

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

**Mémoire de Fin d'Etudes
de MASTER ACADEMIQUE**
Domaine : **Sciences et Technologies**
Filière : **Génie électrique**
Spécialité : **Commande des systèmes**

Présenté par
Ghaniya AMIRAT
Ouerdia BELAIDI

Thème
**Synthèse de correcteurs max-plus pour un système de
transport public.**

Mémoire soutenu publiquement le 19 / 07 / 2016 Devant le jury composé de :

M Saïd DJENNOUNE
PROFESSEUR, UMMTO, Président

M Redouane KARA
MCA, UMMTO, Encadreur

M Ahmed MAIDI
PROFESSEUR, UMMTO, Examinateur

Mme Aldjia NAIT ABDESSELAM
MAA, UMMTO, Examinatrice



Remerciements

Tout au long de ce travail nous avons reçu l'aide et l'encouragement de nombreuses personnes que nous tenons ici à remercier. Sans elles ce mémoire n'aurait pu aboutir.

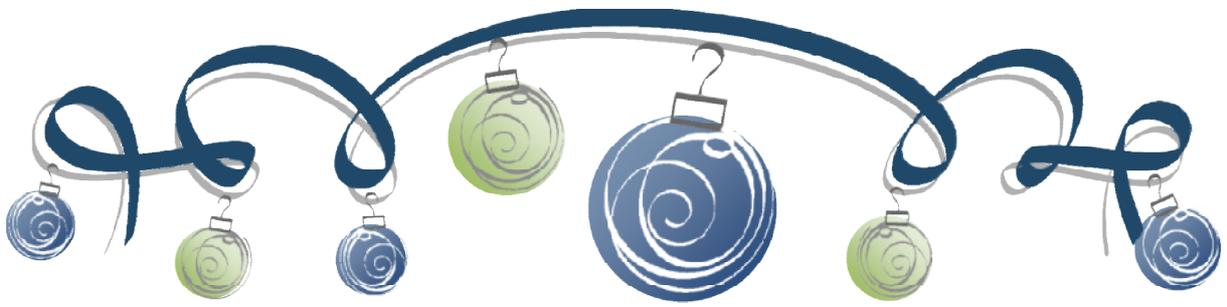
Notre reconnaissance va tout particulièrement à notre encadreur Mr KARA REDOUANE qui nous a apporté ses précieux conseils pour mener ce travail à terme.

Nous tenons aussi à remercier Mm NAIT ABDESSELAM ALDJIA qui nous a tellement aidé tout au long de notre travail, son encouragement et son intérêt pour le sujet ont été une source précieuse d'inspiration et d'encouragement.

Nous portons également un témoignage de gratitude aux membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont attribué pour évaluer et juger notre modeste travail.

Enfin, tous nos remerciements, à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.





Dédicace

C'est avec un immense plaisir que je dédie ce travail

*A ma chère mère qui est la perle de mon
cœur.*

*A mon cher père pour tous les sacrifices
qu'il a consenti pour moi.*

*A mes sœurs et à mon unique et cher frère en leur
souhaitant*

Beaucoup du bonheur et de la réussite

A tous mes amis et amies, surtout à Ouerdia et qu'ils

Trouvent ici L'expression de mon estime.

*A ma famille et à tous ceux que J'aime
et qui ont Souhaité ma réussite.*

A Mazigh et à toute sa famille.

GHANIYA





Dédicace

C'est avec un immense plaisir que je dédie ce modeste travail

A la mémoire de mon père que Dieu bénis son âme

A ma chère mère qui est la lumière de ma vie et

A tous les sacrifices qu'ils ont consentis pour moi.

*A mes chers frères et ma unique sœur en leurs
souhaitant Beaucoup du bonheur et de la réussite*

A tous mes amis et amies, surtout à Ghaniya et qu'ils

Trouvent ici L'expression de mon estime.

A ma famille et à tous ceux que J'aime

Et qui ont souhaité ma réussite.

Sans oublier Malek.

Ouerdia





Sommaire

Sommaire

Notation

Liste des figures

Introduction

Chapitre 1 : Outils Algébriques

Introduction	1
1.1 Théorie des dioïdes.....	1
1.1.1 Structure ordonnée d'un dioïde	2
1.1.2. Quelques exemples de dioïdes	5
1.2. Propriétés spectrales des matrices définies dans un dioïde	7
1.2.1 Valeur propre et vecteur propre	7
1.3 Dioïde des séries formelles	10
1.4 Applications définies sur les dioïdes	11
1.5 Résolution d'équations dans les dioïdes	12
1.5.1 Résolution de l'équation implicite matricielle $x = Ax \oplus b$	13
1.6 Théorie de la résiduation sur les dioïdes	13
1.6.1 Applications Résiduables sur les dioïdes	13
1.6.2 Résolution de $ax \preceq b$ et $xa \preceq b$	14
1.6.3 Résiduation dans le cas matriciel	15
Conclusion	16

Chapitre 2 : modélisation des systèmes a événement discret

Introduction	17
2.1 Modélisation des systèmes a événements discrets par réseaux de Petri	17
2.1.1 Graphes d'événements temporisés	17
2.1.2 Réseaux de Petri	18
2.1.3 Définitions et notations	18
2.1.4 Franchissement d'une transition	20
2.1.5 Equation fondamentale	21
2.1.6 Propriétés d'un RdP	21
2.1.7 Sous classes des réseaux des Petri	22
2.2 Graphes d'événements temporisés	22
2.2.1 Propriétés des graphes d'événements temporisés	23
2.3 Représentation d'état des graphes d'événements temporisés	23
2.3.1 Equations aux dateurs	24

Sommaire

2.3.2 Les équations aux compteurs	26
2.4 Relation entrée-sortie d'un GET	27
2.4.1 Réponse impulsionnelle	27
2.5 Dioïdes de séries de formelles.....	29
2.5.1 La transformée en γ	29
2.5.1.1 Trajectoire monotones.....	31
2.5.2 Transformée en δ	32
2.5.2.1 Trajectoires monotones	33
2.6 Représentation Bi dimensionnelle $M_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$	34
2.7 Représentation en séries formelles	35
2.7.1 Le dioïde $\mathbb{B} \in \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$	35
2.7.2 Manipulation des séries formelles	37
2.8 Modélisation des graphes d'événements temporisés de $M_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$	39
2.9. Réalisabilité, rationalité et périodicité.....	40
Conclusion	42
Chapitre 3 : Etude des systèmes de transport	
Introduction	43
3.1 Généralités sur les systèmes de transport public.....	43
3.1.1 Le système physique	44
3.1.1.1 L'infrastructure	44
3.1.1.2 Entités de transport	46
3.1.2 Système de gestion.....	47
3.2. Réseau de transport public étudié	47
3.3. Modélisations de système de transport par réseaux de Petri	48
3.4. Modélisation dans l'algèbre des dioïde.....	50
3.4.1 La forme implicite.....	50
3.4.2 La forme Explicite	51
3.4.3 Modélisation en Gamma delta	51
Conclusion.....	53
Chapitre 4: synthèse de correcteur max-plus linéaire	
Introduction	54
4.1. Objectifs de commande	54
4.2. Commande en juste-à-temps de système (max, +) linéaires.	55

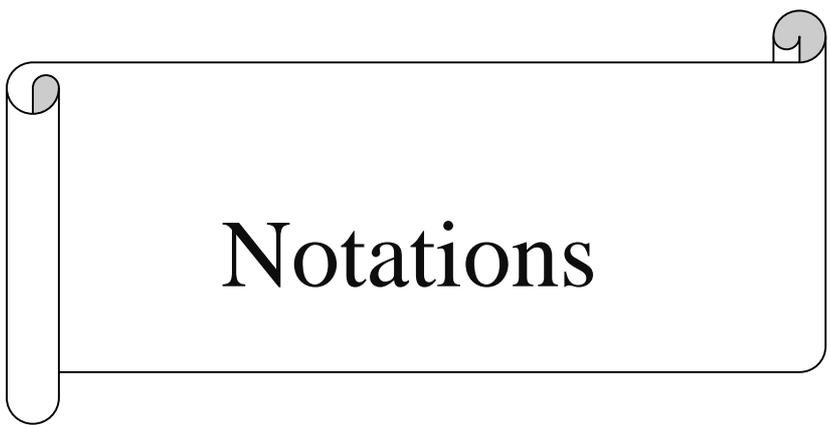
Sommaire

4.3. Commande d'un système (max, +) linéaire en boucle ouverte	56
4.3.1 Poursuite de trajectoire	56
4.3.2 Poursuite de modèle	58
4.3.2.1 Synthèse d'un correcteur de type précompensateur	59
4.3.2.2 Correcteur Neutre	59
Illustration	59
4.4. Commande de système max-plus linéaires en boucle fermée	62
4.4.1 Synthèse d'un correcteur de type retour de sortie	62
Illustration	63
4.4.2 Synthèse d'un correcteur de type retour d'état	68
Illustration	69
Conclusion	71

Conclusion générale

Annexes

Bibliographie

A horizontal scroll graphic with a black outline and a light gray shadow. The scroll is unrolled in the middle, with the word "Notations" written in a black serif font. The left and right ends of the scroll are rolled up, with the top edge of the scroll visible on the left and the bottom edge visible on the right.

Notations

Notation

\oplus : Addition dans un dioïde.

\otimes : Multiplication dans un dioïde.

e : Élément neutre pour la loi \otimes .

ε : Élément neutre pour la loi \oplus .

$\not\leftarrow$: Soustraction à droite dans un dioïde.

$\not\rightarrow$: Soustraction à gauche dans un dioïde.

Supp : Support d'une série formelle.

A^* : Etoile de Kleene de la matrice A ($A^* = e \oplus A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \dots$).

A^+ : Dérivée de l'étoile de Kleene A^* ($A^+ = A \otimes A^*$).

D : Dioïde.

$D^{n \times n}$: Dioïde matriciel.

L_A : Produit à gauche par a , $L_A(x) = a \otimes x$.

R_A : Produit à droite par a , $R_A(x) = x \otimes a$.

$L_a^\#$: Division à gauche par a , ($a \not\leftarrow x$).

$R_a^\#$: Division à droite par a , ($a \not\rightarrow x$).

\wedge : La borne inférieure.

\vee : La borne supérieure.

\preceq : L'ordre dans \mathbb{R}_{max} coïncide avec l'ordre usuel \leq .

\succeq : L'ordre dans \mathbb{R}_{max} coïncide avec l'ordre usuel \geq .

\top : Un plus grand élément.

\perp : Un plus petit élément.

λ : Valeur propre.

μ : Vecteur propre.

\mathbb{R}_{max} : Dioïde ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, max, +) appelé aussi algèbre (max, +).

\mathbb{R}_{min} : Dioïde ($\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, min, +) appelé aussi algèbre (min, +).

$\overline{\mathbb{R}}_{max}$: Dioïde ($\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, max, +) appelé aussi algèbre (max, +).

$\overline{\mathbb{R}}_{min}$: Dioïde ($\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, min, +) appelé aussi algèbre (min, +).

Notation

$(\overline{\mathbb{R}}_{max}^{\mathbb{R}}, \oplus, \otimes)$ L'ensemble des dioïde de fonctions f.

$\overline{\mathbb{R}}_{max}[[\gamma]]$: Dioïde des séries formelle en γ exposants dans \mathbb{R} et à coefficients dans \mathbb{R}_{max} .

$\overline{\mathbb{R}}_{min}[[\delta]]$: Dioïde des séries formelle en δ exposants dans \mathbb{R} et à coefficients dans \mathbb{R}_{min} .

$\mathbb{B}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$: Dioïde des séries formelle en γ et δ à exposants dans \mathbb{R} et à coefficient booléens.

$M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$: Dioïde des séries formelle en γ et δ à exposants dans \mathbb{R} .

$M_{in}^{ax+}[[\gamma, \delta]]$: Dioïde des éléments causaux de $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$.

P : Ensemble des places $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.

T : Ensemble des transitions $T = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$.

W : Fonction poids a associée aux arcs $W = (P \times T) \cup (T \times P)$.

$x_i(k)$: Date de $k^{ème}$ tir de la transition x_i .

$x_i(t)$: Le nombre de tir de la transition x_i à l' instant t.

y : Vecteur de sortie.

x : Vecteur d'état.

H : Matrice de transfert.

RdP : Un réseau de Petri.

RdPT : Un réseau de Petri temporisé.

STP : Système de transport publique.

Sci: Semi-continue inférieurement.

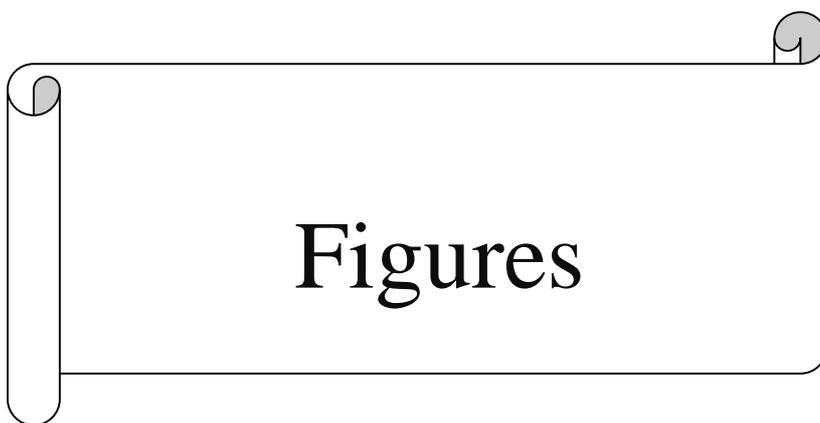
Scs : Semi-continue supérieurement.

SED : Système à événements discrets.

GET : Graphes d'événements temporisés.

SDED : Système dynamique à événement discret.

u_{JAT} : Commande en juste-à-temps.



Figures

Liste des figures

Figure (1.1) : graphe orienté et value

Figure (2.1) : exemple d'un réseau de Petri

Figure (2.2) : un réseau de Petri et son marquage initiale

Figure (2.3) : franchissement d'une transition

Figure (2.4) : graphes d'états

Figure (2.5): modèle GET d'un atelier de coupe de bois.

Figure (2.6) : graphe d'évènement.

Figure (2.7) : graphe d'évènements temporisés étendu (dateur).

Figure (2.8) : graphe d'évènements temporisés étendu.

Figure (2.9): opérateur de décalage "événementiel"

figure (2.10) : graphe d'évènement temporisé

Figure (2.11): opérateur de décalage "temporel"

Figure (2.12) : Exemple d'un GET (pour Gamma-delta).

Figure (2.13) : Représentation graphique des opérations sur $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

Figure (2.14): représentation graphique de l'opération de projection Pr_+

Figure (2.15): représentation graphique de la série

Figure (3.1): Composition de l'infrastructure d'un STP.

Figure (3.2): Réseau de transport : 2 lignes de bus.

Figure (3.3): Le modèle GET des deux lignes L1 et L2.

Figure (4.1) : commande par poursuite de modèle

Figure (4.2): problématique générale de la commande en boucle ouverte

Figure (4.3) : représentation de u_{opt} , z et y

Figure (4.4) : représentation de z et y_{opt}

Figure (4.5): Commande avec modèle de référence.

Figure (4.6): La réalisation du précompensateur permettant d'approcher $G_{ref} = H$

Figure (4.7): La réalisation du précompensateur permettant d'approcher $G_{ref} \neq H$

Figure (4.8): Commande avec modèle de référence : correction d'un système H par un correcteur F de type retour de sortie.

Figure (4.9) : Réalisation du correcteur retour de sortie F_{opt}

Figure (4.10) représentation de G_{ref} , $G_{F_{opt}}$ et H

Figure (4.11) : réalisation de retour de sortie neutre $F_{n_{opt}}$

Figure (4.12) représentation de G_{ref} , $G_{F_{optn}}$ et H

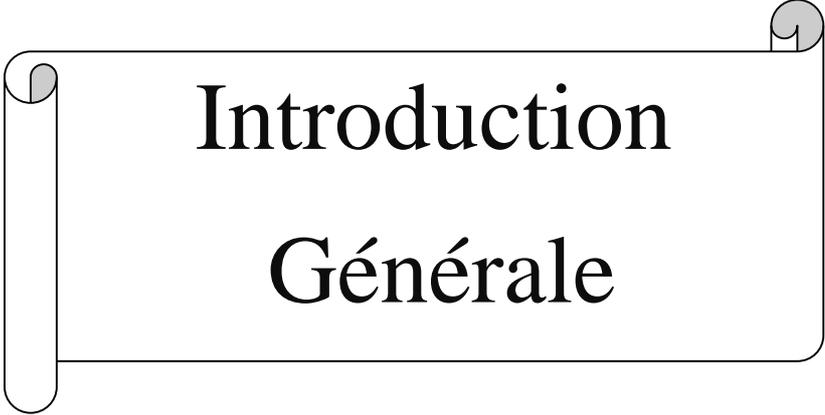
Liste des figures

Figure (4.13): Commande avec modèle de référence : correction d'un système par un correcteur de type retour d'état.

Figure (4.14) : réalisation de retour d'état K_{opt}

Figure (4.15) représentation de $G_{ref}, G_{k_{opt}}$ et H

Figure (4.16) représentation de y, y_{opt}, y_p, y_{re} et y_{rs}



**Introduction
Générale**

Introduction générale

Les *Systèmes (Dynamiques) à Événements Discrets* (SED) désignent des systèmes généralement de conception humaine. Leur évolution obéit à l'apparition d'événements qui ont lieu à des instants discrets. Les systèmes de production (ateliers flexibles, lignes d'assemblage) [Cohen et al., 1983, Cohen et al., 1985], les réseaux de transport (routier, ferroviaire ou aérien) [Lotito et al., 2001, Houssin, 2003] et les systèmes informatiques sont, des processus que l'on peut considérer comme des systèmes à événements discrets [Le Boudec and Thiran, 2001].

De façon informelle, les systèmes à événements discrets peuvent être définis comme des systèmes dans lesquels les variables d'état changent sous l'occurrence d'événements. Ils ne peuvent généralement pas être décrits, par des équations différentielles en raison de la nature des phénomènes qui entrent en jeu, notamment des phénomènes de synchronisation ou d'exclusion mutuelle. Ces systèmes sont alors souvent représentés par des modèles états-transitions. Les plus connus sont les automates à états finis qui servent à représenter les systèmes déterministes les plus simples, les chaînes de Markov pour leurs analogues stochastiques et les réseaux de Petri pour des systèmes plus complexes qui comportent à la fois des phénomènes de synchronisation et de concurrence.

Les systèmes de transport public STP peuvent être vus comme une classe de systèmes dynamiques à événements discrets SDED. La dynamique de cette classe est gouvernée par l'occurrence d'événements dans un espace d'état discret (par exemple l'arrivée et le départ d'un bus dans un arrêt). D'une façon similaire à d'autres classes de SDED tels que les systèmes de production et les systèmes informatiques, les STP ont une dynamique régie par différents phénomènes dont la synchronisation, le parallélisme et la concurrence. La diversité de ces phénomènes rend l'étude des STP plus difficile et nécessite l'exploitation de plusieurs théories complémentaires permettant de décrire les systèmes d'une façon concrète.

La classe des SED que nous étudions ici est celle qui met en jeu des phénomènes de synchronisation. Pour de tel processus, on obtient des modèles mathématiques sous forme d'équations de récurrence qui utilisent des opérateurs *max* ou *min*, et qui sont donc non linéaires. Quand celles-ci sont traduites dans une structure algébrique particulière, appelée dioïde, cette représentation devient linéaire. La représentation est alors dite max-plus linéaire. L'algèbre des dioïdes est donc apparue comme la structure mathématique adéquate pour modéliser et étudier cette classe de systèmes [Bac et al, 92] [Gaub, 92].

Toujours par analogie avec la théorie conventionnelle de l'Automatique, de nombreux travaux sur la commande des systèmes max-plus linéaires ont également été développés. Les résultats obtenus sont essentiellement appliqués aux systèmes de production. En ce sens, ces

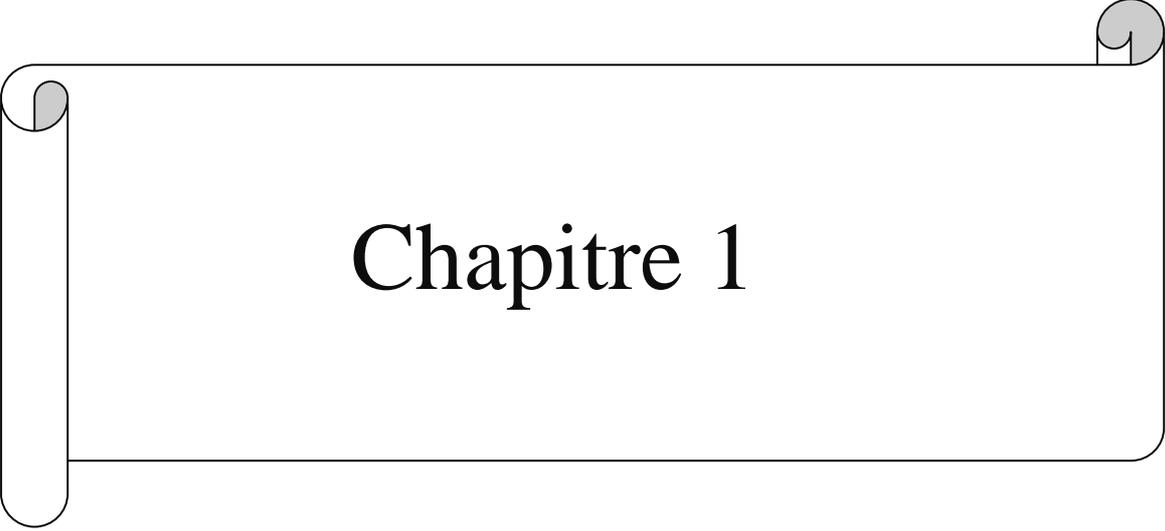
Introduction générale

études peuvent être vues comme des contributions aux politiques de gestion de production. De plus, les lois de commande proposées jusqu'ici se basent principalement sur une approche entrée-sortie des systèmes.

Le travail présenté dans ce mémoire a donc pour objectif d'introduire les résultats proposés au cours des vingt années passées et tout particulièrement les résultats relatifs à la commande des systèmes max-plus linéaires. Comme en automatique classique, par commande, il faut comprendre le contrôle des entrées afin d'atteindre des performances spécifiées au préalable [Cohen et al., 1989].

Ce mémoire est structuré en quatre chapitres comme suit :

- Dans le premier chapitre nous présentons les outils algébriques nécessaires à la modélisation et à la commande des graphes d'événements temporisés discrets. Quelques résultats de base sur l'algèbre des dioïdes sont rappelés. La théorie de la résiduation est ensuite présentée. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à un ensemble de rappels sur la théorie des systèmes utiles pour modéliser les graphes étudiés.
- Le second chapitre présente la modélisation des graphes d'événements temporisés sur différents dioïdes rencontrés dans la littérature. Nous insistons particulièrement sur la représentation dans la dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$. qui sera le dioïde considéré pour toutes les illustrations présentées dans ce mémoire. L'avantage de cette structure concerne le transfert entrée-sortie d'un GET qui se présente alors sous forme d'une matrice rationnelle. Dès lors, l'étude des GET est liée à l'algèbre des séries rationnelles de $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$.
- Dans le troisième chapitre, une étude sur les STP est effectuée. Un accent particulier a été fait sur le système de gestion de tels systèmes.
- Le quatrième chapitre est consacré à la synthèse de lois de commande des systèmes max-plus linéaires. Dans un premier temps, nous avons défini un critère à optimiser, le critère choisi et connu sous le nom de critère juste-à-temps, la commande résultante permet de trouver la trajectoire $u(t)$ décrivant le déclenchement le plus tardif des ordres de production en entrée du système. Dans un second temps, une commande optimale en boucle ouverte dont l'objectif est la poursuite d'une trajectoire ou un modèle de référence ou admettent une solution optimale. Finalement une démarche de commande en boucle fermée par retour de sortie ou par retour d'état dont l'objectif est de poursuivre un modèle de référence.



Chapitre 1

Introduction

Ce premier chapitre a pour objectif d'introduire les définitions et les principaux outils algébriques utilisés dans la suite de ce travail. Sans être exhaustif, nous présentons, un ensemble de définitions, de notations et de résultats relatifs à l'algèbre des dioïdes.

1.1 Théorie des dioïdes

Cette section rappelle certaines définitions et propriétés propres à la structure algébrique d'un dioïde. Pour une présentation plus détaillée, le lecteur est invité à consulter l'ouvrage [Baccelli et al].

Définition 1.1 (Monoïde). Un monoïde (M, \oplus) est un ensemble M muni d'une loi de composition interne notée \oplus , associative et qui possède un élément neutre ε tel que,

$$\forall m \in M ; m \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus m = m.$$

Le monoïde est commutatif, si la loi \oplus est commutative, c'est-à-dire

$$\forall a, b \in M; a \oplus b = b \oplus a .$$

Exemple 1.1. L'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} muni de l'addition est un monoïde. Il s'agit d'un monoïde commutatif : $\forall a, b \in \mathbb{N}; a \oplus b = b \oplus a$. L'élément neutre de \mathbb{N} est 0.

Définition 1.2 (Semi-anneau). Est un ensemble D muni de deux lois internes \oplus et \otimes , tel que:

-(D, \oplus) est un monoïde commutatif dont l'élément neutre ε est appelé élément nul.

-(D, \otimes) est un monoïde, son élément neutre est appelé unité est noté e .

-La loi multiplicative \otimes est distributive à droite et à gauche par rapport à la loi additive \oplus

C'est -à-dire

$$\forall a, b, c \in D; a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

$$(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$$

-L'élément neutre ε est absorbant pour la loi \otimes C'est -à-dire

$$(\forall a \in D; a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon).$$

Si la loi additive \oplus est idempotente, alors (D, \oplus, \otimes) est qualifié de semi-anneau idempotent ou dioïde.

Remarque 1.1. La loi \oplus est idempotente si $\forall a \in D; a \oplus a = a$.

Définition 1.3 (Dioïde). Un dioïde est un ensemble D muni de deux opérations internes, l'une notée additivement \oplus , l'autre notée multiplicativement \otimes , est un dioïde si les conditions suivantes sont vérifiées :

- **Associativité de \otimes et \oplus :**

$$\forall a, b, c \in D; a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c,$$

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c).$$

- **Commutativité \oplus :**

$$\forall a, b \in M; a \oplus b = b \oplus a.$$

- **Distributivité de \otimes sur \oplus :**

$$\forall a, b, c \in D; (a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c).$$

- **Éléments neutres de \oplus « zéro » et de \otimes « identité » :**

$$\forall a \in D; a \oplus \varepsilon = a,$$

$$\forall a \in D; a \otimes e = a.$$

- **Propriété d'absorption du zéro pour \otimes**

$$\forall a \in D; a \otimes \varepsilon = \varepsilon.$$

- **Idempotence de l'addition**

$$\forall a \in D; a \oplus a = a.$$

Remarque 1.2. Un dioïde est commutatif si et seulement si la multiplication, notée \otimes est commutative.

1.1.1 Structure ordonnée d'un dioïde

Ces définitions d'ordre et de treillis ont un sens dans l'algèbre des dioïdes grâce à l'idempotence de la loi \oplus qui leur confère naturellement une structure ordonnée.

Définition 1.4 (Relation d'ordre d'un dioïde). L'idempotence de la loi additive \oplus permet de définir une relation d'ordre, notée \leq ou \geq dans un dioïde.

En effet, soit (D, \oplus, \otimes) un dioïde, alors la relation \leq définie par $a \leq b \Leftrightarrow b = a \oplus b$ est une relation d'ordre. En effet :

- $a \oplus a = a$ du fait de l'idempotence de la loi \oplus , d'où $a \leq a$ (réflexivité),
- Si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $b = a \oplus b$ et $a = b \oplus a$, d'où $a = b$ (antisymétrie),

- Si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $b = a \oplus b$ et $c = b \oplus c$,

$$D'où $c = b \oplus c = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = a \oplus c$.$$

On déduit que $a \leq c$ (transitivité).

Cette relation d'ordre (partielle) est compatible avec les lois \oplus et \otimes , c'est-à-dire :

- $a \leq b \Rightarrow \forall c \in D, a \oplus c \leq b \oplus c$,
- $a \leq b \Rightarrow \forall c \in D, a \otimes c \leq b \otimes c$ et $c \otimes a \leq c \otimes b$.

La relation d'ordre est totale si :

$$\forall a, b \in D, a \geq b \text{ ou } b \geq a.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ordre d'un dioïde soit total, s'écrit de façon évidente comme suit :

$$\forall a, b \in D, a \oplus b = a \text{ ou } b.$$

Exemple 1.2. L'ordre total \geq défini dans \mathbb{R}_{max} coïncide avec l'ordre usuel, par exemple, $5 \geq 4$, en effet $max(4,5)=5$. par contre, l'ordre \geq défini dans \mathbb{R}_{min} est total et est l'inverse de l'ordre usuel \geq , par exemple, $5 \geq 4$, en effet $min(4,5)=4$.

Définition 1.5 (Théorie des treillis). Parmi les ensembles ordonnés, on distingue:

sup-demi treillis : ensemble ordonné \mathcal{P} dans lequel tout couple d'éléments (x, y) admet une borne supérieure, soit un plus petit majorant, notée $x \vee y$,

inf-demi treillis : ensemble ordonné \mathcal{Q} dans lequel tout couple d'éléments (x, y) admet une borne inférieure, soit un plus grand minorant, notée $x \wedge y$,

Treillis : ensemble ordonné S à la fois sup-demi treillis et inf-demi treillis,

sup-demi treillis complet : un sup-demi treillis \mathcal{P} est complet s'il existe une borne supérieure $\vee u$ pour tout sous-ensemble fini ou infini $\subset \mathcal{P}$,

inf-demi treillis complet : un inf-demi treillis \mathcal{Q} est complet s'il existe une borne inférieure $\wedge v$ pour tout sous-ensemble fini ou infini $\subset \mathcal{Q}$.

Treillis complet : ensemble ordonné S à la fois sup-demi treillis complet et inf-demi, treillis complet.

Définition 1.6 (Isotonie). Une application f d'un dioïde (D, \oplus, \otimes) dans un dioïde (C, \oplus, \otimes) est dite isotone Si :

$$\forall a, b \in D, a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b).$$

Définition 1.7 (Antitone). Une application f d'un dioïde (D, \oplus, \otimes) dans un dioïde (C, \oplus, \otimes) est dite Antitone

$$\text{Si : } \forall a, b \in D, a \preceq b \Leftrightarrow f(a) \succeq f(b).$$

Remarque 1.3. Un sup-demi treillis complet \mathcal{P} a nécessairement un plus grand élément noté $\top = \bigvee_{x \in \mathcal{P}} x$. De même, un inf-demi treillis complet \mathcal{Q} a toujours un plus petit élément noté $\perp = \bigwedge_{x \in \mathcal{Q}} x$.

Théorème 1.1 ([Blyth 2005, Th. 2:3]). Un ensemble ordonné S peut-être muni d'une structure de treillis si, et seulement si, il peut être doté de deux lois de composition internes \vee et \wedge telles que :

- (i) les lois \vee et \wedge sont associatives, commutatives et idempotentes,
- (ii) $\forall x, y \in S, x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$ Propriété d'absorption).

Ainsi, les lois \vee et \wedge d'un treillis S sont dites isotones selon l'ordre \preceq soit

$$\forall x, y, z \in S$$

$$x \preceq y \Rightarrow \begin{cases} x \vee z \preceq y \vee z \\ x \wedge z \preceq y \wedge z \end{cases}$$

Et la notion d'ordre $x \preceq y$ peut être remplacée par les expressions $x = x \wedge y \Leftrightarrow x \vee y = y$.

Définition 1.8 (Dioïde complet). Un dioïde (D, \oplus, \otimes) est complet s'il est fermé pour les sommes infinies et si la loi \otimes distribue (à gauche et à droite) sur les sommes infinies, c'est-à-dire si pour tout $b \in D$ et tout sous-ensemble $A \subset D$,

$$b \otimes (\bigoplus_{a \in A} a) = \bigoplus_{a \in A} (b \otimes a) \quad \text{et} \quad (\bigoplus_{a \in A} a) \otimes b = \bigoplus_{a \in A} (a \otimes b).$$

Il résulte de cette définition que, pour tout $A \subset D$ et $B \subset D$:

$$(\bigoplus_{a \in A} a) \otimes (\bigoplus_{b \in B} b) = \bigoplus_{(a,b) \in A \times B} (a \otimes b).$$

Exemple 1.3. Le dioïde \mathbb{Z}_{max} complété par l'élément $+\infty$ est un dioïde complet noté $\overline{\mathbb{Z}}_{max} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$. De même on note $\overline{\mathbb{R}}_{max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$ le dioïde \mathbb{R}_{max} complété par l'élément $+\infty$.

Puisque un dioïde D a une structure de treillis (D, \preceq) , s'il est complet, il admet un plus grand élément. On notera \top ce plus grand élément. L'élément \top correspond à la somme de tous les éléments de D ,

$$T = \bigoplus_{x \in D} x.$$

Notons que, d'après la définition d'un dioïde, l'élément zéro ε est absorbant pour la multiplication pour tout élément de D , aussi, on a par hypothèse : $T \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes T = \varepsilon$.

Définition 1.9 (Dioïde distributif). Un dioïde (D, \oplus, \otimes) est distributif s'il est complet et si $\forall a \in D$ et pour tout sous-ensemble C de D , on a :

$$(\bigwedge_{c \in C} c) \oplus a = (\bigwedge_{c \in C} c \oplus a),$$

$$(\bigwedge_{c \in C} c) \wedge a = (\bigwedge_{c \in C} c \wedge a).$$

Remarque 1.4. Les lois \oplus et \wedge sont des lois de treillis, elles sont donc isotones pour l'ordre \preceq . Si le dioïde n'est pas distributif, on vérifie toujours les inégalités suivantes :

$$a \oplus (b \wedge c) \preceq (a \oplus b) \wedge (a \oplus c), \quad a \wedge (b \oplus c) \preceq (a \wedge b) \oplus (a \wedge c).$$

1.1.2 Quelques exemples de dioïdes

Algèbres $(\max, +)$: le dioïde commutatif $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ pour lequel $e = 0$ et $\varepsilon = -\infty$ est un dioïde noté \mathbb{R}_{\max} , appelé aussi algèbre $(\max, +)$ ou algèbre max-plus. Dans ce dioïde (D, \oplus, \otimes) , la loi \oplus correspond à l'application maximum (\max) et la loi \otimes correspond à la somme usuelle.

- $\forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}; a \oplus b \Leftrightarrow \max(a, b)$.

Exemple 1.4. $(3 \oplus 6) = \max(3, 6) = 6$.

- $\forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}; a \otimes b \Leftrightarrow a + b$.

Exemple 1.5. $(3 \otimes 6) = (3 + 6) = 9$.

Remarque 1.5. Pour le dioïde \mathbb{R}_{\max} , la relation d'ordre \leq correspond à la relation d'ordre usuelle,

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, a \leq b \Leftrightarrow \max(a, b) = b$$

Algèbres $(\min, +)$: le dioïde commutatif $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ pour lequel $e = 0$ et $\varepsilon = +\infty$ est noté \mathbb{R}_{\min} , appelé aussi algèbre $(\min, +)$ ou algèbre min-plus. Dans ce dioïde (D, \oplus, \otimes) , la loi \oplus correspond à l'application minimum (\min) et la loi \otimes correspond à la somme usuelle.

• $\forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a \oplus b \Leftrightarrow \min(a, b)$.

Exemple 1.6. $(3 \oplus 6) = \min(3, 6) = 3$.

• $\forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a \otimes b \Leftrightarrow a + b$.

Exemple 1.7. $(3 \otimes 6) = (3 + 6) = 9$.

Remarque 1.6. Pour le dioïde \mathbb{R}_{min} , la relation d'ordre \leq est le dual de l'ordre naturel défini dans \mathbb{R}_{min} , $\forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, a \leq b \Leftrightarrow \min(a, b) = a$.

Définition 1.10 (Dioïde matriciel). L'ensemble des matrices carrées de dimension n , à coefficients dans un dioïde (D, \oplus, \otimes) , est un dioïde matriciel, noté $(D^{n \times n}, \oplus, \otimes)$, où les opérations sont définies, à partir des opérations du dioïde (D, \oplus, \otimes) de manière analogue à l'algèbre classique, de la façon suivante :

$\forall A, B \in D^{n \times n}$;

$$A \oplus B : (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n,$$

$$A \otimes B : (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

L'élément identité de $D^{n \times n}$ est la matrice notée Id_n , composée de e sur la diagonale et de ε partout ailleurs. L'élément zéro est la matrice composée exclusivement de ε .

La somme et le produit de deux matrices de dimensions compatibles, pas nécessairement carrées, peuvent être définis de la façon suivante :

• $A \in D^{n \times p}, B \in D^{n \times p}$;

$$A \oplus B : (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall j = 1, \dots, p,$$

• $C \in D^{n \times p}, D \in D^{p \times q}$;

$$C \otimes D : (C \otimes D)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p C_{ik} \otimes D_{kj}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall j = 1, \dots, q.$$

Pour que ces matrices puissent être manipulées comme des éléments d'un dioïde matriciel, il faut, en toute rigueur, considérer qu'elles appartiennent au dioïde de matrices carrées de dimension $\max(n, p, q) \times \max(n, p, q)$, en les complétant, si nécessaire, pour cela de lignes et/ou de colonnes constituées de l'élément ε .

Exemple 1.8. Soit A et B deux matrices dans l'algèbre $(\max, +)$ tel que:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

On a:

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} \max(3,2) & \max(7,8) \\ \max(5,9) & \max(6,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} \max(3+2, 7+9) & \max(3+8, 7+4) \\ \max(5+2, 6+9) & \max(5+8, 6+4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 11 \\ 15 & 13 \end{bmatrix}$$

Exemple 1.9. Soit A et B deux matrices dans l'algèbre $(\min, +)$ tel que:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

On a:

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} \min(3,2) & \min(7,8) \\ \min(5,9) & \min(6,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} \min(3+2, 7+9) & \min(3+8, 7+4) \\ \min(5+2, 6+9) & \min(5+8, 6+4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}.$$

1.2. Propriétés spectrales des matrices définies dans un dioïde

Les matrices carrées à coefficients dans un dioïde présentent certaines propriétés spectrales intéressantes qui permettent notamment d'étudier le comportement asymptotique de certains systèmes dynamiques. Cette section est consacrée à la caractérisation du spectre des matrices carrées à coefficients dans un dioïde, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de ces matrices. On entend par valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice $\in D^{n \times n}$, les scalaires $\lambda \in D$ et les vecteurs $\mu \in D^n$ respectivement.

1.2.1 Valeur propre et vecteur propre

La détermination des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice A définie sur un dioïde, revient à résoudre l'équation suivante :

$$A \cdot \mu = \lambda \cdot \mu$$

Cette équation possède deux inconnues qui sont λ et μ (avec $\mu \neq \varepsilon$). On appelle λ valeur propre et μ vecteur propre associé à la valeur propre λ .

Définition 1.11 (Matrice irréductible). Une matrice $A \in D^{n \times n}$ est dite irréductible si pour toute paire (i, j) , il existe un entier m tel que $(A^m)_{ij} \neq \varepsilon$.

Toute autre matrice carrée est considérée comme réductible.

Théorème 1.2. Si la matrice A est irréductible, la solution λ est unique, donnée par l'expression suivante :

$$\lambda = \bigoplus_{k=1}^n (\text{trace } A^k)^{\frac{1}{k}}$$

Avec $\text{trace } A = \bigoplus_{k=1}^n (A^k)_{ii}$ et n désigne l'ordre de la matrice A .

dans le cas de dioïde $D = \mathbb{R}_{max}$ le terme $(A^k)_{ii}$, peut s'interpréter comme le poids maximum des circuits de longueur k qui passe par le nœud i du graphe associé à la matrice A . la puissance $\frac{1}{k}$, quant à elle, est définie au sens $(max, +)$. Dans l'algèbre usuelle, l'expression de la valeur propre s'écrit comme suit :

$$\lambda = \max_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} (\max_{k=1}^n (A^k)_{ii}) \right]$$

Cette valeur propre correspond au maximum des poids moyens des circuits élémentaires du graphe de précédence $G(A)$.

Le vecteur propre associé à cette unique valeur propre qui est solution de l'équation :

$$A \cdot \mu = \lambda \cdot \mu$$

Ne contient pas de ε . Si une composante du vecteur μ est égale à ε , il faut que la matrice A contient au moins une ligne avec des ε , qui vérifie l'équation $A \cdot \mu = \lambda \cdot \mu$, qui correspond à un graphe $G(A)$ non fortement connexe.

Lorsque la matrice A n'est pas irréductible, on peut toujours la transformer en une matrice équivalente sous la forme suivante:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon & A_{22} \end{bmatrix}$$

Où A est une matrice irréductible.

Si λ est la valeur propre de A et μ le vecteur propre associé, on a :

$$A \cdot \begin{pmatrix} \mu \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \mu \\ \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.10. Soit le graphe orienté est valué de la figure (1.1) suivante :

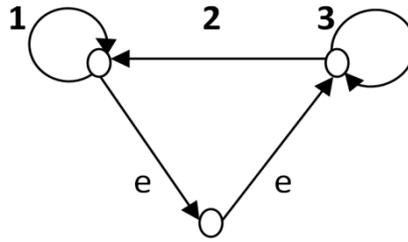


Figure (1.1) : graphe orienté et value

La matrice de précédence associée au graphe de la figure (1.1) est : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & e \\ e & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$

Le graphe de la figure (1.1) est composé de trois nœuds et pour chaque paire de nœud, il existe toujours un chemin orienté qui relie ses nœuds. Donc le graphe est fortement connexe, par conséquent sa matrice de précédence A associée est irréductible.

La valeur propre est unique, elle est donnée par $\lambda = \bigoplus_{k=1}^3 (\text{trace} A^k)^{1/k}$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} \max(1 + 1, 2 + \varepsilon, \varepsilon + e) & \max(1 + 2, 2 + 3, \varepsilon + \varepsilon) & \max(1 + \varepsilon, 2 + e, \varepsilon + \varepsilon) \\ \max(\varepsilon + 1, 3 + \varepsilon, e + e) & \max(\varepsilon + 2, 3 + 3, e + \varepsilon) & \max(\varepsilon + \varepsilon, 3 + e, e + \varepsilon) \\ \max(e + 1, \varepsilon + \varepsilon, \varepsilon + e) & \max(e + 2, \varepsilon + 3, \varepsilon + \varepsilon) & \max(e + \varepsilon, \varepsilon + e, \varepsilon + \varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ e & 6 & 3 \\ 1 & 2 & \varepsilon \end{bmatrix}; \quad A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda = (\bigoplus_{k=1}^3 A_{ii}) \oplus \frac{1}{2} (\bigoplus_{k=1}^3 A_{ii}^2) \oplus \frac{1}{3} (\bigoplus_{k=1}^3 A_{ii}^3)$$

$$\lambda = (1 \oplus 3 \oplus \varepsilon) \oplus \frac{1}{2} (2 \oplus 6 \oplus \varepsilon) \oplus \frac{1}{3} (3 \oplus 9 \oplus 2) = (3 \oplus \frac{6}{2} \oplus \frac{9}{3}) = 3$$

Le vecteur propre, note μ , associé à la valeur propre λ vérifie l'équation suivante :

$$A \cdot \mu = \lambda \cdot \mu$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & e \\ e & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \max(1 + \mu_1, 2 + \mu_2, \varepsilon + \mu_3) \\ \max(\varepsilon + \mu_1, 3 + \mu_2, e + \mu_3) \\ \max(e + \mu_1, \varepsilon + \mu_2, \varepsilon + \mu_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + \mu_1 \\ 3 + \mu_2 \\ 3 + \mu_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \otimes \mu_2 = 3 \otimes \mu_1 \\ 3 \otimes \mu_2 = 3 \otimes \mu_2 \\ e \otimes \mu_1 = 3 \otimes \mu_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = 3 \otimes \mu_3 \\ \mu_2 = 1 \otimes \mu_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ e \end{bmatrix}$$

Définition 1.12 (Dioïde de fonctions). L'ensemble des fonctions f définies sur \mathbb{R} dans un dioïde D et munies des lois \oplus et \otimes telles que $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$f \oplus g : (f \oplus g)(a) \triangleq f(a) \oplus g(a),$$

$$f \otimes g : (f \otimes g)(a) \triangleq f(a) \otimes g(a).$$

forme le dioïde de fonctions noté $(D^{\mathbb{R}}, \oplus, \otimes)$.

Si D est complet, alors $D^{\mathbb{R}}$ l'est également.

Exemple 1.11 (dioïde de fonctions noté $(\overline{\mathbb{R}}_{max}^{\mathbb{R}}, \oplus, \otimes)$). L'ensemble des fonctions $f :$

$\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{max}^{\mathbb{R}}$ munies du maximum point à point comme somme $\oplus :$

$$\forall a \in \mathbb{R}: (f \oplus g)(a) = \max\{f(a), g(a)\}.$$

Et de l'addition point à point comme produit $\otimes :$

$$\forall a \in \mathbb{R}: (f \otimes g)(a) = f(a) + g(a).$$

forme le dioïde de fonctions noté $(\overline{\mathbb{R}}_{max}^{\mathbb{R}}, \oplus, \otimes)$.

1.3. Dioïde des séries formelles

Définition 1.13 (Dioïde de séries formelles). Soit (D, \oplus, \otimes) un dioïde, on définit une série formelle en q variables, notées p_1 à p_q , à coefficients dans D comme une application Π de \mathbb{Z}^q dans $D : \forall k = (k_1, \dots, k_q) \in \mathbb{Z}^q$, $\Pi(k)$ représente le coefficient de $p_1^{k_1} \dots p_q^{k_q}$ une autre représentation équivalente de la série Π est :

$$\Pi = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}^q} \Pi(k_1, \dots, k_q) p_1^{k_1} \dots p_q^{k_q}.$$

L'ensemble des séries formelles muni des opérations :

$$\Pi \oplus \Psi : (\Pi \oplus \Psi)(k) = \Pi(k) \oplus \Psi(k),$$

$$\Pi \otimes \Psi : (\Pi \otimes \Psi)(k) = \bigoplus_{i+j=k} \Pi(i) \otimes \Psi(j),$$

Est un dioïde noté $D[[p_1, \dots, p_q]]$.

On appelle *support* de la série formelle Π l'ensemble :

$$\text{Supp}(\Pi) = \{k \in \mathbb{Z}^q \mid \Pi(k) \neq \varepsilon\}.$$

Une série formelle à support fini est appelée *polynôme*. Une série formelle dont le support est un singleton (de \mathbb{Z}^q) est appelée *monôme*.

1.4 Applications définies sur les dioïdes

Dans cette section, on met on évidence certaines propriétés concernant les applications définies sur des ensembles ordonnés et plus précisément sur des dioïdes [Houssin, 2006].

Définition 1.14 (Homomorphisme). Une application f d'un dioïde (D, \oplus, \otimes) dans un dioïde (C, \oplus, \otimes) est dite Homomorphisme si $\forall a, b \in D$:

$$\begin{aligned} f(a \oplus b) &= f(a) \oplus f(b) \text{ et } f(\varepsilon) = \varepsilon, \\ f(a \otimes b) &= f(a) \otimes f(b) \text{ et } f(e) = e. \end{aligned}$$

Définition 1.15 (Isomorphisme). Une application f est un homomorphisme et si en plus, f est bijective (tout élément de C admet un et un seul antécédent dans D), alors f est un isomorphisme.

$\forall a, b \in D$:

$$\begin{aligned} f(a \oplus b) &= f(a) \oplus f(b) \quad \text{et} \quad f(\varepsilon) = \varepsilon \quad \text{est dite } \oplus\text{-morphisme.} \\ f(a \otimes b) &= f(a) \otimes f(b) \quad \text{et} \quad f(e) = e \quad \text{est dite } \otimes\text{-morphisme.} \end{aligned}$$

Définition 1.16 (Continuité). Soient (D, \oplus, \otimes) et (C, \oplus, \otimes) deux dioïdes complets. Une application f de D dans C est dite semi-continue inférieurement (s.c.i. en abrégé), respectivement semi-continue supérieurement (s.c.s.) si, pour tout sous-ensemble $B \subseteq D$,

$$f(\bigoplus_{x \in B} x) = \bigoplus_{x \in B} f(x).$$

Respectivement,

$$f(\bigwedge_{x \in B} x) = \bigwedge_{x \in B} f(x).$$

Remarque 1.7. Une application s.c.i. ou s.c.s est nécessairement isotone puisque :

$$a \succcurlyeq b \Leftrightarrow \begin{cases} a = a \oplus b \Rightarrow f(a) = f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \Leftrightarrow f(a) \succcurlyeq f(b) \\ a = a \wedge b \Rightarrow f(b) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \Leftrightarrow f(a) \preccurlyeq f(b) \end{cases}$$

Définition 1.18 (Linéarité). Une application f d'un dioïde (D, \oplus, \otimes) dans un dioïde (C, \oplus, \otimes) est dite linéaire si elle satisfait les propriétés d'additivité et d'homogénéité :

$$\begin{aligned} \forall a, b \in D, \forall \alpha \in D, \quad f(a \oplus b) &= f(a) \oplus f(b) \quad (\text{additivité}), \\ f(\alpha a) &= \alpha f(a) \quad (\text{homogénéité}). \end{aligned}$$

La combinaison des deux conditions mentionnées est connue sous le nom de principe de superposition, soit :

$$\forall a, b \in D, \forall \alpha, \beta \in D, \quad f(\alpha a \oplus \beta b) = \alpha f(a) \oplus \beta f(b).$$

Remarque 1.8. En toute rigueur, on devrait plutôt parler de (\oplus, \otimes) linéarité du fait de la structure algébrique particulière d'un dioïde. Dans l'algèbre $(\max; +)$, on parlera de $(\max; +)$ -linéarité.

Exemple 1.12. La multiplication à gauche par $A \in D^{n \times n}$, définie par :

$$\begin{aligned} L_A : D^{n \times n} &\rightarrow D^{n \times n} \\ x &\rightarrow A \otimes x \end{aligned}$$

Est une application linéaire.

1.5 Résolution d'équations dans les dioïdes

Certaines équations définies dans des dioïdes complets admettent des solutions particulières extrêmes, c'est-à-dire plus petites ou plus grandes que toute autre solution. Des résultats généraux concernant l'étude d'équations point fixe sur des dioïdes complets sont fournis dans [Baccelli 1992]. Pour cela on introduit un nouvel opérateur : « l'étoile de Kleene ».

Définition 1.19. On définit l'étoile de Kleene d'une matrice A par :

$$A^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^+} A^n.$$

Théorème 1.3. Soit D un dioïde complet, l'équation implicite

$$x = a \cdot x \oplus b$$

Admet $x = a^* b = \bigoplus_{k \geq 0} a^k b$ comme plus petite solution. L'opérateur « * » est appelé étoile de Kleene dans la littérature.

Preuve 1.1. On vérifie que $x = a^* b$ est solution de $x = a \cdot x \oplus b$. on a

$$a(a^* b) \dots \oplus b = a(e \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots) b \oplus b = (e \oplus a \oplus a^2 \oplus a^3 \dots) b = a^* b.$$

Notation 1.1. L'opérateur « + », qui dérive de l'étoile est défini par :

$$a^+ = a^* a = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^+} a^n$$

On a de plus la relation: $e \oplus a^+ = a^*$.

Propriétés 1.1. Soit D un dioïde complet, $\alpha, \beta \in D$, et c un entier strictement positif. On a :

- 1) $(\alpha^*)^* = \alpha^*$,
- 2) $(\alpha^+)^* = \alpha^*$,
- 3) $\alpha^* = (\alpha_0 \oplus \dots \oplus \alpha_{c-1})(\alpha_c)^*$,
- 4) $(\alpha \oplus \beta)^* = (\alpha^* \beta)^* \alpha^*$,
- 5) $(\alpha \oplus \beta)^* = (\alpha \beta^*)^*$,
- 6) $\alpha^* = \alpha^* \alpha^*$,
- 7) $(\alpha \beta^+)^+ = \alpha(\alpha \oplus \beta)^*$,
- 8) $(\alpha \beta^*)^* = e \oplus \alpha(\alpha \oplus \beta)^*$,
- 9) Si α et β commutent, on a :
 $(\alpha \oplus \beta)^* = \alpha^* \beta^*$.

1.5.1 Résolution de l'équation implicite matricielle $x = Ax \oplus b$.

Lemme 1.1 [Baccelli 1992, lem.4.101]. Pour la matrice suivante, partitionnée en quatre blocs, on a :

$$A^* = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^* \oplus a^* b (ca^* b \oplus d)^* ca^* & a^* b (ca^* b \oplus d)^* \\ (ca^* b \oplus d)^* ca^* & (ca^* b \oplus d)^* \end{bmatrix}$$

1.6 Théorie de la résiduation sur les dioïdes

1.6.1 Applications Résiduables sur les dioïdes

Les applications définies sur les dioïdes sont généralement non inversibles. D'un point de vue pratique, il est souvent suffisant de disposer, à défaut de la solution d'une équation, de la plus grande ou de la plus petite solution de l'inéquation correspondante. Ceci donne une alternative à l'inversion d'applications non bijectives. Dans la suite de cette section, nous supposons que C et D sont deux dioïdes complets, et que f est une application de C dans D .

Définition 1.20 (Application résiduable et sa résiduée). Une application isotone $f : (D, \leq) \rightarrow (C, \leq)$ définie sur des dioïdes complets est dite résiduable, si l'équation $f(x) \leq b$ admet une plus grande solution dans D pour tout $b \in C$. L'application qui associe à b la plus grande solution de $f(x) \leq b$ est notée $f^\#$ et est appelée application résiduée de f . ainsi :

$$f^\# = \bigoplus \{ x \in D \mid f(x) \leq b \}.$$

Remarque1.9. La théorie de la résiduation permet également de considérer les équations du type $f(x) \succcurlyeq b$ définies de D dans C . dans ce cas, l'application f est dite dualement résiduable si $\forall b \in C, f(x) \succcurlyeq b$ admet une plus petite solution dans D . l'application qui associe à b la plus petite solution de $f(x) \succcurlyeq b$ est notée f^b et est dite application résiduée duale de f .

Théorème1.4 ([Baccelli 1992, Th. 4.50]). Soit une application isotone $f : (D, \preccurlyeq) \rightarrow (C, \preccurlyeq)$ définie sur des dioïdes complets. Les points suivants sont équivalents :

- (i) f est résiduable.
- (ii) f est semi-continue inférieurement (s.c.i) et $f(\varepsilon) = \varepsilon$,
- (iii) il existe une application isotone et semi-continue supérieurement $f^\# : C \rightarrow D$ telle que :

$$f_0 f^\# \preccurlyeq \text{Id}_C,$$

$$f_0 f^\# \succcurlyeq \text{Id}_D.$$

Où Id_C (respectivement Id_D) est l'application identité de C (respectivement de D). Par conséquent, $f^\#$ est unique.

Théorème1.5. Soit $f : (D, \preccurlyeq) \rightarrow (C, \preccurlyeq)$ une application résiduable, alors :

$$f_0 f^\#_0 f = f,$$

$$f^\#_0 f_0 f^\# = f^\#.$$

1.6.2 Résolution de $ax \preccurlyeq b$ et $xa \preccurlyeq b$

On se propose maintenant d'étudier le caractère résiduable de certaines applications de référence définies sur des dioïdes complets.

Soient L_a et R_a , également appelée produit à gauche et produit à droite, les applications suivantes définies sur un dioïde complet D :

$$L_a : x \mapsto a \otimes x \text{ (Produit à gauche par } a),$$

$$R_a : x \mapsto x \otimes a \text{ (Produit à droite par } a).$$

D'après la définition (1.8) d'un dioïde complet, le produit distribue à gauche comme à droite sur les sommes infinies. Les applications L_a et R_a sont donc semi-continues inférieurement. De plus, ε est absorbant pour le produit, ainsi $L_a(\varepsilon) = a \cdot \varepsilon = \varepsilon$ et

$R_a(\varepsilon) = \varepsilon \cdot a = \varepsilon$. En appliquant le théorème (1.4), L_a et R_a sont donc résiduables, et leurs applications résiduées sont notées :

$L_a^\# : x \rightarrow a \backslash x$ (Division à gauche par a);

$R_a^\# : x \rightarrow a / x$ (Division à droite par a).

Théorème 1.6. Les applications L_a et R_a vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 a(a \backslash x) \leq x & (x / a)a \leq x \\
 a \backslash (ax) \geq x & (xa) / a \geq x \\
 a(a \backslash (ax)) = ax & ((xa) / a)a = xa \\
 a \backslash (x \wedge y) = a \backslash x \wedge a \backslash y & (x \wedge y) / a = x / a \wedge y / a \\
 (a \oplus b) \backslash x = a \backslash x \wedge b \backslash x & x / (a \oplus b) = x / a \wedge x / b \\
 (ab) \backslash x = b \backslash (a \backslash x) & x / (ba) = (x / a) / b \\
 b(a \backslash x) \leq (a / b) \backslash x & (x / a)b \leq x / (b / a) \\
 (a \backslash x)b \leq a \backslash (xb) & b(x / a) \leq (bx) / a
 \end{array}$$

Preuves 1.2. Les preuves de ces propriétés sont données dans [Baccelli et al., 1992, p.182-185], [Gaubert, 1992].

1.6.3 Résiduation dans le cas matriciel

Il s'agit d'étendre l'application résiduée de la multiplication au cas des dioïdes matriciels, sachant que les résultats décrits dans la partie précédente ont été développés sur des dioïdes généraux (scalaires). Considérons à présent l'application L_A définie sur le dioïde matriciel $D^{n \times n}$:

$$\begin{array}{l}
 L_A : D^{n \times n} \rightarrow D^{n \times n} \\
 X \mapsto L_A(X) = A \otimes X, \quad \text{Avec } A \in D^{n \times n},
 \end{array}$$

Théorème 1.7. Soit D un dioïde complet et $D^{n \times n}$ le dioïde des matrices à valeurs dans D . Soit $B \in D^{n \times n}$, la plus grande solution de $AX \leq B$ est la matrice $L_A^\#(B) \in D^{n \times n}$, notée également $A \backslash B$. Les éléments de cette matrice sont donnés par la relation :

$$(A \backslash B)_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n A_{li} \backslash B_{lj}, \text{ pour } i, j = 1, \dots, n.$$

Le théorème suivant exprime les applications résiduées de L_A et R_A dans le cas où les matrices considérées ne sont pas nécessairement de dimension carrée. Soient les applications :

$$L_A : D^{p \times q} \rightarrow D^{n \times q}, R_{A'} : D^{q \times p} \rightarrow D^{q \times n}$$

$$X \mapsto A(X) \quad (A \in D^{n \times p}), X \mapsto XA' \quad (A' \in D^{p \times n})$$

Les inéquations $AX \leq B$ et $XA \leq B'$ admettent $L_A^\#(B)$ et $R_{A'}^\#(B)$ comme plus grandes solutions respectives. Les expressions de ces matrices s'obtiennent *via* le théorème suivant.

Théorème 1.8 [Baccelli et al., 1992,]

Soient $B \in D^{n \times q}, B' \in D^{q \times n}$, on a :

$$(L_A^\#(B))_{ij} = (A \otimes B)_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n A_{li} \otimes B_{lj}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1 \dots q,$$

$$(R_{A'}^\#(B'))_{ij} = (B' \otimes A)_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n B'_{il} \otimes A_{jl}, \quad i = 1, \dots, q, \quad j = 1 \dots p,$$

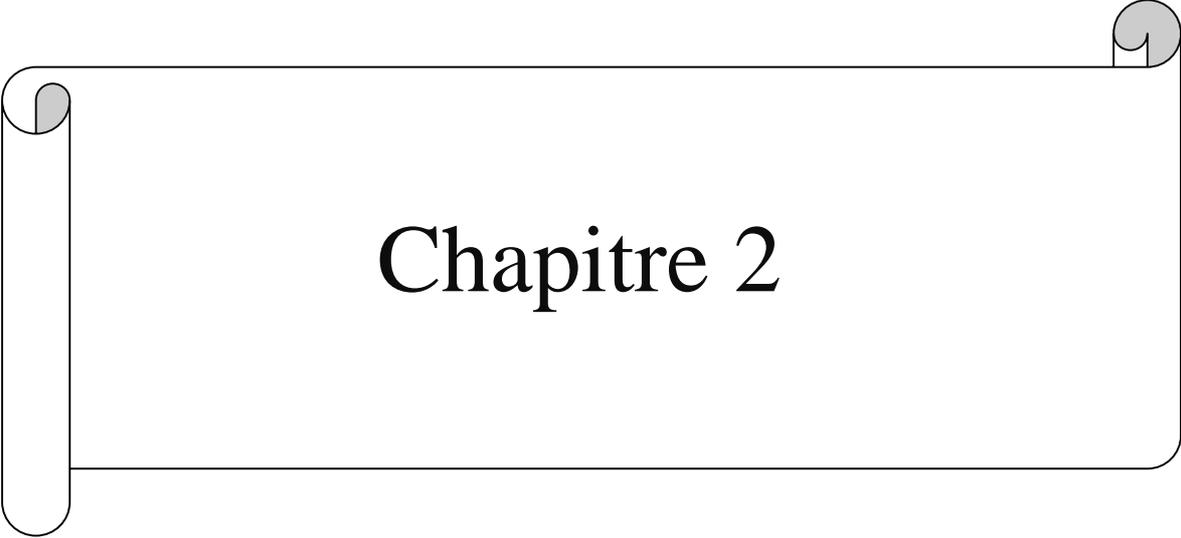
Définition 1.21 (Fermeture). On appelle fermeture une application $\Pi: D \rightarrow D$, qui a les propriétés suivantes :

- Elle est extensive : $\Pi \geq \text{Id}_D$,
- Elle est idempotente : $\Pi \circ \Pi = \Pi$,
- Elle est isotone : $\forall x, x' \in D, x \leq x' \Rightarrow \Pi(x) \leq \Pi(x')$.

Définition 1.22 (Injection canonique d'un sous-ensemble). Soit U un sous-ensemble de l'ensemble D . L'injection canonique de U dans D est l'application $I_u: U \rightarrow D$, définie par $I_u(u) = u$ pour tout $u \in U$.

Conclusion

Ce chapitre introductif a permis de se familiariser avec les outils mathématiques utilisés dans ce travail. Nous avons donné un ensemble de définitions sur la théorie des systèmes (max, plus) linéaires dans les dioïdes permettant la représentation du comportement des systèmes à événements discrets.



Chapitre 2

Introduction

La commande supervisée des systèmes à événements discrets (SED) par les réseaux de Petri (RdP) a élaboré des lois de commandes optimales et efficaces, qui garantissent le respect des spécifications sur le marquage [Yamalidou et al., 1996].

Cependant, elle ne prend pas en compte explicitement l'influence du temps, elle considère que les événements peuvent avoir lieu à des moments arbitraires, ce qui est contraire à la réalité, le fonctionnement de la plupart des processus industriels exige un certain nombre de contraintes temporelles, telles que les durées opératoires et les dates de début et de fin des tâches. D'où l'intérêt de la modélisation de ces processus par des graphes d'événements temporisés (GET), dont le comportement est représenté par des systèmes d'équations linéaires définies dans l'algèbre des dioïdes (Max-plus ou Min plus), ainsi que la possibilité d'évaluation des performances et d'optimisation.

2.1 Modélisation des systèmes à événements discrets par réseaux de Petri

Les réseaux de Petri (RdP) sont des modèles de représentation souvent utilisés pour les SED. Ils sont largement utilisés et permettent de modéliser, d'évaluer voire de piloter des systèmes dynamiques.

Certains systèmes mettant uniquement en jeu des phénomènes de synchronisation et de saturation peuvent être modélisés par une classe des réseaux de Petri, appelée classe des GET.

Ces derniers admettent une représentation linéaire sur la structure algébrique des dioïdes.

Cette représentation est bien adaptée pour aborder, par exemple, les problèmes de commande ou d'évaluation de performances. Lorsque la taille du système est importante (système complexe, nombre important d'identité), les techniques développées dans le cadre des SED atteignent leurs limites.

2.1.1 Graphes d'événements temporisés

Un graphe d'événement est un réseau de Petri ordinaire où chaque place possède exactement une transition d'entrée et une transition de sortie. Un graphe d'événement est dit temporisé si des temporisations sont associées aux places et/ou transitions.

2.1.2 Réseaux de Petri

Les RdP sont des modèles graphiques principalement dédiés à la représentation du comportement dynamique des SED. En raison de leur puissance de modélisation, ces modèles ont fait l'objet de très nombreux travaux de recherche ces 50 dernières années.

2.1.3 Définitions et notations

Définition 2.1 (Réseaux de Petri). Un RdP est un graphe biparti orienté, composé de places et de transitions, reliées par des arcs. Une place peut contenir un nombre entier de jetons ou marques. A chaque arc, on peut être associé un poids (nombre entier) qui détermine la dynamique du réseau.

Un RdP est un graphe biparti défini par un quadruplet $Q = (P, T, \text{Pré}, \text{Post})$ où :

$P = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ est un ensemble fini de places,

$T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ est un ensemble fini de transitions.

$\text{Pré} : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ est l'application d'incidence avant. $\text{Pré}(P_i, T_j)$ représente le poids de l'arc reliant P_i à T_j .

$\text{Post} : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ est l'application d'incidence arrière. $\text{Post}(P_i, T_j)$ représente le poids de l'arc reliant T_j à P_i .

On définit la matrice d'incidence du réseau par la matrice W telle que :

$$W = W^+ - W^-$$

Avec :

$[W_{ij}^+] = [\text{Pré}(P_i, T_j)]$ (la matrice d'incidence avant),

$[W_{ij}^-] = [\text{Post}(P_i, T_j)]$ (la matrice d'incidence arrière).

Notation

${}^\circ P_i$: l'ensemble des transitions d'entrée de P_i .

P_i° : l'ensemble des transitions de sortie de P_i .

${}^\circ T_i$: l'ensemble des places d'entrée de T_i .

P_i° : l'ensemble des places de sortie de T_i .

Exemple 2.1.

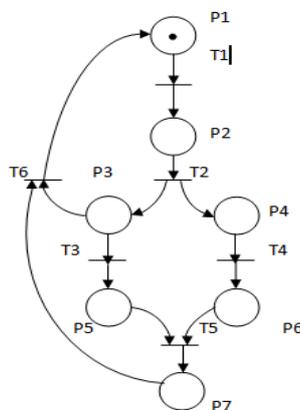


Figure (2.1) : Exemple d'un réseau de Petri

- Les matrices W^- , W^+ sont données comme suit

$$[W_{ij}^+] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \end{array} \end{array}$$

$$[W_{ij}^-] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \end{array} \end{array}$$

La matrice d'incidence est donnée comme suit :

$$[W_{ij}] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \end{array} \end{array}$$

Définition 2.2 (Marquage). Chaque place contient un nombre entier positif ou nul de marques (jetons). Le marquage M définit l'état du système décrit par le réseau à un instant donné. C'est un vecteur colonne de dimension m (le nombre de places dans le réseau). La $j^{\text{ème}}$ composante de ce vecteur représente le nombre de marques dans la $j^{\text{ème}}$ place du réseau.

Un RdP marqué est un couple $\mathcal{A} = (R, M_0)$ tel que :

- R est un réseau de Petri.

- $M_0: P^m \rightarrow \mathbb{N}^m$ est le marquage initial. \mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels.

Exemple 2.2

$$M_0 = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

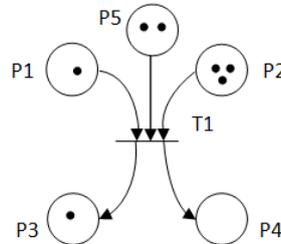


Figure (2.2) : Un réseau de Petri et son marquage initiale

2.1.4 Franchissement d’une transition

Une transition T_j est franchissable si les places P_i en amont de T_j ont un marquage supérieur ou égal au poids de l’arc reliant P_i à T_j : $\forall P_i \in {}^\circ T_j, M(P_i) \geq \text{Pré}(P_i, T_j)$.

Lors du franchissement de T_j , le marquage des places P_k en aval de T_j est incrémenté de $\text{post}(P_i, T_j)$ marques.

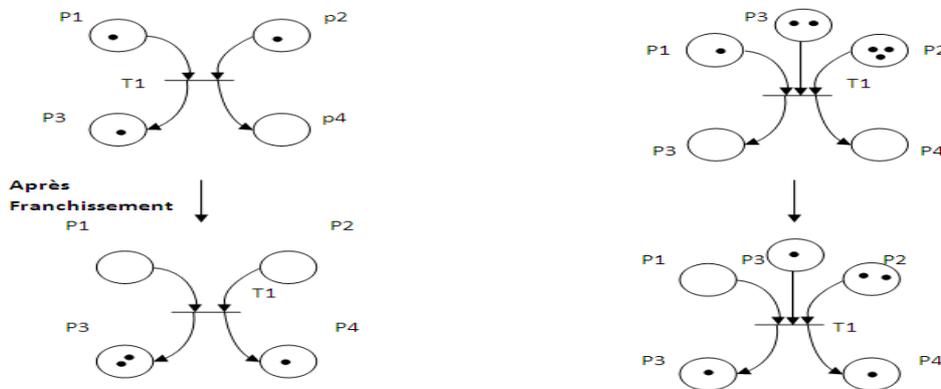


Figure (2.3) : Franchissement d’une transition

2.1.5 Equation fondamentale

On appelle séquence S une suite ordonnée de franchissements. Le vecteur \underline{S} dont les composantes sont le nombre d’occurrence de franchissement de chaque transition (indépendamment de l’ordre de franchissement), est appelé vecteur caractéristique de la séquence S .

Le passage d’un marquage M_0 à un marquage M_f s’écrit sous forme matricielle suivante :

$$M_f = M_0 + W \cdot \underline{S} \tag{2.1}$$

2.1.6 Propriétés d'un RdP

Définition 2.3 (Accessibilité). Un marquage M_f est accessible à partir du marquage initial M_0 s'il existe une séquence de franchissement S telle que : du franchissement de cette séquence à partir de M_0 , résulte un nouveau marquage M_f

Et on note : $M_0[S > M_f$.

Cette propriété permet de savoir si un état non désiré risque de se produire.

Définition 2.4 (Vivacité). Un RdP est dit vivant pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage M accessible à partir de M_0 et pour toute transition T_i , il existe une séquence de franchissement S qui inclut la transition T_i .

Cette propriété permet de déduire si le système ne comporte pas de blocage.

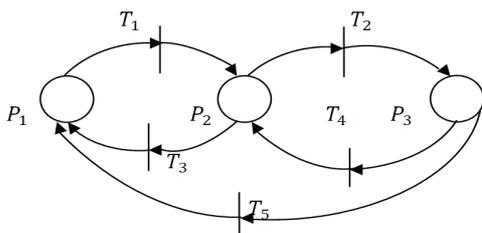
Définition 2.5 (Bornitude). Une place P_i est dite bornée pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible à partir de M_0 , le nombre de marquage dans P_i est fini.

Un RdP est dit borné si toutes ses places sont bornées.

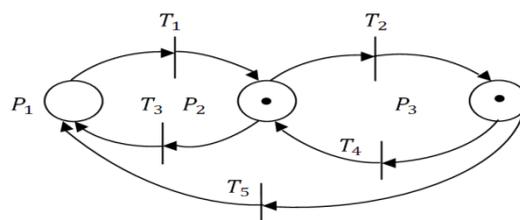
Définition 2.6 (Réversibilité). Un RdP est dit réversible ou reinitialisable pour un marquage initiale M_0 , si pour tout marquage M accessible à partir de M_0 , il existe une séquence de franchissement S qui ramène à M_0 .

2.1.7 Sous classes des réseaux des Petri

- **Graphe d'événements :** c'est un RdP dans lequel chaque place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie, un graphe d'événements est parfois appelé graphe de transition ou graphe de marquage, ainsi un graphe d'événement ne présente jamais de conflits, mais peut toutefois comporter des synchronisations.
- **Graphe d'états :** c'est un RdP dans lequel chaque transition a exactement une place d'entrée et une place de sortie, c'est le dual du graphe d'événements, ainsi un graphe d'état présente des conflits, mais ne comporte jamais de synchronisations.



Graphe d'états sans marquages



Graphe d'états avec marquages.

Figure (2.4) : Graphes d'états

2.2 Graphes d'événements temporisés

Suite à cette brève présentation de RdP, notre intérêt va maintenant se porte sur une structure particulière des RdP qui permet la modélisation des systèmes ou interviennent des phénomènes de synchronisation et de délai (les phénomènes de conflits étant supposés résolus au préalable).

Définition 2.7. Un graphe d'événements temporisé ordinaire GET est un RdP tel que chaque place possède exactement une transition en amont et une transition en aval.

Pour illustrer ce type de modèles temporisés, nous proposons l'exemple d'un GET représentant le fonctionnement d'un atelier de coupe de bois.

Exemple 2.3 (atelier de coupe de bois)

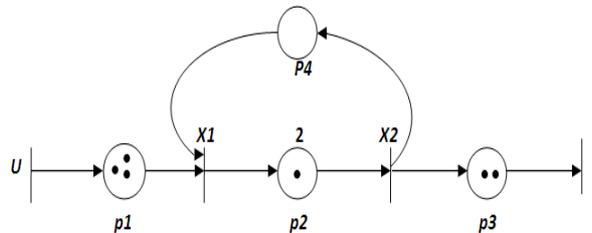


Figure (2.5) : Modèle GET d'un atelier de coupe de bois.

Le GET de la figure modélise un atelier constitué d'une machine de coupe de bois. Quand une pièce arrive et que la machine de coupe est disponible, cette dernière est traitée (découpée).

Le nombre de jetons dans une place s'interprète comme le nombre de ressources disponibles. Par exemple, le nombre de jetons dans la place p1 correspond au nombre de pièces en attente d'être traitées par la machine de coupe, c'est-à-dire le nombre de ressources qui vont être consommées.

Un jeton dans la place p2 indique qu'une pièce est entrain d'être traité par la machine de coupe.

La durée de ce traitement est de $2u.t$ (unités de temps). La fin de la coupe par la machine se traduit par l'événement d'un jeton dans la place p2 et par l'ajout d'un jeton dans la place p3 et dans la place p4.

Le nombre de jetons dans la place p3 correspond au nombre de pièces qui ont été traitées. La présence d'un jeton dans la place p4 indique que la machine est disponible.

2.2.1 Propriétés des graphes d'événements temporisés

Nous rappelons brièvement quelques caractéristiques des GET au travers des propositions suivantes :

Proposition 2.1. Le nombre de jetons d'un circuit est constant dans un GET [Murata., 1989].

Proposition 2.2. Un GET est vivant si, et seulement si, tout circuit élémentaire contient au moins une place initialement marqué [Murata., 1989].

2.3 Représentation d'état des graphes d'événements temporisés

A la différence du modèle d'état classiquement associé à un RdP (cf. équation (2.1), l'état considéré est associé non plus aux places d'un GET mais à ses transitions. Les variables d'état considérées sont de type compteurs d'événements. De telles variables permettent d'aboutir à une représentation linéaire de ces modèles dans les *dioides*.

2.3.1 Equations aux dateurs

C'est au début des années 80 [Cohen et al, 1983], que l'équipe (max, plus) de l'INRIA s'est intéressée à la modélisation de GET dont chaque place n'admet qu'une transition amont et qu'une transition avale. Ils ont montré que ces systèmes dynamiques, a priori non linéaire, pouvaient être représentés par des systèmes d'équations linéaires et admettent une représentation sous forme canonique dans les algèbres (max, plus), C'est-à-dire un modèle sous la forme :

$$\begin{cases} x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (2.2)$$

On associe à chaque transition du graphe considéré une fonction de la variable $k \in \mathbb{N}^*$, correspondant à la date du $k^{\text{ème}}$ franchissement de la transition, cette fonction est appelée dateur.

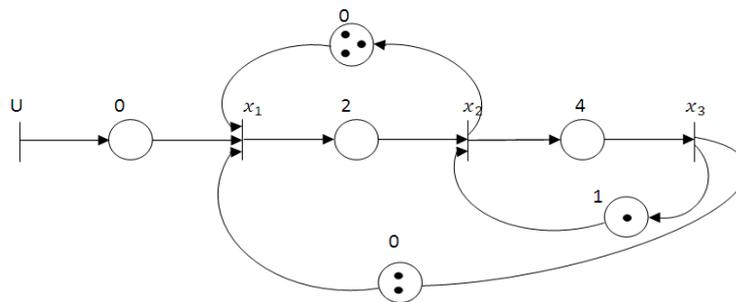


Figure (2.6) : Graphe d'évènement.

Pour le graphe d'évènement de la figure (2.6) on associe une fonction dateur $x_i(k)$ à chaque transition. Pour un franchissement au plus tôt, les fonctions dateurs vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_1(k) = \max(x_2(k-3), x_3(k-2), u(k)) \\ x_2(k) = \max(2 + x_1(k), 1 + x_3(k-1)) \\ x_3(k) = (4 + x_2(k)) \end{cases}$$

Dans l'algèbre (max, +), ces équations son écrites comme suit :

$$\begin{cases} x_1(k) = x_2(k-3) \oplus x_3(k-2) \oplus u(k) \\ x_2(k) = 2 \otimes x_1(k) \oplus 1 \otimes x_3(k-1) \\ x_3(k) = 4 \otimes x_2(k) \end{cases}$$

Ce qui donne l'équation implicite suivante :

$$x(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon \end{bmatrix} x(k) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(k-1) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(k-2) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(k-3) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(k).$$

Cette équation implicite peut être remplacée par sa solution explicite. On va calculer d'abord A_0^* .

$$\text{On a: } A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

$$A_0^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_0^i = I \oplus A_0 \oplus A_0^2 \oplus A_0^3.$$

$$A_0^* = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & e & \varepsilon \\ 6 & 4 & e \end{bmatrix}.$$

Donc l'équation explicite est:

$$x(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} x(k-1) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 6 \end{bmatrix} x(k-2) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon \end{bmatrix} x(k-3) \oplus \begin{bmatrix} e \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} u(k).$$

• **Mise sous forme d'état**

Il est toujours possible par des manipulations tout à fait classiques, de ramener un système ARMA à la forme suivante dite forme d'état. Pour avoir la forme d'état, nous avons étendu le GET initial pour avoir un nouveau graphe équivalent avec des marquages égaux à 1 ou 0. Nous obtenons alors le graphe de la figure (2.7).

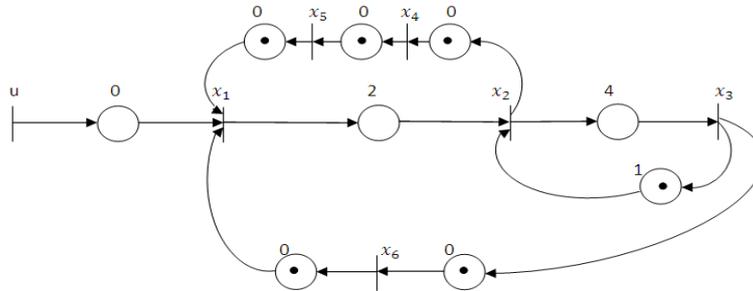


Figure (2.7) : Graphe d'évènements temporisés étendu (dateur).

Le modèle d'état correspond à ce graphe d'évènements temporisé étendu est :

$$X(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 6 \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(k-1) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ 6 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(k).$$

2.3.2 Les équations aux compteurs

De manière duale, le comportement du système précédent peut se représenter à l'aide d'équations compteur. C'est-à-dire qu'une fonction compteur est associée à chacune des transitions, elle sera chargée de compter le nombre de franchissement des transitions à une date t à partir de l'instant initial.

On considère un franchissement au plus tôt, c'est-à-dire que toute transition validée est immédiatement franchie. Les fonctions compteurs sont les suivantes ;

$$\begin{cases} x_1(t) = \min(3 + x_2(t), 2 + x_3(t), u(t)) \\ x_2(t) = \min(x_1(t - 2), 1 + x_3(t - 1)) \\ x_3(t) = x_2(t - 4) \end{cases}$$

Dans l’algèbre (min, +), ces équations son écrites comme suit :

$$\begin{cases} x_1(t) = 3 \otimes x_2(t) \oplus 2 \otimes x_3(t) \oplus u(t) \\ x_2(t) = x_1(t - 2) \oplus 1 \otimes x_3(t - 1) \\ x_3(t) = x_2(t - 4) \end{cases}$$

Ce qui donne l’équation implicite suivante:

$$X(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon & 3 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(t) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(t-1) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(t-2) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix} x(t-4) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(t).$$

Cette équation implicite peut être remplacée par sa solution explicite. On va calculer d’abord A_0^* .

On a: $A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & 3 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$.

$$A_0^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_0^i = I \oplus A_0 \oplus A_0^2 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & 3 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 3 & 2 \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}.$$

L’équation explicite est donne par :

$$X(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(t-1) \oplus \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(t-2) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix} x(t-4) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(t).$$

• **La forme d’état**

Pour avoir la forme d’état, nous avons étendu le graphe d’événements temporisés initial pour avoir un nouveau graphe équivalent avec des temporisations égales à 1 ou 0. Nous obtenons alors le graphe de la figure (2.8).

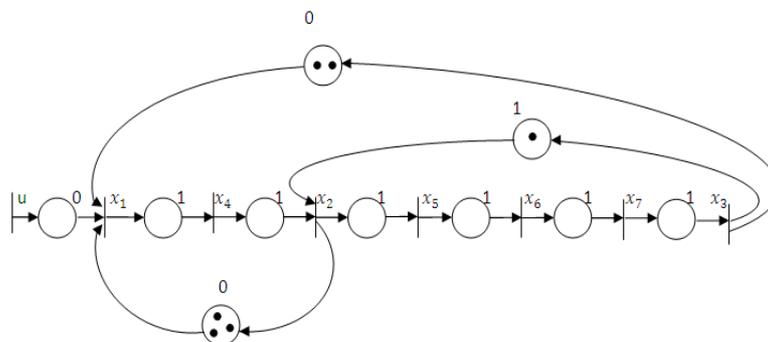


Figure (2.8) : Graphe d’évènements temporisés étendu.

Le modèle d'état correspond à ce graphe d'événements temporisé étendu est :

$$X(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 4 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix} X(t-1) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(t)$$

2.4 Relation entrée-sortie d'un GET

2.4.1 Réponse impulsionnelle

On met ici en évidence la relation entrée-sortie d'un système décrit sous sa forme d'état (2.2).

Le développement de la récurrence (2.2) donne :

$$\begin{aligned} y(k) &= Cx(k) \\ &= CAx(k-1) \oplus CBu(k) \\ &= CA^2x(k-2) \oplus CABu(k-1) \oplus Bu(k) \\ &\quad \vdots \\ &= CA^p x(k-p) \oplus \bigoplus_{i=0}^{p-1} CA^i Bu(k-i). \end{aligned}$$

On pose maintenant

$$h(i) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } i < 0 \\ CA^i B & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, en adoptant des conditions initiales canoniques, on a $x(j) = \varepsilon$ et $u(j) = \varepsilon$ pour $j < 0$.

Aussi, pour un k donné, et en considérant un p assez grand, c'est-à-dire $p \geq k$, on peut écrire

$$Y(k) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} h(i)u(k-i) \tag{2.3}$$

Dans l'équation (2.3), la sortie n'est plus dépendante de l'état du système mais uniquement de son entrée. Cela s'explique par le fait qu'on a considéré $p \geq k$ à savoir que dans l'équation (2.3), nous considérons le système depuis le début de l'établissement de la commande, pour les événements antérieurs, on a $x(k) = \varepsilon$ et $y(k) = \varepsilon$. Cette équation peut être perçue comme la somme des effets de la commande. De ce point de vue, le $y(k)$ est le résultat de la k -ième occurrence de la commande, *i.e.* $h(0)u(k)$, de la $k-1$ -ième occurrence de la commande, *i.e.* $h(1)u(k-1)$, de la $k-2$ -ième occurrence de la commande... et ce, jusqu'au début de l'établissement de la commande.

La variable $h(k)$ est également appelée réponse impersonnelle dans le sens où elle correspond à la sortie du système lorsqu'on lui applique une entrée du type :

$$e(i) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } i < 0 \\ e & \text{sinon} \end{cases} .$$

Ce signal est considéré comme une impulsion (à l'événement 0) dans la théorie des systèmes (max-plus linéaires). Dans le cadre des GET, cette entrée correspond à tirer une infinité de fois la transition correspondante à l'instant 0.

Remarque 2.1.

- On se permet de remarquer la forte analogie de la réponse impulsionnelle donnée en (2.3) avec la relation entrée-sortie des systèmes continus échantillonnés.
- Dans le cas d'un système multi-entrées ou multi-sorties, la réponse impulsionnelle $h(k)$ est une matrice. L'élément $h_{ij}(k)$ représente la réponse du k -ième événement de la sortie y_i à une impulsion (à l'événement 0) sur l'entrée u_j .
- La réponse d'un système (max; +)-linéaire invariant à une entrée quelconque $u(k)$ est la convolution linéaire de $u(k)$ avec la réponse impulsionnelle $h(k)$ du système. On parle de sup-convolution pour désigner l'opération (2.3), notamment dans [Baccelli et al., 1992], à cause de la structure algébrique dans laquelle on décrit les systèmes (dans le dioïde (min; +), on parle d'inf-convolution).

Remarque 2.2.

L'évolution du graphe d'événement peut être représentée dans le domaine temporel par les fonctions compteurs, et dans le domaine événementiel par les fonctions dateurs.

2.5 Dioïdes de séries formelles

Il est également possible de modéliser les GET de manière plus synthétique dans les dioïdes des séries formelles, dont le dioïde des séries formelles en deux variables commutatives, γ et δ , à exposants dans \mathbb{Z} , noté $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ [d'après cohen1993].

2.5.1 La transformée en γ

Les techniques de transformation jouent un rôle primordial dans l'étude des systèmes linéaires invariant. Le cas de la transformée de Laplace pour les systèmes en temps continu ou la transformée en z pour les systèmes en temps discret (systèmes échantillonnés). En effet, elle va permettre de transformer les sup-convolutions (présentées précédemment) en des produits des séries de formelles. La structure algébrique à utiliser pour une telle représentation est celle d'un dioïde des séries formelles.

Définition 2.8. Rappelons qu'un dateur est ici assimilé à une application croissante de \mathbb{Z} dans le dioïde complet $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$. La transformée en γ d'un dateur $\{d(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est définie comme la série formelle

$$D(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} d(k)\gamma^k \quad (2.4)$$

Supposons deux dateurs reliés par l'égalité $x_1(k) = x_2(k - n_0)$, ce qui correspond à deux transitions séparées par une place contenant n_0 jetons. La transformée en γ de chacun des dateurs est

$$\begin{aligned} X_1(\gamma) &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_1(k)\gamma^k \\ &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_1(k - n_0)\gamma^k \\ &= \gamma^{n_0} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_1(k - n_0)\gamma^{(k-n_0)} \\ &= \gamma^{n_0} X_2(\gamma). \end{aligned}$$

Il apparaît que multiplier une série en par γ^{n_0} revient à décaler la séquence de n_0 unités. Il est donc possible d'interpréter l'opérateur γ comme opérateur de décalage "événementiel", ce que l'on écrit parfois :

$$\gamma x(k) = x(k-1). \quad (2.5)$$

Supposons le GET suivant :

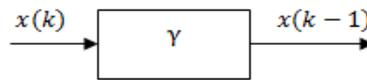


Figure (2.9): Opérateur de décalage "événementiel"

Remarque 2.3 (Dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$). Ce type de transformée est l'analogue de la transformée en z de l'automatique classique qui permet de coder une trajectoire discrète sous la forme de série.

Définition 2.9 (Dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$). L'ensemble des séries formelles en γ à exposant dans \mathbb{Z} et à coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ a une structure de dioïde. L'élément neutre de l'addition est la série $\varepsilon = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon \gamma^k$ (ou $\varepsilon = -\infty$ est l'élément neutre de l'addition dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$). L'élément neutre de la multiplication est la série $e(\gamma) = e\gamma^0$ (où $e = 0$ est l'élément neutre de la multiplication de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$). La somme et le produit de séries formelles sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} d_1(\gamma) \oplus d_2(\gamma) &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (d_1(k) \oplus d_2(k))\gamma^k \\ d_1(\gamma) \otimes d_2(\gamma) &= \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (d_1(j) \otimes d_2(k-j))\gamma^k \end{aligned}$$

Le système d'équations :

$$\begin{cases} x(k) = Ax(k - 1) \oplus Bu(k) \\ y(k) = cx(k) \end{cases}$$

Correspond au modèle standard d'un GET dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ et peut se transposer dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$

$$\begin{cases} x(\gamma) = \gamma Ax(\gamma) \oplus Bu(\gamma) \\ y(\gamma) = cx(\gamma) \end{cases} \quad (2.6)$$

On a : l'équation implicite suivante : $x = ax \oplus b$

Cette équation admet $x=a^* b = (\bigoplus_{k \geq 0} a^k)b$ comme petite solution.

$$\text{On a: } \begin{cases} x(\gamma) = \gamma Ax(\gamma) \oplus Bu(\gamma) \\ y(\gamma) = cx(\gamma) \end{cases}$$

On remplace $x(\gamma)$ dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned} y(\gamma) &= c(\gamma Ax(\gamma) \oplus Bu(\gamma)) \\ &= c(\gamma A^*)Bu(\gamma) \\ &= c\gamma Ax(\gamma) \oplus cBu(\gamma) \\ y(\gamma) &= c\gamma A^*Bu(\gamma) = Hu(\gamma) \end{aligned}$$

De manière équivalente il est possible de considérer le modèle précédent dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$:

$$\begin{cases} x(\gamma) = \bigoplus_{i=0}^a \gamma^i A_i x(\gamma) \oplus \bigoplus_{j=0}^b \gamma^j B_j u(\gamma) \\ y(\gamma) = \bigoplus_{l=0}^c \gamma^l C_l x(\gamma) \end{cases}$$

Qui conduit au modèle précédent :

$$\begin{cases} x(\gamma) = \gamma Ax(\gamma) \oplus Bu(\gamma) \\ y(k) = cx(\gamma) \end{cases}$$

Avec : $A = \bigoplus_{i=0}^a \gamma^i A_i$; $B = \bigoplus_{j=0}^b \gamma^j B_j$; $C = \bigoplus_{l=0}^c \gamma^l C_l$. Les éléments des matrices A, B, C sont des polynômes.

Cette formulation n'est pas standard. Le pouvoir de modélisation est cependant équivalent et les composantes du vecteur d'état représentent directement une transition du GET. Ce type de modèle sera systématiquement considéré par la suite.

2.5.1.1 Trajectoire monotones

Les trajectoires solutions des systèmes d'équations précédents ne sont pas nécessairement monotones ; pourtant, par définition une trajectoire issue d'un GET est nécessairement monotone croissante (la date d'occurrence de $d(k)$ est nécessairement supérieure à $d(k-1)$).

Formellement,

$$\forall K \in \mathbb{Z}, d(k) \geq d(k-1) \Leftrightarrow d(k) = d(k) \oplus d(k-1)$$

Qui équivalent à:

$$d(\gamma) = d(\gamma) \oplus \gamma d(\gamma) \Leftrightarrow d(\gamma) = \gamma^* d(\gamma)$$

C'est-à-dire la transformé en γ d'une trajectoire monotone s'écrit forcément $\gamma^* d(\gamma)$ et que la multiplication par γ^* d'une trajectoire non monotone donne une trajectoire monotone croissante.

Il s'agit d'une sortie du filtre. L'ensemble des trajectoires monotones (qui s'écrivent $\gamma^* d(\gamma)$) forment une dioïde noté $\gamma^* \overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$ pour s'en persuader il faut noter que la somme et le produit d'éléments de cet ensemble sont fermés. il en découle que l'égalité d'éléments doit

S'entendre « modulo γ^* ». Par exemple :

$$3 \gamma \oplus 1 \gamma^7 \oplus 5 \gamma^9 = 3 \gamma \oplus 5 \gamma^9.$$

De façon plus générale les règles de calcul suivantes doivent être considérées :

$$\gamma^n \oplus \gamma^{n'} = \gamma^{\min(n, n')}$$

L'élément neutre pour la multiplication de $\gamma^* \overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$ est donc $e(\gamma) = e \oplus e\gamma \oplus e\gamma^2 \oplus \dots \oplus e\gamma^{+\infty}$.

L'élément neutre pour l'addition de $\gamma^* \overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$ est donc $\varepsilon(\gamma) = \varepsilon \oplus \varepsilon\gamma \oplus \varepsilon\gamma^2 \oplus \dots \oplus \varepsilon\gamma^{+\infty}$.

Avec $\varepsilon = -\infty$ l'élément neutre de l'addition de $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$.

Exemple 2.4. Soit le graphe d'événement de la figure (2.10) suivant :

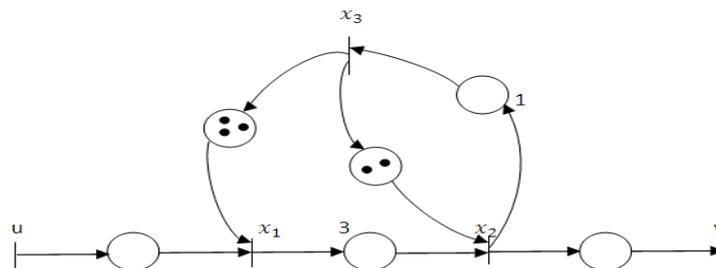


figure (2.10) : Graphe d'événement temporisé

Les fonctions dateurs $x_i(k)$ associées à chaque transition de la figure (2.10). Pour un franchissement au plus tôt :

$$\begin{cases} x_1(k) = x_3(k-3) \oplus u(k) \\ x_2(k) = 3 \otimes x_1(k) \oplus x_3(k-2) \\ x_3(k) = 1 \otimes x_2(k) \\ y(k) = x_2(k) \end{cases}$$

L'interprétation en γ est donne par:

$$\begin{cases} X_1(\gamma) = \gamma^3 X_3(\gamma) \oplus U(\gamma) \\ X_2(\gamma) = 3 \otimes X_1(\gamma) \oplus \gamma^2 X_3(\gamma) \\ X_3(\gamma) = 1 \otimes X_2(\gamma) \\ Y(\gamma) = X_2(\gamma) \end{cases}$$

On obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} X(\gamma) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \gamma^3 \\ 3 & \varepsilon & \gamma^2 \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{bmatrix} X(\gamma) + \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} U(\gamma) \\ Y(\gamma) = [\varepsilon \quad e \quad \varepsilon] X(\gamma) \end{cases}$$

2.5.2 Transformée en δ

La situation est complètement duale.

Définition 2.10. Dans le domaine temporel. Une variable compteur $\{c(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est une application croissante:

$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{min}$. Si on note δ l'operateur de décalage, on a

$$C(\delta) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \delta^k. \tag{2.7}$$

Supposons le GET suivant :

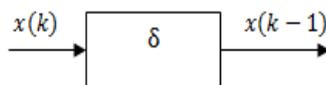


Figure (2.11): Opérateur de décalage "temporel"

Définition 2.11 (Dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[\delta]$). L'ensemble des séries formelles en δ à exposant dans \mathbb{Z} et coefficients dans \mathbb{Z}_{min} a une structure de dioïde. L'élément neutre de l'addition est la série $\varepsilon = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \varepsilon \delta^i$ (ou $\varepsilon = +\infty$ est l'élément neutre de l'addition dans $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$). L'élément neutre de la multiplication est la série $e(\delta) = e \delta^0$ (où $e = 0$ est l'élément neutre de la multiplication de $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$). La somme et le produit de séries formelles sont définis comme suit :

$$\begin{cases} c_1(\delta) \oplus c_2(\delta) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} (c_1(t) \oplus c_2(t)) \delta^t \\ c_1(\delta) \otimes c_2(\delta) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (c_1(j) \otimes c_2(t-j)) \delta^t \end{cases}$$

La forme d'état : de même façon que pour la transformée γ si on a la forme d'état suivante :

$$\begin{cases} x(t) = Ax(t-1) \oplus Bu(t) \\ y(t) = cx(t) \end{cases}$$

La transformation en δ des dateurs $u(t)$, $x(t)$ et $y(t)$; on aura

$$\begin{cases} X(\delta) = \bigoplus_{i=0}^a \delta^i A_i X(\delta) \oplus \bigoplus_{j=0}^b \delta^j B_j U(\delta) \\ Y(\delta) = \bigoplus_{l=0}^c \delta^l C_l X(\delta) \end{cases}$$

Qui conduit à un modèle de la forme :

$$\begin{cases} x(\delta) = \delta Ax(\delta) \oplus Bu(\delta) \\ y(\delta) = cx(\delta) \end{cases} \quad (2.8)$$

Avec $A = \bigoplus_{i=0}^a \delta^i A_i$; $B = \bigoplus_{j=0}^b \delta^j B_j$; $C = \bigoplus_{l=0}^c \delta^l C_l$; les éléments des matrices A, B et C sont alors des polynômes.

2.5.2.1 Trajectoires monotones

Tout comme dans le domaine événementiel les trajectoires associées à un graphe d'événements sont monotones (le nombre d'événements ayant eu lieu à l'instant $(t+1)$, $c(t+1)$, est nécessairement supérieur au nombre ayant eu lieu à l'instant t , $c(t)$) formellement.

$$\forall t \in \mathbb{Z} \quad c(t) \geq c(t+1) \Leftrightarrow c(t) = c(t+1) \oplus c(t).$$

Qui est équivalent à :

$$c(\delta) \geq \delta^{-1} c(\delta) \oplus c(\delta) \Leftrightarrow c(\delta) = (\delta^{-1}) * c(\delta).$$

C'est-à-dire que la transformation en δ d'une trajectoire monotone appartient au dioïde $(\delta^{-1}) * \overline{\mathbb{Z}}_{\min}[\delta]$. il en découle les règles de calcul suivantes : $\delta^t \oplus \delta^{t'} = \delta^{\max(t,t')}$.

L'élément neutre pour la multiplication de $(\delta^{-1}) * \overline{\mathbb{Z}}_{\min}[\delta]$ est la série :

$$e(\delta) = e \oplus e\delta \oplus e\delta^2 \oplus \dots \oplus e\delta^{+\infty}.$$

L'élément neutre pour l'addition de $(\delta^{-1}) * \overline{\mathbb{Z}}_{\min}[\delta]$ est la série $\varepsilon(\delta) = \varepsilon \oplus \varepsilon\delta \oplus \varepsilon\delta^2 \oplus \dots \oplus \varepsilon\delta^{+\infty}$, avec $\varepsilon = +\infty$ l'élément neutre pour l'addition $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$.

Exemple 2.5. Les fonctions compteur $X_i(t)$ à chaque transition de la figure (2.10). Pour un franchissement au plus tôt est:

$$\begin{cases} x_1(t) = 3 \otimes x_3(t) \oplus u(t) \\ x_2(t) = x_1(t-3) \oplus 2 \otimes x_3(t) \\ x_3(t) = x_2(t-1) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

L'interprétation en δ est donne par:

$$\begin{cases} X_1(\delta) = 3 \otimes X_3(\delta) \oplus U(\delta) \\ X_2(\delta) = \delta^3 X_1(\delta) \oplus 2 \otimes X_3(\delta) \\ X_3(\delta) = \delta^1 X_2(\delta) \\ Y(\delta) = X_2(\delta) \end{cases}$$

On obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} X(\gamma) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ \delta^3 & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \delta^1 & \varepsilon \end{bmatrix} X(\gamma) + \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix} U(\gamma) \\ Y(\gamma) = [\varepsilon \quad e \quad \varepsilon] X(\gamma) \end{cases}$$

2.6 Représentation Bi dimensionnelle $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

Au travers d'un exemple nous allons rappeler comment modéliser un GET dans un dioïde de séries formelles en deux variables commutatives γ et δ , à exposants dans \mathbb{Z} et à coefficients booléens. Ce dioïde sera systématiquement utilisé dans les illustrations de ce mémoire.

Exemple2.6. Une Représentation Bi dimensionnelle $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$:

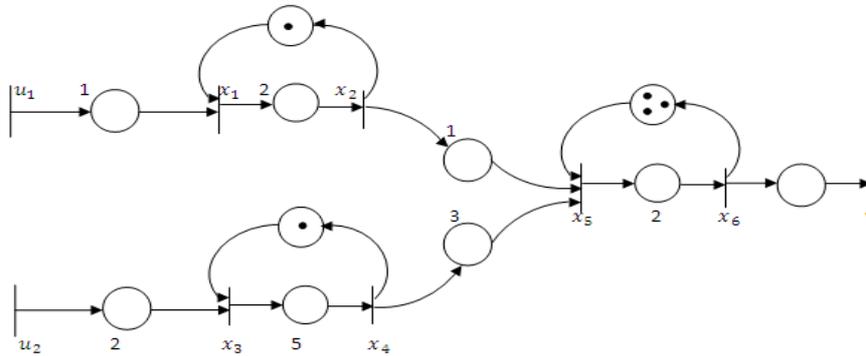


Figure (2.12) : Exemple d'un GET (pour Gamma-delta).

L'interprétation en $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$: est donne par :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta & \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \gamma \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \delta & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^2 \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$Y = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad e] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

2.7 Représentation en séries formelles

Dans la théorie conventionnelle des systèmes, face à un produit de convolution, il est classique d'introduire la transformée de Fourier ou de Laplace des fonctions considérées. Les modèles discrets ont aussi une représentation fréquentielle : la transformée en z . La classe de systèmes considérés ici disposent également d'une transformée. Cette transformation, introduite par [Cohen et al., 1989], permet de prendre en compte les deux aspects des représentations en dateurs ou en compteurs.

2.7.1 Le dioïde $\mathbb{B} \in \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$

Dans la définition (1.13), on a présenté un dioïde de séries formelles ainsi que la manipulation de ses éléments au travers des lois \oplus et \otimes . Le dioïde $\mathbb{B} \in \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$ est un dioïde de séries formelles particulièrement bien adapté à la modélisation des GET. En effet, il permet de manipuler uniquement des séries croissantes et comme on va le voir par la suite, ce sont ces séries qui permettent de coder les tirs des transitions d'un GET. Dans ce dioïde, on manipule des séries formelles en deux indéterminées commutatives γ et δ à exposants dans \mathbb{Z} et à coefficients booléens.

$$x = \bigoplus_{n,t \in \mathbb{Z}^2} x(n,t) \gamma^n \delta^t.$$

L'ensemble de ces séries formelles est un dioïde distributif noté $\mathbb{B} \in \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$ doté des règles d'addition et de produit définies dans la définition (1.9). Cependant, toutes les séries de $\mathbb{B} \in \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$ ne permettent pas de modéliser les transitions d'un GET. Etudions maintenant la forme d'une série qui code une transition de GET.

La représentation des séquences de tirs d'un GET induit les règles de simplification suivantes :

- $\gamma^n \delta^t \oplus \gamma^{n'} \delta^{t'} = \delta^t \gamma^{\min(n,n')}$ (2.9)

- $\gamma^n \delta^t \oplus \gamma^{n'} \delta^{t'} = \gamma^n \delta^{\max(t,t')}$ (2.10)

Puisque d'une part $\gamma^{\min(n,n')} \delta^t$ domine $\gamma^n \delta^t$ et $\gamma^{n'} \delta^{t'}$, et d'autre part $\gamma^n \delta^{\max(t,t')}$ domine $\gamma^n \delta^t$ et $\gamma^{n'} \delta^{t'}$.

On a la relation suivant :

$$\begin{aligned} x &= \gamma^n \delta^t \\ &= \gamma^n \delta^t \oplus \gamma^{n+1} \delta^t \oplus \gamma^{n+2} \delta^t \oplus \dots \\ &= \bigoplus \gamma^n \delta^t \oplus \gamma^n \delta^{t-1} \oplus \gamma^n \delta^{t-2} \oplus \dots \\ &= \gamma^n \delta^t (\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \gamma^i) \oplus \gamma^n \delta^t (\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \delta^{-i}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \gamma^n \delta^t \gamma^* \oplus \gamma^n \delta^t (\delta^{-1})^* \\
 &= \gamma^n \delta^t (\gamma^* \oplus (\delta^{-1})^*).
 \end{aligned}$$

Les éléments de $\mathbb{B} \in \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$ qui sont en mesure de coder des trajectoires de tir de GET sont ceux qui restent inchangés lorsqu'on les multiplie par $(\gamma^* \oplus (\delta^{-1})^*)$. Cet ensemble est un dioïde, noté $M_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$, dans lequel l'élément nul est noté $\varepsilon = \bigoplus_{(n,t) \in \mathbb{Z}^2} \varepsilon \gamma^n \delta^t$, l'élément unité est défini comme $e = (\gamma^* \oplus (\delta^{-1})^*)$. Le dioïde $M_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$ est complet et sa borne supérieure est notée $\Gamma = (\gamma^{-1})^* \delta^*$.

Remarque 2.4

- L'élément neutre e peut présenter plusieurs notations. Tout d'abord $e = (\gamma^* \oplus (\delta^{-1})^*) = \gamma^* (\delta^{-1})^*$ puisque lorsque a et b sont des variables commutatives, on a $(a \oplus b)^* = a^* b^*$ (une preuve est donnée dans [Baccelli et al., 1992, lemme 4.107]). Ensuite, si l'on tient compte des propriétés (2.9) et (2.10), on peut également noter l'élément unité

$$e = \gamma^0 \delta^0 = \gamma^0 = \delta^0.$$

- Puisqu'un monôme $\gamma^n \delta^t$ de $M_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$ est invariant par rapport au produit par $\gamma^* (\delta^{-1})^*$, il existe une multitude de notations qui représentent ce cône. Nous considérerons généralement son représentant minimal, c'est-à-dire sa forme après avoir appliqué les règles de simplification (2.9) et (2.10).

2.7.2 Manipulation des séries formelles

La transformée en γ, δ d'un dateur associé à une transition d'un GET permet de coder l'ensemble de ses tirs (on parle alors de trajectoire). On peut s'interroger sur l'influence de la multiplication par γ ou δ sur une trajectoire. Débutons avec le produit par γ sur une série $x \in M_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$:

$$\begin{aligned}
 \gamma x &= \gamma \bigoplus_{n,t \in \mathbb{Z}^2} x(n, t) \gamma^n \delta^t \\
 &= \bigoplus_{n,t \in \mathbb{Z}^2} x(n, t) \gamma^{n+1} \delta^t \\
 &= \bigoplus_{n,t \in \mathbb{Z}^2} x(n-1, t) \gamma^n \delta^t
 \end{aligned}$$

Le résultat est un décalage d'une unité des numéros d'événements. Ce décalage est appelé "retard événementiel".

On examine maintenant l'effet du produit par δ sur une série x de $M_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$.

$$\begin{aligned}
 \delta x &= \gamma \oplus_{n,t \in \mathbb{Z}^2} x(n,t) \gamma^n \delta^t \\
 &= \oplus_{n,t \in \mathbb{Z}^2} x(n,t) \gamma^n \delta^{t+1} \\
 &= \oplus_{n,t \in \mathbb{Z}^2} x(n,t-1) \gamma^n \delta^t
 \end{aligned}$$

Le produit par δ induit un décalage temporel d'une unité de temps qui retarde toutes les occurrences d'une trajectoire. Ce décalage est aussi appelé "retard temporel".

L'addition et le produit dans $M_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$ sont définis dans la définition (1.8) Puisque le dioïde $M_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$ est complet, tout couple $x = \oplus_{i \in I} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$ et $x' = \oplus_{j \in J} \gamma^{n'_j} \delta^{t'_j}$, où $\gamma^{n_i} \delta^{t_i}$ (resp. $\gamma^{n'_j} \delta^{t'_j}$) désignent les monômes du représentant minimal de x (resp. x'), admet une borne inférieure notée $x \wedge x'$ définie par

$$\begin{aligned}
 x \wedge x' &= (\oplus_{i \in I} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}) \wedge (\oplus_{j \in J} \gamma^{n'_j} \delta^{t'_j}) \\
 &= \oplus_{i \in I} (\gamma^{n_i} \delta^{t_i} \wedge (\oplus_{j \in J} \gamma^{n'_j} \delta^{t'_j})) \quad (\text{Seconde égalité de la définition 1.9}) \\
 &= \oplus_{i \in I} (\oplus_{j \in J} (\gamma^{n_i} \delta^{t_i} \wedge \gamma^{n'_j} \delta^{t'_j})) \quad (\text{Seconde égalité de la définition 1.9})
 \end{aligned}$$

Pour deux monômes $\gamma^n \delta^t$ et $\gamma^{n'} \delta^{t'}$, on peut vérifier la règle de simplification suivante

$$\gamma^n \delta^t \wedge \gamma^{n'} \delta^{t'} = \gamma^{\max(n, n')} \delta^{\min(t, t')}.$$

Représentation graphique des opérations sur $M_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$

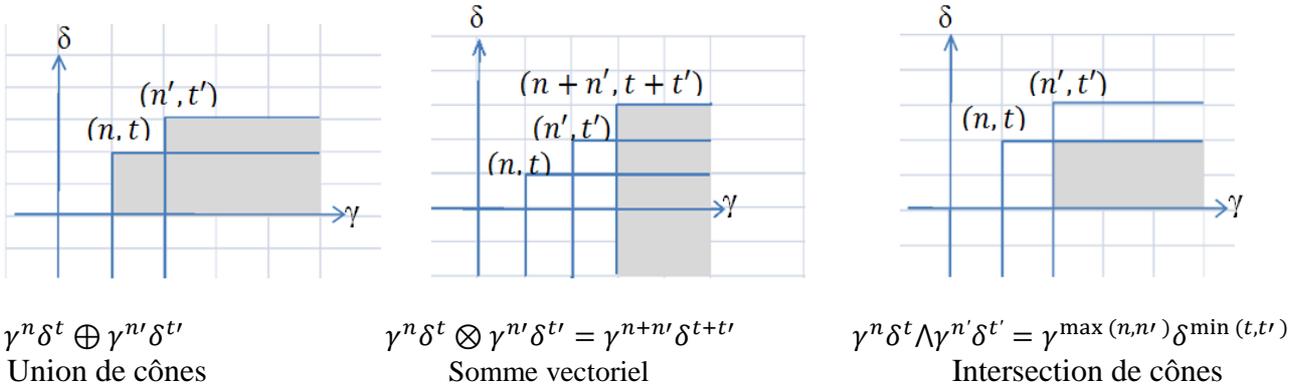


Figure (2.13). Représentation graphique des opérations sur $M_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$

Nous représentons graphiquement l'effet des lois \oplus , \otimes et \wedge sur deux monômes $x = \gamma^n \delta^t$ et $x' = \gamma^{n'} \delta^{t'}$ sur la figure (2.13) (le résultat de l'opération est représenté en gris) :

- La somme de x et de x' est l'union de leur cône respectif.
- Le produit des deux monômes est égal à $\gamma^{n+n'} \delta^{t+t'}$. La représentation graphique de ce produit se traduit par une somme vectorielle des points (n, t) et (n', t') .
- La borne inférieure de x et de x' est représentée par l'intersection de leurs cônes respectifs.

Exemple 2.7. Nous considérons deux séries :

$$x_1 = \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^6 \text{ et } x_2 = \delta^1 \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^5 \delta^3.$$

$$x_1 \oplus x_2 = \delta^1 \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^6,$$

On remarque que $\gamma^4 \delta^6$ domine $\gamma^5 \delta^3$ ($\gamma^4 \delta^6 \geq \gamma^5 \delta^3$).

$$x_1 \otimes x_2 = \gamma^1 \delta^3 \oplus \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^7 \oplus \gamma^6 \delta^8 \oplus \gamma^9 \delta^9.$$

$$x_1 \wedge x_2 = \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^5 \delta^3.$$

La résiduation s'applique aussi dans le dioïde $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$. Les monômes de $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ sont inversibles : $(\gamma^n \delta^t)^{-1} = \gamma^{-n} \delta^{-t}$. Le résultat de la résiduation de deux séries $x = \bigoplus_{i \in I} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$ et $x' = \bigoplus_{j \in J} \gamma^{n'_j} \delta^{t'_j}$ peut être évalué grâce à l'inversibilité des monômes et à la formule $(a \oplus b) \oslash x = a \oslash x \wedge b \oslash x$ du théorème (1.6) :

$$\begin{aligned} x \oslash x' &= (\bigoplus_{i \in I} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}) \oslash x' \\ &= \bigwedge_{i \in I} \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \oslash x' \\ &= \bigwedge_{i \in I} \gamma^{-n_i} \delta^{-t_i} x' \text{ (Les monômes sont inversibles).} \end{aligned}$$

Exemple 2.8. En reprenant les séries x_1 et x_2 définies dans l'exemple (2.7), on obtient :

$$x_1 \oslash x_2 = \gamma^{-1} \delta^{-4} \oplus \gamma^1 \delta^{-3}$$

Et

$$x_2 \oslash x_1 = \gamma^1 \oplus \gamma^2 \delta^1 \oplus \gamma^4 \delta^3$$

2.8 Modélisation des graphes d'événements temporisés de $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

L'objet de cette section est de rappeler que tout transfert de GET peut se représenter par une matrice constituée de séries de $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$.

L'équation d'état (2.2) devient dans $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$:

$$\begin{cases} x = Ax \oplus Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Où A , B et C sont des matrices à éléments dans $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$.

Exemple 2.9. Nous formulons ici la représentation d'état du GET de la figure (2.5). On utilise la même notation pour désigner les transitions et les éléments de $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ codant leurs tirs. Les trajectoires sont reliées par les égalités suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \oplus \gamma^3 u \\ x_2 = \gamma^1 \delta^2 x_1 \\ y = \gamma^2 x_2 \end{cases}$$

Ou encore sous forme matricielle

$$\begin{cases} X = \begin{bmatrix} \varepsilon & e \\ \gamma^1 \delta^2 & \varepsilon \end{bmatrix} x \oplus \begin{bmatrix} \gamma^3 \\ \varepsilon \end{bmatrix} U \\ Y = [\varepsilon \quad \gamma^2] X \end{cases}$$

Pour le calcul de la matrice de transfert, on peut procéder très simplement ; en effet on peut reporter x_1 dans l'équation x_2 , on obtient alors :

$$\begin{aligned} x_2 &= \gamma^1 \delta^2 (x_2 \oplus \gamma^3 u) \\ x_2 &= \gamma^1 \delta^2 x_2 \oplus \gamma^4 \delta^2 u \end{aligned}$$

On appliquant l'étoile de Kleene, on peut résoudre l'équation implicite suivant :

$$x_2 = (\gamma^1 \delta^2)^* \gamma^4 \delta^2 u$$

Finalement en reportant x_2 dans l'équation de sortie, on obtient comme matrice de transfert

$$H = CA^*B = \gamma^8 \delta^2 (\gamma^1 \delta^2)^*$$

Remarque 2.5. On souligne ici le lien qui apparaît entre les résultats fournis par la théorie spectrale et l'expression du transfert du GET de la figure (2.5).

Puisque les transitions internes (x_1, x_2) appartiennent à une même composante fortement connexe, il y a un temps de cycle unique pour l'ensemble du graphe de la figure (2.5). Le rayon spectral $\rho(A)$ fournit alors le temps de cycle de ce circuit critique (c'est ici le seul circuit), soit

$$\rho(A) = \frac{1}{2}, \text{ ce qui correspond à un taux de production de 2 jetons toutes les 3 unités de temps.}$$

On peut noter que l'expression du transfert donnée dans l'exemple précédent met également en évidence ce résultat. En effet, la forme du transfert du GET de la figure (2.5) fait apparaître le caractère ultimement périodique de la réponse impulsionnelle : cette période ultime est décrite par la présence d'une seule étoile de monôme, ici $(\gamma^1 \delta^2)^*$.

2.9. Réalisabilité, rationalité et périodicité

Les définitions sont ici fournies dans le dioïde $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$:

Définition 2.12 (Causalité). Une série x de $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est dite causale si $x = \varepsilon$ ou si son représentant minimal possède tous ses exposants dans \mathbb{N} . Une matrice est dite causale si toutes ses composantes sont causales.

L'ensemble des séries causales est un sous-dioïde noté $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^+$. Pour une série x de $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, il est possible d'obtenir le plus grand élément de $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^+$ qui soit plus petit que x . Cette opération appelée *projection causale* est notée Pr_+ .

Définition 2.13 (projection). On définit la projection causale d'un élément $x \in M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ comme suit :

$$\begin{aligned} Pr_+(x) &= Pr_+(\bigoplus_{i \in I} x(n_i, t_i) \gamma^{n_i} \delta^{t_i}) \\ &= (\bigoplus_{i \in I} x_+(n_i, t_i) \gamma^{n_i} \delta^{t_i}) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Où :

$$x_+(n_i, t_i) = \begin{cases} x_+(n_i, t_i), & \text{si } (n_i, t_i) \geq (0,0); \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.12}$$

Graphiquement, la projection causale consiste à ne conserver que les monômes situés dans le cadran nord-est du plan \mathbb{Z}^2 .

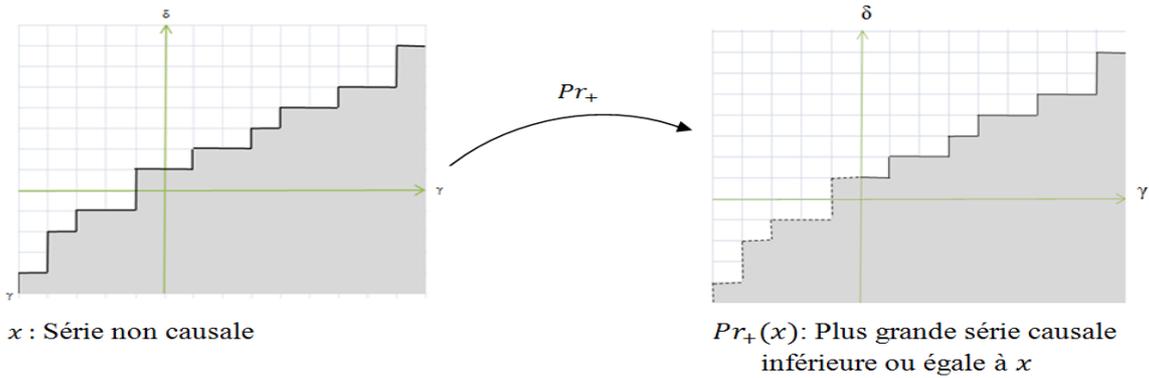


Figure (2.14): Représentation graphique de l'opération de projection Pr_+

Définition 2.14 (rationalité). Un élément $s \in M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est dite rationnel si l'un de ses représentants au moins peut être obtenu par un nombre fini d'opérations \bigoplus, \bigotimes et $*$ à partir de l'ensemble $\{\varepsilon, e, \gamma, \delta\}$. On dira qu'une matrice à coefficients $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est rationnelle si tous ses coefficients sont rationnels.

Remarque 2.6. Par définition un élément rationnel est également causal.

Définition 2.15 (réalisabilité). Un élément $s \in M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est réalisable s'il existe un GET mono entrée/mono sortie dont cet élément est la fonction de transfert, ou plus précisément s'il existe trois matrices A, B et C de tailles respectivement $n \times n, n \times l, m \times n$ à coefficients dans l'ensemble $\{\varepsilon, e\}$ tel que cet élément puisse s'écrire CA^*B .

Définition 2.16 (Périodicité). Un élément $s \in M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est périodique s'il existe deux polynômes p et q de $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

$$p = \bigoplus_{i=0}^{\alpha} \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \quad \text{et} \quad q = \bigoplus_{j=0}^{\beta} \gamma^{N_j} \delta^{N_j}$$

et un monôme causal :

$$r = \gamma^v \delta^\tau$$

$$s = p \oplus q r^*$$

Une matrice est périodique si tous ses coefficients sont périodiques.

Remarque 2.7. Cette définition de la périodicité n'impose pas la causalité de la série.

Théorème 2.1. Soit $s, H \in M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$. Les affirmations suivantes sont équivalentes

- i. H est réalisable
- ii. H est rationnelle
- iii. H est périodique et causale

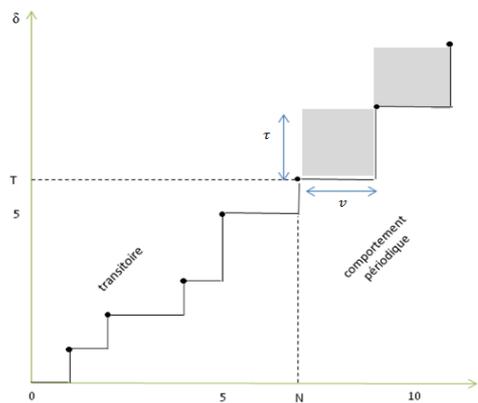
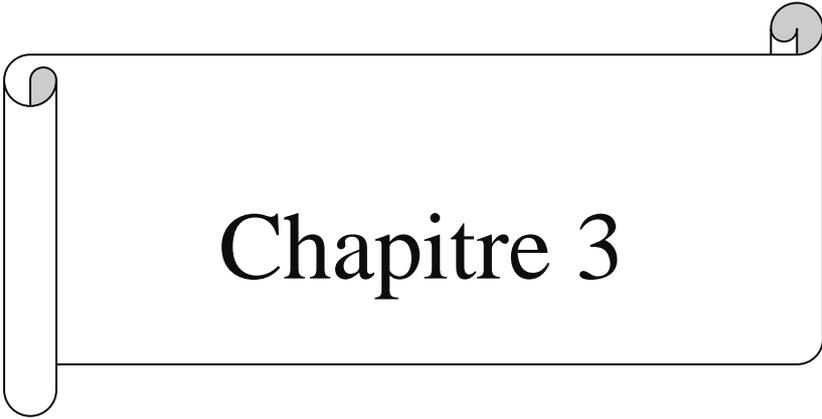


Figure (2.15): Représentation graphique de la série $x = e \oplus \gamma \delta \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^5 \oplus \gamma^7 \delta^6 (\gamma^2 \delta^2)^*$.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit brièvement les réseaux de Petri, leurs propriétés, les différentes classes et quelques extensions, définition et principes de fonctionnement.

Nous avons introduit par la suite différents dioïdes permettant la représentation du comportement des GET. Une grande partie a été consacrée à la représentation d'état des systèmes max-plus linéaires ainsi que la représentation du dioïde $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$.



Chapitre 3

Chapitre 3: Etude des systèmes de transport

Introduction

De tout temps, l'homme a voulu voyager, d'abord sur terre, puis par la mer et ensuite dans l'espace. Mais c'est avec la révolution industrielle que le transport est devenu une activité essentielle pour toutes les communautés, consistant à déplacer des gens d'un point à un autre. Généralement, dans les activités humaines, un système de transport comprend des infrastructures, des ressources énergétiques, des véhicules et des systèmes d'exploitation.

L'étude et l'analyse de tels systèmes sont ainsi devenues parmi les préoccupations majeures des chercheurs dans le domaine des transports publics, dans le but de remédier aux problèmes identifiés et afin de satisfaire les clients en apportant des améliorations et des changements. Ces derniers portent notamment sur l'infrastructure, les horaires, la quantité et la qualité des ressources. L'étude des systèmes de transport s'effectue en trois importantes phases :

- la première phase est celle de la collecte des informations qui a pour objectif d'acquérir une bonne connaissance des systèmes des réseaux de transport et de porter des améliorations, cette phase joue un rôle très important dans l'évaluation et l'étude des réseaux de transport et facilite la modélisation, l'analyse et la commande.
- la deuxième phase est celle de la modélisation : dans cette phase les chercheurs se basent sur les informations collectées dans la première phase afin de trouver un modèle simple et fiable pour les systèmes de transports publics (STP).
- la phase finale concerne l'analyse du système, dans cette phase, on prend un modèle bien défini et on décrit son comportement, le premier objectif est l'évaluation et l'analyse des performances de ce modèle afin d'identifier ses forces et ses faiblesses. Le second objectif consiste à améliorer ses performances et à fournir le maximum des services aux clientèles comme la réduction de coût de déplacement on optimisant par exemple les ressources, le respect des horaires théorique, le confort, la rapidité de déplacement,... etc.

Dans ce chapitre nous rappelons quelques généralités sur les systèmes de transport considérés, mais avant cela nous allons définir la problématique que nous allons aborder dans notre étude.

3.1 Généralités sur les systèmes de transport public

Le principal objectif est de mettre à la disposition des usagers du transport un système de transport public fiable et efficace qui puisse leur offrir un maximum de service et répondre à leurs exigences quotidiennes. La question qui se pose est comment répondre de façon optimale

Chapitre 3: Etude des systèmes de transport

aux besoins des usagers tout en considérant l'optimisation des ressources disponibles, la mobilité et la sécurité des usagers. Pour répondre à cette question, il faut une bonne gestion des infrastructures et des équipements affectés au transport. Deux composantes importantes sont à considérer :

- Le système physique.
- Le système de gestion.

3.1.1 Le système physique

Le système physique est représenté par deux éléments principaux : l'infrastructure (ou la topologie qui représente la structure du système) et les entités de transport (bus, train, ... etc).

3.1.1.1 L'infrastructure

L'infrastructure de système de transport est une représentation de la structure et des éléments qui composent les réseaux routiers dont on cite l'intégralité des voies carrossables ouvertes aux véhicules. Pour comprendre cette structure on utilise les entités arrêts et tronçons (ou éventuellement zones), lignes et itinéraires. Ces dernières sont présentées par le schéma suivant :

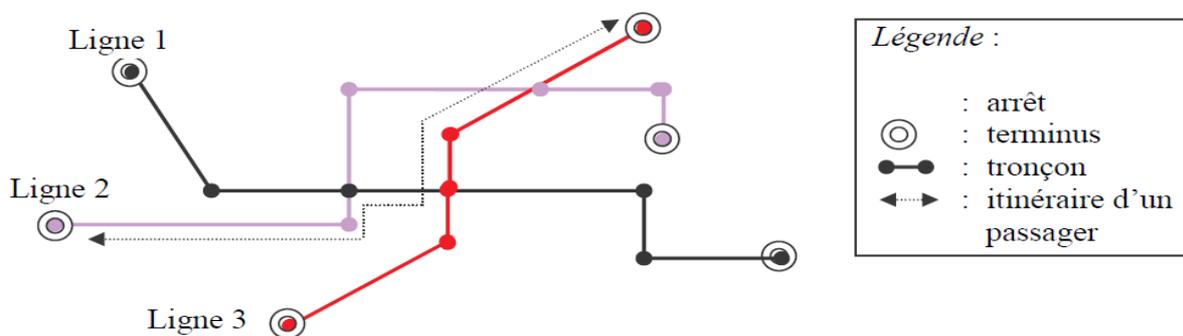


Figure (3.1): Composition de l'infrastructure d'un STP.

Arrêts

Parmi les éléments de base de la représentation spatiale du réseau on a les arrêts (stations) qui sont présentées sous forme des nœuds, un arrêt est caractérisé par un espace où le véhicule effectuant une tournée s'arrête pendant un certain temps afin de permettre aux voyageurs de descendre ou monter dans les véhicules on a plusieurs type d'arrêts :

- **les arrêts simples** : cas desservis par une seule ligne, où il n'y a pas d'échange de voyageur, autrement dit est un arrêt de montée.

Chapitre 3: Etude des systèmes de transport

- **points d'échange des passagers** : cas desservis au minimum par deux lignes, ou les passagers peuvent descendre du véhicule ou monter pour la prochaine destination.
- **points de retournement (demi-tour)** : c'est un lieu où le véhicule peut faire demi-tour, cet endroit est appelé point de départ comme il peut être aussi point d'arrivée ou bien terminus.

Grace à la distance parcourue par les véhicules entre les arrêts, on peut définir la notion de parcours d'une ligne, le temps de parcours d'un arrêt à un autre est calculé on se basant sur plusieurs facteurs, on a :

- les conditions de circulation (temps d'attente aux feux, aux stops, temps d'accélération et décélération des véhicules, etc.) ;
- les temps d'arrêt incluant les temps d'ouverture des portes, ainsi que les temps d'attente hors échange de passagers.

▪ **Tronçons (zone)**

Le tronçon est une liaison orientée (unidirectionnel ou bidirectionnel), il est limité par deux arrêts, appelés arrêt extrémités ou terminus, certains tronçons sont réservés aux transports publics appelées voies propres ou sites propres, les autres correspondent à des voies partagées par plusieurs modes de transport (véhicules particuliers, transports collectifs, transport de marchandises).

Un tronçon est caractérisé par sa longueur, et la vitesse commerciale de déplacement de l'entité de transport. Ceci permet de déterminer un temps de déplacement entre deux arrêts (temps du parcours).

▪ **Ligne**

Une ligne est un chemin prédéfini de transport en commun assuré par un ou plusieurs véhicules. Elle comprend plusieurs arrêts et des tronçons alternés regroupés par l'exploitant du réseau en une entité d'exploitation.

Les arrêts extrémités de cette entité sont appelés terminus de la ligne (c'est à dire les arrêts de début et de fin).

La conception d'une nouvelle ligne se fait souvent en concertation avec les instances communales concernées et les différents utilisateurs (écoles, centres commerciaux, hôpitaux, etc.). Elle doit tenir compte de la demande et des contraintes liées à la circulation des

Chapitre 3: Etude des systèmes de transport

véhicules et aux possibilités d'aménagement. Les véhicules se déplacent selon une planification d'horaires et des lieux imposés par les exploitants du système.

▪ Itinéraires

Est une représentation graphique du chemin parcouru par le voyageur (véhicule), il constitue d'une suite alternée d'arrêts et de tronçon, d'une ligne ou de plusieurs lignes.

Un itinéraire peut contenir une partie d'une ligne ou la ligne entièrement.

Une ligne peut être un itinéraire d'un usager si ce dernier n'effectue pas de correspondances au cours de son trajet, c'est-à-dire : dans un voyage en transports en commun, une étape nécessitant de changer de ligne. Le changement peut se faire soit au sein du même réseau, soit de manière intermodale, c'est-à-dire en changeant également de mode de transport.

Chaque itinéraire permet donc d'assurer le transport en commun de passagers d'un arrêt origine à un arrêt destination.

Il existe deux types d'itinéraires : commercial et spécial. Dans un itinéraire commercial, la montée et la descente des clients s'effectuent aux différents arrêts de cet itinéraire. Tandis que dans un itinéraire spécial, la montée et la descente des clients s'effectuent uniquement aux terminus.

3.1.1.2 Entités de transport

Le deuxième élément composant le système physique des transports publics est représenté par les entités ou ressources de transport : bus, trains, tramway, ...etc. Dans un système de transport public, un exploitant dispose d'une ensemble de véhicules caractérisée par :

- le nombre global de véhicules.

- le type de véhicule et ses caractéristiques: capacité, dimensions (longueur), caractéristiques dynamiques (accélération, décélération) et environnementales (mode d'énergie, bruit, ...etc).

Dans cet élément nous pouvons également considérer les personnes qui conduisent les véhicules (conducteurs ou chauffeurs). Leur gestion doit prendre en compte des contraintes législatives, tels que les temps de repos physiologiques.

Chaque ligne d'un STP est desservie par des entités de transport, selon son importance (zones desservies, tranche horaire du déplacement considéré au cours d'une journée,

Chapitre 3: Etude des systèmes de transport

fréquence de passage souhaitée, niveau de la demande, ...etc), de sorte à renforcer le service sur les lieux où la charge en usagers est importante.

3.1.2 Système de gestion

Le deuxième composant des STP est le système de gestion. Il pilote le système physique pour qu'il atteigne certains objectifs, en assurant entre autres la conception des horaires et l'information des usagers.

Notons que même si les exploitants sont les principales entités citées ici intervenant dans la gestion d'un STP, il est utile de rappeler que d'autres acteurs sont également concernés, de près ou de loin, par cette gestion. En effet, les systèmes de transport public sont souvent exploités, en tenant compte de l'ensemble des paramètres liés aux différents acteurs. Le but de cette exploitation est d'assurer la coordination des services et leur qualité et de résorber les perturbations survenues sur une partie du système.

3.2. Réseau de transport public étudié

Nous considérons un STP composé de n lignes de bus. Chacune est desservie par un nombre fixé de bus qui réalisent un circuit et passent au même endroit avec une fréquence donnée (fonction du temps de parcours du circuit et de la demande de transport).

Dans ce chapitre, nous considérons un système simplifié constitué de deux lignes de bus (L_i et L_{i+1}) (Figure 1). Sur chacune d'elle, un seul bus est initialement en circulation. Nous étudions le phénomène d'attente des passagers à la station de correspondance Sc . Nous considérons les passagers descendant d'un bus de la ligne 1 venant de $Sd1$, et souhaitant prendre un bus de la ligne 2 vers la station $Sa2$ (Figure 1).

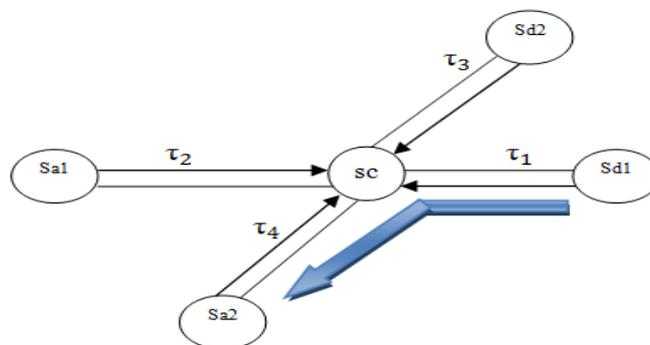


Figure (3.2): Réseau de transport : 2 lignes de bus.

Chapitre 3: Etude des systèmes de transport

Chaque ligne L_i est représentée par sa station de départ S_{di} , une station de correspondance notées S_c et une station d'arrivée notée S_{ai} . Et chaque bus B_i passe à un arrêt toutes les λ_i unités du temps (λ_i est appelée période de la ligne L_i). C'est le temps nécessaire à B_i pour effectuer une course. Enfin le réseau étudié est muni d'une planification d'horaires initiale : la première date de départ (depuis S_{di}) de chaque bus B_i au cours d'une journée est connue.

3.3. Modélisations de système de transport par réseaux de Petri

Notre objectif porte sur l'utilisation de l'algèbre des diodes pour la modélisation et ensuite la commande des systèmes de transport. Nous modélisons donc tout d'abord un réseau de bus par un graphe d'événement temporisé (GET). Sur ce graphe, les transitions représentent certains arrêts de bus. Le franchissement d'une transition correspond à l'arrivée d'un bus à un arrêt. Les places du réseau sont associées: soit à l'attente d'un groupe de passagers à une station de correspondance; à ces places sont associées des temporisations nulles (cas idéal où un passager n'attend pas, les temps de montée et de descente de bus étant négligés).

Ces places sont temporisées par le temps de déplacement minimum de bus entre les arrêts considérés.

Les jetons circulant sur le réseau correspondent soit à des passagers attendant aux stations de correspondance, soit à des bus.

Le problème simplifié est modélisé par le GET de la figure (3.3) :

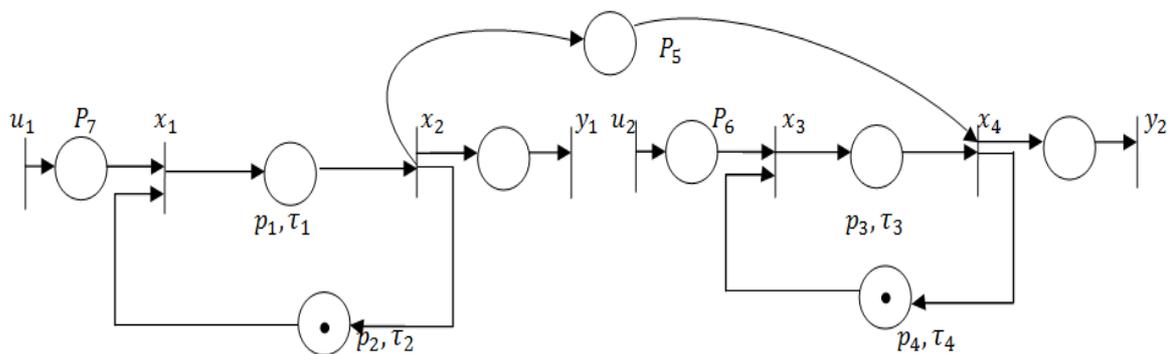


Figure (3.3): Le modèle GET des deux lignes L1 et L2.

Les circuits (x_1, P_1, x_2, P_2) et (x_3, P_3, x_4, P_4) représentent respectivement les lignes L1 et L2. x_1 et x_3 modélisent les stations de départ S_{d1} et S_{d2} des deux lignes. x_2 et x_4 , représentent

Chapitre 3: Etude des systèmes de transport

la même station de correspondance Sc commune aux deux lignes. La place P_5 modélise l'attente des passagers en Sc venant d'un bus B1 et prenant un bus B2.

Nous considérons un réseau de deux lignes dont les données sont :

La ligne L_1 est caractérisée par un temps de cycle : $\lambda_1 = \tau_1 + \tau_2 = 60$ min, avec $\tau_1 = 25$ min, $\tau_2 = 35$ min. Le temps de cycle de la ligne L_2 est: $\lambda_2 = \tau_3 + \tau_4 = 67$ min avec $\tau_3 = 32$ min ; $\tau_4 = 35$ min.

Nous initialisons le système par un vecteur arbitraire $X(k)$. Si les bus B1 et B2 font leurs premiers départs respectivement à $t_1 = 0$ et $t_2 = 0$, le vecteur $X(k)$ sera: $X(k) = [0, 25, 0, 32]^T$.

Donc :

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 35 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 60 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 35 \\ \varepsilon & 60 & \varepsilon & 67 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ 25 & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ 25 & 32 \end{bmatrix}.$$

Le poids moyen de la matrice est $L_2 = 67$ qui représente la valeur propre de la matrice A.

Si on veut minimiser la somme T_{corr} des temps d'attente des passagers, il suffit ici de minimiser la 1^{ère} attente de la journée, la valeur minimale étant zéro. Pour que les bus B1 et B2 arrivent en même temps à la station Sc

pour le 1^{er} tour, il faut donc : $t_1 + \tau_1 = t_2 + \tau_2$. La meilleure condition initiale correspond alors à $t_1 = 7$ et $t_2 = 0$, et permet de diminuer le temps de correspondance de 7 min.

Les dates successives de passage des bus trouvées par l'équation de récurrence sont :

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 32 \\ 0 \\ 32 \end{bmatrix}; x_2 = \begin{bmatrix} 60 \\ 92 \\ 67 \\ 99 \end{bmatrix}; x_3 = \begin{bmatrix} 120 \\ 152 \\ 134 \\ 166 \end{bmatrix}; x_4 = \begin{bmatrix} 180 \\ 212 \\ 201 \\ 233 \end{bmatrix}; x_5 = \begin{bmatrix} 240 \\ 272 \\ 268 \\ 300 \end{bmatrix}; x_6 = \begin{bmatrix} 300 \\ 332 \\ 335 \\ 367 \end{bmatrix};$$

$$x_7 = \begin{bmatrix} 360 \\ 392 \\ 102 \\ 434 \end{bmatrix}; x_8 = \begin{bmatrix} 420 \\ 452 \\ 469 \\ 501 \end{bmatrix}; x_9 = \begin{bmatrix} 480 \\ 512 \\ 536 \\ 568 \end{bmatrix}; x_{10} = \begin{bmatrix} 540 \\ 572 \\ 603 \\ 568 \end{bmatrix}; x_{11} = \begin{bmatrix} 600 \\ 632 \\ 670 \\ 702 \end{bmatrix} \dots$$

Le temps de retard associé à chaque voyage est: $T_i = x_4(i) - x_2(i)$

$$\{ T_1=0; T_2=7; T_3=14; T_4=21; T_5=28; T_6=35; T_7=42; T_8=49; T_9=56; T_{10}=63; T_{11}=70 \dots \}$$

Le temps total de correspondance associé à ces 10 voyages est : $T_{corr} = 315$ minutes.

Chapitre 3: Etude des systèmes de transport

On peut chercher à borner la durée de certaines activités, ou tâches, au sein d'un SED. Si on considère notre système de transport dans lequel les passagers passent dans une station de correspondance, la durée d'attente des passagers ne doit pas y dépasser une certaine valeur sous peine de les retarder. Pour un système max-plus linéaire modélisé par un GET, cela revient à souhaiter limiter le temps de présence des jetons dans certains chemins du graphe.

La commande de ces systèmes avec une telle contrainte impose à synthétiser une commande qui ralentit le moins possible le système. En d'autres termes, on vise à établir une commande de transfert minimal.

3.4. Modélisation dans l'algèbre des diodes

Pour synthétiser une commande pour ce système, il faut d'abord disposer de son modèle mathématique.

3.4.1. La forme implicite

Nous considérons un réseau de deux lignes dont les données sont :

La ligne L_1 est caractérisée par un temps de cycle : $\lambda_1 = \tau_1 + \tau_2 = 60$ min, avec $\tau_1 = 25$ min, $\tau_2 = 35$ min. Le temps de cycle de la ligne L_2 est : $\lambda_2 = \tau_1 + \tau_4 = 67$ min avec $\tau_3 = 32$ min ; $\tau_4 = 35$ min.

Nous initialisons le système par un vecteur arbitraire $X(1)$. Si les bus B1 et B2 font leurs premiers départs respectivement à $t_1 = 0$ et $t_2 = 0$, le vecteur $X(1)$ sera : $X(1) = [0, 25, 0, 32]^T$. Le système d'équations linéaires dans l'algèbre usuelle est donné par :

$$\begin{cases} x_1(k) = \tau_2 \otimes x_2(k-1) \oplus u_1(k) \\ x_2(k) = \tau_1 \otimes x_1(k) \\ x_3(k) = \tau_4 \otimes x_4(k-1) \oplus u_2(k) \\ x_4(k) = \tau_3 \otimes x_3(k) \oplus x_2(k) \\ y_1(k) = x_2(k) \\ y_2(k) = x_4(k) \end{cases} \quad (3.1)$$

Soit le vecteur d'état $X(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k), x_4(k)]^T$, la vecteur de sortie $Y(k) = [y_1(k), y_2(k)]^T$ et le vecteur des transitions d'entrée $U(k) = [u_1(k), u_2(k)]^T$.

La forme implicite du système (2.1) est donnée par :

$$\begin{cases} X(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \tau_3 & \varepsilon \end{bmatrix} X(k) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \tau_2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_4 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} X(k-1) \oplus \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ Y(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} X(k) \end{cases} \quad (3.2)$$

La solution de l'équation (3.2) est donnée sous forme d'une équation récurrente d'ordre 1, c'est la forme explicite du système : $X(k) = A \otimes X(k-1) \oplus B U(k)$.

3.4.2. La forme Explicite

Pour avoir la forme explicite en calculant d'abord l'étoile de Kleene de la matrice A_0

$$A_0^* = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \tau_3 & \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_1 & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \tau_1 & e & \tau_3 & e \end{bmatrix}$$

Avec:

$$A = A_0^* \otimes A_1 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_1 & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \tau_1 & e & \tau_3 & e \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & \tau_2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_4 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \tau_2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau_1 + \tau_2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_4 \\ \varepsilon & \tau_1 + \tau_2 & \varepsilon & \tau_1 + \tau_2 \end{bmatrix}$$

$$B = A_0^* \otimes B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_1 & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \tau_1 & e & \tau_3 & e \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \tau_1 & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \tau_1 & \tau_3 \end{bmatrix}.$$

On obtient la forme explicite suivante :

$$x(k-1) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \tau_2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau_1 + \tau_2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_4 \\ \varepsilon & \tau_1 + \tau_2 & \varepsilon & \tau_1 + \tau_2 \end{bmatrix} X(k) \oplus \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \tau_1 & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \tau_1 & \tau_3 \end{bmatrix} U(k). \quad (3.3)$$

3.4.3. Modélisation en Gamma delta

Chapitre 3: Etude des systèmes de transport

le comportement dynamique des GET peut être représenté par des éléments du dioïde $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, sont des séries formelles en deux variables commutatives γ et δ .

Pour la modélisation de GET, γ et δ servent à modéliser les décalages événementiels/temporels induits par les temporisations et les marquages initiaux des places. L'opérateur γ correspond à un décalage dans le comptage d'événements et l'opérateur δ à un décalage temporel.

Modélisation des GET de la figure (2.4) dans $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$:

Le comportement dynamique du GET de la figure (3.3) est décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} x_1[[\gamma, \delta]] = \gamma\delta^{\tau_2}x_2(\gamma, \delta) \oplus u_1(\gamma, \delta) \\ x_2[[\gamma, \delta]] = \delta^{\tau_1}x_1(\gamma, \delta) \\ x_3[[\gamma, \delta]] = \gamma\delta^{\tau_4}x_4(\gamma, \delta) \oplus u_2(\gamma, \delta) \\ x_4[[\gamma, \delta]] = \epsilon x_2(\gamma, \delta) \oplus \delta^{\tau_3}x_3(\gamma, \delta) \\ y_1[[\gamma, \delta]] = \epsilon x_2(\gamma, \delta) \\ y_2[[\gamma, \delta]] = \epsilon x_4(\gamma, \delta) \end{cases} \quad (3.4)$$

Il est possible d'établir dans le dioïde $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, un modèle dynamique de ce graphe d'événements temporisé sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases} X(\gamma, \delta) = \begin{bmatrix} \epsilon & \gamma\delta^{\tau_2} & \epsilon & \epsilon \\ \delta^{\tau_1} & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \gamma\delta^{\tau_4} \\ \epsilon & \epsilon & \delta^{\tau_3} & \epsilon \end{bmatrix} X(\gamma, \delta) \oplus \begin{bmatrix} \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \end{bmatrix} U(\gamma, \delta) \\ Y(\gamma, \delta) = \begin{bmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{bmatrix} X(\gamma, \delta) \end{cases} \quad (3.5)$$

Qui correspond à la forme standard suivante:

$$\begin{cases} x = Ax \oplus Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Où

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon & \gamma\delta^{\tau_2} & \epsilon & \epsilon \\ \delta^{\tau_1} & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \gamma\delta^{\tau_4} \\ \epsilon & \epsilon & \delta^{\tau_3} & \epsilon \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{bmatrix}.$$

A chaque transition du GET est associée une composante des vecteurs $x \in M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^n$ (vecteur associé aux transitions internes, ici $n = 4$), $u \in M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^m$ (vecteur

Chapitre 3: Etude des systèmes de transport

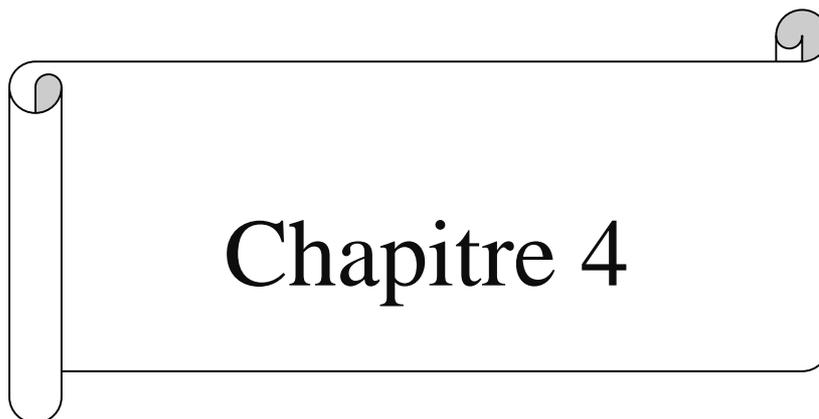
associé aux transitions d'entrée, ici $m = 2$) et $y \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^l$ (vecteur associé aux transitions de sortie, ici $l=2$). Les matrices $A \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times n}$, $B \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times m}$, $C \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times n}$ représentent l'interaction entre ces transitions. La composante $A_{2,1} = \delta^{\tau_1}$, indique qu'une temporisation de τ_1 unités de temps est attachée à la place séparant les transitions x_1 et x_2 . $A_{1,2} = \gamma\delta^{\tau_2}$, traduit la présence d'un jeton et une temporisation de τ_2 unités de temps dans la place séparant les transitions x_2 et x_1 .

La résolution de l'équation au point fixe permet d'établir un modèle entrée-sortie du système, qui traduit la dynamique de fonctionnement au plus tôt du GET de notre exemple, cette matrice de transfert $H \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times m}$ est:

$$H = CA^*B = \begin{bmatrix} \delta^{25}(\gamma^1\delta^{60})^* & \varepsilon \\ \delta^{25}(\gamma^1\delta^{67})^* & \delta^{32}(\gamma^1\delta^{67})^* \end{bmatrix}$$

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les systèmes de transport public comme une sous classe des systèmes dynamiques à événements discrets. La commande de ce type de systèmes représente la base des travaux que nous allons développer dans le chapitre suivant. Nous avons brièvement annoncé la problématique. Quelques généralités sur les systèmes de transport public. Et une partie a été consacrée aux deux formalismes de modélisation que nous allons utiliser dans la suite : réseaux de Petri et algèbre des dioïdes



Chapitre 4

Introduction

Classiquement, commander un système revient à agir sur ses entrées dans le but d'obtenir en sorties des performances spécifiées par un cahier des charges. Plus concrètement, il s'agit ici de fixer les dates d'occurrences des événements d'entrée pour les SED considérés, ou encore, de fixer les dates de tir des transitions d'entrées (transition sources) pour les GET correspondant.

4.1. Objectifs de commande

Les objectifs de commande qui ont été considérés pour les systèmes max-plus linéaires sont proches de ceux de la théorie classique de la commande des systèmes. On en recense ici deux:

- La technique de **commande par poursuite de trajectoire** suppose une trajectoire de consigne connue a priori. Il s'agit d'établir une commande du système (appelée également trajectoire d'entrée) telle que la réponse en sortie "suive au mieux" une trajectoire de consigne (correspondant au comportement souhaité en sortie du système), ce qui pose un problème d'inversion du modèle du système. L'approche proposée dans [Cohen *et al.* 1989] permet d'établir la plus grande trajectoire d'entrée telle que la réponse, notée y , soit inférieure ou égale à une trajectoire de consigne, notée z . Ce problème de poursuite de trajectoire de sortie (classique en automatique) est résolu de façon optimale en utilisant la théorie de la résiduation dans le cas des GET [Cohen *et al.*, 1989]. Plus précisément, pour un modèle du système M , il s'agit de calculer *le plus grand élément* de l'ensemble suivant :

$$\{u \in D^{\mathbb{Z}} \mid y = M(u) \preceq z\}, \quad (4.1)$$

Où \preceq est l'ordre défini dans le dioïde D .

Cet objectif particulier induit que la sortie obtenue ne dépasse jamais la trajectoire de référence.

Une telle commande est optimale vis-à-vis du critère de juste-à-temps lequel vise à satisfaire la demande des clients tout en minimisant les en-cours de production. Étant donné un modèle RdPT du système, l'objectif de commande peut se décrire ainsi: étant données les dates de franchissement souhaitées des transitions de sortie, définies par la fonction *dateur*

$Z = \{z(k)\}_{k=0,\dots,k_f}$, il s'agit de trouver les dates de franchissement *au plus tard* des transitions d'entrée $U = \{u(k)\}_{k=0,\dots,k_f}$ telles que les dates de franchissement des transitions de sortie $Y = \{y(k)\}_{k=0,\dots,k_f}$ se produisent *avant* les dates souhaitées.

Elle est notée u_{JAT} , et se définit par : $u_{JAT} = \bigoplus_{M(u) \preceq z} u$. (4.2)

Chapitre 4: Synthèse de correcteur max-plus linéaire

• **La commande par poursuite de modèle** a pour objectif le calcul d'un correcteur, noté F , tel que le comportement entrée-sortie du système corrigé, noté G_F , composé du modèle du système, noté M , et du correcteur F , soit aussi "proche" que possible de celui du modèle de référence, noté G_{ref} . Plusieurs études ont été menées. Une étude consiste à placer le correcteur en amont du système nominal, autrement dit, à précompenser le système [Libeaut, 1996], [Libeaut and Loiseau, 1996], [Cottenceau, 1999, §3.2]. Une autre étude consiste à placer le correcteur dans la boucle de retour [Cottenceau *et al.*, 2000], [Cottenceau *et al.*, 2001], [Lüders and Santos-Mendes, 2002]. La figure 4.1 présente les schémas-blocs du modèle M du système, du système en boucle fermée où le correcteur est situé dans la boucle de retour et du modèle de référence G_{ref} .

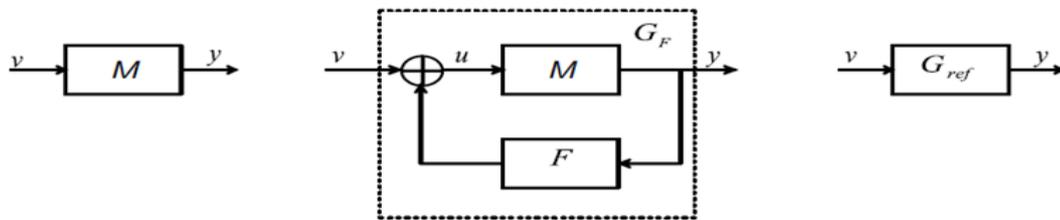


Figure (4.1) : Commande par poursuite de modèle

Une structure de commande généralisant ces approches a été proposée dans [Maia *et al.* 2003]. Elle est basée sur l'utilisation simultanée d'un précompensateur (situé dans la boucle d'action) et d'un bloc situé dans la boucle de retour de sortie.

Afin d'appliquer ces structures de commande, nous choisissons un modèle de réseaux de bus. Pour la structure, nous proposons des techniques de commande qui permettent de respecter la planification horaire du système étudié (préalablement calculée).

4.2. Commande en juste-à-temps de système max-plus linéaires

Juste-à-temps est une traduction littérale du terme anglais "Just-in-time". On ne doit pas interpréter ce terme comme "au dernier moment", mais comme la "quantité juste" (égale au besoin) au "temps voulu" (date du besoin).

La problématique du Juste-à-temps dans notre cas c'est d'activer les événements d'entrée aux dates les plus tardives tout en satisfaisant certains objectifs de contrôle. Plus précisément, dans les études sur la commande des GET, le principe du juste-à-temps vise à

- effectuer le nombre minimum de tirs des transitions d'entrée,

➤ retarder au maximum le tir de ces transitions, tout en satisfaisant des objectifs de commande.

4.3. Commande d'un système max-plus linéaire en boucle ouverte

4.3.1 Poursuite de trajectoire

Précisément, le problème de commande en boucle ouverte résolu est le suivant : On dispose d'un système (un GET avec p entrées et q sorties) dont on connaît la matrice de transfert $H \in D^{l \times m}$. On désire, à l'aide des entrées $u \in D^l$, faire en sorte que les sorties du système suivent au mieux des trajectoires déterminées dites de consignes $z \in D^m$. Dans [Cohen et al, 1989], il a été montré que ce problème a une solution optimale, c'est-à-dire qu'il existe une plus grande commande d'entrée $u_{opt} \in D^l$, telle que la sortie résultant de cette entrée ($y_{opt} = H u_{opt}$) soit inférieure ou égale à la sortie désirée z ($y_{opt} \leq z$). La commande u_{opt} est alors optimale).



Figure (4.2): Problématique générale de la commande en boucle ouverte

Déterminer la plus grande commande revient à sa borne supérieure (notée u_{opt}) qui nous donnera la plus grande commande vérifiant la condition $L_H(u_{opt}) \leq z$. On peut déjà remarquer que cet ensemble n'est pas vide puisque $u = \varepsilon$ est solution, c.-à-d. $L_H(\varepsilon) = \varepsilon \leq z$. En fait, La théorie de la résiduation permet de résoudre ce problème directement. La commande optimale u_{opt} est donnée par :

$$u_{opt} = \sup\{u \in D^p \mid L_H(u) \leq z\} = L_H^\#(z) = H \setminus z \quad (4.3)$$

Remarque 4.1. La commande optimale (4.3) correspond à la commande faisant entrer les jetons le plus tardivement possible dans le système, tout en garantissant qu'ils sortent avant les dates désirées.

Considérons le graphe d'événement temporisé de la figure (3.3) La matrice de transfert du système est donnée par la fonction de transfert suivante :

$$H = \begin{bmatrix} \gamma^{24}(\gamma^{25}\delta^{36})^* & \varepsilon \\ \gamma^{24}(\gamma^1\delta^{67})^* & \delta^{32}(\gamma^1\delta^{67})^* \end{bmatrix}$$

Chapitre 4: Synthèse de correcteur max-plus linéaire

On souhaite avoir un vecteur de sortie $y \preceq z$ avec

K	0	1	2	3	4	5	6
$z_1(k)$	0	67	134	201	268	335	402
$z_2(k)$	0	67	134	201	268	335	402

La consigne z peut être exprimée par des séries formelles dans $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ comme suit

$$Z = \begin{bmatrix} \gamma^1 \delta^{67} (\gamma^1 \delta^{67})^* \\ \gamma^1 \delta^{67} (\gamma^1 \delta^{67})^* \end{bmatrix}$$

La plus grande commande s'écrit dans $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ sous la forme $u_{opt} = H \backslash Z$

$$u_{opt} = \begin{bmatrix} \gamma^1 \delta^{42} (\gamma^1 \delta^{67})^* \\ \gamma^1 \delta^{35} (\gamma^1 \delta^{67})^* \end{bmatrix}$$

Le vecteur de sortie est donnée par:

$$y = \begin{bmatrix} (\gamma^1 \delta^{60})^* \\ (\gamma^1 \delta^{67})^* \end{bmatrix}$$

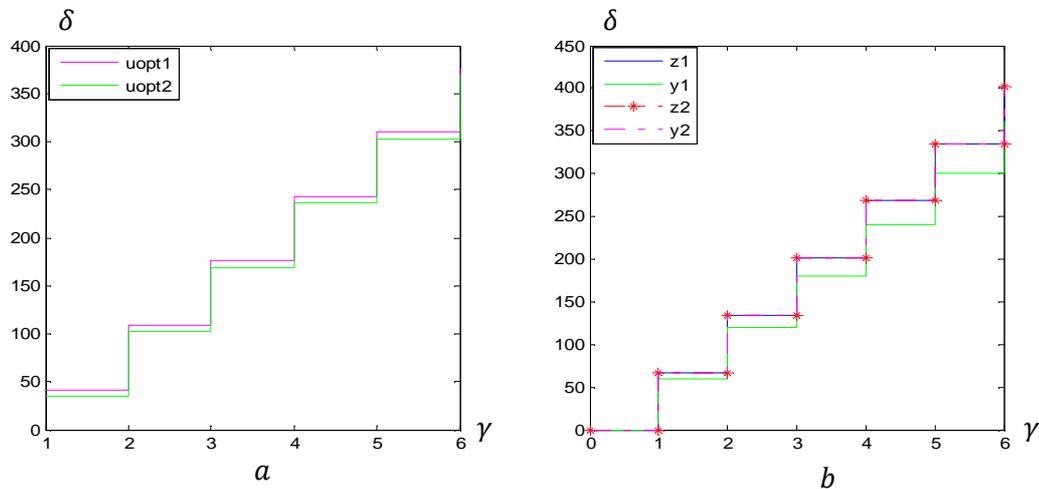


Figure (4.3) : représentation de u_{opt} , z et y

Remarque 4.2. Dans la figure (4.3-a) une représentation de la trajectoire u_{opt} est donnée. On remarque dans la figure (4.3-b) que la sortie y ne satisfait pas la trajectoire désire z .

Le vecteur de sortie optimale correspondant est:

$$y_{opt} = Hu_{opt}$$

$$y_{opt} = \begin{bmatrix} (\gamma^1 \delta^{67})^* \\ (\gamma^1 \delta^{67})^* \end{bmatrix}$$

Ce dernier est la plus grande sortie inférieure ou égale à la consigne z .

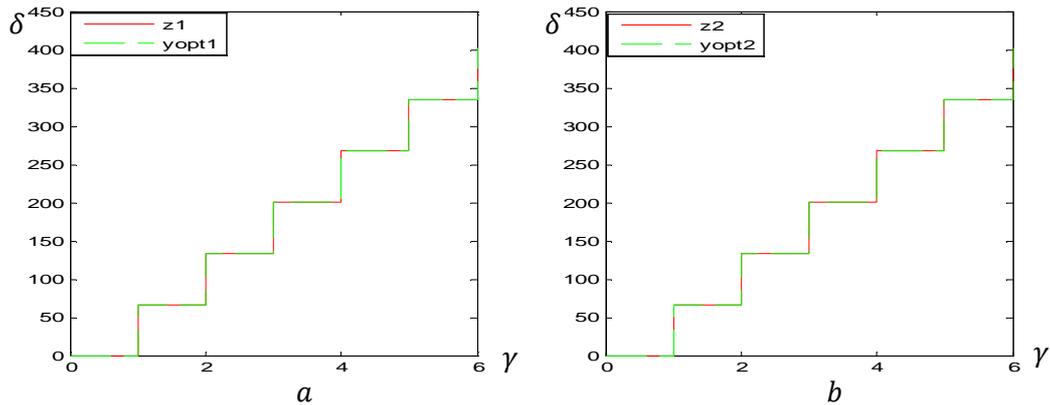


Figure (4.4) : représentation de z et y_{opt}

Remarque 4.3. La sortie y_{opt} satisfait bien la consigne désirée z dans les deux cas. On a donné sur la figure (4.4). (a) une représentation de la sortie y_{opt1} et la sortie désirée $z1$, et une représentation de la sortie y_{opt2} et la sortie désirée $z2$ sur la figure (4.4). (b). on a abouté que la sortie optimale respecte la spécification $y \leq z$.

4.3.2 Poursuite de modèle

La démarche adoptée ici, empruntée à l'automatique classique, est de "compenser" la dynamique du système nominal H par l'action d'un autre système (max,+) linéaire, noté P (un correcteur), dont on sait sa fonction de transfert.

Le système H muni du correcteur P possède alors un transfert différent noté G_p par la suite. Structurellement, le correcteur P s'interpose entre la consigne d'entrée v , qui devient l'entrée du système corrigé G_p et la commande u du système nominal H (voir figure (3.3)): La commande u est élaborée par le correcteur P à partir de la consigne v . De la relation de transfert $y = Hu$ (pour le système libre) on passe à une relation de transfert $y = HPv = G_p v$ pour le système corrigé. La synthèse du correcteur est effectuée dans l'objectif d'atteindre pour le système commandé G_p un transfert aussi proche que possible du transfert de référence donné par la matrice G_{ref} .

Chapitre 4: Synthèse de correcteur max-plus linéaire

4.3.2.1 Synthèse d'un correcteur de type précompensateur :

La correction de la dynamique d'un système $H \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times m}$ peut se faire aussi par l'action d'un précompensateur $P \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{m \times m}$ (situé entre la consigne v et la commande u). Il s'agit de modifier de manière structurelle le comportement du système.

Le problème de commande consiste simplement à choisir la dynamique (le transfert) du précompensateur P de telle sorte que le système contrôlé $G_p \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times m}$ possède la dynamique décrite par un modèle de référence $G_{ref} \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times m}$ spécifié sous forme de matrice de transfert. v

Formellement, on cherche :

$$P_{opt} = \sup\{P \mid HP \preceq G_{ref}\}. \quad (4.5)$$

La solution optimale est immédiate, puisque L_H est résiduable :

$$P_{opt} = H \setminus G_{ref}. \quad (4.6)$$

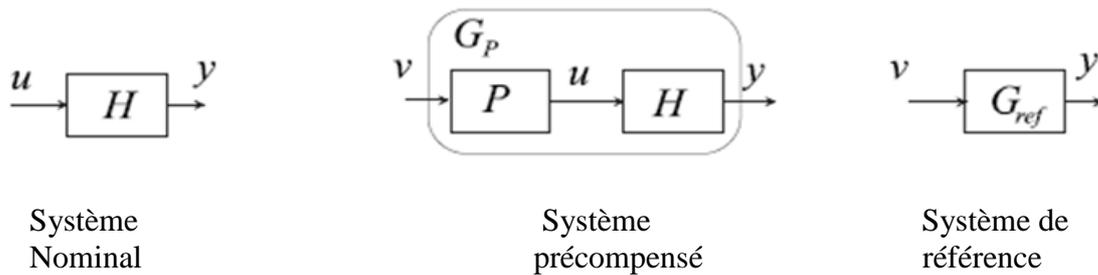


Figure (4.5): Commande avec modèle de référence.

4.3.2.2 Correcteur Neutre: est intéressant d'un point de vue pratique d'avoir $G_{ref} = H$, l'objectif est alors de maintenir les performances entrée/sortie du système. Cette stratégie conduit au précompensateur $P_{opt} = H \setminus H$, qualifié de neutre. Il exprime simplement le fait que l'on peut toujours "filtrer" le flux d'entrée d'un système H par un précompensateur sans dégrader les performances initiales.

Illustration (4.1)

$$H = \begin{bmatrix} \delta^{25}(\gamma^1 \delta^{60})^* & \varepsilon \\ \delta^{25}(\gamma^1 \delta^{67})^* & \delta^{32}(\gamma^1 \delta^{67})^* \end{bmatrix}.$$

L'objectif est de laisser le comportement entrée/sortie du système inchangé, tout en retardant au plus les entrées dans le système.

Chapitre 4: Synthèse de correcteur max-plus linéaire

$$G_{ref}=H = \begin{bmatrix} \delta^{25}(\gamma^1\delta^{60})^* & \varepsilon \\ \delta^{25}(\gamma^1\delta^{67})^* & \delta^{32}(\gamma^1\delta^{67})^* \end{bmatrix}.$$

Le correcteur $P_{opt} = (H \setminus G_{ref},) = H \setminus H$, est donné ci-dessous et une réalisation de ce correcteur est donné sur la figure (4.7):

$$P_{opt} = \begin{bmatrix} (\gamma^1\delta^{60})^* & \varepsilon \\ \delta^{-7}(\gamma^1\delta^{67})^* & (\gamma^1\delta^{67})^* \end{bmatrix}.$$

Le système P n'est pas causal, il suffit donc de projeter P dans le dioïde des séries causales $M_{in}^{ax+}[[\gamma, \delta]]$, le projecteur noté P_{r+} . Ainsi, le précompensateur est donné par :

$$P_{rat} = P_{r+} (P_{opt}) = \begin{bmatrix} (\gamma^1\delta^{60})^* & \varepsilon \\ \gamma^1\delta^{60}(\gamma^1\delta^{67})^* & (\gamma^1\delta^{67})^* \end{bmatrix}.$$

Une réalisation de ce précompensateur est donnée figure (4. 7). Les équations récurrentes fournissant l'expression de la commande u en fonction de la consigne v sont les suivantes sur le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$:

$$\begin{cases} u_1(k) = 60u_1(k-1) \oplus v_1(k) \\ u_2(k) = 67u_2(k-1) \oplus 60v_1(k-1) \oplus v_2(k) \end{cases}$$

La réalisation du système précompensé est donnée sur la figure (4.7)

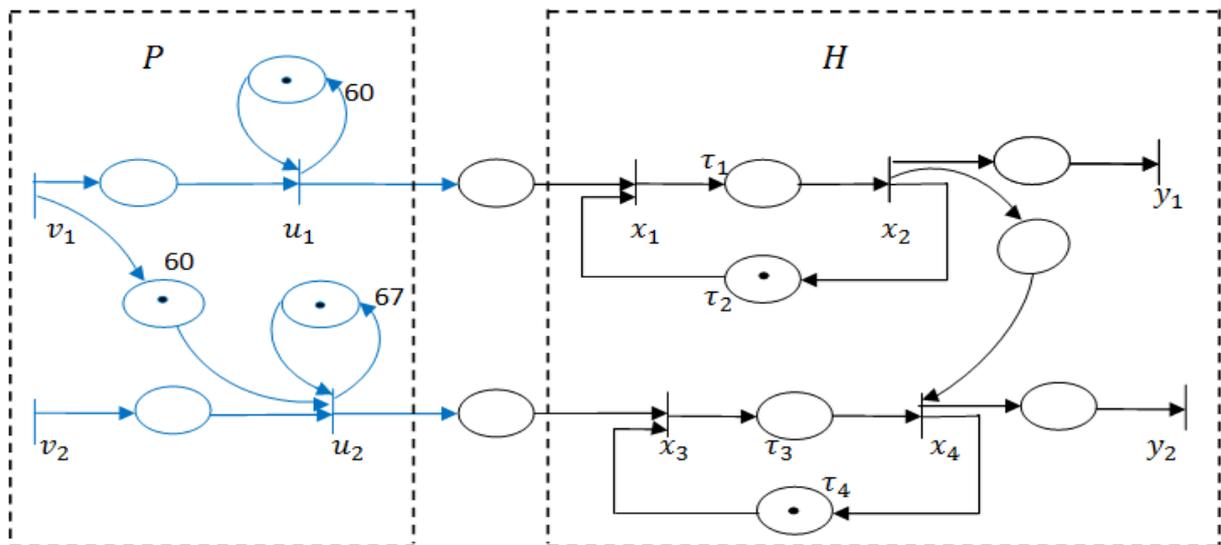


Figure (4.6): La réalisation du précompensateur permettant d'approcher $G_{ref} = H$

Chapitre 4: Synthèse de correcteur max-plus linéaire

On a trouvé que $H = \begin{bmatrix} \delta^{25}(\gamma^1\delta^{60})^* & \varepsilon \\ \delta^{25}(\gamma^1\delta^{67})^* & \delta^{32}(\gamma^1\delta^{67})^* \end{bmatrix}$.

Il apparaît clairement que les composantes n'ont pas le même taux de production 1/60 pour la composante reliant u_1 à y_1 , 0 pour celle reliant u_2 à y_1 , 1/67 celle reliant u_1 à y_2 et 1/67 celle reliant u_2 à y_2 . Le choix du modèle de référence peut se faire de manière à homogénéiser le comportement périodique de ces 4 composantes. Pour cela on choisit comme modèle de référence un transfert dont les 2 composantes ont un taux de production de 1/67, soit par exemple le transfert suivant :

$$G_{ref} = \begin{bmatrix} \delta^{25}(\gamma^1\delta^{67})^* & (\gamma^1\delta^{67})^* \\ \delta^{25}(\gamma^1\delta^{67})^* & \delta^{32}(\gamma^1\delta^{67})^* \end{bmatrix}.$$

Pour tout modèle de référence $G_{ref} \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times m}$ et une matrice de transfert $H \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times m}$, il existe un plus grand précompensateur P_{opt} périodique $P_{opt} \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times l}$ tel que $GP_{opt} \preceq G_{ref}$. le précompensateur P_{opt} est donné par le calcul

$$P_{opt} = H \setminus G_{ref}$$

Le précompensateur est donné ci-dessous

$$P_{opt} = \begin{bmatrix} (\gamma^1\delta^{67})^* & \delta^{-25}(\gamma^1\delta^{67})^* \\ \delta^{-7}(\gamma^1\delta^{67})^* & (\gamma^1\delta^{67})^* \end{bmatrix}.$$

La projection de P dans le dioïde des séries causales $M_{in}^{ax+}[\gamma, \delta]$ est donné par :

$$P_{rat} = P_{r+} (P_{opt}) = \begin{bmatrix} (\gamma^1\delta^{67})^* & \gamma^1\delta^{42}(\gamma^1\delta^{67})^* \\ \gamma^1\delta^{60}(\gamma^1\delta^{67})^* & (\gamma^1\delta^{67})^* \end{bmatrix}.$$

La réalisation de ce précompensateur est donnée sur figure (4.8). Les équations récurrentes fournissant l'expression de la commande u en fonction de la consigne v sont :

$$\begin{cases} u_1(k) = 60u_1(k-1) \oplus v_1(k) \oplus 42 v_2(k-1) \\ u_2(k) = 67u_2(k-1) \oplus 60v_1(k-1) \oplus v_2(k) \end{cases}$$

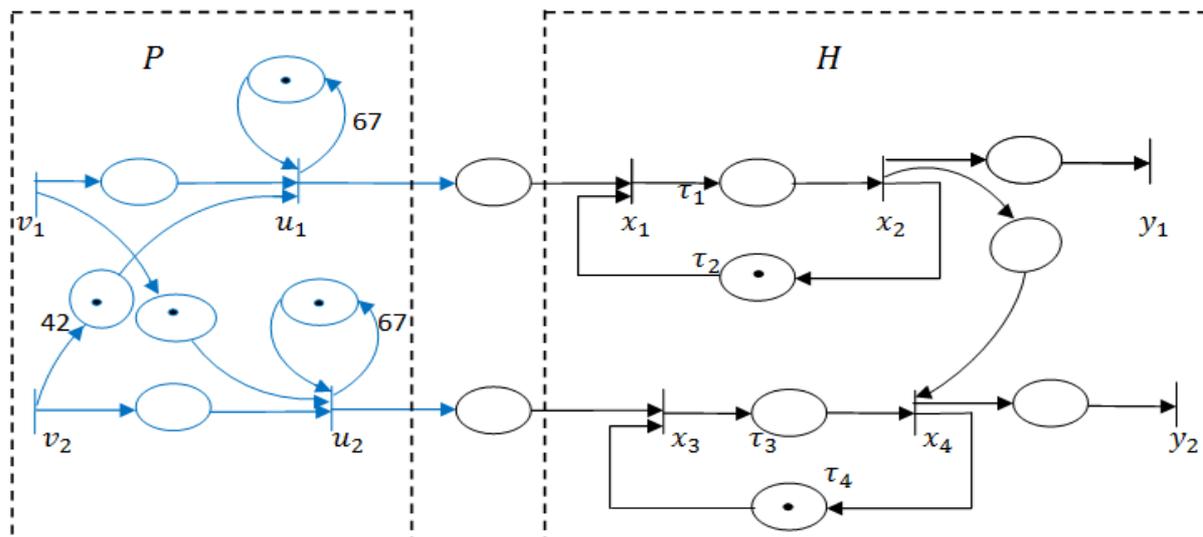


Figure (4.7): La réalisation du précompensateur permettant d'approcher $G_{ref} \neq H$

4.4. Commande de système max-plus linéaires en boucle fermée

Comme en automatique classique, l'objectif de la commande en boucle fermée est de prélever de l'information en sortie du système afin de piloter au mieux le système. Les correcteurs sont calculés dans un objectif de poursuite de modèle, c'est à dire. Que le système corrigé doit s'approcher au mieux du comportement d'un modèle de référence.

4.4.1 Synthèse d'un correcteur de type retour de sortie

La structure considérée ici est représentée sur la figure (4.8). Il s'agit ici de modifier la dynamique d'un système $H \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{1 \times m}$ par l'ajout d'un correcteur $F \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{m \times 1}$ (situé entre la sortie et l'entrée de H). L'objectif de commande est d'imposer au système bouclé la dynamique décrite par un modèle de référence $G_{ref} \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{1 \times m}$ spécifié sous forme de matrice de transfert. En théorie des systèmes linéaires, ce problème de commande est similaire au problème classique de poursuite de modèle (model matching problem [Wang and Desoer, 1972]). Ce travail est détaillé dans la thèse de B. Cottenceau [Cottenceau, 1999] et dans les articles [Cottenceau et al., 1999],[Cottenceau et al., 2001].

Figure (4.6): Présente la structure adoptée. Elle conduit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x = v \oplus Fy \\ y = Hu \end{cases} \quad (4.8)$$

Chapitre 4: Synthèse de correcteur max-plus linéaire

La relation de transfert entre la consigne v et la commande u , puis la sortie y sont données ci-dessous :

$$u = (FH)^*v \quad (4.9)$$

$$y = H(FH)^*v = G_F v. \quad (4.10)$$

Nous avons montré, dans [Cottenceau et al., 2001], que l'inégalité $G_F = H(FH)^* \leq G_{ref}$ admet une plus grande solution

$$F_{opt} = H \backslash G_{ref} / H \quad (4.11)$$

Démonstration (4.1)

$$\begin{aligned} H(FH)^* \leq G_{ref} &\Leftrightarrow (FH)^* \leq G_{ref} / H \\ &\Leftrightarrow FH \leq G_{ref} / H \\ &\Leftrightarrow F \leq H \backslash G_{ref} / H = F_{opt} \end{aligned}$$

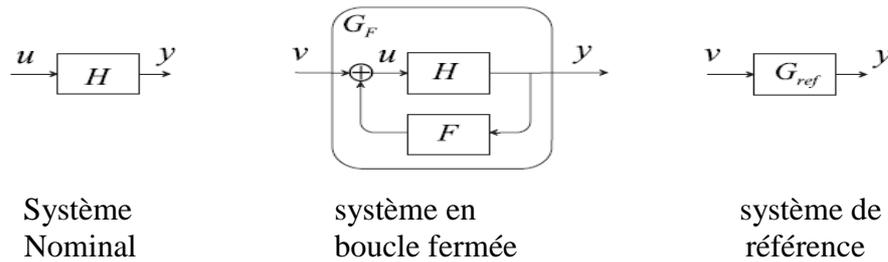


Figure (4.8): Commande avec modèle de référence : correction d'un système H par un correcteur F de type retour de sortie.

L'inégalité $H(FH)^* \leq G_{ref}$ signifie que le système corrigé sera plus rapide que le modèle de référence.

Le plus grand correcteur sera celui qui induira la plus grande commande pour atteindre cet objectif, c'est à dire, celui qui retardera le plus l'entrée des jetons dans le système.

Illustration (4.2)

Nous rappelons le modèle entrée/sortie de ce système :

$$H = \begin{bmatrix} \delta^{25}(\gamma^1 \delta^{60})^* & \varepsilon \\ \delta^{25}(\gamma^1 \delta^{67})^* & \delta^{32}(\gamma^1 \delta^{67})^* \end{bmatrix}.$$

Chapitre 4: Synthèse de correcteur max-plus linéaire

Nous choisissons ici le modèle de référence suivant :

$$G_{ref} = \begin{bmatrix} \gamma^{25}(\gamma^1\delta^{67})^* & (\gamma^1\delta^{67})^* \\ \gamma^{25}(\gamma^1\delta^{67})^* & \delta^{32}(\gamma^1\delta^{67})^* \end{bmatrix}.$$

Le correcteur de type retour de sortie optimal est donné par le calcul de

$$F_{opt} = H \setminus G_{ref} / H \quad (4.12)$$

$$F_{opt} = \begin{bmatrix} \delta^{-25}(\gamma^1\delta^{67})^* & \delta^{-57}(\gamma^1\delta^{67})^* \\ \delta^{-32}(\gamma^1\delta^{67})^* & \delta^{-32}(\gamma^1\delta^{67})^* \end{bmatrix}.$$

On doit alors considérer l'opérateur de projection $\text{Pr}_+ : M_{in}^{ax}[\gamma, \delta] \rightarrow M_{in}^{ax+}[\gamma, \delta]$.en appliquant l'opérateur de projection sur F_{opt} , on obtient F_{opt+} :

$$F_{opt+} = \text{Pr}_+ (H \setminus G_{ref} / H) \quad (4.13)$$

$$F_{opt+} = \begin{bmatrix} \gamma^1\delta^{42}(\gamma^1\delta^{67})^* & \gamma^1\delta^{10}(\gamma^1\delta^{67})^* \\ \gamma^1\delta^{35}(\gamma^1\delta^{67})^* & \gamma^1\delta^{35}(\gamma^1\delta^{67})^* \end{bmatrix}.$$

Où F_{opt+} est le plus grand retour de sortie causal. On peut voir la réalisation de ce correcteur sur la figure (4.9)

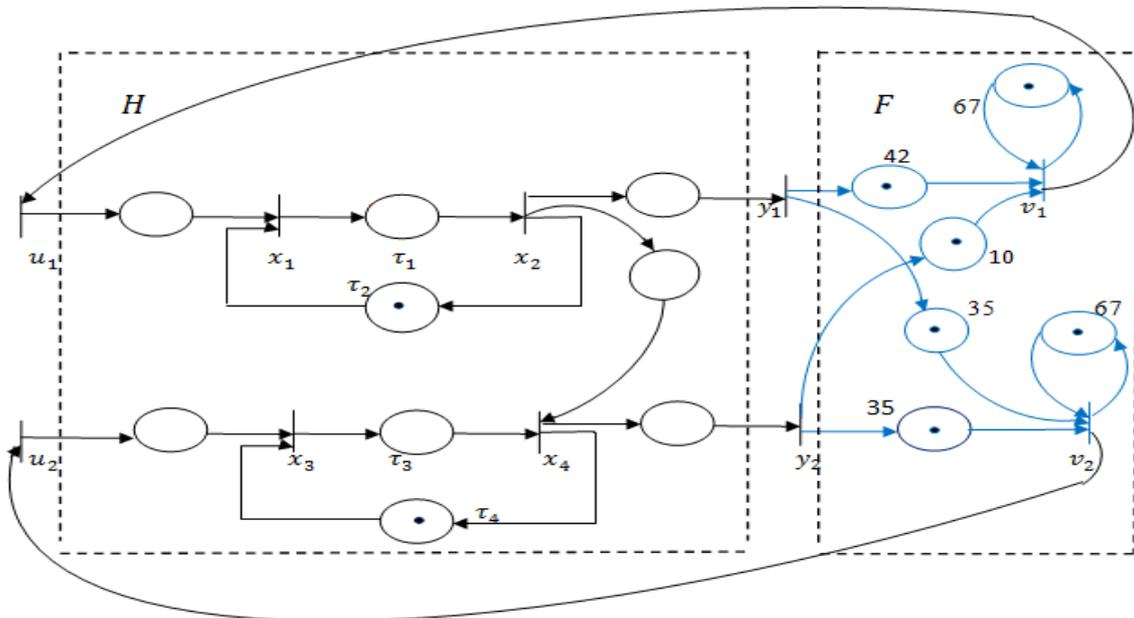


Figure (4.9) : Réalisation du correcteur retour de sortie F_{opt}

Chapitre 4: Synthèse de correcteur max-plus linéaire

Il conduit au transfert suivant :

$$u = (F_{opt} H)^* v \quad (4.14)$$

$$u = \begin{bmatrix} (\gamma^1 \delta^{67})^* & \gamma^1 \delta^{42} (\gamma^1 \delta^{67})^* \\ \gamma^1 \delta^{60} (\gamma^1 \delta^{67})^* & (\gamma^1 \delta^{67})^* \end{bmatrix} v.$$

La sortie est donnée par :

$$y = H(F_{opt} H)^* v \quad (4.15)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta^{25} (\gamma^1 \delta^{67})^* & \gamma^1 \delta^{67} (\gamma^1 \delta^{67})^* \\ \delta^{25} (\gamma^1 \delta^{67})^* & \delta^{32} (\gamma^1 \delta^{67})^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

La figure (4.10) représente le modèle de référence G_{ref} , le transfert nominal et le transfert en boucle fermée

$$G_{F_{opt}} = H(F_{opt} H)^* \quad (4.16)$$

$$G_{F_{opt}} = \begin{bmatrix} \delta^{25} (\gamma^1 \delta^{67})^* & \gamma^1 \delta^{67} (\gamma^1 \delta^{67})^* \\ \delta^{25} (\gamma^1 \delta^{67})^* & \delta^{32} (\gamma^1 \delta^{67})^* \end{bmatrix}$$

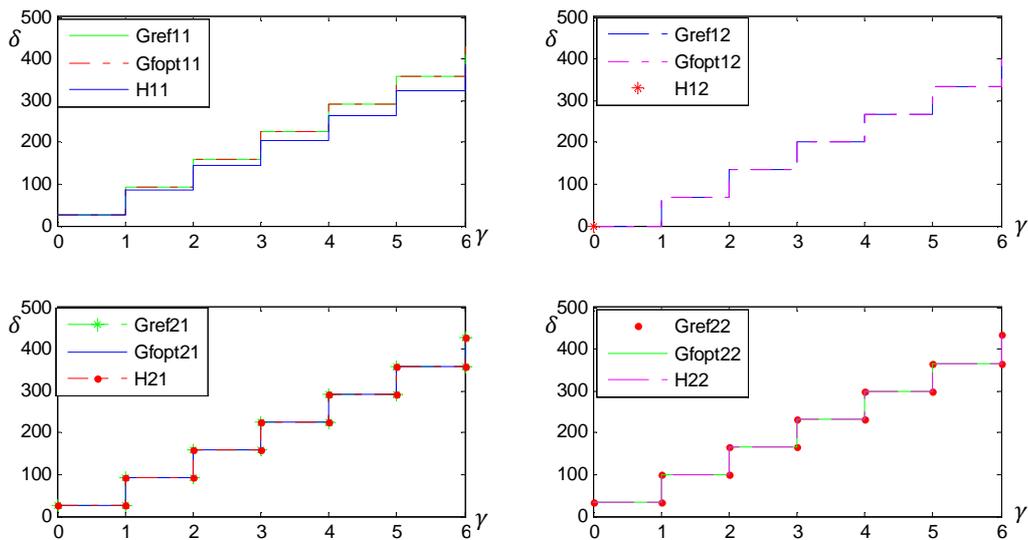


Figure (4.10) représentation de G_{ref} , $G_{F_{opt}}$ et H

Chapitre 4: Synthèse de correcteur max-plus linéaire

Remarque 4.4. Le comportement entrée-sortie du système corrigé, noté $G_{F_{opt}}$, composé du modèle du système, noté M , et du correcteur F_{opt} , est identique au comportement du modèle de référence, noté G_{ref}

Remarque 4.5. Il est possible de synthétiser un correcteur neutre. Le modèle de référence est alors $G_{ref} = H$, et le correcteur optimal est $F_{opt} = H \setminus H \oslash H$.

Illustration (4.3)

Le correcteur de type retour de sortie optimal est donné par le calcul de

$$Fn_{opt} = H \setminus H \oslash H. \quad (4.17)$$

$$Fn_{opt} = \begin{bmatrix} \delta^{-25}(\gamma^1 \delta^{60})^* & \varepsilon \\ \delta^{-32}(\gamma^1 \delta^{67})^* & \delta^{-32}(\gamma^1 \delta^{67})^* \end{bmatrix}.$$

Où Fn_{opt+} est le plus grand retour de sortie causal (et réalisable).

$$Fn_{opt+} = \text{Pr+}(Fn_{opt}) \quad (4.18)$$

Donc
$$Fn_{opt+} = \begin{bmatrix} \gamma^1 \delta^{35}(\gamma^1 \delta^{60})^* & \varepsilon \\ \gamma^1 \delta^{35}(\gamma^1 \delta^{67})^* & \gamma^1 \delta^{35}(\gamma^1 \delta^{67})^* \end{bmatrix}.$$

On peut voir une réalisation de ce correcteur sur la figure (4.11). Il conduit au transfert suivant :

$$u = (F_{opt} H)^* v$$

$$u = \begin{bmatrix} (\gamma^1 \delta^{60})^* & \varepsilon \\ \gamma^1 \delta^{60}(\gamma^1 \delta^{67})^* & (\gamma^1 \delta^{67})^* \end{bmatrix} v.$$

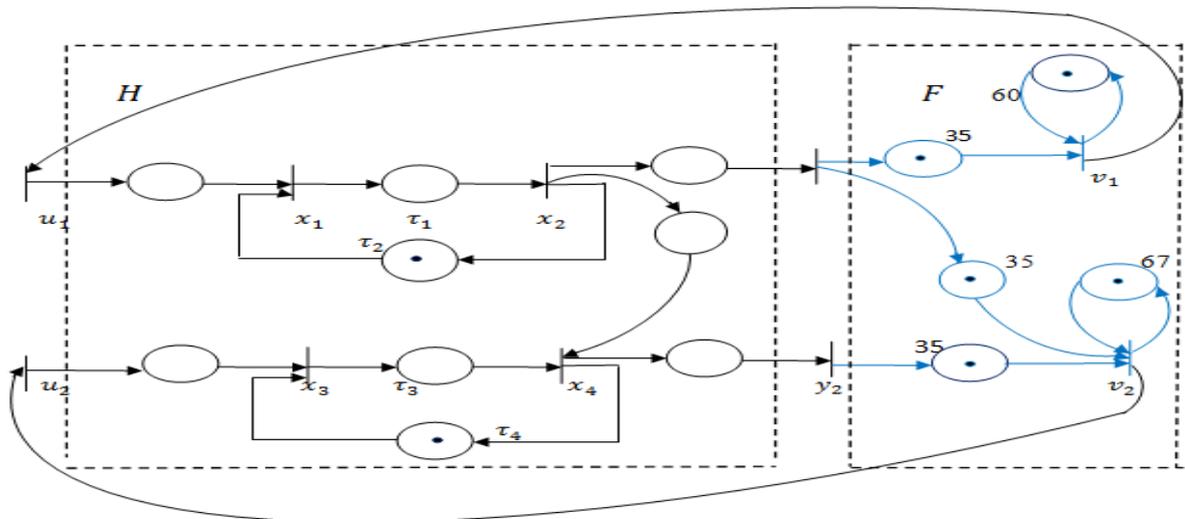


Figure (4.11) : réalisation de retour de sortie neutre Fn_{opt}

La sortie est donnée par :

$$y = H(F_{opt} H)^* v \quad (4.19)$$

$$= \begin{bmatrix} \delta^{25} (\gamma^1 \delta^{60})^* & \varepsilon \\ \delta^{25} (\gamma^1 \delta^{67})^* & \delta^{32} (\gamma^1 \delta^{67})^* \end{bmatrix} v.$$

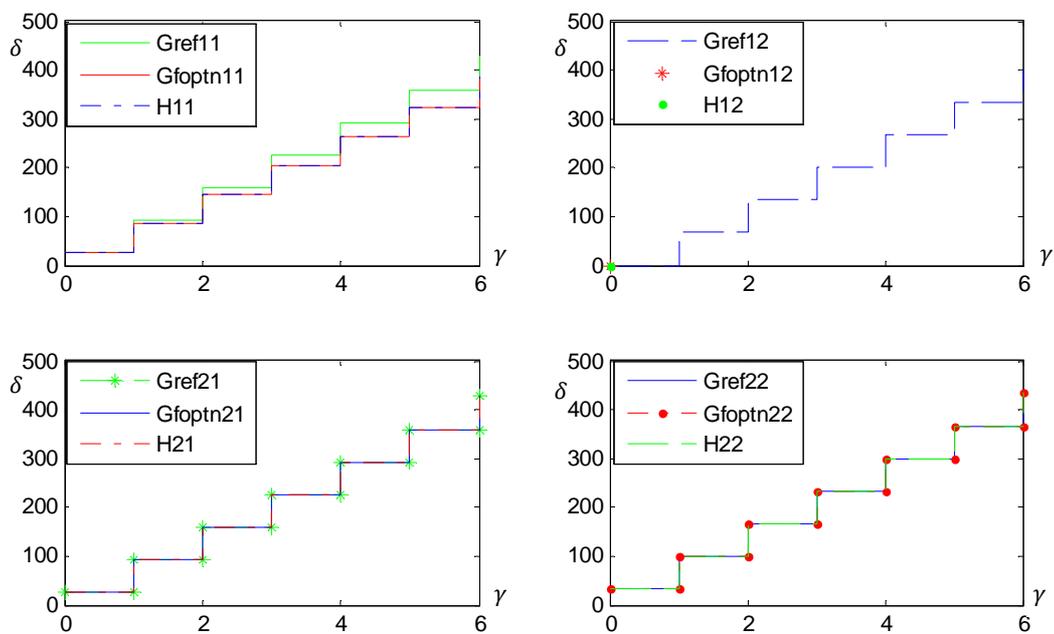


Figure (4.12) représentation de $G_{ref}, G_{F_{optn}}$ et H

Chapitre 4: Synthèse de correcteur max-plus linéaire

Remarque 4.6. Le comportement du système H est identique au comportement du modèle Corrigé avec le correcteur neutre, noté G_{foptn} . L'objectif de correcteur précompensateur neutre est alors de maintenir les performances entrée/sortie du système.

4.4.2 Synthèse d'un correcteur de type retour d'état

Ils ont proposé dans [Cottenceau et al. 2001] la synthèse de correcteurs de type de retour d'état, la structure est donnée figure (4.13).

On rappelle qu'il est toujours possible d'obtenir la représentation d'état d'un GET sous la forme

$$\begin{cases} x = Ax \oplus Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.20)$$

Avec $A \in M_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]^{n \times n}$, $B \in M_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]^{n \times m}$ et $C \in M_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]^{l \times n}$. La commande est donnée par l'expression suivante :

$$u = Kx \oplus \quad (4.21)$$

Avec $K \in M_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]^{m \times n}$. La représentation du système corrigé par K devient donc :

$$\begin{cases} x = Ax \oplus B(Kx \oplus v) \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (A \oplus BK)x \oplus Bv \\ y = Cx \end{cases}$$

Finalement, le transfert entrée-sortie du système muni du correcteur K devient :

$$y = C(A \oplus BK)^* B v = G_k v.$$

$$G_k = CA^*(A^*BK)^*A^*B$$

$$= CA^*B(KA^*B)^*.$$

L'utilisation d'un correcteur de type retour d'état améliore les performances, c.-à-d. engendre une commande plus grande et un système corrigé plus proche du modèle de référence.

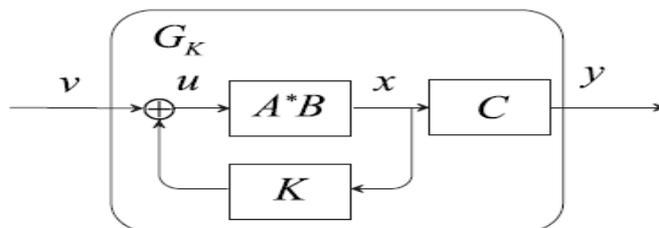


Figure (4.13): Commande avec modèle de référence : correction d'un système par un correcteur de type retour d'état.

Chapitre 4: Synthèse de correcteur max-plus linéaire

Illustration (4.3)

Comme illustration on peut toujours reprendre l'exemple précédent (figure (3.3)) on rappelle la fonction de transfert du système en boucle ouverte :

$$H = \begin{bmatrix} \delta^{25}(\gamma^1 \delta^{60})^* & \varepsilon \\ \delta^{25}(\gamma^1 \delta^{67})^* & \delta^{32}(\gamma^1 \delta^{67})^* \end{bmatrix}.$$

On choisit ici, comme modèle de référence :

$$= \begin{bmatrix} \gamma^{25}(\gamma^1 \delta^{67})^* & G_{ref}(\gamma^1 \delta^{67})^* \\ \gamma^{25}(\gamma^1 \delta^{67})^* & \delta^{32}(\gamma^1 \delta^{67})^* \end{bmatrix}.$$

Le calcul du retour d'état nous donne :

$$K_{opt} = \text{Pr+} (H \setminus G_{ref} \setminus A^* B) \quad (4.23)$$

$$K_{opt} = \begin{bmatrix} (\gamma^1 \delta^{67})^* & \gamma^1 \delta^{42}(\gamma^1 \delta^{67})^* & \gamma^1 \delta^{42}(\gamma^1 \delta^{67})^* & \gamma^1 \delta^{10}(\gamma^1 \delta^{67})^* \\ \gamma^1 \delta^{60}(\gamma^1 \delta^{67})^* & \gamma^1 \delta^{35}(\gamma^1 \delta^{67})^* & (\gamma^1 \delta^{67})^* & \gamma^1 \delta^{35}(\gamma^1 \delta^{67})^* \end{bmatrix} v.$$

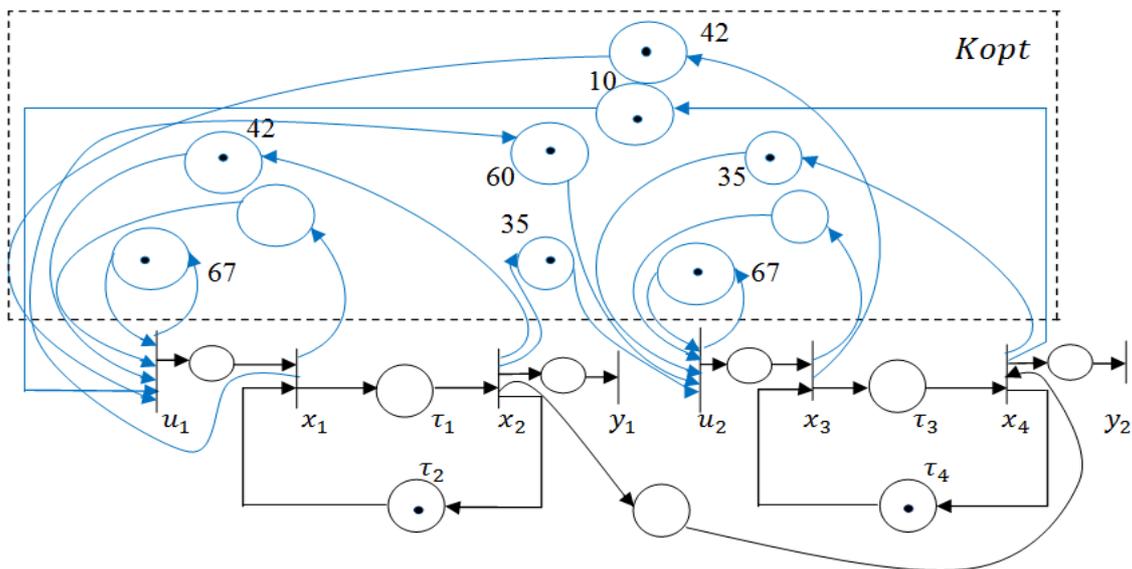


Figure (4.14) : réalisation de retour d'état K_{opt}

Remarque 4.7. Il est à noter que les correcteurs de type retour de sortie et de type retour d'état sont liés par la relation suivante :

$$F_{opt+} = K_{opt} \not\leftarrow C \tag{4.24}$$

$$K_{opt} \not\leftarrow C = \begin{bmatrix} \gamma^1 \delta^{42} (\gamma^1 \delta^{67})^* & \gamma^1 \delta^{10} (\gamma^1 \delta^{67})^* \\ \gamma^1 \delta^{35} (\gamma^1 \delta^{67})^* & \gamma^1 \delta^{35} (\gamma^1 \delta^{67})^* \end{bmatrix} = F_{opt+}$$

$$G_{F_{opt+}} = H(F_{opt+}H)^* = \begin{bmatrix} \delta^{25} (\gamma^1 \delta^{67})^* & \gamma^1 \delta^{67} (\gamma^1 \delta^{67})^* \\ \delta^{25} (\gamma^1 \delta^{67})^* & \delta^{32} (\gamma^1 \delta^{67})^* \end{bmatrix} \leq G_{ref}$$

$$G_{K_{opt}} = H(K_{opt}A^*B)^* = \begin{bmatrix} \delta^{25} (\gamma^1 \delta^{67})^* & \gamma^1 \delta^{67} (\gamma^1 \delta^{67})^* \\ \delta^{25} (\gamma^1 \delta^{67})^* & \delta^{32} (\gamma^1 \delta^{67})^* \end{bmatrix} \leq G_{ref}$$

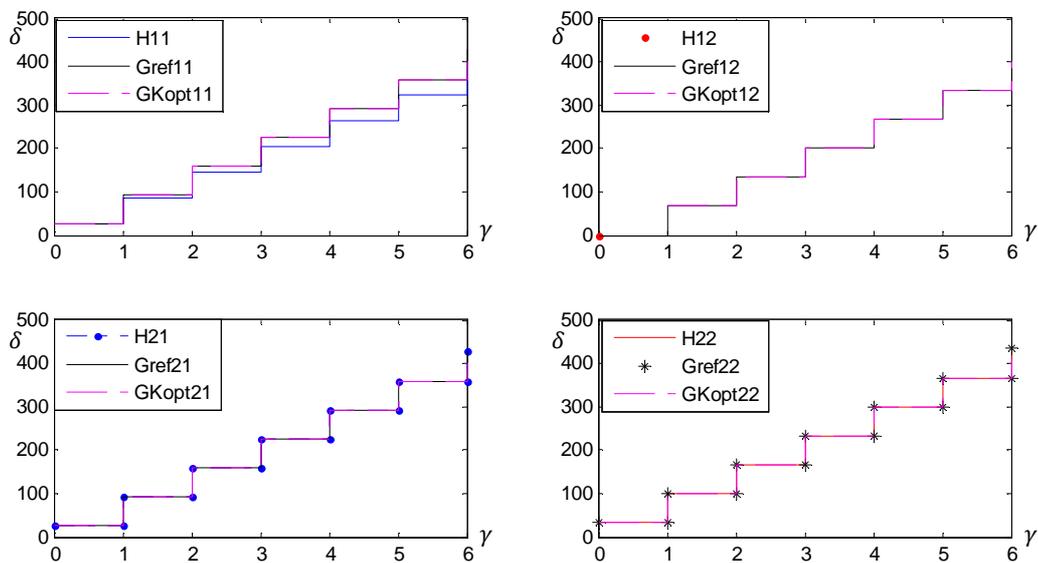


Figure (4.15) représentation de $G_{ref}, G_{k_{opt}}$ et H

Remarque 4.8. Le comportement du modèle de référence est le même que le comportement du système de retour d'état, c'est-à-dire on a abouti l'objectif.

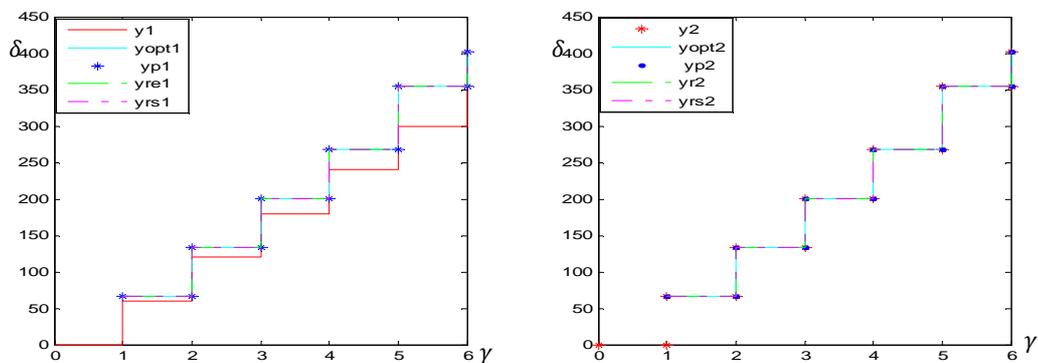


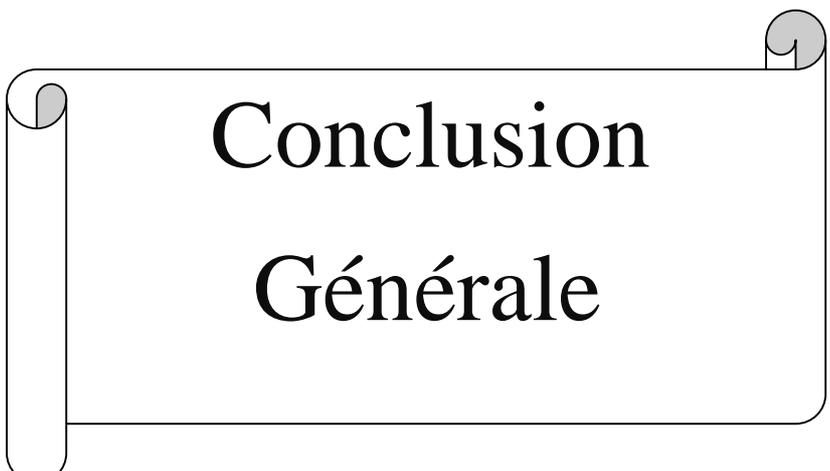
Figure (4.16) représentation de y, y_{opt}, y_p, y_{re} et y_{rs}

Chapitre 4: Synthèse de correcteur max-plus linéaire

Remarque 4.9. Toutes les sorties corrigés sont les même avec les sorties désires

Conclusion :

Dans cette section, nous avons synthétisé des lois de commande qui permettent de respecter la table horaire préalablement défini pour notre système de transport.



**Conclusion
Générale**

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons présenté une méthodologie de commande d'un système de transport public (STP) modélisé par un système d'équation dans les algèbres max-plus en vue de respecter une table horaire préalablement calculée. L'intérêt d'un tel travail ne se démontre pas. En effet, avoir un système de transport performant qui permet de palier aux aléas et qui permet de remédier à certain problèmes de fonctionnement est le rôle de tout système de gestion.

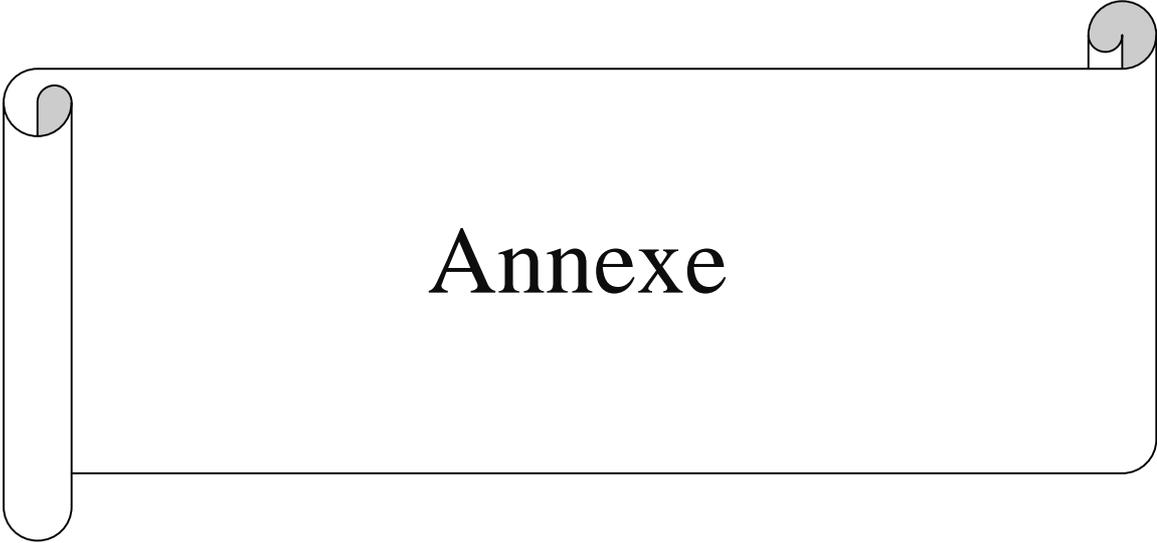
Le mémoire est devisé en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous avons donné des rappels fondamentaux concernant les propriétés mathématiques des dioïdes, la théorie de la résiduation et un ensemble de définitions sur la théorie des systèmes.

Le deuxième chapitre a porté sur la modélisation de systèmes à événements discrets (SED) par une sous-classe des réseaux de Petri (RdP) appelée les graphes d'événements temporisés (GET) qui admettent une représentation linéaire dans l'algèbre max-plus. Ensuite, différentes représentations pour les graphes d'événements temporisés rencontrées dans la littérature (représentation aux dateurs, aux compteurs, par des séries formelles) ont été étudiées.

Dans le troisième chapitre les systèmes de transport publics ont été étudiés. Il consiste à assurer, d'une part, une meilleure gestion des correspondances en minimisant les temps d'attente des passagers, et d'autre part, une exploitation optimale des ressources matérielles.

Dans le quatrième chapitre, nous avons présenté des travaux portant sur la commande de graphes d'événements temporisés (GET) dans l'algèbre des dioïdes $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$. Les deux structures considérées sont la commande optimale en boucle ouverte où l'objectif est de poursuivre une trajectoire ou un modèle de référence, dans un second lieu, une commande en boucle fermée par retour de sortie ou par retour d'état est synthétisé en vue de poursuivre un modèle de référence. Ainsi, différents types de correcteurs ont été synthétisés et réalisés sous forme de graphes de commande ce qui permet, de faciliter leur implémentation.



Annexe

La librairie MinMaxGD [Cottenceau et al. 2000] se présente comme un ensemble d'instructions écrites en C++, liées au logiciel Scilab. Cette librairie permet de manipuler des séries rationnelles dans le dioïde $M_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

Dans la suite de cette annexe, on trouvera l'ensemble des scripts Scilab utilisés pour effectuer les différents calculs.

Tout d'abord, nous allons découvrir l'utilisation de la MinMaxGD dans Scilab à travers un exemple. L'exemple traité dans la suite correspond à notre système de transport illustre à la figure (3.3).

=====

scilab-3.1.1

Copyright (c) 1989-2005

Consortium Scilab (INRIA, ENPC)

=====

Startup execution:

loading initial environment

Commençons par charger la librairie dans l'environnement Scilab

```
-->scipad('C:\PROGRA~1\SCILAB~1.1\MINMAX~1.1\loader.sce');
```

```
-->shared archive loaded
```

```
MACROS =
```

```
C:\Program Files\scilab-3.1.1\minmaxgd1.1\macros\
```

La commande $A = \text{smatrix}(m, n)$ permet de déclarer une matrice (notée A) de m lignes et n colonnes. Après la déclaration, tous les termes de la matrices sont initialisés à ε .

L'initialisation s'effectue à l'aide de la commande `series`. Par exemple pour initialiser l'élément (1,2) de la matrice A à une série $A(1,2) = \gamma\delta^{35}$

La syntaxe serait la suivante :

$$A(1,2) = \text{series}(\text{eps}, [1\ 35], e)$$

Le calcul de la fonction de transfert du système $H = CA^*B$. Dans Scilab ce calcul est donné par l'instruction suivante :

$$H = C * \text{stargd}(A) * B$$

2 Syntaxe générale

MinMaxGD reconnaît les types élémentaires suivants : type série (noté séries) et le type matrice (noté smatrix) correspondant au dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$. MinMaxGD reconnaît les opérations algébriques de base suivantes (soit deux éléments a et $b \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$)

opération	syntaxe
\oplus (somme)	$a + b$
\otimes (produit)	$a * b$
\oslash (résiduation à droite)	a / b
\oslash (résiduation à gauche)	$a \backslash b$
$*$ (étoile de Kleene)	Stargd(a)
Pr_+ (projection dans les causaux)	Parcaus(a)

3. Exemple

On donne dans la suite le script Scilab de la commande d'un système de transport illustré par la figure (3.3)

```

clc
//initialisation des matrices
A = smatrix(4,4);
B = smatrix(4,2);
C = smatrix(2,4);
Gref = smatrix(2,2);

//affectation des valeurs des matrices
//la matrice d'état:

```

```
A(1,2)=series(eps,[1 35],e);
A(2,1)=series(eps,[0 25],e);
A(3,4)=series(eps,[1 35],e);
A(4,2)=series(eps,[0 0],e);
A(4,3)=series(eps,[0 32],e)
//la matrice de commande:
B(1,1)=series(eps,[0 0],e);
B(3,2)=series(eps,[0 0],e);
//la matrice d'observation:
C(1,2)=series(eps,[0 0],e);
C(2,4)=series(eps,[0 0],e);
// calcule du la fonction de transfert
At = stargd(A)
H=C*At*B
////////////////////////////////////
//////// la commande en BO //////////
////////////////////////////////////
//le trajectoire désiré//
z(1,1) = (series(eps,[1 67],[1 67]));
z(2,1)= (series(eps,[1 67],[1 67]))
//Commande en boucle ouverte(commande par Poursuite de trajectoire)
uopt =(H\z)
//la sortie optimale
//Le plus grand transfert Hsup
Hsup=(z/uopt)
yopt = H*uopt
ysup=Hsup*uopt
////////////////////////////////////
// par le modèle de référence
////////////////////////////////////
////Détermination du modèle de référence
Gref(1,1)= series(eps,[0 25],[1 67]);
Gref(1,2)= series(eps,[0 0],[1 67]);
```

Annexe

```
Gref(2,1)= series(eps,[0 25],[1 67]);
Gref(2,2)= series(eps,[0 32],[1 67])

/** un correcteur de type précompensateur**/
Pop=(H\Gref)
Popt=prcaus(Pop)
//la sortie du système avec le précompensateur
yp1 = Popt*H*uopt
//correcteur neutre
Pn=(H\H)
Pnc=prcaus(Pn)
//la sortie du système avec correcteur neutre
yn1 = H*Pn*uopt

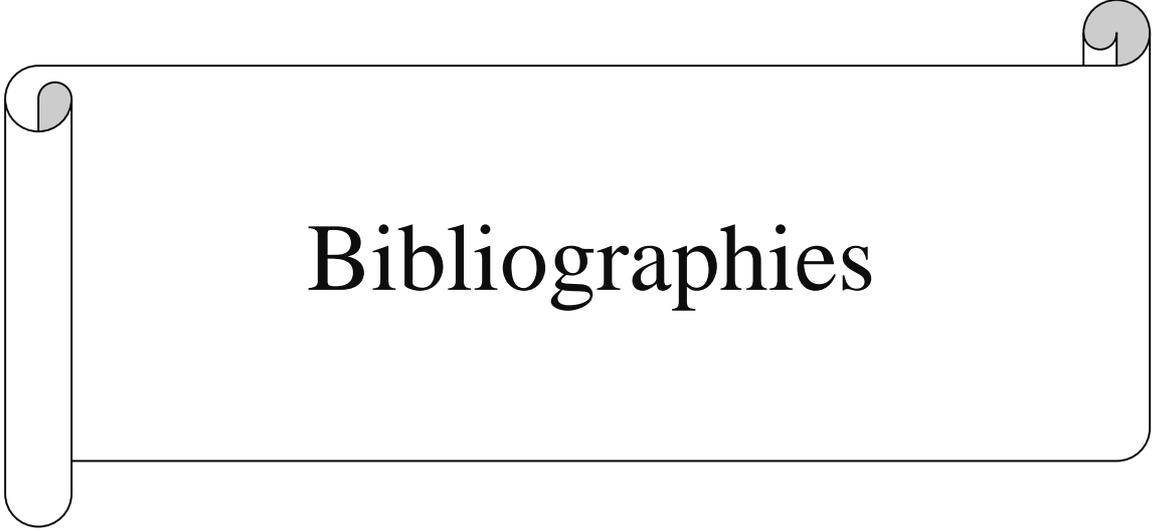
//////////*****//////////
//// * la commande en BF * ////
//////////*****//////////
// retour de sortie

//Calcul du correcteur optimal (noté Fopt) de type retour de sortie
//tel que MH(Fopt) <= Gref.
Fopt = H \ Gref / H
//Fopts = Hsup \ Gref /Hsup
//Calcul du plus grands correcteurs causal Fopt+ et Fopts
Fopt_p = prcaus(Fopt)
//les fonctions de transferts
Gfopt = H*stargd(Fopt_p*H)
//HFs = stargd(Hsup * Fopt_p)*Hsup
//les sorties de systèmes en BF (RS)
uf=prcaus(stargd(Fopt*H))
yf=Gfopt*uf
///correcteur de sortie neutre///
Fnopt = H \ H / H
```

Annexe

```
//Calcul du plus grand correcteur causal Fopt+
Fnopt_p = prcaus(Fnopt)
// le plus grand transfert Hsup est donné par
unf=stargd(Fnopt_p*H)
// le plus grand transfert Hsup est donné par
Gfoptn = H*stargd(Fnopt_p*H)
//la sortie est donné alors par
ynf=Gfoptn*unf

//////////*****//////////
////////// retour d'état//////////
Kopt = H \ Gref / (At*B)
//Calcul du plus grand correcteur causal Fopt+
Kopt_p = prcaus(Kopt)
yfe=C*At*B*stargd(Kopt*At*B)
////le correcteur neutre
Knopt = H \ H/ (At*B)
//Calcul du plus grand correcteur causal Fopt+
Knopt_p = prcaus(Knopt)
yfen=C*At*B*stargd(Knopt*At*B)
KC=Kopt_p/C
Gfop=H*stargd(Fopt_p*H)
Gkop=H*stargd(Kopt_p*At*B)
```



Bibliographies

Bibliographie

- [Berman and Plemmons, 1979] Berman, A. and Plemmons, R. (1979). *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. Academic Press. pages 16.
- [Baccelli 1992] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder et J.-P. Quadrat. Synchronization and linearity : an algebra for discrete event systems. Wiley and sons, 1992.
<http://cermics.enpc.fr/~cohen-g/documents/BCOQ-book.pdf>.
- [Blyth 2005] T.S. Blyth. Lattices and ordered algebraic structures. Springer Verlag, 2005.
- [Baccelli et al., 1992] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G., and Quadrat, J. (1992). *Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*. Wiley and Sons.
- [Blyth and Janowitz, 1972] Blyth, T. and Janowitz, M. (1972). *Residuation Theory*. Pergamon press.
- [Cohen, 1998a] Cohen, G. (1998a). Residuation and applications. *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique, Ecole de printemps d'informatique théorique*.
- [Cottenceau, 1999] Cottenceau, B. (1999). *Contribution à la commande de systèmes à événements discrets : synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes*. Thèse, LISA - Université d'Angers.
- [Cottenceau et al., 2001] Cottenceau, B., Hardouin, L., Boimond, J.-L., and Ferrier, J.-L. (2001). Model reference control for timed event graphs in dioids. *Automatica*, vol. 37:1451–1458.
- [Cottenceau et al., 1999] Cottenceau, B., Hardouin, L., Boimond, J.-L., and Ferrier, J.-L. (1999). Synthesis of greatest linear feedback for Timed Event Graphs in dioid. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, n°6:1258–1262.
- [Cohen et al., 1996] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (1996). Kernels, images and projections in dioids. In *Proceedings of WODES'96*, Edinburgh.
- [Cohen et al., 1983] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J.-P., and Viot, M. (1983). Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes. Rapport de recherche 191, INRIA, Le Chesnay, France.
- [Cohen, 1993] Cohen, G. (1993). Two-dimensional domain representation of timed event graphs. In *Summer School on Discrete Event Systems*. Spa, Belgium.
- [Cohen et al., 1989] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J.-P., and Viot, M. (1989). Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems. *IEEE Proceedings: Special issue on Discrete Event Systems*.
- [Cohen et al., 1985] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J.-P., and Viot, M. (1985). A linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 30(3):210–220.

Bibliographie

- [Cottenceau et al., 2000] Cottenceau, B., Lhommeau, M., Hardouin, L., and Boimond, J.-L. (2000). Data Processing Tool for Calculation in Dioid. In *Workshop On Discrete Event Systems (WODES' 2000)*, Ghent, Belgium.
- [Cottenceau et al., 2001] B. Cottenceau, L. Hardouin, J.-L. Boimond, and J.-L. Ferrier. Model Reference Control for Timed Event Graphs in Dioids. *Automatica*, vol. 37:1451–1458, 2001.
- [David and Alla, 1992] David, R. and Alla, H. (1992). *Du Grafcet au réseaux de Petri*. Editions Hermès, Paris.
- [Des, 02] Philippe Descamps, “Environnement de modélisation et de simulation de réseaux de transport urbain de passagers”. Diplôme d’ingénieur du C.N.A.M., Conservatoire national des arts et métiers, centre régional associé du nord Franche – Comté à Belfort. Février 2002.
- [Gondran and Minoux, 1979] Gondran, M. and Minoux, M. (1979). *Graphes et algorithmes*. Eyrolles, Paris. Engl. transl. *Graphs and Algorithms*, Wiley, 1984. pages 16.
- [Gaubert 1992] S. Gaubert. Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes. PhD thesis, INRIA - Ecole des Mines de Paris, 1992. <http://amadeus.inria.fr/gaubert/PAPERS/ALL.pdf>.
- [Houssin, 2003] Houssin, L. (2003). Contribution à l’étude des systèmes à événements discrets dans l’algèbre des dioïdes. Applications aux systèmes de transport. Rapport de stage de DEA, DEA Automatique et Informatique Appliquée, Nantes-Angers, France.
- [Hillion, 1989] Hillion, H. (1989). *Modélisation et analyse des systèmes de production discrets par les réseaux de Petri temporisés*. Thèse, Université de Paris IV, France.
- [Lhommeau et al., 2004a] Lhommeau, M., Hardouin, L., Cottenceau, B., and Jaulin, L. (2004a). Interval analysis and dioid : Application to robust controller design for timed event graphs. *Automatica*, to appear.
- [Lhommeau, 2003] Lhommeau, M. (2003). *Etude de systèmes à événements discrets dans l’algèbre (max,+): 1. Synthèse de correcteurs robustes dans un dioïde d’intervalles. 2. Synthèse de correcteurs en présence de perturbations*. Thèse, LISA - Université d’Angers.
- [Lai, 02] Laïchour Hakim, “Modélisation Multi-Agent et Aide à la Décision : Application à la régulation des correspondances dans les Réseaux de Transport Urbain”. Thèse de doctorat, Université des sciences et technologies de Lille, UFR I.E.E.A.. Décembre 2002.
- [Libeaut and Loiseau, 1996] Libeaut, L. and Loiseau, J. J. (1996). On the control of timed event graphs. In *Proceedings of WODES’96*, Edimburgh. pages 61.
- [Lüders and Santos-Mendes, 2002] Lüders, R. and Santos-Mendes, R. (2002). Generalized multivariable control of discrete event systems in dioid. In *Proceedings of WODES 2002*, Zaragoza, Spain. pages 63, 64.

Bibliographie

- [Lhommeau, 2003] Lhommeau, M. (2003). *Etude de systèmes à événements discrets dans l'algèbre (max, +): - Synthèse de correcteurs robustes dans un dioïde d'intervalles. - Synthèse de correcteurs en présence de perturbations.* Thèse de doctorat, ISTIA - Université d'Angers. pages 61, 63, 65.
- [Le Boudec and Thiran, 2001] Le Boudec, J.-Y. and Thiran, P. (2001). *Network Calculus.* Springer-Verlag. http://icalwww.epfl.ch/PS_files/NetCal.htm.
- [Lotito et al., 2001] Lotito, P., Mancinelli, E., and Quadrat, J.-P. (2001). A Minplus Derivation of the Fundamental Car-Traffic Law. Research Report 4324, INRIA. <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4324.html>.
- [Merlin, 1979] Merlin, P. (1979). Methodology for the Design and Implementation of Communication Protocols. *IEEE Transaction on Communication.*
- [Murata, 1989] Murata, T. (1989). Petri Nets : Properties, Analysis and Applications. *IEEE Proceedings: Special issue on Discrete Event Systems.*
- [Maia et al., 2003] Maia, C., Hardouin, L., Mendes, R. S., and Cottenceau, B. (2003). Optimal closed-loop control for timed event graphs in dioid. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 48:2284–2287. pages 64.
- [Petri, 1962] Petri, C.-A. (1962). *Kommunikation mit Automaten.* Thèse, Institut für Instrumentelle Mathematik, Bonn, Germany.
- [Tran, 00], The European Reference Data Model for Public Transport V5.0 – Transmodel Version, 5 rapports de modélisation, 2000, <http://www.transmodel.org>.
- [Wang and Desoer, 1972] Wang, S. and Desoer, C. (1972). The exact model matching of linear multivariable systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 17(3):347–349.