, mais insuffisante pour que le chaos apparaisse. Donc le

comportement chaotique provient d'un système non linéaire, mais la non linéarité seule n'implique pas nécessairement l'apparition du chaos.

- Déterminisme

Le comportement chaotique d'un système est généré par une ou plusieurs équations déterministes qui n'incluent aucun paramètre aléatoire. Les états passés, présents et futurs du système sont régis par des lois déterministes. Le déterminisme reflète l'unicité de la solution de l'équation différentielle d'un système donné, c'est-à-dire le théorème de Cauchy, néanmoins le déterminisme n'empêche quand même pas les systèmes chaotiques d'être imprévisibles.

- Sensibilité aux conditions initiales

L'une des propriétés les plus significatives des systèmes chaotiques est leur sensibilité aux conditions initiales, c'est-à-dire la propriété selon laquelle les évolutions de deux points de départ, aussi proches soient-ils, seront tellement divergentes qu'aucune relation entre leurs deux trajectoires ne puisse être trouvée.

- Attracteur étrange

Les systèmes chaotiques ont une dynamique très complexe. Lorsqu'on analyse le système dans l'espace de phase, sa dynamique comporte une certaine régularité qui donne lieu à ce qu'on appelle "attracteur étrange". Dans le plan de phase, ces objets géométriques issus de l'évolution de systèmes chaotiques, sont formés d'une suite infinie de points qui dépendent de la valeur initiale. Au fur et à mesure que le nombre de points augmente, cette forme dans le plan devient de plus en plus nette. Cependant, ce n'est ni une courbe ni une surface, c'est en fait un objet intermédiaire constitué de points avec entre eux des espaces inoccupés. L'objet est qualifié d'étrange en raison de sa structure pointilliste et de sa nature fractale.

- Spectre de puissance

Les systèmes chaotiques se distinguent par une transformée de Fourier ou un spectre de puissance riche en fréquences, ce qui signifie qu'il comprend un nombre infini de raies, illustrant ainsi la nature non périodique d'un signal chaotique.

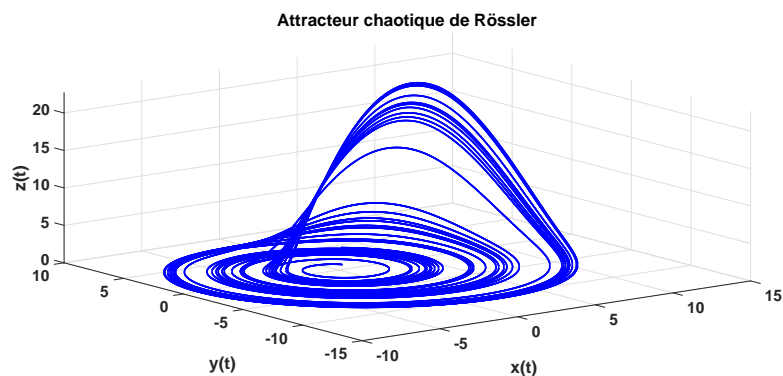


FIGURE 2.1: Attracteur étrange du système de Rössler.

2.2.3 Exemple d'illustration

Système de Rössler

Pour montrer les caractéristiques d'un système chaotique, considérons le modèle de Rössler [106] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + ay(t) \\ \dot{z}(t) = b + z(t)(x(t) - c) \end{cases} \quad (2.3)$$

Otto Rössler a créé son attracteur en 1976 dans un but purement théorique, mais ces équations se sont avérées utiles dans la modélisation de l'équilibre des réactions chimiques. L'article original de Rössler [107] indique que son système a été structuré pour fonctionner de manière similaire au système de Lorenz, mais aussi pour être plus simple à évaluer puisqu'il ne comporte qu'une seule spirale.

Rössler étudia l'attracteur pour $a = 0.2$, $b = 0.2$ et $c = 5.7$, le système fonctionne alors en régime chaotique.

L'évolution d'une trajectoire chaotique dans le temps apparaît comme étant aléatoire, mais l'observation de la trajectoire dans l'espace des phases, lorsque t tend vers l'infini, crée une forme particulière avec une structure fractale : c'est l'attracteur étrange (voir figure 2.1).

L'évolution aléatoire de la trajectoire chaotique du système de Rössler, est décrite par la figure 2.2.

La figure 2.3 présente la sensibilité aux conditions initiales de l'état $x(t)$ du système (2.3). La trajectoire en bleu est obtenue pour des conditions initiales $[x(0), y(0), z(0)] = [1, 1, 0]$. La

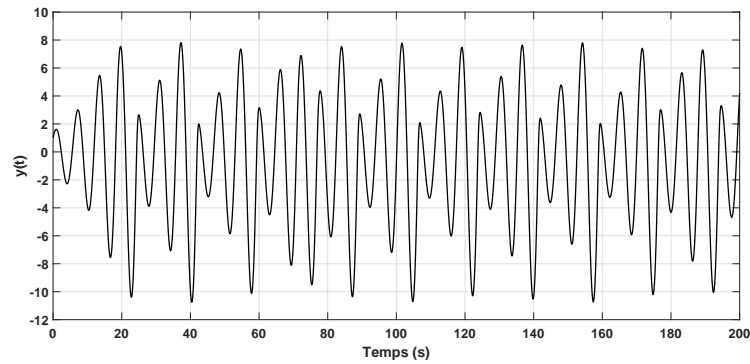


FIGURE 2.2: Évolution aléatoire des trajectoires du système.

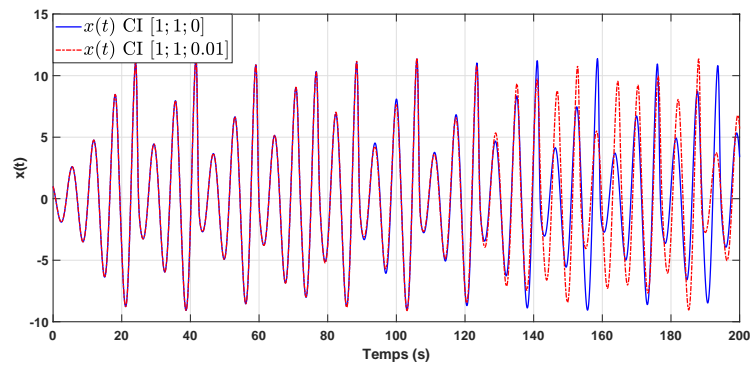


FIGURE 2.3: Sensibilité aux conditions initiales de l'état $x(t)$ du système de Rössler.

trajectoire en rouge est obtenue pour les conditions initiales $[x(0), y(0), z(0)] = [1, 1, 0.01]$. Nous remarquons que, pour une petite variation dans les conditions initiales, la trajectoire de $x(t)$ (en rouge) diverge de la première courbe. Ce qui démontre la très grande sensibilité aux conditions initiales des systèmes chaotiques.

Dans le domaine fréquentiel, le spectre d'un signal chaotique a une large gamme de fréquences comme illustré dans la figure 2.4.

Il existe de nombreux autres modèles de systèmes chaotiques qui présentent des caractéristiques similaires à celles du système de Rössler. Nous citons à titre d'exemple l'attracteur de Lorenz [108], l'oscillateur de Duffing, le système de Lü [109], le système de Genesisio, etc.

La sensibilité aux conditions initiales, l'attracteur étrange, l'évolution aléatoire sont tous mis en évidence par simulation ou expérimentation pour caractériser le comportement des systèmes chaotiques. Mais, afin d'étudier les systèmes chaotiques, la communauté scientifique a proposé,

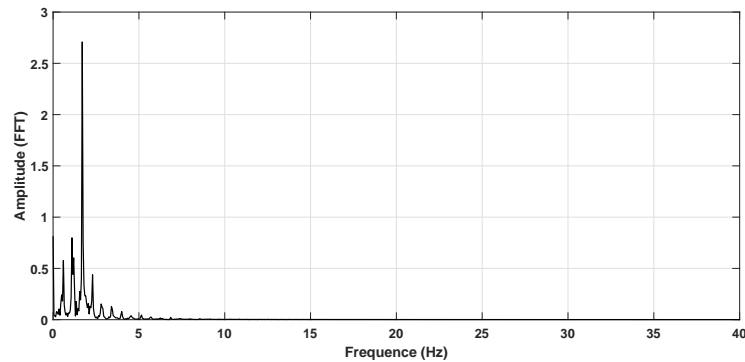


FIGURE 2.4: Spectre de puissance.

entre autres, des solutions avec une approche statistique du problème comme le calcul de la section de Poincaré, les exposants de Lyapunov, etc.

2.2.4 Analyse mathématique des systèmes chaotiques

Cette partie sera dédiée à la présentation des différents outils que nous allons utiliser afin de mettre en évidence quelques caractéristiques des systèmes dynamiques non linéaires, notamment les systèmes chaotiques.

- Section de Poincaré

Est un outil mathématique de base qui permet de transformer le comportement compliqué dans l'espace de phase en un système dynamique discret dans un espace de dimension inférieure [110]. En effet, lors du tracé des solutions de certains problèmes non linéaires, l'espace de phase peut s'encombrer et la structure fondamentale peut être perdue. Pour surmonter ces difficultés, la section de Poincaré a été proposée.

Soit un système dynamique continu, décrit dans un espace d'état de dimension n et une surface de dimension $(n - 1)$ définie dans cet espace. L'application de Poincaré est le système dynamique en temps discret dont la suite des itérés correspond aux coordonnées des points d'intersections successifs de la trajectoire avec cette surface. L'ensemble des points d'intersections, situés sur la surface, représente la section de Poincaré. Si on prend un exemple d'un espace d'états de dimension supérieur ou égale 3, la représentation des trajectoires est difficile et on a recours, pour les caractériser, aux sections de Poincaré. Pour cette raison, l'ensemble des trajectoires est divisé par un plan, et chaque fois qu'une trajectoire traverse ce plan, elle y marque un point. Le com-

portement du système est décrit par la séquence temporelle des points obtenus. Par conséquent, si la suite temporelle des points converge vers un point d'accumulation, c'est que la coupe passe par l'attracteur ponctuel. Si l'attracteur est cyclique, le plan intersecte le cycle limite en deux points d'accumulation, et les intersections avec la trajectoire se rapprochent alternativement de ces deux points. Si un système de plus de 2 variables manifeste deux pulsations simultanées et indépendantes, les trajectoires s'enroulent autour de la surface d'un tore. Si l'attracteur est chaotique, l'intersection de l'attracteur avec le plan de Poincaré, donne une figure contenant des étirements et repliements de toutes les zones densément occupées. Dans ce cas, aucune trajectoire ne passe deux fois par le même point, et deux trajectoires ne se superposent jamais [111].

- Exposants de Lyapunov

L'évolution d'un flot chaotique est difficile à appréhender, parce que la divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide. C'est pourquoi, on essaye de quantifier ou même de mesurer la vitesse de divergence ou de convergence. Cette vitesse est connue sous le nom d'exposant de Lyapunov. L'exposant de Lyapunov est utilisé pour déterminer le degré de stabilité d'un système et permet d'obtenir une quantification de la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique [112]. Le nombre d'exposants de Lyapunov est égal à la dimension du système dans l'espace de phase. On considère une trajectoire de "référence" $x_r(t)$ du système (2.1) commençant avec la condition initiale $x_r(0)$.

La linéarisation de (2.1) autour de $x_r(0)$ permet d'obtenir :

$$\frac{dw(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t)) w(t)|_{x(t)=x_r(0)} \quad (2.4)$$

Avec $w(t) = x(t) - x_r(t)$.

Le taux d'accroissement exponentiel est caractérisé par λ tel que :

$$|w(t)| = e^{\lambda t} |w(0)| \quad (2.5)$$

D'après (2.5), il est évident que le signe de λ détermine la convergence ou la divergence des trajectoires. La valeur de λ est calculée comme suit :

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{|w(t)|}{|w(0)|} \quad (2.6)$$

Soit $w(t)$ la solution de l'équation (2.4), et soient $x(0)$ et $w(0)$ les conditions initiales de $x(t)$

et $w(t)$, respectivement. L'exposant de Lyapunov est alors défini par [113] :

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|w(t)|}{|w(0)|} \quad (2.7)$$

Remarque 2.2 *Il faut noter que l'existence d'un attracteur nécessite que la dynamique du système soit globalement dissipative. Cela signifie que le système doit être caractérisé par une stabilité globale. C-à-d que la condition suivante soit vérifiée :*

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0 \quad (2.8)$$

où n désigne la dimension du système.

Les divers critères permettant de caractériser la dynamique d'un système non linéaire sont regroupés dans le tableau 2.1

La figure 2.5 présente les exposants de Lyapunov du système de Rössler pour $c = 5.7$, où $\lambda_1 = 0.016760$, $\lambda_2 = -0.046627$, $\lambda_3 = -5.470133$.

Régime permanent	Attracteur	Exposants de Lyapunov
Point d'équilibre	Point	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 < 0$
Périodique	Courbe fermée	$\lambda_1 = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 < 0$
Quasi-périodique	Tore	$\lambda_1 = \dots = \lambda_i = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{i+1} < 0$
Chaotique	Fractal	$\lambda_1 > 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 < 0$
Hyperchaotique	Fractal	$\lambda_1 > \lambda_2 > 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 < 0$

TABLE 2.1: Différents régimes d'un système dynamique non linéaire.

- Diagramme de bifurcation

En fonction des valeurs de ses paramètres, un système dynamique non linéaire peut présenter un certain nombre de comportements (point fixe, oscillations périodiques, oscillations quasi-périodiques, chaos). Il passe d'un comportement à un autre en fonction des changements de certains paramètres importants du système. Les transitions entre les régimes dynamiques se produisent par bifurcation, et le paramètre dont la modification entraîne un changement de régime dynamique est appelé paramètre de bifurcation [111]. L'ensemble de l'évolution dynamique d'un système peut se représenter sous la forme d'un diagramme de bifurcation.

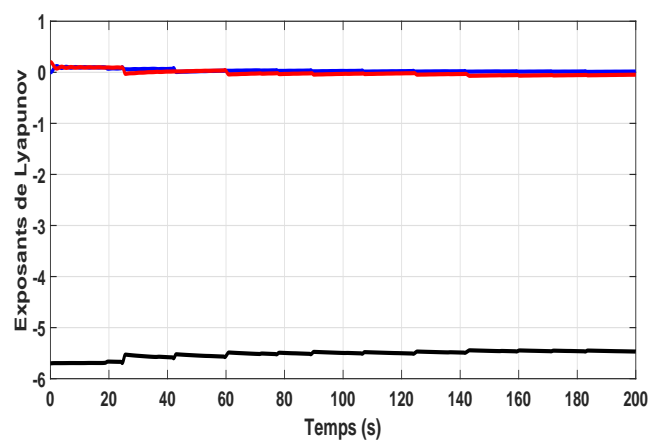
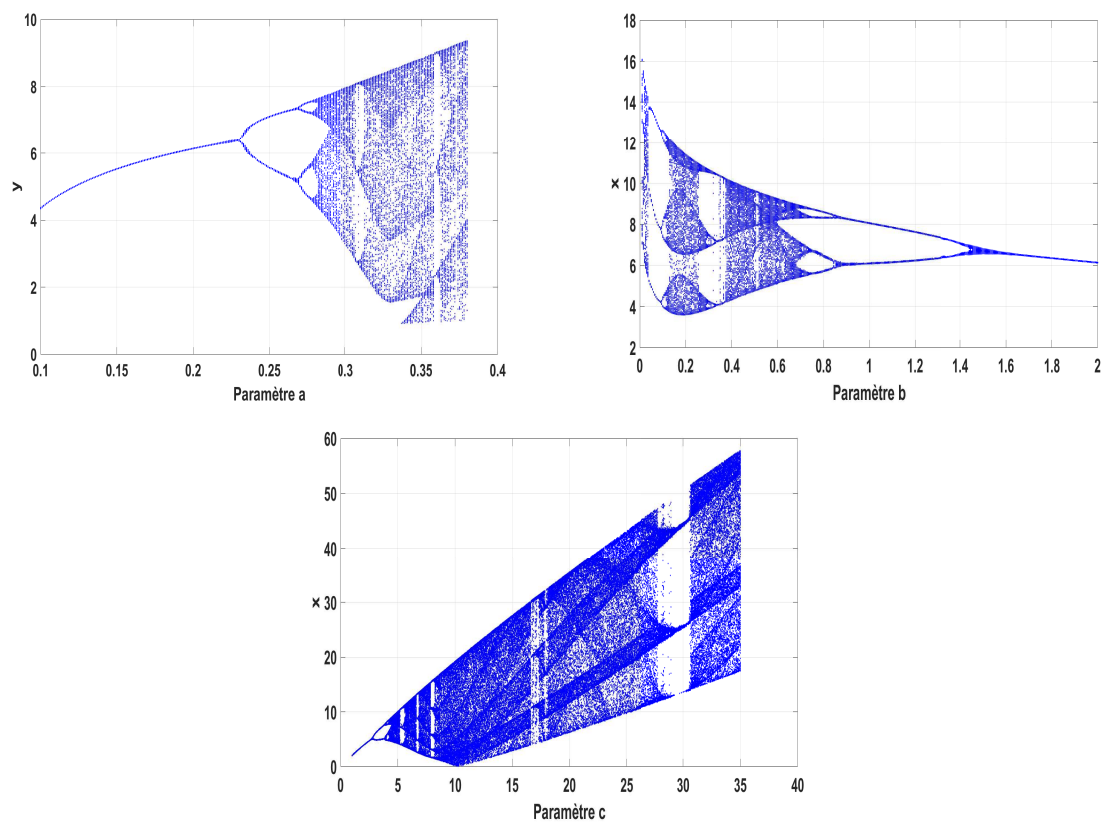


FIGURE 2.5: Exposants de Lyapunov du système (2.3)

FIGURE 2.6: Diagrammes de bifurcation en fonction des paramètres a , b et c .

Les diagrammes de bifurcation représentés par la figure 2.6 illustrent le comportement des orbites du système de Rössler en fonction des différents paramètres du système. Ainsi, en variant le paramètre a entre $(0.1, 0.38)$, une bifurcation par doublement de période apparaît lorsque $a = 0.23$. Le paramètre $b \in [0, 2]$, nous constatons l'apparition des bifurcations lors de cette évolution. Enfin le paramètre $c \in [1, 30]$. Durant ces trois variations nous distinguons clairement le doublement de période, ce qui entraîne toutes les trajectoires du système à converger vers un régime chaotique : "attracteur étrange".

- Route vers le chaos

Il existe plusieurs scénarios permettant de décrire le passage d'un point fixe vers le chaos. Nous trouvons trois types d'évolution possible [114] :

- Doublement de période
- Intermittences
- Quasi-périodicité

Le comportement dynamique des systèmes chaotiques a attiré l'attention des chercheurs travaillant dans le domaine des télécommunications sur les méthodes de transmission sécurisée de l'information basées sur les techniques de cryptographies. Depuis les années 90, de nombreuses analogies entre les systèmes chaotiques et les systèmes cryptographiques ont été découvertes, ouvrant ainsi une large voie à l'utilisation du chaos dans les systèmes de communication sécurisés.

2.3 Utilisation des systèmes chaotiques dans les schémas de communication sécurisée

De par les progrès considérables dans les technologies de la communication au cours des dernières décennies, la sécurité des échanges d'informations est devenue une préoccupation majeure de nos jours. Dans ce contexte, la cryptographie joue un rôle prépondérant car l'information est principalement véhiculée par des réseaux publics. L'objectif principal de la cryptographie est, précisément, de dissimuler le contenu des informations transmises par le biais de canaux non sécurisés, en d'autres termes, de garantir la protection et la confidentialité des communications.

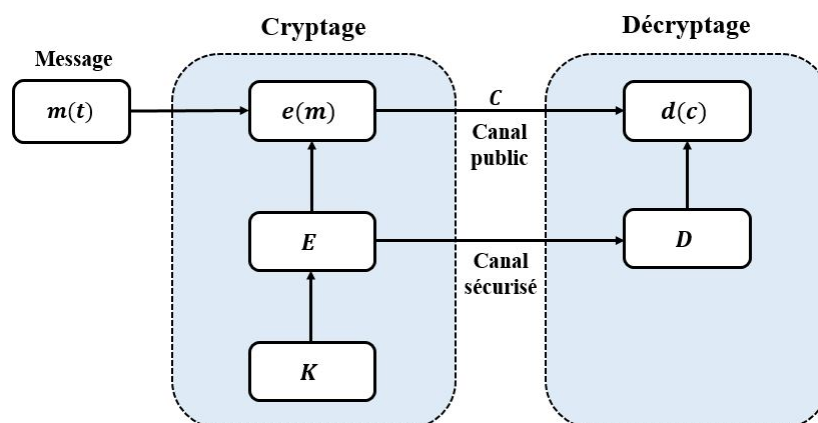


FIGURE 2.7: Schéma d'un cryptosystème

2.3.1 Introduction à la cryptographie

La cryptographie peut être définie comme l'étude des techniques liées à la sécurité de l'information. Le but premier de cette science est d'offrir aux individus la possibilité de communiquer d'une manière protégée. On suppose que la communication s'effectue via un canal public et donc accessible à tout le monde. La cryptographie permet de transmettre des informations confidentielles de manière sécurisée en utilisant des canaux non sécurisés.

2.3.2 Principe de la cryptographie

Un cryptosystème défini par $(m(t), E, K, D)$ est illustré par la figure 2.7. Le message à crypter $m(t)$ est un ensemble fini des messages clairs possibles, l'espace message crypté C est un ensemble fini des textes chiffrés possibles et l'espace clé K est un ensemble fini des clés possibles. E et D représentent les ensembles des fonctions de cryptage et de décryptage, respectivement. Il existe une fonction de cryptage $e(m)$ et une fonction de décryptage $d(c)$.

2.3.3 Objectifs de la cryptographie

Les principaux objectifs de la cryptographie peuvent être présentés comme suit :

- Confidentialité : consiste à garder des données secrètes.
- Intégrité : vise à préserver les données de toute altération non autorisée.
- Authentification : consiste à faire le lien entre les données et leur expéditeur.
- Contrôle d'accès : processus permettant de contrôler qui peut avoir accès aux ressources.

La cryptographie peut être principalement divisée en de deux catégories : cryptographie symétrique et cryptographie asymétrique.

Cryptographie symétrique

La cryptographie symétrique ou chiffrement à clé privée utilise la même clé au niveau du cryptage et au niveau du décryptage. Ce qui permet d'avoir une grande vitesse de transmission, donc de transmettre des quantités considérables d'informations. Pour assurer la sécurité, il faut néanmoins trouver un algorithme dont le déchiffrement soit simple avec la clé, mais particulièrement difficile, voire impossible, sans la connaissance de celle-ci.

Toutefois, cette méthode souffre du problème de la gestion des clés lorsque le nombre d'utilisateurs est élevé.

Cryptographie asymétrique

La cryptographie asymétrique ou à clé publique est venue résoudre le problème de distribution des clés posé par la cryptographie à clé secrète. Dans les algorithmes asymétriques, les clés de chiffrement et de déchiffrement sont distinctes et ne peuvent se déduire l'une de l'autre. On peut donc rendre l'une des deux publique tandis que l'autre reste privée. L'inconvénient de la cryptographie asymétrique est la faible vitesse de transmission.

2.3.4 Cryptographie chaotique

Le chaos est l'une des dynamiques les plus complexes que peuvent exhiber les systèmes non linéaires. Une des définitions formelles du chaos est due à RL Devaney [115]. Un système dynamique est dit chaotique au sens de Devaney s'il remplit deux propriétés : la transitivité et la densité des points périodiques. Ces deux notions font appel à des concepts topologiques. On peut montrer que la sensibilité aux conditions initiales, qui est la propriété souvent associée à un comportement chaotique, est en fait une conséquence de ces deux autres propriétés.

Les signaux générés par les systèmes chaotiques présentent des propriétés statistiques proches des systèmes aléatoires en dépit d'être déterministes. Cela peut constituer ainsi un des moyens pour mettre en œuvre les principes de confusion et de diffusion requis par Shannon pour les systèmes cryptographiques [116]. Une première proposition en ce sens a été faite en 1989 [117]. Depuis, de nombreuses techniques ont été proposées pour le cryptage de données en utilisant les propriétés du

chaos. Cette nouvelle approche de chiffrement est communément appelée cryptographie chaotique [118–120].

Remarque 2.3 *La cryptographie chaotique est une méthode de cryptage symétrique, en effet la même clé est utilisée au niveau du cryptage et au niveau du décryptage.*

Le tableau 2.2 illustre l’analogie entre les systèmes cryptographiques et chaotiques.

Système cryptographique	Système chaotique
Diffusion	Hypersensibilité aux conditions initiales
Confusion	Ergodicité : attracteur étrange
Déterminisme des générateurs pseudo-aléatoires	Déterminisme des systèmes chaotiques
Complexité des algorithmes de cryptage	Comportements complexes
Clé secrète	Paramètres de bifurcation

TABLE 2.2: Analogie entre les systèmes cryptographiques et chaotiques

- Principe de la cryptographie chaotique

La cryptographie chaotique permet de chiffrer et de déchiffrer une information en temps réel et ce en noyant le message dans le signal chaotique. Pour cela, elle utilise les propriétés des dynamiques chaotiques qui ont une évolution temporelle d’aspect bruité et un déterminisme local. Comparée à la cryptographie classique, la cryptographie chaotique peut présenter quelques avantages en termes de robustesse et de rapidité, surtout lors du chiffrement symétrique par flux. De plus, la cryptographie chaotique est plus flexible, plus modulaire et facile à mettre en œuvre.

D’autres cryptosystèmes, sont basés sur le principe de la synchronisation des systèmes chaotiques. Cette approche consiste à chiffrer l’information par un signal chaotique pseudo aléatoire généré par l’émetteur "système maître" et utilise la synchronisation au niveau du récepteur "système esclave" pour récupérer le signal chaotique.

2.4 Synchronisation des systèmes chaotiques

A première vue, et compte tenu de leur sensibilité aux conditions initiales, parler de synchronisation pour des systèmes chaotiques semble surprenant, et on pourrait en conclure que le

chaos est incontrôlable. Cependant, d'après les travaux de Pecora et Carroll [7], qui ont démontré que les systèmes chaotiques peuvent être complètement synchronisés, la synchronisation des systèmes chaotiques et hyper-chaotiques a suscité l'intérêt de la communauté scientifique. En effet, au cours des deux dernières décennies, on a assisté à une synchronisation du chaos dans divers domaines tels que la physique [121], la chimie [122], la communication sécurisée [123] et la robotique [124].

2.4.1 Historique

L'histoire de la synchronisation remonte au *XVII^{ème}* siècle. Christian Huygens, un physicien néerlandais, a été le premier à observer et à décrire le phénomène de synchronisation en 1658 [125]. En effet, le scientifique a découvert que deux de ses horloges à balancier, placées côte à côte, se synchronisaient parfaitement, ou, en d'autres termes, convergeaient rapidement vers un mouvement identique en phase et en fréquence, même en présence de perturbations [126]. Le chercheur conclut alors l'existence d'un mouvement synchrone qu'il qualifia de sympathie entre les deux horloges.

Lord Rayleigh, un physicien anglais, découvre la capacité des tubes sonores à vibrer à l'unisson en 1870 [127], soit près de deux siècles plus tard. Dans les années 1920, V. Appleton et B. Van der Pol étudient le phénomène de synchronisation dans les générateurs à triode sous l'influence de faibles signaux de synchronisation [128]. Cette étude a reçu une attention considérable due à son importance physique et son aspect pratique pour les communications radio [128]. En 1946, le chercheur R. Adler décrit le phénomène de verrouillage qui est un concept clé dans la synchronisation des oscillateurs périodiques [129].

La synchronisation des systèmes chaotiques apparaît pour la première fois dans les travaux de Fujisaka et Yamada en 1983 [130]. Les chercheurs ont ouvert la voie aux études sur la synchronisation chaotique en utilisant une méthode locale. Par la suite, Afraimovich et son équipe de recherche ont développé des principes fondamentaux liés à la synchronisation chaotique [131]. L. Pecora et T. Carroll ont démontré théoriquement et expérimentalement en 1990 la possibilité d'une synchronisation identique entre deux circuits chaotiques couplés, l'un appelé "Maître" et l'autre "Esclave" [7]. Rulkov [132] a proposé une approche différente de la synchronisation chaotique. Le schéma de synchronisation considère souvent une paire de systèmes configurés en mode maître-esclave, sauf que le couplage n'est pas limité à des systèmes identiques cette fois.

Le problème de la synchronisation des systèmes chaotiques a ainsi pris un grand essor grâce aux travaux [133, 134]

2.4.2 Principe de la synchronisation des systèmes chaotiques

L'une des configurations les plus répandues pour synchroniser des systèmes chaotiques est la configuration Maître-Esclave. Dans un schéma maître-esclave, un système dynamique appelé esclave doit suivre la trajectoire et l'évolution fixées par un autre système dynamique appelé maître.

En général, les méthodes de synchronisation sont regroupées sous deux modes basés sur l'existence de la connexion entre le système maître (émetteur) et le système esclave (récepteur). Le premier mode est basé sur un couplage mutuel (bidirectionnel) entre deux systèmes chaotiques. Le second est connu sous le nom de couplage unidirectionnel. La boucle de retour est utilisée dans la synchronisation bidirectionnelle sur les deux systèmes en même temps. En revanche, dans le cas d'une synchronisation unidirectionnelle, la boucle de retour est appliquée uniquement à l'un des deux systèmes.

Considérons les deux systèmes décrits par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x(t)) + M_1(y(t) - x(t)) \\ \dot{y}(t) = f_2(y(t)) + M_2(x(t) - y(t)) \end{cases} \quad (2.9)$$

Avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}^n$ représentent les états des deux systèmes, les fonctions f_1 et f_2 sont des fonctions non linéaires, M_1 et M_2 sont des matrices diagonales.

Le schéma de couplage des deux systèmes est montré dans les figures 2.8. Lorsque la synchronisation entre deux systèmes est atteinte, les termes $M_1(y(t) - x(t))$ et $M_2(x(t) - y(t))$ s'annulent. Cela implique que $x(t) = y(t)$ et donc que les deux systèmes ont un comportement semblable. La synchronisation unidirectionnelle est un cas particulier de la synchronisation bidirectionnelle, elle est définie si $M_1 = 0$ ou $M_2 = 0$.

2.4.3 Types de synchronisation

Différents types de synchronisation ont été introduits suite aux travaux de Pecora et Carroll en 1990 [7]. Dans cette section, nous définirons et donnerons le principe de chaque type de synchronisation.

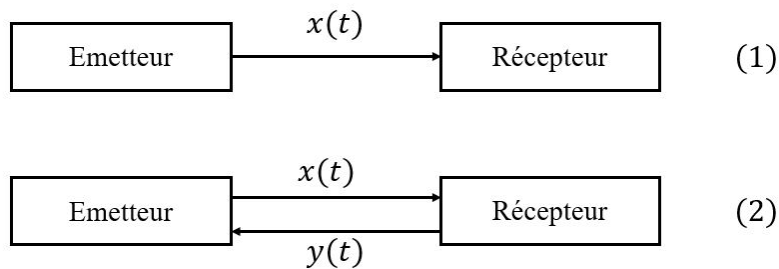


FIGURE 2.8: Schéma de couplage : (1) unidirectionnel, (2) bidirectionnel

- Synchronisation complète

Cette synchronisation [135], également connue sous le nom de synchronisation identique, est le type de synchronisation le plus ancien et le plus fondamental pour les systèmes chaotiques couplés. Elle consiste en une reconstruction parfaite des trajectoires de deux systèmes chaotiques après un régime transitoire, ce qui est accompli à l'aide d'un signal de couplage unidirectionnel, assurant qu'ils restent en phase au cours du temps.

Soit un système esclave défini par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}_s(t) = f_s(x_s(t)), \quad x_s \in \mathbb{R}^n \quad (2.10)$$

Ce système se synchronise avec un système maître donné par :

$$\dot{x}_m(t) = f_m(x_m(t)), \quad x_m \in \mathbb{R}^n \quad (2.11)$$

Si, pour toute paire de conditions initiales $(x_s(0), x_m(0)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_s(t) - x_m(t)\| = 0 \quad (2.12)$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

- Synchronisation généralisée

Cette méthode de synchronisation a été introduite par Rulkov [132]. C'est la généralisation du concept de synchronisation identique. Dans ce cas, les systèmes (2.10) et (2.11) se synchronisent au sens généralisé, s'il existe un difféomorphisme Ψ tel que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_s(t) - \Psi(x_m(t))\| = 0 \quad (2.13)$$

Remarque 2.4 *Il est à noter que le difféomorphisme Ψ doit être inversible et indépendant des conditions initiales $x_m(0)$ et $x_s(0)$. La synchronisation complète est un cas particulier de la synchronisation généralisée, où la fonction Ψ est égale à l'unité.*

- Synchronisation projective

La synchronisation projective [136] est une autre forme spéciale de la synchronisation généralisée, où la fonction Ψ est une fonction linéaire simple tel que $\Psi(x) = ax$. On dit qu'une synchronisation projective a lieu, si chaque état $x_s(t)$ se synchronise avec un facteur multipliant l'état $x_m(t)$. Ainsi, cette synchronisation peut-être formulée comme suit :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_s(t) - ax_m(t)\| = 0 \quad (2.14)$$

- Synchronisation retardée

La synchronisation retardée [137] apparaît dans le cas des systèmes chaotiques non identiques faiblement couplés. En effet, il a été démontré qu'il existe un régime de synchronisation retardée, où l'état du système esclave converge vers l'état décalé du système maître, c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_s(t) - x_m(t - \tau)\| = 0 \quad (2.15)$$

où τ est un petit retard positif.

- Synchronisation de phase

Le terme "synchronisation de phase" peut être décrit à l'aide de la théorie classique des vibrations linéaires. Considérons deux oscillateurs avec les phases ϕ_1 et ϕ_2 . Il a été démontré que la synchronisation de phase entre ces deux oscillateurs se produit lorsque l'inégalité suivante est vérifiée [138].

$$\|a\phi_1 - b\phi_2\| \leq \varepsilon \quad (2.16)$$

où a et b sont des entiers et ε est une constante positive.

Néanmoins, il faut noter que même si les trajectoires du système esclave convergent vers celles du système maître, leurs amplitudes peuvent être différentes.

Quelques approches ont été proposées dans [139] afin de calculer les amplitudes, telle que l'approche analytique. On considère, un signal analytique $\Phi(t)$, une fonction complexe définie par :

$$\Phi(t) = s(t) + j\tilde{s}(t) = A(t)e^{j\phi(t)} \quad (2.17)$$

Avec $A(t)$ et $\phi(t)$ représentent l'amplitude et la phase, respectivement. $\tilde{s}(t)$ est la transformée de Hilbert de la série temporelle de $s(t)$, tel que :

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{\pi} \Psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(\theta)}{t - \theta} d\theta \quad (2.18)$$

où Ψ est la valeur principale de l'intégrale de Cauchy.

- Synchronisation impulsive

Considérons le système maître, et définissons un ensemble de temps discrets \bar{t}_i pour $i = 1, 2, \dots, n$. A chaque instant \bar{t}_i , le signal $x_m(t)$ est transmis par le système maître au système esclave, ce qui provoque le changement des variables d'état [140]. Le système esclave est alors décrit par le système différentiel impulsif suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_s(t) = f_s(x_s(t)) & t \neq \bar{t}_i \\ \Delta x_s|_{t=\bar{t}_i} = -G(x_m(\bar{t}_i) - x_s(\bar{t}_i)) & i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.19)$$

où G est la matrice de gains de contrôle.

2.4.4 Techniques et méthodes de synchronisation

La théorie du contrôle des systèmes a joué un rôle important dans le développement des méthodes modernes de synchronisation. Diverses méthodes, basées sur la conception de diverses lois de commande, ont été abondamment recensées dans la littérature, nous citons :

- Synchronisation avec commande par rétroaction

Cette approche est considérée comme l'une des méthodes les plus efficaces pour synchroniser des systèmes chaotiques. En effet, la technique de commande par rétroaction a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs, et plusieurs commandes linéaires et non linéaires, ont été utilisées pour synchronisation des systèmes chaotiques [141].

Considérons le système chaotique maître défini par :

$$\dot{x}_m = Ax_m + f(x_m) \quad (2.20)$$

Avec A est la matrice d'état et $f(\cdot)$ est une fonction non linéaire.

En appliquant la commande par rétroaction, le système esclave est décrit comme suit :

$$\dot{x}_s = Ax_s + f(x_s) + u(t) \quad (2.21)$$

$u(t)$ est la loi de commande définie par :

$$u(t) = K(x_s - x_m) \quad (2.22)$$

K est une matrice constante appelée matrice de gains. Soit $e = x_m - x_s$ l'erreur de synchronisation. La dynamique de cette erreur est :

$$\dot{e} = (A - K)e + f(x_m) - f(x_m - e) \quad (2.23)$$

Le problème de synchronisation revient donc à calculer K de telle sorte que l'erreur (2.23) converge vers 0 asymptotiquement.

- Synchronisation par backstepping

La synchronisation par backstepping est une approche systématique de la conception de systèmes. Il s'agit d'une procédure récursive qui combine le choix de la fonction de Lyapunov avec la sélection du contrôleur de manière efficace [142]. Cette méthode présente plusieurs avantages, notamment la possibilité d'être appliquée à une variété de systèmes chaotiques, la facilité de mise en œuvre et la possibilité d'effectuer la synchronisation avec un seul contrôleur.

Considérons le système maître défini sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_{m1} = f_1(x_{m1}, x_{m2}) \\ \dot{x}_{m2} = f_2(x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}) \\ \vdots \\ \dot{x}_{mn} = f_n(x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}) + f_{n+1}(t) \end{cases} \quad (2.24)$$

Les fonctions $f_i(\cdot)$ sont des fonctions non linéaires.

Le système esclave est défini par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_{s1} = f_1(x_{s1}, x_{s2}) \\ \dot{x}_{s2} = f_2(x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}) \\ \vdots \\ \dot{x}_{sn} = f_n(x_{s1}, x_{s2}, \dots, x_{sn}) + f'_{n+1}(t) + u(t) \end{cases} \quad (2.25)$$

$u(t)$ est un contrôleur qui doit être choisi adéquatement afin d'assurer la synchronisation entre les systèmes maître et esclave.

L'erreur de synchronisation est définie par $e_i = x_{si} - x_{mi}$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, nous pouvons ainsi

obtenir :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{s1} = e_1 + x_{m1} \\ x_{s2} = e_2 + x_{m2} \\ : \\ x_{sn} = e_n + x_{mn} \end{array} \right. \quad (2.26)$$

En soustrayant (2.24) de (2.25) et en tenant compte de (2.26), la dynamique du système d'erreur peut être représentée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1 = g_1(e_1, e_2) \\ \dot{e}_2 = g_2(e_1, e_2, e_3) \\ : \\ \dot{e}_n = g_n(e_1, e_2, \dots, e_n) + f'_{n+1}(t) - f_{n+1}(t) + u(t) \end{array} \right. \quad (2.27)$$

L'utilisation de l'algorithme du backstepping, nécessite que le système d'erreur soit décomposé en sous-systèmes tel que :

$$\Sigma_e = \left\{ \begin{array}{l} e_1 \\ (e_1, e_2) \\ : \\ (e_1, e_2, \dots, e_n) \end{array} \right. \quad (2.28)$$

L'algorithme récursif du backstepping consiste alors à définir pour chaque sous-système une fonction de Lyapunov positive V telle que :

$$\dot{V}_j(e_j, \mu_j, \rho_j) < 0 \quad (2.29)$$

μ_j, ρ_j sont les lois de commande de chaque sous système.

- Synchronisation par contrôle actif

Cette méthode, proposée par Bai et Lonngren, s'est avérée efficace pour synchroniser des systèmes chaotiques identiques et non identiques. Elle présente un niveau remarquable de simplicité de mise en œuvre [143].

Considérons le système non linéaire maître suivant :

$$\dot{x}_m = Ax_m + g(x_m) \quad (2.30)$$

où $x_m \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante et $g(x_m)$ est une fonction non linéaire.

Le système esclave est défini par :

$$\dot{x}_s = Bx_s + f(x_s) + \theta(t) \quad (2.31)$$

où $x_s \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante, $f(x_s)$ une fonction non linéaire et $\theta(t)$ est la fonction du contrôle actif.

L'erreur de synchronisation est définie par $e = x_s - x_m$, la dynamique de cette erreur est donnée par l'équation :

$$\dot{e} = \dot{x}_s - \dot{x}_m = Ce + G(x_m, x_s) + \theta(t) \quad (2.32)$$

Avec $C = \bar{B} - \bar{A}$ représente les parties communes des matrices des systèmes maître et esclave.

Les parties non communes sont regroupées dans la fonction $G(x_m, x_s)$ définie comme suit :

$$G(x_m, x_s) = f(x_s) - g(x_m) + (B - \bar{B})x_s - (A - \bar{A})x_m \quad (2.33)$$

Le contrôleur $\theta(t)$ est choisi de manière à ce que l'erreur de synchronisation converge vers 0, tout en éliminant les termes non linéaires et les parties non communes et assurer la stabilité.

Le contrôleur $\theta(t)$ est défini par :

$$\theta(t) = -G(x_m, x_s) + u(t) \quad (2.34)$$

où $u(t) = -Ke$ est un contrôleur linéaire et K est la matrice de gains. En remplaçant (2.34) et $u(t)$ dans (2.32), on obtient :

$$\dot{e} = (C - K)e \quad (2.35)$$

Si les valeurs propres de la matrice $(C - K)$ sont à parties réelles négatives, alors l'erreur de synchronisation converge exponentiellement vers 0, autrement dit, le système maître et esclave se synchronisent exponentiellement.

- Synchronisation par commande adaptative

Récemment, de nouveaux résultats expérimentaux ont démontré que la synchronisation du chaos peut être réalisée à l'aide de contrôleurs très simples et relatifs au système chaotique utilisé. En conséquence, de nombreuses études théoriques sur le contrôle et la synchronisation du chaos avec des lois de contrôle adaptatives ont été menées, et plusieurs schémas de synchronisation utilisant des contrôleurs adaptatifs ont été développés.

Nous baserons notre développement du principe de synchronisation par contrôle adaptatif sur le travail de R.W. Guo [144], qui a proposé un contrôleur adaptatif simple mais robuste pour la

synchronisation des systèmes chaotiques et hyper-chaotiques. Plus tard, la méthode de l'auteur a été utilisée pour synchroniser des systèmes chaotiques incertains ou à paramètres inconnus [145].

Considérons le système maître suivant :

$$\dot{x}_m = f(x_m) \quad (2.36)$$

$f(x_m)$ est un champs de vecteur non linéaire.

Supposons que la fonction vectorielle $f(\cdot)$ vérifie la condition donnée dans l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.1 $\forall x_m \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $\forall x_s \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, il existe $l > 0$ tel que :

$$|f(x_m) - f(x_s)| \leq l |x_m - x_s|$$

Le système esclave est donné par :

$$\dot{x}_s = f(x_s) + k(x_s - x_m) = f(x_s) + ke \quad (2.37)$$

$e = x_s - x_m$ représente l'erreur de synchronisation entre le système maître et esclave.

Le gain de commande adaptatif garantissant la convergence de l'erreur de synchronisation vers 0 est défini par :

$$\dot{k} = -\gamma \sum_{i=1}^n e_i^2 \quad (2.38)$$

Avec γ est une constante positive arbitraire.

- Synchronisation par la commande H_∞

Dans les systèmes physiques réels, les incertitudes du modèle, les perturbations, le bruit et le manque d'informations statistiques sur les signaux sont des phénomènes courants. Ces perturbations et incertitudes sont également inévitables dans la synchronisation des systèmes chaotiques. La réduction de leurs effets sur la synchronisation est un défi majeur [146]. Ceci a conduit un certain nombre de chercheurs dans ce domaine à s'intéresser à la commande H_∞ , qu'ils estiment plus robuste et moins sensible aux imprécisions du modèle.

- Synchronisation par commande floue

Au cours des dernières années, de nombreuses études sur la synchronisation des systèmes chaotiques basées sur les modèles de Takagi-Sugeno (TS) ont été menées. En effet, les modèles

décrits par SI-ET-ALORS peuvent être utilisés à la fois pour la modélisation et la synchronisation des systèmes chaotiques. Ceci est accompli en suivant les étapes énumérées ci-dessous [147] :

- Description des systèmes chaotiques maître et esclave par des modèles flous.
- Calcul de la loi de commande floue (SI-ET-ALORS).
- Vérifier que le comportement chaotique est préservé par le calcul des exposants de Lyapunov.

Une autre méthode intéressante de synchronisation qui a gagné en popularité ces dernières années et que nous utilisons dans cette thèse est la méthode basée sur l'utilisation d'observateurs d'état.

Dans ce qui suit, nous allons décrire en détail cette méthode de synchronisation.

2.5 Synchronisation à base d'observateurs

En 1997, Nijmeijer et Mareels [17] ont démontré que la synchronisation des systèmes chaotiques peut être ramené à un problème d'estimation d'état, où le système esclave est conçu à base d'un estimateur d'état, également appelé observateur, pour le système chaotique maître. Un observateur est un capteur logiciel qui fournit une estimation des variables d'état non mesurées d'un système. Autrement dit, il s'agit d'un système dynamique qui utilise les mesures disponibles (entrées et sorties) pour estimer les variables d'état qui ne peuvent pas être mesurées directement, soit parce qu'elles ne sont pas disponibles, soit en raison de contraintes économiques. La figure 2.9 illustre le principe de la synchronisation à base d'observateurs.

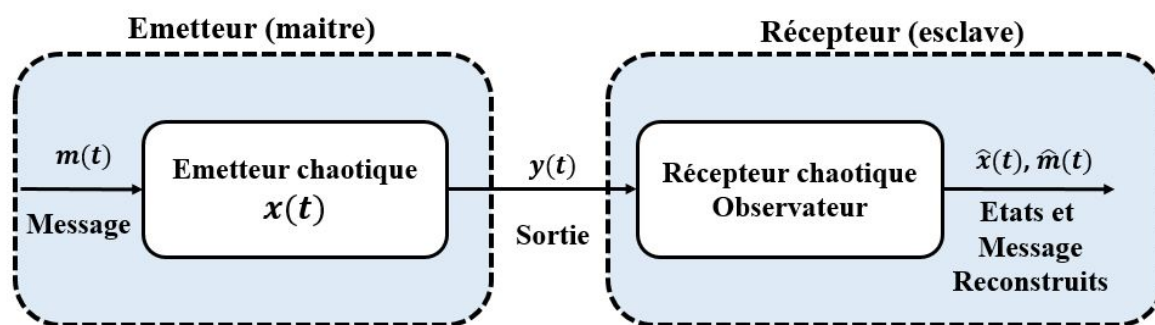


FIGURE 2.9: Principe de la synchronisation à base d'observateurs

2.5.1 Schémas de communication basés sur la synchronisation des systèmes chaotiques à base d'observateurs

Dans ce qui suit, on s'intéresse aux stratégies de transmission basées sur le principe de la synchronisation chaotique par observateurs. Le point commun constaté dans la majorité des techniques développées dans la littérature est l'utilisation de la configuration "maître-esclave", dans laquelle le "système maître" chaotique génère le signal chiffré transmis via le canal de communication à un système récepteur "système esclave" dans le but de se synchroniser avec le système maître et de restaurer le signal d'information.

Les méthodes communément utilisées sont : le masquage chaotique [148], la modulation paramétrique [148, 149], la commutation chaotique [150], le cryptage par injection [151], la transmission à deux voies [119] et le cryptage combiné [152].

- Le masquage chaotique

Le masquage chaotique [148] est la technique de transmission la plus simple et la plus élémentaire. Le signal à transmettre $m(t)$ est ajouté au signal porteur chaotique $y(t)$ généré par le système émetteur puis le signal $s(t)$ est transmis au récepteur à travers le canal de transmission vers le système récepteur qui se synchronise identiquement avec le système maître. Le message est reconstruit après la soustraction entre le signal transmis et le signal porteur estimé. Le schéma représentant cette méthode est donné par la figure 2.10.

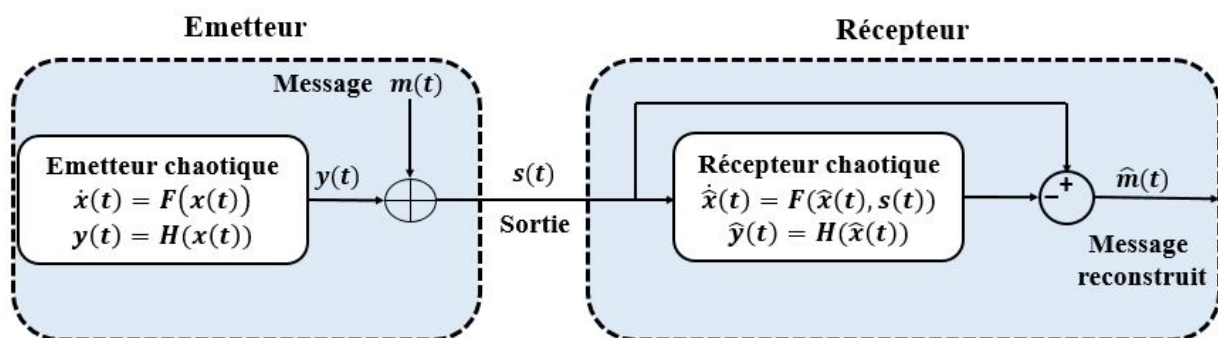


FIGURE 2.10: Schéma représentatif de la technique de masquage chaotique

Remarque 2.5 *L'ajout de $m(t)$ à la sortie $y(t)$ de l'émetteur peut provoquer une dégradation de la qualité de la synchronisation au niveau du récepteur puisque le signal de commande n'est pas la sortie de l'émetteur.*

Par conséquent, l'amplitude de $m(t)$ doit être très petite par rapport au signal chaotique $y(t)$.

- Modulation paramétrique

Le principe de modulation paramétrique consiste à utiliser le signal d'information, généralement de nature binaire, pour moduler l'un des paramètres du système chaotique émetteur. Le système récepteur se synchronise d'une manière adaptative avec l'émetteur chaotique et le signal d'information est restauré par l'intermédiaire d'une loi d'adaptation. Cette technique peut être interprétée comme étant un problème d'estimation conjointe des états et des paramètres inconnus. Le système récepteur est conçu à l'aide d'un observateur adaptatif pour le système émetteur, de telle sorte que l'erreur de synchronisation s'approche de zéro, récupérant ainsi le message transmis (voir figure 2.11).

Avec β : étant le paramètre de modulation.

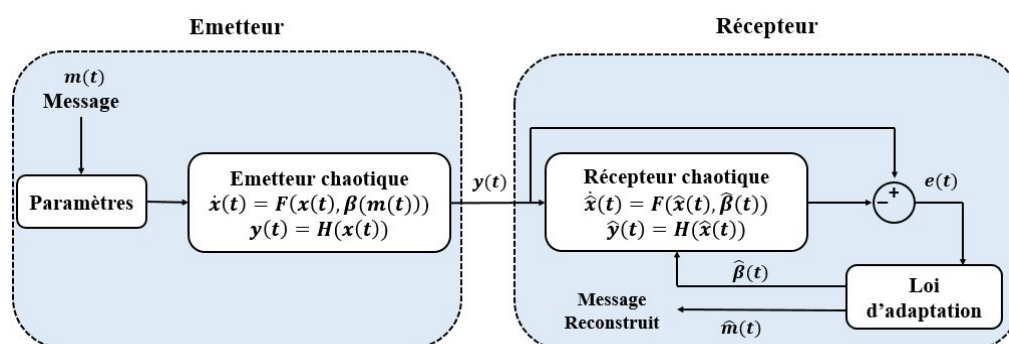


FIGURE 2.11: Schéma représentatif de la méthode par modulation paramétrique.

- Commutation chaotique

Le principe de la commutation chaotique est qu'au niveau de l'émetteur, on dispose de deux oscillateurs générant les signaux chaotiques $y_0(t)$ et $y_1(t)$. Ces deux signaux sont générés par les deux systèmes chaotiques qui ont des paramètres légèrement différents mais possèdent la même structure. Au niveau du récepteur, le système chaotique est réglé sur le paramètre correspondant à 0 ou 1 et ainsi la synchronisation sera réalisée si le bit correct est transmis sinon il n'y a pas de synchronisation, le signal d'information est reconstruit à la fin du processus de détection comme illustré par la figure 2.12.

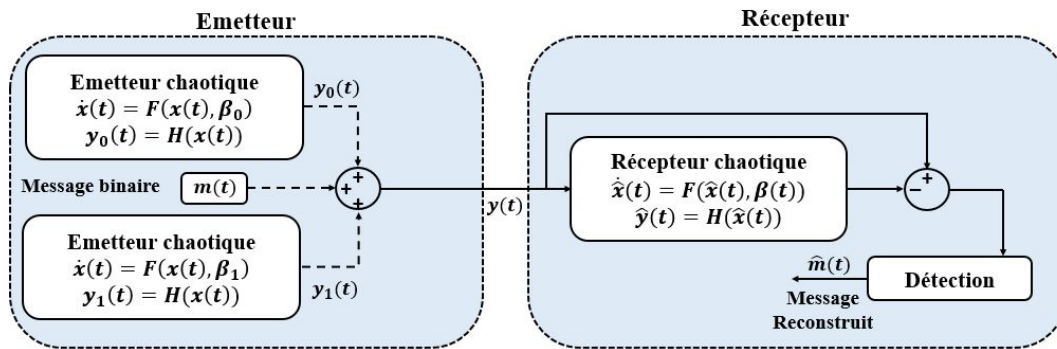


FIGURE 2.12: Schéma représentatif de la technique par commutation chaotique.

- Cryptage par inclusion

Cette technique consiste à injecter le message dans la dynamique de l'émetteur, sans toutefois réaliser une modulation paramétrique. Le message à transmettre doit être de nature binaire ou analogique, et la puissance de ce dernier doit être suffisamment petite pour ne pas détériorer le comportement chaotique du système. La reconstruction de l'information se fait par l'opération inverse une fois la synchronisation est réalisée.

Cette technique présente un niveau de sécurité plus élevé par rapport aux techniques précédentes puisque le signal d'information est masqué dans la dynamique du système maître et le signal chaotique disponible dans le canal public ne porte pas l'information de manière directe comme dans le cas de la technique de masquage chaotique. La figure 2.13 illustre la technique par inclusion.

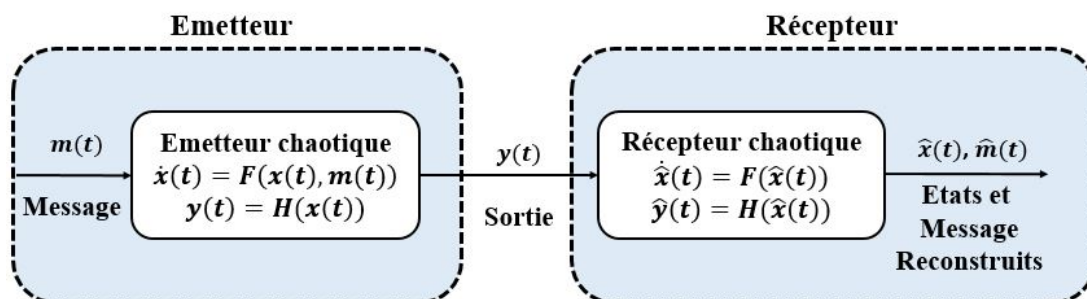


FIGURE 2.13: Schéma représentatif de la technique par inclusion.

- Transmission à deux voies

Le principe est de séparer les tâches de synchronisation et de cryptage en utilisant deux voies de communication [119]. L'émetteur chaotique génère un signal chaotique $y(t)$ transmis dans un premier canal de communication (Canal 1) vers le récepteur qui doit se synchroniser avec le système maître. L'émetteur génère également un autre signal chaotique $x(t)$ utilisé par une fonction de cryptage qui produit le signal du texte crypté $C(t)$ transmis dans un deuxième canal de transmission (Canal 2).

Grâce de cette indépendance entre les tâches de synchronisation et de cryptage, il n'y a pas de contraintes imposées sur l'amplitude du signal d'information puisque dans ce cas, ce dernier n'agit ni sur la dynamique de l'émetteur chaotique ni sur le signal transmis $y(t)$ contrairement aux techniques précédentes.

Cependant, cette technique présente des mauvaises performances en présence du bruit de transmission puisque l'effet du bruit est doublé car il agit à la fois sur le signal transmis $y(t)$ et sur le signal du texte chiffré $C(t)$. La figure 2.14 illustre le principe de la transmission à deux voies.

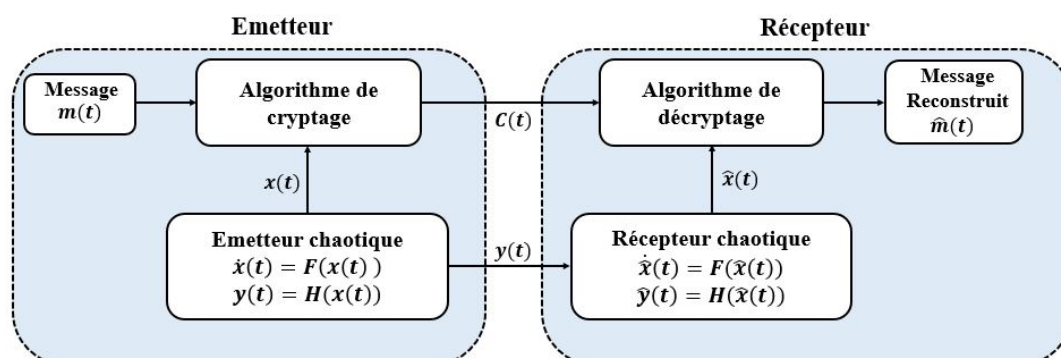


FIGURE 2.14: Schéma représentatif de la technique de transmission à deux voies

- Cryptage combiné

Le principe de cette méthode repose à la fois sur la cryptographie classique (chiffrement) et sur le principe de synchronisation des systèmes chaotiques. La fonction de cryptage utilise le signal d'information $m(t)$ et un signal chaotique de cryptage $x(t)$ généré par l'émetteur chaotique pour produire le signal crypté $C(t)$ réinjecté dans la dynamique de l'émetteur chaotique.

Au niveau de la réception, le système esclave se synchronise avec le système maître et génère les

signaux $\hat{C}(t)$ et $\hat{x}(t)$ qui représentent les estimations respectives des signaux $C(t)$ et $x(t)$. Enfin, l'algorithme de décryptage utilise les signaux obtenus pour restaurer le signal d'information en générant ainsi le signal $\hat{m}(t)$. La figure 2.15 illustre le principe de la transmission par cryptage combiné.

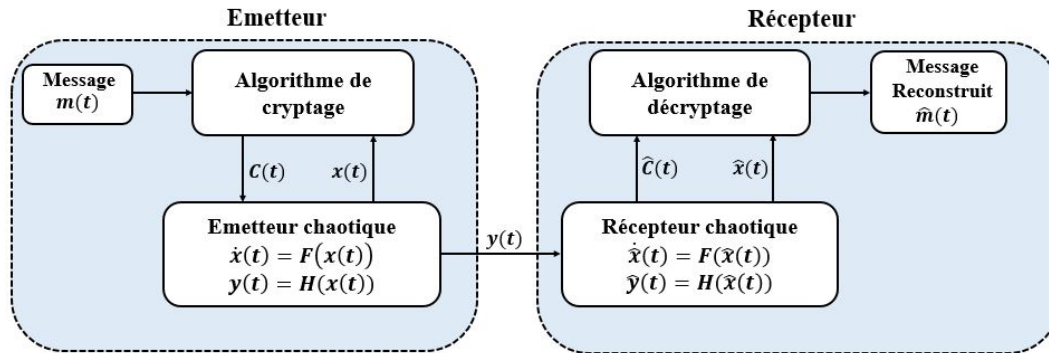


FIGURE 2.15: Schéma représentatif de la technique de cryptage combiné

2.6 Conclusion

Durant ce chapitre, nous avons abordé la notion du chaos et avons donné quelques définitions des systèmes chaotiques, nous avons aussi exposé ses caractéristiques, telles que sa très grande sensibilité aux conditions initiales et son aspect aléatoire, l'attracteur étrange, etc., qui ont fait du chaos un phénomène très intéressant pour cacher les signaux d'informations afin de les transmettre d'une manière sécurisée dans des schémas de communication privée.

Par la suite, la notion de synchronisation a été abordée. En effet, ce phénomène permet à deux systèmes chaotiques, ayant la même structure mais forcément des conditions initiales différentes, de reproduire le même signal chaotique. Ce qui rend possible, dans les schémas cryptographiques, la récupération de l'information chiffrée.

Dans un premier lieu, nous avons cité quelques types de synchronisation. Ensuite, nous avons présenté les différentes méthodes de communication basées sur la synchronisation des systèmes chaotiques, en particulier la synchronisation à base d'observateurs.

Chapitre 3

Synchronisation chaotique avec et sans retard dans le canal de communication

3.1 Introduction

L'application de la théorie du chaos au cryptage des données suscite de plus en plus l'attention des chercheurs [153]. En effet, les systèmes chaotiques présentent des caractéristiques particulières et avantageuses, à savoir une grande sensibilité aux conditions initiales et aux paramètres du système, une évolution apparemment aléatoire, un haut niveau de sécurité et une simplicité de mise en œuvre.

L'une des configurations de synchronisation des systèmes chaotiques les plus utilisées est la configuration maître-esclave, où un émetteur chaotique (le système maître) génère un signal à sa sortie qui est transmis via le canal de communication à un récepteur (le système esclave) qui a pour objectif de se synchroniser avec l'émetteur et de restaurer le signal d'information.

Afin d'assurer la synchronisation des systèmes chaotiques (du système maître et esclave), plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature. Nous citons les méthodes à base de commandes [11, 12, 146] et les méthodes à base d'observateurs [154, 155].

La technique des modes glissants est largement utilisée pour la commande et l'observation des systèmes en raison de ses nombreux avantages tels que la précision, la rapidité, la convergence en temps fini et la robustesse vis à vis des incertitudes et le rejet des perturbations. Ces performances sont obtenues par l'injection d'un terme discontinu utilisant la fonction *sign*. On distingue les modes glissants classiques du premier ordre et les modes glissant d'ordre supérieur.

L'inconvénient majeur des techniques du mode glissant du premier ordre est le phénomène de chattering introduit par le terme discontinu. Ce problème rencontré également dans la conception des observateurs à mode glissant est encore plus nuisible dans le problème de conception des régulateurs. Des solutions ont été introduites pour atténuer ce phénomène, telles que le filtrage des oscillations à haute fréquence, l'utilisation de fonctions sigmoïdes au lieu de la fonction *sign*, la technique de la couche limite [156], etc. Mais, ces solutions présentent également certains inconvénients, principalement le retard et la dégradation de la précision. Afin de surmonter ces inconvénients tout en conservant des performances acceptables, des techniques à modes glissants d'ordre supérieur ont été introduites à la fois pour la commande et l'observation [157]. Le principal avantage des modes glissants d'ordre supérieur est qu'ils permettent l'atténuation voir l'élimination du phénomène de chattering sans avoir recours à l'utilisation d'un filtre.

Un autre inconvénient dû à la technique classique des modes glissants du premier ordre est qu'elle exige que le degré relatif entre l'entrée du système et sa sortie soit égal à 1. Un mode glissant d'ordre n est alors développé pour les systèmes ayant un degré relatif égal à n . L'algorithme du Super-Twisting permet d'appliquer les techniques à modes glissants du second ordre à des systèmes ayant un degré relatif égal à 1 évitant ainsi les inconvénients du mode glissant classique. L'utilisation des techniques à modes glissant d'ordre supérieur, en particulier, l'algorithme du Super-Twisting permet d'améliorer la robustesse vis à vis des incertitudes de modélisation et des perturbations, tout en atténuant le phénomène de chattering.

L'un des problèmes majeurs de la configuration maître-esclave étant l'apparition du retard lors de la transmission via le canal de communication public (retard sur la sortie). Ce retard est généralement dû à l'espacement géographique du système maître et esclave. Le retard reflète alors le délai de transmission des informations échangées entre le maître et l'esclave. Ce problème ayant des répercussions sur la stabilité, la convergence, etc. Par conséquent, il est souhaitable que les méthodes de synchronisation tiennent compte de cette contrainte.

Ainsi, le problème de la conception d'observateurs non linéaires, en présence de retard sur la sortie, a pris de l'ampleur ces dernières années. Les techniques d'immersion et d'invariance ont été étudiées pour concevoir des observateurs pour des systèmes non linéaires lorsque la sortie est soumise à un retard constant [34]. Un observateur à grand gain sous mesures retardées est développé dans [35]. Un observateur pour les systèmes non linéaires lipschitziens soumis à un retard variable dans le temps est proposé dans [36]. Le premier travail traitant de la conception

d'observateurs non linéaires à sortie retardée est présenté dans [37] pour une classe de systèmes uniformément observables. Les auteurs proposent un "observateur en chaîne" composé d'observateurs successifs en cascade. Chaque observateur considère qu'il y a eu un retard à chaque instant retardé. Cette idée a été étendue avec d'autres développements dans [38–40]. La conception d'observateur-prédicteur en cascade est une approche efficace pour compenser le problème de retard dans les systèmes non linéaires [41–43]. Cette approche est composée de deux étapes. Dans la première étape, un observateur est conçu pour estimer l'état retardé. L'observateur est alimenté par les mesures retardées pour obtenir l'estimation de l'état retardé. Cet observateur fonctionne comme dans une situation de retard libre. Dans la deuxième étape, le prédicteur est utilisé pour compenser le retard.

La conception d'observateurs non linéaires pour la synchronisation de systèmes chaotiques, en présence d'un retard en sortie, a été étudiée dans [158–162]. Cependant, dans la plupart des méthodes de synchronisation proposées dans la littérature, les incertitudes et les perturbations externes ne sont pas prises en considération.

Par ailleurs, les systèmes chaotiques étant des systèmes non linéaires, leur représentation sont parfois très complexes et l'estimation d'état devient alors plus difficile. La structure Takagi-Sugeno (TS) proposée dans [163] représente un meilleur modèle en terme de complexité mathématique. Ainsi, les comportements non linéaires peuvent être décrits par des modèles simples. La structure du modèle de Takagi-Sugeno, parfois appelée "structure multimodèle", est basée sur la décomposition du système en plusieurs zones et le comportement du système dans chaque zone est représenté par un modèle linéaire local. Avec un choix approprié de la fonction de pondération, les modèles locaux peuvent alors représenter efficacement le comportement global du système. Ces fonctions non linéaires vérifient la propriété de la somme convexe [164]. Cette représentation importante permet l'extension de certains outils d'analyse et de conception développés pour les systèmes linéaires aux systèmes non linéaires, ce qui constitue l'avantage principal de la structure Takagi-Sugeno pour l'étude des systèmes non linéaires.

Dans ce chapitre, nous synthétisons deux méthodes de synchronisation des systèmes chaotiques. La première méthode consiste en la synchronisation de systèmes chaotiques non linéaires utilisant la représentation Takagi-Sugeno avec des variables de prémisses non mesurables. Un observateur proportionnel intégral (PI) à entrée inconnue est conçu pour atteindre l'objectif de synchronisation. L'observateur PI proposé estime à la fois les états et l'entrée inconnue. L'entrée

inconnue est un message audio à transmettre. La convergence de l'observateur PI est établie dans un cadre de formulation LMI.

La deuxième méthode considère la synchronisation des systèmes chaotiques non linéaires soumis à un retard dans le canal de transmission (sortie retardée). Par rapport aux schémas de synchronisation chaotique existants en présence d'un retard de transmission, l'approche proposée combine l'observateur à mode glissant du second ordre basé sur l'Algorithme du Super-Twisting (STA) qui sert à l'estimation des états retardés et de la perturbation totale retardée, l'ensemble de ces estimés sont ensuite introduits dans un prédicteur d'état mis en chaîne avec l'observateur, ce qui permet de compenser l'effet du retard induit par le canal de transmission et donc de restituer les états du système à l'instant présent.

Dans une première étape, nous synthétisons un schéma de synchronisation d'un système chaotique de Takagi-Sugeno à base d'un observateur proportionnel intégral avec application à la transmission sécurisée d'un message audio. La stabilité et la convergence de l'observateur sont analysées. Les résultats théoriques sont illustrés par des simulations vérifiant ainsi la démarche entreprise. Dans la deuxième étape, nous synthétisons une méthode de synchronisation à base d'un observateur à mode glissant d'ordre deux d'un système chaotique en présence du retard dans le canal de transmission et de perturbations. Nous allons d'abord synthétiser l'observateur à mode glissant qui permet d'estimer l'état retardé et la perturbation retardée. Ensuite, nous synthétisons le prédicteur qui permet de compenser le retard et d'estimer l'état à l'instant présent, et nous analysons la stabilité du prédicteur. A la fin, nous donnons les résultats de simulation obtenus.

Les résultats théoriques obtenus dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication et d'une communication internationale [165, 166].

3.2 Synchronisation d'un système TS chaotique sans retard dans le canal de communication

Dans le schéma de synchronisation proposé dans cette partie, le système non linéaire chaotique est représenté par un modèle de Takagi-Sugeno (TS) avec des variables de prémisses non mesurables. Un observateur Proportionnel-Intégral (PI) à entrée inconnue est conçu pour atteindre l'objectif de synchronisation. Une application à la transmission sécurisée d'un message

audio est considérée. Le schéma proposé est montré par la figure 3.1.

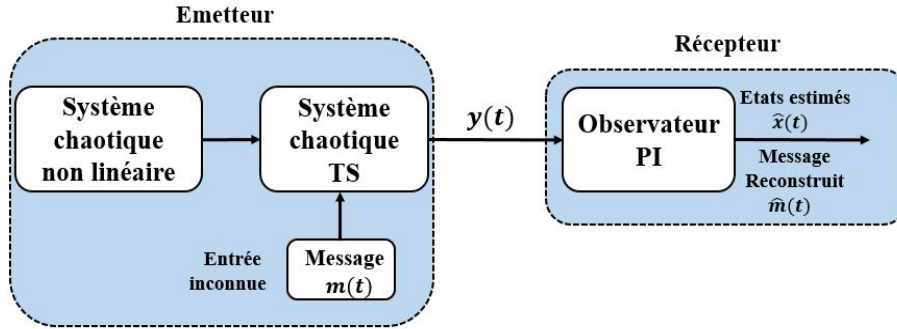


FIGURE 3.1: Schéma de synchronisation proposé.

3.2.1 Structure du modèle TS

Les modèles TS ont été largement étudiés dans les schémas de contrôle et de synchronisation [167,168]. En raison de leur structure simple avec une dynamique locale, la théorie conventionnelle des systèmes linéaires peut être facilement appliquée à l'analyse et à la synthèse de ces systèmes. Chaque sous-modèle contribue à cette représentation globale suivant une fonction de pondération $\mu_i(\xi(t))$ à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$.

La structure du modèle TS est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i m(t)) \\ y(t) = Cx(t) + Gm(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées, $m(t) \in \mathbb{R}^s$ est le vecteur des entrées inconnues, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ représente le vecteur de sortie. $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la matrice d'influence de l'entrée, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ représente la matrice de sortie ou d'observation et $G \in \mathbb{R}^{p \times s}$ est la matrice d'influence de l'entrée inconnue.

Enfin, les quantités $\mu_i(\xi(t))$ représentent les fonctions d'activation qui dépendent de la variable $\xi(t)$ dite variable de prémisse ou de décision qui peut être une variable mesurable (entrée ou sortie du système) ou une variable non mesurable (état du système); ces fonctions ont les propriétés suivantes [169] :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\} \end{cases} \quad (3.2)$$

Avec r le nombre de modèle.

Considérons le système chaotique non linéaire (maître) représenté par le modèle TS suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i m(t)) \\ y(t) = Cx(t) + Gm(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

Hypothèse 3.1 *Nous supposons que l'amplitude de $m(t)$ est faible pour que le comportement chaotique du système ne soit pas altéré. De plus, on suppose que la dérivée de $m(t)$ est également très petite.*

Hypothèse 3.2 *Les signaux $u(t)$ et $x(t)$ sont également bornés.*

Par la suite, on suppose que le nombre d'entrées inconnues est inférieur au nombre de sorties mesurées ($s < p$). Le modèle TS à variables de décision non mesurables (3.3) peut se ramener à un modèle TS perturbé à variables de décision mesurables comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i m(t) + w(t)) \\ y(t) = Cx(t) + Gm(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

où $w(t)$ est le terme de perturbation donné par :

$$w(t) = \sum_{i=1}^r (\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)))(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i m(t)) \quad (3.5)$$

Le modèle TS (3.4) peut être écrit sous la forme augmentée suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}_a(t))(\bar{A}_i x_a(t) + \bar{B}_i u(t) + \Gamma w(t)) \\ y(t) = \bar{C} x_a(t) \end{cases} \quad (3.6)$$

Avec :

$$\bar{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & E_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \bar{B}_i = \begin{pmatrix} B_i \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{C} = \begin{pmatrix} C & G \end{pmatrix}; \Gamma = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}; x_a(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ m(t) \end{pmatrix}$$

3.2.2 Synthèse de l'observateur PI

L'observateur proposé pour le système (3.4) est donné par les équations suivantes [170] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + E_i \hat{m}(t) + L_{Pi}(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \dot{\hat{m}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t))(L_{Ii}(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + G\hat{m}(t) \end{cases} \quad (3.7)$$

Soit : $\hat{x}_a(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{m}(t) \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}_a(t)) (\bar{A}_i \hat{x}_a(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{L}_i (y(t) - \bar{C} \hat{x}_a(t))) \\ \hat{y}(t) = \bar{C} \hat{x}_a(t) \end{cases} \quad (3.8)$$

où \bar{L}_i sont les gains de l'observateur PI, avec :

$$\bar{L}_i = \begin{pmatrix} L_{Pi} \\ L_{Li} \end{pmatrix}$$

L'observateur proposé (3.7) permet non seulement l'estimation des états du modèle TS (3.4) soumis à une entrée inconnue $m(t)$, mais aussi la reconstruction de cette entrée en présence de variables de décision non mesurables. Considérons l'erreur d'estimation d'état augmentée :

$$e_a(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t) \quad (3.9)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état (3.9) est représentée par :

$$\begin{aligned} \dot{e}_a(t) = & \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}_a(t)) (\bar{A}_i x_a(t) + \bar{B}_i u(t) + \Gamma w(t)) \\ & - \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}_a(t)) (\bar{A}_i \hat{x}_a(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{L}_i (y(t) - \bar{C} \hat{x}_a(t))) \end{aligned} \quad (3.10)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état devient :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}_a(t)) ((\bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C}) e_a(t) + \Gamma w(t)) \quad (3.11)$$

La convergence de l'erreur d'estimation d'état $e_a(t)$ est étudiée en fonction du terme $w(t)$ défini par (3.5). On suppose que le terme $w(t)$ satisfait la condition suivante :

$$|w(t)| \leq \eta |e_a(t)| \quad (3.12)$$

où η est une constante positive. Les conditions de convergence de l'observateur PI (3.8) sont données dans le théorème suivant :

Theorem 3.1 *L'erreur d'estimation d'état entre l'observateur PI (3.8) et le système (3.6) converge asymptotiquement vers zéro, s'il existe une matrice symétrique et définie positive $P = P^T > 0$, des matrices \bar{M}_i et un scalaire positif λ , telles que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout $i = 1, \dots, r$:*

$$\begin{bmatrix} P\bar{A}_i + \bar{A}_i^T P - \bar{M}_i \bar{C} - \bar{C}^T \bar{M}_i^T + \lambda \eta^2 I & P\Gamma \\ \Gamma^T P & -\lambda I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.13)$$

Les gains de l'observateur sont donnés par :

$$\bar{L}_i = P^{-1}\bar{M}_i$$

Démonstration 3.1 *Il suffit de considérer une fonction de Lyapunov quadratique :*

$$V(t) = e_a^T(t)Pe_a(t) \quad (3.14)$$

où $P = P^T > 0$.

La dérivée de la fonction de Lyapunov (3.14) est donnée par :

$$\dot{V}(t) = \dot{e}_a^T(t)Pe_a(t) + e_a^T(t)P\dot{e}_a(t) \quad (3.15)$$

En utilisant (3.11), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}_a(t)) (e_a^T(t)(\phi_i^T P + P\phi_i) e_a(t) \\ & + e_a^T(t)P\Gamma w(t) + w^T(t)\Gamma^T P e_a(t)) \end{aligned} \quad (3.16)$$

où $\phi_i = \bar{A}_i - \bar{L}_i\bar{C}$.

Alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}_a(t)) \\ & (e_a^T(t)((\bar{A}_i - \bar{L}_i\bar{C})^T P + P(\bar{A}_i - \bar{L}_i\bar{C}))e_a(t) + e_a^T(t)P\Gamma w(t) + w^T(t)\Gamma^T P e_a(t)) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Lemme 3.1 [171] *Soit deux matrices X et Y de dimensions appropriées, alors la propriété suivante est vérifiée :*

$$X^T Y + Y^T X \leq \lambda X^T X + \lambda^{-1} Y^T Y \quad \lambda > 0. \quad (3.18)$$

En utilisant le lemme 3.1 ainsi que (3.12), on obtient :

$$\begin{aligned} e_a^T P\Gamma w + w^T \Gamma^T P e_a & \leq \lambda w^T w + \lambda^{-1} e_a^T P\Gamma \Gamma^T P e_a \\ & \leq \lambda \eta^2 e_a^T e_a + \lambda^{-1} e_a^T P\Gamma \Gamma^T P e_a \end{aligned} \quad (3.19)$$

En substituant (3.19) dans la dérivée de la fonction de Lyapunov (3.17), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}_a(t)) e_a^T(t)((\bar{A}_i - \bar{L}_i\bar{C})^T P + P(\bar{A}_i - \bar{L}_i\bar{C})) \\ & + \lambda \eta^2 I + \lambda^{-1} P\Gamma \Gamma^T P e_a(t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Avec $\bar{M}_i = P\bar{L}_i$.

Puisque les fonctions d'activation vérifient les conditions (3.2), la dérivée de la fonction de Lyapunov est négative si :

$$P\bar{A}_i + \bar{A}_i^T P - \bar{M}_i \bar{C} - \bar{C}^T \bar{M}_i^T + \lambda \eta^2 I + \lambda^{-1} P \Gamma \Gamma^T P \leq 0 \quad (3.21)$$

En utilisant le complément de Schur [172], on obtient l'inégalité matricielle linéaire (LMI) suivante :

$$\begin{bmatrix} P\bar{A}_i + \bar{A}_i^T P - \bar{M}_i \bar{C} - \bar{C}^T \bar{M}_i^T + \lambda \eta^2 I & P\Gamma \\ \Gamma^T P & -\lambda I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.22)$$

La résolution de la LMI permet d'obtenir les gains de l'observateur PI,

$$\bar{L}_i = P^{-1} \bar{M}_i$$

ainsi que le scalaire λ .

3.3 Application à la synchronisation des systèmes chaotiques

Considérons le système chaotique de Rössler représenté par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) - x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + ax_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t)x_3(t) - cx_3(t) + bu(t) \end{cases} \quad (3.23)$$

Avec $u(t) = 1$, les paramètres du système sont $a = 0.398$, $b = 2$ et $c = 4$.

Ce système chaotique est introduit afin de montrer l'efficacité de l'observateur PI à entrée inconnue à la reconstruction simultanée des états et de l'entrée inconnue (message audio) utilisée dans le schéma de communication sécurisé.

La variable de décision non mesurable est : $x_3(t) \in [x_{3min} \quad x_{3max}]$, le système de Rössler peut être représenté par le modèle de Takagi-Sugeno [173], donné sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(x_3(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i m(t)) \\ y(t) = Cx(t) + Gm(t) \end{cases} \quad (3.24)$$

où : $x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$ est le vecteur d'état et $m(t)$ est l'entrée inconnue (message audio).

$$\mu_1(x_3(t)) = \frac{x_{3max} - x_3(t)}{x_{3max} - x_{3min}}; \quad \mu_2(x_3(t)) = \frac{x_3(t) - x_{3min}}{x_{3max} - x_{3min}} \quad \text{avec : } x_{3max} = 10; \quad x_{3min} = -10.$$

Les conditions initiales du système sont : $x(0) = [0, 1; 0, 1; 0, 1]^T$, les condition initiales de l'observateur sont : $\hat{x}(0) = [-0, 1; -0, 1; -0, 1]^T$. Les paramètres du modèle TS et de l'observateur sont donnés comme suit :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0.398 & 0 \\ -10 & 0 & -4 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0.398 & 0 \\ 10 & 0 & -4 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 20 \\ 28 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 14.4169 & 1.1924 & 1.2935 & -4.5945 \\ 1.1924 & 14.9491 & -0.7427 & 0.7600 \\ 1.2935 & -0.7427 & 0.2146 & -0.4766 \\ -4.5945 & 0.7600 & -0.4766 & 1.5866 \end{bmatrix}$$

$$L_{P1} = \begin{bmatrix} 30.8179 & 10.2149 \\ 8.5508 & 13.5825 \\ 33.7284 & 182.3731 \end{bmatrix}, L_{P2} = 10^3 * \begin{bmatrix} 2.7003 & 4.1283 \\ -0.6436 & -0.9701 \\ -0.3318 & -0.2588 \end{bmatrix}$$

$$L_{I1} = \begin{bmatrix} 77.501 & 118.5119 \end{bmatrix}, L_{I2} = 10^4 * \begin{bmatrix} 0.8166 & 1.2629 \end{bmatrix}, \lambda = 0.6957.$$

Remarque 3.2 Dans cet exemple, nous avons considéré $G = 0$. Il faut néanmoins noter que les résultats théoriques présentés sont également valables pour $G = 0$.

- Résultats de simulation

L'attracteur chaotique pour le système de Rössler est donné par la figure 3.2, avec et sans l'entrée inconnue.

La figure 3.3 représente les états du système de Rössler ainsi que leurs estimés obtenus par l'observateur PI. Les erreurs d'estimation sont tracées sur la figure 3.5, ces erreurs convergent vers zéro, nous pouvons ainsi noter que l'observateur proposé donne une bonne estimation des états. L'entrée inconnue (message audio) et son estimée sont données par la figure 3.4, l'erreur d'estimation du message est représentée sur la figure 3.6. Nous constatons que cette erreur tend vers zéro, et donc nous pouvons conclure la bonne restitution du message audio.

Les résultats de simulation montrent l'efficacité de l'observateur à entrée inconnue PI pour l'estimation simultanée des états et de l'entrée inconnue (message audio).

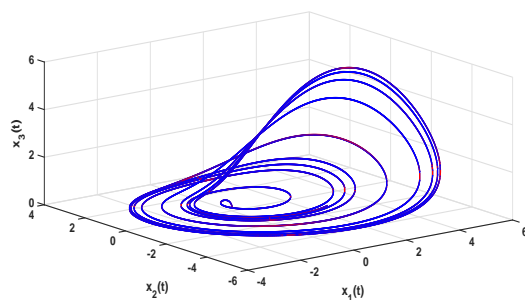


FIGURE 3.2: Attracteur chaotique de Rössler sans entrée inconnue (bleu), avec en (rouge).

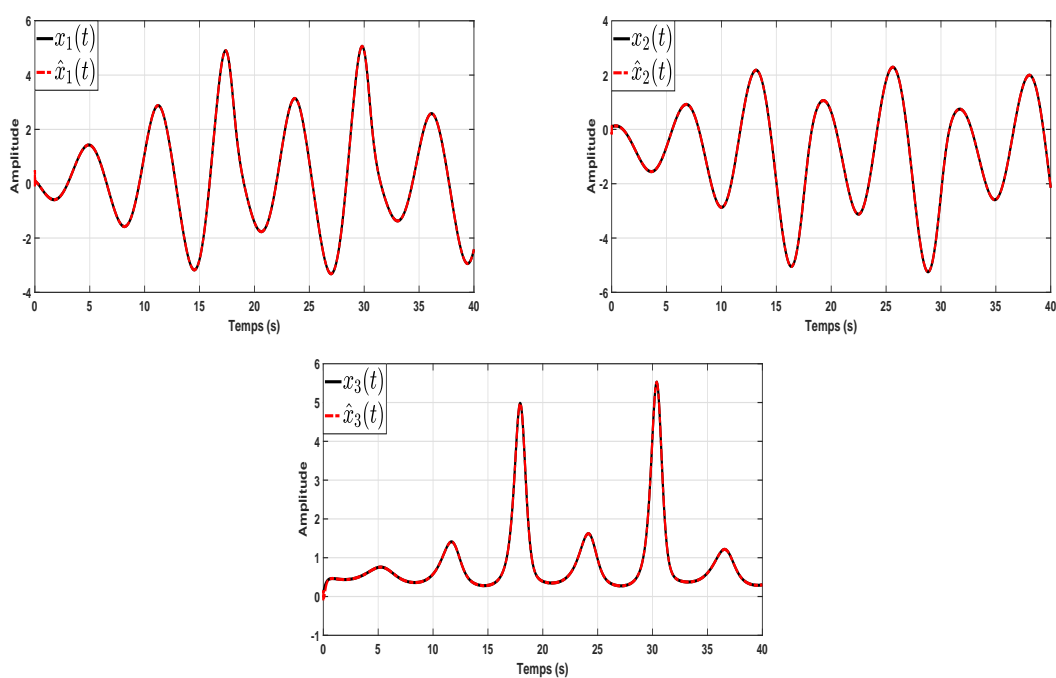


FIGURE 3.3: États réels (en noir), états estimés (en rouge).

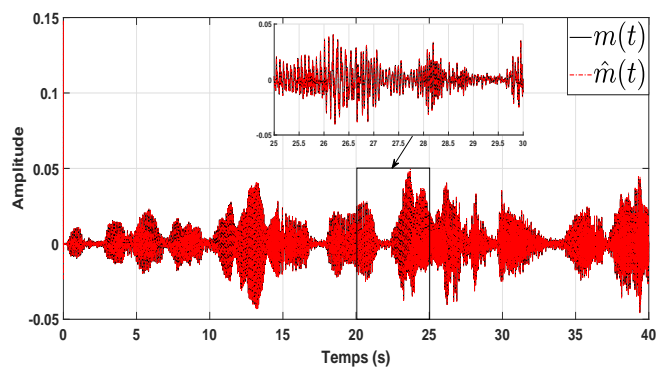


FIGURE 3.4: Entrée inconnue (en noir), entrée inconnue estimée (en rouge).

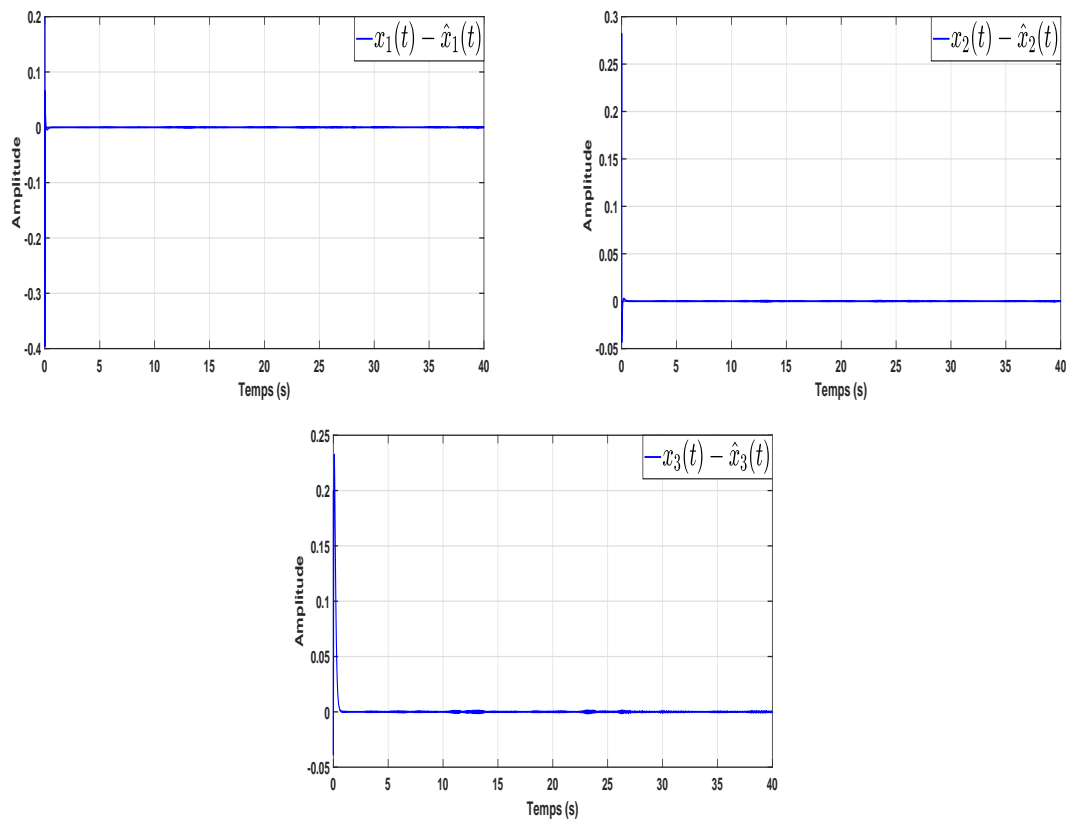


FIGURE 3.5: Erreurs entre les états et leurs estimations.

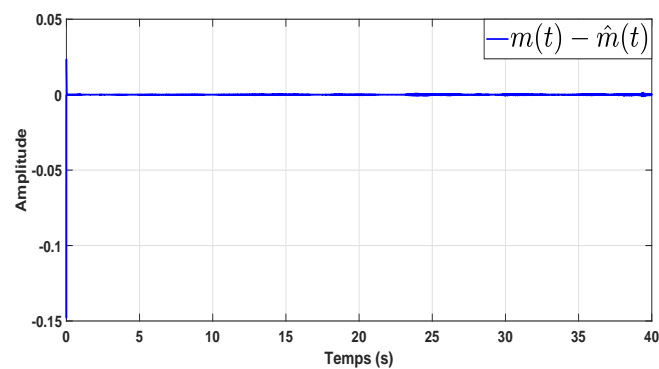


FIGURE 3.6: Erreur entre l'entrée inconnue (message audio) et son estimation.

3.4 Synchronisation chaotique avec retard dans le canal de communication (mesure retardée)

Dans cette partie, nous proposons une approche pour la synchronisation de systèmes chaotiques non linéaires soumis à un retard dans le canal de transmission (retard sur la mesure) et aux perturbations (incertitudes paramétriques et perturbations externes). L'approche proposée combine l'observateur à mode glissant d'ordre deux basé sur l'algorithme de Super-Twisting (STA) qui sert à l'estimation des états retardés et de la perturbation totale (incertitudes paramétriques et perturbations externes) retardée. L'ensemble de ces estimés sont ensuite injectés dans le prédicteur d'état mis en cascade avec l'observateur, ce qui permet de compenser l'effet du retard induit par le canal de transmission et donc de restituer les états du système à l'instant présent. Le schéma proposé est montré par la figure 3.7

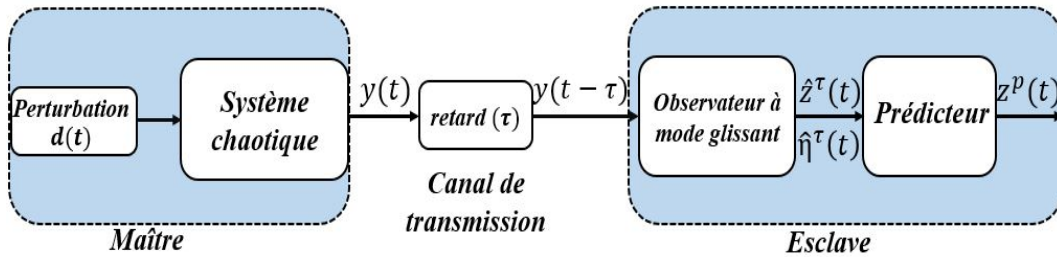


FIGURE 3.7: Schéma observateur-prédicteur.

3.4.1 Système maître

Considérons le système chaotique non linéaire à sortie retardée suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), d(t)) \\ y^\tau(t) = h(x(t - \tau)) \end{cases} \quad (3.25)$$

Avec $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots, \ x_n(t)]^T \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état de dimension n , $y^\tau(t) \in \mathbb{R}^p$ représente le vecteur de sortie affectée par le retard de sortie τ et $d(t) \in \mathbb{R}^l$ représente le signal de perturbation externe supposé inconnu.

Si le système (3.25) est uniformément localement observable, donc il existe un changement de coordonnées local $z(t) = \Gamma(x(t))$ tel que le système non linéaire (3.25) peut se réécrire sous la forme triangulaire dite forme d'observabilité.

Soit le système (3.25) sous la forme canonique observable suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + \tilde{\Theta}(z(t)) + B\eta(t) \\ y^r(t) = Cz(t - \tau) \end{cases} \quad (3.26)$$

Avec les matrices du système (3.26) sont données comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & : \\ : & : & 0 & \cdots & : \\ : & : & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Le vecteur non linéaire $\tilde{\Theta}(z(t))$ est décrit comme suit :

$$\tilde{\Theta}(z(t)) = \begin{bmatrix} \Theta_1(z_1) \\ \Theta_2(z_1, z_2) \\ \vdots \\ \Theta_{n-1}(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

où : $\eta(t) = \Theta_n(z_1, z_2, \dots, z_n) + d(t)$ représente la perturbation totale du système, avec $\Theta_n(z_1, z_2, \dots, z_n)$ sont les incertitudes du système, $d(t)$ est la perturbation externe, qui est considérée inconnue.

3.4.2 Synthèse du système esclave

Lors de la transmission du signal de "commande" du système maître vers le système esclave, le retard est un phénomène qui peut subvenir et affecter ainsi le signal de communication. Ce retard engendre alors une instabilité, un décalage dans les informations, etc.

Afin de répondre à cette problématique inhérente aux systèmes en réseaux, nous proposons une stratégie en deux temps pour la synthèse du systèmes esclave, et ainsi compenser l'effet indésirable du retard.

Le système esclave proposé est composé d'un observateur à mode glissant d'ordre deux basé sur STA et d'un prédicteur mis en cascade.

L'observateur à mode glissant du second ordre permet d'estimer les états retardés du système $\hat{z}(t - \tau)$, ainsi que l'estimée $\hat{\eta}(t - \tau)$ de la perturbation totale retardée. Ces estimés sont ensuite

introduits dans le prédicteur mis en cascade avec l'observateur pour compenser l'effet du retard et finalement obtenir les estimations à l'instant présent des états du système $z^p(t)$ (voir figure 3.7).

Remarque 3.3 *Il faut néanmoins noter que l'observateur à mode glissant est conçu en supposant que le système (3.25) peut se mettre sous la forme canonique observable (3.26) et que le comportement chaotique du système (3.25) est invariant sous le difféomorphisme.*

- Synthèse de l'observateur à mode glissant basé sur l'algorithme de Super-Twisting

Considérons le système chaotique incertain soumis à un retard de sortie sous la forme canonique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1(t) = z_2(t) + \Theta_1(z_1) \\ \dot{z}_2(t) = z_3(t) + \Theta_2(z_1, z_2) \\ \cdot = \cdot \\ \cdot = \cdot \\ \dot{z}_{n-1}(t) = z_n(t) + \Theta_{n-1}(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \\ \dot{z}_n(t) = \eta(t) \\ y^\tau(t) = z_1(t - \tau) \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Le signal transmis via le canal public est $y(t) = z_1(t)$ qui est retardé lors de sa transmission via le canal public, il en résulte que le signal reçu par l'observateur (où en entrée du système esclave) est affecté par un retard.

Le système retardé pour $t \geq \tau$ est défini comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1^\tau(t) = z_2^\tau(t) + \Theta_1(z_1^\tau) \\ \dot{z}_2^\tau(t) = z_3^\tau(t) + \Theta_2(z_1^\tau, z_2^\tau) \\ \cdot = \cdot \\ \cdot = \cdot \\ \dot{z}_{n-1}^\tau(t) = z_n^\tau(t) + \Theta_{n-1}(z_1^\tau, z_2^\tau, \dots, z_{n-1}^\tau) \\ \dot{z}_n^\tau(t) = \eta^\tau(t) \\ y^\tau(t) = z_1(t)^\tau \end{array} \right. \quad (3.30)$$

où $z_i^\tau(t) = z_i(t - \tau)$; $i = 1, \dots, n$ sont les états retardés du système, $\eta^\tau = \eta(t - \tau)$ est la perturbation totale retardée.

L'objectif est de concevoir un observateur à mode glissant du second ordre pour le système (3.30) et ce pour estimer les variables d'états retardées et la perturbation totale retardée, sous la condition que les hypothèses suivantes soient vérifiées.

Hypothèse 3.3 *Les états du système (3.30) sont uniformément bornées dans un ensemble compact $D \subset \mathbb{R}^n$, c-à-d :*

$$|z_i^\tau(t)| \leq \sigma_i; i = 1, 2, \dots, n \quad \forall t \geq \tau, \text{ avec } \sigma_i \text{ sont des constantes positives.}$$

Hypothèse 3.4 $|\Theta_i(z_i^\tau(t), i = 1, 2, \dots, i)| \leq L_i; i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad \forall t \geq \tau$, avec L_i sont des constantes positives.

Hypothèse 3.5 $\left| \frac{d\eta^\tau(t)}{dt} \right| \leq L_n$, avec L_n est une constante positive.

Remarque 3.4 *Il convient de noter que pour de nombreux systèmes chaotiques, les hypothèses 3.3 et 3.4 sont en général satisfaites puisque les solutions d'un système chaotique sont continuellement différentiables et confinées dans un ensemble compact.*

En outre, l'hypothèse 3.5 est pratiquement toujours satisfaite et ne constitue pas une restriction pour presque toutes les applications pratiques.

L'observateur à mode glissant du second ordre basé sur l'algorithme de Super-Twisting pour le système retardé (3.30) est donné comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{z}}_1^\tau = \tilde{z}_2^\tau + \lambda_1 |\varepsilon_1^\tau|^{1/2} \text{sign}(\varepsilon_1^\tau) + \Theta_1(z_1^\tau(t)) \\ \dot{\hat{z}}_2^\tau = \alpha_1 \text{sign}(\varepsilon_1^\tau) \\ \dot{\hat{z}}_2^\tau = E_1 [\tilde{z}_3^\tau + \lambda_2 |\varepsilon_2^\tau|^{1/2} \text{sign}(\varepsilon_2^\tau) + \Theta_2(z_1^\tau(t), \tilde{z}_2^\tau(t))] \\ \dot{\hat{z}}_3^\tau = E_1 [\alpha_2 \text{sign}(\varepsilon_2^\tau)] \\ \dot{\hat{z}}_3^\tau = E_2 [\tilde{z}_4^\tau + \lambda_3 |\varepsilon_3^\tau|^{1/2} \text{sign}(\varepsilon_3^\tau) + \Theta_3(z_1^\tau(t), \tilde{z}_2^\tau(t), \tilde{z}_3^\tau(t))] \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{\hat{z}}_{n-1}^\tau = E_{n-3} [\alpha_{n-2} \text{sign}(\varepsilon_{n-2}^\tau)] \\ \dot{\hat{z}}_{n-1}^\tau = E_{n-2} [\tilde{z}_n^\tau + \lambda_{n-1} |\varepsilon_{n-1}^\tau|^{1/2} \text{sign}(\varepsilon_{n-1}^\tau) + \Theta_{n-1}(z_1^\tau(t), \tilde{z}_2^\tau(t), \dots, \tilde{z}_{n-1}^\tau(t))] \\ \dot{\hat{z}}_n^\tau = E_{n-2} [\alpha_{n-1} \text{sign}(\varepsilon_{n-1}^\tau)] \\ \dot{\hat{z}}_n^\tau = E_{n-1} [\tilde{\theta}^\tau + \lambda_n |\varepsilon_n^\tau|^{1/2} \text{sign}(\varepsilon_n^\tau)] \\ \dot{\tilde{\theta}}^\tau = E_{n-1} [\alpha_n \text{sign}(\varepsilon_n^\tau)] \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Avec :

$$\varepsilon_i^\tau = \tilde{z}_i^\tau - \hat{z}_i^\tau \quad \text{pour } i = 2, \dots, n \text{ et } \tilde{z}_1^\tau = z_1^\tau = y^\tau \Rightarrow \varepsilon_1^\tau = e_1^\tau.$$

Tel que $\hat{z}_i^\tau(t)$ et $\tilde{z}_i^\tau(t)$ représentent les états estimés retardés et les états internes retardés de l'observateur, respectivement.

Les paramètres α_i et λ_i représentent les gains de l'observateur, tel que l'erreur d'estimation retardée converge vers zéro en temps fini.

Les paramètres de l'observateur sont strictement positifs.

L'erreur d'estimation retardée est définie comme suit :

$$e_j^\tau = z_j^\tau - \hat{z}_j^\tau, \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, n.$$

La fonction scalaire E_i est définie comme suit :

$$E_i = \begin{cases} 1 & \text{si } |\varepsilon_j^\tau| = |\tilde{z}_j^\tau - \hat{z}_j^\tau| \leq \epsilon; \quad \text{pour tout } j \leq i \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Avec ϵ étant une petite constante positive.

La fonction discontinue $sign(\cdot)$ est définie par :

$$sign(\varepsilon^\tau(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon^\tau(t) > 0 \\ 0 & \text{si } \varepsilon^\tau(t) = 0 \\ -1 & \text{si } \varepsilon^\tau(t) < 0 \end{cases}$$

Theorem 3.5 *Considérons le système retardé (3.30) et son observateur (3.31), tel que les hypothèses (3.3)-(3.5) sont vérifiées. Alors quelque soit les conditions initiales $\hat{z}_j^\tau(\tau)$, $\tilde{z}_j^\tau(\tau)$, pour $j = 1, 2, \dots, n$ et $\tilde{\theta}^\tau(\tau)$, il existe des constantes positive λ_j et α_j pour $j = 1, 2, \dots, n$ satisfaisant les conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} \alpha_j &> (L_{j+1} + \sigma_{j+2}) \\ \lambda_j &> \sqrt{4(L_{j+1} + \sigma_{j+2}) \frac{\alpha_j + (L_{j+1} + \sigma_{j+2})}{\alpha_j - (L_{j+1} + \sigma_{j+2})}}, \quad \text{pour } j = 1, \dots, n-1 \\ \alpha_n &> L_n \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\lambda_n > \sqrt{4L_n \frac{\alpha_n + L_n}{\alpha_n - L_n}}$$

Tel que l'état retardé estimé $\hat{z}_j^\tau(t)$ converge vers l'état réel retardé $z_j^\tau(t)$ en temps fini.

L'estimation de la perturbation totale $\hat{\theta}^\tau(t)$ converge également en temps fini vers la perturbation totale inconnue $\eta^\tau(t)$.

Démonstration 3.2 *La preuve de la convergence des états retardés estimés vers les états retardés réels est construite étape par étape.*

Étape 1 *On impose que les fonctions logiques E_i , pour $i = 1, 2, \dots, n$, soient mises à zéro afin de régler la dynamique des erreurs ϵ_i^τ , pour $i = 2, 3, \dots, n$ et ce dans le but d'éviter la divergence et de prévenir les erreurs de ϵ_i^τ trop importantes, et ce avant d'obtenir une précision suffisante pour les estimations de \hat{z}_1^τ et \tilde{z}_2^τ .*

En soustrayant la première et la seconde équations de (3.31) de leurs équivalents dans (3.30), la dynamique de l'erreur est donnée par :

$$\dot{e}_1^\tau = \varphi_2^\tau - \lambda_1 |e_1^\tau|^{1/2} \text{sign}(e_1^\tau) \quad (3.33)$$

$$\dot{\varphi}_2^\tau = -\alpha_1 \text{sign}(e_1^\tau) + z_3^\tau(t) + \Theta_2(z_1^\tau(t), z_2^\tau(t)) \quad (3.34)$$

Avec $\varphi_2^\tau = z_2^\tau(t) - \tilde{z}_2^\tau(t)$, il s'en suit que :

$$\ddot{e}_1^\tau = -\alpha_1 \text{sign}(e_1^\tau) - \frac{1}{2} \lambda_1 \dot{e}_1^\tau |e_1^\tau|^{-1/2} + z_3^\tau + \Theta_2(z_1^\tau(t), z_2^\tau(t)) \quad (3.35)$$

On en déduit, que l'erreur d'estimation satisfait l'inclusion différentielle au sens de Filippov.

A partir des hypothèses (3.3) et (3.4) nous avons :

$$z_3^\tau(t) + \Theta_2(z_1^\tau(t), z_2^\tau(t)) \leq |z_3^\tau(t)| + |\Theta_2(z_1^\tau(t), z_2^\tau(t))| \leq \sigma_3 + L_2$$

Par conséquent :

$$\ddot{e}_1^\tau \in [-(L_2 + \sigma_3) \quad (L_2 + \sigma_3)] - \left(\alpha_1 \text{sign}(e_1^\tau) + \frac{1}{2} \lambda_1 \dot{e}_1^\tau |e_1^\tau|^{-1/2} \right) \quad (3.36)$$

Si les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\alpha_1 > (L_2 + \sigma_3)$$

$$\lambda_1 > \sqrt{4(L_2 + \sigma_3) \frac{\alpha_1 + (L_2 + \sigma_3)}{\alpha_1 - (L_2 + \sigma_3)}}$$

Alors, nous avons l'apparition du mode glissant du second ordre.

Cela signifie que l'erreur d'estimation $e_1^\tau(t)$ ainsi que sa première dérivée $\dot{e}_1^\tau(t)$ convergent vers zéro en temps fini.

La limite supérieure du temps fini peut être estimée par la relation suivante [74, 174] :

$$T_1 \leq \sum \frac{|\dot{e}_{1i}^\tau|}{|\alpha_1 - (L_2 + \sigma_3)|}$$

Où \dot{e}_{1i}^τ désigne le point d'intersection des trajectoires $\dot{e}_1^\tau(t)$, $e_1^\tau(t)$ avec l'axe $e_1^\tau = 0$ dans le plan de phase $(e_1^\tau, \dot{e}_1^\tau)$.

En outre, en raison du fait que $\dot{e}_1^\tau(t) = 0$ et $e_1^\tau(t) = 0$, il en résulte de la relation (3.33) que $\varphi_2^\tau(t)$ converge vers zéro en un temps fini T_1 .

Par conséquent $\hat{z}_1^\tau(t) = z_1^\tau(t)$, $\tilde{z}_2^\tau(t) = z_2^\tau(t)$, pour $t \geq T_1 + \tau$ et $E_1 = 1$. Ceci implique que $\varepsilon_2^\tau(t) = e_2^\tau(t)$.

Étape 2 À cette étape, nous avons $E_1 = 1$, $E_2 = E_3 = \dots E_{n-1} = 0$ et $e_2^\tau(t) = \varepsilon_2^\tau(t)$. Donc, les dynamiques de e_2^τ et φ_3^τ sont données comme suit :

$$\dot{e}_2^\tau = \varphi_3^\tau - \lambda_2 |e_2^\tau|^{1/2} \text{sign}(e_2^\tau) \quad (3.37)$$

$$\dot{\varphi}_3^\tau = -\alpha_2 \text{sign}(e_2^\tau) + z_4^\tau(t) + \Theta_3(z_1^\tau(t), z_2^\tau(t), z_3^\tau(t)) \quad (3.38)$$

Avec $\varphi_3^\tau = z_3^\tau(t) - \tilde{z}_3^\tau(t)$, il s'en suit que :

$$\ddot{e}_2^\tau = -\alpha_2 \text{sign}(e_2^\tau) - \frac{1}{2} \lambda_2 \dot{e}_2^\tau |e_2^\tau|^{-1/2} + z_4^\tau + \Theta_3(z_1^\tau(t), z_2^\tau(t), z_3^\tau(t)) \quad (3.39)$$

Comme pour l'étape 1, sous les hypothèses (3.3) et (3.4), si les inégalités suivantes :

$$\alpha_2 > (L_3 + \sigma_4)$$

$$\lambda_2 > \sqrt{4(L_3 + \sigma_4) \frac{\alpha_2 + (L_3 + \sigma_4)}{\alpha_2 - (L_3 + \sigma_4)}}$$

sont satisfaites, alors l'erreur d'estimation $e_2^\tau(t)$ et sa première dérivée $\dot{e}_2^\tau(t)$ convergent vers zéro en temps fini.

Une limite supérieure du temps de convergence peut être estimée comme dans [74, 174] par :

$$T_2 \leq \sum \frac{|\dot{e}_{2i}^\tau|}{|\alpha_2 - (L_3 + \sigma_4)|}$$

De plus, $\varphi_3^\tau(t)$ converge vers zéro en temps fini T_2 . D'où $\hat{z}_2^\tau(t) = z_2^\tau(t)$, $\tilde{z}_3^\tau(t) = z_3^\tau(t)$, pour $t \geq T_2 + \tau$ et $E_2 = 1$.

Cela signifie également que $\varepsilon_3^\tau(t) = e_3^\tau(t)$.

⋮

Étape n À cette étape, nous avons : $E_1 = E_2 = \dots = E_{n-1} = 1$ et $e_n^\tau(t) = \varepsilon_n^\tau(t)$. Donc, la dynamique de e_n^τ est donnée par :

$$\dot{e}_n^\tau = -\tilde{\theta}^\tau - \lambda_n |e_n^\tau|^{1/2} \text{sign}(e_n^\tau) + \eta^\tau(t) \quad (3.40)$$

$$\dot{\tilde{\theta}}^\tau = \alpha_n \text{sign}(e_n^\tau) \quad (3.41)$$

La dérivée seconde de e_n^τ est obtenue comme suit :

$$\ddot{e}_n^\tau = -\alpha_n \text{sign}(e_n^\tau) - \frac{1}{2} \lambda_n \dot{e}_n^\tau |e_n^\tau|^{-1/2} + \frac{d\eta^\tau(t)}{dt} \quad (3.42)$$

Par conséquent, selon [74, 174, 175], sous l'hypothèse 3.5 si :

$$\alpha_n > L_n$$

$$\lambda_n > \sqrt{4L_n \frac{\alpha_n + L_n}{\alpha_n - L_n}}$$

Donc, $e_n^\tau(t)$ et $\dot{e}_n^\tau(t)$ convergent vers zéro en temps fini T_n , satisfaisant :

$$T_n \leq \sum \frac{|\dot{e}_{ni}^\tau|}{|\alpha_n - L_n|}$$

Il en résulte qu'une estimation de la perturbation totale retardée peut alors être obtenue en temps fini T_n comme suit :

$$\hat{\eta}^\tau(t) = \tilde{\theta}^\tau(t) \quad (3.43)$$

En d'autres termes, il existe un temps fini T_n tel que :

$$\begin{cases} \|z^\tau(t) - \hat{z}^\tau(t)\| = 0, & t \geq T_n + \tau \\ |\eta^\tau(t) - \hat{\eta}^\tau(t)| = 0, & t \geq T_n + \tau \end{cases} \quad (3.44)$$

La preuve de convergence de l'observateur est ainsi faite.

- Synthèse du prédicteur

Dans la partie précédente, nous avons synthétisé l'observateur à mode glissant, dont le rôle est de fournir les estimés des états retardés du système et ce en temps fini. Afin d'obtenir les estimés des états à l'instant présent, nous devons concevoir un système permettant de compenser l'effet du retard. Pour ce faire, nous utilisons un système dit "prédicteur". Sur la base des estimés des états retardés donnés par l'observateur (3.31), le prédicteur permet d'estimer les états du système à l'instant présent.

Considérons le système (3.26) réécrit ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + \tilde{\Theta}(z(t)) + B\eta(t) \\ y^\tau(t) = Cz(t - \tau) \end{cases} \quad (3.45)$$

où les matrices A , B , C et la fonction vectorielle non linéaire $\tilde{\Theta}(z(t))$ sont données par (3.27) et (3.28), respectivement.

Le prédicteur proposé est inspiré de [43], il est décrit par les équations suivantes :

$$\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t) + \tilde{\Theta}(z^p(t)) + B\hat{\eta}^\tau(t), \quad t \geq \tau \quad (3.46)$$

$$z^p(t) = e^{A\tau} \hat{z}^\tau(t) + \gamma(t) - e^{A\tau} \gamma^\tau(t), \quad t \geq \tau \quad (3.47)$$

où $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état interne du prédicteur. Les conditions initiales sont définies comme suit : $\gamma(\tau) = \gamma_\tau$.

L'inégalité de Gronwall-Bellman donnée par le Lemme suivant, sera utilisée par la suite.

Lemme 3.2 : [176] Soit φ , ψ et κ des fonctions positives et continues sur $[a, b]$, tel que

$$\forall t \in [a, b], \quad \kappa(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)\kappa(s)ds$$

alors :

$$\forall t \in [a, b], \quad \kappa(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s) \psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right) ds$$

Hypothèse 3.6 : La fonction $\Theta(z(t))$ est globalement Lipschitzienne par rapport à z , c'est-à-dire qu'il existe une constante réelle positive $\alpha_z > 0$, tel que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ et $\hat{z} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\Theta(z) - \Theta(\hat{z})\| \leq \alpha_z \|z - \hat{z}\| \quad (3.48)$$

Hypothèse 3.7 : La perturbation totale $\eta(t)$ satisfait la condition de variation lente en fonction du temps, c'est-à-dire qu'il existe une limite supérieure τ^* du retard et une petite constante réelle positive ϵ_η telle que :

$$|\eta(t) - \eta^\tau(t)| \leq \epsilon_\eta, \quad \forall t \geq \tau \quad \text{et} \quad \forall \tau \in [0, \tau^*]$$

La convergence de l'erreur de prédiction $e^p(t) = z(t) - z^p(t)$ est énoncée dans le théorème suivant.

Theorem 3.6 Considérons le système (3.45) et le prédicteur (3.46)-(3.47) associés à l'observateur à mode glissant retardé (3.31). Supposons que les hypothèses 3.6 et 3.7 soient satisfaites.

Il s'en suit que l'erreur de prédiction $e^p(t)$ converge vers une boule dont le rayon est donné par $\hat{K}\epsilon_\eta$, pour tous $t \geq T_n + \tau$, avec $\hat{K} = \|e^{A\tau}\| \tau e^{a\tau}$ et $a = \alpha_z \|e^{A\tau}\|$.

Démonstration 3.3 La solution de l'équation d'état (3.45) de $(t-\tau)$ à t , pour tout $\tau > 0$ est donnée par :

$$z(t) = e^{A\tau} z^\tau(t) + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-\theta)} \tilde{\Theta}(z(\theta)) d\theta + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-\theta)} B\eta(\theta) d\theta \quad t \geq \tau \quad (3.49)$$

En intégrant l'équation (3.46) de $(t - \tau)$ jusqu'à t , on obtient :

$$\gamma(t) = e^{A\tau} \gamma^\tau(t) + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-\theta)} \tilde{\Theta}(z^p(\theta)) d\theta + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-\theta)} B \hat{\eta}^\tau(\theta) d\theta \quad t \geq \tau \quad (3.50)$$

En remplaçant (3.50) dans (3.47), on obtient :

$$z^p(t) = e^{A\tau} \hat{z}^\tau(t) + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-\theta)} \tilde{\Theta}(z^p(\theta)) d\theta + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-\theta)} B \hat{\eta}^\tau(\theta) d\theta, \quad t \geq \tau \quad (3.51)$$

En soustrayant l'équation (3.51) de (3.49), on obtient :

$$\begin{aligned} e^p(t) = z(t) - z^p(t) &= e^{A\tau} (z^\tau(t) - \hat{z}^\tau(t)) + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-\theta)} \left(\tilde{\Theta}(z(\theta)) - \tilde{\Theta}(z^p(\theta)) \right) d\theta \\ &\quad + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-\theta)} B (\eta(\theta) - \hat{\eta}^\tau(\theta)) d\theta \end{aligned} \quad (3.52)$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \|e^p(t)\| &\leq \|e^{A\tau}\| (\|z^\tau(t) - \hat{z}^\tau(t)\|) + \int_{t-\tau}^t \|e^{A(t-\theta)}\| \left(\left\| \tilde{\Theta}(z(\theta)) - \tilde{\Theta}(z^p(\theta)) \right\| \right) d\theta \\ &\quad + \int_{t-\tau}^t \|e^{A(t-\theta)}\| |\eta(\theta) - \hat{\eta}^\tau(\theta)| d\theta \end{aligned} \quad (3.53)$$

En utilisant l'hypothèse 3.6, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|e^p(t)\| &\leq \|e^{A\tau}\| (\|z^\tau(t) - \hat{z}^\tau(t)\|) + \alpha_z \|e^{A\tau}\| \int_{t-\tau}^t \|e^p(\theta)\| d\theta \\ &\quad + \|e^{A\tau}\| \int_{t-\tau}^t |\eta(\theta) - \hat{\eta}^\tau(\theta)| d\theta \end{aligned} \quad (3.54)$$

En d'autres termes :

$$\begin{aligned} \int_{t-\tau}^t |\eta(\theta) - \hat{\eta}^\tau(\theta)| d\theta &= \int_{t-\tau}^t |\eta(\theta) - \hat{\eta}^\tau(\theta) + \eta^\tau(\theta) - \eta^\tau(\theta)| d\theta \\ &\leq \int_{t-\tau}^t |\eta^\tau(\theta) - \hat{\eta}^\tau(\theta)| d\theta + \int_{t-\tau}^t |\eta(\theta) - \eta^\tau(\theta)| d\theta \end{aligned} \quad (3.55)$$

En utilisant l'hypothèse 3.7, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{t-\tau}^t |(\eta(\theta) - \hat{\eta}^\tau(\theta))| d\theta &\leq \int_{t-\tau}^t |\eta^\tau(\theta) - \hat{\eta}^\tau(\theta)| d\theta + \int_{t-\tau}^t \epsilon_\eta d\theta \\ &\leq \int_{t-\tau}^t |\eta^\tau(\theta) - \hat{\eta}^\tau(\theta)| d\theta + \epsilon_\eta \tau \end{aligned} \quad (3.56)$$

En remplaçant (3.56) par (3.54), on obtient :

$$\begin{aligned} \|e^p(t)\| &\leq \|e^{A\tau}\| (\|z^\tau(t) - \hat{z}^\tau(t)\|) + \alpha_z \|e^{A\tau}\| \int_{t-\tau}^t \|e^p(\theta)\| d\theta \\ &\quad + \|e^{A\tau}\| \int_{t-\tau}^t |\eta^\tau(\theta) - \hat{\eta}^\tau(\theta)| d\theta + \|e^{A\tau}\| \epsilon_\eta \tau \end{aligned} \quad (3.57)$$

Posons :

$$\kappa(t) = \|e^P(t)\| \quad (3.58)$$

$$\varphi(t) = \|e^{A\tau}\| (\|z^\tau(t) - \hat{z}^\tau(t)\|) + \|e^{A\tau}\| \int_{t-\tau}^t |\eta^\tau(\theta) - \hat{\eta}^\tau(\theta)| d\theta + \|e^{A\tau}\| \epsilon_\eta \tau \quad (3.59)$$

et

$$\psi(\theta) = \alpha_z \|e^{A\tau}\| \quad (3.60)$$

$$\text{Avec : } \int_{\theta}^t \psi(\theta) d\theta = \alpha_z \|e^{A\tau}\| \int_{\theta}^t d\theta = \alpha_z \|e^{A\tau}\| (t - \theta).$$

Ensuite, en utilisant Lemme 3.2, on obtient :

$$\|e^P(t)\| \leq \varphi(t) + \alpha_z \|e^{A\tau}\| \int_{t-\tau}^t \varphi(\theta) e^{\alpha_z \|e^{A\tau}\| (t-\theta)} d\theta \quad (3.61)$$

Donc :

$$\|e^P(t)\| \leq \varphi(t) + \alpha_z \|e^{A\tau}\| \sup_{t-\tau \leq \theta \leq t} \{\varphi(\theta)\} \int_{t-\tau}^t e^{\alpha_z \|e^{A\tau}\| (t-\theta)} d\theta \quad (3.62)$$

Soit $a = \alpha_z \|e^{A\tau}\|$, alors l'équation (3.62) devient :

$$\|e^P(t)\| \leq \varphi(t) + a \sup_{t-\tau \leq \theta \leq t} (\varphi(\theta)) \int_{t-\tau}^t e^{a(t-\theta)} d\theta \quad (3.63)$$

Puis, (3.63) donne :

$$\|e^P(t)\| \leq \varphi(t) + K \sup_{t-\tau \leq \theta \leq t} \{\varphi(\theta)\} \quad (3.64)$$

Avec $K = e^{a\tau} - 1$.

De (3.44), les termes $\|z^\tau(t) - \hat{z}^\tau(t)\|$ et $|\eta^\tau(t) - \hat{\eta}^\tau(t)|$ convergent vers zéro en temps fini T_n .

Ensuite, pour tous $t \geq T_n + \tau$, $\varphi(t) = \|e^{A\tau}\| \epsilon_\eta \tau$ et

$$\sup_{t-\tau \leq \theta \leq t} \{\varphi(\theta)\} = \|e^{A\tau}\| \epsilon_\eta \tau$$

Alors (3.64) devient :

$$\|e^P(t)\| \leq \|e^{A\tau}\| \epsilon_\eta \tau + K \|e^{A\tau}\| \epsilon_\eta \tau \leq \acute{K} \epsilon_\eta, \quad \forall t \geq T_n + \tau \quad (3.65)$$

où $\acute{K} = (1 + K) \|e^{A\tau}\| \tau = e^{a\tau} \|e^{A\tau}\| \tau$.

De (3.65), on déduit que l'erreur de prédiction $e^P(t)$ converge vers une boule dont le rayon est donné par $\acute{K} \epsilon_\eta$, pour tous $t \geq T_n + \tau$.

Ceci permet de conclure sur la preuve de convergence de l'erreur de prédiction.

Remarque 3.7 *La taille du rayon de la boule dépend du retard τ et de ϵ_η .*

On peut déduire que l'erreur de prédiction $e^p(t)$ converge vers zéro en temps fini dans deux cas :

Cas 1 : *Si la valeur du retard $\tau \rightarrow 0$.*

Cas 2 : *Si $\epsilon_\eta \rightarrow 0$, c'est-à-dire que la perturbation totale est constante.*

3.5 Application à la synchronisation des systèmes chaotiques à sortie retardée

Dans cette partie, nous présentons les résultats de simulation afin d'illustrer l'efficacité de l'approche de synchronisation proposée. Cette technique est appliquée à la synchronisation des systèmes chaotiques de Rössler et de Genesio, respectivement.

3.5.1 Système chaotique de Rössler

Considérons le système chaotique de Rössler décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) - x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + ax_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = b + x_3(t)(x_1(t) - c) \end{cases} \quad (3.66)$$

Remarque 3.8 *Il faut noter que le système de Rössler doit être transformé sous une certaine forme dite forme canonique d'observabilité, cela se fait en utilisant un difféomorphisme, qui permet d'obtenir la transformation adéquate.*

Ainsi en effectuant la transformation suivante :

$$\begin{cases} z_1(t) = x_2(t) \\ z_2(t) = x_1(t) + ax_2(t) \\ z_3(t) = (a^2 - 1)x_2(t) + ax_1(t) - x_3(t) \end{cases} \quad (3.67)$$

Le système chaotique de Rössler (3.66) peut alors se mettre sous la forme triangulaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = z_3(t) \\ \dot{z}_3(t) = -z_2(t) + az_3(t) - (z_1(t) + z_3(t) - az_2(t))(c - z_2(t) + az_1(t)) - b \end{cases} \quad (3.68)$$

Considérons maintenant le système (3.68) soumis à une perturbation externe et dont la sortie est retardée donné comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = z_3(t) \\ \dot{z}_3(t) = -z_2(t) + az_3(t) - (z_1(t) + z_3(t) - az_2(t))(c - z_2(t) + az_1(t)) - b + d(t) \\ = \Theta_3(z_1, z_2, z_3) + d(t) \\ y^\tau(t) = z_1(t - \tau) \end{cases} \quad (3.69)$$

La perturbation extérieure est prise égale à $d(t) = 0, 1\sin(t)$.

Le système (3.69) est donc sous la forme de Brunovsky suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + \tilde{\Theta}(z(t)) + B\eta(t) \\ y^\tau(t) = Cz(t - \tau) \end{cases} \quad (3.70)$$

Avec : $\eta(t) = \Theta_3(z_1, z_2, z_3) + d(t)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0]; \quad B = [0 \ 0 \ 1]^T$$

et la fonction vectorielle non linéaire $\tilde{\Theta}(z(t))$ est donnée comme suit :

$$\tilde{\Theta}(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le système esclave (récepteur) est composé d'un observateur à mode glissant du second ordre associé en cascade avec un prédicteur tel qu'il est représenté schématiquement dans la figure 3.7.

L'observateur à mode glissant du second ordre retardé est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1^\tau = \hat{z}_2^\tau + \lambda_1|\varepsilon_1^\tau|^{1/2}\text{sign}(\varepsilon_1^\tau) \\ \dot{\hat{z}}_2^\tau = \alpha_1\text{sign}(\varepsilon_1^\tau) \\ \dot{\hat{z}}_2^\tau = E_1[\hat{z}_3^\tau + \lambda_2|\varepsilon_2^\tau|^{1/2}\text{sign}(\varepsilon_2^\tau)] \\ \dot{\hat{z}}_3^\tau = E_1[\alpha_2\text{sign}(\varepsilon_2^\tau)] \\ \dot{\hat{z}}_3^\tau = E_2[\tilde{\theta}^\tau + \lambda_3|\varepsilon_3^\tau|^{1/2}\text{sign}(\varepsilon_3^\tau)] \\ \dot{\tilde{\theta}}^\tau = E_2[\alpha_3\text{sign}(\varepsilon_n^\tau)] \end{cases} \quad (3.71)$$

Tel que $\varepsilon_i^\tau = \tilde{z}_i^\tau - \hat{z}_i^\tau$, pour $i = 2, 3$; $\tilde{z}_1^\tau = z_1^\tau = y^\tau \Rightarrow \varepsilon_1^\tau = e_1^\tau$.

Le prédicteur est donné sous la forme :

$$\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t) + \tilde{\Theta}(z^p(t)) + B\hat{\eta}^\tau(t) = A\gamma(t) + B\hat{\eta}^\tau(t), \quad t \geq \tau \quad (3.72)$$

$$z^p(t) = e^{A\tau} \hat{z}^\tau(t) + \gamma(t) - e^{A\tau} \gamma^\tau(t), \quad t \geq \tau \quad (3.73)$$

$$\hat{\eta}^\tau(t) = \tilde{\theta}^\tau(t) \quad (3.74)$$

Otto Rössler a étudié l'attracteur pour les valeurs suivantes des paramètres $a = 0, 2$, $b = 0, 2$, et $c = 5, 7$.

Pour les conditions initiales suivantes : $z_1(0) = 0.2$, $z_2(0) = 0.2$, $z_3(0) = 0.2$, le système présente un comportement chaotique comme le montre les portraits de phase de l'attracteur chaotique sur la figure 3.8.

Les conditions initiales de l'observateur à mode glissant sont prises comme suit : $\hat{z}_1^\tau(\tau) = \hat{z}_2^\tau(\tau) = \hat{z}_3^\tau(\tau) = 0$, et les conditions initiales du prédicteur sont prises comme : $z_1^p(0) = z_2^p(0) = z_3^p(0) = 0.1$.

Les paramètres de l'observateur, λ_i et α_i , sont choisis suffisamment grands pour garantir les conditions de convergence définies dans le théorème 3.5.

$$\alpha_1 = 30; \alpha_2 = 30; \alpha_3 = 30.$$

$$\lambda_1 = 15; \lambda_2 = 15; \lambda_3 = 15.$$

- Résultats de simulation

Tout d'abord, nous considérons le cas où le retard de transmission est nul (voir la figure 3.9) qui représente la sortie du système (3.69). La figure 3.10 montre la convergence des états estimés vers les états réels du système ainsi que la bonne estimation de la perturbation totale.

Des simulations pour différentes valeurs du retard affectant la sortie sont par la suite réalisées. Les figures 3.11, 3.12 et 3.13 montrent les états réels, les états prédits, les états estimés retardés et la perturbation totale estimée retardée pour ces valeurs du retard $\tau = 0.3s$, $\tau = 0.6s$ et $\tau = 0.8s$, respectivement.

Nous pouvons ainsi constater la convergence des états prédits vers les états réels et que la perturbation totale retardée est correctement estimée. Ceci permet de conclure à la synchronisation du système maître et esclave.

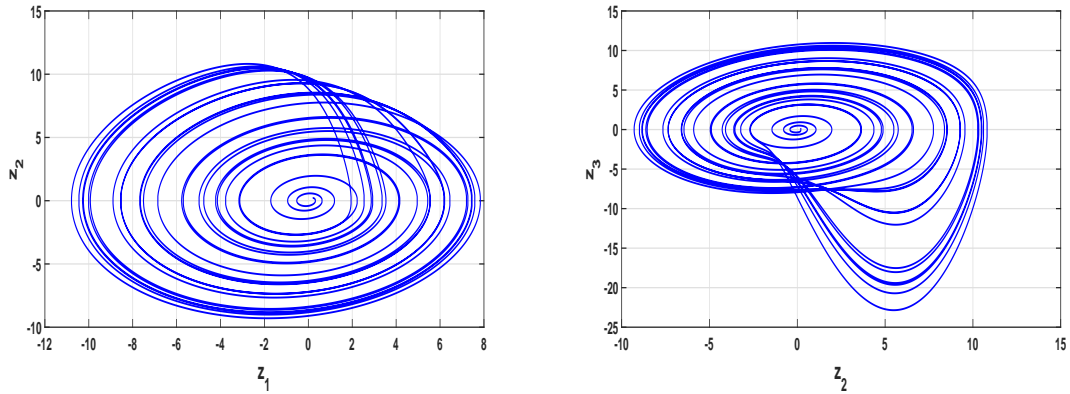


FIGURE 3.8: Portraits de phase de l'attracteur chaotique du système (3.69) : $(z_1 - z_2)$ et $(z_2 - z_3)$.

Nous avons noté les temps de convergence $T_{si} = T_i + \tau$, $i = 1, 2, 3$ correspondant aux instants où les erreurs d'estimation retardées e_i^T , $i = 1, 2, 3$ sont pratiquement nulles, T_η représente le temps de convergence de la perturbation totale vers son estimée. A partir des résultats de simulation, nous dressons le tableau 3.1 représentant le temps de convergence des états réels retardés vers les états retardés estimés.

Nous constatons ainsi que l'approche observateur-prédicteur proposée a une bonne performance pour différentes valeurs du retard. Cependant, la convergence est plus rapide lorsque le retard est faible.

	T_{s1}	T_{s2}	T_{s3}	T_η
$\tau = 0s$	$0.17s$	$0.42s$	$0.59s$	$0.75s$
$\tau = 0.3s$	$0.49s$	$0.74s$	$0.91s$	$1.09s$
$\tau = 0.6s$	$0.82s$	$1.06s$	$1.24s$	$1.44s$
$\tau = 0.8s$	$1.03s$	$1.29s$	$1.49s$	$1.70s$

TABLE 3.1: Temps de convergence par rapport au retard affectant la sortie.

Afin de mettre en évidence l'efficacité de l'approche observateur-prédicteur, présentons un second exemple d'application.

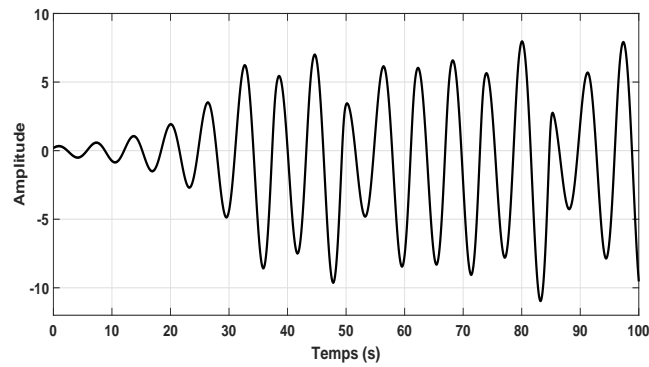
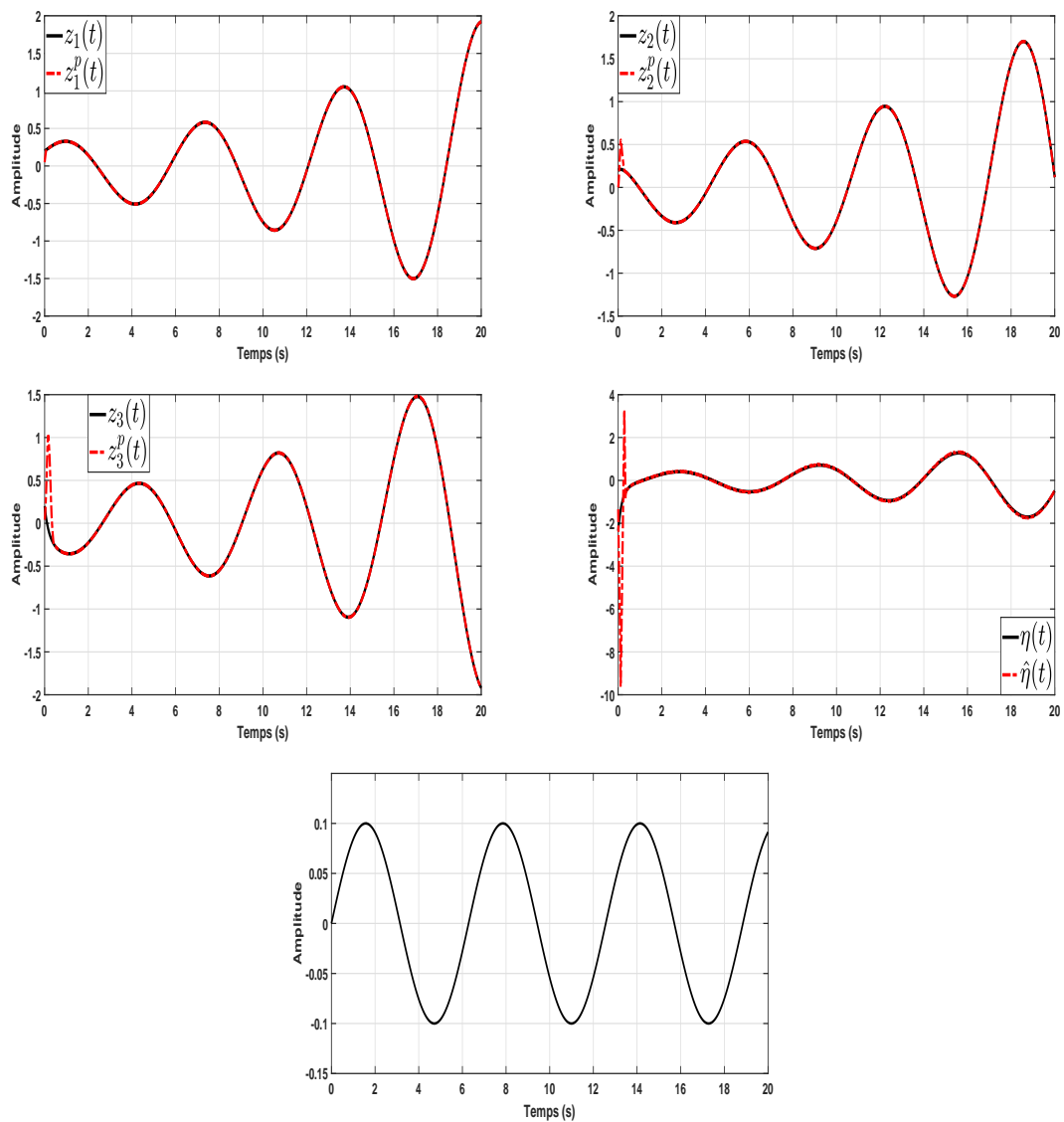


FIGURE 3.9: Sortie sans retard.

FIGURE 3.10: États réels (en couleur noire) et états prédits (en couleur rouge) pour $\tau = 0s$.

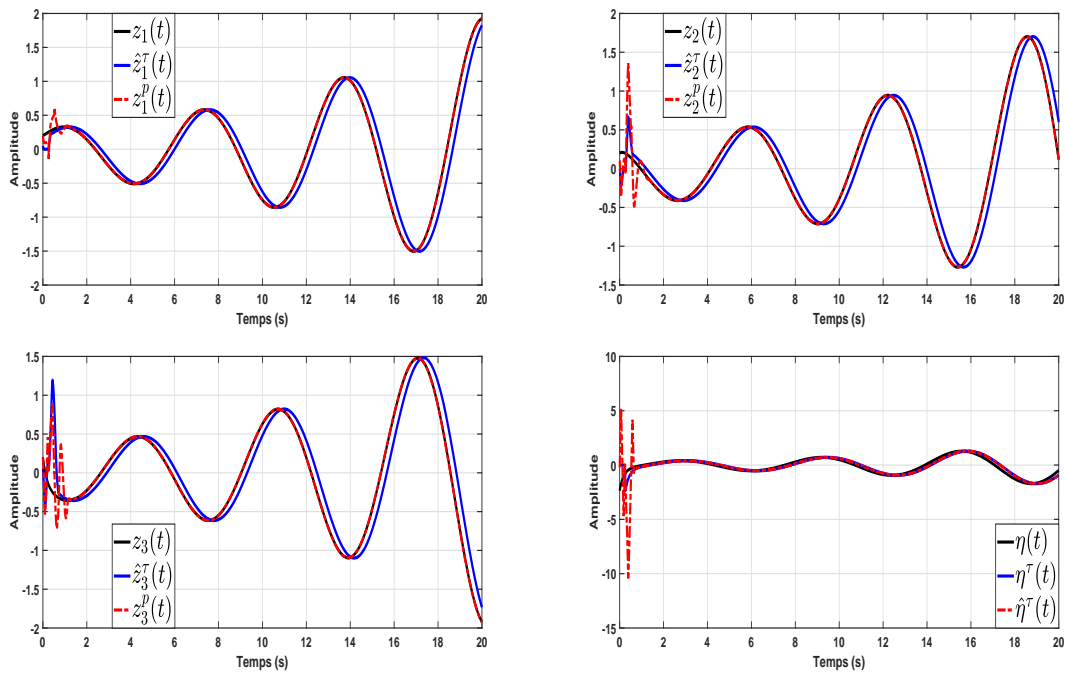


FIGURE 3.11: États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour $\tau = 0.3s$.

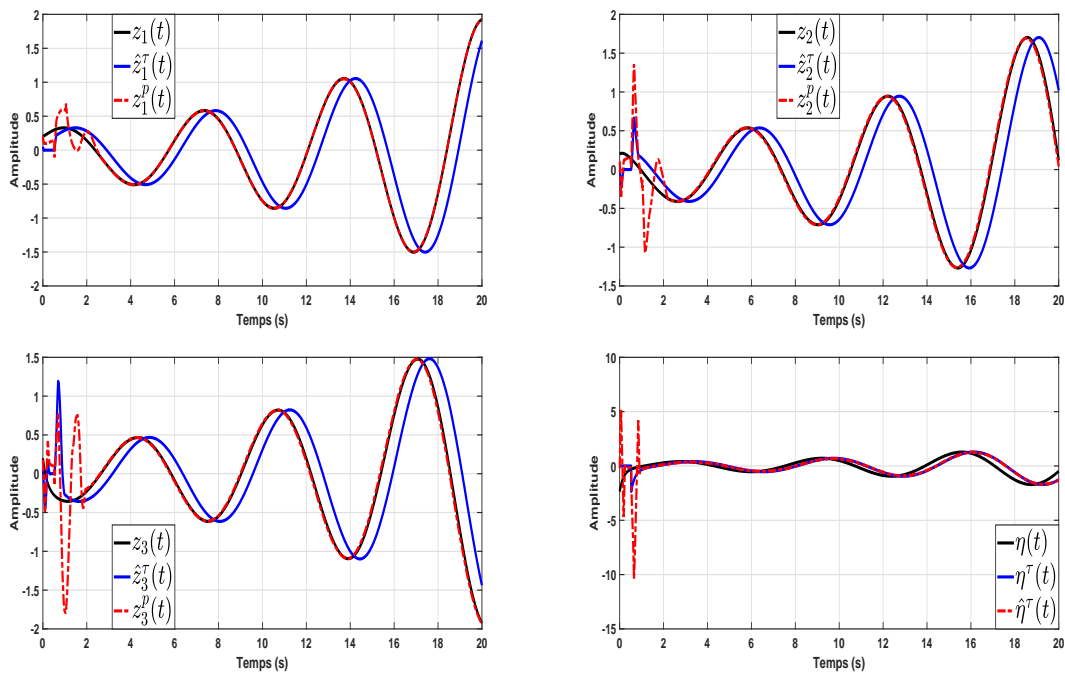


FIGURE 3.12: États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour $\tau = 0.6s$.

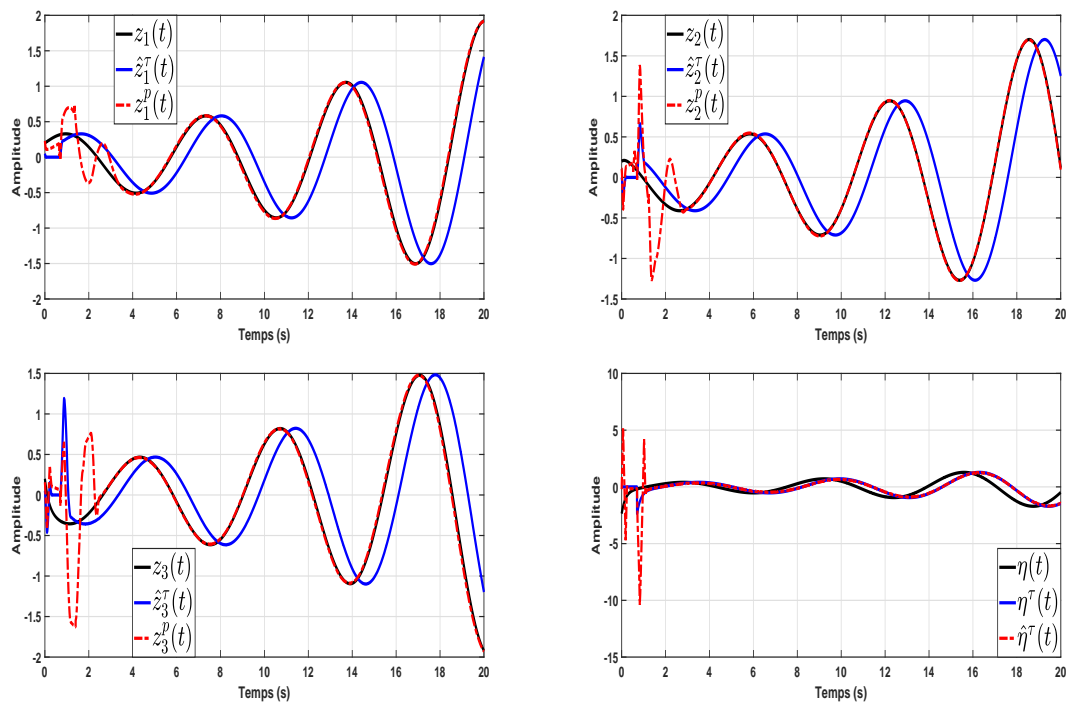


FIGURE 3.13: États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour $\tau = 0.8s$.

3.5.2 Système chaotique de Genesisio

Considérons le système chaotique de Genesisio décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = z_3(t) \\ \dot{z}_3(t) = -cz_1 - bz_2 - az_3 + z_1^2 + d(t) = \Phi_3(z_1, z_2, z_3) + d(t) \\ y^\tau(t) = z_1(t - \tau) \end{cases} \quad (3.75)$$

avec $d(t) = 0.1\sin(t)x_3(t)$. Le système est chaotique pour les paramètres $a = 0.44$, $b = 1.1$, $c = 1$, satisfaisant $ab < c$.

La figure 3.14 représente les portraits de phase du système chaotique de Genesisio pour les conditions initiales suivantes : $z_1(0) = 0, 2$; $z_2(0) = 0, 2$; $z_3(0) = 0, 2$. Nous constatons ainsi que le comportement chaotique du système est préservé, même dans le cas de la présence de la perturbation externe.

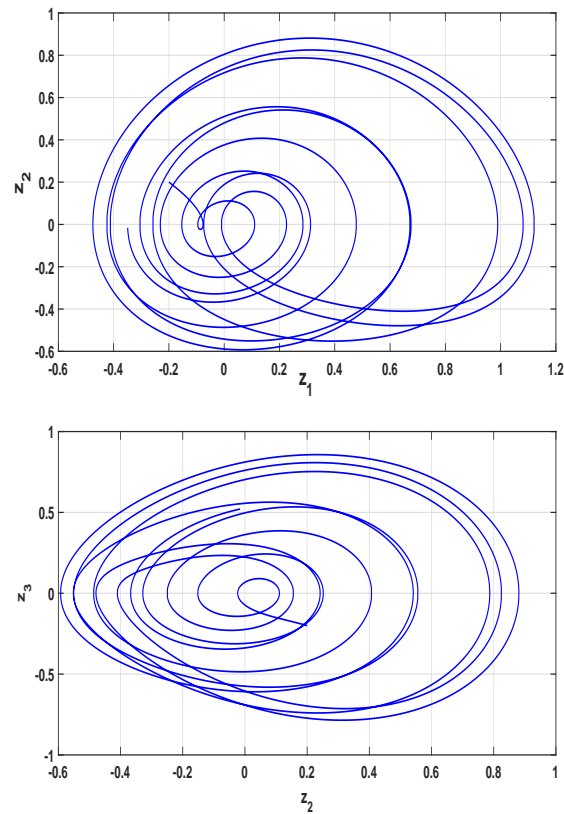


FIGURE 3.14: Portraits de phase de l'attracteur chaotique de Genesisio.

Les paramètres de l'observateur sont les mêmes que dans l'exemple (3.69). Les figures 3.15 et 3.16 montrent la convergence des états prédits vers les états réels et la convergence de la perturbation totale vers son estimé dans le cas sans retard $\tau = 0s$, puis dans le cas où le retard est égal a $\tau = 0.3s$.

L'approche observateur-prédicteur proposée a donc de bonnes performances vis à vis des variations paramétriques.

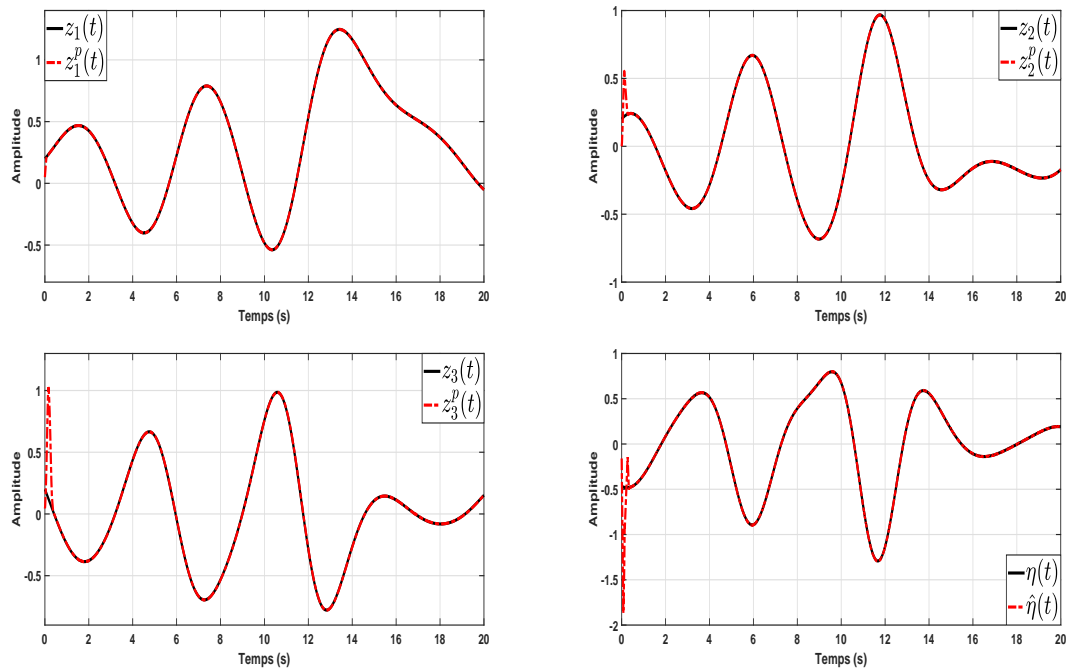


FIGURE 3.15: États réels (en noir) états prédits (en rouge) pour $\tau = 0s$.

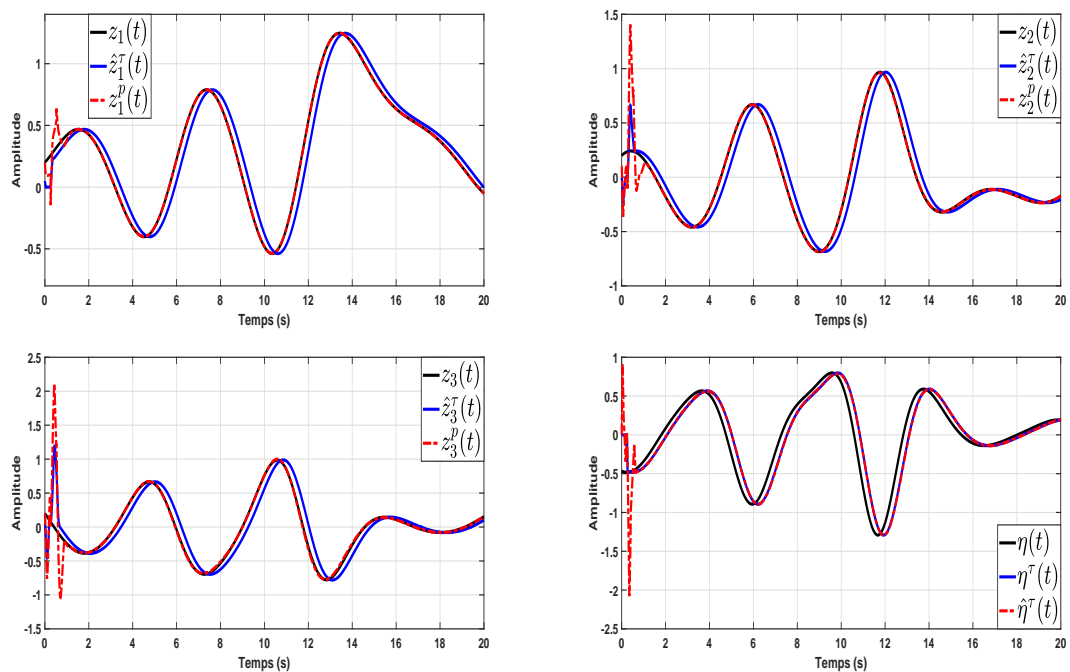


FIGURE 3.16: États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour $\tau = 0.3s$.

3.6 Conclusion

Durant ce chapitre, nous nous sommes intéressés dans la première partie à la synchronisation des systèmes chaotiques en absence de retard dans le canal de transmission.

L'approche proposée repose sur la structure multimodèle TS soumis à une entrée inconnue et à des variables de décision non mesurables. En effet, le système considéré est d'abord mis sous la forme de Takagi-Sugeno, puis un observateur PI est proposé afin de permettre la synchronisation entre le système esclave et le système maître, mais également d'estimer l'entrée inconnue que nous avons injectée dans la dynamique du système maître. L'entrée inconnue est un message audio à transmettre via le canal de communication et à reconstruire au niveau de l'observateur.

Le cryptage de signal est réalisé en utilisant un modèle TS chaotique afin de montrer l'efficacité de notre observateur dans la reconstruction de cette entrée inconnue. En se basant sur la théorie de la stabilité de Lyapunov, les conditions de conception et de convergences sont établies sous forme d'inégalité matricielle linéaire (LMI).

Afin de valider cette approche, un exemple numérique est présenté. Les résultats de simulation ont montré les bonnes performances du schéma de synchronisation proposé puisque les états et l'entrée inconnue sont bien estimés. L'observateur PI soumis à une entrée inconnue et des variables de prémisses non mesurables est une bonne méthode pour la récupération de messages de faibles amplitudes ainsi que pour la reconstruction des états du système chaotique dans un protocole de communication sécurisé.

Par la suite, nous avons représenté une solution à l'un des problèmes les plus récurrents dans la synchronisation maître-esclave, à savoir le retard affectant le signal de sortie transmis via le canal de communication.

En effet lors de la synchronisation des systèmes chaotiques l'occurrence du retard est un problème majeur, celui-ci étant généralement dû à la distance entre les deux systèmes ou à la bande passante. Ce retard a des effets néfastes sur la synchronisation, l'approche proposée offre une solution fiable et robuste pour ce problème.

L'approche proposée est composée d'un observateur à mode glissant du second ordre basé sur l'algorithme de Super Twisting et d'un prédicteur d'état mis en cascade.

L'observateur permet d'estimer les états retardés du système ainsi que la perturbation totale. Ces estimés sont par la suite injectés dans le prédicteur afin de compenser l'effet du retard et donc obtenir les estimations des états à l'instant présent. La convergence de l'approche observateur-

prédicteur proposé a été prouvée. Afin d'étayer l'efficacité de cette approche, des résultats de simulation ont été présentés dans la partie application où nous avons présenté deux exemples, d'abord sur le système de Rössler puis sur le système de Genesis. Dans les deux cas nous réalisons d'abord la synchronisation dans le cas où le signal de sortie est non retardé et dans le cas où le signal de sortie est soumis aux différentes valeurs du retard.

Ainsi, il est clair que l'approche proposée est robuste vis à vis du retard de transmission mais également vis à vis des variations paramétriques.

Chapitre 4

Systemes d'ordre fractionnaire

4.1 Introduction

Au cours des dernières décennies, les systèmes d'ordres fractionnaires ont suscité l'intérêt de la communauté scientifique. Le calcul fractionnaire qui a été considéré comme l'extension du calcul d'ordre entier à un calcul d'ordre non entier, est apparu durant le 17^{ème} siècle. En raison de l'inaccessibilité des techniques de résolution, le calcul fractionnaire est resté inexploré pendant près de trois siècles. L'origine du calcul fractionnaire remonte à Leibniz, qui propose dans une lettre au marquis de l'Hospital en 1695 de généraliser sa formule de la $n^{\text{ème}}$ dérivée en utilisant la notation $d^{\frac{1}{2}}h$ [177]. Dans une autre lettre à Bernoulli, Leibniz mentionne les dérivées "d'ordres généraux". En 1730, Euler aborde la question pour la deuxième fois, et dans son article [178], il introduit la célèbre fonction Gamma, dont nous parlerons plus tard. Fourier obtient une nouvelle définition de la dérivée d'ordre réel en 1822, grâce à sa transformation [179].

Abel a utilisé le calcul fractionnaire pour résoudre le problème du tautochrone généralisé en 1823 [180]. Liouville a été le premier à approfondir le calcul fractionnaire [181]. Plusieurs travaux de ce chercheur ont été publiés entre 1832 et 1837. En 1847, Riemann proposa une définition d'intégrale fractionnaire [182]. A partir de 1867, Grünwald [183] et Letnikov [184] ont développé, indépendamment, une dérivée fractionnaire comme limite de différences finies, et ce inversement à l'approche de Riemann-Liouville, qui est donné par une intégrale. Letnikov a montré que sa définition coïncide avec les versions formulées par Liouville, notamment en ce qui concerne les valeurs de l'ordre, et celles fournies par Riemann, sous une interprétation pratique de la différence d'ordre dite non entière. Hadamard publia, en 1892, un article où la dérivation d'ordre non en-

tier d'une fonction analytique doit être faite en termes de sa série Taylor. Le calcul opérationnel fourni par Heaviside [185] dans le cadre de la résolution de l'équation de la chaleur unidimensionnelle en 1892 a constitué une étape importante dans l'application pratique des dérivées d'ordre fractionnaire.

A partir de 1900, le calcul fractionnaire connut un développement rapide et afin de formuler des problèmes particuliers, d'autres définitions ont été proposées. Nous pouvons mentionner, par exemple, Weyl [186] qui a introduit une intégrale fractionnaire afin de contourner un problème impliquant les fonctions périodiques. En outre, Riesz [187] a prouvé le théorème de la valeur moyenne pour les intégrales fractionnaires et a introduit une autre formulation qui est reliée à la transformée de Fourier. En 1927, Marchaud a introduit une nouvelle définition pour les dérivées d'ordre non entier. L'avantage de cette définition est qu'elle est moins restrictive quand à la régularité de la fonction. En 1967, Caputo proposa sa définition de la dérivée d'ordre fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville mais aussi mieux appropriée pour les problèmes impliquant des équations différentielles avec valeurs initiales [188].

Oldham et Spanier [189] ont abordé le problème du flux de chaleur à la surface d'un conducteur en 1970 et ont démontré que pendant le processus de diffusion, le flux est proportionnel à la dérivée $\frac{1}{2}$ du paramètre physique, qu'il s'agisse de la température, de la concentration des espèces chimiques ou du potentiel électrique. Cette équation est considérée comme un moment décisif dans l'histoire du calcul fractionnaire car elle est utilisée en dehors du domaine des mathématiques.

Dans ce qui suit, nous donnerons les définitions élémentaires et les notions de base relatives au calcul fractionnaire.

4.2 Outils mathématiques

Dans cette section, nous allons passer en revue quelques concepts qui sont souvent utilisés pour résoudre des problèmes de calcul fractionnaire.

Le terme calcul fractionnaire décrit la théorie des intégrales et dérivées d'ordre arbitraire, ce qui généralise et unifie les notions de dérivées et les intégrales d'ordre entier. L'opérateur proposé par Davis [190] appelé opérateur de dérivation fractionnaire est noté par ${}_a D_t^\alpha$ et défini comme

suit :

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^\alpha & \alpha < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est l'ordre de dérivation et a, t sont les limites de l'opération. A partir de l'équation (4.1), la notation englobe les définitions des opérateurs de dérivation et d'intégration. En effet, pour des valeurs positives de l'ordre $\alpha (\alpha > 0)$, on effectue une opération de dérivation fractionnaire. Dans le cas où $\alpha < 0$, on effectue une opération d'intégration. C'est pour cette raison que l'opérateur est souvent appelé opérateur intégro-différentiel.

Avant de passer en revue quelques définitions et concepts fondamentaux du calcul fractionnaire, il est nécessaire de passer en revue les fonctions Gamma et Mittag-Leffler, qui jouent un rôle crucial dans la théorie du calcul fractionnaire.

4.2.1 La fonction Gamma d'Euler

La fonction Gamma d'Euler [191] est l'une des fonctions de base utilisées dans le calcul fractionnaire. Son interprétation est simplement une généralisation du factoriel n ($n!$), et elle permet à n de prendre des valeurs non entières, elle est définie comme suit :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty v^{\alpha-1} e^{-v} dv \quad (4.2)$$

Avec $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(0_+) = +\infty$.

La relation de récurrence suivante est une propriété essentielle de cette fonction :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (4.3)$$

4.2.2 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler, $E_\alpha(\mu)$, est une généralisation de la fonction exponentielle, elle a un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre a été introduite par G.M Mittag-Leffler [192] :

$$E_\alpha(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (4.4)$$

Plus tard, une généralisation à deux paramètres a été introduite par Argawal [193], cette dernière est définie par le développement suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (4.5)$$

Pour $\beta = 1$, on obtient la relation suivante :

$$E_{\alpha,1}(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \quad (\alpha > 0) \quad (4.6)$$

A partir de la relation (4.5) on peut montrer que :

$$E_{1,1}(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} = e^{\mu} \quad (4.7)$$

4.2.3 Intégrale et dérivée d'ordre fractionnaire

Le calcul fractionnaire peut être considéré comme une généralisation du calcul classique. En d'autres termes, une dérivation ou une intégration d'ordre non entier est une généralisation d'une dérivation ou d'une intégration classique à des ordres non entiers quelconques.

Les notations généralement utilisées sont ${}_t D^\alpha f(t)$, $I^\alpha f(t)$ et désignent respectivement, l'opération de dérivation et d'intégration.

Plusieurs définitions de la dérivation d'ordre fractionnaire peuvent être trouvées dans la littérature, parmi elles les définitions de Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov, Caputo, Weyl, etc. Nous présentons ici les trois définitions les plus couramment utilisées, qui sont : Riemann-Liouville, Caputo et Grünwald-Letnikov. Il est à noter que ces trois définitions ont la même essence et que le passage de l'une à l'autre est possible sous certaines conditions.

Intégration d'ordre fractionnaire

L'intégration d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville est le concept le plus connu et le plus utilisé [181, 182]. Elle est basée sur le calcul de l'intégrale répétée k fois, où k est un nombre entier positif, de la fonction $f(t)$ en utilisant la formule de Cauchy donnée par :

$$\int \cdots \int_a^t = I_a^k f(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^t (t-s)^{k-1} f(s) ds \quad (4.8)$$

Riemann a proposé la généralisation de cette formule en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma d'Euler.

Soit $f(t) \in L_1 [a, b]$ une fonction de la variable t , $t \in [a, b]$ où $L_1 [a, b]$ désigne l'ensemble de fonction Lebesgue mesurable sur $[a, b]$. L'intégrale fractionnaire à l'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ est défini par l'intégrale de Riemann-Liouville suivante :

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \quad (4.9)$$

Γ étant la fonction Gamma d'Euler définie par l'équation (4.2).

L'intégrale de Riemann-Liouville peut également être écrite comme suit :

$$I_a^\alpha f(t) = P_a(t) * f(t) \quad (4.10)$$

Avec $P_a(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$ et $*$ désigne le produit de convolution.

L'élément $P_a(t)$ appelé dans la littérature facteur d'oubli. Lorsque $\alpha = 1$ (cas entier), il est égal à 1. Dans le cas où $\alpha \neq 1$ c-à-d non entier, ce facteur permet de moduler la pondération de la fonction $f(t)$, en d'autres termes, les valeurs les plus récentes ont des poids plus importants que les plus anciennes, il prend ainsi en compte la mémoire du système.

Dérivation d'ordre fractionnaire

La généralisation de la fonction de dérivation entière à tous les ordres non entiers est connue sous le nom de dérivation fractionnaire. Diverses définitions de la dérivation d'ordre fractionnaire apparaissent au cours du développement de la théorie du calcul d'ordre fractionnaire.

Les définitions de Riemann-Liouville [181, 182] et Caputo [194] sont issues de l'intégration de Riemann-Liouville. Grünwald-Letnikov [183] ont proposé une troisième définition d'une dérivée non entière d'une fonction, qui peut être obtenue de manière plus intuitive en généralisant la définition d'une dérivée entière.

- Dérivées de Riemann-Liouville et Caputo

Les définitions de Riemann-Liouville et Caputo découlent de l'intégration non entière de Riemann-Liouville, qui est donnée par l'équation (4.9), en procédant de deux manières.

Introduisons le nombre entier positif m , tel que $m - 1 < \alpha < m$, l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville est défini comme la $m^{\text{ième}}$ dérivée de $I^{m-\alpha} f(t)$. Cela suppose la causalité de $f(t)$, et l'existence des dérivées jusqu'à l'ordre m et $f(t) \in C^m [a, b]$; $t \in [a, b]$. Cette définition est donnée par :

$${}^{\text{RL}} D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} f(s) ds \quad (4.11)$$

Dans le cas de la définition de Caputo [194], on applique d'abord la dérivée sur la fonction $f(t)$ à l'ordre entier m , puis le résultat obtenu est intégré à l'ordre non entier $m - \alpha - 1$. La dérivation d'ordre fractionnaire de Caputo est la suivante :

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{m - \alpha - 1} \frac{d^m f(s)}{ds^m} ds \quad (4.12)$$

avec $\frac{d^m f(s)}{ds^m}$ est la $m^{\text{ième}}$ dérivée de $f(s)$. Cette définition implique la nécessité que la fonction $f(s)$ ainsi que ses m dérivées successives soient nulles pour $t \leq 0$, ce qui la rend plus restrictive que la définition de Riemann-Liouville.

- Dérivée de Grünwald-Letnikov

Cette définition est basée sur l'acquisition de dérivées via des différences fractionnaires finies [183, 184], où toute la différence par rapport au cas entier se situe dans l'extension de la factorielle via la fonction Gamma Euler.

Considérons la fonction en temps continu $f(t)$, sa dérivée d'ordre un s'écrit :

$$D^1 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - h)}{h} \quad (4.13)$$

où h représente le pas d'échantillonnage. En dérivant l'équation (4.13) une deuxième fois, nous obtiendrons la dérivée d'ordre 2 de la fonction $f(t)$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} D^2 f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t - h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t - h) + f(t - 2h)}{h^2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

A partir des équations (4.13) et (4.14), la dérivée de la fonction $f(t)$ à l'ordre trois peut être obtenue comme suit :

$$D^3 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t - h) + 3f(t - 2h) - f(t - 3h)}{h^3} \quad (4.15)$$

La généralisation à un ordre de dérivation quelconque permet d'obtenir la définition proposée par Grünwald en 1867, elle est formulée comme suit :

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \right) \quad (4.16)$$

Le terme $\binom{\alpha}{j}$ désigne le binôme de Newton généralisé à des nombres réels, avec :

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-j+1)}{j!} \quad (4.17)$$

Dans le cas où $j = 0$ et α quelconque, nous aurons $\binom{\alpha}{0} = 1$. Si la dérivée est entière ($\alpha = 1$), l'équation (4.16) se limite à une combinaison linéaire des $(n+1)$ valeurs de la fonction $f(t-jh)$, $j = 0, \dots, n$ donnant ainsi un caractère local de la fonction. Par contre, dans le cas d'ordres fractionnaires, il est démontré que la fonction $D^\alpha f(t)$ à un instant t prend en considération ses valeurs aux instants passés, $f(t-jh)$ pour $j = 0, \dots, \infty$, donc il en résulte que dans ce cas la fonction revêt un caractère global contrairement au cas de la dérivation entière.

Si la fonction $f(t)$ est causale, en posant $t = ih$, cette condition se traduit par $f((i-j)h) = 0$ pour $i-j < 0$. Ce qui donne dans la relation (4.16) que la somme étendue de $j = 0, \dots, \infty$ se réduit à une somme $j = 0, \dots, i$, l'équation (4.16) peut se réécrire donc :

$$D^\alpha f(ih) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\alpha}{j} f((i-j)h) \quad (4.18)$$

Cette propriété permet d'interpréter les systèmes fractionnaires comme des systèmes à mémoire longue, alors que les systèmes entiers sont interprétés comme des systèmes à mémoire courte. Pour des raisons pratiques, le principe de "mémoire courte" [195, 196] est utilisé pour surmonter les difficultés d'évaluation d'une variable avec une large gamme de variance. Ce principe est énoncé comme suit :

$$D^\alpha f(t) \approx \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^L (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \right) \quad (4.19)$$

La taille de la mémoire L est choisie de manière à répondre aux exigences de précision du calcul.

4.3 Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

Les systèmes d'ordre fractionnaire sont souvent définis par des équations différentielles d'ordre fractionnaire, bien que d'autres termes, tels que la représentation diffusive de Montseny, puissent être utilisés pour transformer des opérateurs non standards, tels que les intégrations ou dérivations d'ordre fractionnaire, en systèmes linéaires dynamiques, dans un espace d'état fonctionnel.

Cette dernière définition décrit la propriété de la mémoire à long terme, qui se traduit par un effet de mémoire spatiale, c'est-à-dire que le comportement d'un système fractionnaire est le résultat d'un nombre infini de systèmes spatialement distribués. Par conséquent, le problème de l'initialisation correcte d'un système fractionnaire qui nécessite un nombre infini de conditions initiales se pose. Ceci peut être considéré comme une représentation diffusive compatible avec les propriétés physiques du système, ce qui n'est pas le cas si on utilise les définitions de Riemann-Liouville ou de Caputo.

La représentation d'état des systèmes continus d'ordre fractionnaire a été introduite dans [197, 198]. Cette représentation a été utilisée pour analyser la sortie du système. La fonction de Mittag-Leffler a été utilisée pour trouver la solution aux équations du modèle d'état. Ensuite, la stabilité de ces systèmes a été étudiée [199, 200], et une condition basée sur le principe de l'argument a été établie pour assurer la stabilité asymptotique du système d'ordre fractionnaire. En outre, les propriétés de commandabilité et d'observabilité ont été établies, et certains critères algébriques pour ces deux propriétés ont été tirés de [201]. Une autre contribution à l'analyse de la commandabilité et de l'observabilité d'un système d'ordre fractionnaire commensurable modélisé par des équations d'état fractionnaires est présentée dans [202].

Un système d'ordre fractionnaire, linéaire, causal à temps continu, invariant dans le temps, décrit par l'approche conventionnelle (classique), est décrit comme dans le cas général par trois modèles :

- Équation différentielle généralisée
- Fonction de transfert fractionnaire
- Représentation d'état fractionnaire.

Remarque 4.1 *Le passage d'une représentation à une autre se fait sous certaines conditions.*

4.3.1 Équation différentielle généralisée

En général, les systèmes linéaires mono-variables invariants dans le temps d'ordre fractionnaire peuvent être décrits par une équation différentielle fractionnaire de la forme [196] :

$$y(t) + \sum_{i=1}^n a_i D^{\alpha_i} y(t) = \sum_{j=1}^m b_j D^{\beta_j} u(t) + b_0 u(t) \quad (4.20)$$

avec D^α désigne l'opération de dérivation d'ordre α de Caputo.

$u(t) \in \mathbb{R}$ et $y(t) \in \mathbb{R}$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ sont

les coefficients du système, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}_+$ sont les ordres de dérivation fractionnaire, n et m sont les nombres des termes de chaque partie de l'équation différentielle.

Lorsque les ordres de dérivation de l'équation différentielle fractionnaire α_i et β_j sont tous multiples de l'ordre de base α , le système fractionnaire est dit d'ordre commensurable ; sinon, il est dit d'ordre incommensurable.

4.3.2 Fonction de transfert fractionnaire

L'application de la transformée de Laplace à l'équation (4.20), avec des conditions initiales nulles, permet d'obtenir la fonction de transfert [196] :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + \sum_{j=1}^m b_j s^{\beta_j}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i s^{\alpha_i}} \quad (4.21)$$

Dans le cas des systèmes d'ordre commensurable, la fonction de transfert est donnée sous la forme suivante :

$$G(s) = \frac{b_0 + \sum_{j=1}^m b_j s^{j\alpha}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i s^{i\alpha}} \quad (4.22)$$

En pratique, le cas des systèmes commensurables est assez intéressant. Il permet une description des pseudo-états qui est similaire à celle des structures d'ordre entier.

Remarque 4.2 *Pour les systèmes fractionnaires, il convient de parler de "pseudo-état" et non d'état car "l'historique" de l'état initial peut influencer sur le comportement du système [203].*

4.3.3 Représentation d'état des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

La représentation dans l'espace d'états [204, 205], est décrite comme dans le cas entier par deux équations :

- Une équation d'état où chaque variable d'état $x_i(t)$ est dérivée à l'ordre fractionnaire α .
- Une équation de sortie analogue au cas entier $y(t)$.

Le modèle d'état du système linéaire d'ordre fractionnaire s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (4.23)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur pseudo-état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrées, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de sorties du système. $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^T$ sont les ordres de dérivation non entiers.

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_n$, alors le système (4.23) est dit commensurable. Dans le cas contraire, on dit qu'il est non commensurable.

Remarque 4.3 *La représentation dans l'espace des pseudo états n'est pas unique. En effet, des représentations similaires aux formes canoniques observables ou commandables d'un modèle entier peuvent être obtenues.*

Comme pour les principes fondamentaux des systèmes d'ordre entier (commandabilité, observabilité, stabilité, etc.), qui sont basés sur le principe d'état et d'état initial, de nombreuses études ont été menées pour traiter la question de l'initialisation d'un système d'ordre non entier [205,206]. Dans [207,208] les auteurs proposent, une solution au problème d'initialisation qui repose sur l'utilisation d'intégrateur d'ordre non entier.

4.3.4 Commandabilité, stabilité et observabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

Les notions de commandabilité et d'observabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire sont explorées dans la littérature. En effet, de nombreuses études ont montré que les critères de commandabilité et d'observabilité de la représentation dans l'espace des pseudo-états des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire commensurable sont les mêmes que pour les systèmes d'ordre entier.

- Commandabilité des systèmes linéaires fractionnaires

Ainsi, le système (4.23) est dit commandable si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- Critère de Kalman

$$\text{rang} [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = n = \dim(x) \quad (4.24)$$

- Critère d'Hautus

$$\text{rang} ([\sigma I_n - A \ B]) = n = \dim(x) \quad \forall \sigma \in \mathbb{C} \quad (4.25)$$

- Stabilité des systèmes linéaires fractionnaires

On sait qu'un système linéaire est stable si les racines du polynôme caractéristique sont à parties réelles négatives, et donc situées sur la moitié gauche du plan complexe, selon la théorie

de la stabilité des systèmes linéaires à temps invariant et à dérivée d'ordre entier.

Par ailleurs, dans le cas des systèmes fractionnaires linéaires à temps invariant, la définition de la stabilité est la même que pour les systèmes d'ordre entier. Seulement, les systèmes fractionnaires ou d'ordre non entier peuvent bel et bien avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stables.

Theorem 4.4 [209, 210] *Considérons le système linéaire d'ordre fractionnaire commensurable décrit par l'équation (4.23). Soit $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, avec λ_i les valeurs propres de A et l'entrée $u(t) = 0$, le système est stable si et seulement si :*

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \quad \lambda_i \in \sigma(A), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.26)$$

D'après ce théorème sur la stabilité, il en découle que les différentes régions stables et instables apparaissent sur la figure 4.1 :

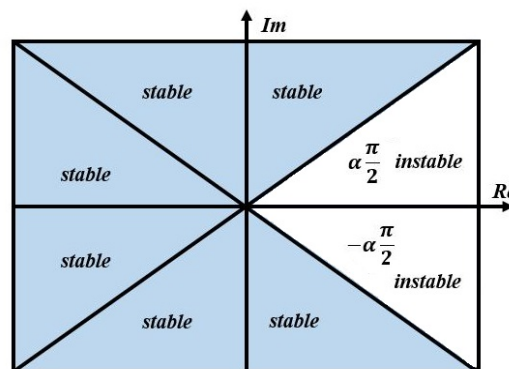


FIGURE 4.1: Région de stabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire dans le plan s^α pour $0 < \alpha < 1$.

- Observabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

Matignon et D'Andréa-Novél [209], ainsi que Shamardan et Moubarak [211], ont fourni des résultats d'observabilité pour les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire continus en utilisant la matrice du Grammien d'observabilité et la condition de rang. Pour présenter ces résultats de manière concise, considérons le système d'ordre fractionnaire donné par sa représentation d'état (4.23).

Définition 4.5 *Le système (4.23) est observable sur $[t_0 \ t_1]$; $t_1 > 0$ si $x(t_0)$ peut être déduit à partir de la connaissance de la sortie $y(t)$ et de l'entrée $u(t)$ pour $t \in [t_0 \ t_1]$.*

Le système (4.23) est dit observable si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

– Critère de Kalman

$$\text{rang}(\mathcal{O}_{fl}) = \text{rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (4.27)$$

– Critère d'Hautus

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} \sigma I_n - A \\ C \end{bmatrix} \right) = n \quad \forall \sigma \in \mathbb{C} \quad (4.28)$$

Définition 4.6 *Le Grammien d'observabilité est la matrice symétrique positive W_0 donnée par l'intégrale suivante :*

$$W_0(t_0, t) = \int_{t_0}^t E_\alpha(A^T(\tau)^\alpha) C^T C E_\alpha(A(\tau)^\alpha) d\tau \quad (4.29)$$

Avec $E_\alpha(\cdot)$ est la fonction de Mittag-Leffler.

Le système (4.23) est observable sur $[t_0 \ t_1]$ si et seulement si (4.29) est définie positive pour $t \in [t_0 \ t_1]$.

4.3.5 Matrice de transition fractionnaire

Considérons un système linéaire fractionnaire commensurable dont la représentation d'état est de la forme :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.30)$$

L'application de la transformée de Laplace nous permet d'obtenir :

$$\begin{cases} s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \quad (4.31)$$

A partir de cette représentation, on peut obtenir la fonction de transfert du système pour des conditions initiales nulles comme suit :

$$Y(s) = [C(s^\alpha I - A)^{-1} B + D] U(s) \quad (4.32)$$

où $[C(s^\alpha I - A)^{-1}B + D] = H(s)$, est la fonction de transfert du système. D'autre part, en appliquant la transformée de Laplace inverse à (4.31) on obtient l'expression de l'état du système

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}[(s^\alpha I - A)^{-1}BU(s) + s^{\alpha-1}(s^\alpha I - A)^{-1}x(0)] \quad (4.33)$$

On peut alors définir une matrice de transition pour les systèmes fractionnaires, par analogie avec les systèmes d'ordre entier.

On définit ainsi, la matrice de transition généralisée comme suit :

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[s^{\alpha-1}(s^\alpha I - A)^{-1}] \quad (4.34)$$

Le calcul de $\mathcal{L}^{-1}[s^{\alpha-1}(s^\alpha - a)^{-1}]$ donne :

$$\mathcal{L}^{-1}[s^{\alpha-1}(s^\alpha - a)^{-1}] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} = E_\alpha(at^\alpha) \quad (4.35)$$

On peut donc en déduire le cas matriciel :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} = E_\alpha(At^\alpha) = \Phi(t) \quad (4.36)$$

Remarque 4.7 *On remarque que cette matrice de transition relative au système (4.30) n'est rien d'autre que la fonction de Mittag-Leffler généralisée au cas matriciel.*

4.3.6 Solution de l'équation d'état fractionnaire

En se basant sur les propriétés de la transformée de Laplace, l'expression du vecteur d'état $x(t)$ est obtenue à partir de l'équation (4.33) :

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \mathcal{L}^{-1}[(s^\alpha I - A)^{-1}] * [Bu(t)] \quad (4.37)$$

Avec $*$ est le produit de convolution.

Nous avons :

$$\mathcal{L}^{-1}[(s^\alpha I - A)^{-1}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha}}{\Gamma(k(\alpha + 1) + 1)}$$

La relation (4.37) permet d'établir la solution de l'équation d'état comme suit :

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t - \tau)^\alpha) Bu(\tau) d\tau. \quad (4.38)$$

4.4 Systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire

Dans le cas non linéaire, plusieurs résultats sur l'observabilité des systèmes d'ordre fractionnaire ont été obtenus. Ces résultats sont basés sur la condition du rang et sur le Grammien d'observabilité. Dans [212], des propriétés d'observabilité et une forme canonique observable ont été introduites. Ces propriétés peuvent être déduites à partir d'un système non linéaire d'ordre entier. Considérons le cas d'un système non linéaire d'ordre fractionnaire décrit comme suit :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (4.39)$$

Avec $D^\alpha x(t) = [D^\alpha x_1(t) \ D^\alpha x_2(t) \dots \ D^\alpha x_n(t)]^T$, $f(x(t))$ et $g(x(t))$ sont des champs vectoriels lisses pour $x(t) \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$, \mathcal{M} étant un ensemble compact contenant l'origine, $u(t) \in \mathbb{R}$ est l'entrée de commande, $y(t) \in \mathbb{R}$ est la sortie. α est l'ordre de la dérivée tel que $0 < \alpha < 1$, nous posons le temps initial $t_0 = 0$, et les conditions initiales sont désignées par $x_0 = x(0)$.

4.4.1 Observabilité

Le problème de l'observabilité consiste à reconstruire toutes les variables d'état à partir de la connaissance de la sortie. Les définitions de l'observabilité des systèmes non linéaires sont basées sur le concept d'indiscernabilité [213]. Soit X un sous-ensemble ouvert de \mathcal{M} . Pour l'étude de l'observabilité, nous considérons le système avec l'entrée nul $u(t) = 0$, ainsi le système (4.39) devient :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = f(x(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (4.40)$$

Définition 4.8 [212] *La paire de conditions initiales $x_1(0) \in X$ et $x_2(0) \in X$ sont fortement indiscernables si les deux solutions correspondantes $x_1(t) \in X$ et $x_2(t) \in X$ de (4.40) donnent la même sortie, c'est-à-dire :*

$$h(x_1(t)) = h(x_2(t)) \quad \forall t \in [0, \infty)$$

Théoriquement, l'horizon temporel peut être infini afin de distinguer les deux points initiaux. Mais, en général, l'intervalle de temps est limité à un horizon fini donné, ce qui donne la définition suivante.

Définition 4.9 [212] *La paire de conditions initiales $x_1(0) \in X$ et $x_2(0) \in X$ sont indiscernables s'il existe un temps final fini $T > 0$ tel que les solutions correspondantes*

$x_1(t) \in X$ et $x_2(t) \in X$ de (4.40) donnent la même sortie, c'est-à-dire :

$$h(x_1(t)) = h(x_2(t)) \quad \forall t \in [0, T]$$

Soit $I(x_1, X, T)$ l'ensemble des solutions $x_i(t)$, $t \in [0, T]$, pour une condition initiale donnée $x_i(0)$ qui sont indiscernables de x_1 .

Définition 4.10 [212, 214] *Le système (4.40) est observable en $x_1 \in \mathcal{M}$ si $I(x_1, \mathcal{M}, T) = x_1$ et le système (4.40) est fortement observable s'il est observable lorsque T tend vers l'infini.*

La notion d'observabilité faible est introduite lorsque T est proche de l'instant initial.

Définition 4.11 [212] *Soit $X \in \mathcal{M}$ un voisinage de x_1 et étant donné un temps fini $T > 0$, proche de l'instant initial. Le système (4.40) est localement et faiblement observable en x_1 si dans X nous avons $I(x_1, \mathcal{M}, T) = x_1(t)$, pour $t \in [0, T]$.*

La condition d'observabilité au sens du rang du système (4.40) est donnée par la définition suivante.

Définition 4.12 [213] *Le système non linéaire d'ordre fractionnaire (4.40) est dit localement faiblement observable si la condition de rang suivante est vérifiée :*

$$\text{rang} \begin{pmatrix} dh \\ dL_f h \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h \\ \vdots \\ dL_f^\infty h \end{pmatrix} = n \quad (4.41)$$

où $L_f h$ désigne la dérivée de Lie de h le long du champ vectoriel f , donnée par :

$$L_f h = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) \quad (4.42)$$

Pour un système de dimension n , la condition suffisante d'observabilité est la suivante :

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = n$$

Avec :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} dh \\ dL_f h \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

La condition d'observabilité des systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire est la même que celle des systèmes non linéaires d'ordre entier. Cette équivalence entre les systèmes d'ordre fractionnaire et d'ordre entier a déjà été établie dans le cas linéaire [201].

Supposons que le système (4.39) soit localement faiblement observable pour $u = 0$ et supposons que le degré relatif $r = n$, alors nous pouvons définir le changement de coordonnées suivant :

$$z_{i+1} = L_f^i h(x), \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (4.44)$$

La forme canonique d'observabilité est donnée comme suit :

$$\begin{cases} D^\alpha z_i(t) = z_{i+1}(t), & i = 1, \dots, n-1 \\ D^\alpha z_n(t) = az(t) + bz(t)u(t) \\ y(t) = z_1(t) \end{cases} \quad (4.45)$$

D'autre part, Balachandran et al. ont utilisé la fonction matricielle de Mittag-Leffler et la théorie de la contraction de Banach [215] pour étudier l'observabilité des systèmes fractionnaires linéaires et non linéaires [216]. La dérivée d'ordre fractionnaire de Caputo est prise en compte.

Le système non linéaire d'ordre fractionnaire étudié est donné comme suit :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), & t \in [0, T] := \varphi \\ y(t) = H(x(t)) \end{cases} \quad (4.46)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $f(\cdot)$ est un vecteur de fonctions non linéaires continues sur $t \in \varphi$, $y \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de sortie tel que $m < n$.

Il est nécessaire de trouver un état inconnu à l'instant présent t à partir de y sur l'intervalle $[\theta, t]$ avec θ est un temps passé.

Définition 4.13 [217] *Le système (4.46) est dit observable à l'instant t , s'il existe $\theta < t$ tel que l'état du système à l'instant t peut être identifié à partir de la connaissance de la sortie du système tout au long de l'intervalle $[\theta, t]$.*

Remarque 4.14 *Si le système est observable à tout instant $t \in \varphi$, il est alors dit complètement observable.*

La solution de l'équation (4.46) est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) = & W^{-1}(\theta, t) \int_{\theta}^t [E_\alpha(A(t-s)^\alpha)]^2 E_\alpha(A^*(t-s)^\alpha) H^* y(s) ds \\ & + W^{-1}(\theta, t) \int_{\theta}^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(A(t-s)^\alpha) W(\theta, s) f(s, x(s)) ds \end{aligned} \quad (4.47)$$

où E_α est la fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre, $E_{\alpha,\alpha}$ est la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres et $W(\theta, t)$ est la matrice de Grammien d'observabilité définie comme suit :

$$W(\theta, t) = \int_\theta^t E_\alpha(A^*t^\alpha)H^*HE_\alpha(At^\alpha)dt \quad (4.48)$$

A^* et H^* sont les matrices adjointes des matrices A et H , respectivement.

Theorem 4.15 [217] *Le système (4.46) est globalement observable (a) à l'instant t et complètement observable (b), si les conditions suivantes sont vérifiées.*

- Il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\det(W(\theta, t)) \geq c \quad (4.49)$$

- L'équation (4.47) a une solution unique pour tout y continu sur $[\theta, t]$.
 - (a) pour un certain $\theta < t$ dans le cas d'un système observable à l'instant t .
 - (b) pour tout t et pour un certain $\theta < t$ dans le cas d'un système complètement observable.

4.5 Systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire

L'émergence récente des méthodes de dérivation et d'intégration d'ordre non entier a rendu les systèmes d'ordre fractionnaire de plus en plus attractifs [218]. En effet, et bien que le calcul fractionnaire a été introduit en 1695, il a été considéré pendant longtemps comme un domaine purement mathématique sans applications réelles [219]. Ceci a toutefois changé et le calcul fractionnaire s'est avéré très utile pour modéliser la viscoélasticité [220], les ondes électromagnétiques [221], l'évolution quantique de systèmes complexes [222], etc.

Tous comme pour les systèmes d'ordre entier, la théorie du chaos [223, 224], est l'une des plus importantes applications du calcul fractionnaire. En conséquence, cette partie est dédiée à l'analyse des systèmes chaotiques fractionnaires, dont les propriétés inhérentes peuvent être utilisées dans des schémas de synchronisation.

En réalité, lorsque l'ordre total du système est inférieur à trois, le chaos ne peut être généré. Cependant, le modèle d'un système chaotique d'ordre fractionnaire peut être réorganisé en trois équations différentielles simples, dont chacune contient des dérivées fractionnaires. Cependant, l'ordre global du système sera la somme des ordres de chaque dérivée fractionnaire de l'état du

système, qui sera inférieur à 3. Le chaos apparaît dans le système de Chua-Hartley pour un ordre de 2.7. Ceci permet de conclure que le phénomène chaotique peut être observé dans un système fractionnaire dynamique dont l'ordre total est inférieur à trois alors que ça ne peut pas arriver dans le cas de systèmes d'ordre entier selon le théorème de Poincaré-Bendixon [225].

On considère les systèmes non linéaires fractionnaires suivants :

$$\begin{cases} D_t^{\alpha_i} x_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ x_i(0) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4.50)$$

où c_i désigne les conditions initiales, les α_i sont les ordres des dérivées fractionnaires, tel que dans le cas commensurable ($\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$).

Exemple 1 Soit le système de Lorenz d'ordre fractionnaire donné comme suit [195] :

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} x(t) = \sigma(y(t) - x(t)) \\ D^{\alpha_2} y(t) = x(t)(\rho - z(t)) - y(t) \\ D^{\alpha_3} z(t) = x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases} \quad (4.51)$$

Avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont les ordres de dérivation non entiers. Les paramètres du système de Lorenz d'ordre fractionnaire sont $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$. Les conditions initiales considérées sont $(x(0); y(0); z(0)) = (0.1; 0.1; 0.1)$.

Remarque 4.16 *Il est à noter qu'un ordre de dérivation minimal est requis pour que le système de Lorenz d'ordre fractionnaire puisse présenter un comportement chaotique. Ainsi, en considérant $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, l'ordre commensurable minimal est $\alpha > 0.9941$.*

L'attracteur étrange de Lorenz d'ordre fractionnaire est représenté par la figure 4.2, l'aspect aléatoire des trajectoires du système est donné par la figure 4.3.

La figure 4.4 présente la sensibilité aux conditions initiales de l'état x du système (4.51). Nous remarquons que, pour une petite variation de la condition initiale, la trajectoire de $x(t)$ diverge de la première courbe. Ce qui démontre la très grande sensibilité aux conditions initiales.

La sensibilité à l'ordre de dérivation fractionnaire du système de Lorenz est décrite par la figure 4.5. Ce qui démontre que la sensibilité des systèmes chaotiques fractionnaire est aussi bien liée aux conditions initiales qu'aux ordres de dérivations.

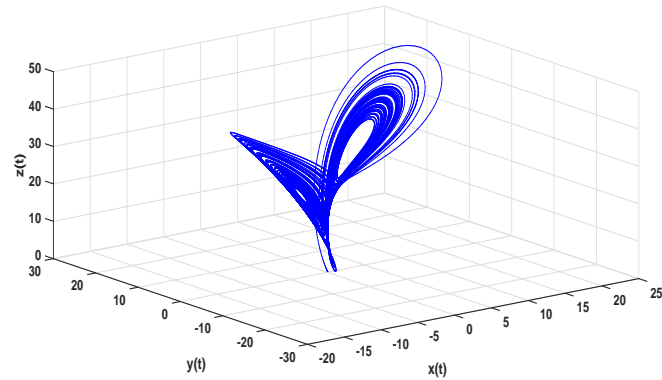


FIGURE 4.2: Attracteur étrange du système de Lorenz d'ordre fractionnaire.

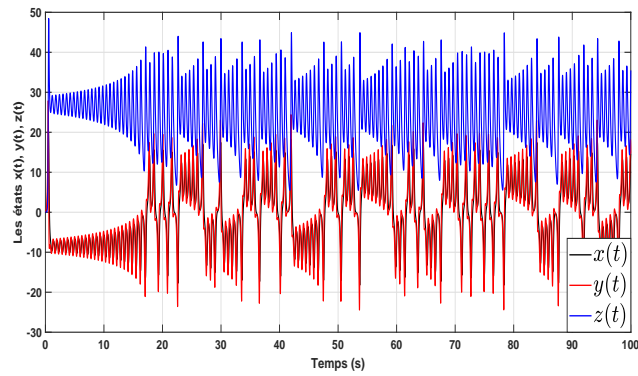


FIGURE 4.3: Trajectoires aléatoires des états du système de Lorenz d'ordre fractionnaire.

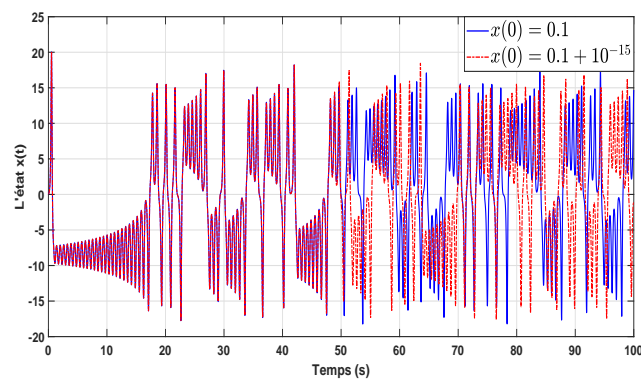


FIGURE 4.4: Sensibilité aux conditions initiales de l'état $x(t)$ du système de Lorenz d'ordre fractionnaire.

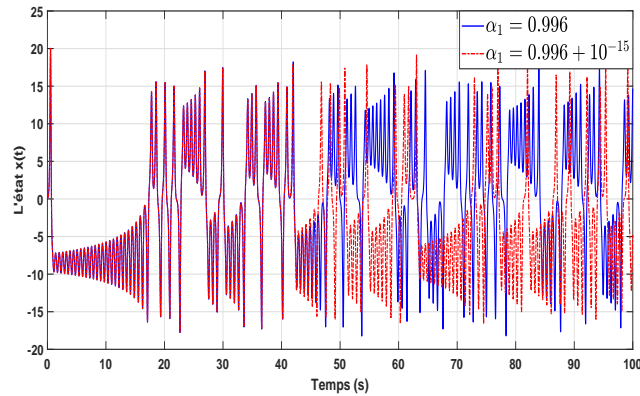


FIGURE 4.5: Sensibilité à l'ordre de dérivation de l'état $x(t)$ du système de Lorenz d'ordre fractionnaire.

Exemple 2 Soit le système de Rössler d'ordre fractionnaire non commensurable donné comme suit [195] :

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} x_1(t) = -x_2(t) - x_3(t) \\ D^{\alpha_2} x_2(t) = x_1(t) + ax_2(t) \\ D^{\alpha_3} x_3(t) = b + x_3(t)(x_1(t) - c) \end{cases} \quad (4.52)$$

Avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont les ordres de dérivation non entiers, $[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3] = [0.9 \ 0.85 \ 0.95]$. Les paramètres du système de Rössler d'ordre fractionnaire sont $a = 0.5, b = 0.2, c = 10$. Les conditions initiales considérées sont $(x_1(0); x_2(0); x_3(0)) = (0.5; 1.5; 0.1)$.

L'attracteur étrange de Rössler d'ordre fractionnaire est représenté par la figure 4.6, l'aspect aléatoire des états des trajectoires du système des Rössler fractionnaire est donné par la figure 4.7.

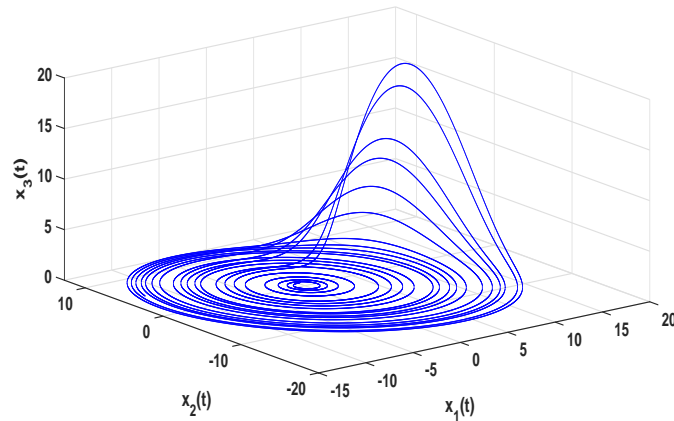


FIGURE 4.6: Attracteur étrange du système de Rössler d'ordre fractionnaire.

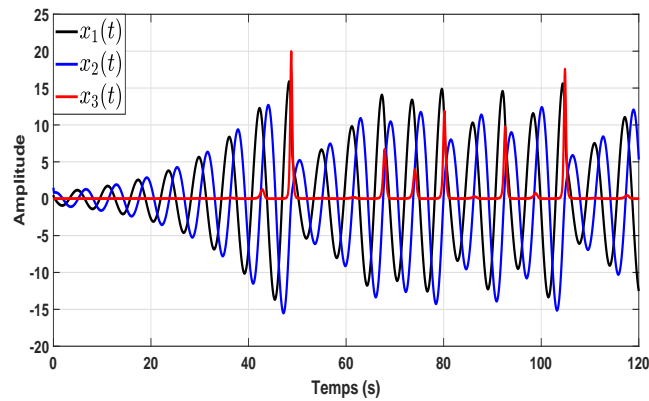


FIGURE 4.7: Trajectoires aléatoire des états du système de Rössler d'ordre fractionnaire.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fourni les notions de base et les outils mathématiques nécessaires pour étudier et appliquer les systèmes d'ordre fractionnaire.

En premier lieu, nous avons présenté un état de l'art sur la théorie de la dérivation non entière, à partir de quelques rappels sur les fonctions de base comme les fonctions de Gamma d'Euler et de Mittag-Leffler. Nous avons, ensuite, présenté les différentes définitions et propriétés de la dérivée fractionnaire.

Par la suite, nous avons abordé les différentes représentations des systèmes d'ordre fractionnaire, puis nous nous sommes intéressés aux notions de commandabilité, de stabilité et d'obser-

vabilité des systèmes d'ordre fractionnaire dans le cas linéaire et non linéaire.

Puis, nous avons présenté quelques exemples de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire en précisant pour chaque exemple, ses caractéristiques telles les équations dynamiques, l'attracteur étrange et l'aspect aléatoire des évolutions chaotiques.

Chapitre 5

Synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire soumis à des mesures retardées

5.1 Introduction

Le recours aux systèmes d'ordre fractionnaire, trouve son intérêt dans le fait que ces systèmes illustrent mieux le comportement des systèmes physiques, et dans le cadre du cryptage chaotique, ces systèmes offre une sécurité supplémentaire induite par l'ordre de dérivation fractionnaire. En effet, l'utilisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire dans la conception des schémas de communication sécurisée augmente grandement la sécurité, les ordres de dérivations sont considérés comme des paramètres supplémentaires de la clé de sécurité. Ainsi, l'espace de la clé de sécurité en devient plus complexe.

Plusieurs techniques ont été développées pour atteindre les différents régimes de synchronisation pour les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaires. Les méthodes les plus utilisées sont : Synchronisation par contrôle actif [100,226], synchronisation par rétroaction [227], synchronisation par backstepping [228], synchronisation par commande adaptative [229,230], etc.

Une autre méthode très utilisée est la synchronisation à base d'observateurs. Plusieurs observateurs ont été proposés pour l'estimation des états des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. Parmi ces observateurs, nous citons le filtre de Kalman étendu, qui est couramment utilisé pour la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. Plusieurs travaux, tels que celui

décrit dans [231], ont montré qu'un filtre de Kalman étendu peut synchroniser une variété de systèmes chaotiques fractionnaires. Un observateur à grand gain est largement utilisé pour l'estimation des systèmes non linéaires d'ordre entier. Il présente plusieurs avantages, notamment une convergence globale ou semi globale indépendante des conditions initiales pour un grand nombre de systèmes non linéaires. De plus, il présente un haut niveau de robustesse vis à vis des incertitudes et perturbations externes. Dans [232], un observateur à grand gain a été appliqué à la synchronisation de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. Par ailleurs, on trouve les observateurs à modes glissants. Cet observateur est très efficace pour faire face aux incertitudes du système et aux perturbations externes. Ce type d'observateur a été utilisé dans une large variété de schémas de synchronisation pour les systèmes d'ordre fractionnaire chaotiques dans le cas commensurable [233] et non commensurable [47].

Une autre méthode qui présente des similitudes avec la technique à mode glissant est l'approche basée sur la théorie synergétique. La théorie synergétique a été introduite par Kolesnikov [234]. A l'origine, la théorie synergétique est utilisée pour résoudre des problèmes de contrôle. Le contrôleur conçu par la théorie synergétique est attrayant en raison de sa simplicité et de sa caractéristique optimale. L'observateur synergétique a été utilisé pour la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaires [44].

Cependant, dans la plupart des méthodes de synchronisation proposées, plusieurs contraintes de communication, telles que retard dans le canal de transmission, les incertitudes et les perturbations externes ne sont pas prises en considération. Ces contraintes peuvent nuire à la synchronisation. Dans le cas de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire, seulement deux approches qui considèrent la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire avec retard de sortie sont présentés dans la littérature. Dans [158], deux observateurs à grand gain en cascade sont utilisés afin de compenser le retard de transmission de l'émetteur au récepteur. Dans [235], une commande par retour de sortie est utilisée pour la synchronisation de deux systèmes hyperchaotiques identiques d'ordres fractionnaires avec des sorties retardées. Cependant, les travaux présentés dans [158, 235] ne sont pas efficaces en présence d'incertitudes et de perturbations externes.

L'objectif de ce chapitre est de proposer une méthode de synchronisation des systèmes chaotiques non linéaires d'ordre fractionnaire en présence de retard de transmission et de perturbations. Cette approche est une extension de la méthode proposée dans le chapitre 3.

L'approche de synchronisation proposée est composée d'un observateur fractionnaire à mode glissant d'ordre supérieur qui permet d'estimer en temps fini et sans chattering les états retardés à partir de la mesure retardée, et d'un prédicteur d'état mis en cascade avec l'observateur afin de compenser l'effet du retard et d'obtenir ainsi les états estimés à l'instant présent.

Dans ce chapitre, nous allons d'abord synthétiser l'observateur fractionnaire à mode glissant d'ordre supérieur qui permet d'estimer les états retardés et la perturbation totale retardée. Ensuite, nous synthétisons le prédicteur d'état qui permet de compenser le retard et ainsi d'estimer les états à l'instant présent. La convergence du schéma proposé est analysé. A la fin, nous donnons les résultats de simulation obtenus. Les résultats théoriques obtenus dans ce travail ont fait l'objet d'un article soumis [236].

5.2 Système maître

Nous considérons la classe des systèmes non linéaires incertains d'ordre fractionnaire commensurables soumis à un retard de sortie donné comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha x_1(t) = x_2(t) \\ D^\alpha x_2(t) = x_3(t) \\ : \\ D^\alpha x_n(t) = \Theta(x_1(t), \dots, x_n(t)) + d(t) = \zeta(t) \\ D^\alpha \zeta(t) = w(t) \\ y^\tau(t) = x_1(t - \tau) \end{array} \right. \quad (5.1)$$

où $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'états, α est l'ordre de dérivation fractionnaire et $y^\tau(t) = y(t - \tau) \in \mathbb{R}$ est la sortie retardée du système. La fonction $\Theta(x_1(t), \dots, x_n(t))$ représente les incertitudes du système et $d(t)$ les perturbations externes. $\zeta(t)$ est considérée comme la perturbation totale, le retard $\tau > 0$ est une supposé constant et connu. D^α désigne l'opération de dérivation d'ordre α de Riemann-Liouville.

Le système (5.1) retardé peut alors s'écrire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha x_1^\tau(t) = x_2^\tau(t) \\ D^\alpha x_2^\tau(t) = x_3^\tau(t) \\ : \\ D^\alpha x_i^\tau(t) = x_{i+1}^\tau(t) \\ D^\alpha x_n^\tau(t) = \zeta^\tau(t) \\ D^\alpha \zeta^\tau(t) = w^\tau(t) \\ y^\tau(t) = x_1(t - \tau) \end{array} \right. \quad (5.2)$$

où $x_i^\tau(t) = x_i(t - \tau)$, $i = 1, \dots, n$ sont les états retardés et $\zeta^\tau(t) = \zeta(t - \tau)$ est la perturbation totale retardée.

Les systèmes chaotiques sont caractérisés par une instabilité locale et une limitation globale de leurs trajectoires, qui convergent vers un attracteur dit étrange lorsque les conditions initiales sont prises dans le bassin d'attraction.

Notons que la présence de la perturbation externe peut modifier le comportement chaotique du système. Nous supposons que le système est BIBS (Bounded Input Bounded State), c'est à dire les trajectoires du système restent bornées pour toute perturbation bornée admissible. La perturbation externe est prise suffisamment petite pour préserver le comportement chaotique.

Supposons, que les hypothèses suivantes soient satisfaites.

Hypothèse 5.1 *Les incertitudes $\Theta(x_1(t), \dots, x_n(t))$ et la perturbation $d(t)$ sont inconnues et uniformément bornées.*

Hypothèse 5.2 *Le système (5.2) est supposé BIBS (Bounded Input Bounded State), c'est-à-dire qu'il existe un temps fini T tel que pour toute entrée bornée et pour toute condition initiale $x(0)$, les trajectoires d'état du système (5.2) restent bornées pour tout $t \geq T$.*

Hypothèse 5.3 *On considère que la dérivée fractionnaire $w^\tau(t)$ de la perturbation totale est bornée, c'est-à-dire que $|w^\tau(t)| \leq w_{max}^\tau$.*

5.3 Synthèse du système esclave

Considérons le système chaotique d'ordre fractionnaire (5.1) (émetteur) soumis à des mesures retardées. L'estimation des états à l'instant présent à partir de la sortie retardée n'est pas directement évidente. Il est clair qu'à partir de la sortie retardée, il est seulement possible d'estimer

les états retardés, mais pas les états réels.

L'approche que nous proposons pour résoudre ce problème est d'utiliser un observateur à mode glissant d'ordre supérieur fractionnaire. Cet observateur estime à la fois les états retardés et la perturbation totale retardée, c'est-à-dire à l'instant $(t - \tau)$. Ces états et cette perturbation sont ensuite injectés dans un prédicteur d'état fractionnaire mis en chaîne, permettant la compensation de l'effet du retard et obtenir ainsi les états estimés à l'instant présent. Les conditions de convergence de la méthode proposée sont établies.

L'approche proposée est décrite dans la Figure 5.1 suivante.

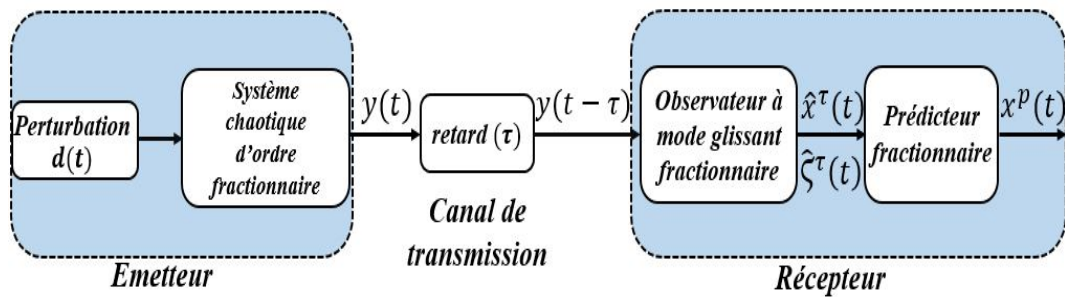


FIGURE 5.1: Schéma observateur-prédicteur fractionnaire.

5.3.1 Synthèse de l'observateur

Dans le cas d'un système non linéaire d'ordre fractionnaire (5.2), l'observateur à mode glissant d'ordre supérieur fractionnaire retardé est défini comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha \hat{x}_1^\tau(t) = \vartheta_1^\tau = \hat{x}_2^\tau - \lambda_1 L^{\frac{1}{n+1}} |\hat{x}_1^\tau - x_1^\tau|^{\frac{n}{n+1}} \text{sign}(\hat{x}_1^\tau - x_1^\tau) \\ D^\alpha \hat{x}_2^\tau(t) = \vartheta_2^\tau = \hat{x}_3^\tau - \lambda_2 L^{\frac{1}{n}} |\hat{x}_2^\tau - \vartheta_1^\tau|^{\frac{n-1}{n}} \text{sign}(\hat{x}_2^\tau - \vartheta_1^\tau) \\ : \\ D^\alpha \hat{x}_i^\tau(t) = \vartheta_i^\tau = \hat{x}_{i+1}^\tau - \lambda_i L^{\frac{1}{n-i+2}} |\hat{x}_i^\tau - \vartheta_{i-1}^\tau|^{\frac{n-i+1}{n-i+2}} \text{sign}(\hat{x}_i^\tau - \vartheta_{i-1}^\tau) \\ : \\ D^\alpha \hat{x}_n^\tau(t) = \vartheta_n^\tau = \hat{\zeta}^\tau - \lambda_n L^{\frac{1}{2}} |\hat{x}_n^\tau - \vartheta_{n-1}^\tau|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\hat{x}_n^\tau - \vartheta_{n-1}^\tau) \\ D^\alpha \hat{\zeta}^\tau(t) = -\lambda_{n+1} L \text{sign}(\hat{\zeta}^\tau - \vartheta_n^\tau) \end{array} \right. \quad (5.3)$$

où \hat{x}_i^τ ($i = 1, \dots, n$), sont les états estimés retardés, $\lambda_i > 0$ ($i = 1, \dots, n + 1$) sont les gains de l'observateur, qui sont calculés en utilisant la fonction de Lyapunov pour garantir la convergence des états estimés retardés vers leurs valeurs réelles correspondantes et L étant une constante

positive [157].

Le lemme suivant sera utilisé par la suite.

Lemme 5.1 [237]

Soit $x(t) \in \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable. Si la dérivée de $x(t)$ est intégrable, alors l'inégalité suivante est valable :

$$\frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) \leq x(t)D^\alpha x(t), \quad \forall \alpha \in (0, 1) \tag{5.4}$$

où D^α désigne la dérivée d'ordre α de Riemann-Liouville.

Theorem 5.1 *Considérons le système non linéaire d'ordre fractionnaire (5.2) et l'observateur (5.3). Supposons que les hypothèses 5.1-5.3 soient satisfaites. Alors, pour toute condition initiale $I_0^{(1-\alpha)} \hat{x}_i^\tau(t)|_{t=\tau}$, $i = 1, 2, \dots, n$, il existe des paramètres positifs L et λ_i , $i = 1, 2, \dots, n + 1$ choisis comme suit :*

$$\lambda_i > \frac{|e_{i+1}^\tau|_{max}}{L^{\frac{1}{n-i+2}} (|e_i^\tau|_{max})^{\frac{n-i+1}{n-i+2}}}; \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \tag{5.5}$$

$$\lambda_n > \frac{|e_\zeta^\tau|_{max}}{L^{\frac{1}{2}} (|e_n^\tau|_{max})^{\frac{1}{2}}} \tag{5.6}$$

$$\lambda_{n+1} > \frac{|w^\tau|_{max}}{L} \tag{5.7}$$

tels que les états retardés estimés $\hat{x}_i^\tau(t)$ convergent vers les états retardés $x_i^\tau(t)$ en temps fini.

De plus, la perturbation totale retardée estimée $\hat{\zeta}^\tau(t)$ converge vers la perturbation totale retardée $\zeta^\tau(t)$ également en temps fini.

Démonstration 5.1 *Étude de la convergence de l'observateur.*

Notons : $e_i^\tau(t) = \hat{x}_i^\tau(t) - x_i^\tau(t)$, $i = 1, \dots, n$ et $e_\zeta^\tau(t) = \hat{\zeta}^\tau(t) - \zeta^\tau(t)$.

La dynamique des erreurs d'estimation est alors donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha e_1^\tau(t) = \underbrace{e_2^\tau - \lambda_1 L^{\frac{1}{n+1}} |e_1^\tau|^{\frac{n}{n+1}} \text{sign}(e_1^\tau)}_{\tilde{\vartheta}_1^\tau = \vartheta_1^\tau - x_2^\tau} \\ D^\alpha e_2^\tau(t) = \underbrace{e_3^\tau - \lambda_2 L^{\frac{1}{n}} |e_2^\tau - \tilde{\vartheta}_1^\tau|^{\frac{n-1}{n}} \text{sign}(e_2^\tau - \tilde{\vartheta}_1^\tau)}_{\tilde{\vartheta}_2^\tau = \vartheta_2^\tau - x_3^\tau} \\ : \\ D^\alpha e_i^\tau(t) = \underbrace{e_{i+1}^\tau - \lambda_i L^{\frac{1}{n-i+2}} |e_i^\tau - \tilde{\vartheta}_{i-1}^\tau|^{\frac{n-i+1}{n-i+2}} \text{sign}(e_i^\tau - \tilde{\vartheta}_{i-1}^\tau)}_{\tilde{\vartheta}_i^\tau = \vartheta_i^\tau - x_{i+1}^\tau} \\ : \\ D^\alpha e_n^\tau(t) = \underbrace{e_\zeta^\tau - \lambda_n L^{\frac{1}{2}} |e_n^\tau - \tilde{\vartheta}_{n-1}^\tau|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_n^\tau - \tilde{\vartheta}_{n-1}^\tau)}_{\tilde{\vartheta}_n^\tau = \vartheta_n^\tau - \zeta^\tau} \\ D^\alpha e_\zeta^\tau(t) = -w^\tau(t) - \lambda_{n+1} L \text{sign}(e_\zeta^\tau - \tilde{\vartheta}_n^\tau) \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Soit la première équation de (5.8), considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_1(t) = \frac{1}{2} e_1^\tau(t)^2 \quad (5.9)$$

En appliquant la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville pour la fonction de Lyapunov par rapport au temps et en utilisant le Lemme 5.1, nous avons :

$$D^\alpha V_1(t) \leq e_1^\tau(t) D^\alpha e_1^\tau(t) \leq e_1^\tau(t) \left(e_2^\tau - \lambda_1 L^{\frac{1}{n+1}} |e_1^\tau|^{\frac{n}{n+1}} \text{sign}(e_1^\tau) \right) \quad (5.10)$$

L'inégalité (5.10) peut alors se réécrire comme suit :

$$\begin{aligned} D^\alpha V_1(t) &\leq |e_1^\tau(t)| \left(|e_2^\tau|_{\max} - \lambda_1 L^{\frac{1}{n+1}} (|e_1^\tau|_{\max})^{\frac{n}{n+1}} \right) \\ &\leq -|e_1^\tau(t)| \left(\lambda_1 L^{\frac{1}{n+1}} (|e_1^\tau|_{\max})^{\frac{n}{n+1}} - |e_2^\tau|_{\max} \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

En choisissant :

$$\lambda_1 > \frac{|e_2^\tau|_{\max}}{L^{\frac{1}{n+1}} (|e_1^\tau|_{\max})^{\frac{n}{n+1}}} \quad (5.12)$$

Alors :

$$D^\alpha V_1(t) \leq -\beta_1 \sqrt{V_1(t)} \quad (5.13)$$

Avec $\beta_1 = \lambda_1 L^{\frac{1}{n+1}} (|e_1^\tau|_{\max})^{\frac{n}{n+1}} - |e_2^\tau|_{\max} > 0$.

A partir de (5.13) nous avons $D^\alpha e_1^\tau = e_1^\tau = 0$. Cela signifie que $\hat{x}_1^\tau(t)$ converge vers $x_1^\tau(t)$ en temps fini $T_1 + \tau$.

La limite supérieure du temps fini de convergence est obtenue en intégrant les côtés gauche et droit de (5.13) comme suit :

$$T_1 = \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\frac{1}{2})}{\beta_1 \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} V_1(0)^{\alpha - \frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (5.14)$$

De plus, à partir de $D^\alpha e_1^\tau = 0$, on obtient $\tilde{\vartheta}_1^\tau = 0$.

De même, nous faisons la même chose pour e_2^τ et puisque $\tilde{\vartheta}_1^\tau = 0$, alors :

$$D^\alpha e_2^\tau(t) = e_3^\tau - \lambda_2 L^{\frac{1}{n}} |e_2^\tau|^{\frac{n-1}{n}} \text{sign}(e_2^\tau) \quad (5.15)$$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_2(t) = \frac{1}{2} e_2^\tau(t)^2 \quad (5.16)$$

En appliquant la dérivée de Riemann-Liouville pour la fonction de Lyapunov par rapport au temps et en utilisant le Lemme 5.1, nous avons :

$$D^\alpha V_2(t) \leq e_2^\tau(t) D^\alpha e_2^\tau(t) \leq e_2^\tau(t) \left(e_3^\tau - \lambda_2 L^{\frac{1}{n}} |e_2^\tau|^{\frac{n-1}{n}} \text{sign}(e_2^\tau) \right) \quad (5.17)$$

On peut écrire l'inégalité (5.17) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} D^\alpha V_2(t) &\leq |e_2^\tau(t)| \left(|e_3^\tau|_{\max} - \lambda_2 L^{\frac{1}{n}} (|e_2^\tau|_{\max})^{\frac{n-1}{n}} \right) \\ &\leq -|e_2^\tau(t)| \left(\lambda_2 L^{\frac{1}{n}} (|e_2^\tau|_{\max})^{\frac{n-1}{n}} - |e_3^\tau|_{\max} \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

En choisissant :

$$\lambda_2 > \frac{|e_3^\tau|_{\max}}{L^{\frac{1}{n}} (|e_2^\tau|_{\max})^{\frac{n-1}{n}}} \quad (5.19)$$

Alors :

$$D^\alpha V_2(t) \leq -\beta_2 \sqrt{V_2(t)} \quad (5.20)$$

Avec $\beta_2 = \lambda_2 L^{\frac{1}{n}} (|e_2^\tau|_{\max})^{\frac{n-1}{n}} - |e_3^\tau|_{\max} > 0$.

Nous avons alors $D^\alpha e_2^\tau = e_2^\tau = 0$. Cela signifie que $\hat{x}_2^\tau(t)$ converge vers $x_2^\tau(t)$ en temps fini $T_2 + \tau$, où T_2 est donné par :

$$T_2 = \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\frac{1}{2})}{\beta_2 \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} V_2(0)^{\alpha - \frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (5.21)$$

En raison de la forme réursive de l'observateur à mode glissant, le temps fini $T_2 + \tau > T_1 + \tau$. De plus, à partir de $D^\alpha e_2^\tau = 0$, nous obtenons $\tilde{\vartheta}_2^\tau = 0$.

La même procédure peut alors être appliquée aux autres étapes. Par conséquent, afin de garantir la convergence en temps fini de e_i^τ et de $D^\alpha e_i^\tau$, les paramètres λ_i doivent satisfaire la condition suivante :

$$\lambda_i > \frac{|e_{i+1}^\tau|_{\max}}{L^{\frac{1}{n-i+2}} (|e_i^\tau|_{\max})^{\frac{n-i+1}{n-i+2}}} \quad i = 3, \dots, n-1 \quad (5.22)$$

Nous avons $\tilde{\vartheta}_{n-1}^\tau = 0$ de l'étape précédente, alors :

$$D^\alpha e_n^\tau(t) = e_\zeta^\tau - \lambda_n L^{\frac{1}{2}} |e_n^\tau|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_n^\tau) \quad (5.23)$$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_n(t) = \frac{1}{2} e_n^\tau(t)^2 \quad (5.24)$$

Nous avons :

$$D^\alpha V_n(t) \leq e_n^\tau(t) D^\alpha e_n^\tau(t) \leq e_n^\tau(t) \left(e_\zeta^\tau - \lambda_n L^{\frac{1}{2}} |e_n^\tau|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_n^\tau) \right) \quad (5.25)$$

On peut écrire l'inégalité (5.25) comme suit :

$$\begin{aligned} D^\alpha V_n(t) &\leq |e_n^\tau(t)| \left(|e_\zeta^\tau|_{max} - \lambda_n L^{\frac{1}{2}} (|e_n^\tau|_{max})^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq -|e_n^\tau(t)| \left(\lambda_n L^{\frac{1}{2}} (|e_n^\tau|_{max})^{\frac{1}{2}} - |e_\zeta^\tau|_{max} \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\lambda_n > \frac{|e_\zeta^\tau|_{max}}{L^{\frac{1}{2}} (|e_n^\tau|_{max})^{\frac{1}{2}}} \quad (5.27)$$

Il s'en suit :

$$D^\alpha V_n(t) \leq -\beta_n \sqrt{V_n(t)} \quad (5.28)$$

où $\beta_n = \lambda_n L^{\frac{1}{2}} (|e_n^\tau|_{max})^{\frac{1}{2}} - |e_\zeta^\tau|_{max} > 0$. Cela signifie que, $D^\alpha e_n^\tau = e_n^\tau = 0$, donc $\tilde{\vartheta}_n^\tau = 0$.

Convergence de la perturbation totale

Considérons la dernière équation de (5.8), et de l'étape précédente nous avons $\tilde{\vartheta}_n^\tau = 0$, alors :

$$D^\alpha e_\zeta^\tau(t) = -w^\tau(t) - \lambda_{n+1} L \text{sign}(e_\zeta^\tau) \quad (5.29)$$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_\zeta(t) = \frac{1}{2} e_\zeta^\tau(t)^2 \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} D^\alpha V_\zeta(t) &\leq e_\zeta^\tau(t) D^\alpha e_\zeta^\tau(t) \\ &\leq e_\zeta^\tau(t) (-w^\tau(t) - \lambda_{n+1} L \text{sign}(e_\zeta^\tau)) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} D^\alpha V_\zeta(t) &\leq |e_\zeta^\tau(t)| (|w^\tau|_{max} - \lambda_{n+1} L) \\ &\leq -|e_\zeta^\tau(t)| (\lambda_{n+1} L - |w^\tau|_{max}) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Alors, afin de garantir la convergence de la perturbation totale, il suffit d'avoir

$$\lambda_{n+1} > \frac{|w^\tau|_{max}}{L} \quad (5.33)$$

Donc :

$$D^\alpha V_\zeta(t) \leq -\beta_\zeta \sqrt{V_\zeta(t)} \quad (5.34)$$

où $\beta_\zeta = \lambda_{n+1}L - |w^\tau|_{max} > 0$. Il s'en suit que e_ζ^τ convergent vers zéro en un temps fini $T_\zeta + \tau$, avec :

$$T_\zeta = \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\frac{1}{2})}{\beta_\zeta \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} V_\zeta(0)^{\alpha - \frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (5.35)$$

Ceci conclut la preuve de convergence de l'observateur proposé.

5.3.2 Synthèse du prédicteur

Dans la partie précédente, nous avons conçu un observateur à mode glissant d'ordre supérieur fractionnaire, dont le rôle est d'estimer en temps fini les états retardés. Afin d'obtenir les états à l'instant présent, nous utilisons un prédicteur pour compenser l'effet du retard. Sur la base des états retardés $\hat{x}^\tau(t)$ estimés par l'observateur (5.3) et de l'estimation de la perturbation totale retardée $\hat{\zeta}(t - \tau)$, le prédicteur estime les états réels. Le schéma observateur-prédicteur est illustré par la figure 5.1.

On injecte alors $\hat{x}^\tau(t)$ et $\hat{\zeta}(t - \tau)$ dans le prédicteur, de manière à obtenir les estimés des états à l'instant actuel $x^p(t)$.

Considérons le système d'ordre fractionnaire (5.1), écrit sous la forme matricielle comme suit :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + B\zeta(t) \\ y^\tau(t) = Cx(t - \tau) \quad t \geq \tau \end{cases} \quad (5.36)$$

où la matrice A et les vecteurs B et C sont définis comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \quad (5.37)$$

Le système (5.36) est sous la forme de Brunovsky.

Le prédicteur permet de prévoir indirectement l'état actuel du système. Cette approche consiste en une partie dynamique et une partie statique. La partie dynamique est construite pour calculer une variable virtuelle qui prédit indirectement la différence entre l'état actuel et l'état retardé. Cette variable et l'estimation de l'état retardé fournie par l'observateur d'ordre

fractionnaire (5.3) sont ensuite utilisées par la partie statique pour obtenir la prédiction de l'état actuel. Le prédicteur proposé est représenté par les équations suivantes :

$$D^\alpha \gamma(t) = A\gamma(t) + B\hat{\zeta}(t - \tau) \quad t \geq \tau \quad (5.38)$$

$$x^p(t) = e_\alpha^{A\tau} \hat{x}(t - \tau) + \gamma(t) - e_\alpha^{A\tau} \gamma(t - \tau), \quad t \geq \tau \quad (5.39)$$

où $\gamma(t) \in \mathfrak{R}^n$ est l'état interne du prédicteur, qui est obtenu à l'aide de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire retardée (5.38) avec des conditions initiales quelconques $I_0^{(1-\alpha)} \gamma(t)|_{t=0} = \gamma_0$. Dans l'approche observateur-prédicteur, l'état prédit $x^p(t)$ dépend de la trajectoire de l'état estimé retardé $\hat{x}^\tau(t)$. Ainsi, le théorème suivant étudie la convergence de l'erreur de prédiction $e^p(t) = \|x^p(t) - x(t)\|$.

Lemme 5.2 [158] *Considérons l'équation d'état (5.36), telle que pour toute condition initiale, il existe une solution unique de l'équation d'état (5.36) alors pour tout $\tau \geq 0$, la relation suivante s'applique :*

$$x(t) = e_\alpha^{A\tau} x(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t e_\alpha^{A(t-\theta)} B\zeta(\theta) d\theta, \quad t > \tau \quad (5.40)$$

Hypothèse 5.4 *La perturbation totale $\zeta(t)$, satisfait la condition de variation lente dans le temps, c'est-à-dire qu'il existe une limite supérieure τ_{max} du retard et une petite constante réelle positive ε_η telle que :*

$$\|\zeta(t - \tau) - \zeta(t)\| \leq \varepsilon_\eta \quad \text{pour } t \geq \tau \text{ et tout } \tau \in [0, \tau_{max}]$$

Theorem 5.2 *Considérons le prédicteur (5.38)-(5.39) pour le système (5.36). Si l'hypothèse 5.4 est satisfaite, alors, l'erreur de prédiction $\|e^p(t)\| \leq \|e_\alpha^{A\tau}\| \varepsilon_\eta \tau, \forall t \geq T$, où $T \geq T_\zeta + \tau$.*

Démonstration 5.2 *Selon le lemme 5.2, la solution de l'équation (5.38) est donnée par :*

$$\gamma(t) = e_\alpha^{A\tau} \gamma(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t e_\alpha^{A(t-\theta)} \left(B\hat{\zeta}(\theta - \tau) \right) d\theta \quad t > \tau \quad (5.41)$$

En remplaçant (5.41) dans (5.39), le prédicteur (5.39) peut être réécrit comme suit :

$$x^p(t) = e_\alpha^{A\tau} \hat{x}(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t e_\alpha^{A(t-\theta)} \left(B\hat{\zeta}(\theta - \tau) \right) d\theta, \quad t > \tau \quad (5.42)$$

Maintenant, en soustrayant l'équation (5.40) de (5.42), on obtient :

$$\begin{aligned} e^p(t) &= x^p(t) - x(t) = e_\alpha^{A\tau} (\hat{x}(t - \tau) - x(t - \tau)) \\ &+ \int_{t-\tau}^t e_\alpha^{A(t-\theta)} B \left(\hat{\zeta}(\theta - \tau) - \zeta(\theta) \right) d\theta \end{aligned} \quad (5.43)$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \|e^p(t)\| &\leq \|e_\alpha^{A\tau}\| (\|\hat{x}(t-\tau) - x(t-\tau)\|) \\ &+ \int_{t-\tau}^t \|e_\alpha^{A(t-\theta)}\| \left(\|\hat{\zeta}(\theta-\tau) - \zeta(\theta)\| \right) d\theta \end{aligned} \quad (5.44)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \|e^p(t)\| &\leq \|e_\alpha^{A\tau}\| (\|\hat{x}(t-\tau) - x(t-\tau)\|) \\ &+ \|e_\alpha^{A\tau}\| \int_{t-\tau}^t \left(\|\hat{\zeta}(\theta-\tau) - \zeta(\theta)\| \right) d\theta \end{aligned} \quad (5.45)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} &\int_{t-\tau}^t \|\hat{\zeta}(\theta-\tau) - \zeta(\theta)\| d\theta = \\ &\int_{t-\tau}^t \|\hat{\zeta}(\theta-\tau) - \zeta(\theta) + \zeta(\theta-\tau) - \zeta(\theta-\tau)\| d\theta \\ &\leq \int_{t-\tau}^t \|\hat{\zeta}(\theta-\tau) - \zeta(\theta-\tau)\| d\theta + \int_{t-\tau}^t \|\zeta(\theta-\tau) - \zeta(\theta)\| d\theta \end{aligned} \quad (5.46)$$

De l'hypothèse 5.4, on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_{t-\tau}^t \|\hat{\zeta}(\theta-\tau) - \zeta(\theta)\| d\theta \\ &\leq \int_{t-\tau}^t \|\hat{\zeta}(\theta-\tau) - \zeta(\theta-\tau)\| d\theta + \int_{t-\tau}^t \varepsilon_\eta d\theta \\ &\leq \int_{t-\tau}^t \|\hat{\zeta}(\theta-\tau) - \zeta(\theta-\tau)\| d\theta + \varepsilon_\eta \tau \end{aligned} \quad (5.47)$$

Maintenant, en substituant (5.47) dans (5.45), on obtient :

$$\begin{aligned} \|e^p(t)\| &\leq \|e_\alpha^{A\tau}\| (\|\hat{x}(t-\tau) - x(t-\tau)\|) \\ &+ \|e_\alpha^{A\tau}\| \int_{t-\tau}^t \|\hat{\zeta}(\theta-\tau) - \zeta(\theta-\tau)\| d\theta + \|e_\alpha^{A\tau}\| \varepsilon_\eta \tau \end{aligned} \quad (5.48)$$

D'après le théorème (5.1), les termes $\|\hat{x}(t-\tau) - x(t-\tau)\|$ et $\|\hat{\zeta}(t-\tau) - \zeta(t-\tau)\|$ convergent vers zéro après un temps fini $T_\zeta + \tau$. Alors pour $T \geq T_\zeta + \tau$, l'équation (5.48) devient :

$$\|e^p(t)\| \leq \|e_\alpha^{A\tau}\| \varepsilon_\eta \tau, \quad \forall t \geq T \quad (5.49)$$

Nous pouvons déduire de (5.49), que l'erreur de prédiction $e^p(t)$ converge dans une boule pour tout $t \geq T$, et peut converger vers 0 si $\tau \rightarrow 0$ ou si la perturbation totale est constante, c'est-à-dire $\varepsilon_\eta = 0$.

Ceci complète la preuve.

5.4 Application à la synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires

Dans cette section, les simulations des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire sont effectuées en utilisant la définition de Grünwald-Letnikov de la dérivée d'ordre fractionnaire donnée par :

$$\Delta^\alpha f(t) \simeq \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{j=\lfloor t/h \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh)$$

Avec $\binom{\alpha}{j}$ est le terme binomial. Pour son calcul, nous pouvons utiliser l'expression suivante :

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-j+1)}{j!}$$

et h représente le pas de temps de simulation.

5.4.1 Système chaotique de Genesio Tesi

Le système chaotique d'ordre fractionnaire de Genesio Tesi [195, 233] est utilisé dans cette section pour illustrer l'efficacité de la méthode proposée. Les équations de ce système sont les suivantes :

$$\begin{cases} D^\alpha x_1(t) = x_2(t) \\ D^\alpha x_2(t) = x_3(t) \\ D^\alpha x_3(t) = -a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) - a_3 x_3(t) + a_4 x_1^2(t) + d(t) = \zeta(t) \\ y^\tau(t) = x_1(t - \tau) \end{cases} \quad (5.50)$$

Avec $d(t)$ est la perturbation externe supposée inconnue, elle est prise comme suit :

$$d(t) = 0,1 \cos(5t)x_3 - 0,1 \sin(t).$$

Le système (5.50) est mis sous la forme de Brunovsky suivante :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + B\zeta(t) \\ y^\tau(t) = Cx(t - \tau) \quad t \geq \tau \end{cases} \quad (5.51)$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

Les paramètres du système sont pris comme suit : $a_1 = 1$, $a_2 = 1, 1$, $a_3 = 0, 15$, $a_4 = 1$; et $\alpha = 0, 9$. Pour ces paramètres, le système présente un comportement chaotique comme l'illustre le plan de phase de la Figure 5.2. Le portrait de phase chaotique est tracé pour les conditions initiales suivantes :

$$I_0^{(1-\alpha)} x_1(t)|_{t=0} = 0.05, I_0^{(1-\alpha)} x_2(t)|_{t=0} = 0.05, I_0^{(1-\alpha)} x_3(t)|_{t=0} = -0.05.$$

L'observateur à mode glissant d'ordre supérieur fractionnaire est donné comme suit :

$$\begin{cases} D^\alpha \hat{x}_1^\tau(t) = \vartheta_1^\tau = \hat{x}_2^\tau - \lambda_1 L^{\frac{1}{4}} |\hat{x}_1^\tau - x_1^\tau|^{\frac{3}{4}} \text{sign}(\hat{x}_1^\tau - x_1^\tau) \\ D^\alpha \hat{x}_2^\tau(t) = \vartheta_2^\tau = \hat{x}_3^\tau - \lambda_2 L^{\frac{1}{3}} |\hat{x}_2^\tau - \vartheta_1^\tau|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\hat{x}_2^\tau - \vartheta_1^\tau) \\ D^\alpha \hat{x}_3^\tau(t) = \vartheta_3^\tau = \hat{\zeta}^\tau - \lambda_3 L^{\frac{1}{2}} |\hat{x}_3^\tau - \vartheta_2^\tau|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\hat{x}_3^\tau - \vartheta_2^\tau) \\ D^\alpha \hat{\zeta}^\tau(t) = -\lambda_4 L \text{sign}(\hat{\zeta}^\tau - \vartheta_3^\tau) \end{cases} \quad (5.53)$$

Les conditions initiales de l'observateur sont les suivantes :

$$I_0^{(1-\alpha)} \hat{x}_1^\tau(t)|_{t=\tau} = I_0^{(1-\alpha)} \hat{x}_2^\tau(t)|_{t=\tau} = I_0^{(1-\alpha)} \hat{x}_3^\tau(t)|_{t=\tau} = 0.$$

Les paramètres de l'observateur λ_i sont choisis comme suit : $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 8$, $\lambda_3 = 5$, $\lambda_4 = 2.5$ et le coefficient $L = 1$.

Le prédicteur est sous la forme suivante :

$$\begin{cases} D^\alpha \gamma(t) = A\gamma(t) + B\hat{\zeta}(t - \tau) \\ x^p(t) = e_\alpha^{A\tau} \hat{x}(t - \tau) + \gamma(t) - e_\alpha^{A\tau} \gamma(t - \tau) \end{cases} \quad (5.54)$$

Les conditions initiales du prédicteur sont :

$$I_0^{(1-\alpha)} \gamma_1(t)|_{t=0} = I_0^{(1-\alpha)} \gamma_2(t)|_{t=0} = I_0^{(1-\alpha)} \gamma_3(t)|_{t=0} = 0.$$

La méthode de synchronisation proposée est comparée à d'autres approches de synchronisation utilisant les observateurs à mode glissant fractionnaire du premier ordre et du second ordre basé sur l'algorithme du Super-Twisting. De plus, un observateur à mode glissant fractionnaire du premier ordre utilisant une fonction continue au lieu de la fonction *sign* discontinue est également considéré.

Les structures de ces observateurs sont définies comme suit :

L'observateur à mode glissant d'ordre deux fractionnaire basé sur l'algorithme du Super-Twisting (FSTA) est défini comme suit [47] :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha \tilde{x}_1^\tau(t) = \tilde{x}_2^\tau + \lambda_1 |\epsilon_1^\tau|^{1/2} \text{sign}(\epsilon_1^\tau) \\ D^\alpha \tilde{x}_2^\tau(t) = \alpha_1 \text{sign}(\epsilon_1^\tau) \\ D^\alpha \hat{x}_2^\tau(t) = E_1 [\tilde{x}_3^\tau + \lambda_2 |\epsilon_2^\tau|^{1/2} \text{sign}(\epsilon_2^\tau)] \\ D^\alpha \tilde{x}_3^\tau(t) = E_1 [\alpha_2 \text{sign}(\epsilon_2^\tau)] \\ D^\alpha \hat{x}_3^\tau(t) = E_2 [\tilde{\theta}^\tau + \lambda_3 |\epsilon_3^\tau|^{1/2} \text{sign}(\epsilon_3^\tau)] \\ D^\alpha \tilde{\theta}^\tau(t) = E_2 [\alpha_3 \text{sign}(\epsilon_3^\tau)] \\ \hat{\zeta}^\tau(t) = \tilde{\theta}^\tau(t) \end{array} \right. \quad (5.55)$$

avec $\epsilon_1^\tau = x_1^\tau - \hat{x}_1^\tau$ et $\epsilon_i^\tau = \tilde{x}_i^\tau - \hat{x}_i^\tau$, pour $i = 2, \dots, 3$. $E_i = 1$ si $|\epsilon_i^\tau| \leq \epsilon$ sinon $E_i = 0$.

Les paramètres de l'observateur (5.55) sont : $\alpha_1 = 0.8$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 12$.

$\lambda_1 = 0.8$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 6$.

L'observateur à mode glissant fractionnaire du premier ordre est donné comme suit [238] :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha \hat{x}_1^\tau(t) = \hat{x}_2^\tau + \beta_1 \text{sign}(\sigma_1^\tau) \\ D^\alpha \hat{x}_2^\tau(t) = \hat{x}_3^\tau + E_1 \beta_2 \text{sign}(\sigma_2^\tau) \\ D^\alpha \hat{x}_3^\tau(t) = \hat{\zeta}^\tau + E_2 \beta_3 \text{sign}(\sigma_3^\tau) \\ D^\alpha \hat{\zeta}^\tau(t) = E_3 \beta_4 \text{sign}(\sigma_4^\tau) \\ \tilde{x}_2^\tau(t) = \hat{x}_2^\tau + E_1 \beta_1 \text{sign}_{eq}(\sigma_1^\tau) \\ \tilde{x}_3^\tau(t) = \hat{x}_3^\tau + E_2 \beta_2 \text{sign}_{eq}(\sigma_2^\tau) \\ \tilde{\zeta}^\tau(t) = \hat{\zeta}^\tau + E_3 \beta_3 \text{sign}_{eq}(\sigma_3^\tau) \end{array} \right. \quad (5.56)$$

avec $\sigma_1^\tau = x_1^\tau - \hat{x}_1^\tau$, $\sigma_i^\tau = \tilde{x}_i^\tau - \hat{x}_i^\tau$ pour $i = 2, 3$ et $\sigma_4^\tau = \tilde{\zeta}^\tau - \hat{\zeta}^\tau$ et sign_{eq} est la fonction sign continue. $E_i = 1$ si $|\sigma_i^\tau| \leq \epsilon$ sinon $E_i = 0$. Les paramètres de l'observateur (5.56) sont : $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 2.5$, $\beta_3 = 13$, $\beta_4 = 55$.

L'observateur fractionnaire à mode glissant du premier ordre utilisant une approximation en

temps continu de la fonction sign est donné comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha \hat{x}_1^\tau(t) = \hat{x}_2^\tau + \beta_1 \text{sign}_{eq}(\sigma_1^\tau) \\ D^\alpha \hat{x}_2^\tau(t) = \hat{x}_3^\tau + E_1 \beta_2 \text{sign}_{eq}(\sigma_2^\tau) \\ D^\alpha \hat{x}_3^\tau(t) = \hat{\zeta}^\tau + E_2 \beta_3 \text{sign}_{eq}(\sigma_3^\tau) \\ D^\alpha \hat{\zeta}^\tau(t) = E_3 \beta_4 \text{sign}_{eq}(\sigma_4^\tau) \\ \\ \tilde{x}_2^\tau(t) = \hat{x}_2^\tau + E_1 \beta_1 \text{sign}_{eq}(\sigma_1^\tau) \\ \tilde{x}_3^\tau(t) = \hat{x}_3^\tau + E_2 \beta_2 \text{sign}_{eq}(\sigma_2^\tau) \\ \tilde{\zeta}^\tau(t) = \hat{\zeta}^\tau + E_3 \beta_3 \text{sign}_{eq}(\sigma_3^\tau) \end{array} \right. \quad (5.57)$$

avec $\sigma_1^\tau = x_1^\tau - \hat{x}_1^\tau$, $\sigma_i^\tau = \tilde{x}_i^\tau - \hat{x}_i^\tau$ pour $i = 2, 3$ et $\sigma_4^\tau = \tilde{\zeta}^\tau - \hat{\zeta}^\tau$ et $\text{sign}_{eq}(s) = \frac{s}{|s|+\epsilon}$.

Les paramètres de l'observateur (5.57) sont : $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 1$, $\beta_4 = 15$.

La sortie $y(t)$ (signal de commande) est transmise au système esclave (observateur+prédicteur). Tout d'abord, nous considérons le cas où il n'y a pas de retard de transmission (voir figure 5.3).

Les figures 5.4-5.7 montrent les états réels et les états estimés obtenus par les approches de synchronisation utilisant les observateurs (5.53), (5.55), (5.56) et (5.57), respectivement. Nous constatons qu'en l'absence de retard affectant la sortie, toutes les approches utilisées donnent de bonnes estimations des états et de la perturbation totale. Néanmoins, comme on peut le voir sur la figure (5.6), la technique de synchronisation utilisant l'observateur à mode de glissant du premier ordre présente un chattering important.

Maintenant, nous considérons le cas d'un retard dans la sortie. Pour $\tau = 0.2s$, les figures 5.8-5.11 montrent les résultats de simulation obtenus par les approches de synchronisation utilisant les observateurs (5.53), (5.55), (5.56) et (5.57), respectivement, où sont représentés les états réels, les états estimés retardés, les états estimés à l'instant présent (états prédits) et la perturbation totale estimée retardée. Les figures 5.8 et 5.9 montrent que l'approche proposée utilisant l'observateur à mode glissant d'ordre supérieur fractionnaire (5.53) et l'approche utilisant l'observateur fractionnaire Super Twisting (5.55) donnent de meilleurs résultats. En effet, on constate que les états prédits convergent vers les états réels avec une grande précision et la perturbation totale retardée est bien reconstruite. Cependant, il y a un léger chattering dans la perturbation totale estimée retardée donnée par l'observateur à mode glissant du second ordre (5.55). Dans le cas de l'approche de synchronisation utilisant l'observateur à mode glissant du

premier ordre (5.56) (voir Figure 5.10), nous constatons que les états prédits convergent vers les états réels et que la perturbation totale retardée est bien reconstruite, mais le chattering est important. Dans la figure 5.11 donnée par l'observateur de premier ordre (5.57) qui utilise l'approximation en temps continu de la fonction *sign*, nous voyons que la perturbation totale retardée n'est pas bien reconstruite.

Afin d'évaluer la robustesse des méthodes, nous augmentons la taille du retard à $\tau = 0.4s$ et $\tau = 0.6s$, respectivement. Les résultats obtenus sont présentés dans les figures 5.12-5.15 et les figures 5.16-5.19. Ces figures montrent la bonne performance de l'observateur à mode glissant d'ordre supérieur fractionnaire (5.53) et de l'observateur à mode glissant du second ordre (5.55) malgré l'apparition d'un léger chattering dans la perturbation totale estimée retardée obtenue par l'observateur à mode glissant de second ordre. Le chattering est important dans le cas de l'observateur à mode glissant du premier ordre (5.56) qui dégrade la qualité de la synchronisation et de la récupération de la perturbation totale. Pour l'observateur (5.57), on constate que les états prédits et la perturbation totale estimée retardée ne sont pas correctement estimés.

Nous concluons que la méthode de synchronisation proposée utilisant un observateur à mode glissant d'ordre supérieur fractionnaire (5.53) s'est avérée la plus avantageuse, car elle améliore la robustesse et la précision par rapport aux incertitudes de modélisation, aux perturbations externes et au retard, tout en évitant le phénomène de chattering.

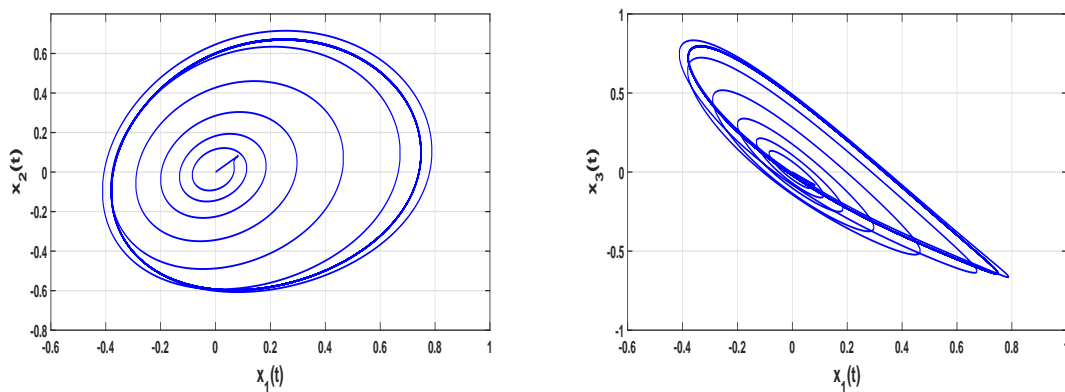


FIGURE 5.2: Portrait de phase du système chaotique.

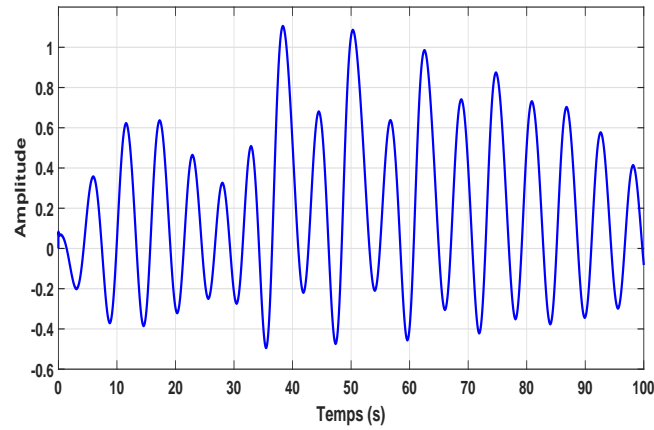
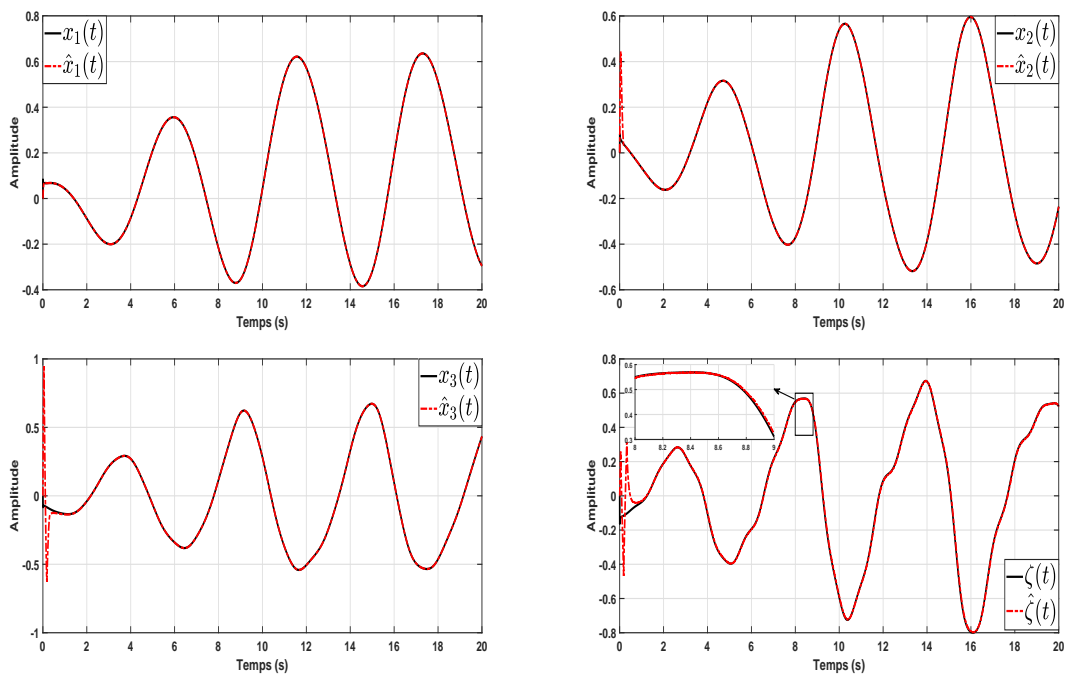


FIGURE 5.3: Signal de sortie sans retard.

FIGURE 5.4: États réels (en noir), états estimés (en rouge) pour l'observateur (5.53) avec $\tau = 0s$.

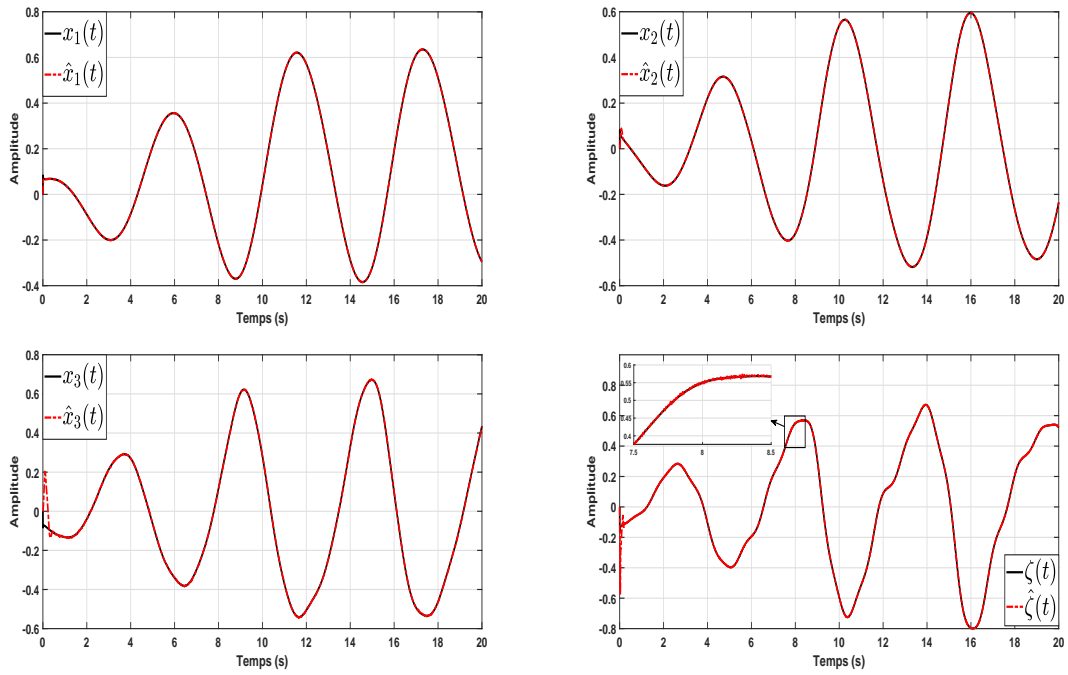


FIGURE 5.5: États réels (en noir), états estimés (en rouge) pour l'observateur (5.55) avec $\tau = 0s$.

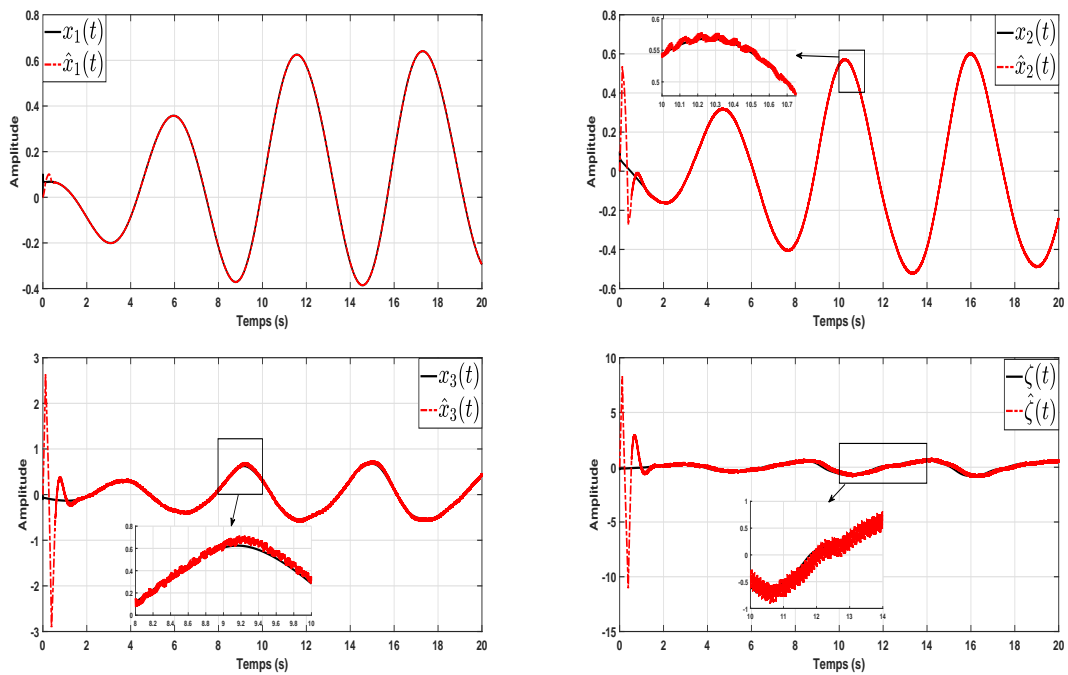
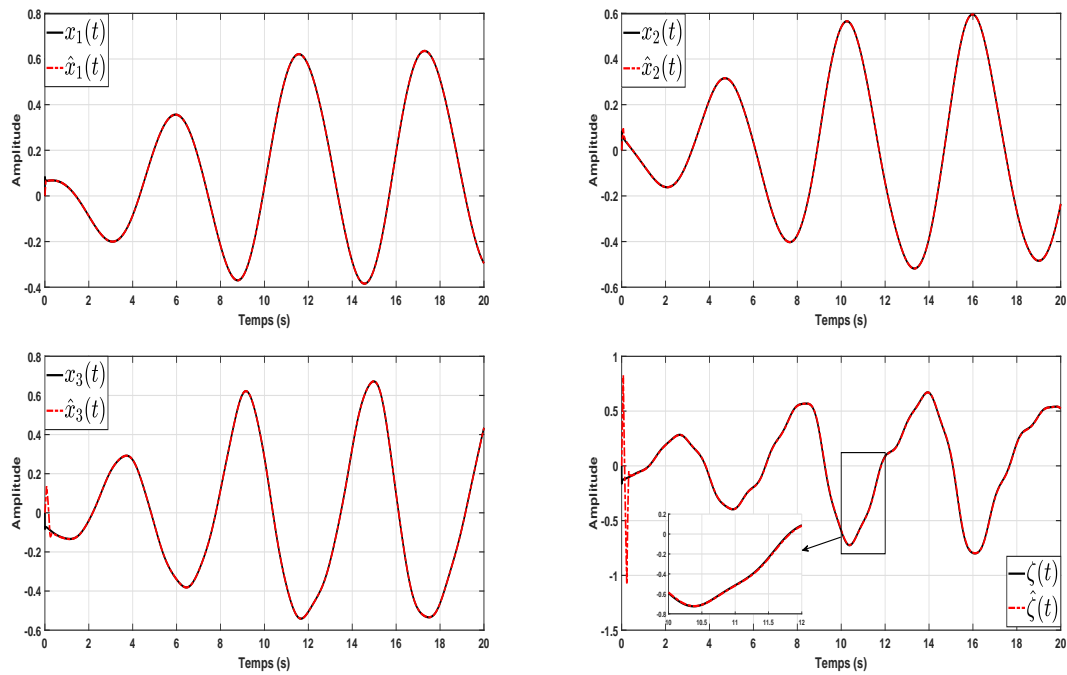
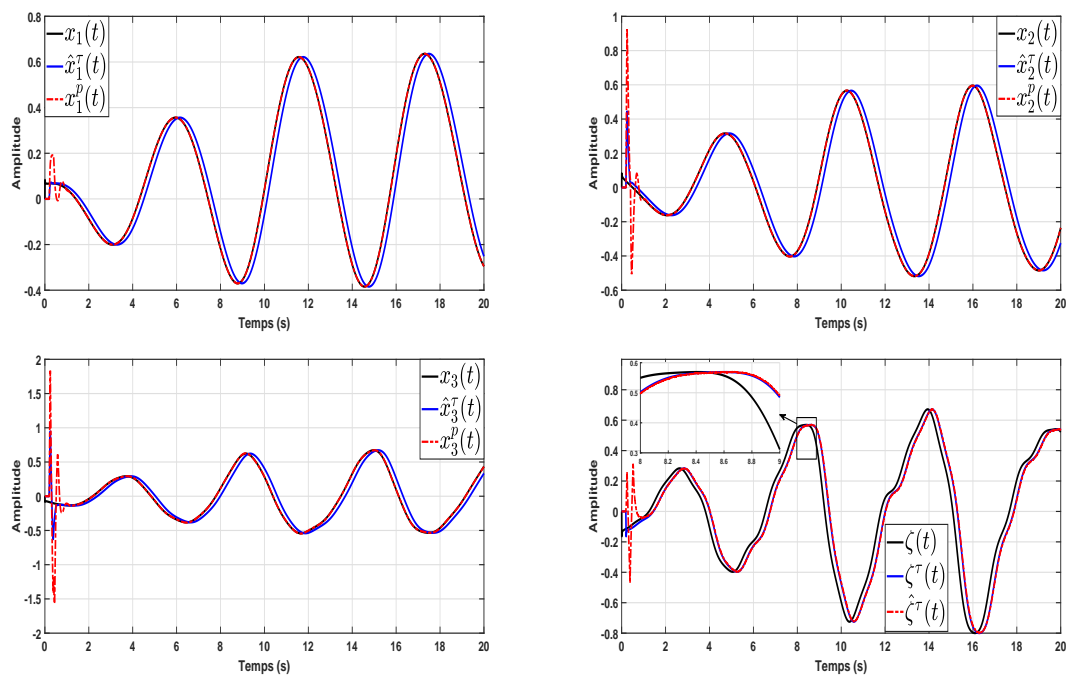


FIGURE 5.6: États réels (en noir), états estimés (en rouge) pour l'observateur (5.56) avec $\tau = 0s$.

FIGURE 5.7: États réels (en noir), états estimés (en rouge) pour l'observateur (5.57) avec $\tau = 0s$.FIGURE 5.8: États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.53) avec $\tau = 0.2s$.

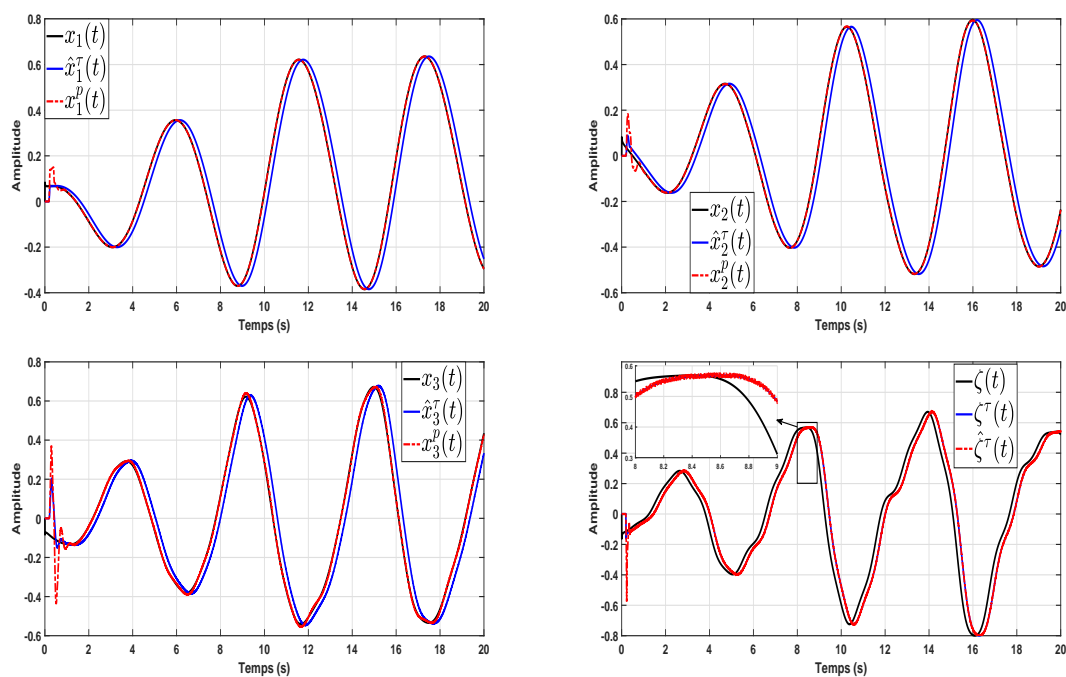


FIGURE 5.9: États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.55) avec $\tau = 0.2s$.

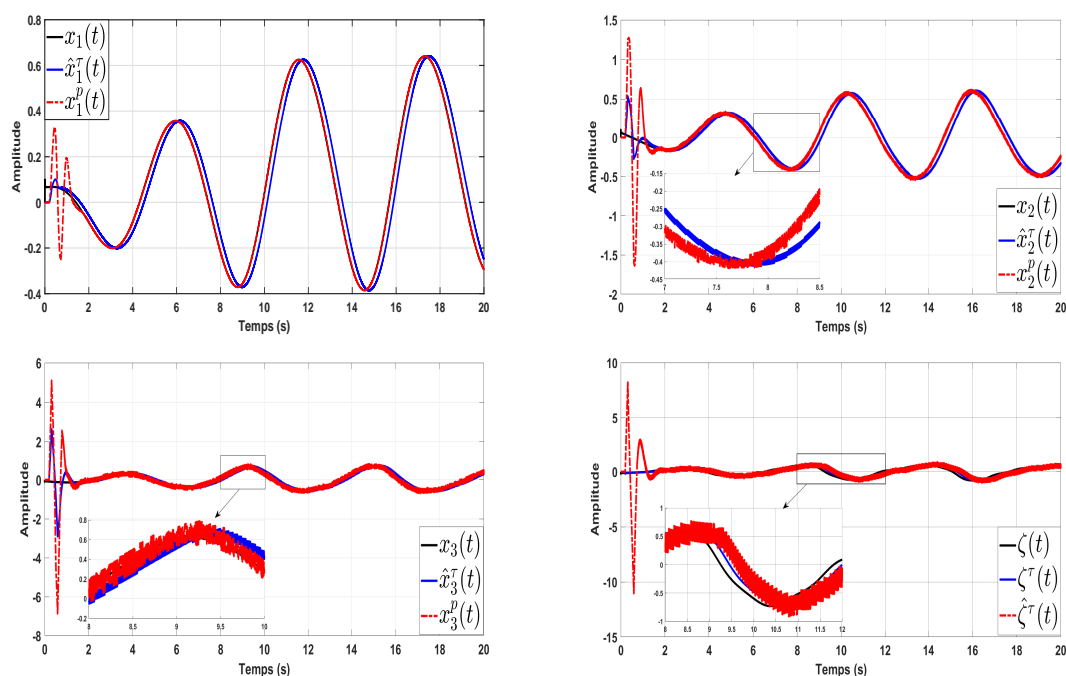


FIGURE 5.10: États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.56) avec $\tau = 0.2s$.

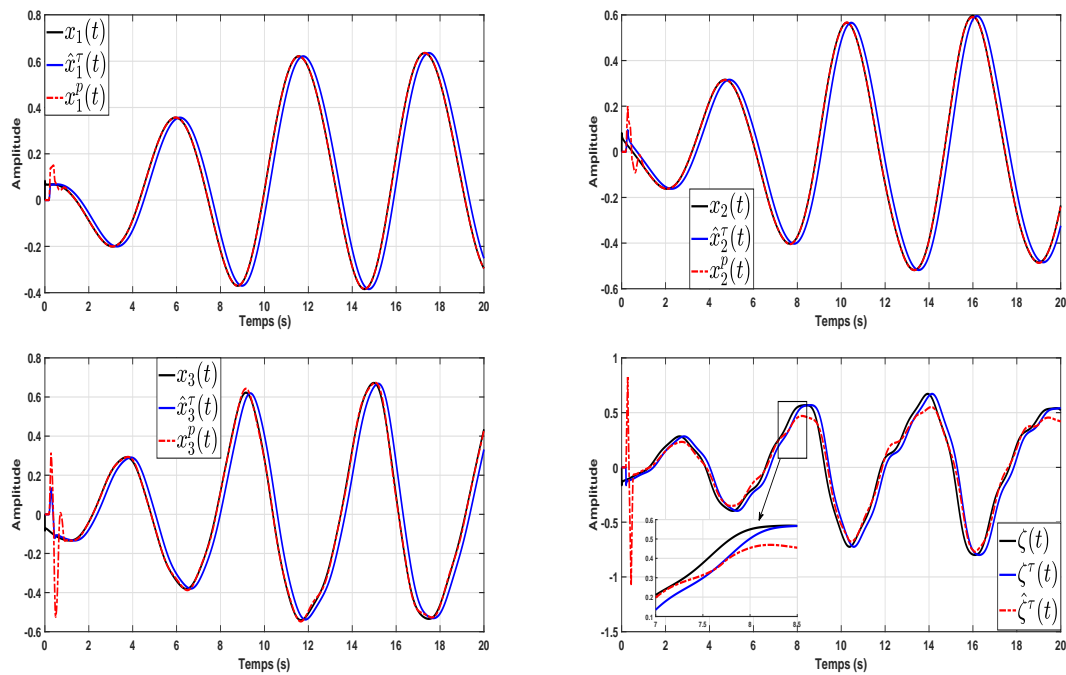


FIGURE 5.11: États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.57) avec $\tau = 0.2s$.

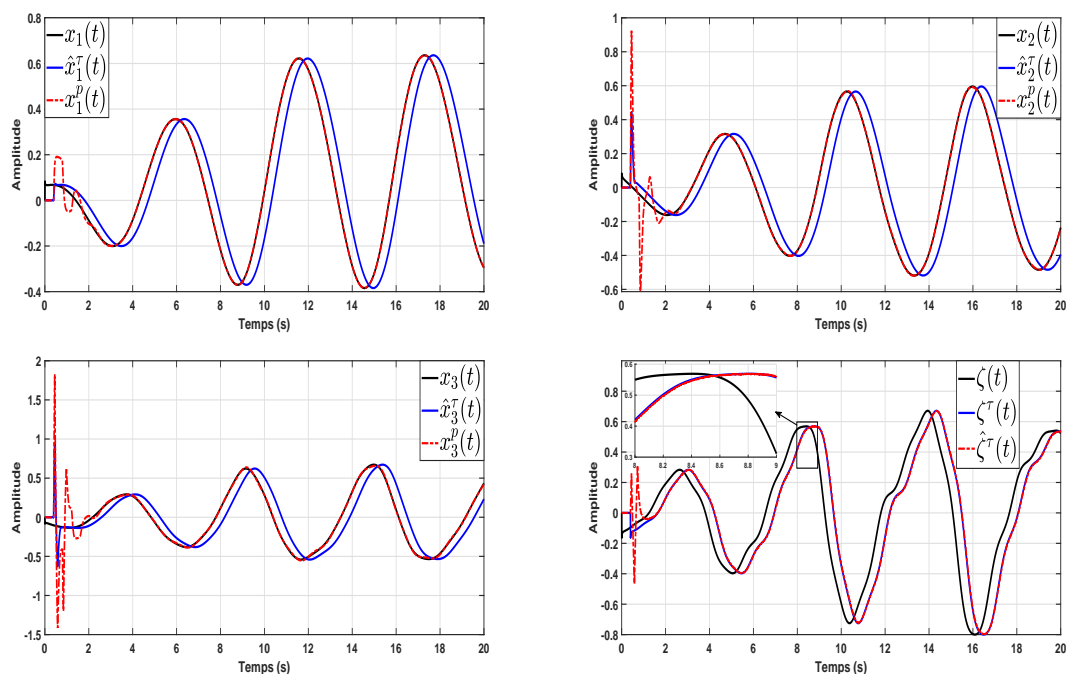


FIGURE 5.12: États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.53) avec $\tau = 0.4s$.

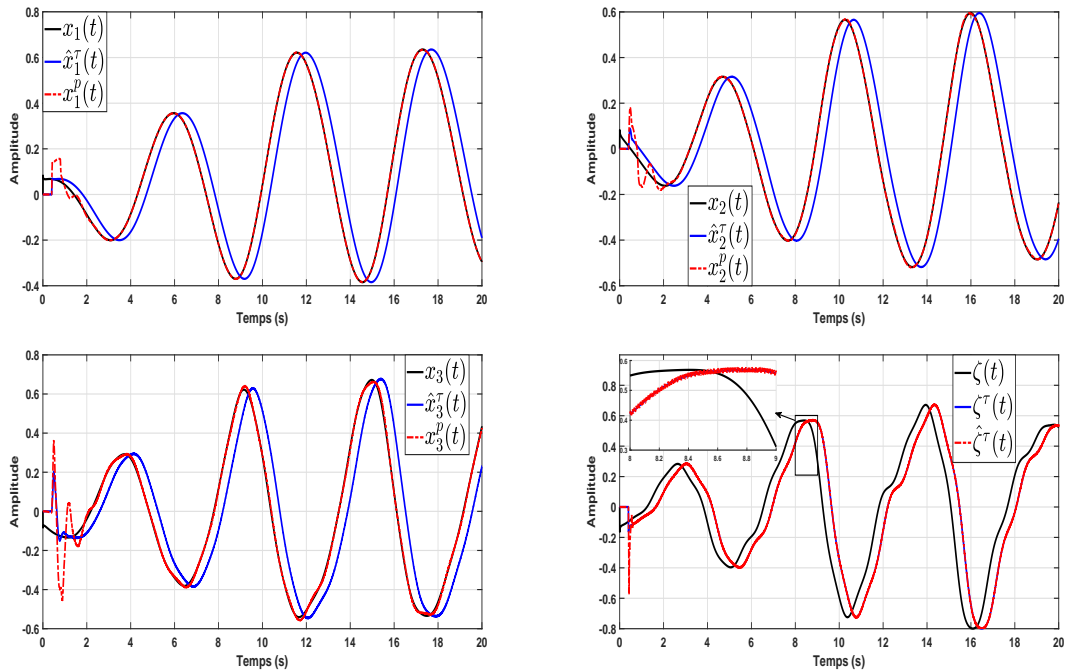


FIGURE 5.13: États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.55) avec $\tau = 0.4s$.

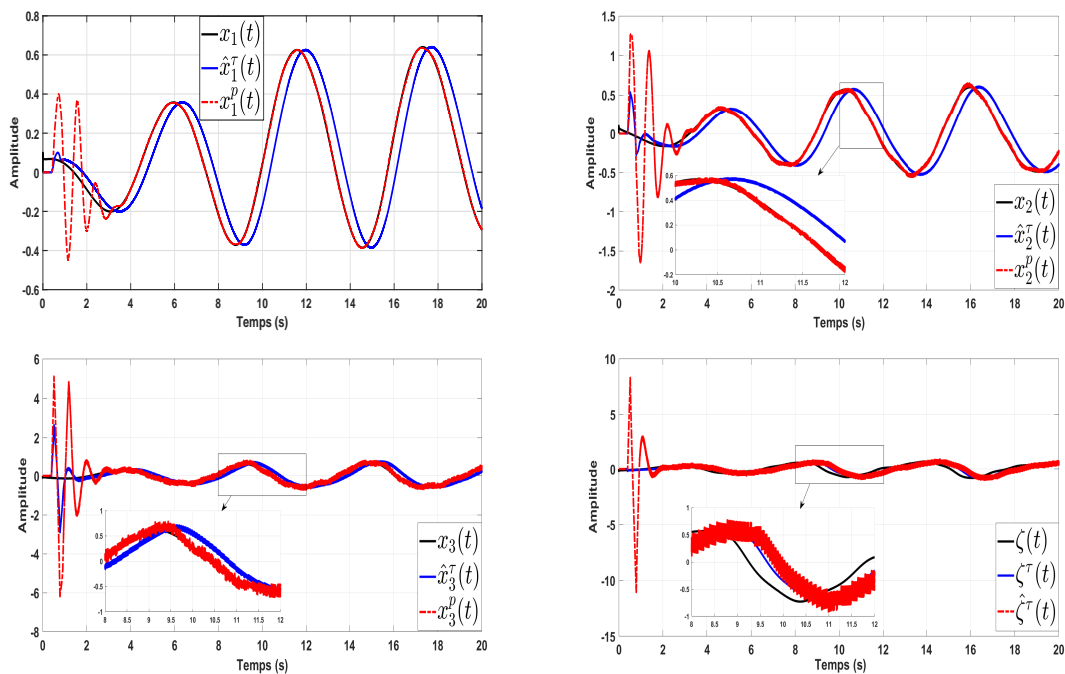


FIGURE 5.14: États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.56) avec $\tau = 0.4s$.

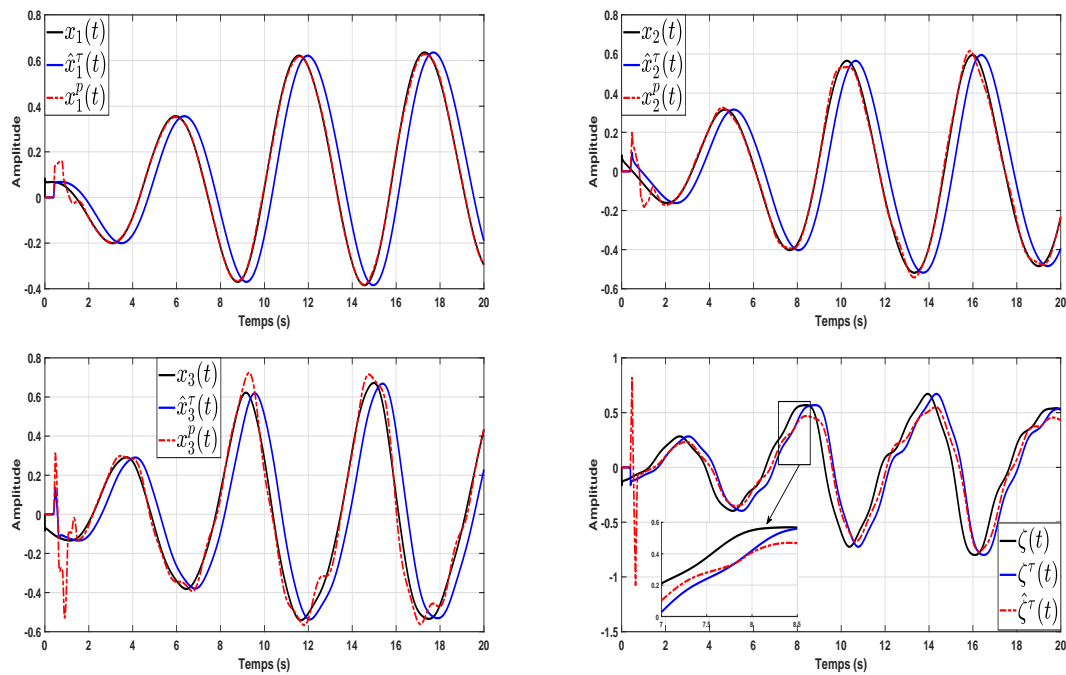


FIGURE 5.15: États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.57) avec $\tau = 0.4s$.

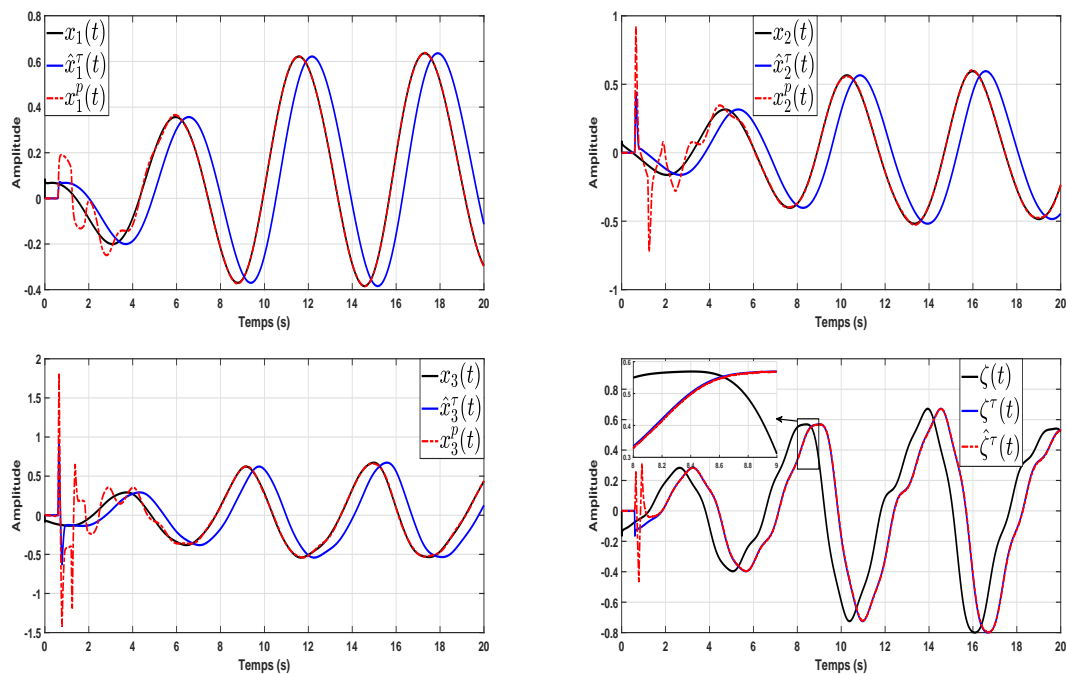


FIGURE 5.16: États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.53) avec $\tau = 0.6s$.

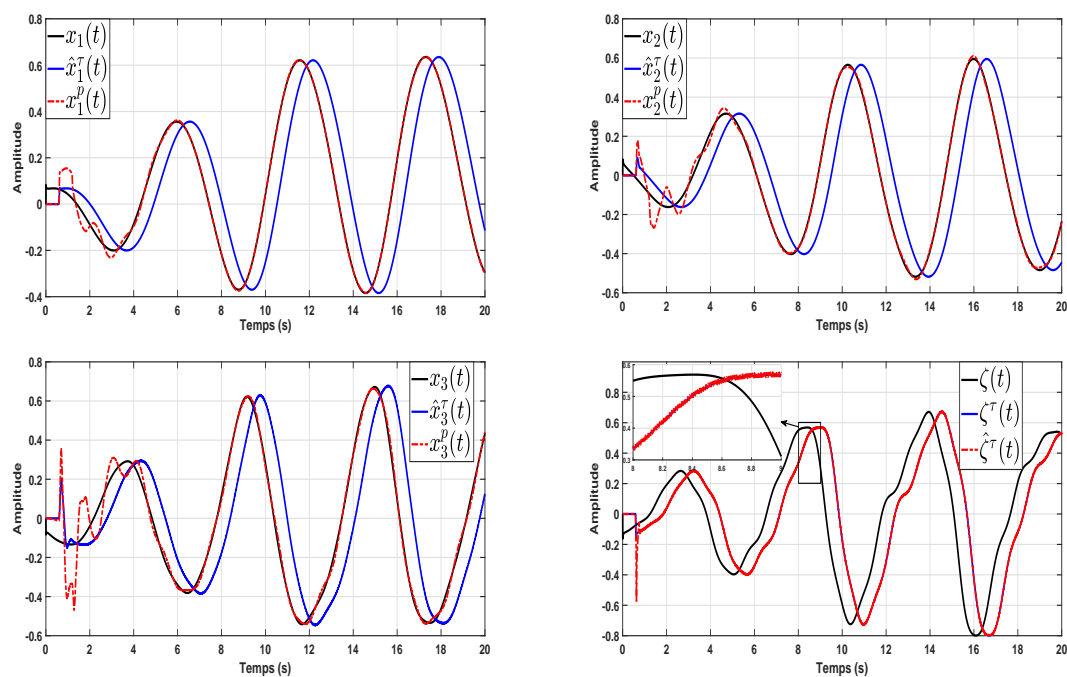


FIGURE 5.17: États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.55) avec $\tau = 0.6s$.

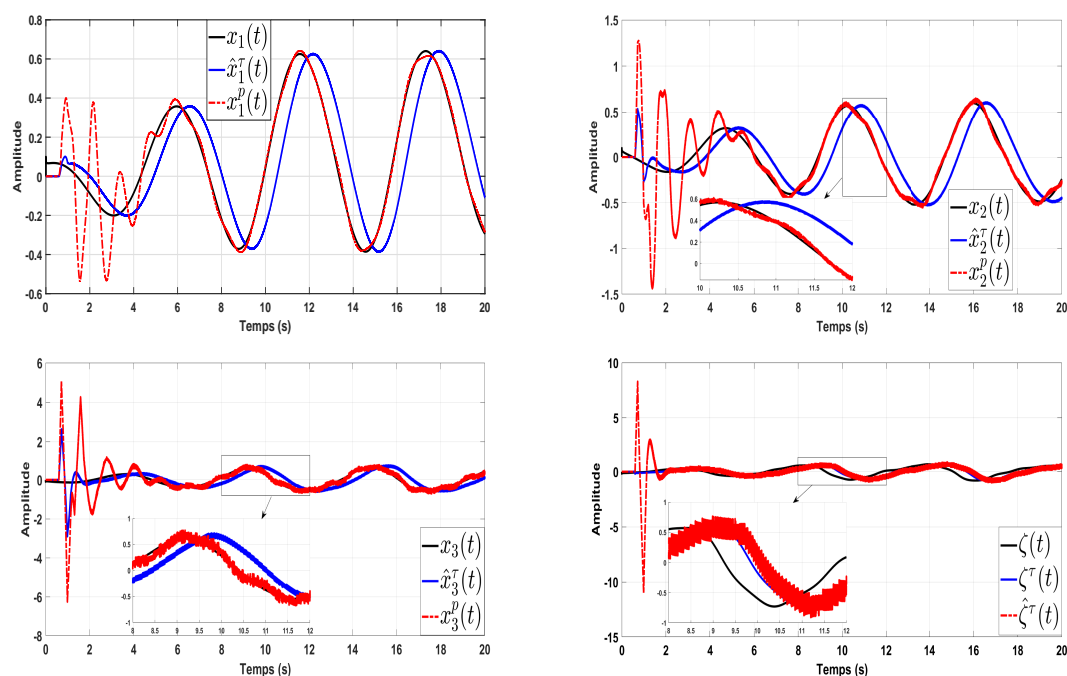


FIGURE 5.18: États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.56) avec $\tau = 0.6s$.

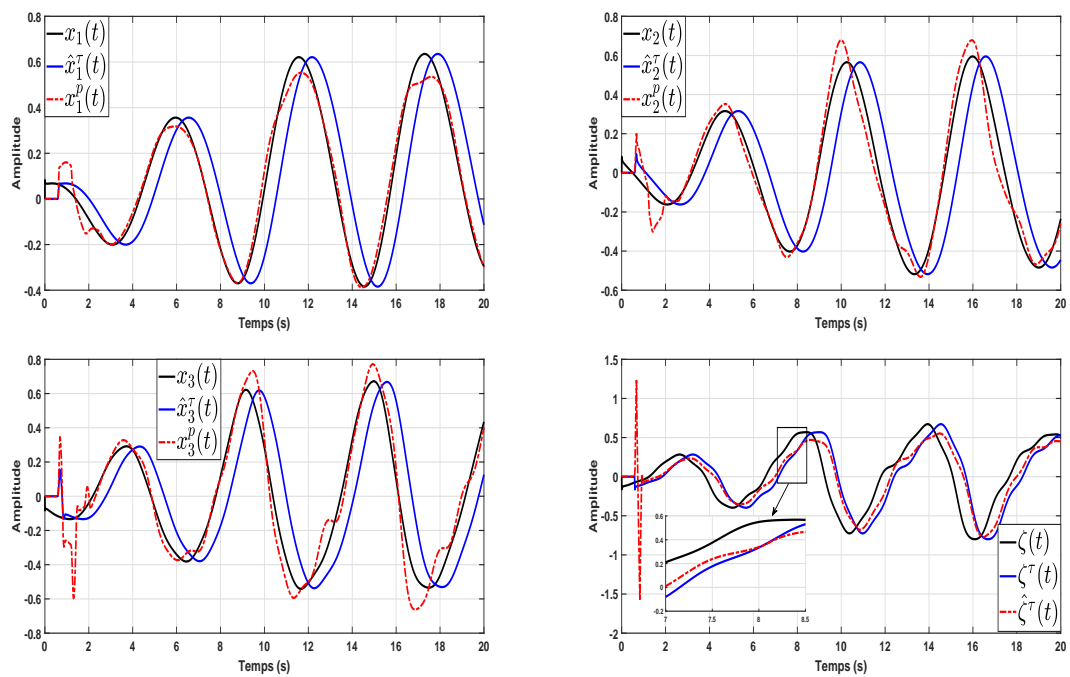


FIGURE 5.19: États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.57) avec $\tau = 0.6s$.

5.4.2 Système chaotique de Genesio avec des paramètres différents

L'objectif de ce deuxième exemple est de tester la robustesse du schéma de synchronisation proposé par rapport aux incertitudes paramétriques.

Considérons le système chaotique de Genesio d'ordre fractionnaire [238] avec des paramètres différents de ceux du modèle, cependant il faut préserver le comportement chaotique du système (5.4.1) :

$$\begin{cases} D^\alpha x_1(t) = x_2(t) \\ D^\alpha x_2(t) = x_3(t) \\ D^\alpha x_3(t) = -a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) - a_3 x_3(t) + a_4 x_1^2(t) + d(t) = \zeta(t) \\ y^\tau(t) = x_1(t - \tau) \end{cases} \quad (5.58)$$

Les paramètres du système sont pris comme suit : $a_1 = 6$, $a_2 = 2,92$, $a_3 = 1,2$, $a_4 = 1$ et l'ordre de dérivation fractionnaire $\alpha = 0,9$.

$d(t)$ est la perturbation externe supposée inconnue et prise comme suit :

$$d(t) = -0,87 \cos(3t)x_3(t) + 0,87 \sin(t).$$

Les conditions initiales du système sont :

$$I_0^{(1-\alpha)} x_1(t)|_{t=0} = 0,05, I_0^{(1-\alpha)} x_2(t)|_{t=0} = 0,05, I_0^{(1-\alpha)} x_3(t)|_{t=0} = -0,05.$$

Les gains de l'observateur dans ce deuxième exemple sont les mêmes que ceux de l'exemple précédent.

Les états réels, les états estimés retardés et la perturbation, ainsi que les états estimés actuels sont représentés sur la figure 5.20 pour un retard de $\tau = 0,3s$.

Les gains de l'observateur λ_i et le coefficient L sont les mêmes que ceux de l'exemple précédent. Nous constatons que bien que les paramètres de l'observateur ne sont pas modifiés, les états prédits convergent vers les états réels. Cela démontre la robustesse du schéma que nous proposons (observateur+prédicteur) face aux variations paramétriques.

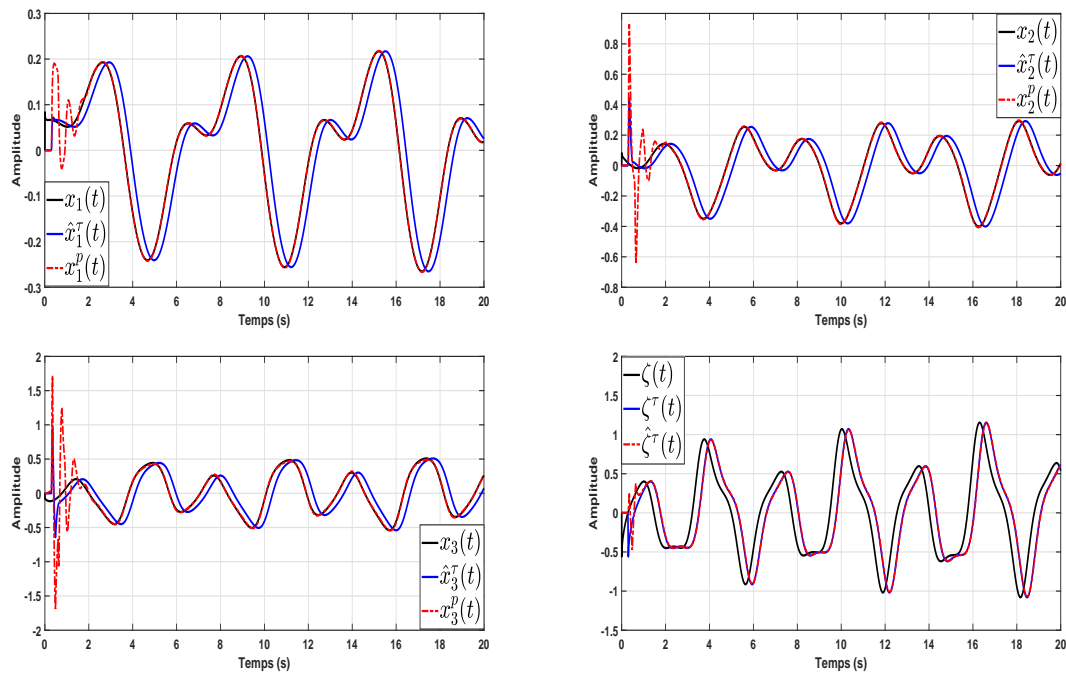


FIGURE 5.20: États réels (en noir), états estimés retardés (en bleu) et états prédits (en rouge) pour l'observateur (5.53) avec $\tau = 0.3s$.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité de la synchronisation des systèmes chaotiques non linéaires d'ordre fractionnaire incertains avec un signal de sortie retardé (le signal transmis dans le canal public). L'approche proposée combine un observateur à mode glissant d'ordre supérieur fractionnaire et un prédicteur d'état fractionnaire.

L'observateur permet d'obtenir l'estimation des états retardés et de l'incertitude totale retardée. Ces estimés sont par la suite injectés dans le prédicteur mis en chaîne afin de fournir les estimés des états à l'instant présent. La convergence du schéma (observateur+prédicteur) proposé a été prouvée.

Les résultats des simulations ont montré l'efficacité et les bonnes performances de l'approche proposée dans le cas d'une sortie non retardée et dans le cas d'une sortie retardée, où le retard est supposé connu et constant. Les simulations ont été effectuées pour différentes valeurs du retard.

La comparaison de la méthode de synchronisation proposée avec d'autres méthodes de syn-

chronisation utilisant un observateur à mode glissant du premier ordre, l'observateur à mode glissant du second ordre et l'observateur à mode glissant du premier ordre qui utilise une approximation continue de la fonction *sign*, a montré que la méthode proposée élimine le phénomène du chattering et présente une bonne précision et une bonne robustesse aux incertitudes paramétriques, aux perturbations externes et aux retards.

Conclusion Générale

La discussion des principaux résultats obtenus ainsi que les perspectives qui peuvent compléter le contenu de cette thèse font l'objet de cette conclusion.

Dans cette thèse, nous avons développé des méthodes de synchronisation pour les systèmes non linéaires chaotiques d'ordre entier et d'ordre non entier avec application à la transmission de données, tel que la synchronisation est assurée par des observateurs non linéaires. Les stratégies utilisées tiennent compte d'une variété de circonstances qui pourraient se produire dans la pratique, comme la présence de perturbations, d'incertitudes paramétriques, et de retards de transmission.

Le chapitre 1 : a été consacré aux rappels sur le principe des observateurs et les concepts d'observabilité pour les systèmes linéaires et non linéaires. Nous avons également montré que les concepts d'observabilité pour les systèmes sans et avec retard sont similaires, l'observabilité des systèmes non linéaires n'est pas la même que celle des systèmes linéaires, et qu'elle peut être influencée par les conditions initiales et l'entrée du système.

Ensuite, nous avons présenté un état de l'art non exhaustif de diverses stratégies de synthèse d'observateurs pour les systèmes continus linéaires et non linéaires. Nous avons également remarqué qu'il n'existe pas de méthodologies générales pour la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires ; c'est un domaine de recherche où il y a encore beaucoup de questions non résolues.

Le chapitre 2 : Nous avons examiné le concept des systèmes chaotiques dans ce chapitre, et nous avons donné quelques définitions des systèmes chaotiques ainsi que certaines de leurs principales caractéristiques, comme leur grande sensibilité aux conditions initiales et leur nature

aléatoire, l'attracteur étrange, etc. Ces caractéristiques ont fait du chaos un phénomène très intéressant pour la communication sécurisée.

Ensuite, le concept de synchronisation a été abordé. En effet, ce phénomène permet à deux systèmes chaotiques, ayant la même structure mais des conditions initiales différentes, de reproduire le même signal chaotique. Cela permet de récupérer des informations cryptiques dans les schémas cryptographiques.

Puis, nous avons énuméré quelques types de synchronisation. Enfin, nous avons abordé plusieurs méthodes de communication basées sur la synchronisation des systèmes chaotiques, notamment la synchronisation basée sur des observateurs.

Le chapitre 3 : Ce chapitre, à été consacré à la synchronisation des systèmes chaotiques en présence et en l'absence de retard dans le canal de transmission.

Tout d'abord, la synchronisation de systèmes chaotiques sans retard dans le canal de communication est considérée.

L'approche proposée est basée sur la structure multimodèles, dans laquelle le système est d'abord mis sous la forme de Takagi-Sugeno, puis un observateur PI est proposé pour permettre la synchronisation entre les systèmes esclave et maître, ainsi que pour estimer l'entrée inconnue (message audio) que nous avons injectée dans la dynamique du système maître.

Nous avons ensuite présenté une solution à l'un des problèmes les plus courants de la synchronisation maître-esclave, à savoir le retard affectant le signal transmis sur le canal de communication.

En fait, lors de la synchronisation des systèmes chaotiques, l'apparition d'un retard est un problème majeur, la cause étant généralement la distance entre les deux systèmes ou la bande passante du réseau. Ce retard ayant un impact négatif sur la synchronisation, l'approche proposée offre une solution fiable et résiliente au problème du retard.

Cette méthode se compose de deux éléments : un observateur à mode glissant du second ordre qui permet l'estimation des états retardés et de la perturbation totale retardée en temps fini, et un prédicteur d'état lié à l'observateur pour compenser et corriger les effets indésirables causés par le retard.

Les résultats de simulation ont démontré l'efficacité et les bonnes performances de l'approche

proposée dans le cas où la sortie est non retardée et dans le cas où la sortie est soumise à un retard constant et connu. Les résultats obtenus sont concluants, impliquant l'efficacité (convergence en temps fini, élimination du chattering et précision) et la robustesse de la méthode proposée vis à vis du retard de transmission. Il a également été démontré que cette approche est robuste face aux variations paramétriques du système.

Le chapitre 4 : a été consacré aux principes fondamentaux et aux outils mathématiques nécessaires à l'étude et à la mise en œuvre des systèmes d'ordre fractionnaire.

Avant tout, nous avons présenté la théorie de la dérivation d'ordre fractionnaire, en nous appuyant sur quelques fonctions de base telles que les fonctions Gamma d'Euler et Mittag-Leffler. Ensuite, nous nous sommes intéressés aux différentes définitions et propriétés des dérivées d'ordre fractionnaire.

Les différentes représentations des systèmes d'ordre fractionnaire ont ensuite été abordées avant de se concentrer sur les notions de commandabilité, de stabilité et d'observabilité de ces systèmes dans les cas linéaires et non linéaires.

Par la suite, des exemples de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire, ainsi que la description de leurs caractéristiques, telles que les équations dynamiques, l'attracteur étrange et l'aspect aléatoire de leur évolutions ont été présentés.

Le chapitre 5 : a traité de la synchronisation des systèmes chaotiques non linéaires d'ordre fractionnaire incertains avec un signal de sortie retardé (le signal transmis dans le canal public). L'approche proposée combine un observateur à mode glissant d'ordre supérieur fractionnaire et un prédicteur d'état fractionnaire.

L'observateur permet d'obtenir l'estimation des états retardés et de l'incertitude totale retardée en temps fini, qui sont ensuite introduites dans le prédicteur en chaîne, qui fournit une prédiction des états actuels. La convergence du schéma proposé (observateur+prédicteur) a été prouvée.

Les résultats de simulation ont démontré l'efficacité et les bonnes performances de l'approche proposée dans le cas d'une sortie non retardée et dans le cas d'une sortie retardée, où le retard est supposé être connu et constant. Les simulations ont été effectuées pour une variété de valeurs du retard, et les résultats sont concluants, impliquant l'efficacité (convergence en temps fini, éli-

mination du chattering et précision) et la robustesse de la méthode proposée vis à vis du retard de transmission.

Il a également été démontré que cette approche est robuste face aux fluctuations paramétriques du système.

Les perspectives de cette thèse sont :

- Synthétiser de nouvelles stratégies à base d'observateurs pour la synchronisation des systèmes chaotiques.
- Développer de nouveaux systèmes chaotiques.
- Concevoir de nouvelles méthodes de synchronisation.
- Proposer de nouveaux schémas de cryptage plus robustes aux attaques.
- Considérer le cas d'un retard variable et/ou inconnu.
- Implémentation sur des circuits numériques.

Bibliographie

- [1] S. Sanyal, R. Bhadauria, C. Ghosh, Secure communication in cognitive radio networks, in : 2009 4th International Conference on Computers and Devices for Communication (CODEC), IEEE, 2009, pp. 1–4.
- [2] K. T. Nguyen, M. Laurent, N. Oualha, Survey on secure communication protocols for the internet of things, *Ad Hoc Networks* 32 (2015) 17–31.
- [3] Y.-S. Zhang, C.-F. Li, G.-C. Guo, Quantum key distribution via quantum encryption, *Physical Review A* 64 (2) (2001) 024302.
- [4] K. Goodarzi, et al., Cloud computing security by integrating classical encryption, *Procedia Computer Science* 42 (2014) 320–326.
- [5] O. F. Mohammad, M. S. M. Rahim, S. R. M. Zeebaree, F. Ahmed, A survey and analysis of the image encryption methods, *International Journal of Applied Engineering Research* 12 (23) (2017) 13265–13280.
- [6] D. E. Denning, Is quantum computing a cybersecurity threat? although quantum computers currently don't have enough processing power to break encryption keys, future versions might, *American Scientist* 107 (2) (2019) 83–86.
- [7] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Synchronization in chaotic systems, *Physical review letters* 64 (8) (1990) 821.
- [8] J. Pena-Ramirez, R. Fey, H. Nijmeijer, In-phase and anti-phase synchronization of oscillators with huygens coupling.
- [9] V. Anishchenko, T. Vadivasova, D. Postnov, M. Safonova, Synchronization of chaos, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 2 (03) (1992) 633–644.

-
- [10] S. Dadras, H. R. Momeni, Adaptive sliding mode control of chaotic dynamical systems with application to synchronization, *Mathematics and Computers in Simulation* 80 (12) (2010) 2245–2257.
- [11] B. Kharabian, H. Mirinejad, Synchronization of rossler chaotic systems via hybrid adaptive backstepping/sliding mode control, *Results in Control and Optimization* 4 (2021) 100020.
- [12] H. Zhang, D. Meng, J. Wang, G. Lu, Synchronisation of uncertain chaotic systems via fuzzy-regulated adaptive optimal control approach, *International Journal of Systems Science* 51 (3) (2020) 473–487.
- [13] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, Vol. 204, elsevier, 2006.
- [14] J. M. J. Sabatier, O. Agrawal, *Advances in Fractional Calculus : Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, Springer, 2007.
- [15] M. K. Shukla, B. Sharma, Control and synchronization of a class of uncertain fractional order chaotic systems via adaptive backstepping control, *Asian Journal of Control* 20 (2) (2018) 707–720.
- [16] A. T. Azar, S. Vaidyanathan, A. Ouannas, *Fractional order control and synchronization of chaotic systems*, Vol. 688, Springer, 2017.
- [17] H. Nijmeijer, I. M. Mareels, An observer looks at synchronization, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental theory and applications* 44 (10) (1997) 882–890.
- [18] D. Luenberger, An introduction to observers, *IEEE Transactions on automatic control* 16 (6) (1971) 596–602.
- [19] D. G. Luenberger, Observing the state of a linear system, *IEEE Transactions on military electronics* 8 (2) (1964) 74–80.
- [20] R. E. Kalman, J. E. Bertram, *Control system analysis and design via the second method of lyapunov : Continuous-time systems*.
- [21] M. Farza, M. Saad, M. Triki, T. Maatoug, High gain observer for a class of non-triangular systems, *Systems & Control Letters* 60 (1) (2011) 27–35.
- [22] V. Andrieu, L. Praly, A. Astolfi, High gain observers with updated gain and homogeneous correction terms, *Automatica* 45 (2) (2009) 422–428.

-
- [23] F. Thau, Observing the state of non-linear dynamic systems, *International journal of control* 17 (3) (1973) 471–479.
- [24] M. Arcak, P. Kokotovic, Observer-based control of systems with slope-restricted nonlinearities, *IEEE Transactions on Automatic Control* 46 (7) (2001) 1146–1150.
- [25] Y. Guan, M. Saif, A novel approach to the design of unknown input observers, *IEEE Transactions on Automatic Control* 36 (5) (1991) 632–635.
- [26] Z. Gao, X. Liu, M. Z. Chen, Unknown input observer-based robust fault estimation for systems corrupted by partially decoupled disturbances, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 63 (4) (2015) 2537–2547.
- [27] V. Utkin, Variable structure systems with sliding modes, *IEEE Transactions on Automatic control* 22 (2) (1977) 212–222.
- [28] C. Edwards, S. K. Spurgeon, R. J. Patton, Sliding mode observers for fault detection and isolation, *Automatica* 36 (4) (2000) 541–553.
- [29] B. Walcott, S. Zak, State observation of nonlinear uncertain dynamical systems, *IEEE Transactions on automatic control* 32 (2) (1987) 166–170.
- [30] O. Dahl, F. Nyberg, A. Heyden, Nonlinear and adaptive observers for perspective dynamic systems, in : 2007 American Control Conference, IEEE, 2007, pp. 966–971.
- [31] I. Y. Tyukin, E. Steur, H. Nijmeijer, C. Van Leeuwen, Adaptive observers and parameter estimation for a class of systems nonlinear in the parameters, *Automatica* 49 (8) (2013) 2409–2423.
- [32] C. Zhang, X. Li, W. Chen, G. G. Yin, J. Jiang, Robust and adaptive estimation of state of charge for lithium-ion batteries, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 62 (8) (2015) 4948–4957.
- [33] N. Djeghali, Observation, diagnostic et commande de la machine asynchrone, Ph.D. thesis, Université Mouloud Mammeri (2013).
- [34] C. Murguia, R. H. Fey, H. Nijmeijer, Immersion and invariance observers with time-delayed output measurements, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 30 (1-3) (2016) 227–235.

- [35] V. Van Assche, T. Ahmed-Ali, C. Hann, F. Lamnabhi-Lagarrigue, High gain observer design for nonlinear systems with time varying delayed measurements, IFAC Proceedings Volume 44 (1) (2011) 692–696.
- [36] B. Targui, O. Hernandez-Gonzales, C. Astorga-Zaragos, Observer design for a class of Lipschitz nonlinear systems with delayed outputs : time-varying delay, Congresse National de Control Automatico, AMCA (2015) 606–610.
- [37] A. Germani, C. Manes, P. Pepe, A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output, IEEE Transactions on Automatic Control 47 (1) (2002) 96–101.
- [38] K. Subbarao, P. Muralidhar, State observer for linear systems with piece-wise constant output delays, IET Control theory & applications 3 (8) (2009) 1017–1022.
- [39] F. Cacace, A. Germani, C. Manes, An observer for a class of nonlinear systems with time varying observation delay, Systems & Control Letters 59 (5) (2010) 305–312.
- [40] F. Cacace, A. Germani, C. Manes, Observability through delayed measurements : a new approach to state observers design, International journal of control 83 (11) (2010) 2395–2410.
- [41] T. Ahmed-Ali, I. Karafyllis, F. Lamnabhi-Lagarrigue, Global exponential sampled-data observers for nonlinear systems with delayed measurements, Systems & Control Letters 62 (7) (2013) 539–549.
- [42] S. Battilotti, Nonlinear predictors for systems with bounded trajectories and delayed measurements, Automatica 59 (2015) 127–138.
- [43] A. Khosravian, J. Trumpf, R. E. Mahony, State estimation for nonlinear systems with delayed output measurements., in : IEEE-CDC, 2015, pp. 6330–6335. doi:10.1109/CDC.2015.7403216.
- [44] A. Balamash, M. Bettayeb, S. Djennoune, U. Al-Saggaf, M. Moinuddin, Fixed-time terminal synergetic observer for synchronization of fractional-order chaotic systems, Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 30 (7) (2020) 073124.
- [45] A. Mushenko, J. Dzuba, A. Nekrasov, C. Fidge, A data secured communication system design procedure with a chaotic carrier and synergetic observer, Electronics 9 (3) (2020) 497.

-
- [46] I. N. Doye, K. N. Salama, T.-M. Laleg-Kirati, Robust fractional-order proportional-integral observer for synchronization of chaotic fractional-order systems, *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica* 6 (1) (2018) 268–277.
- [47] U. M. Al-Saggaf, M. Bettayeb, S. Djennoune, Super-twisting algorithm-based sliding-mode observer for synchronization of nonlinear incommensurate fractional-order chaotic systems subject to unknown inputs, *Arabian Journal for Science and Engineering* 42 (7) (2017) 3065–3075.
- [48] R. Martinez-Guerra, W. Yu, Chaotic synchronization and secure communication via sliding-mode observer, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 18 (01) (2008) 235–243.
- [49] A. Hafezi, K. Khandani, V. J. Majd, Non-fragile exponential polynomial observer design for a class of nonlinear fractional-order systems with application in chaotic communication and synchronisation, *International Journal of Systems Science* 51 (8) (2020) 1353–1372.
- [50] R. Zhang, J. Gong, Synchronization of the fractional-order chaotic system via adaptive observer, *Systems Science & Control Engineering : An Open Access Journal* 2 (1) (2014) 751–754.
- [51] A. L. Fradkov, B. Andrievsky, R. J. Evans, Adaptive observer-based synchronisation of chaotic systems in presence of information constraints, *IFAC Proceedings Volumes* 39 (8) (2006) 269–274.
- [52] C.-T. Chen, *Linear system theory and design* : Oxford university press, New York, USA.
- [53] L. Zadeh, C. Desoer, *Linear system theory : the state space approach*, Courier Dover Publications, 2008.
- [54] G. Besançon, *Nonlinear observers and applications*, Vol. 363, Springer, 2007.
- [55] J.-P. Gauthier, I. A. Kupka, Observability and observers for nonlinear systems, *SIAM journal on control and optimization* 32 (4) (1994) 975–994.
- [56] O. Sename, New trends in design of observers for time-delay systems, *Kybernetika* 37 (4) (2001) 427–458.
- [57] E. Lee, A. Olbrot, Observability and related structural results for linear hereditary systems, *International Journal of Control* 34 (6) (1981) 1061–1078.

- [58] R. E. Kalman, A new approach to linear filtering and prediction problems, *Journal of Basic Engineering* 82 (1) (1960) 35–45. doi:10.1115/1.3662552.
- [59] G. Bornard, H. Hammouri, A high gain observer for a class of uniformly observable systems, in : [1991] *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE. doi:10.1109/cdc.1991.261650.
- [60] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, A. Levant, Conventional sliding modes, in : *Sliding Mode Control and Observation*, Springer New York, 2014, pp. 43–104. doi:10.1007/978-0-8176-4893-0_2.
- [61] M. Darouach, Complements to full order observer design for linear systems with unknown inputs, *Applied Mathematics Letters* 22 (7) (2009) 1107–1111.
- [62] S. Drakunov, V. Utkin, Sliding mode observers. tutorial, in : *Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 4, IEEE, 1995, pp. 3376–3378.
- [63] A. F. Filippov, Differential equations with discontinuous right-hand side, *Matematicheskii sbornik* 93 (1) (1960) 99–128.
- [64] S. Emelyanov, Variable structure control systems, Moscow, Nauka (1967) 4.
- [65] B. cott, S. Zak, Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 18 (1) (1988) 88–104. doi:10.1109/21.87057.
- [66] J.-j. E. Slotine, J. Hedrick, E. Misawa, Nonlinear state estimation using sliding observers, in : *1986 25th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, 1986, pp. 332–339.
- [67] C. C. De Wit, J.-J. Slotine, Sliding observers for robot manipulators, *Automatica* 27 (5) (1991) 859–864.
- [68] J.-J. E. Slotine, J. K. Hedrick, E. A. Misawa, On sliding observers for nonlinear systems, in : *American Control Conference*, IEEE, 1986. doi:10.23919/acc.1986.4789217.
- [69] G. Besançon, *Nonlinear Observers and Applications*, Springer Berlin Heidelberg, 2007. doi:10.1007/978-3-540-73503-8.
- [70] E. W. Griffith, K. Kumar, On the observability of nonlinear systems : I, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 35 (1) (1971) 135–147.
- [71] G. Bornard, F. Celle-Couenne, G. Gilles, Observability and observers, in : *Nonlinear Systems*, Springer, 1995, pp. 173–216.

-
- [72] N. Boizot, E. Busvelle, J.-P. Gauthier, An adaptive high-gain observer for nonlinear systems, *Automatica* 46 (9) (2010) 1483–1488.
- [73] J. T. Moura, H. Elmali, N. Olgac, Sliding mode control with sliding perturbation observer.
- [74] J. Davila, L. Fridman, A. Levant, Second-order sliding-mode observer for mechanical systems, *IEEE Transactions on automatic control* 50 (11) (2005) 1785–1789.
- [75] L. Ljung, Asymptotic behavior of the extended kalman filter as a parameter estimator for linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* 24 (1) (1979) 36–50.
- [76] M. Boutayeb, D. Aubry, A strong tracking extended kalman observer for nonlinear discrete-time systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* 44 (8) (1999) 1550–1556.
- [77] M. Zeitz, The extended luenberger observer for nonlinear systems, *Systems & Control Letters* 9 (2) (1987) 149–156.
- [78] A. J. Krener, A. Isidori, Linearization by output injection and nonlinear observers, *Systems & Control Letters* 3 (1) (1983) 47–52.
- [79] S. F. Schmidt, Application of state-space methods to navigation problems, in : *Advances in control systems*, Vol. 3, Elsevier, 1966, pp. 293–340.
- [80] G. Chen, *Approximate kalman filtering*, Vol. 2, World Scientific, 1993.
- [81] K. Reif, S. Gunther, E. Yaz, R. Unbehauen, Theoretical paper-stability of the continuous-time extended kalman filter, *Automatisierungstechnik* 46 (12) (1998) 592–601.
- [82] J.-P. Gauthier, H. Hammouri, S. Othman, A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors, *IEEE Transactions on automatic control* 37 (6) (1992) 875–880.
- [83] F. Deza, E. Busvelle, J.P., D. Rakotopara, High gain estimation for nonlinear systems, *Systems & Control Letters* 18 (4) (1992) 295–299. doi:10.1016/0167-6911(92)90059-2.
- [84] S. Raghavan, J. K. Hedrick, Observer design for a class of nonlinear systems, *International Journal of Control* 59 (2) (1994) 515–528.
- [85] R. Rajamani, Observers for lipschitz nonlinear systems, *IEEE transactions on Automatic Control* 43 (3) (1998) 397–401.
- [86] M. Abbaszadeh, H. J. Marquez, A robust observer design method for continuous-time lipschitz nonlinear systems, in : *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, 2006, pp. 3795–3800.

- [87] H. Hammouri, G. Bornard, K. Busawon, High gain observer for structured multi-output nonlinear systems, *IEEE Transactions on automatic control* 55 (4) (2010) 987–992.
- [88] J.-P. Gauthier, I. Kupka, *Deterministic observation theory and applications*, Cambridge university press, 2001.
- [89] G. Kreisselmeier, Adaptive observers with exponential rate of convergence, *IEEE transactions on automatic control* 22 (1) (1977) 2–8.
- [90] G. Luders, K. Narendra, An adaptive observer and identifier for a linear system, *IEEE Transactions on Automatic Control* 18 (5) (1973) 496–499.
- [91] A. Xu, *Observateurs adaptatifs non-linéaires et diagnostic de pannes*, Ph.D. thesis, Rennes 1 (2002).
- [92] Y. M. Cho, R. Rajamani, A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems, *IEEE transactions on Automatic Control* 42 (4) (1997) 534–537.
- [93] G. Besançon, Remarks on nonlinear adaptive observer design, *Systems & control letters* 41 (4) (2000) 271–280.
- [94] S. Boyd, S. Sastry, *Adaptive control : stability, convergence, and robustness*, Prentice Hall, USA.
- [95] Y. Huang, J. Han, Analysis and design for the second order nonlinear continuous extended states observer, *Chinese science bulletin* 45 (21) (2000) 1938–1944.
- [96] Y. Xia, P. Shi, G. Liu, D. Rees, J. Han, Active disturbance rejection control for uncertain multivariable systems with time-delay, *IET Control Theory & Applications* 1 (1) (2007) 75–81.
- [97] T. Floquet, J.-P. Barbot, A canonical form for the design of unknown input sliding mode observers, in : *Advances in variable structure and sliding mode control*, Springer, 2006, pp. 271–292.
- [98] A. Levant, Principles of 2-sliding mode design, *Automatica* 43 (4) (2007) 576–586.
- [99] A. Levant, Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control, *International journal of Control* 76 (9-10) (2003) 924–941.
- [100] A. Razminia, V. J. Majd, D. Baleanu, Chaotic incommensurate fractional order rössler system : active control and synchronization, *Advances in Difference Equations* 2011 (1) (2011) 1–12.

-
- [101] R. L. Devaney, *A first course in chaotic dynamical systems : theory and experiment*, CRC Press, 2018.
- [102] E. N. Lorenz, F. N. Lorenz, *The nature and theory of the general circulation of the atmosphere*, Vol. 218, World Meteorological Organization Geneva, 1967.
- [103] E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke, Controlling chaos, *Physical review letters* 64 (11) (1990) 1196.
- [104] S. Boccaletti, C. Grebogi, Y.-C. Lai, H. Mancini, D. Maza, The control of chaos : theory and applications, *Physics reports* 329 (3) (2000) 103–197.
- [105] B. R. Andrievskii, A. L. Fradkov, Control of chaos : methods and applications. i. methods, *Automation and remote control* 64 (5) (2003) 673–713.
- [106] O. Rossler, An equation for hyperchaos, *Physics Letters A* 71 (2-3) (1979) 155–157.
- [107] O. E. Rössler, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A* 57 (5) (1976) 397–398.
- [108] J. Lü, G. Chen, D. Cheng, A new chaotic system and beyond : the generalized lorenz-like system, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 14 (05) (2004) 1507–1537.
- [109] J. Lü, T. Zhou, S. Zhang, Chaos synchronization between linearly coupled chaotic systems, *Chaos, Solitons & Fractals* 14 (4) (2002) 529–541.
- [110] H. Poincaré, Sur les courbes définies par une equation differ-entielle, *J. Math* 3 (1881) 7.
- [111] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*, Cambridge university press, 2002.
- [112] B. Eckhardt, D. Yao, Local lyapunov exponents in chaotic systems, *Physica D : Nonlinear Phenomena* 65 (1-2) (1993) 100–108.
- [113] M.-F. Danca, N. Kuznetsov, Matlab code for lyapunov exponents of fractional-order systems, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 28 (05) (2018) 1850067.
- [114] Y. Ueda, R. H. Abraham, H. B. Stewart, *The road to chaos*, Aerial Press, 1992.
- [115] R. L. Devaney, J. A. Yorke, L. Keen, K. T. Alligood, M. F. Barnsley, B. Branner, J. Harrison, P. J. Holmes, *Chaos and Fractals : The Mathematics Behind the Computer Graphics : The Mathematics Behind the Computer Graphics*, Vol. 1, American Mathematical Soc., 1989.
- [116] C. E. Shannon, Communication theory of secrecy systems, *The Bell system technical journal* 28 (4) (1949) 656–715.

- [117] R. Matthews, On the derivation of a chaotic encryption algorithm, *Cryptologia* 13 (1) (1989) 29–42.
- [118] J. M. Amigó, L. Kocarev, J. Szczepanski, Discrete lyapunov exponent and resistance to differential cryptanalysis, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs* 54 (10) (2007) 882–886.
- [119] G. Millérioux, J. M. Amigó, J. Daafouz, A connection between chaotic and conventional cryptography, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers* 55 (6) (2008) 1695–1703.
- [120] G. Alvarez, S. Li, Some basic cryptographic requirements for chaos-based cryptosystems, *International journal of bifurcation and chaos* 16 (08) (2006) 2129–2151.
- [121] D. Eroglu, J. S. Lamb, T. Pereira, Synchronisation of chaos and its applications, *Contemporary Physics* 58 (3) (2017) 207–243.
- [122] M. Slinko, A. Ukharskii, N. Peskov, N. Jaeger, Chaos and synchronisation in heterogeneous catalytic systems : Co oxidation over pd zeolite catalysts, *Catalysis today* 70 (4) (2001) 341–357.
- [123] H. Hui, C. Zhou, S. Xu, F. Lin, A novel secure data transmission scheme in industrial internet of things, *China Communications* 17 (1) (2020) 73–88.
- [124] M. Sabir, M. Marwan, S. Ahmad, M. Fiaz, F. Khan, Observer and descriptor satisfying incremental quadratic constraint for class of chaotic systems and its applications in a quadrotor chaotic system, *Chaos, Solitons & Fractals* 137 (2020) 109874.
- [125] J. G. Yoder, Christiaan huygens, book on the pendulum clock (1673), in : *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*, Elsevier, 2005, pp. 33–45.
- [126] A. Ouannas, Z. Odibat, Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems in discrete time, *Nonlinear Dynamics* 81 (1) (2015) 765–771.
- [127] L. Rayleigh, Xii. on our perception of sound direction, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 13 (74) (1907) 214–232.
- [128] E. V. Appleton, B. van der Pol, Xvi. on a type of oscillation-hysteresis in a simple triode generator, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 43 (253) (1922) 177–193.

-
- [129] R. Adler, A study of locking phenomena in oscillators, *Proceedings of the IRE* 34 (6) (1946) 351–357.
- [130] H. Fujisaka, T. Yamada, Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems, *Progress of theoretical physics* 69 (1) (1983) 32–47.
- [131] V. Afraimovich, N. Verichev, M. Rabinovich, Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems, *Radiofizika* 29 (9) (1986) 1050–1060.
- [132] N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, H. D. Abarbanel, Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems, *Physical Review E* 51 (2) (1995) 980.
- [133] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, Phase synchronization in driven and coupled chaotic oscillators, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications* 44 (10) (1997) 874–881.
- [134] L. Kocarev, U. Parlitz, General approach for chaotic synchronization with applications to communication, *Physical review letters* 74 (25) (1995) 5028.
- [135] G. Kolumbán, M. P. Kennedy, L. O. Chua, The role of synchronization in digital communications using chaos. ii. chaotic modulation and chaotic synchronization, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications* 45 (11) (1998) 1129–1140.
- [136] J. Yan, C. Li, Generalized projective synchronization of a unified chaotic system, *Chaos, Solitons & Fractals* 26 (4) (2005) 1119–1124.
- [137] C. Li, X. Liao, K.-w. Wong, Chaotic lag synchronization of coupled time-delayed systems and its applications in secure communication, *Physica D : Nonlinear Phenomena* 194 (3-4) (2004) 187–202.
- [138] J. Chen, K. Wong, L. Cheng, J. Shuai, A secure communication scheme based on the phase synchronization of chaotic systems, *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 13 (2) (2003) 508–514.
- [139] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, Phase synchronization of chaotic oscillators, *Physical review letters* 76 (11) (1996) 1804.

- [140] T. Yang, L. O. Chua, Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic systems : theory and application to secure communication, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications* 44 (10) (1997) 976–988.
- [141] X. Wu, G. Chen, J. Cai, Chaos synchronization of the master–slave generalized lorenz systems via linear state error feedback control, *Physica D : Nonlinear Phenomena* 229 (1) (2007) 52–80.
- [142] M. Yassen, Controlling, synchronization and tracking chaotic liu system using active backstepping design, *Physics Letters A* 360 (4-5) (2007) 582–587.
- [143] E.-W. Bai, K. E. Lonngren, Sequential synchronization of two lorenz systems using active control, *Chaos, Solitons & Fractals* 11 (7) (2000) 1041–1044.
- [144] R. Guo, A simple adaptive controller for chaos and hyperchaos synchronization, *Physics Letters A* 372 (34) (2008) 5593–5597.
- [145] I. B.A, R. Guo, V. U.E, Adaptive control for the stabilization and synchronization of nonlinear gyroscopes, *International Journal of Chaos, Control, Modelling and Simulation* 2 (2) (2013) 27–43. doi:10.5121/ijccms.2013.2204.
- [146] F. Shi-Hui, L. Qi-Shao, D. Ying, Adaptive h_∞ synchronization of chaotic systems via linear and nonlinear feedback control, *Chinese Physics B* 21 (6) (2012) 060507.
- [147] A. Khan, S. Kumar, Ts fuzzy modeling and synchronization of chaotic systems, *Journal of Uncertain Systems* 10 (4) (2016) 251–259.
- [148] K. M. Cuomo, A. V. Oppenheim, S. H. Strogatz, Synchronization of lorenz-based chaotic circuits with applications to communications, *IEEE Transactions on circuits and systems II : Analog and digital signal processing* 40 (10) (1993) 626–633.
- [149] M. Feki, An adaptive chaos synchronization scheme applied to secure communication, *Chaos, Solitons & Fractals* 18 (1) (2003) 141–148.
- [150] H. Dedieu, M. P. Kennedy, M. Hasler, Chaos shift keying : modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing chua’s circuits, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Analog and Digital Signal Processing* 40 (10) (1993) 634–642.
- [151] M. Chen, D. Zhou, Y. Shang, A sliding mode observer based secure communication scheme, *Chaos, Solitons & Fractals* 25 (3) (2005) 573–578.

-
- [152] T. Yang, C. W. Wu, L. O. Chua, Cryptography based on chaotic systems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications* 44 (5) (1997) 469–472.
- [153] D. Levy, Chaos theory and strategy : Theory, application, and managerial implications, *Strategic Management Journal* 15 (S2) (2007) 167–178. doi:10.1002/smj.4250151011.
- [154] S. Mohammadpour, T. Binazadeh, Observer-based synchronization of uncertain chaotic systems subject to input saturation, *Transactions of the Institute of Measurement and Control* 40 (8) (2018) 2526–2535.
- [155] R. Aguilar-Lopez, R. Martinez-Guerra, C. A. Perez-Pinacho, Nonlinear observer for synchronization of chaotic systems with application to secure data transmission, *European Physical Journal Special Topics* 223 (8) (2014) 1541–1548.
- [156] A. S. Herek, S. Su, H. Trinh, Q. P. Ha, Performance of first and second-order sliding mode observers for nonlinear systems, in : *AISAT 2009 : Proceedings of the 3rd International Workshop on Artificial Intelligence in Science and Technology*, University of Tasmania, 2009, pp. 1–7.
- [157] A. Levant, Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control, *International journal of Control* 76 (9-10) (2003) 924–941.
- [158] M. Bettayeb, U. M. Al-Saggaf, S. Djennoune, High gain observer design for fractional-order non-linear systems with delayed measurements : application to synchronisation of fractional-order chaotic systems, *IET Control Theory & Applications* 11 (17) (2017) 3171–3178. doi:10.1049/iet-cta.2017.0396.
- [159] H. Dimassi, A. Loria, S. Belghith, Adaptive observers-based synchronization of a class of lur'e systems with delayed outputs for chaotic communications, *IFAC Proceedings Volumes* 45 (12) (2012) 255–260.
- [160] B. Targui, O. Hernández-González, C.-M. Astorga-Zaragoza, M. E. Guerrero-Sánchez, Chain observer for lipschitz nonlinear systems with long time-varying delayed measurements, *IET Control Theory & Applications* 12 (10) (2018) 1431–1439. doi:10.1049/iet-cta.2017.1138.

- [161] S.-K. Changchien, C.-K. Huang, H.-H. Nien, H.-W. Shieh, Synchronization of the chaotic secure communication system with output state delay, *Chaos, Solitons & Fractals* 39 (4) (2009) 1578–1587. doi:10.1016/j.chaos.2007.06.046.
- [162] F. Cacace, A. Germani, C. Manes, A state observer for nonlinear systems with large and variable measurement delays, in : 2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), IEEE, 2015, pp. 7010–7015. doi:10.1109/CDC.2015.7403324.
- [163] T. Takagi, M. Sugeno, Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics SMC-15* (1) (1985) 116–132. doi:10.1109/tsmc.1985.6313399.
- [164] M. Rodrigues, D. Theilliol, D. Sauter, Design of an active fault tolerant control and polytopic unknown input observer for systems described by a multi-model representation, in : Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, IEEE. doi:10.1109/cdc.2005.1582756.
- [165] A. Hamoudi, N. Djeghali, M. Bettayeb, Predictor-based super-twisting sliding mode observer for synchronisation of nonlinear chaotic systems with delayed measurements, *International Journal of Systems Science* 51 (15) (2020) 3013–3029.
- [166] A. Hamoudi, N. Djeghali, M. Bettayeb, Speech encryption based on synchronisation of chaotic takagi-sugeno systems using pi observer, in : In 2021 18th International Multi-Conference on Systems, Signals Devices (SSD'21). Sfax, Tunisia, IEEE, 2021, pp. 1285–1290.
- [167] J. H. Kim, C. W. Park, E. Kim, M. Park, Adaptive synchronization of t-s fuzzy chaotic systems with unknown parameters, *Chaos, Solitons & Fractals* 24 (5) (2005) 1353–1361. doi:10.1016/j.chaos.2004.09.082.
- [168] C. H. Hyun, C. W. Park, J. H. Kim, M. Park, Synchronization and secure communication of chaotic systems via robust adaptive high-gain fuzzy observer, *Chaos, Solitons & Fractals* 40 (5) (2009) 2200–2209. doi:10.1016/j.chaos.2007.10.006.
- [169] S. Makni, M. Bouattour, A. E. Hajjaji, M. Chaabane, $h_{\infty}/h_{\infty}/inf$ observer design for nonlinear t-s fuzzy systems subject to sensor and actuator faults, in : 2017 18th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA), IEEE, 2017. doi:10.1109/sta.2017.8314931.

-
- [170] T. Youssef, M. Chadli, H. Karimi, R. Wang, Actuator and sensor faults estimation based on proportional integral observer for TS fuzzy model, *Journal of the Franklin Institute* 354 (6) (2017) 2524–2542. doi:10.1016/j.jfranklin.2016.09.020.
- [171] D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot, D. Maquin, State and unknown input estimation for nonlinear systems described by takagi-sugeno models with unmeasurable premise variables, in : 2009 17th Mediterranean Conference on Control and Automation, IEEE, 2009. doi:10.1109/med.2009.5164542.
- [172] G. Herrmann, M. C. Turner, I. Postlethwaite, Linear matrix inequalities in control, in : *Mathematical Methods for Robust and Nonlinear Control*, Springer London, pp. 123–142. doi:10.1007/978-1-84800-025-4_4.
- [173] D. Ichalal, Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno, Theses, Institut National Polytechnique de Lorraine (Nov. 2009).
- [174] A. Levant, Robust exact differentiation via sliding mode technique, *Automatica* 34 (03) (1998) 379–384. doi:10.1016/s0005-1098(97)00209-4.
- [175] T. Floquet, J.-P. Barbot, Super twisting algorithm-based step-by-step sliding mode observers for nonlinear systems with unknown inputs, *International journal of systems science* 38 (10) (2007) 803–815.
- [176] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, Prentice Hall, 1996.
- [177] L. C. S. Gottfried Wilhelm Leibniz, John Wallis, *Sämtliche schriften und briefe. band 7 : Juli 1696 - dezember 1698*, AKADEMIE VERLAG. doi:10.1524/9783050088419.582.
- [178] L. Euler, De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (1738) 36–57.
- [179] J. B. J. baron Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Chez Firmin Didot, père et fils, 1822.
- [180] N. Abel, Solution de quelques problèmes à l’aide d’intégrales définies, *Oeuvres* 1 (1881) 11–27.
- [181] J. Liouville, Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces équations, *Ecole polytechnique* 13 (1832) 71–162.
- [182] B. Riemann, Versuch einer allgemeinen auffassung der integration und differentiation, *Gesammelte Werke* 62 (1876).

- [183] A. K. Grunwald, Uber" begrenzte" derivationen und deren anwedung, Zangew Math Und Phys 12 (1867) 441–480.
- [184] A. Letnikov, Theory of differentiation of fractional order, Mat. Sb 3 (1) (1868) 1868.
- [185] O. Heaviside, Electromagnetic theory, vol. 1, the electrician printing and publishing company, Ltd. London.
- [186] H. Weyl, Bemerkungen zum begriff des differentialquotienten gebrochener ordnung, Vierteljschr. Naturforsch. Gesellsch. Zurich 62 (1–2) (1917) 296–302.
- [187] M. Riesz, L'intégrale de riemann-liouville et le problème de cauchy, in : Springer Collected Works in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 1988, pp. 571–793. doi:10.1007/978-3-642-37535-4_41.
- [188] M. Caputo, Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent ii, Geophysical Journal International 13 (5) (1967) 529–539.
- [189] K. B. Oldham, J. Spanier, The replacement of fick's laws by a formulation involving semi-differentiation, Journal of Electroanalytical Chemistry and Interfacial Electrochemistry 26 (2-3) (1970) 331–341.
- [190] H. Davis, The theory of linear operators the principia press, Bloomington USA.
- [191] E. Besson, Points rationnels de la fonction gamma d'euler, Archiv der Mathematik 103 (1) (2014) 61–73.
- [192] G. Mittag-Leffler, Sur la nouvelle fonction, Comptes rendus de l'Académie des Sciences 137 (1903) 554–558.
- [193] R. P. Agarwal, A propos d'une note de m. pierre humbert, CR Acad. Sci. Paris 236 (21) (1953) 2031–2032.
- [194] M. Caputo, F. Mainardi, A new dissipation model based on memory mechanism, Pure and applied Geophysics 91 (1) (1971) 134–147.
- [195] I. Petráš, Fractional-order chaotic systems, in : Fractional-order nonlinear systems, Springer, 2011, pp. 103–184.
- [196] I. Podlubny, Fractional differential equations, mathematics in science and engineering (1999).
- [197] R. Hotzel, M. Fliess, On linear systems with a fractional derivation : Introductory theory and examples, Mathematics and computers in Simulation 45 (3-4) (1998) 385–395.

-
- [198] J. Sabatier, O. Cois, A. Oustaloup, Commande de systèmes non entiers par placement de pôles, Deuxième Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA, Nantes, France.
- [199] D. Matignon, Stability results for fractional differential equations with applications to control processing, in : Computational engineering in systems applications, Vol. 2, Citeseer, 1996, pp. 963–968.
- [200] R. W. Ibrahim, Stability of fractional differential equation, International Journal of Mathematical and Computational Sciences 7 (3) (2013) 487–492.
- [201] D. Matignon, B. d'Andréa Novel, Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems, in : Computational engineering in systems applications, Vol. 2, Citeseer, 1996, pp. 952–956.
- [202] M. Bettayeb, S. Djennoune, New results on the controllability and observability of fractional dynamical systems, Journal of Vibration and Control 14 (9-10) (2008) 1531–1541.
- [203] R. K. Biswas, S. Sen, Fractional optimal control problems : a pseudo-state-space approach, Journal of Vibration and Control 17 (7) (2011) 1034–1041.
- [204] T. Poinot, J.-C. Trigeassou, A method for modelling and simulation of fractional systems, Signal processing 83 (11) (2003) 2319–2333.
- [205] T. T. Hartley, C. F. Lorenzo, Dynamics and control of initialized fractional-order systems, Nonlinear Dynamics 29 (1) (2002) 201–233.
- [206] C. F. Lorenzo, T. T. Hartley, Initialization of fractional differential equations : theory and application, in : International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Vol. 4806, 2007, pp. 1341–1347.
- [207] J.-C. Trigeassou, N. Maamri, State space modeling of fractional differential equations and the initial condition problem, in : 2009 6th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices, IEEE, 2009, pp. 1–7.
- [208] J.-C. Trigeassou, N. Maamri, Initial conditions and initialization of linear fractional differential equations, Signal processing 91 (3) (2011) 427–436.
- [209] D. Matignon, B. d'Andrea Novel, Observer-based controllers for fractional differential systems, in : Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 5, IEEE, 1997, pp. 4967–4972.

- [210] J. Sabatier, M. Moze, C. Farges, On stability of fractional order systems, in : Third IFAC workshop on fractional differentiation and its applications FDA'08, 2008, p. xxx.
- [211] A. Shamardan, M. Moubarak, Controllability and observability for fractional control systems, *Journal of Fractional Calculus* 15 (1) (1999) 25–34.
- [212] N. Djeghali, S. Djennoune, M. Bettayeb, M. Ghanes, J.-P. Barbot, Observation and sliding mode observer for nonlinear fractional-order system with unknown input, *ISA transactions* 63 (2016) 1–10.
- [213] R. Hermann, A. Krener, Nonlinear controllability and observability, *IEEE Transactions on automatic control* 22 (5) (1977) 728–740.
- [214] N. Ozalp, I. Koca, A fractional order nonlinear dynamical model of interpersonal relationships, *Advances in Difference Equations* 2012 (1) (2012) 1–7.
- [215] M. Jleli, B. Samet, A new generalization of the banach contraction principle, *Journal of inequalities and applications* 2014 (1) (2014) 1–8.
- [216] K. Balachandran, V. Govindaraj, M. Rivero, J. Tenreiro Machado, J. J. Trujillo, Observability of nonlinear fractional dynamical systems, in : *Abstract and Applied Analysis*, Vol. 2013, Hindawi, 2013.
- [217] K. Balachandran, V. Govindaraj, M. Rivero, J. Tenreiro Machado, J. J. Trujillo, Observability of nonlinear fractional dynamical systems, in : *Abstract and Applied Analysis*, Vol. 2013, Hindawi, 2013.
- [218] P. Zhou, F. Kuang, A novel control method for integer orders chaos systems via fractional-order derivative, *Discrete Dynamics in Nature and Society* 2011.
- [219] F. Zhang, G. Chen, C. Li, J. Kurths, Chaos synchronization in fractional differential systems, *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 371 (1990).
- [220] R. L. Bagley, R. Calico, Fractional order state equations for the control of viscoelastically-damped structures, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 14 (2) (1991) 304–311.
- [221] V. E. Tarasov, Fractional integro-differential equations for electromagnetic waves in dielectric media, *Theoretical and Mathematical Physics* 158 (3) (2009) 355–359.
- [222] D. Kusnezov, A. Bulgac, G. Do Dang, Quantum levy processes and fractional kinetics, *Physical review letters* 82 (6) (1999) 1136.

-
- [223] H. Zhu, S. Zhou, J. Zhang, Chaos and synchronization of the fractional-order chua system, *Chaos, Solitons & Fractals* 39 (4) (2009) 1595–1603.
- [224] C. Li, J. Zhang, Synchronisation of a fractional-order chaotic system using finite-time input-to-state stability, *International Journal of Systems Science* 47 (10) (2016) 2440–2448.
- [225] I. Grigorenko, E. Grigorenko, Chaotic dynamics of the fractional lorenz system, *Physical review letters* 91 (3).
- [226] S. Agrawal, M. Srivastava, S. Das, Synchronization of fractional order chaotic systems using active control method, *Chaos, Solitons & Fractals* 45 (6) (2012) 737–752.
- [227] S. Kumar, A. E. Matouk, H. Chaudhary, S. Kant, Control and synchronization of fractional-order chaotic satellite systems using feedback and adaptive control techniques, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 35 (4) (2021) 484–497.
- [228] M. K. Shukla, B. Sharma, Control and synchronization of a class of uncertain fractional order chaotic systems via adaptive backstepping control, *Asian Journal of Control* 20 (2) (2017) 707–720. doi:10.1002/asjc.1593.
- [229] A. Nourian, S. Balochian, The adaptive synchronization of fractional-order liu chaotic system with unknown parameters, *Pramana* 86 (6) (2016) 1401–1407. doi:10.1007/s12043-015-1178-2.
- [230] A. O. Almatroud, Synchronisation of two different uncertain fractional-order chaotic systems with unknown parameters using a modified adaptive sliding-mode controller, *Advances in Difference Equations* 2020 (1). doi:10.1186/s13662-020-02548-6.
- [231] A. Kiani-B, K. Fallahi, N. Pariz, H. Leung, A chaotic secure communication scheme using fractional chaotic systems based on an extended fractional kalman filter, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 14 (3) (2009) 863–879.
- [232] D. Etlili, A. Khedher, A. Errachdi, A proposed high-gain observer for a class of nonlinear fractional-order systems, *Mathematical Problems in Engineering* 2021.
- [233] N. Fanaee, Adaptive finite time high-order sliding mode observer for non-linear fractional order systems with unknown input, *Asian Journal of Control* 23 (2) (2021) 1083–1096.
- [234] A. Kolesnikov, G. Veselov, A. Kolesnikov, et al., *Modern applied control theory : synergetic approach in control theory*, TRFU, Moscow, Taganrog (2000) 4477–4479.

- [235] M. S. Bouridah, T. Bouden, M. E. Yalçın, Delayed outputs fractional-order hyperchaotic systems synchronization for images encryption, *Multimedia Tools and Applications* 80 (10) (2021) 14723–14752.
- [236] A. Hamoudi, N. Djeghali, M. Bettayeb, High-order sliding mode-based synchronisation of fractional-order chaotic systems subject to output delay and unknown disturbance, *International Journal of Systems Science* 0 (0) (2022) 1–25. doi:10.1080/00207721.2022.2063965.
- [237] S. Liu, X. Wu, X.-F. Zhou, W. Jiang, Asymptotical stability of riemann–liouville fractional nonlinear systems, *Nonlinear Dynamics* 86 (1) (2016) 65–71. doi:10.1007/s11071-016-2872-4.
- [238] N. Djeghali, M. Bettayeb, S. Djennoune, Sliding mode active disturbance rejection control for uncertain nonlinear fractional-order systems, *European Journal of Control* 57 (2021) 54–67. doi:10.1016/j.ejcon.2020.03.008.