

République Algérienne Démocratique et Populaire.  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.  
Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

Faculté des Sciences  
Département des Mathématiques



MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité : MATHÉMATIQUES  
Option : Recherche Opérationnelle

---

# Contrôle optimal en diabétologie

---

Réaliser par :

SID ALI LISA  
DJOUDER CYLIA

Devant le jury :

MR AIDENE MOHAMED	UMMTO	Président
MR MERAKEB ABDELKADER	UMMTO	Examinateur
MME HARRACHE FAZIA	UMMTO	Examinatrice

Année universitaire :2022/2023

---

## Remerciements

Nous sommes profondément reconnaissante envers nous-même, pour avoir consacré de nombreuses heures à la collecte de données, à l'analyse des résultats et à l'écriture de ce mémoire. On a dû surmonter des obstacles et faire preuve de discipline et de détermination pour atteindre nos objectifs.

Tout d'abord On souhaite remercier chaleureusement le Professeur Mr AIDENE Mohamed, d'avoir proposé ce thème, pour ses nombreux conseils éclairés et son encouragement durant l'élaboration de ce mémoire.

On souhaite remercier, le professeur MERAKEB Abdelkader, pour son aide, ses conseils avisés et son soutien constant. Ses connaissances et son expertise ont grandement contribué à l'aboutissement de ce travail.

On remercie également les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail en acceptant de l'examiner. On tient également à remercier nos professeurs pour la qualité de leur enseignement et pour leurs efforts fournis durant toute la période d'étude.

Nous sommes reconnaissant envers nos famille pour leur soutien inconditionnel et leur encouragement tout au long de ce parcours. Leur présence et leurs encouragements ont été essentiels pour nous.

Merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail. Vos encouragements et votre soutien ont été d'une grande importance pour nous.

---

## Dédicace

Je dédie cet humble travail ...

*À ma famille, pour leur amour inépuisable et leur soutien sans faille. Chacune de mes réalisations est un reflet de leur impact positif dans ma vie.*

*Lisa SID ALI*

---

## Dédicace

Je dédie cet humble travail ...

*Aux êtres chers qui ont été mes piliers durant cette formidable aventure. À mes parents, dont l'amour inébranlable et le soutien indéfectible ont illuminé chacune de mes étapes. À mes frères, pour leurs encouragements et leur présence réconfortante.*

*cylia DJOUDER*

<b>Notation</b>		<b>1</b>
<b>Introduction générale</b>		<b>3</b>
<b>1 La modélisation mathématique en diabétologie</b>		<b>6</b>
1.1	Introduction . . . . .	6
1.2	La Dynamique du Glucose-Insuline dans le Corps humain . . . . .	6
1.3	Le diabète . . . . .	7
1.3.1	Le diabète de type 1 . . . . .	7
1.3.2	Le diabète de type 2 . . . . .	8
1.3.3	Symptômes . . . . .	8
1.3.4	Traitement . . . . .	8
1.4	Modélisation Mathématique En Diabétologie . . . . .	9
1.4.1	Historique . . . . .	9
1.4.2	Le modèle minimal de Bergman . . . . .	9
1.4.3	Le modèle de Derouich et Boutayeb . . . . .	14
1.5	Autres approches . . . . .	15
1.6	Buts de la modélisation de la dynamique de l'insuline-glucose . . . . .	16
1.7	Conclusion . . . . .	17
<b>2 Introduction au contrôle optimal</b>		<b>18</b>
2.1	Introduction . . . . .	18
2.2	Théorie du contrôle . . . . .	18
2.2.1	Commandes Admissibles . . . . .	19
2.2.2	Problème de Cauchy . . . . .	19
2.2.3	Théorème d'existence . . . . .	20
2.2.4	Théorème d'unicité . . . . .	20
2.3	Application en théorie du contrôle . . . . .	22
2.3.1	systèmes de contrôle linéaires . . . . .	22

# TABLE DES MATIÈRES

---

2.3.2	Cas général :	22
2.4	Contrôle optimal	23
2.4.1	Position du problème	23
2.5	Contrôlabilité	26
2.5.1	Existence de trajectoires optimales	27
2.5.2	Contrôlabilité des systèmes linéaires	28
2.5.3	Contrôlabilité des systèmes non linéaires	30
2.6	Principe du maximum de Pontryagin	31
2.7	Méthodes numériques en contrôle optimal	36
2.7.1	Méthodes Indirectes	36
2.7.2	Méthodes Directes	37
2.8	Conclusion	39
<b>3</b>	<b>Application</b>	<b>40</b>
3.1	Introduction	40
3.2	Application et simulation d'un modèle simplifié de glucose	40
3.2.1	Résolution Analytique	42
3.2.2	Implémentation de la méthode de tir sous MATLAB	46
3.2.3	Discussion des résultats	51
3.3	Simulation de Modèle Original de Bergman	51
3.3.1	Implémentation de la méthode de tir sous MATLAB	51
3.3.2	Discussion des résultats	55
3.4	Conclusion	55
	<b>Conclusion générale</b>	<b>55</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>57</b>

## Notation

---

## NOTATION

Dans ce mémoire, nous utilisons les notations suivantes :

- $\forall$  : Pour tout.
- $\exists$  : Il existe.
- $\subset$  : compris dans
- $\mathbb{R}$  : Ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}^n$  n fois.
- $e^A$  : Exponentielle de la matrice A.
- $Acc(x_0, T)$  : Ensemble accessible depuis  $x_0$ , en temps T.
- $\frac{\partial f}{\partial x}$  : Dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la variable  $x$
- $\mathcal{M}_{n,m}$  : Ensemble des matrices à n lignes et à m colonnes.

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

La diabétologie est un domaine de la médecine qui étudie le diabète, une maladie chronique dont le métabolisme du glucose dans le corps est perturbé. De graves conséquences à long terme, telles que les maladies cardio-vasculaires, les problèmes rénaux, peuvent être causées par le diabète. Par conséquent, la gestion efficace du diabète est cruciale pour éviter les problèmes et maintenir une bonne qualité de vie pour les patients.

La modélisation est un processus essentiel dans de nombreux domaines, tels que les sciences, l'ingénierie, la finance et l'informatique. Elle consiste à créer une représentation simplifiée et abstraite d'un système réel ou d'un phénomène, afin de mieux comprendre son fonctionnement, d'en prédire le comportement et d'effectuer des analyses approfondies. La modélisation repose sur la collecte de données pertinentes et la formulation d'hypothèses qui décrivent les relations et les interactions entre les différents éléments du système étudié. Ces modèles peuvent prendre diverses formes, notamment des équations mathématiques, des graphes, des diagrammes, des simulations informatiques ou même des maquettes physiques.

La théorie mathématique du contrôle optimal a pris naissance dans les années quarante dans la quête d'une partie spéciale des équations différentielles, c'est le prolongement du calcul variationnel. La théorie du contrôle optimal analyse les propriétés des systèmes commandés c'est à dire des systèmes sur les quelles on peut agir au moyen d'une commande. Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant certains critères ; les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, systèmes avec retard, etc. L'application de la théorie du contrôle optimal regroupe un nombre de sujets et de domaines extrêmement vastes : économie, mécanique, médecine, chimie, robotique, aéronautique et biologie, etc.

Le contrôle optimal en diabétologie fait appel à des stratégies thérapeutiques avancées qui utilisent des modèles mathématiques et des techniques d'optimisation pour déterminer les meilleures décisions de traitement. Le contrôle optimal vise à trouver les doses optimales

## Introduction générale

---

d'insuline ou d'autres médicaments hypoglycémisants, ainsi que les ajustements diététiques et d'activité physique appropriés, afin d'atteindre et de maintenir les niveaux cibles de glucose dans le sang.

La solution au problème de contrôle optimal est généralement obtenue en utilisant des méthodes mathématiques telles que le calcul des variations, la programmation dynamique ou la théorie du contrôle. Ces méthodes permettent de formuler le problème sous la forme d'une équation mathématique, appelée équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, qui décrit le comportement optimal du système en fonction du temps.

Pour résoudre ces problèmes, deux grandes théories ont émergé indépendamment depuis une cinquantaine d'années : le principe du maximum de Pontryagin et le principe de la programmation de Bellman. La première théorie, basée sur le principe du maximum de Pontryagin, découvert par L. S. Pontryagin en 1956, donne une condition nécessaire d'optimalité. La deuxième théorie, apparue dans les années 60, est basée sur le principe de la programmation dynamique de Bellman, qui fournit une condition suffisante d'optimalité.

Il existe différentes méthodes pour résoudre les problèmes de commande optimale, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients. Le choix de la méthode dépend du problème considéré. Généralement, les problèmes de commande optimale sont résolus de façon numérique ; par conséquent les méthodes de résolution ont nettement évolué ces dernières années. La plupart des anciennes méthodes étaient basées sur l'obtention d'une solution qui satisfait soit les équations d'Euler-Lagrange, qui sont des conditions nécessaires d'optimalité, soit l'équation de Hamilton -Jacobi-Bellman, qui est une condition suffisante d'optimalité. Ces méthodes sont appelées les méthodes indirectes. L'inconvénient principal des méthodes indirectes, est la résolution fastidieuse de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Ce qui a amené plusieurs chercheurs à utiliser des méthodes directes pour résoudre le problème de la commande optimale. Ces méthodes consistent à discrétiser les équations du problème, et ainsi se ramener à un problème de programmation non linéaire, c'est à-dire un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie.

Dans ce mémoire, nous explorerons les principes fondamentaux du contrôle optimal. Nous examinerons les différents modèles mathématiques utilisés pour simuler le métabolisme du glucose-insuline et les techniques d'optimisation pour trouver les stratégies de traitement optimales .

La suite des chapitres est organisée comme suit :  
Au premier chapitre, nous définissons les notions principales du diabète et nous abordons des modèles mathématiques du couple glucose-insuline.  
Le second chapitre traite la théorie du contrôle optimal, introduisant des définitions importantes et présentant le principe du maximum de Pontryagin, qui est le point clé de cette

## Introduction générale

---

théorie, ainsi quelques méthodes de résolution.

Au dernier chapitre, nous nous intéressons à la résolution numérique de notre problème simplifié du mécanisme régissant le niveau du glucose dans le sang en utilisant la méthode de tir simple implémentée sous MATLAB afin de déterminer la commande optimale et le temps minimal. Enfin le deuxième problème est consacré à montrer l'efficacité de la théorie du contrôle optimal en la testant sur le modèle minimal de Bergman, puis la simulation numérique de ce modèle.

---

# CHAPITRE 1

## LA MODÉLISATION MATHÉMATIQUE EN DIABÉTOLOGIE

### 1.1 Introduction

La modélisation mathématique joue un rôle crucial en diabétologie en offrant des outils puissants pour étudier, comprendre et prédire les aspects complexes de la maladie du diabète.

La modélisation mathématique permet de représenter les processus biologiques impliqués dans le diabète sous forme d'équations et de modèles, ce qui facilite leur étude et leur analyse. Ces modèles mathématiques peuvent être construits à partir de données expérimentales, de mesures cliniques et d'observations sur les patients diabétiques, ainsi que de connaissances scientifiques et médicales approfondies.

Grâce à ces modèles, les chercheurs peuvent simuler le comportement du système biologique impliqué dans le diabète et étudier comment il réagit face à différents scénarios, telles que des modifications de la glycémie, des variations de la sensibilité à l'insuline ou des changements dans les habitudes alimentaires. Ces simulations permettent de mieux comprendre les mécanismes complexes du diabète, d'identifier les facteurs de risque et de prédire l'évolution de la maladie à long terme.

### 1.2 La Dynamique du Glucose-Insuline dans le Corps humain

La dynamique du glucose-insuline dans le corps humain fait référence aux variations et aux interactions complexes entre la concentration de glucose et d'insuline dans le sang, ainsi qu'aux réponses physiologiques associées. Il s'agit d'un processus dynamique qui vise à

## 1.3 Le diabète

---

maintenir l'homéostasie du glucose dans le corps.

Lorsque nous mangeons, en particulier des aliments riches en glucides, la digestion libère du glucose dans le sang, ce qui augmente la glycémie. En réponse à cette augmentation, le pancréas libère de l'insuline dans la circulation sanguine. L'insuline permet aux cellules de capter le glucose présent dans le sang en se liant à des récepteurs spécifiques à leur surface.

Lorsque l'insuline se lie aux récepteurs des cellules, cela déclenche une cascade de réactions biochimiques à l'intérieur de la cellule, ce qui permet l'entrée du glucose à l'intérieur de celle-ci. Le glucose est ensuite utilisé comme source d'énergie immédiate ou stocké sous forme de glycogène dans le foie et les muscles pour une utilisation ultérieure.

Lorsque la concentration de glucose dans le sang diminue, la sécrétion d'insuline diminue également, permettant ainsi aux niveaux de glucose de remonter progressivement à des niveaux normaux.

En cas de perturbation de cette dynamique, par exemple en cas de résistance à l'insuline (lorsque les cellules ne répondent pas de manière appropriée à l'insuline) ou de déficience en insuline (comme dans le diabète de type 1), la régulation de la glycémie peut être compromise, entraînant une hyperglycémie (niveaux de glucose élevés dans le sang, supérieure à 270 mg \ dL ) ou une hypoglycémie (niveaux de glucose bas dans le sang, inférieure à 60 mg \ dL), ce qui peut avoir des conséquences néfastes sur la santé.

## 1.3 Le diabète

Le diabète est une maladie chronique grave qui se déclare lorsque le pancréas ne produit pas suffisamment d'insuline, ou lorsque l'organisme est incapable d'utiliser efficacement l'insuline qu'il produit.

On distingue deux types principales de diabètes :

### 1.3.1 Le diabète de type 1

Les personnes atteintes de diabète de type 1 (insulinodépendant) sécrètent peu ou pas d'insuline. En l'absence de traitement, la glycémie, c'est-à-dire le taux de sucre dans le sang, est constamment trop élevée. À long terme, cette élévation permanente provoque des dégâts, notamment sur les petits vaisseaux sanguins de la peau, des yeux, des reins, etc. Le diabète de type 1 se déclenche le plus souvent pendant l'enfance, ou au début de l'âge adulte.

## 1.3 Le diabète

---

### 1.3.2 Le diabète de type 2

Les personnes atteintes de diabète de type 2 ( non insulino-dépendant) sécrètent de l'insuline, mais cette hormone régule avec moins d'efficacité le taux de sucre dans leur sang. Il touche surtout les personnes en surpoids ou obèses, sédentaires, le plus souvent après 45 ans. Il représente 90 % des cas de diabète après 60 ans.

### 1.3.3 Symptômes

Les individus peuvent éprouver différents signes et symptômes du diabète, et parfois il peut y avoir aucun signe. Certains des signes communément rencontrés sont :

- une augmentation inhabituelle de la soif et de la faim ;
- un besoin fréquent d'uriner ;
- une fatigue anormale ;
- une mauvaise cicatrisation des blessures et des coupures ;
- une peau sèche sujette à démangeaisons ;
- des infections fréquentes des gencives, de la vessie, du vagin, de la vulve ou du prépuce ;
- insensibilité ou fourmillement des mains et des pieds ;
- troubles de l'érection ;
- vision floue.

### 1.3.4 Traitement

Le traitement du diabète dépend du type de diabète et de la gravité de la maladie. Les deux principaux types de diabète sont le diabète de type 1 et le diabète de type 2.

Le traitement du diabète de type 1 repose sur l'injection d'insuline qui est administrée par injections sous-cutanées ou par l'utilisation d'une pompe à insuline. Les doses d'insuline sont ajustées en fonction des besoins individuels, y compris l'alimentation, l'activité physique et les niveaux de glucose dans le sang, une alimentation équilibrée, et la pratique d'une activité physique régulière. Un soutien psychologique est prescrit lorsque le besoin s'en fait sentir. Le diabète de type 2 est traité dans un premier temps par des mesures hygiéno-diététiques, puis on a rapidement recours à des traitements antidiabétiques oraux et/ou injectables dont l'efficacité n'est optimale que s'ils sont associés à une alimentation équilibrée et à une activité physique régulière.

### 1.4 Modélisation Mathématique En Diabétologie

Le diabète et d'autres maladies causées par des dysfonctionnements du système glucose-insuline sont l'une des raisons pour lesquelles de nombreux modèles mathématiques ont été élaborés au fil du temps pour décrire ce système dynamique. Ces modèles mathématiques sont utilisés pour interpréter les tests. Les modèles et les tests peuvent contribuer à améliorer la situation de nombreuses personnes atteintes de diabète.

#### 1.4.1 Historique

La modélisation mathématique en diabétologie n'est pas nouvelle. En 1939, Himswork et Ker introduisent la première approche pour mesurer la sensibilité de l'insuline in vivo. En 1961, Bolie proposa en utilisant des équations différentielles le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t}(t) = -a_1 G(t) - a_2 I(t) + p \\ \frac{\partial I}{\partial t}(t) = -a_3 G(t) - a_4 I(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où

- $G(t)$  représente la concentration du glucose en fonction du temps  $t$ .
- $I(t)$  représente la concentration de l'insuline en fonction du temps  $t$ .
- $p, a_1, a_2, a_3, a_4$  sont des paramètres.

#### 1.4.2 Le modèle minimal de Bergman

Le modèle minimal de Bergman est un modèle à un compartiment, ce qui signifie que le corps est décrit comme un compartiment (réservoir) avec une concentration basale de glucose et insuline. Ce modèle correspond à une modélisation mathématique relativement simple de l'épreuve d'hyperglycémie provoquée par voie intraveineuse. Le modèle minimal contient en fait deux modèles minimaux. Un décrivant la cinétique du glucose et un décrivant la cinétique de l'insuline. Les deux modèles prennent respectivement les données d'insuline et de glucose comme entrée. Dans ce qui suit une description des deux cinétiques est faite et enfin deux couplages sont proposés, qui pourraient être utilisés comme simulateurs de l'ensemble glycémie-insuline système.

##### Le modèle minimal de glucose

Ce modèle décrit comment le niveau de glucose se comporte selon les données d'insuline mesurées lors d'un IVGTT. C'est un modèle de compartiment divisé en deux parties. La

## 1.4 Modélisation Mathématique En Diabétologie

première partie est la partie principale décrivant la clairance et l'absorption du glucose. La deuxième partie décrit le retard dans l'insuline active I2 qui est un interacteur à distance dont le niveau affecte l'absorption de glucose par les tissus et l'absorption et la production par le foie. Ces deux parties sont décrites mathématiquement par deux équations différentielles pour  $t \geq 0$  à savoir [6] :

$$\frac{\partial G(t)}{\partial t} = -(p_1 + X(t))G(t) + p_1G_b, \quad G(0) = G_0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial X(t)}{\partial t} = -p_2X(t) + p_3(I(t) - I_b), \quad X(0) = X_0 \quad (1.3)$$

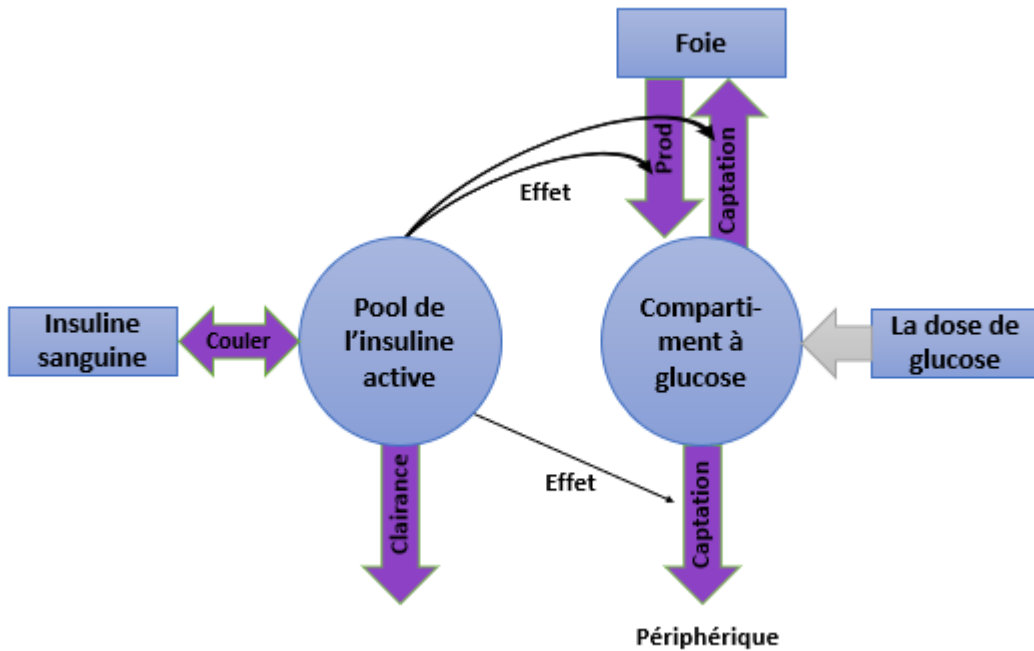


FIGURE 1.1 – Représentation graphique du modèle de glucose minimal.

Dans la première équation, la perte du glucose par son utilisation dans le corps est  $p_1(G(t) - G_b)$ , sa perte grâce à la présence d'insuline active est  $-X(t)G(t)$ .

Dans la deuxième équation, la clairance de l'insuline est de taux  $-p_2X(t)$ . Aussi, l'insuline inactive se dégrade à un taux naturel si elle dépasse en quantité la valeur à l'équilibre  $I_b$ . Cette insuline inactive devient en partie de l'insuline active à un taux de  $p_3(I(t) - I_b)$  mais une partie de l'insuline active est perdue dans le mécanisme d'évacuation du glucose.

## 1.4 Modélisation Mathématique En Diabétologie

---

### Le modèle minimal de l'insuline

le modèle décrivant la cinétique du glucose comme un produit de l'entrée de données sur l'insuline a été décrit. Mais il manque une description de la cinétique de l'insuline. Bergman [1] a présenté le modèle minimal suivant de cinétique de l'insuline, représenté ici par l'équation différentielle :

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = p_6[G(t) - p_5]^+t - p_4(I(t) - I_b), \quad I(0) = I_0 \quad (1.4)$$

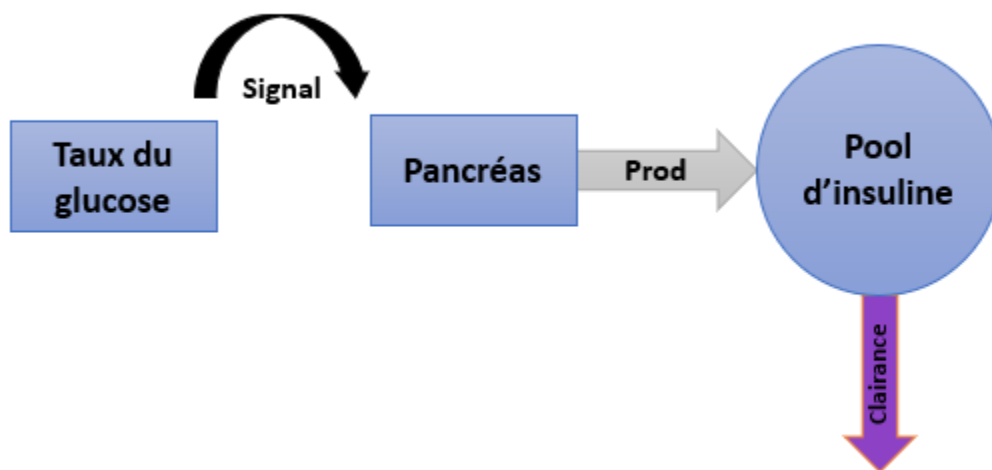


FIGURE 1.2 – Représentation graphique du modèle minimal de l'insuline.

Le pancréas est la source d'insuline. Chez une personne en bonne santé, une petite quantité d'insuline est toujours créée et effacée. Cela aide à maintenir la concentration basale  $I_b$ . La production indépendante du glucose et la clairance de l'insuline sont proportionnelles à la concentration d'insuline dans le sang. Si le niveau d'insuline est supérieur à la concentration basale, la clairance augmente, si le niveau d'insuline est inférieur à la concentration basale la production basale augmente. Lorsque le taux de glucose devient élevé, le pancréas réagit en libérant plus d'insuline à un certain rythme. Pour expliquer cela mathématiquement, il faut dériver une fonction mathématique décrivant la réaction du pancréas. Cette fonction est dérivée par Bergman et al. et ajusté par Gaetano et coll. [1] [6] pour devenir :

$$Pancréas(t) = [G(t) - p_5]^+t \quad (1.5)$$

## 1.4 Modélisation Mathématique En Diabétologie

où  $[G(t) - p_5]^+$  est un terme qui vaut  $G(t) - p_5$  lorsqu'il est positif et 0 lorsqu'il est négatif. Alors  $p_5$  est la limite qui décide quand le pancréas doit produire plus d'insuline et quand arrêter. Et la différence entre  $G(t) - p_5$  détermine combien il devrait produire. L'inconvénient de cette fonction est qu'elle est très attachée au IVGTT. La multiplication par  $t$  est décrite par Gaetano et al. [6] comme causé par la réponse du pancréas étant proportionnelle non seulement à l'hyperglycémie atteinte mais aussi au temps écoulé depuis la glycémie stimulus.

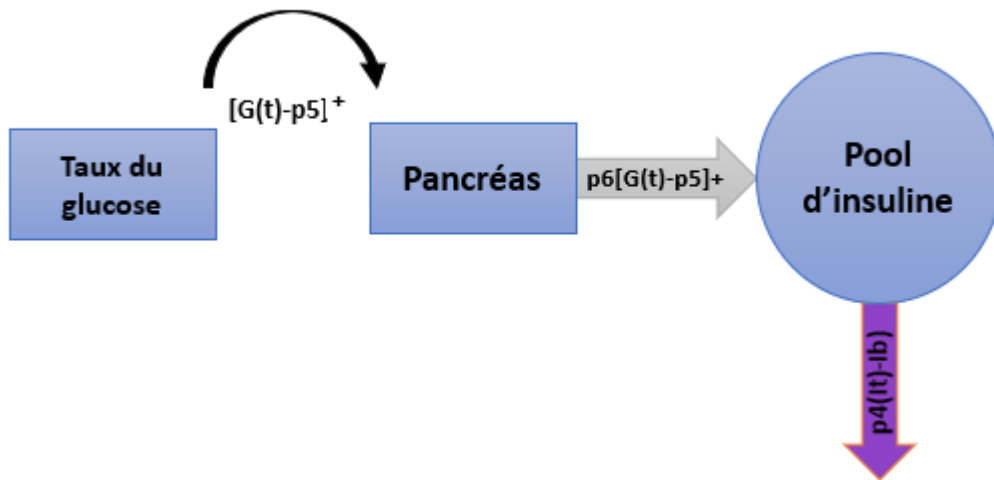


FIGURE 1.3 – Représentation graphique du modèle minimal de l'insuline.

### Le Modèle

Le premier couplage proposé est un couplage entre les modèles minimaux originaux, sans ajouts et/ou modifications. Désormais ce modèle couplé, sera appelé le modèle original.

Le modèle est représenté par :

$$\begin{cases} \frac{\partial G(t)}{\partial t} = -(p_1 + X(t))G(t) + p_1 G_b, & G(0) = G_0 \\ \frac{\partial X(t)}{\partial t} = -p_2 X(t) + p_3 (I(t) - I_b), & X(0) = X_0 \\ \frac{\partial I(t)}{\partial t} = p_6 [G(t) - p_5]^+ t - p_4 (I(t) - I_b), & I(0) = I_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

avec les paramètres :

## 1.4 Modélisation Mathématique En Diabétologie

Paramètres	unité	description
$G(t)$	[mg/dL]	La concentration du glucose dans le sang en fonction du temps $t$ .
$X(t)$	[1/min]	représentant l'activité des cellules excitable par l'insuline dans l'absorption du glucose.
$I(t)$	[mU/L]	La concentration de l'insuline en fonction du temps $t$ .
$G_b$	[mg/dL]	La glycémie.
$I_b$	[mU/L]	L'insulinémie de base du sujet.
$p_1$	[1/min]	assimilation des glucides.
$p_2$	[L / (min <sup>2</sup> mU)]	sensibilité à l'insuline.
$p_3$	[1/min]	Augmentation de la capacité d'absorption causée par l'insuline.
$p_4$	[1/min]	Taux de décroissance de l'insuline dans le sang.
$p_5$	[mg/dL]	Le niveau du glucose cible.
$p_6$	[ $\frac{mUdL}{Lmgmin}$ ]	Taux du sécrétion du pancréas après un bolus de glucose.

Le modèle est adapté pour simuler différents tests IVGTT, pour les personnes sains et pour les personnes résistants au glucose (diabétiques de type 2). Les études de Gaetano et al. ont montré qu'un couplage entre ces modèles minimaux originaux, ne permet pas un état stationnaire pour  $p_5 < G_b$ , car en régime permanent  $\frac{dG(t)}{dt} = \frac{dX(t)}{dt} = \frac{dI(t)}{dt} = 0$ . Ceci n'est possible que lorsque  $G(t) = G_b, X(t) = 0$  et  $I(t) = I_b$ . Mais pour  $p_5 < G_b$  le terme  $p_6[G_b - p_5]^+ > 0$  Cela signifie qu'un état (d'équilibre) ne peut pas être atteint. Outre ce problème, ce couplage a également adopté le problème avec le modèle de glucose minimal.

Sans diminuer l'importance du Modèle Minimal dans le domaine de la recherche physiologique, un nombre de scientifiques ont souligné quelques inconvénients de ce modèle qui peuvent provoquer dans certains cas des résultats non réalistes (solution non borné) [[8], [12]].

### Modèle Modifié

Le deuxième couplage proposé est qui est un couplage entre les modèles minimaux avec modifications et ajouts. Ce modèle couplé sera appelé le modèle modifié.

Ce modèle contient les équations différentielles suivantes :

## 1.4 Modélisation Mathématique En Diabétologie

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x}(t) = -(p_1 + X(t))G(t) + p_1G_b + D(t), & G(0) = G_0 \\ \frac{\partial X}{\partial x}(t) = -p_2X(t) + p_3(I(t) - I(b)), & X(0) = X_0 \\ \frac{\partial I}{\partial x}(t) = -p_4I(t) + \frac{U(t)}{V_I}, & I(0) = I_0 \\ \frac{\partial D}{\partial x}(t) = -drate.D(t), & D(0) = D_0 \\ \frac{\partial G_{sc}}{\partial x}(t) = -\frac{G(t)-G_{sc}(t)}{5} - R_{utln}. & G_{sc}(0) = G_0 - R_{utln} \end{cases}$$

Paramètres	unité	description
G(t)	[mg/dL ]	La concentration du glucose dans le sang en fonction du temps t.
X(t)	[1/ min]	représentant l'activité des cellules excitable par l'insuline dans l'absorption du glucose.
I(t)	[mU/L]	La concentration de l'insuline en fonction du temps t.
D (t)	[mg=dL/ min]	La fonction de perturbation du déjeuner
$G_{sc}(t)$	[mg/dL]	La concentration du glucose sous-cutané
U (t)	[mu/ min]	Insuline exogène
$G_b$	[ mg/dL]	La glycémie.
$I_b$	[mU/L]	L'insulinémie de base du sujet.
$V_I$	[L]	Volume de la piscine de distribution d'insuline .
$p_1$	[1/min]	Taux de clairance du glucose indépendant de l'insuline.
$p_2$	[1/ min]	Taux de clairance de l'insuline actif
$p_3$	[1/ min]	Augmentation de la capacité d'absorption causée par l'insuline.
$p_4$	[1/ min]	Taux de décroissance de l'insuline dans le sang.
drate	[1/ min]	Taux de décroissance de la perturbation de repas.

Ce modèle pourrait être utilisé pour simuler le système glucose-insuline pour un type 1 diabétique sous traitement. Le modèle n'est pas attaché à un seul type de test. ainsi il a plus de possibilités concernant les simulations de perturbation des repas et l'insuline injections. Il peut être utilisé pour tester des modèles de contrôleurs prédictifs [11]. Et ça pourrait en faire un outil dans la recherche d'un pancréas artificiel. Ce modèle aussi adopte le problème avec le modèle de glucose minimal.

### 1.4.3 Le modèle de Derouich et Boutayeb

Une activité physique régulière est indiquée soit pour prévenir et retarder l'apparition du diabète non insulino-dépendant, soit pour assurer un bon contrôle du diabète en augmentant la sensibilité à l'insuline et en améliorant le métabolisme de disparition du glucose pour cela le modèle qui a été proposé par Derouich et Boutayeb [7] est utilisé pour illustrer le rôle

## 1.5 Autres approches

---

de l'activité physique dans l'amélioration de la sensibilité à l'insuline et la régulation de la glycémie.

le modèle se présente comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial G(t)}{\partial t} = -(1 + q_2)X(t)G(t) + (p_1 + q_1)(G_b - G(t)), & G(0) = G_0 \\ \frac{\partial X(t)}{\partial t} = -p_2X(t) + (p_3 + q_3)(I(t) - I_b), & X(0) = X_0 \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  sont des paramètres liés à l'activité physique et définis comme suit :

- $q_1$  : l'effet de l'exercice physique sur l'accélération de l'utilisation du glucose par les muscles et le foie.
- $q_2$  : l'effet de l'exercice physique sur l'augmentation de la sensibilité musculaire et hépatique à l'action de l'insuline.
- $q_3$  : l'effet de l'exercice physique sur l'augmentation de l'utilisation de l'insuline.

## 1.5 Autres approches

Sans négliger l'apport indéniable du modèle minimal dans le domaine de la recherche physiologique, un nombre de scientifiques ont souligné quelques inconvénients de ce modèle qui peuvent entraîner dans certains cas des résultats irréalistes (solution non borné).

Ces remarques ont été prises en compte pour la création d'autres modèles tel que le modèle dynamique qui suppose que le glucose contrôle le taux de production d'insuline du pancréas, et que l'insuline contrôle le taux d'absorption de glucose par le foie et les muscles.

Le modèle pour le taux de glucose est

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t}(t) &= -(\text{perte de glucose vers les tissus}) - (\text{perte de glucose par l'insuline}) \\ &\quad + (\text{contribution constante du glucose du foie}) \\ &= -b_1G(t) - b_2G(t)I(t) + b_3 \end{aligned}$$

Le modèle pour le taux d'insuline est

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t}(t) &= -(\text{catabolisme (i.e. absorption) de l'insuline}) + (\text{production de l'insuline}) \\ &\quad \text{en fonction de la valeur moyenne de glucose)} \\ &= -b_4I + \frac{b_5}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t G(s)ds \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} G(t) = G_b, \forall t \in [-\Delta t, 0] \\ I(0) = I_b. \end{cases} \quad (1.8)$$

où  $b_1, \dots, b_5, \Delta t$  sont des constantes.

## 1.6 Buts de la modélisation de la dynamique de l'insuline-glucose

La modélisation de la dynamique de l'insuline-glucose vise à comprendre et à prédire les variations de la concentration de glucose et d'insuline dans le corps humain. Les principaux objectifs de cette modélisation sont les suivants :

1. Compréhension du mécanisme : La modélisation permet d'approfondir notre compréhension des mécanismes sous-jacents qui régulent la glycémie et la sécrétion d'insuline. En modélisant les interactions complexes entre le glucose, l'insuline et d'autres facteurs, nous pouvons identifier les variables clés et les relations entre elles.

2. Prédiction des réponses : En utilisant des modèles mathématiques, il est possible de prédire les réponses du système glucose-insuline à différentes conditions, telles que des repas, de l'exercice physique ou des médicaments. Ces prédictions peuvent aider à comprendre comment les interventions peuvent influencer la glycémie et l'insulinémie, ce qui peut être utile pour optimiser les traitements du diabète ou pour concevoir de nouvelles stratégies de gestion.

3. Développement de thérapies : La modélisation peut contribuer au développement de nouvelles thérapies pour les troubles liés à la régulation du glucose et de l'insuline. Par exemple, en utilisant des modèles, il est possible de simuler l'effet de médicaments potentiels ou de nouvelles approches de traitement pour évaluer leur efficacité et leur sécurité.

4. Prise de décision clinique : Les modèles de la dynamique de l'insuline-glucose peuvent également être utilisés comme outils d'aide à la décision clinique. Ils permettent d'estimer les réponses individuelles aux différents traitements et aident les professionnels de la santé à prendre des décisions éclairées sur les doses d'insuline, les ajustements alimentaires ou l'utilisation de médicaments.

## 1.7 Conclusion

Le rôle de la modélisation mathématique en médecine a évolué au cours des dernières décennies. La diabétologie en est un exemple concret. La contribution des mathématiques dans le domaine de la santé pourrait être plus bénéfique, mais cela ne pourra être réalisé qu'avec une étroite collaboration des mathématiciens avec les experts cliniciens et biologistes du phénomène étudié.

---

## CHAPITRE 2

# INTRODUCTION AU CONTRÔLE OPTIMAL

### 2.1 Introduction

Le contrôle optimal est un domaine de l'ingénierie et des mathématiques qui vise à trouver la meilleure façon de gérer un système dynamique en tenant compte de divers objectifs et contraintes. Il s'agit d'une approche mathématique qui permet d'optimiser les performances d'un système en ajustant les variables de contrôle de manière optimale. La théorie du contrôle optimal analyse les propriétés des systèmes commandés c'est à dire des systèmes sur les quelles on peut agir au moyen d'une commande.

Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant certains critères ; les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, systèmes avec retard, etc. Leurs origines sont très diverses : mécanique, électrique, électronique, biologique, chimique, économique, etc.

Ce chapitre est dédié à l'analyse d'un problème de contrôle optimal en dimension finie, autrement dit mettant en jeu les solutions des systèmes différentiels. L'obtention de conditions d'optimalité pour ce type de problème repose sur le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) en traitant quelques notions de contrôlabilité.

### 2.2 Théorie du contrôle

La formulation d'un problème de contrôle optimal exige une description mathématique suffisamment réaliste du processus à contrôler. Après modélisation, on obtient un système comportant beaucoup de variables et de paramètres. Les variables nommées variables d'état

## 2.2 Théorie du contrôle

---

seront notées  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , si le système évolue dans le temps, les variables seront notées  $x_i(t)$ ,  $i = 1 \dots n$  où  $t$  désigne le temps défini dans un intervalle  $[0, T]$ . Les  $n$  variables  $x_i(t)$  seront gouvernées par  $n$  équations différentielles du premier ordre, elles sont sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(t, x, u),$$

où  $f$  est un vecteur de  $n$  composantes  $f_i$ ,  $i = 1 \dots n$ .  $f$  peut être linéaire ou non linéaire.

**Définition 2.1.** *Un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé contrôle.*

### 2.2.1 Commandes Admissibles

Les commandes admissibles peuvent être non bornée, bornée ou de type bang-bang.

#### Commande bornée

On peut minorer et majorer les commandes  $u_i(t)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , par des constantes. Considérons pour ce type de problème la contrainte  $a_i \leq u_i \leq b_i$ . Lorsque  $u$  est bornée, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et 1.

**Commande bang-bang** Une commande  $u \in \mathbb{R}^n$  est appelé contrôle bang-bang si pour chaque instant  $t$  et chaque indice  $i = 1, \dots, m$ , on a  $|u_i(t)| = 1$ . En d'autres termes, une commande bang-bang est une commande qui bascule brusquement entre deux valeurs et qui possède au moins un instant de commutation.

### 2.2.2 Problème de Cauchy

Le problème de Cauchy (aussi appelé problème aux valeurs initiales) consiste à trouver la solution d'une EDO (équation différentielle ordinaire), scalaire ou vectorielle, satisfaisant des conditions initiales. Soit  $I_0$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant le point  $t_0$ ; on se donne une fonction  $f$  définie et continue sur  $I_0 \times \mathbb{R}^m$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ ; ainsi qu'un élément  $y_0$  de  $\mathbb{R}^m$ ; le problème de Cauchy associé à une équation différentielle ordinaire (EDO) du premier ordre s'écrit :

Déterminer une fonction  $y$  continue et dérivable sur l'intervalle  $I_0$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ , telle que

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)); t \in I_0, \tag{2.1}$$

## 2.2 Théorie du contrôle

---

$$y(t_0) = y_0, \quad (2.2)$$

la condition (2.2) s'appelle la condition initiale. Une fonction  $y$  qui vérifie les équations (2.1),(2.2) est appelée une intégrale du système différentiel (2.1),(2.2). Nous nous intéresserons plus particulièrement au cas où  $I_0$  est de la forme  $[t_0, T]$ ; les cas où  $I_0$  est de la forme  $[t_0, T[$  ou  $[t_0, +\infty[$  se traiteraient de même.

Dans de nombreux exemples physiques, la variable  $t$  représente le temps; l'instant  $t_0$  est alors appelé instant initial.

### 2.2.3 Théorème d'existence

**Théorème 2.1 (Cauchy-Péano).** [5] *On suppose que la fonction  $f$  est continue dans un voisinage du point  $(t_0, y_0)$  dans  $I_0 \times \mathbb{R}^m$ ; alors il existe un intervalle  $J_0 \subset I_0$ , au voisinage de  $t_0$  et une fonction  $y \in C^1(J_0)$  tels que*

$$\forall t \in J_0, y'(t) = f(t, y(t)), y(t_0) = y_0.$$

**Définition 2.2.** *On appelle solution locale du problème (2.1),(2.2) la donnée d'un couple  $(I, y)$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  inclus dans  $I_0$  et où  $y$  est une fonction appartenant à  $C^1(I)$  telle que*

$$y(t_0) = y_0 \text{ et } \forall t \in I, y'(t) = f(t, y(t))$$

**Définition 2.3.** *On dit que la solution locale  $(J, z)$  prolonge la solution locale  $(I, y)$  si on a  $I \subset J$ , et  $\forall t \in I; y(t) = z(t)$ ; si de plus  $I \neq J$ , on dit que  $(J, z)$  prolonge strictement  $(I, y)$ .*

**Définition 2.4.** *On dit que la solution locale  $(I, y)$  est une solution maximale du problème (2.1),(2.2) s'il n'existe pas de solution locale de ce problème qui la prolonge strictement.*

**Définition 2.5.** *On dit que  $(I_0, y)$  est une solution globale du problème (2.1),(2.2) dans  $I$ , (ou encore que  $y$  est solution du problème (2.1),(2.2)), si  $(I_0, y)$  est une solution locale de ce problème, et  $I_0 = I$ .*

### 2.2.4 Théorème d'unicité

**Définition 2.6.** *On dira que le problème (2.1),(2.2) admet une solution et une seule, s'il admet une solution globale et si toute solution locale est la restriction de cette solution globale.*

## 2.2 Théorie du contrôle

---

**Théorème 2.2.** [5] *On suppose que  $I_0$  est de la forme  $[t_0, T]$  ou  $[t_0, T[$  ou  $[t_0, +\infty[$ , de plus  $f$  est continue sur  $I_0 \times \mathbb{R}^m$  et qu'il existe une fonction  $l \in \xi(I_0)$  telle que*

$$\forall t \in I_0, \forall y, z \in \mathbb{R}^m, (f(t, y) - f(t, z), y - z) \leq l(t) |y - z|^2, \quad (2.3)$$

*alors le problème (2.1), (2.2) admet une solution et une seule.*

Dans le Théorème 2.2,  $\xi(I_0)$  est un espace vectoriel normé des fonctions réelles mesurables sur  $I_0$  telle que :

$$\|f\| = \int_{I_0} |f(x)| dx < +\infty$$

Une conséquence immédiate du Théorème 2.2 est le résultat suivant :

**Corollaire 2.1** (Cauchy-Lipschitz). [5] *On suppose que la fonction  $f$  est continue sur  $I_0 \times \mathbb{R}^m$  et qu'il existe un réel  $L$  tel que*

$$\forall (t, y) \text{ et } (t, z) \in I_0 \times \mathbb{R}^m, |f(t, y) - f(t, z), y - z| \leq L |y - z|^2,$$

*alors le problème (2.1), (2.2) admet une solution et une seule.*

**Exemple 2.1.** Montrer que le problème de Cauchy :

$$y'(t) = 3y(t)^{\frac{2}{3}}, y(0) = 0 \quad (2.4)$$

admet une infinité de solutions. Pourquoi il n'y a pas unicité de la solution ? Et si l'on choisit une condition initiale  $y_0 \neq 0$  ?

**Solution** Une solution triviale est la fonction  $y(t) = 0$ . En supposant  $y(t) \neq 0$ , on intègre l'EDO :

$$\frac{1}{3} \int_{t_0}^t y'(t) y(t)^{-\frac{2}{3}} dt = \int_{t_0}^t dt, \quad (2.5)$$

$$y(t) = t^3 \quad (2.6)$$

Cette fonction est aussi solution du problème de Cauchy. A partir de  $y(t) = t^3$  on peut construire une infinité de solutions du problème de Cauchy. Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < 0 < b$  la fonction :

$$y(t) = \begin{cases} (t - a)^3, & t < a \\ (t - b)^3, & t > b \\ 0, & a \leq t \leq b \end{cases} \quad (2.7)$$

est solution du problème de Cauchy. Il n'y a pas unicité de la solution parce que la fonction  $y \rightarrow f(y) = y^{-\frac{2}{3}}$  n'est pas lipschitzienne au voisinage de  $y = 0$ . Sa dérivée  $y \rightarrow f'(y) = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$  tend vers  $\infty$  lorsque  $y \rightarrow 0$ . Ainsi on ne peut pas évoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Si  $y \neq 0$  la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  et le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution locale.

### 2.3 Application en théorie du contrôle

#### 2.3.1 systèmes de contrôle linéaires

Considérons le système de contrôle linéaire

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), x(0) = x_0, \forall t \in I \quad (2.8)$$

Les hypothèses du **théorème 2.2** sont clairement vérifiées si les applications  $t \rightarrow A(t), B(t), u(t)$ , sont localement intégrables sur l'intervalle  $I$  considéré. Supposons donc

- $A(\cdot) \in L^1_{Loc}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ ,

Par ailleurs, les hypothèses assurant l'intégrabilité locale de  $B(\cdot)u(\cdot)$  dépendent de l'ensemble des contrôles considérés.

- Si  $u(\cdot) \in L^\infty_{Loc}(I, \mathbb{R}^m)$ , alors on suppose que  $B(\cdot) \in L^1_{Loc}(I, \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$ .

- Si  $u(\cdot) \in L^2_{Loc}(I, \mathbb{R}^m)$ , alors on suppose que  $B(\cdot) \in L^2_{Loc}(I, \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$ .

- De manière générale, si  $u(\cdot) \in L^p_{Loc}(I, \mathbb{R}^m)$ , alors on suppose que  $B(\cdot) \in L^q_{Loc}(I, \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$  où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

- Si les contrôles sont des fonctions mesurables à valeurs dans un compact  $\Omega \in \mathbb{R}^m$ , alors on suppose que  $B(\cdot) \in L^1_{Loc}(I, \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$ .

#### 2.3.2 Cas général :

Considérons le système de contrôle

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $f$  est une fonction de  $I \times V \times U$ ,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$

On peut donner des hypothèses certes moins générales, mais qui suffisent dans la grande majorité des cas. Ces hypothèses sont les suivantes :

- L'ensemble des contrôles considérés est inclus dans  $L^1_{Loc}(I, \mathbb{R}^m)$ .

- La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I \times V \times U$

Il est facile de montrer qu'alors les hypothèses du **théorème 2.2** sont vérifiées, et donc que, pour chaque contrôle fixé, il existe une unique solution maximale  $(J, x(\cdot))$  du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ p.p. sur } J \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

## 2.4 Contrôle optimal

### 2.4.1 Position du problème

La formulation d'un problème de contrôle optimal est la suivante :

$$\begin{cases} J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt \rightarrow \min_u, & (1) \\ \dot{x} = f(t, x(t), u(t)), & (2) \\ x(0) = x_0 \in M_0, & (3) \\ x(T) = x_1 \in M_1, & (4) \\ u \in U, t \in I = [0, T] & (5) \end{cases} \quad (2.10)$$

où  $M_0$ , et  $M_1$  sont deux variétés de  $\mathbb{R}^n$ ,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 = x(0)$  est la position initiale du système (2),  $x(T)$  est sa position terminale (finale). En pratique, la position du système peut représenter la vitesse, la position, la température, etc.  $u(\cdot)$  est la commande du système (2.10).  $U$  est l'ensemble des applications mesurables, localement bornées sur  $I$  à valeurs dans un compact  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

$$J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt$$

est appelé coût, critère de qualité ou but du problème (2.10). Cette fonctionnelle a deux parties :  $g(T, x(T))$  est le coût terminal, c'est une sorte de pénalité liée à la fin de l'évolution du système au temps final  $T$ . Il a son importance lorsque  $T$  est libre, sinon il est constant.  $\int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt$  appelé coût intégral, dépend de l'état du système tout au long de la trajectoire de la solution, définie par les variables d'état. Elle dépend aussi du temps  $t$  mais surtout des variables de contrôle  $u$ .

On distingue deux critères physiques de performance :

#### Temps optimal

On parle d'un problème en temps minimal lorsque  $f^0(t, x(t), u(t)) = 1$ ,  $g(T, x(T)) = 0$  et le temps final  $T$  est libre dans l'expression :

$$\min_T \int_0^T dt$$

## 2.4 Contrôle optimal

---

### Coût optimal

On parle d'un problème en coût minimal lorsque le temps final  $T$  est fixé dans l'expression :

$$\min_{u \in U} J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt$$

Évidemment, il existe des problèmes qui combinent les deux critères de qualité précédents, et on parlera dans ce cas d'un problème de contrôle en temps et en coût minimal.

On distingue généralement trois types de problèmes de contrôle optimal :

### Problème de Lagrange

Un problème de contrôle optimal est dit de Lagrange si le système dynamique est :

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0$$

où les contrôles  $u(\cdot)$  sont des fonctions définies de  $[0, T]$  dans  $U \subset \mathbb{R}^n$ , et la fonction coût  $F : \mathbb{R}^n \times U \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , est comme suit :

$$\min_{u \in U} J(T, u) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt$$

avec  $x(0) = x_0$  est un état initial donné. Le temps initial  $t_0=0$  et le temps final  $T$  peuvent être considérés comme fixe ou libre dans le problème d'optimisation .

### Problème de Mayer

Ici c'est le problème dont le critère est le suivant :

$$\begin{cases} g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ J(T, u) = g(T, x(T)) \end{cases}$$

c'est à dire  $f^0 = 0$ ,  $J(T, u)$  est le coût terminal.

### Problème de Bolza

Il regroupe les deux précédentes formulations (Lagrange et Mayer).

En introduisant le coût dans le problème précédent on aura :

$$J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt$$

## 2.4 Contrôle optimal

---

et où le temps final  $T$  n'est pas fixé. Soit  $M_1$  une variété de  $\mathbb{R}^n$ . Le problème de contrôle optimal est alors de déterminer une trajectoire solution de :

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0$$

où les contrôles  $u(\cdot)$  sont dans l'ensemble  $U$  des contrôles admissibles, tel que  $x(T) \in M_1$ , et de plus  $x(\cdot)$  minimise sur  $[0, T]$  le coût.

L'unicité de la solution du système (2) - (4) est assurée par le théorème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles. Soit  $x(\cdot)$  la solution de l'équation (2) du système (2.10).  $x(\cdot)$  varie en fonction du contrôle  $u$ .

**Remarque 2.1.** Les formes de Mayer, Lagrange et Bolza sont théoriquement équivalents :

- On peut toujours ramener le problème de Lagrange à un problème de Mayer en introduisant une variable d'état supplémentaire  $x_0$ ; et une équation différentielle supplémentaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_0(t, x(t), u(t)), \\ x_0(t_0) = 0, t \in I = [0, T] \end{cases}$$

On obtient ainsi un nouveau vecteur d'état  $\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ . La fonctionnelle coût s'écrit alors sous la forme de Mayer en posant  $F(t_0, \tilde{x}(t_0), t_f, \tilde{x}(t_f)) = x_0(t_f)$ .

- Inversement, le problème de Mayer peut être réduit à un problème de Lagrange en introduisant une variable d'état supplémentaire  $x_0$ , un nouveau vecteur d'état  $\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ , et une nouvelle équation différentielle

$$\dot{x} = 0; x_0(t_0) = \frac{1}{t_f - t_0} F(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)).$$

Ainsi, la fonctionnelle coût peut être réécrite à la forme de Lagrange avec  $f_0(t, \tilde{x}, u) = x_0(t)$ .

**Le problème du contrôle optimal consiste à déterminer une trajectoire reliant  $M_0$  à  $M_1$  de sorte à minimiser ou maximiser le coût, Avant de résoudre ce problème de contrôle optimal, deux questions se posent alors naturellement :**

**Question 1 :** Étant donné un point  $x_1$  dans  $\mathbb{R}^n$ , existe-t-il un contrôle  $u$  tel que la trajectoire associée à ce contrôle joigne  $x_0$  à  $x_1$  en un temps fini  $T$  ?

## 2.5 Contrôlabilité

---

**Question 2 :** Si la condition précédente est remplie, existe-t-il un contrôle joignant  $x_0$  à  $x_1$ , et qui de plus minimise une certaine fonctionnelle  $C(u)$  ?

L'objectif d'un problème de contrôle est d'amener le système d'un état initial donné à un état final tout en respectant certaines contraintes. Plus précisément on lance la définition suivante :

## 2.5 Contrôlabilité

La notion de contrôlabilité a été introduite en 1960 par Kalman [9] pour des systèmes linéaires de la forme  $\dot{x} = Ax + Bu$ . Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus compliqué. Il constitue un domaine de recherche actif.

**Définition 2.7.** *le système  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ ,  $x(0) = x_0$  est dit contrôlable si pour tous points  $x_0$  appartient à  $M_0$  et  $x_1$  appartient à  $M_1$ , il existe une commande  $u(\cdot)$  qui relie les points  $x_0$  et  $x_1$  en un temps fini.*

**Définition 2.8.** *On appelle trajectoire admissible du système  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ ,  $x(0) = x_0$  toute fonction  $t \rightarrow (x(t))$  qui satisfait sur un intervalle non vide  $I$  de  $\mathbb{R}$  les équation du système.*

### Ensemble accessible

Considérons le système dynamique suivant :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0, t \in I = [0, T]$$

**Définition 2.9.** *L'ensemble des points accessibles à partir de  $x_0$  en temps  $T$  (voir figure (2.1)) est défini par :*

$$Acc(x_0, T) = \{x_u(T), u \in U\}$$

*$Acc(x_0, T)$  est compact, convexe et varie continûment avec  $t$  sur  $[0, T]$ .*

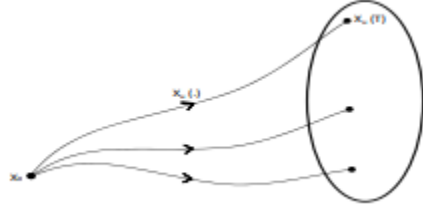


FIGURE 2.1 – Ensemble accessible

### 2.5.1 Existence de trajectoires optimales

**Théorème 2.3.** Si le point  $x_1$  est accessible depuis  $x_0$  alors il existe une trajectoire temps-minimales reliant  $x_0$  à  $x_1$

**Théorème 2.4.** [13] *Le théorème suivant garantie l'existence de trajectoires optimales pour le problème de Mayer-Lagrange :*

*Considérons le système de contrôle*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

*où  $f$  est  $C^1$  de  $\mathbb{R}^{1+n+m}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , les contrôles  $u$  sont à valeurs dans un compact  $\Omega$  sur  $\mathbb{R}^m$ , et où éventuellement on a des contraintes sur l'état*

$$c_1(x) \leq 0, \dots, c_r(x) \leq 0,$$

*où  $c_1, \dots, c_r$  sont des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $M_0$  et  $M_1$  deux compacts de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $M_1$  est accessible depuis  $M_0$ . Soit  $U$  l'ensemble des contrôles à valeurs dans  $\Omega$  joignant  $M_0$  à  $M_1$ . Soient  $f^0$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{1+n+m}$ , et  $g$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}^n$ . On considère le coût*

$$C(u) = \int_0^{t(u)} f^0(t, x(t), u(t)) dt + g(t(u), x(t(u))),$$

*où  $t(u) \geq 0$  est tel que  $x(t(u)) \in M_1$ . On suppose que*

- *il existe un réel positif  $b$  tel que toute trajectoire associée à un contrôle  $u \in U$  est uniformément bornée par  $b$  sur  $[0, t(u)]$ , ainsi que le temps  $t(u)$ , i.e. ,*

$$\exists b > 0 \mid \forall u \in U \quad \forall t \in [0, t(u)] \quad t(u) + \|x_u(t)\| \leq b, \quad (2.11)$$

- *pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n+m}$ , l'ensemble*

$$\tilde{V}(t, x) = \left\{ f^0(t, x, u) + \gamma, f(t, x, u) \mid u \in \Omega, \gamma \geq 0 \right\} \quad (2.12)$$

*est convexe.*

## 2.5 Contrôlabilité

---

Alors il existe un contrôle optimal  $u$  sur  $[0, t(u)]$  tel que la trajectoire associée joint  $M_0$  à  $M_1$  en temps  $t(u)$  et en coût minimal.

**Définition 2.10.** Le système (2) est dit contrôlable en temps  $T$  si

$$Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n$$

Il est dit contrôlable en temps quelconque  $t$  depuis  $x_0$  si

$$\mathbb{R}^n = \cup_{T \geq 0} Acc(x_0, T)$$

### 2.5.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Le système de contrôle linéaire auquel on s'intéresse est

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), x(0) = x_0, \forall t \in I \quad (2.13)$$

où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $A$  et  $B$  sont deux applications localement intégrables sur  $I$  à valeurs respectivement dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ , où  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices réelles de dimension  $n$ , et  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices de  $n$  lignes et de  $m$  colonnes.

où l'ensemble des contrôles  $u$  considéré est l'ensemble des applications mesurables et localement bornées sur  $I$ , à valeurs dans le sous-ensemble  $U \subset \mathbb{R}^n$ .

Les théorèmes d'existence (Cauchy lipschitz) de solutions d'équations différentielles (2.13)

nous assurent que, pour tout contrôle  $u$ , le système (2.13) admet une unique solution

$x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , absolument continue. Soit  $M(\cdot) : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la résolvante du système linéaire homogène  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ , définie par  $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$ ,  $M(0) = \text{Id}$ . Notons que si

$A(t) = A$  est constante sur  $I$ , alors  $M(t) = e^{tA}$ . Alors, la solution  $x(\cdot)$  du système (2.13) associée au contrôle  $u$  est donnée par :

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}B(s)u(s)ds, t \in I = [0, T], x(0) = x_0$$

**Remarque 2.2.** Cette application dépend de  $u$ . Donc si on change la fonction  $u$ , on obtient une autre trajectoire  $t \rightarrow x(t)$  dans  $\mathbb{R}^n$  (voir figure (2.2)).

#### Systèmes linéaires autonomes

Le système  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$  est dit autonome (stationnaire) lorsque les matrices  $A$  et  $B$  ne dépendent pas de  $t$ , c'est à dire  $A(t) = A$ ,  $B(t) = B$  sont des constantes sur  $I$ , alors  $M(t) = e^{At}$  est la solution du système associée au contrôle s'écrit pour  $t \in I$

$$x(t) = e^{tA}(x_0 + \int_0^t e^{-sA}(B(s)u(s))ds)$$

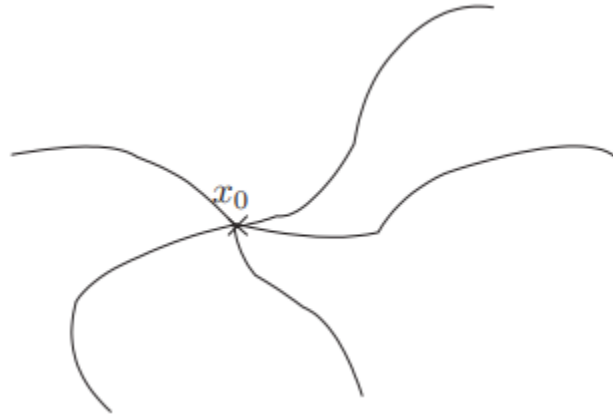


FIGURE 2.2

**Théorème 2.5.** [13] *Le système autonome*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), t \in I = [0, T]$$

*est dit contrôlable si la matrice*

$$K = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

*est de rang  $n$ .*

*La matrice  $K$  est appelée matrice de Kalman, et la condition  $\text{rg } K = n$  est appelée condition de Kalman.*

**Remarque 2.3.** *La condition de Kalman ne dépend ni de  $T$  ni de  $x_0$ . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps  $T$  depuis  $x_0$ , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.*

**Exemple 2.2.**

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = Ax + Bu$$

*est contrôlable car la matrice de Kalman*

$$K = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*est de rang  $n=2$*

## 2.5 Contrôlabilité

---

### Systèmes linéaires non autonomes

**Théorème 2.6.** [13] *Le système  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$  est contrôlable en temps  $T$  si et seulement si la matrice*

$$K(T) = \int_0^T M(t)^{-1} B(t) B(t)^T M(t)^{-1T} dt$$

*dite matrice de contrôlabilité, est inversible.*

**Remarque 2.4.** *Cette condition dépend de  $T$ , mais ne dépend pas du point initial  $x_0$ . Autrement dit, si un système linéaire non autonome est contrôlable en temps  $T$  depuis  $x_0$ , alors il est contrôlable en temps  $T$  depuis tout point.*

### 2.5.3 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

*Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0, u \in U, t \in I = [0, T] \end{cases} \quad (2.14)$$

*Où  $x$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  une matrice dans  $M_{n,n}(\mathbb{R})$ ,  $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , fonction non linéaire du contrôle  $u(\cdot)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  est l'état initial du système (2.14).*

Le problème de caractériser la contrôlabilité locale et globale des systèmes non linéaires est plus compliqué et fait partie des problèmes critiques du domaine de la théorie des systèmes non-linéaires du fait qu'on ne peut pas utiliser la caractérisation de Kalman.. (voir [10] pour une présentation profonde des travaux dans ce domaine). Un résultat fondamental sur la contrôlabilité d'un système non-linéaire provient d'un théorème qui énonce que si la linéarisation d'un système non-linéaire autour d'un point est contrôlable alors le système non-linéaire est lui même localement contrôlable [10].

**Propriété 2.1.** [13] *Considérons le système  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ ,  $x(0) = x_0$  avec  $f(x_0, u_0) = 0$ .*

*On note  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)$  et  $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$ , si :*

$$\text{rang}(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) = n,$$

*alors le système est localement contrôlable en  $x_0$ .*

## 2.6 Principe du maximum de Pontryagin

Pour aborder un problème de contrôle, nous utiliserons souvent la théorie du contrôle optimal, basée sur le principe du maximum de Pontryagin qui a commencé à la fin des années 1950 qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations.

Cette théorie mathématique permet de déterminer les trajectoires optimales d'un système contrôlé en l'écrivant sous forme Hamiltonienne. ainsi que les contrôles associés où il stipule que si le contrôle est optimal, il existe un vecteur adjoint  $p(t)$  et un scalaire  $p_0$  de sorte que l'on puisse définir un pseudo-Hamiltonien.

On considère le système contrôlé dans  $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (2.15)$$

où  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$  et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées à valeurs dans  $\Omega \in \mathbb{R}^m$ .

Soient  $M_0$  et  $M_1$  deux sous ensembles de  $\mathbb{R}^n$ . Notons par  $U$  l'ensemble des contrôles admissibles  $u$  dont les trajectoires associées relient un point initial de  $M_0$  à un point final de  $M_1$  en temps  $t$ .

On définit la fonctionnelle de coût

$$J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dx$$

où  $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sont de  $C^1$  et  $x(\cdot)$  est la trajectoire solution de (2.15) associée au contrôle  $u$ .

Nous introduisons certaines définitions et propriétés essentielles.

**Définition 2.11.** Le contrôle  $u$  est dit extrémal sur  $[0, T]$  si la trajectoire du système (2) du problème de contrôle (2.10) associée à  $u$  vérifie

$$x(t) \in \partial Acc(x_0, t), t \in I = [0, T].$$

**Définition 2.12.** Un contrôle  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$  est dit optimal si  $u^0(\cdot)$  est extrémal et  $J(u^0(t)) < J(u(t))$  pour tout contrôle extrémal  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$ .

**Théorème 2.7.** [13] Considérons le système

$$\forall t \in I, \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), x(0) = x_0.$$

Supposons que le domaine des contraintes noté  $\Omega$  est compact.

## 2.6 Principe du maximum de Pontryagin

---

Soit  $T > 0$ . Le contrôle  $u$  est extrémal sur  $I = [0, T]$  si et seulement si il existe une solution non triviale  $p(t)$ ,  $t \in I$ , de l'équation  $\dot{p}(t) = -p(t)A(t)$  telle que

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)B(t)v \quad (2.16)$$

pour presque tout  $t \in [0, T]$ . avec  $p(t)$  est le vecteur adjoint.

### cas particulier

Si  $\Omega \in [-a, a]$ ,  $a \in \mathbb{R}$  positif, la condition (2.10) signifie que

$$u(t) = a \operatorname{sign}(p(t)B(t))$$

on dit que  $u(t)$ ,  $t \in I$  est bang-bang.

**Définition 2.13.** Dans ce cas, la fonction  $\gamma(t) = p(t)B(t)$  est appelée fonction de commutation.

**Définition 2.14.** Le temps  $t_c$  auquel le contrôle extrémal  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$  change de signe est appelé temps de commutation.

**Théorème 2.8.** [13] Si le contrôle  $u \in U$  associé à la trajectoire  $x(\cdot)$  est optimal sur  $[0, T]$ , alors il existe une application  $p(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolument continue, appelé vecteur adjoint, et un réel  $p^0 \leq 0$  tel que le couple  $(p(\cdot), p^0)$  est non trivial et tels que pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \quad (2.17)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \quad (2.18)$$

où

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p; f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u)$$

est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur  $[0, T]$ .

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, v) \quad (2.19)$$

Si de plus le temps final pour joindre  $M_1$  n'est pas fixé, on a la condition au temps final  $T$

$$\max_{v \in U} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)). \quad (2.20)$$

Si de plus  $M_0$  et  $M_1$  (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de  $\mathbb{R}^n$  ayant des espaces tangents en  $x(0) = x_0 \in M_0$  et  $x(T) = x_1 \in M_1$ , alors le vecteur adjoint peut être

## 2.6 Principe du maximum de Pontryagin

---

construit de manière à vérifier les conditions de transversalités aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0, \quad (2.21)$$

et

$$p(T) - p_0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(T)}M_1. \quad (2.22)$$

**Remarque 2.5.** Si  $f$  et  $f^0$  ne dépendent pas du temps  $t$  c'est à dire si le système considéré est autonome, alors l'Hamiltonien  $H$  ne dépend pas de  $t$  et on a

$$\forall t \in [0, T], \max_{v \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, v) = Cste.$$

**Remarque 2.6.** La convention  $p^0 \leq 0$  conduirait au principe du maximum. La condition  $p^0 \geq 0$  conduira au principe du minimum.

**Définition 2.15.** Une extrémale du problème de contrôle optimal est un quadruplet  $(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), p^0)$  solution des équations (2.17), (2.18) et (2.19). Si  $p^0 = 0$ , on dit que l'extrémale est anormale, si  $p^0 \neq 0$ , l'extrémale est dite normale.

Plusieurs travaux ont été réalisé dans ce sens, le lecteur est orienté vers les articles [2], [3], [4].

**Remarque 2.7.** Lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle, la condition de maximisation (2.19) devient

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

**Définition 2.16.** Les conditions (2.21) et (2.22) sont appelées conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.

**Exemple 2.3.**

$$\begin{cases} J(u(t)) = \int_{-1}^1 (-2tx + 3t^3u)dt \rightarrow \max_u, \\ \dot{x} = tu, \\ x(-1) = 1, \\ 0 \leq u \leq 2, t \in [-1, 1] \end{cases} \quad (2.23)$$

L'Hamiltonien associé au problème noté  $H$  est :

De la maximisation, on pose  $p^0=1$

Donc

$$H(x, p, u, t) = p^0 f^0(x, u, t) + pf(x, u, t)$$

## 2.6 Principe du maximum de Pontryagin

---

où

$$H = -2tx + 3t^3u + ptu$$

D'après le PMP :

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = 2t$$

est équivalent à

$$p(t) = t^2 + c$$

De la condition de transversalité :  $p(1)=0$

On aura :

$$p(1)=1+c=0 \rightarrow c=-1 \text{ donc } p(t)=t^2-1$$

$$H = -2tx + 3t^3u + (t^2 - 1)tu$$

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq u \leq 2} H(x, p, u, t) &= \max_{0 \leq u \leq 2} [-2tx + 3t^3u + tu(t^2 - 1)] \\ &= -2tx + \max_{0 \leq u \leq 2} [tu(2t - 1)(2t + 1)] \\ &= -2tx + \max_{0 \leq u \leq 2} [u\Phi(t)] \end{aligned}$$

Or  $\Phi(t)=t(2t-1)(2t+1)$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi(t) \leq 0 \\ 2 & \text{si } \phi(t) \geq 0, t \in [-1, 1] \end{cases}$$

$t$	-1	-0.5	0	0.5	1		
$t$		-	0	+			
$2t - 1$	-	-	0	+			
$2t + 1$	-	0	+				
$\phi(t)$	-	0	+	0	-	0	+

On aura :

$$u^0(t) = \begin{cases} 0 & , t \in [-1, -0.5] \\ 2 & , t \in [-0.5, 0] \\ 0 & , t \in [0, 0.5] \\ 2 & , t \in [0.5, 1] \end{cases}$$

sur  $[-1, \frac{-1}{2}]$ ,  $u=0$

## 2.6 Principe du maximum de Pontryagin

---

$$\dot{x}(t) = tu \rightarrow x(t) = c \quad \text{Or} \quad x(-1) = 1 \rightarrow x(t) = 1$$

sur  $[-\frac{1}{2}, 0], u=2$

$$\dot{x}(t) = 2t \rightarrow x(t) = t^2 + c \quad \text{Par continuité} \quad x\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + c = 1 \rightarrow c = \frac{3}{4} \rightarrow x(t) = t^2 + \frac{3}{4}$$

sur  $[0, \frac{1}{2}], u=0$

$$\dot{x}(t) = 0 \rightarrow x(t) = c \quad \text{Par continuité} \quad x(0) = c = \frac{3}{4} \rightarrow x(t) = \frac{3}{4}$$

sur  $[\frac{1}{2}, 1], u=2$

$$\dot{x}(t) = 2t \rightarrow x(t) = t^2 + c \quad \text{Par continuité} \quad x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + c = \frac{3}{4} \rightarrow c = \frac{1}{2} \rightarrow x(t) = t^2 + \frac{1}{2}$$

Calculons

$$J(u^0(t)) = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} -2t dt + \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left(-2t\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) + 6t^3\right) dt + \int_0^{\frac{1}{2}} -2t \frac{3}{4} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-2t\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) + 6t^3\right) dt$$

## 2.7 Méthodes numériques en contrôle optimal

Les problèmes de contrôle optimal sont en général non linéaires, par conséquent, la détermination d'une solution analytique n'est pas évidente à priori. En conséquence, pour déterminer une solution, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques. Dans cette section, on présente deux types de méthode numérique pour résoudre le problème de contrôle optimal : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les méthodes directes consistent à discrétiser l'état et le contrôle, et à réduire le problème en un problème d'optimisation non linéaire. Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement, par une méthode de tir, un problème aux deux bouts (valeurs limites) obtenu par application du principe du maximum.

### 2.7.1 Méthodes Indirectes

#### Méthode de Tir

Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Pontryagin, qui donne une condition nécessaire d'optimalité et dont les trajectoires sont calculées numériquement suivant une méthode dite de tir. Le choix de cette méthode s'explique par son avantage à savoir, la bonne rapidité de convergence (quand il y a convergence) et sa grande précision dans le traitement numérique.

La méthode de tir se décompose en trois étapes principales :

1. L'écriture du problème aux deux bouts.
2. La programmation de la fonction de tir.
3. La résolution d'un système d'équations non linéaire.

#### Problème aux deux bouts :

Le principe du maximum de Pontryagin affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. Ceci nous conduit à un système différentiel à deux équations, à deux conditions initiales et à deux conditions terminales. En d'autre terme à un problème aux deux bouts (Two Points Boundary Value Problem) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(u(t), x(t), t), \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H(\lambda_0, u(t), x(t), p(t), t)}{\partial x(t)}, \\ u(t) \in U, t \in I, \\ x(0) = x_0, p(0) = p_0, \\ x(t_f) = x_f, p(t_f) = p_f. \end{cases} \quad (2.24)$$

## 2.7 Méthodes numériques en contrôle optimal

---

où  $u(t)$  est donné par la condition de maximum(2.19).

Si l'on est capable, à partir de l'équation (2.19), d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de  $(x(t), p(t))$ , alors le système extrémal est un système différentiel de la forme  $\dot{z} = F(t, z(t))$ , où  $z(t) = (x(t), p(t))$ , on obtient le problème aux valeurs limites

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)), \\ R(z(0), z(t_f)) = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

où  $R(z(0), z(t_f))$  est donné par les conditions initiales, finales et les conditions de transversalité.

### Fonction de tir :

Notons  $z(t, z_0)$  la solution du problème de Cauchy :

$$\dot{z} = F(t, z(t)), z(0) = z_0$$

On pose  $S(z_0) = R(z_0, z(t_f, z_0))$  définie sur  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  appelée fonction de tir.

Le problème aux deux bouts (2.25) est alors équivalent à

$$S(z_0) = 0$$

avec  $R(\cdot, z_0)$  solution du problème à valeur initiale (Initial Value Problem) :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)), \\ u(t) \in U, t \in I, \\ z(0) = z_0, \\ z(t_f) = z_f. \end{cases} \quad (2.26)$$

### Résolution d'un système d'équations non linéaires :

Le résolution du problème aux deux bouts est alors équivalent à la recherche d'un zéro de la fonction de tir  $S(z_0)$ , c'est à dire  $S(z_0) = 0$  qu'on peut résoudre par la méthode de Newton.

**Remarque 2.8.** *Sous certaines hypothèses, l'algorithme de Newton converge d'une façon quadratique et permet une détermination très précise du zéro. Son inconvénient est la petitesse du domaine de convergence, c'est à dire que pour faire converger la méthode de Newton, il faut que  $y^p$  soit suffisamment proche de la solution recherchée  $y^0$  telle que  $S(y^0) = 0$ .*

### 2.7.2 Méthodes Directes

Les méthodes directes consistent à transformer le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie.

## 2.7 Méthodes numériques en contrôle optimal

---

### Discrétisation totale : tir direct

C'est la méthode la plus évidente lorsqu'on aborde un problème de contrôle optimal, l'état et le contrôle sont discrétisés et le problème est transcrit en un problème de programmation non-linéaire (NLP). Le NLP est résolu en utilisant des techniques d'optimisation bien connues. D'un autre côté, la solution optimale est trouvée en transformant un problème d'optimisation de dimension infinie en un problème d'optimisation de dimension finie. L'idée de la méthode consiste tout simplement à choisir les contrôles dans un espace de dimension finie, et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles.

Considérons un problème de Mayer-Lagrange. On discrétise la solution du système et le contrôle en un vecteur  $v = (x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)$ , et on se ramène à résoudre un problème d'optimisation non-linéaire de la forme :

$$\min_{v \in D} F(v) \quad (2.27)$$

où  $D = \{v \mid \xi_i(v) = 0, i \in 1, \dots, r, \xi_j(v) \leq 0, j \in \{r+1, \dots, m\}\}$ .

On se donne donc une subdivision  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_f$  de l'intervalle  $[0, t_f]$ . On peut choisir par exemple des contrôles constants par morceaux selon cette subdivision. Par ailleurs, on choisit une discrétisation de l'équation différentielle, par exemple, si on choisit la méthode d'Euler explicite, on obtient :

$$x_{i+1} = x_i + \gamma_i f(t_i, x_i, u_i), \text{ où } \gamma_i = t_{i+1} - t_i.$$

L'ensemble  $D$  représente les conditions initiales, finales, les contraintes sur la solution et les contraintes sur le contrôle.  $F$  est la fonction à optimiser. Dans le cas du problème en temps minimal, on prend  $F(v) = t_f$ .

## 2.8 Conclusion

la résolution des problèmes de contrôle optimal peut être difficile en raison de la complexité des équations différentielles, des contraintes et des conditions aux limites.

Malgré ces défis, le contrôle optimal continu d'être un domaine de recherche actif et important. Les avancées dans les méthodes numériques, les algorithmes d'optimisation et les techniques de modélisation permettent de résoudre des problèmes de contrôle optimal de plus en plus complexes. Ces avancées ouvrent la voie à de nouvelles applications et à des améliorations dans divers domaines, contribuant ainsi à l'optimisation des performances et à l'efficacité des systèmes dynamiques.

---

## CHAPITRE 3

## APPLICATION

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre on va élaborer deux modèles mathématiques, le premier s'agit du modèle simplifié de glucose le deuxième c'est le modèle proposé par Bergman. Ensuite, on va formuler les deux problèmes de contrôle optimal puis les résoudre par principe de maximum de pontyagin suivant la méthode du Tir. L'objectif de premier modèle est de déterminer une thérapie optimale permettant de garantir un taux de glucose proche de la norme imposée pour les diabétiques, et le deuxième à l'objectif de déterminer une thérapie optimale permettant de garantir un taux de glucose et d'insuline proche de la norme.

### 3.2 Application et simulation d'un modèle simplifié de glucose

On considère un modèle très simplifié du mécanisme régissant le niveau de glucose dans le sang. On désigne par  $x(t)$  la quantité de glucose au temps  $t$  à partir de l'instant initial  $t_0 = 0$  ( $x(t)$  sera l'état du système). On suppose que si on ne fait rien, elle diminuera à un taux proportionnel à la quantité ( $\dot{x} = -\alpha x$ ).

Dans le but de maintenir le niveau de glucose à un niveau acceptable, du glucose est transfusé dans le sang avec une vitesse de transfusion  $u(t)$  (cette vitesse  $u(t)$  sera le contrôle du problème).

L'évolution de l'état  $x$  se fait donc suivant l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t), t \geq 0 \quad (3.1)$$

## 3.2 Application et simulation d'un modèle simplifié de glucose

---

avec  $\alpha > 0$  une constante donnée. On considère aussi la donnée initiale

$$x(0) = a \tag{3.2}$$

avec  $a > 0$  donnée représentant la quantité de glucose au moment initial. On se propose d'amener, à un moment  $T > 0$  donné, la quantité de glucose proche d'un intervalle  $[b_1, b_2]$  donné, mais avec un coût minimal. Nous considérons alors comme modèle très simple, le problème de contrôle suivant :

$$\int_0^T u^2(t)dt + \beta r(x(T)) \rightarrow \min, \quad (x, u) \text{ satisfait (3.1 - 3.2), } u \in U_{ad} \tag{3.3}$$

où  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction donnée, qui sera précisée dans la suite et qui prend en compte la distance à l'intervalle  $[b_1, b_2]$  et  $\beta > 0$  est une constante donnée.

On suppose

$$U_{ad} = L^2(0, T)$$

ce qui est une hypothèse très simplificatrice (en réalité on devrait ajouter aussi des contraintes comme par exemple  $u \geq 0$ ).

Nous admettons qu'on a l'existence et l'unicité d'une solution optimale  $(x^*, u^*)$  de (3.3).

Notre problème se décompose en deux parties :

**Partie 1** (Contrôle optimal direct)

On suppose ici  $b_1 = b_2 = b$  et

$$r(z) = (z - b)^2, \forall z \in \mathbb{R}$$

avec  $b > 0$  donnée (c'est le cas où l'intervalle  $[b_1, b_2]$  se réduit à un seul point  $b$ ).

**Partie 2** (Contrôle optimal direct)

On suppose ici

$$r(z) = \begin{cases} (z - b_1)^2 & \text{si } z < b_1 \\ 0 & \text{si } b_1 \leq z \leq b_2 \\ (z - b_2)^2 & \text{si } z > b_2 \end{cases}$$

avec  $b_1, b_2$  données tels que  $0 < b_1 < b_2$ .

## 3.2 Application et simulation d'un modèle simplifié de glucose

---

### 3.2.1 Résolution Analytique

Notre problème initial est :

$$\begin{cases} \int_0^T u^2(t)dt + \beta r(x(T)) \rightarrow \min, \\ \dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t), t \geq 0 \\ r(z) = (z - b)^2, \forall z \in \mathbb{R} \\ U_{ad} = L^2(0, T) \\ x(0) = a, \alpha > 0, \beta > 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Dans la partie 1, on écrit les conditions d'optimalité (principe de minimum de Pontryagin) pour le problème (3.4). Puis on Résout ce système d'optimalité et on trouve le contrôle optimal  $u^*(t)$ .

On pose :

$$\begin{cases} f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(t, x, u) = -\alpha x + u \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ r(z) = (z - b)^2 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} L : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ L(t, x, u) = u^2 \end{cases} \quad (3.7)$$

Avant la caractérisation du contrôle optimal, nous définissons d'abord le Hamiltonien pour le problème de contrôle optimal par :

$$H(x, p, t, u) = p^0 u^2 + p^1 (-\alpha x + u)$$

$$\min_{u \in \mathbb{R}^+} H = \min_{u \in \mathbb{R}^+} [p^0 u^2 + p^1 (-\alpha x + u)]$$

Ensuite en appliquant le principe du maximum de Pontryagin nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x + u \\ x(0) = a \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \alpha p \\ p(T) = p^0 \frac{\partial \beta r(x(T))}{\partial x(T)} = 2\beta(x(T) - b) \\ \frac{\partial H}{\partial u} = p + 2u = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

On résout ce système d'optimalité et on trouve le contrôle optimal  $u^*(t)$

On remplace  $u = -\frac{p}{2}$  en (1) ce qui donne :

## 3.2 Application et simulation d'un modèle simplifié de glucose

---

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x - \frac{p}{2} & (1) \\ x(0) = a & (2) \\ \dot{p} = \alpha p & (3) \\ p(T) = 2\beta(x(T) - b) & (4) \end{cases} \quad (3.9)$$

En utilisant la méthode du tir :

On résout (1) - (2) - (3) avec  $p(0) = \eta \in \mathbb{R}$ ,  $\eta$  à trouver :

On trouve  $p(t) = \eta e^{\alpha t}$  et on remplace en (1), on aura :

$$\dot{x} = -\alpha x - \frac{\eta}{2} e^{\alpha t}, \quad \text{avec } x(0) = a$$

Cela donne :

$$x(t) = e^{-\alpha t} a - \frac{\eta}{2} \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} e^{\alpha s} ds$$

$$x(t) = e^{-\alpha t} a - \frac{\eta}{2} e^{-\alpha t} \frac{1}{2\alpha} (e^{2\alpha t} - 1)$$

$$x(t) = e^{-\alpha t} a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha t)$$

On remplace en (4) ce qui donne l'équation

$$\eta e^{\alpha T} = 2\beta(e^{-\alpha T} a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T) - b)$$

$$\eta(e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha} sh(\alpha T)) = 2\beta(e^{-\alpha T} a - b)$$

Donc :

$$\eta = 2\beta \frac{e^{-\alpha T} a - b}{e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha} sh(\alpha T)} \quad (3.10)$$

On a alors :

$$u^*(t) = -\frac{p}{2} \text{ donc } u^*(t) = -\frac{\eta}{2} e^{\alpha t} \text{ avec } \eta \text{ donné par (3.10).}$$

Dans la 2 ème partie on écrit le système d'optimalité (principe du minimum de Pontryagin) dans ce cas et on réduit le problème à un système de deux équations différentielles avec inconnues  $x(t)$  et  $p(t)$  où  $p(t)$  est la variable adjointe.

Pour résoudre ce système on utilisera dans la suite la méthode usuelle de tir. On Réduit le système à résoudre à une équation avec inconnue  $\eta \in \mathbb{R}$ , du type

$$g(\eta) = 0 \quad (3.11)$$

de la première partie on a les équations suivantes :

### 3.2 Application et simulation d'un modèle simplifié de glucose

---

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x - \frac{p}{2} & (6) \\ x(0) = a & (7) \\ \dot{p} = \alpha p & (8) \\ p(T) = \beta \dot{r}(x(T) - b) & (9) \end{cases} \quad (3.12)$$

On considère  $p(0) = \eta$  et comme dans la partie I, on trouve

$$p(t) = \eta e^{\alpha t} \quad \text{et} \quad x(t) = e^{-\alpha t} a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha t)$$

Ce qui donne avec (9) :

$$\eta e^{\alpha T} = \beta \dot{r}(e^{-\alpha T} a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T) - b)$$

Cette équation s'écrit

$$\begin{cases} g(\eta) = 0 \\ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(\eta) = \eta e^{\alpha T} - \beta \dot{r}(e^{-\alpha T} a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T) - b) \end{cases} \quad (3.13)$$

On montre l'existence et l'unicité d'une solution de (3.11), puis on Résout l'équation (3.11) et on trouve  $\eta$ , ensuite on donne le contrôle  $u^*(t)$ .

La fonction  $r$  est de classe  $C^1$ , donc  $r$  continue alors  $g$  continue :

On a

$$\dot{r}(z) = \begin{cases} 2(z - b_1) & \text{si } z < b_1 \\ 0 & \text{si } b_1 \leq z \leq b_2 \\ 2(z - b_2) & \text{si } z > b_2 \end{cases}$$

On observe que  $\lim_{z \rightarrow +\infty} \dot{r}(z) = +\infty$  et  $\lim_{z \rightarrow -\infty} \dot{r}(z) = -\infty$

On obtient alors facilement

$$g(\eta) \rightarrow +\infty \text{ si } \eta \rightarrow +\infty$$

$$g(\eta) \rightarrow -\infty \text{ si } \eta \rightarrow -\infty$$

D'autre part observons que la fonction  $z \rightarrow \dot{r}(z)$  est croissante, donc la fonction

$$\eta \rightarrow -\beta \dot{r}(e^{-\alpha T} a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T) - b)$$

est croissante, alors  $g$  est strictement croissante.

Ceci montre que  $g$  est bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  donc on a l'existence et l'unicité d'une solution de 3.13.

## 3.2 Application et simulation d'un modèle simplifié de glucose

---

Soit  $\eta$  la racine de (3.13).

**Cas 1 :** Si

$$e^{-\alpha T} a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T) \in (b_1, b_2)$$

Alors

$$\dot{r}(e^{-\alpha T} a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T)) = 0$$

Alors de 3.13 on déduit  $\eta = 0$ , on a donc

$$\eta = 0 \text{ si } b_1 \leq e^{-\alpha T} \leq b_2$$

Donc dans ce cas  $u^* = 0$ .

**Cas 2 :**

Si

$$(e^{-\alpha T} a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T) < b_1,$$

alors

$$\dot{r}(e^{-\alpha T} a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T)) = 2[e^{-\alpha T} a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T) - b_1]$$

Donc

$$\eta = \frac{2\beta(e^{-\alpha T} a - b_1)}{e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha} sh(\alpha T)} \quad (3.14)$$

En remplaçant  $\eta$  dans la condition de cas 2, on a :

$$e^{-\alpha T} a - b_1 - \frac{\beta sh(\alpha T)(e^{-\alpha T} a - b_1)}{\alpha e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha} sh(\alpha T)} < 0$$

C'est à dire

$$(e^{-\alpha T} a - b_1) \left(1 - \frac{\frac{\beta}{\alpha} sh(\alpha T)}{e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha} sh(\alpha T)}\right) < 0$$

Donc

$$(e^{-\alpha T} a - b_1) \left(\frac{e^{\alpha T}}{e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha} sh(\alpha T)}\right) < 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha T} a - b_1 < 0$$

On déduit alors

Si  $e^{-\alpha T} a < b_1$  alors  $\eta$  est donnée par 3.14. Donc

$$u^*(t) = \frac{\beta(b_1 - e^{\alpha T} a)}{e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha} sh(\alpha T)} e^{\alpha t}$$

**Remarque 3.1.**  $u > 0$

## 3.2 Application et simulation d'un modèle simplifié de glucose

---

### Cas 3 :

Si

$$e^{-\alpha T} a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T) > b_2$$

Alors

$$\dot{r}(e^{-\alpha T} a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T)) = 2[e^{-\alpha T} a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T) - b_1]$$

Ce qui donne de 3.13 :

$$\eta e^{\alpha T} - 2\beta[e^{-\alpha T} a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T) - b_2] = 0$$

Comme dans le cas 2 on trouve :

$$\eta = \frac{2\beta(e^{-\alpha T} - b_2)}{e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha} sh(\alpha T)} \quad (3.15)$$

Il faut alors avoir

$$e^{-\alpha T} a - b_2 - \frac{\beta}{\alpha} \frac{sh(\alpha T)}{e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha} sh(\alpha T)} (e^{-\alpha T} a - b_2) > 0$$

Ceci donne comme en Cas 2 :

$$e^{-\alpha T} a - b_2 > 0$$

On déduit alors :

Si  $e^{-\alpha T} a > b_2$  alors  $\eta$  est donné par (3.15). Donc

$$u^*(t) = \frac{\beta(b_2 - e^{-\alpha T})}{e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha} sh(\alpha T)} e^{\alpha T}$$

### 3.2.2 Implémentation de la méthode de tir sous MATLAB

Afin de trouver le zéro de la fonction de tir on crée une fonction `tir_simple_glucose.m` en utilisant la fonction `fsolve`. `P0` est le point de départ de l'algorithme et `P0f` est le résultat. Nous introduisons la fonction `Xzero` afin de prendre en compte les conditions finales et elle utilise la fonction `ode45` qui permet de résoudre le système décrit par la fonction `System`, et elle permet de calculer une solution optimale du système.

Le programme suivant nous permet d'afficher les solutions du problème de la partie 1.

**Programme :**

```
[01] function tir_simple_glucose  
[02] clear all; clf; clc;  
[03] global x0 tf alfa beta b;
```

## 3.2 Application et simulation d'un modèle simplifié de glucose

---

```
[04] alfa= 0.04; beta= 0.5; b=0.9;
[05] x0=2.87; tf=48; P0=0.1;
[06] % =====Calcul du zéro de la fonction de tir (P0f)=====
[07] options=optimset('Display','iter','Algorithm','levenberg-marquardt');
[08] [P0f,FVAL,EXITFLAG]=fsolve(@S,P0,options);
[09] P0f, FVAL, EXITFLAG
[10] % =====Trace des trajectoires optimales=====
[11] options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
[12] [t,y] = ode45(@sys,[0;tf],[x0;P0f],options);
[13] subplot(311); plot(t,y(:,1)); title('Trajectoire de x(t)'); grid on
[14] subplot(312); plot(t,y(:,2)); title('Trajectoire de p(t)'); grid on
[15] % =====Trajectoire du contrôle optimal=====
[16] if y(:,2)>0
[17]     y(:,3)=y(:,2)/2;
[18] else
[19]     y(:,3)=0;
[20] end
[21] subplot(313); plot(t,y(:,3)); title('Trajectoire de u(t)');grid on
[22] %=====Définition de la fonction de tir=====
[23] function Yzero=S(Y)
[24] global x0 tf alfa beta b;
[25] options =odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
[26] [t,y] = ode45(@sys,[0;tf],[x0;Y],options);
[27] Yzero = y(end,2)+2*beta*(y(end,1)-b);
[28] %=====Système extrémal=====
[29] function ydot=sys(t,y)
[30] global x0 tf alfa beta b;
[31] if y(2)>0
[32]     u=y(2)/2;
[33] else
[34]     u=0;
[35] end
[36] ydot=[-alfa*y(1)+u
[37] alfa*y(2)];
```

## 3.2 Application et simulation d'un modèle simplifié de glucose

---

Après l'exécution de ce code nous obtenons la solution de la variable adjointe :

$$P0f = 1.04044e-04.$$

Ainsi, les trajectoires  $(x(t), p(t), u(t))$  sont données dans la figure suivante :

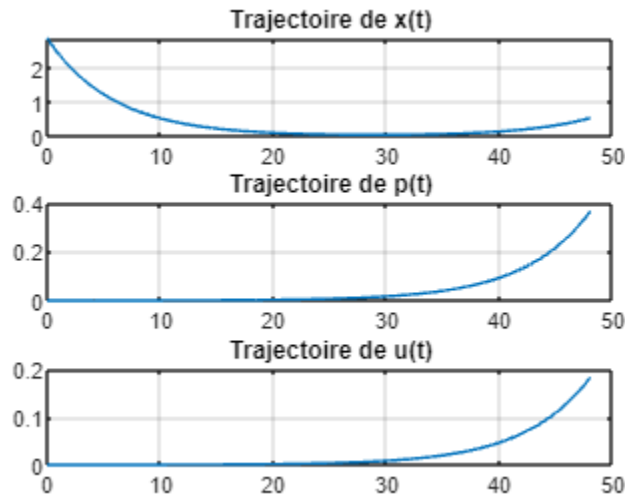


FIGURE 3.1 – Résultats de la méthode de tir.

Ainsi dans la 2ème partie le programme suivant nous permet d'afficher les solutions du problème.

**Programme :**

```
[01] function tir_simple_glucose
[02] clear all ; clf ; clc ;
[03] global x0 tf alfa beta b1 b2 ;
[04] alfa= 0.04 ; beta= 1000 ; b1=0.7 ; b2=1.1 ;
[05] x0=2.87 ; tf=30 ; P0=0.1 ;
[06] % =====Calcul du zéro de la fonction de tir (P0f)=====
[07] options=optimset('Display','iter','Algorithm','levenberg-marquardt') ;
[08] [P0f,FVAL,EXITFLAG]=fsolve(@S,P0,options) ;
```

## 3.2 Application et simulation d'un modèle simplifié de glucose

---

```
[09] P0f, FVAL, EXITFLAG
[10] % =====Trace des trajectoires optimales=====
[11] options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
[12] [t,y] = ode45(@sys,[0;tf],[x0;P0f],options);
[13] subplot(311); plot(t,y(:,1)); title('Trajectoire de x(t)'); grid on
[14] subplot(312); plot(t,y(:,2)); title('Trajectoire de p(t)'); grid on
[15] % =====Trajectoire du contrôle optimal=====
[16] if y(:,2)>0
[17]     y(:,3)=y(:,2)/2;
[18] else
[19]     y(:,3)=0;
[20] end
[21] subplot(313); plot(t,y(:,3)); title('Trajectoire de u(t)');grid on
[22] % =====Définition de la fonction de tir=====
[23] function Yzero=S(Y)
[24] global x0 tf alfa beta b;
[25] options =odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
[26] [t,y] = ode45(@sys,[0;tf],[x0;Y],options);
[27] Yzero = y(end,2)+beta*r(y(end,1));
[28] % =====Système extrémal=====
[29] function ydot=sys(t,y)
[30] global x0 tf alfa beta b;
[31] if y(2)>0
[32]     u=y(2)/2;
[33] else
[34]     u=0;
[35] end
[36] ydot=[-alfa*y(1)+u
[37] alfa*y(2)];
[38] % =====function rdot=====
[39] function rdot=r(z)
[40] global x0 tf alfa beta b1 b2;
[41] if z < b1
[42]     rdot =2*(z-b1);
```

### 3.2 Application et simulation d'un modèle simplifié de glucose

---

```
[43] else
[44]     if z > b2
[45]         rdot = 2*(z-b2);
[46]     else
[47]         rdot=0;
[48]     end
[49] end
```

Après l'exécution de ce code nous obtenons la solution de la variable adjointe :

$$P0f= 0.0028$$

Ainsi, les trajectoires  $(x(t), p(t), u(t))$  sont données dans la figure suivante :

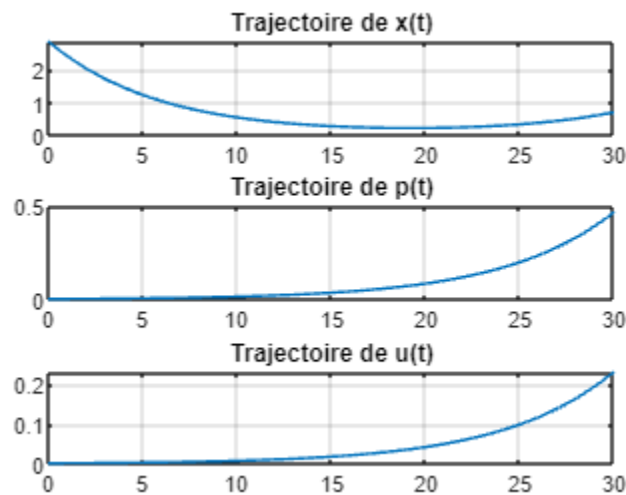


FIGURE 3.2 – Résultats de la méthode de tir.

### 3.3 Simulation de Modèle Original de Bergman

---

#### 3.2.3 Discussion des résultats

Les figures (3.1)-(3.2) montrent que le modèle représente bien l'expérience. Après une augmentation de la quantité du glucose ( $G = 2.87g$ ), on remarque dans figure (3.1) que le glucose diminue jusqu'à atteindre la norme normale  $x(48)=0.9$  après 48 minutes, et dans la figure (3.2) le glucose diminue jusqu'à atteindre la borne inférieure  $x(30)=0.7$  après 30 minutes.

### 3.3 Simulation de Modèle Original de Bergman

#### 3.3.1 Implémentation de la méthode de tir sous MATLAB

Dans le modèle original de Bergman on a utilisé l'événement d'état qui doit être pris en compte lors de la simulation dans Matlab.

Les événements d'état sont des changements d'état de certains paramètres au cours de la période choisi sachant que dans le modèle minimal d'insuline, le terme  $[G(t) - p5]^+$  est un événement d'état.

Lorsque  $G(t)$  est supérieur à  $p5$  le terme a la valeur positive donnée par le terme à l'intérieur des crochets. C'est à ce moment que l'insuline est sécrétée. Mais quand  $G(t)$  descend en dessous de  $p5$  la valeur est 0, car aucune insuline ne doit être sécrétée. Il s'agit d'un changement de État. Ce changement d'état doit se faire au bon moment lors de la résolution du système.

Soit le problème du contrôle suivant

$$\int_0^T (u_1^2(t) + u_2^2(t))dt + \beta r(G(T)) \rightarrow \min, \quad (x, u) \text{ satisfont } (3.1 - 3.2), u \in U_{ad} \quad (3.16)$$

où  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction donnée :

$$r(z) = (z - b)^2, \forall z \in \mathbb{R}$$

avec  $b > 0$  donnée (c'est le cas où l'intervalle  $[b1, b2]$  se réduit à un seul point  $b$ ).

Le couplage entre les deux modèles minimaux originaux est implémenté dans le Programme Matlab suivant :

```
[01]function Tir_simple_glucose_insuline
[02] clear all; clf; clc;
[03] global p1 p2 p3 p4 p5 p6 Gb Ib x0 tf beta;
```

### 3.3 Simulation de Modèle Original de Bergman

---

```
[04] beta=3000; p1 = 0.03082; p2 = 0.02093; p3 = 1.062e-5; p4 = 0.3; p5 = 94; p6 =  
0.3349e-2; Gb = 92; Ib = 7.3; x0=[287; 0;403.4];P0=[0.1;0.1;0.1];tf=30;  
[05] % Clcul du zéro de la fonction de tir (P0f)  
[06] options=optimset('Display','iter','Algorithm','levenberg-marquardt');  
[07] [P0f,FVAL,EXITFLAG]=fsolve(@S,P0,options);  
[08] P0f, FVAL, EXITFLAG  
[09] % Tracé des trajectoires optimales  
[10] options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);  
[11] [t,y] = ode45(@sys,[0;tf],[x0;P0f],options);  
[12] subplot(331); plot(t,y(:,1)); title('Trajectoire de G(t)'); grid on  
[13] subplot(332); plot(t,y(:,2)); title('Trajectoire de X(t)'); grid on  
[14] subplot(333); plot(t,y(:,3)); title('Trajectoire de I(t)'); grid on  
[15] subplot(334); plot(t,y(:,4)); title('Trajectoire de z1(t)');grid on  
[16] subplot(335); plot(t,y(:,5)); title('Trajectoire de z2(t)');grid on  
[17] subplot(336); plot(t,y(:,6)); title('Trajectoire de z3(t)');grid on  
[18] % Trajectoire du contrôle optimal u1  
[19] if y(:,4)>0  
[20]     y(:,7)=y(:,4)/2;  
[21] else  
[22]     y(:,7)=0;  
[23] end  
[24] % Trajectoire du contrôle optimal u2  
[25] if y(:,6)>0  
[26]     y(:,8)=y(:,6)/2;  
[27] else  
[28]     y(:,8)=0;  
[29] end  
[30] subplot(337); plot(t,y(:,7)); title('Trajectoire de u1(t)');grid on  
[31] subplot(338); plot(t,y(:,8)); title('Trajectoire de u2(t)');grid on  
[32] %=====Définition de la fonction de tir=====  
[33] function Yzero=S(Y)  
[34] global x0 tf beta p5;  
[35] options =odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);  
[36] [t,y] = ode45(@sys,[0;tf],[x0;Y],options);
```

### 3.3 Simulation de Modèle Original de Bergman

---

```
[37] Yzero = [y(end,4)+ 2*beta*(y(end,1)- p5)
[38] y(end,5)
[39] y(end,6)
[40] ];
[41] %=====Système extrêmeal=====
[42] function ydot=sys(t,y)
[43] global x0 tf p1 p2 p3 p4 p5 p6 Gb Ib ;
[44] if y(4)>0
[45]     u(1)=y(4)/2 ;
[46]     else
[47]     u(1)=0 ;
[48] end
[49] if y(6)>0
[50]     u(2) =y(6)/2 ;
[51]     else
[52]     u(2) =0 ;
[53] end
[54] ydot=[ -p1*(y(1)-Gb)-y(2)*y(1)-u(1)
[55] -p2*y(2) + p3*(y(3) - Ib)
[56] tf*p6*(y(1)-p5)- p4*(y(3)- Ib)- u(2)
[57] y(4)*(p1+y(2))+y(6)*p6*tf
[58] y(4)*y(1)+y(5)*p2
[59] -p3*y(5)+p4*y(6)
[60] ];
[61] function ERR=R(y)
[62] global p5 ;
[63] if y(1) > p5
[64]     ERR =y(1)-p5 ;
[65]     else
[66]     ERR = 0 ;
[67] end
```

Ainsi, les trajectoires ( $G(t), X(t), I(t), z(t), u(t)$ ) sont données dans la figure suivante :

### 3.3 Simulation de Modèle Original de Bergman

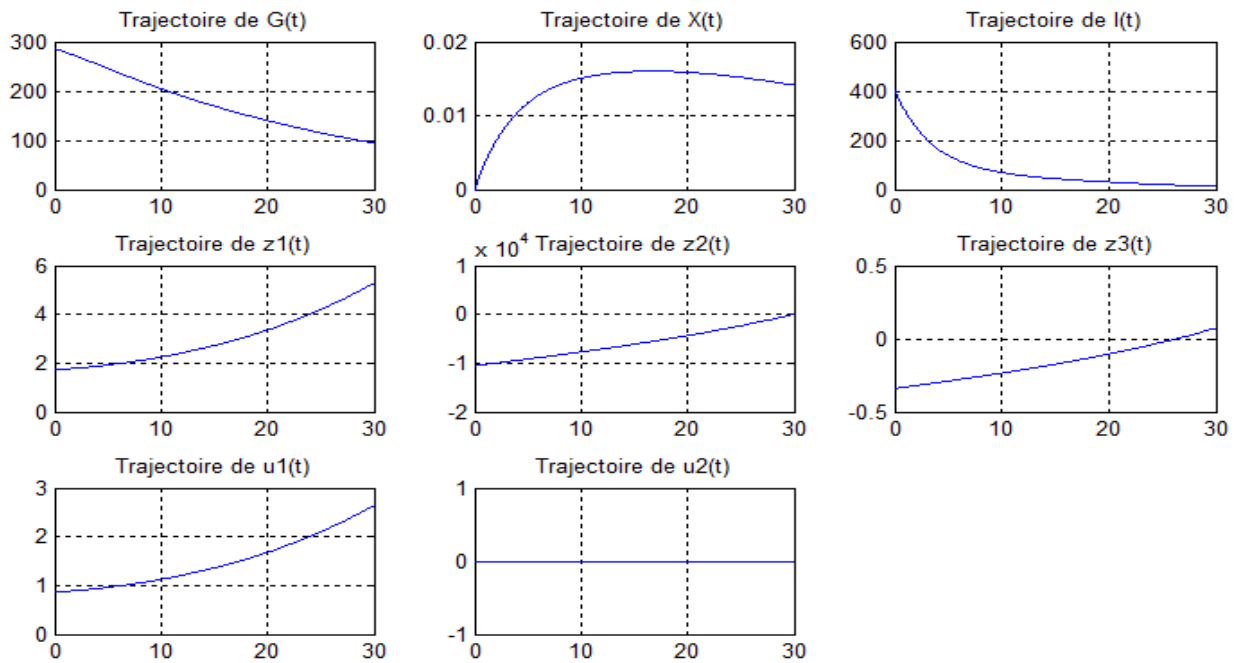


FIGURE 3.3 – Modèle minimal de glucose insuline.

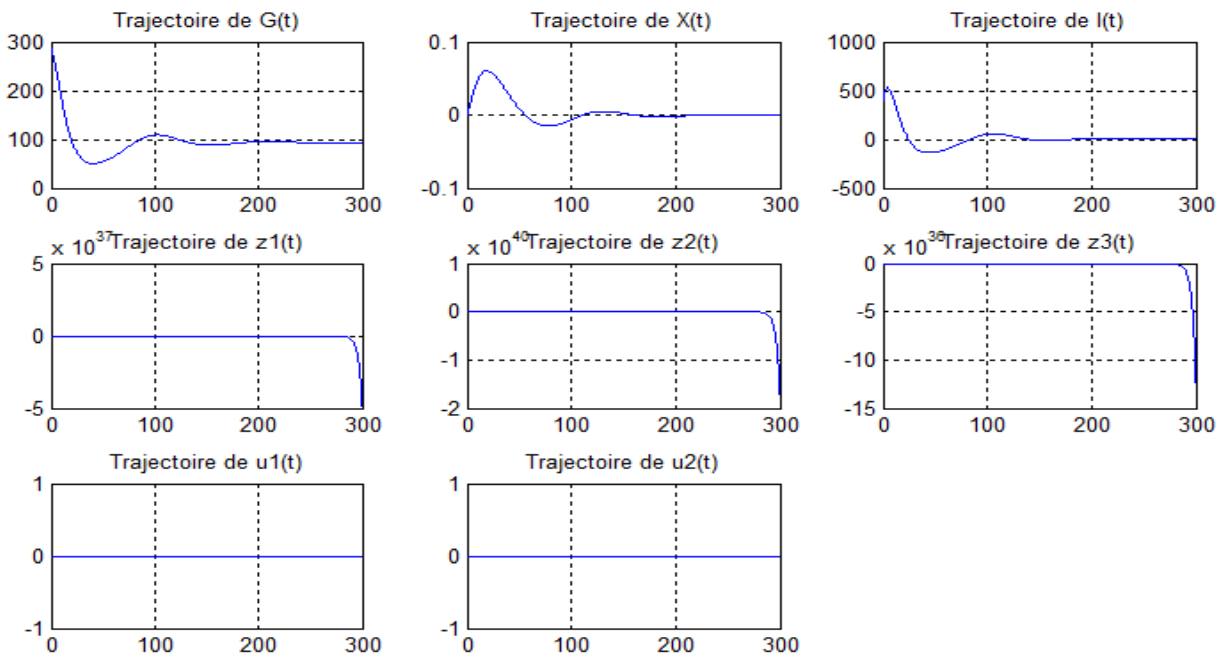


FIGURE 3.4 – Modèle minimal de glucose insuline.

## 3.4 Conclusion

---

### 3.3.2 Discussion des résultats

Les figures (3.3),(3.4), montrent que le modèle de Bergman représente bien l'expérience. Après une augmentation de la quantité du glucose  $G=278\text{mg/dL}$  avec une injection d'une quantité d'insuline  $I_0=403.4\text{mU/L}$ , qui fait un rôle principal de diminuer le taux de sucre dans le sang , il diminue jusqu'à atteindre la normale après 30 minutes.

## 3.4 Conclusion

l'application de la méthode de tir en MATLAB pour le contrôle optimal en diabétologie permet de trouver une séquence optimale de doses d'insuline pour réguler les niveaux de glucose dans le sang. Cependant, une interprétation et une évaluation des résultats sont nécessaires pour garantir leur pertinence clinique et leur applicabilité pratique.

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce mémoire a apporté une contribution significative à la compréhension du contrôle optimal dans le domaine de la diabétologie. En présentant une modélisation détaillée du système glucose-insuline et en utilisant des méthodes de contrôle optimal. Les résultats obtenus grâce à l'application du modèle dans MATLAB ont démontré la faisabilité et l'efficacité de cette approche.

Il constitue également une ressource précieuse pour les chercheurs et les praticiens qui s'intéressent au contrôle optimal en diabétologie. Il offre des bases solides pour de futures études et pourrait servir de point de départ pour le développement de stratégies de contrôle optimal personnalisées visant à optimiser la gestion du diabète chez les patients.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] RN Bergman, Gianna Toffolo, CR Bowden, and Claudio Cobelli. Minimal modeling, partition analysis, and identification of glucose disposal in animals and man. *IEEE Trans Biom Eng*, 12935, 1980.
- [2] Yacine Chitour, Frédéric Jean, and Emmanuel Trélat. Propriétés génériques des trajectoires singulières. *Comptes Rendus Mathématique*, 337(1) :49–52, 2003.
- [3] Yacine Chitour, Frédéric Jean, and Emmanuel Trélat. Genericity results for singular curves. *Journal of differential Geometry*, 73(1) :45–73, 2006.
- [4] Yacine Chitour, Frédéric Jean, and Emmanuel Trélat. Singular trajectories of control-affine systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(2) :1078–1095, 2008.
- [5] Michel Crouzeix and Alain L Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*, volume 1. Masson, 1984.
- [6] Andrea De Gaetano and Ovide Arino. Mathematical modelling of the intravenous glucose tolerance test. *Journal of mathematical biology*, 40 :136–168, 2000.
- [7] Mohammed Derouich and Abdesslam Boutayeb. The effect of physical exercise on the dynamics of glucose and insulin. *Journal of biomechanics*, 35(7) :911–917, 2002.
- [8] Esben Friis-Jensen. Modeling and simulation of glucose-insulin metabolism. In *Congress Lyngby*, 2007.
- [9] Rudolf Emil Kalman. Mathematical description of linear dynamical systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A : Control*, 1(2) :152–192, 1963.
- [10] Ernest Bruce Lee and Lawrence Markus. Foundations of optimal control theory. Technical report, Minnesota Univ Minneapolis Center For Control Sciences, 1967.

- 
- [11] Sandra M Lynch and B Wayne Bequette. Model predictive control of blood glucose in type i diabetics using subcutaneous glucose measurements. In *Proceedings of the 2002 American control conference (IEEE Cat. No. CH37301)*, volume 5, pages 4039–4043. IEEE, 2002.
- [12] P Palumbo, P Pepe, A De Gaetano, and S Panunzi. Istituto di analisi dei sistemi ed informatica.
- [13] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal : théorie & applications*, volume 36. Vuibert Paris, 2005.