

Résumé

Contrôle optimal de la traversée d'un fleuve par une barque

Dans ce mémoire, nous étudions une classe du problème de navigation de Zermelo sur l'eau. C'est un problème qui décrit la situation suivante.

Une barque se déplace dans un fleuve en présence du courant d'eau en direction d'une cible. Comment faut-il contrôler l'angle de braquage de la barque pour qu'il atteigne la cible dans les meilleurs délais ? Nous étudierons une situation simple dans laquelle en tenant compte de la force du courant. Il est également supposé que la vitesse de la barque et son angle de braquage sont connus. La résolution de ce problème utilise la méthode de tir simple qui fait partie des méthodes indirectes et qui est basée sur le principe du maximum de pontryagin, et qui consiste à réduire le problème de contrôle optimal en un problème résoluble numériquement.

Abstract

In this memoir, we study a class of navigation problems Zermelo on the water. These are optimal control problems describing the following situation : A boat is moving in a stream of water towards a target. How should the steering angle of the boat be controlled so that it reaches the target in the best time ? We will study a simple situation in which taking into account the strength of the current. It is also assumed that the speed of the boat and its steering angle are known. The resolution of this problem uses the shooting method which is part of the indirect methods and which is based on on the principle of maximum pontryagin, which consists in reducing the problem of optimal control in a numerically resolvable problem.

Remerciements

En tout premier lieu. Nos remerciements vont avant tout au DIEU qui nous a ouvert les portes du savoir, qui nous a donné le courage et la volonté de travailler consciencieusement pour l'élaboration de ce mémoire.

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au département de mathématiques de la faculté des sciences de l'Université de Tizi-ouzou (UMMTO).

Notre plus grande gratitude va à notre encadreur de ce mémoire Monsieur Aidene Mohamed Professeur à l'Université Mouloude Mammeri de Tizi-ouzou, pour sa disponibilité.

Nous aimerons aussi le remercier pour l'autonomie qu'il nous a accordé, et ses précieux conseils qui nous ont permis de mener à bien ce travail.

Nous remercions également Monsieur Merakeb Abdelkader pour son aide concernant la partie numérique .

Nous remercions également les membres de jury pour avoir accepté de juger notre travail.

Afin de n'oublier personne, nos vifs remerciements s'adressent également à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A toutes les personnes marquantes dans ma vie.

Aux gents qui m'ont offert la joie et la prospérité

A ces personnes qui n'hésitent à n'importe quel

moment et n'importe quel condition de me soutenir et de m'encourager.

Je dédie à ma mère et à mon cher papa.

A mes frères et soeurs.

A mes cher amis sans exception.

A une personne spécifique, et très special pour moi.

A mes cousins et cousines, ainsi que toute ma grande famille.

A toute ma section Recherche Opérationnel, maths appliqués à la gestion.

Hassene

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

Aux deux personnes les plus nobles et les plus chères au monde

Mon Père et Ma Mère qui ont sacrifié les plus belles années de leurs vie

pour me voir un jour réussir, et qui m'ont soutenu jusqu'à la fin.

A mes adorables frères Rachid et Said et soeurs qui n'ont jamais cessé de m'encourager.

A mon fiancé Karim, et à ma belle famille.

A mes chères amies Sabrina, Dyhia. Massiva

A tous ceux qui sont chers dont je n'ai pas cité les noms.

FETIMA

Table des matières

Table des matières	5
Introduction Générale	7
1 Introduction au contrôle optimal	9
Notions de base du Contrôle optimal	10
1.1 Position du problème	10
1.2 Définition d'un système de contrôle optimal	10
1.3 Condition initiale du système	11
1.4 Objectif de contrôle optimal	11
1.5 Classe de commandes admissibles	12
1.5.1 Commande bornée	12
1.5.2 Commande Bang-Bang	12
1.6 Critère de qualité	12
1.6.1 Temps optimal	13
1.6.2 Coût optimal	13
1.7 Contrôlabilité	14
1.8 Contrôlabilité des systèmes linéaires	15
1.8.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes . . .	16
1.8.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires non-autonomes .	18
1.9 Contrôlabilité local des systèmes non-linéaires	19
Principe du maximum de Pontryagin	20
1.10 Position du problème	20
1.11 Cas sans contraintes sur le contrôle : Principe du maximum faible	21

1.12	PMP : Énoncé général	25
1.13	Conditions de transversalité	27
1.13.1	Conditions de transversalité sur le vecteur adjoint	27
1.13.2	Condition de transversalité sur le Hamiltonien	28
	Méthodes numériques en contrôle optimal	30
1.14	Méthodes indirectes	30
1.15	Méthodes directes	31
1.16	Quelques Caractéristiques des méthodes directes et indirectes	32
2	Problème de la traversée d'un fleuve par une barque	33
2.1	Introduction	35
2.2	Modélisation du problème	35
2.3	Résolution du problème de zermelo	36
2.3.1	Principe du maximum appliqué au problème de Zermelo	36
2.3.2	Résolution du problème dans différents cas	38
3	Application et simulations	49
3.1	Application de la méthode indirecte (tir simple)	49
3.2	Résolution par la méthode indirecte (tir simple) sous Matlab	51
3.2.1	premier cas	51
3.2.1.1	Interprétation des résultats obtenus	55
3.2.2	deuxième cas	56
3.2.2.1	Interprétation des résultats obtenus	60
3.2.3	troisième cas	61
3.2.3.1	Interprétation des résultats obtenus	65
	Conclusion Générale	66
	Bibliographie	67

Introduction Générale

La théorie du contrôle optimal vise à analyser les propriétés des systèmes commandés, c'est à dire des systèmes sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final souhaité, en respectant éventuellement certains critères. Dans le monde réel, la théorie du contrôle est rencontrée sous forme de plusieurs variétés ayant des propriétés différentes, par exemples : Contrôle des flux routiers, systèmes de freinage ABS, réseaux informatiques, les applications concernent tout système sur lequel on peut avoir une action, avec une notion de rendement optimal. Cette théorie est non seulement répandue dans la vie réelle, mais elle est également un sujet important pour de nombreux travaux de recherche.

Historiquement, la théorie du contrôle optimal est très liée aux calculs des variations, elle fait partie de l'automatique et des mathématiques appliqués, elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répandant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique du vol. Le problème de contrôle optimal se décompose en deux parties :

Pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut savoir d'abord si cette cible est atteignable, c'est le problème de contrôlabilité. Il existe une caractéristique très simple de la contrôlabilité, apparue dans les années soixante avec les travaux de R. E. Kalman [4].

Une fois le problème de contrôlabilité est résolu, il faut chercher parmi toutes les trajectoires possibles celle qui donne le coût minimum (maximum). La résolution du problème de contrôle optimal se fait par différentes méthodes. Parmi ces méthodes on peut citer :

- Le Principe du Maximum de Pontryagin.
- Méthodes numériques (directe et indirecte) de résolution d'un problème terminal d'un système.

Ce manuscrit est organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre de ce manuscrit est consacré à une introduction au contrôle optimal, qui est composé de trois parties :

1. Dans la première partie, on présente les notions de base du contrôle optimal avec notamment la contrôlabilité des systèmes linéaires et la contrôlabilité des systèmes non-linéaires.
2. Dans la seconde, on présente le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) dans toute sa généralité.
3. Et la dernière partie est consacré aux méthodes de résolution numériques en contrôle optimal.

Nous avons examiné dans le chapitre 2, un problème non linéaire, dit problème de Zermelo de la traversée d'un fleuve par une barque, dont on a fait une résolution analytique du problème dans différents cas.

Le dernier chapitre sera consacré à une application (résolution numérique) de cette théorie " problème de zermelo", une expérimentation de ce problème sera faite à l'aide du logiciel Matlab.

Chapitre 1

Introduction au contrôle optimal

La théorie du contrôle optimal est une branche des mathématiques qui s'intéresse à la théorie des systèmes. Elle aborde le problème de trouver une loi de contrôle pour un système donné. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets. Divers domaines de la science ne peuvent se passer de la théorie du contrôle, ainsi on retrouve ses applications en mécanique, électricité, biologie, chimie etc. Son but est d'essayer de comprendre comment agir sur ce système d'une manière éventuellement optimale pour l'amener à faire quelque chose de bien précise. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles (EDO, EDP), intégrales et aux dérivées partielles etc. Pour cette raison, la théorie de contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines des mathématiques.

Certaines notions de la théorie du contrôle méritent d'être introduites :

Contrôlabilité

Un système de contrôle est dit contrôlable si on peut l'amener (en temps fini) d'un point initial arbitraire vers un état final prescrit au moyen d'un contrôle. Cette notion a été introduite par Kalman en 1960 pour des systèmes linéaires de la forme $\dot{x} = Ax + Bu + r$.

Contrôle optimal

Une fois le problème de contrôlabilité résolu, on peut vouloir passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère, on parle alors d'un problème de contrôle optimal.

partie 1 Notions de base du Contrôle optimal

1.1 Position du problème

Avant de passer à la résolution d'un problème de contrôle optimal, on détermine d'abord la modélisation mathématique de ce dernier. Un système comporte beaucoup de variables ou de paramètres nécessaires pour décrire son comportement, l'identification de ces variables (paramètres) et la description du système qui évolue dans le temps est une tâche très importante, c'est la Modélisation mathématique, qui nous conduit à connaître la fonction à optimiser, l'état, le modèle et les variables du système. L'objectif peut être de minimiser (maximiser) le fonctionnement du système. Le problème consiste à déterminer la meilleure commande pour optimiser l'objectif.

1.2 Définition d'un système de contrôle optimal

Un système de contrôle est un système dynamique qui dépend d'un paramètre appelé *contrôle*. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes. Mathématiquement, un système de contrôle optimal est décrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t) \in X \\ u(t) \in U \\ t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où

l'équation (1.1) décrit la loi d'évolution.

X : ensemble des états.

U : ensemble des commandes admissibles.

Remarques

1. Le vecteur des états $x(t)$ appartient à une variété différentielle X de dimension n , (on suppose que X est un ouvert connexe de \mathbb{R}^n).
2. $u(t)$ appartient à l'ensemble des commandes admissibles U , qui est un ensemble de fonction localement intégrable définie sur $[0, +\infty[$ à valeur dans $U \subset \mathbb{R}^m$.
3. f est une application de C^1 , et est suffisamment régulière, de sorte que pour toute condition initiale $x_0 \in X$ et tout contrôle admissible $u(\cdot)$, le système définit ci-dessus admet une unique solution $x(t)$.
4. La complexité du système de contrôle dépend de la complexité des espaces X et U et la nature de l'équation d'évolution.

1.3 Condition initiale du système

Définition 1.1

La condition initiale du système, $x_0 = x(t_0)$ est un vecteur donné dans un plan de phase. En réalité, la position initiale $x(0)$ peut mesurer la vitesse, la température et d'autres paramètres mesurables.

1.4 Objectif de contrôle optimal

L'objectif d'un problème de contrôle est d'amener le système d'un état initial donné $x_0 = x(t_0)$, ($x_0 \in M_0$) à un état final souhaité $x^* = x(t^*)$, ($x^* \in M_1$) en respectant certaines contraintes, tel que M_0 est l'ensemble de départ et M_1 l'ensemble d'arrivée, tout en minimisant (maximisant) un certain coût, ou bien de stabiliser un système pour le rendre insensible à certaines perturbations.

1.5 Classe de commandes admissibles

Définition 1.2

La classe de commandes admissibles U est constituée de la fonction mesurable $u(t)$, $U = \{u(t), t \in [0, T]\}$. L'ensemble des commandes admissibles peut être borné ou de type Bang-Bang défini ci-dessous :

1.5.1 Commande bornée

La commande $u(t)$ est dite commande bornée si elle peut être minorée et majorée par des constantes a_j et b_j , sous la forme suivante :

$$a_j \leq u_j(t) \leq b_j, \quad j = 1, \dots, m, t \in [0, T].$$

Si de plus $a_j \leq u_j(t) \leq b_j$, on peut remplacer u_j par v_j en posant

$$u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$$

et ainsi v_j est aussi intégrable et l'on a $-1 \leq v_j \leq +1$. Donc lorsque U est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et $+1$.

1.5.2 Commande Bang-Bang

Un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle Bang-Bang, si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, \dots, m$ on a :

$$|u_j(t)| = 1$$

1.6 Critère de qualité

Choisir un critère de qualité revient à effectuer une modélisation mathématique des exigences physiques du système.

Définition 1.3

Le critère de qualité appelé coût, il est donné par la formule suivante :

$$J(x, u) = g(T, x^*) + \int_0^T f_0(t, x, u) dt$$

Où

- $g(T, x^*)$: coût terminal, lié à la fin d'évolution du système au temps final T , dont son importance est lorsque T est libre, sinon il est constant.
- $\int_0^T f_0(t, x, u) dt$: fonction objective qui dépend de l'état du système tout au long de la trajectoire, cette trajectoire dépend aussi du temps t mais surtout des variables de contrôle u .

On distingue deux types de critère de qualité à savoir le critère temps optimal et le critère coût optimal .

1.6.1 Temps optimal

Dans un problème de contrôle en temps optimal, on cherche le temps minimal pour qu'un contrôle admissible amène un système dynamique d'un point initial arbitraire à un point final prescrit.

Définition 1.4

Lorsque $g(T, x^*) = 0$ et $f_0(t, x, u) = 1$ et T est libre dans l'expression :

$$\min_u \left\{ g(T, x^*) + \int_0^T f_0(t, x, u) dt \right\} = T \rightarrow \min$$

on parle alors d'un problème terminal en temps optimal.

1.6.2 Coût optimal

Dans un problème de contrôle optimal on souhaite atteindre l'objectif ci-dessus en minimisant (maximisant) un certain critère. Autrement dit, soit f_0 une fonction de classe C^1 sur $I * V * U$ où $\{I : \text{un intervalle de } \mathbb{R} ; V : \text{ouvert de } \mathbb{R}^n ; U : \text{ouvert de } \mathbb{R}^m\}$ et g une fonction continue sur V .

pour tout contrôle $u \in U$, on définit le coût de la trajectoire associé à $x_u(\cdot)$ sur l'intervalle $[0, T]$

$$C(T, u) = g(T, x_u(T)) + \int_0^T f_0(t, x_u(t), u(t)) dt$$

Le problème de contrôle optimal est de déterminer les trajectoires $x_u(\cdot)$ solution du système (1.1), tel que $x_u(0) \in M_0$ et $x_u(T) \in M_1$ et en minimisant le coût $C(T, u)$. On dit que le problème de contrôle optimale est à temps final non fixé si T est libre, sinon, on parle de problème à temps final fixé.

Définition 1.5

Lorsque le temps final T est fixé dans l'expression

$$\min_u \left\{ g(T, x^*) + \int_0^T f_0(t, x, u) dt \right\}$$

on parle alors d'un problème terminal en coût optimal.

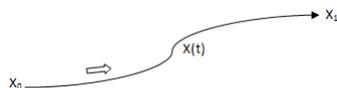
Remarques

1. Il existe des problèmes qui combinent les deux critères physiques. On parle alors d'un problème de contrôle en temps et en coût optimal (problème de Bolza).
2. Si U est un contrôle scalaire et f_0 proportionnelle à U on parle d'un problème de contrôle à coût d'approvisionnement (Fuel Cost).
3. Lorsque les équations d'état $\dot{x} = f(t, x, u)$, ne dépendent pas de t on parle d'un problème autonome, sinon on parle d'un problème non-autonome.

1.7 Contrôlabilité

Définition 1.6

Un système est dit contrôlable si $\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe une commande qui transfère x_0 à x_1 en un temps fini T .



Problème

Le problème est d'examiner si la cible qui joigne un ensemble initial M_0 à un ensemble d'arrivé M_1 est atteignable.

1.8 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Considérons le système de contrôle linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t) \\ x(0) = x_0 \\ x(t) \in \mathbb{R}^n \\ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m \\ t \in [0, T] \\ A_{n \times n}, B_{n \times m}, r(t) \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad (1.2)$$

A, B, r : Applications localement intégrables sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs respectivement dans $M_{n,n}(\mathbb{R}), M_{n,m}(\mathbb{R}), (\mathbb{R}^n)$.

Le théorème d'existence de solutions d'équations différentielles, nous assure que pour tout contrôle u , le système (1.2) admet une unique solution $x(t), t \in [0, T]$ absolument continue donnée par :

$$x(t) = F(t) \cdot x_0 + F(t) \int_0^t F^{-1}(s) [B(s)u(s) + r(s)] ds$$

où $F(t)$ est la résolvante, solution du système homogène :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{F}(t) = A(t)F(t) \\ F(0) = Id \end{array} \right.$$

Id =matrice identité.

— Si $r = 0, x_0 = 0$. La solution du système s'écrit :

$$x(t) = F(t) \int_0^t F^{-1}(s) B(s) u(s) ds$$

Elle est linéaire en u .

Ensemble Accessible

Définition 1.7

L'ensemble accessible en temps T pour le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t) & \forall t \in [0, T] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

noté $Acc(x_0, T) = \{x_u(T) \mid u \in U\}$. $Acc(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités au temps T des solutions du système partant de x_0 au temps t_0 .

$x_u(T)$ est la solution du système associée à u .

Théorème 1.1

L'ensemble d'accessibilité, $Acc(x_0, T)$ est convexe, compact et varie continuellement avec le temps t sur $[0, T]$.

Démonstration :(voir [2])

Définition 1.8

Le système (1.2) est dit contrôlable en temps T fini si : $Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n$.
On dit aussi qu'il est contrôlable en temps quelconque depuis x_0 si :

$$\bigcup_{T \geq 0} Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n.$$

1.8.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

Cas sans contrainte sur le contrôle : condition de Kalman

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t .

Théorème 1.2

On suppose que $U = \mathbb{R}^m$ (pas de contrainte sur le contrôle). Le système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$$

est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice

$$C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$$

est de rang n .

La matrice C est appelée matrice de Kalman, et la condition $\text{rang } C = n$ est appelée condition de Kalman.

Démonstration : (voir [2])

Remarques

1. La condition de Kalman ne dépend ni de T ni de x_0 . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.
2. Dans le cas d'un système linéaire autonome, la matrice $F(t) = e^{At}$ et la solution $x(t)$ du système associé au contrôle u s'écrit :

$$\forall t \in [0, T], x(t) = e^{At} \left(x_0 + \int_0^t e^{-As} (B(s)u(s) + r(s)) ds \right).$$

Cas avec contrainte sur le contrôle**Théorème 1.3 (voir [2])**

Soit $b \in \mathbb{R}^n$ et $U \subset \mathbb{R}^m$ un intervalle contenant 0 dans son intérieur. Considérons le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$, avec $u(t) \in U$. Alors tout point de \mathbb{R}^n peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si la paire (A, b) vérifie la condition de Kalman et la partie réelle de chaque valeur propre de A est inférieure ou égale à 0.

1.8.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires non-autonomes

Les deux théorèmes suivants donnent une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas non-autonome.

Théorème 1.4 (voir[2])

Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice de contrôlabilité suivante :

$$C(T) = \int_0^T F(t)^{-1} B(t) B(t)' (F(t)^{-1})' dt$$

est inversible.

Remarques

1. Cette condition dépend de T , mais ne dépend pas du point initial x_0 . Autrement dit, si un système linéaire non-autonome est contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il est contrôlable en temps T depuis tout point.
2. on a $C(t) = C(t)'$, $x' C(t) x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, i.e. $C(t)$ est une matrice carrée réelle symétrique positive.

Théorème 1.5 (voir[2])

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$$

où les applications A, B, r sont de classe C^∞ sur $[0, T]$. Définissons par récurrence

$$B_0(t) = B(t), B_{i+1}(t) = A(t)B_i(t) - \frac{dB_i}{dt}(t)$$

1. s'il existe $t \in [0, T]$ tel que

$$\text{vect} \{B_i(t)r \mid r \in \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^n$$

alors le système est contrôlable en temps T .

2. Si de plus les applications A, B, r sont analytique sur $[0, T]$, alors le système est contrôlable en temps T si et seulement si

$$\forall t \in [0, T] \text{ vect } \{B_i(t)r \mid r \in \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^n.$$

1.9 Contrôlabilité local des systèmes non-linéaires

Définition 1.9

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t) \in X \\ u(t) \in U \\ t \in [0, T] \end{cases} \quad (1.4)$$

On dit que le système (1.4) est localement contrôlable au point x_0 , s'il existe un voisinage \mathcal{A} de x_0 tel que pour tout $x_1 \in \mathcal{A}$, il existe un temps fini T et un contrôle admissible $u(\cdot) : [0, T] \rightarrow U$ tel que $x_1(t) = x(t, x_0, u(\cdot))$

On ne dispose pas de condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité pour un système non-linéaire. On a une condition suffisante de contrôlabilité local qu'on peut obtenir par linéarisation .

Théorème 1.6

Supposons qu'il existe $u_0 \in \mathbb{R}^m$ tel que u soit un voisinage de u_0 et $f(x_0, u_0) = 0$.

Soient $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$

si le rang de la matrice $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ est égal à n (le système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$ est contrôlable),

alors le système non-linéaire (1.4) est localement contrôlable en x_0

partie 2 Principe du maximum de Pontryagin

1.10 Position du problème

Soit la fonctionnelle à optimiser :

$$J(u) = \int_0^T f_0(t, x, u) dt \rightarrow \min_u \quad (1.5)$$

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ x(0) = x_0, x(T) = x_1 \end{cases} \quad (1.6)$$

Où

$u \in U \subset \mathbb{R}^m$: ensemble des commandes admissibles bornées et continues par morceaux sur $[0, T]$.

f_0 : fonction coût.

$x_0 \in M_0$: état initial du système à l'instant t_0 .

$x_1 \in M_1$: état final du système à l'instant T .

S'il n'existe pas un contrôle u satisfaisant le système (1.6), on dit que le système n'est pas contrôlable de l'état initial aux états terminaux de M_1 ; alors le problème n'admet pas de solution. Si le système est contrôlable, il existe en général beaucoup de contrôles possibles et pour chacun de ses contrôles correspond une valeur pour J .

Le problème consiste à déterminer un contrôle optimal $u^* \in U$ associé à des trajectoires x^* qui optimise la fonctionnelle J .

Définition 1.10

On peut rassembler les équations (1.5) et (1.6) en utilisant la fonction

$$H : \mathbb{R} * \mathbb{R}^{n+1} * \mathbb{R}_*^{n+1} * \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, x, p, p_0, u) \rightarrow H(t, x, p, p_0, u) = p_0 f_0(t, x, u) + \langle p, f(t, x, u) \rangle$$

appelée fonction Hamiltonienne où $p(t)$ appelé vecteur adjoint solution du système $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$.

Le système d'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p, u) = f(t, x, u) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x, p, u) = -p_0\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}(t, x, p)\right) - p\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, p)\right) \end{cases}$$

est dit système Hamiltonnien.

Définition 1.11

La fonction P découle de la résolution du système d'équation aux variables auxiliaires p_1, p_2, \dots, p_n suivant :

$$\dot{p} = - \sum_{a=0}^n \frac{\partial f_a}{\partial x^i}(t, x, u) * p_a, i = 0, \bar{n} \quad (1.7)$$

$p(t)$ est appelé état adjoint (vecteur adjoint) linéaire et homogène.

Remarques

1. Quelque soit les conditions initiales correspondantes aux fonctions p_i , le système (1.7) admet une solution unique d'après le théorème d'existence et d'unicité. Elle est définie sur $[0.T]$ tout entier sur lequel est définie la commande $u(t)$.
2. $p_i(t)$: sont continues et admettent des dérivées continues sauf aux points de discontinuités de la commande $u(t)$.

1.11 Cas sans contraintes sur le contrôle : Principe du maximum faible

Avant d'énoncer la version générale de principe du maximum de Pontryagin (qui est un résultat très long à démontrer), on annoncera les résultats concernant le cas sans contraintes sur le contrôle lorsque le critère de performance est donné sous la forme de Lagrange, on aboutira au principe du maximum dit faible.

1. Le problème de Lagrange

Dans ce problème, on cherche des conditions nécessaires d'optimalité pour le système

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (1.8)$$

où les contrôles $u(t) \in U$ sont définis sur $[0, T]$ et les trajectoires associées doivent vérifier

$x(0) = x_0$ et $x(T) = x_1$, tout en minimisant un coût de la forme

$$C(u) = \int_0^T f_0(t, x(t), u(t)) dt \quad (1.9)$$

où T est fixé.

Associons au système (1.8) le système augmenté suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ \dot{x}_0(t) = f_0(t, x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.10)$$

et notons $\tilde{x} = (x, x_0)$, $\tilde{f} = (f, f_0)$. Le problème de Lagrange se transforme au problème de Mayer. donc on a à chercher une trajectoire solution de (1.10) joignant les points $\tilde{x}_0 = (x_0, 0)$ et $\tilde{x}_1 = (x_1, x_0(T))$, et minimisant la dernière coordonnée $x_0(T)$. L'ensemble des états accessibles à partir de x_0 pour le système (1.10) est

$$\tilde{Acc}(x_0, t) = \bigcup_{u(\cdot)} \tilde{x}(t, \tilde{x}_0, u).$$

Soit une application

$$\tilde{p} = [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

tel que $(\tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{u})$ une solution du système hamiltonien défini ci-dessus

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}}(t, \tilde{x}(t), \tilde{p}(t), u(t)) \\ \dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}}(t, \tilde{x}(t), \tilde{p}(t), u(t)) \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u}(t, \tilde{x}(t), \tilde{p}(t), u(t)) = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Où $\tilde{H}(t, \tilde{x}(t), \tilde{p}(t), u(t)) = \langle \tilde{p}, \tilde{f}(t, \tilde{x}, u) \rangle$.

Soit $\tilde{p} = (p, p^0) \in (\mathbb{R}^n * \mathbb{R})$, où p^0 variable duale du coût. on obtient :

$$(\dot{p}, \dot{p}^0) = -(p, p^0) \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial f_0}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque :

1. $\dot{p}^0(t) = 0$ c'est à dire que $p^0(t)$ est constant sur $[0, T]$. On choisit par convention $p^0 \leq 0$ (car le vecteur $\tilde{p}(t)$) est défini à scalaire multiplicatif près).

Par ailleurs :

$$\tilde{H} = \langle \tilde{p}, \tilde{f}(t, x, u) \rangle = pf + p^0 f$$

Donc :

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} = 0 = p \frac{\partial f}{\partial u} + p^0 \frac{\partial f_0}{\partial u}$$

Théorème 1.7 (principe du maximum faible) (voir[2])

Si le contrôle u associé au système de contrôle (1.8) est optimal pour le coût (1.9), alors il existe une application $p(\cdot)$ absolument continue sur $[0, T]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, et les équations suivantes sont vérifiées pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) & (1.11) \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) & (1.12) \\ \frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = 0 & (1.13) \end{cases}$$

où H est le Hamiltonien associé au problème (1.8)

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f_0(t, x, u) \quad (1.14)$$

2. Le problème de Mayer-Lagrange :

Ce problème appelé problème de Bolza est l'union de la fonctionnelle de Mayer et Lagrange :

$$C(T, u) = \int_0^T f_0(t, x_u(t), u(t)) dt + g(T, x_u(T)) \quad (1.16)$$

où le temps final T n'est pas fixé. Soit M_1 une variété de \mathbb{R}^n . Le problème de contrôle optimal est alors de déterminer une trajectoire solution de

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0$$

où les contrôles $u(\cdot)$ sont dans l'ensemble des contrôles admissibles U sur $[0, T]$, telle que $x(T) \in M_1$, et de plus $x(\cdot)$ minimise sur $[0, T]$ le coût (1.16). Supposons que la variété M_1 est donnée par

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$$

où F est une fonction de classe C^1 de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

En écrivant $F = (F_1, \dots, F_p)$ où les fonctions F_i sont à valeurs réelles, il vient que :

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F_1(x) = \dots = F_p(x) = 0\}$$

et de plus l'espace tangent à M_1 en un point $x \in M_1$ est

$$T_x M_1 = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \nabla F_i(x) \cdot v = 0, i = 1, \dots, p\}$$

Théorème 1.8 (voir[2])

Si un contrôle $u \in \mathbb{R}^m$ est optimal sur $[0, T]$ pour le problème (1.16), alors il existe une application

$p : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}_*^n$ absolument continue, et un réel $p^0 \leq 0$ tel que le couple (p, p^0) est non trivial, et :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \\ \frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = 0 \end{cases}$$

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f_0(t, x, u).$$

Si de plus la cible M_1 est une sous-variété de \mathbb{R}^n alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$; tels que l'on ait au point final (T, x^f)

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \mid p(T) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla F_i(x(T)) + p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T))$$

Si de plus le temps final est libre dans le problème de contrôle optimal, et si u est continue au temps T , alors on a au temps final T

$$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = -p^0 \frac{\partial F}{\partial t}(T, x(T)).$$

1.12 PMP : Énoncé général

La version complète de PMP prend en compte les contraintes sur le contrôle, et affirme que cet extrémum est un maximum.

Théorème 1.9 (voir[2])

On considère le système de contrôle dans \mathbb{R}^n

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (1.17)$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle $[0, T]$ et à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^m$.

Soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n . On note U l'ensemble des contrôles admissibles dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps T .

Par ailleurs on définit le coût d'un contrôle u sur $[0, T]$

$$C(t, u) = \int_0^t f^0(s, x(s), u(s)) ds + g(t, x(t)), \quad (1.18)$$

où $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 .

On considère le problème de contrôle optimal suivant : Déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 et minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non.

Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue

appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, tels que, pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \end{cases} \quad (1.19)$$

où $H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u)$ est l'Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation sur $[0, T]$

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, v) \quad (1.20)$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final T

$$\max_{v \in U} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)). \quad (1.21)$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) \in M_0$ et $x(T) \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0 \quad (1.22)$$

$$p(T) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(T)}M_1 \quad (1.23)$$

Les conditions (1.22) et (1.23) sont appelées conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.

Définition 1.12

Une extrémale du problème de contrôle optimal est un quadruplet $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution des équations (1.19) et (1.20). Si $p^0 = 0$, on dit que l'extrémale est anormale, et si $p^0 \neq 0$ l'extrémale est dite normale.

Remarques

1. Si le contrôle u est continu au temps T , la condition (1.20) peut s'écrire

$$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)). \quad (1.24)$$

2. En particulier si le système augmenté est autonome, i.e. si f et f^0 ne dépendent pas de t , alors H ne dépend pas de t , et on a

$$\forall t \in [0, T] \quad \max_{v \in U} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = Cste$$

Notons que cette égalité est alors valable partout sur $[0, T]$ (en effet cette fonction de t est lipschitzienne)

3. La convention $p^0 \leq 0$ conduit au principe du maximum. La convention $p^0 \geq 0$ conduit au principe du minimum, i.e. la condition (1.21) serait une condition de minimum.
4. Dans le cas où $U = \mathbb{R}^m$, i.e. lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur le contrôle, la condition de maximum (1.21) devient $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, et on retrouve le principe du maximum faible.

1.13 Conditions de transversalité

1.13.1 Conditions de transversalité sur le vecteur adjoint

Dans ce qui suit le temps final pour atteindre la cible peut être fixé ou non. Réécrivons les conditions (1.22) et (1.23) dans les deux cas importants suivants.

1 Problème de Lagrange.

Dans ce cas le coût s'écrit

$$C(t, u) = \int_0^t f_0(s, x(s), u(s)) ds$$

i.e. $g = 0$. Les conditions de transversalité (1.22) et (1.23) sur le vecteur adjoint s'écrivent alors

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0$$

$$p(T) \perp T_{x(T)}M_1$$

Remarque

1. Si $M_0 = \{x_0\}$, la condition (1.22) devient vide. Si au contraire $M_0 = \mathbb{R}^n$, i.e. si le point initial n'est pas fixé, on obtient $p(0) = 0$. De même, si $M_1 = \mathbb{R}^n$, on obtient $p(T) = 0$. Autrement dit si le point final est libre alors le vecteur adjoint au temps final est nul.

2 Problème de Mayer.

Dans ce cas le coût s'écrit :

$$C(t, u) = g(t, x(t))$$

i.e. $f_0 = 0$. Les conditions de transversalité (1.22) et (1.23) ne se simplifient pas à priori. Mais dans le cas particulier important où $M_1 = \mathbb{R}^n$, autrement dit le point final $x(T)$ est libre, la condition (1.23) devient

$$p(T) = p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \quad (1.25)$$

et alors forcément $p^0 \neq 0$ (on prend $p^0 = -1$) Si de plus g ne dépend pas du temps, on a coutume d'écrire :

$$p(T) = p^0 \nabla g(x(T))$$

Autrement dit le vecteur adjoint au temps final est égal, à la constante p^0 près au gradient de g pris au point final.

1.13.2 Condition de transversalité sur le Hamiltonien

La condition (1.21) n'est valable que si le temps final pour atteindre la cible n'est pas fixé.

Nous nous plaçons donc dans ce cas. La seule simplification notable de cette condition est le cas où la fonction g ne dépend pas du temps t (ce qui est vrai par exemple pour un problème de Lagrange), et la condition de transversalité (1.21) sur le Hamiltonien devient alors

$$\max_{v \in U} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = 0 \quad (1.26).$$

ou encore, si u est continu au temps T

$$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = 0 \quad (1.27)$$

Autrement dit le Hamiltonien s'annule au temps final .

Remarque

1. Si le système augmenté est de plus autonome, i.e. si f et f_0 ne dépendent pas de t , alors on a le long d'une extrémale

$$\forall t \in [0, T], \max_{v \in U} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = 0$$

partie 3 Méthodes numériques en contrôle optimal

1.14 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes sont composées de méthodes appelées méthodes de tir simple et méthodes de tir multiple. Elle consiste à résoudre numériquement par une méthode de tir un problème aux valeurs limite obtenu par l'application de principe du maximum.

1 Méthode de tir simple

Considérons le problème de contrôle optimal

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

et le cout associe

$$C(T, u) = \int_0^T f^0(t, x_0(t), u(t))dt + g(T, x_u(T))$$

Supposons dans un premier temps que le temps final T est fixé. Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. Si l'on est capable, à partir de la condition du maximum d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de $(x(t), p(t))$, alors le système extrémal est un système différentiel de la forme $\dot{z}(t) = F(t, z(t))$, où $z(t) = (x(t), p(t))$, et les conditions initiales, les conditions finales et les conditions de transversalité se mettent sous la forme $R(z(0), z(T)) = 0$. Finalement, on obtient le problème aux valeurs limites

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)) \\ R(z(0), z(T)) = 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

Notons $z(t, z_0)$ la solution du problème de Cauchy $\dot{z}(t) = F(t, z(t), z(0))$,

$z(0) = z_0$, et posons $G(z_0) = R(z_0, z(T, z_0))$. Le problème (1.28) aux valeurs limites est équivalent à $G(z_0) = 0$, il s'agit de déterminer un zéro de la fonction G .

2 Méthode de tir multiple

Par rapport à la méthode de tir simple, la méthode de tir multiple découpe l'intervalle $[0, T]$ en N intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ et se donne comme inconnues les valeurs $z(t_i)$ au début de chaque sous-intervalle. Il faut prendre en compte des conditions de recollement en chaque temps t_i (conditions de continuité). L'intérêt est d'améliorer la stabilité de la méthode. De manière plus précise, considérons un problème de contrôle optimal général. L'application du principe du maximum réduit le problème à un problème aux valeurs limites du type

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)) = \begin{cases} F_0(t, z(t)) & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ F_1(t, z(t)) & \text{si } t_1 \leq t < t_2 \\ \vdots \\ F_s(t, z(t)) & \text{si } t_s \leq t < T \end{cases}$$

où $z = (x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ (p est le vecteur adjoint), et $t_1, t_2, \dots, t_s \in [0, T]$ peuvent être des temps de commutation.

1.15 Méthodes directes

Les méthodes directes consistent à transformer le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie. C'est la méthode la plus évidente lorsqu'on aborde un problème de contrôle optimal. En discrétise l'état et le contrôle, on se ramène à un problème d'optimisation non-linéaire en dimension finie (ou problème de programmation non-linéaire) de la forme

$$\min_{z \in c} F(z)$$

où $z = (x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)$, et

$c = \{z \mid g_i(z) = 0, i = 1, \dots, r, g_i(z) \leq 0, i \in r + 1, \dots, m\}$ Plus précisément, la méthode consiste à choisir les contrôles dans un espace de dimension finie, et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles.

1.16 Quelques Caractéristiques des méthodes directes et indirectes

méthodes directes	méthodes indirectes
efficaces en basse dimension	efficaces en toute dimension
précision numérique basse ou moyenne	très grande précision numérique
peu sensible au choix de la condition initial	sensible au choix de la condition initial

Chapitre 2

Problème de la traversée d'un fleuve par une barque

Biographie

Ernest Friedrich Ferdinand Zermelo

Ernest Zermelo (27 juillet 1871 [Berlin] - 21 mai 1953 [Fribourg]) Ernest Zermelo est un mathématicien allemand ayant eu des contributions fondamentales à la théorie des ensembles. Après avoir fréquenté un lycée de Berlin, Zermelo étudie, comme c'est alors la coutume en Allemagne, dans plusieurs universités (Berlin, Halle et Fribourg) des sujets assez variés (mathématiques, physique, philosophie,...). Son doctorat, soutenu à l'université de Berlin en 1894, porte sur le calcul des variations. Il devient alors assistant de Max Planck sous les conseils duquel il commence à étudier l'hydrodynamique. En 1897, il part pour Gottingen où il passe son habilitation en 1899. Les mathématiques sont alors à un tournant, celui de la crise de leurs fondements. Dans la liste des 23 problèmes que propose *Hilbert* au congrès international des mathématiciens de 1900 à Paris, le premier concerne l'hypothèse du continu, qui est une conjecture émise par Cantor en 1878 : est-ce que toute partie de l'ensemble des réels est ou bien en bijection avec les entiers naturels, ou bien en bijection avec \mathbb{R} tout entier ? *Hilbert* identifie ce problème comme étant le plus important sans doute pour les mathématiciens du XXIème siècle, et propose même une étape intermédiaire pour y arriver : est-ce que tout ensemble peut être

muni d'un bon ordre, c'est-à-dire d'un ordre pour lequel toute partie non vide admet un plus petit élément? Ces problèmes passionnent Zermelo. Dès 1904, il répond partiellement à *Hilbert* : tout ensemble peut être effectivement muni d'un bon ordre. Pour ce faire, il note qu'il a besoin de ce qu'il appelle lui-même l'axiome du choix, c'est-à-dire que si on prend une collection d'ensembles non vides et disjoints deux à deux, il existe un ensemble contenant exactement un élément de chacun de ces ensembles. Cela lui vaut une critique de nombreux mathématiciens qui jugent que l'on ne peut utiliser ce principe, et ces critiques ne laissent pas Zermelo indifférent. Il n'existe alors pas de formalisation de la théorie des ensembles. Parallèlement, en 1903, Russel avait découvert le paradoxe de théorie des ensembles qui porte son nom. Ceci motive Zermelo à établir une axiomatique de la théorie des ensembles. Il publie cette axiomatique en 1908, après avoir échoué à prouver qu'elle n'est pas contradictoire. On sait depuis les théorèmes d'incomplétude de Gödel que cela était en réalité impossible. C'est cette axiomatique, améliorée par Fraenkel (et indépendamment par Skolem) en 1922 qui est encore principalement utilisée en mathématiques. En 1910, Zermelo délaïsse Göttingen pour Zürich où il a obtenu un poste de professeur. Mais sa santé est fragile, et il quitte Zürich pour s'installer dans la forêt noire en 1916. Il devient professeur honoraire de l'université de Fribourg en 1926. Son opposition au régime nazi le fait démissionner en 1935. Après la seconde guerre mondiale, à sa demande, il retrouve son poste en 1946.

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, On étudie un des problème classique de contrôle optimal. C'est le problème de navigation de Zermelo (problème de la traversée d'un fleuve par une barque), qui traite la caractérisation des trajectoires optimales pour une barque traversant un fleuve en présence du courant, dont la vitesse du courant est supposée connue et est donnée par une fonction quadratique, on accorde aussi une vitesse constante à la barque dans un fleuve de largeur donnée, l'état du système est la position de la barque (x, y) . Le modèle mathématique est donné par un système non-linéaire dans \mathbb{R}^2 contrôlé par la direction $U \in [0, \frac{\pi}{2}]$ que le capitaine doit contrôlé pour réduire au minimum le temps de voyage à l'origine.

2.2 Modélisation du problème

Après la modélisation mathématique effectuée sur le problème de Zermelo, on a le problème suivant :

$$\begin{cases} J(X, U) = x(T) \rightarrow opt \\ \dot{x}(t) = V \cos u(t) + c(y(t)), & x(0) = 0 \\ \dot{y}(t) = V \sin u(t), & y(0) = 0 \\ u \in [0, \frac{\pi}{2}], X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T] \end{cases} \quad (2.1)$$

Où

- V : la vitesse constante de la barque.
- u : l'angle de la barque par rapport à l'axe (ox) , est le contrôle.
- $y(0)$ et $x(0)$: positions initiales.
- $x(t)$: position de descente le long du fleuve.
- $y(t)$: la distance de la barque à l'origine.
- $c(y(t))$: la vitesse du courant, elle est donnée par la formule suivante

$$c(y(t)) = -0.05 * y(t)^2 + y(t)$$

Le problème porte sur une barque navigant sur un plan d'eau, provenant d'un point initial A à un point final D . La barque est capable d'une vitesse maximale, nous voulons retirer le meilleur contrôle possible $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pour

atteindre D dans le temps le moins possible. C'est un problème de temps optimal avec des contraintes terminales, puisque les deux valeurs initiales et finales x_0 et y_0 sont données.

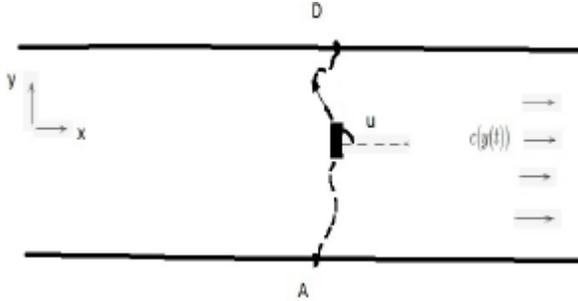


FIGURE 2.1 – Présentation schématique du problème de Zermelo

2.3 Résolution du problème de zermelo

Dans cette section, On traite le problème de contrôle optimal d'une barque qui traverse un fleuve, où le contrôle est l'angle de la barque par rapport à l'axe (ox). L'objectif est de déterminer une trajectoire optimal jusqu'à une cible donnée, puis minimiser le temps de la traversé.

2.3.1 Principe du maximum appliqué au problème de Zermelo

Soit le problème de Zermelo donné par (2.1).

La fonction Hamiltonienne associe est donnée par :

$$H(t, x, p, u) = -1 + p_1(V \cos u(t) + c(y(t))) + p_2 * V \sin u(t)$$

Les équations adjointes sont :

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)}(t, x, p, u) = 0 \\ \dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial y(t)}(t, x, p, u) = -c'(y(t)) * p_1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u(t)}(t, x, p, u) = -p_1 * V * \sin u(t) + p_2 * V * \cos u(t) = 0$$

Comme $V \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} p_2 * V * \cos u(t) &= p_1 * V * \sin u(t) \\ \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} &= \frac{\sin u(t)}{\cos u(t)} \Rightarrow p_2 = p_1 * \frac{\sin u(t)}{\cos u(t)} \end{aligned}$$

replaçons p_2 par sa valeur dans $H(\cdot)$ on aura :

$$\begin{aligned} H(t, x, p, u) &= -1 + p_1(V \cos u(t) + c(y(t))) + p_1 \frac{\sin u(t)}{\cos u(t)} * V * \sin u(t) \\ &= -1 + p_1 * V * (\cos u(t) + \frac{\sin^2 u(t)}{\cos u(t)}) + p_1 * c(y(t)) \\ &= -1 + p_1 * V * (\frac{\cos^2 u(t) + \sin^2 u(t)}{\cos u(t)}) + p_1 * c(y(t)) \\ &= -1 + p_1 * V * (\frac{1}{\cos u(t)}) + p_1 * c(y(t)) \\ &= -1 + p_1 * (\frac{V}{\cos u(t)} + c(y(t))) \\ \max_{u(t)} H(t, x, p, u) &= -1 + \max_{u(t)} p_1 \left(\frac{V}{\cos u(t)} + c(y(t)) \right) \\ &= -1 + \left(\max_{u(t)} p_1 \left(\frac{V}{\cos u(t)} \right) \right) + p_1 * c(y(t)) \\ &= -1 + p_1 * c(y(t)) + p_1 * V * \max_{u(t)} \left(\frac{1}{\cos u(t)} \right) \end{aligned}$$

Différencions H par rapport à t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= \dot{p}_1 * V * \cos u(t) - p_1 * V * \sin u(t) * \dot{u}(t) + \dot{p}_1 * c(y(t)) + p_1 * c'(y(t)) * \dot{y}(t) \\ &+ \dot{p}_2 * V * \sin u(t) + p_2 * V * \cos u(t) * \dot{u}(t) \\ &= \dot{p}_1(V * \cos u(t) + c(y(t))) + (-p_1 * V * \sin u(t) + p_2 * V * \cos u(t))\dot{u}(t) + p_1 * c'(y(t)) * \dot{y}(t) + \dot{p}_2 * V * \sin u(t) \\ &= \dot{p}_1 * \dot{x} + \dot{p}_2 * \dot{y}(t) + (p_1 * c'(y(t)) * \dot{y}(t) + (-p_1 * V * \sin u(t) + p_1 * V * \frac{\sin u(t)}{\cos u(t)} * \cos u(t))\dot{u}(t) \\ &= \dot{p}_1 * \dot{x} + (\dot{p}_2 + p_1 * c'(y(t))) * \dot{y} \\ &= 0 + (\dot{p}_2 - \dot{p}_2) * \dot{y}(t) = 0, \text{C'est à dire } \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \\ &\Rightarrow H \equiv \text{const}, (H \text{ est constant par rapport au temps } \forall t \in [0, T]) \end{aligned}$$

Le fait que p_1 est constant, car $\dot{p}_1 = 0$, on obtient :

$$A = \frac{V}{\cos u(t)} + c(y(t))$$

Comme A est constante dans le temps alors le contrôle $u(t)$ se détermine en fonction de y

$$\cos u(t) = \frac{V}{A - c(y(t))}$$

Delà les équations d'état deviennent

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{V^2}{A - c(y(t))} + c(y(t)) \\ \dot{y} = V * \sqrt{1 - \frac{V^2}{A - c(y(t))^2}} \end{cases}$$

2.3.2 Résolution du problème dans différents cas

Le mouvement d'une barque déplaçant à vitesse constante V par rapport à l'eau où il y a un courant $c(y(t))$ est donné par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = V \cos u(t) + c(y(t)) \\ \dot{y}(t) = V \sin u(t) \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ u \in [0, \frac{\pi}{2}], X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T] \end{cases} \quad (2.2)$$

2.1 Solution analytique

1. Supposons que pour tout y on ait $c(y(t)) > V$. Quelle est la loi optimale permettant de minimiser le déport $x(t)$ pour atteindre la berge opposé?.
2. Résoudre le problème de temps minimal pour atteindre la berge opposé ($X(T)$ libre).
3. Résoudre le problème de temps minimal pour atteindre un point M de la berge opposé ($X(T)$ fixé).
4. Pour T est fixé, le contrôle optimal donné par le PMP est égal à : $u(t) = \arctan(T - t)$, vérifier ce résultat, et calculer la trajectoire correspondante à ce contrôle.(voir[3])

Si on prend $c(y(t))$ tel qu'il est défini, cela peut être couteux en terme de temps et de calcul. Considérons donc $c(y(t))$ étant une constante.

Premier cas

$$\begin{cases} \min x(T) \\ y(T) = l \end{cases}$$

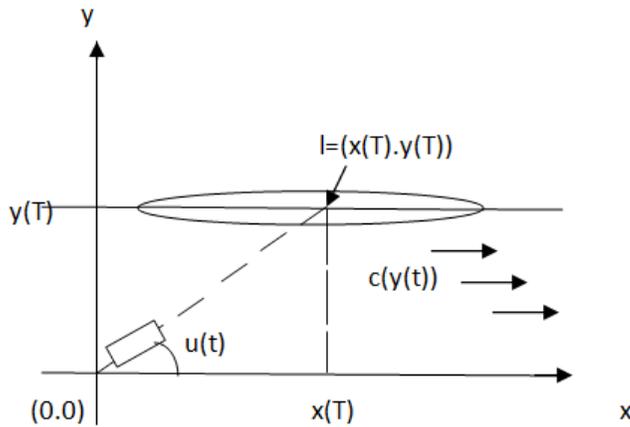


FIGURE 2.2 –

De (2.2) on calcul l'Hamiltonnien :

$$H(.) = p_1(V \cos u(t) + c(y(t))) + p_2(V \sin u(t))$$

Les vecteurs adjoints :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = -c'(y(t)) * p_1 \end{cases}$$

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = l\}$$

$$(p(T) - p^0 \frac{\partial f}{\partial x}(T, x(T))) \perp T_{x(T)} M_1$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} p_1(T) \\ p_2(T) \end{pmatrix} - p^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \perp T_{x(T)} M_1$$

$$p_1(T) = p^0 \cdot p_1(T) = -\frac{\partial x(T)}{\partial x} = -1$$

$$\max_u H(.) \Rightarrow \max_u (p_1 \cos u(t) + p_2 \sin u(t)), u \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = V \sin u + p_2 * V * \cos u = 0 \Rightarrow p_2 = -\frac{\sin u}{\cos u}$$

remplaçons p_2 par sa valeur dans $H(.)$

$$H(T) = 0$$

$$H(.) = -V \cos u - c(y(t)) - V \frac{\sin^2 u}{\cos u} \Rightarrow -V \left(\frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos u} \right) - c(y(t)) = 0$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{V}{\cos u}\right) = c(y(t))$$

$$\Rightarrow \cos u = -\frac{V}{c(y(t))} \Rightarrow u(t) = \arccos\left(-\frac{V}{c(y(t))}\right)$$

Calcul de la position final

$$\begin{cases} \min x(T) \\ y(T) = l \\ u = \arccos\left(-\frac{V}{c(y(t))}\right) \\ x(T) = x_f \\ y(T) = l \end{cases}$$

remplaçons u par sa valeur dans (2.2), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos(\arccos(-\frac{V}{c(y(t))})) + c(y(t)) = \frac{-V^2}{c(y(t))} + c(y(t)) \\ \dot{y} = V \sin(\arccos(-\frac{V}{c(y(t))})) = Va \text{ avec } a = \sin(\arccos(-\frac{V}{c(y(t))})) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \left(-\frac{V^2}{c(y(t))} + c(y(t))\right)t + c_1 & x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ y(t) = (Va)t + c_2 & y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(T) = \left(-\frac{V^2}{c(y(t))} + c(y(t))\right)T & (1) \\ y(T) = (Va)T = l & (2) \end{cases}$$

$$\text{de (1)} \Rightarrow T_1 = \frac{x(T)}{-\frac{V^2}{c(y(t))} + c(y(t))}$$

$$\text{de (2)} \Rightarrow T_2 = \frac{l}{Va}$$

$$T_1 = T_2 \Rightarrow \frac{x(T)}{-\frac{V^2}{c(y(t))} + c(y(t))} = \frac{l}{Va}$$

$$\begin{cases} x(T) = l * \frac{\left(-\frac{V^2}{c(y(t))} + c(y(t))\right)}{Va} \\ y(T) = l \end{cases}$$

deuxième cas

$$\begin{cases} \min T \\ y(T) = l \end{cases}$$

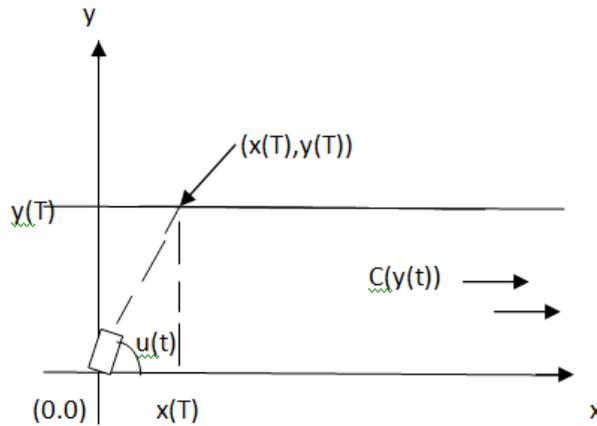


FIGURE 2.3 –

l'Hamiltonien est :

$$H(.) = p_1 * V * \cos u(t) + p_1 * c(y(t)) + p_2 * V * \sin u(t) + p^0$$

Les vecteurs adjoints :

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_1 = c, p_1(T) = 0 \Rightarrow p_1 \equiv 0$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Rightarrow p_2 \equiv c \neq 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = p_2 * V * \cos u = 0$$

$$\Rightarrow \cos u(t) = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$$

Calcul du temps final

$$\begin{cases} \min T \\ u = \frac{\pi}{2} \\ x(T) = x_f \\ y(T) = l \end{cases}$$

remplaçons u par sa valeur dans

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = V \cos u(t) + c(y(t)) \\ \dot{y}(t) = V \sin u(t) \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = V \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c(y(t)) \\ \dot{y}(t) = V \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = c(y(t)) \\ \dot{y}(t) = V \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = (c(y(t)))t + c_1 & x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ y(t) = V * t + c_2 & y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(T) = (c(y(t)))T = x_f & (1) \\ y(T) = V * T = l & (2) \end{cases}$$

de (1) $T_1 = \frac{x_f}{c(y(t))}$

de (2) $T_2 = \frac{l}{V}$

$T_1 = T_2 \Rightarrow \frac{x_f}{c(y(t))} = \frac{l}{V}$

$$\begin{cases} x(T) = \frac{l}{V} * c(y(t)) \\ y(T) = l \end{cases}$$

troisième cas

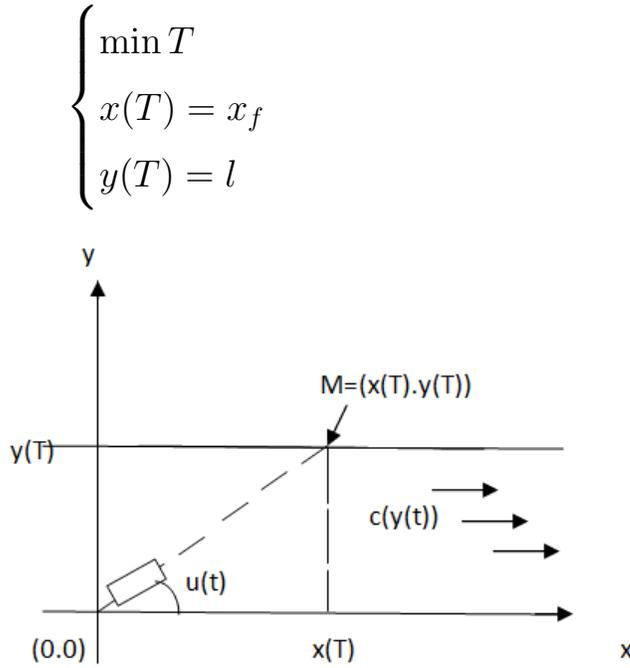


FIGURE 2.4 –

l'Hamiltonien est :

$$H(.) = p_1(V \cos u(t) + c(y(t))) + p_2(V \sin u(t)) + p^0$$

Les vecteurs adjoints :

$$\dot{p}_1(t) = 0 \Rightarrow p_1(t) = cste$$

$$\dot{p}_2(t) = p_1 * c'(y(t))$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow -p_1 V \sin u + p_2 V \cos u = 0 \Rightarrow p_2 = \frac{p_1 \sin u}{\cos u}$$

remplaçons p_2 par sa valeur dans $H(.)$

$$H(.) = p_1 V \cos u + p_1 c(y(t)) + p_1 V \frac{\sin^2 u}{\cos u} + p^0$$

$$H(.) = p_1 V \left(\frac{1}{\cos u} \right) + p_1 c(y(t)) + p^0 = 0$$

$$\Rightarrow \cos u = \frac{p_1 V}{-p_1 c(y(t)) - p^0}$$

$$1^{er} \text{ cas : } p^0 \neq 0, p^0 = -1 \Rightarrow \cos u = \frac{p_1 V}{1 - p_1 c(y(t))}$$

$$\Rightarrow u(t) = \arccos \frac{p_1 V}{1 - p_1 c(y(t))}$$

2^{eme} cas : $p^0 = 0$ on retrouve le premier cas, contrôle de départ.

Calcul du temps final

$$\begin{cases} \min T \\ u = \arccos \frac{p_1 V}{1 - p_1 c(y(t))} \\ x(T) = x_f \\ y(T) = y_f \end{cases}$$

remplaçons u par sa valeur dans :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = V \cos u(t) + c(y(t)) \\ \dot{y}(t) = V \sin u(t) \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos(\arccos(\frac{p_1 V}{1 - p_1 c(y(t))})) + c(y(t)) = \frac{p_1 V^2}{1 - p_1 c(y(t))} + c(y(t)) \\ \dot{y} = V \sin(\arccos(\frac{p_1 V}{1 - p_1 c(y(t))})) = Va, \quad a = \sin(\arccos(\frac{p_1 V}{1 - p_1 c(y(t))})) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = (\frac{p_1 V^2}{1 - p_1 c(y(t))} + c(y(t))) * t + c_1 & x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ y(t) = (Va) * t + c_2 & y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(T) = (\frac{p_1 V^2}{1 - p_1 c(y(t))} + c(y(t))) * T & (1) \\ y(T) = (Va) * T = l & (2) \end{cases}$$

de (1) $T_1 = \frac{x(T)}{\frac{p_1 V^2}{1 - p_1 c(y(t))} + c(y(t))}$

de (2) $T_2 = \frac{l}{Va}$

$$T_1 = T_2 \Rightarrow \frac{x(T)}{\frac{p_1 V^2}{1 - p_1 c(y(t))} + c(y(t))} = \frac{l}{Va}$$

$$\begin{cases} x(T) = \frac{p_1 V^2}{1 - p_1 c(y(t))} + c(y(t)) * \frac{l}{Va} \\ y(T) = l \end{cases}$$

Quatrième cas

Ce problème est un problème de portée maximale où nous voulons maximiser la distance parcourue dans la direction x . Supposons que la position initiale de la barque soit $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et que le courant d'eau est linéaire par rapport à y , c'est-à-dire $c(y) = y$.

Alors problème peut être formulé comme suit :

$$\begin{cases} \min_{u(t)} J = -x(T) \\ \dot{x}(t) = V \cos u(t) + y \\ \dot{y}(t) = V \sin u(t) \\ T \text{ fixé} \end{cases}$$

Calcul de l'Hamiltonien :

$$H(\cdot) = p_1 V \cos u + p_1 y + p_2 V \sin u$$

Les vecteurs adjoints :

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_1(t) = c_1$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_1 \Rightarrow p_2(t) = -c_1 t + c_2$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow -p_1 V \sin u + p_2 V \cos u = 0$$

$$\Rightarrow p_1 \sin u = p_2 \cos u$$

$$\Rightarrow c_1 \sin u = -c_1 t + c_2 \cos u$$

$$\Rightarrow \frac{-c_1 t + c_2}{c_1} = \frac{\sin u}{\cos u} \Rightarrow -t + c = \tan u \quad c = \frac{c_2}{c_1}$$

$y(T)$ n'est pas fixé.

$$p_2(T) = 0 \Rightarrow -c_1 T + c_2 = 0 \Rightarrow T = \frac{c_2}{c_1} = c$$

$$\tan u = T - t \Rightarrow u(t) = \arctan(T - t)$$

remplaçons u par sa valeur dans :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = V \cos u(t) + y \\ \dot{y}(t) = V \sin u(t) \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = V \cos(\arctan(T - t)) + y \\ \dot{y}(t) = V \sin(\arctan(T - t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = [V \cos(\arctan(T - t)) + y]t + c_1 & x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ y(t) = [V \sin(\arctan(T - t))]t + c_2 & y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_1(t) = k_1$$

$$p_1(T) = -\frac{\partial \zeta(x(t))}{\partial x(t)} = \frac{\partial x(t)}{\partial x(t)} = 1 \text{ avec } \zeta(x(t)) = -x(t)$$

$$p_1(T) = k_1 = 1$$

$$p_2(T) = -\frac{\partial \zeta(x(t))}{\partial y(t)} = 0$$

remplaçons p_1 et p_2 par leurs valeurs dans l'Hamiltonien

$$H(\cdot) = V \cos u(t) + y$$

$$\text{si } u \equiv 0 \Rightarrow H(0) = V + y$$

$$\text{si } u \equiv \arctan(T - t) \Rightarrow H(\arctan(T - t)) = V \cos(\arctan(T - t)) + y \geq 0$$

$$\Rightarrow H(0) \leq H(\arctan(T - t)) \Rightarrow u \equiv \arctan(T - t) \text{ vérifier le PMP}$$

$$\Delta J(u(t)) = J(\tilde{u}) - J(u) = -\int_0^T (H(\tilde{u}) - H(u)) dt \stackrel{?}{\geq} 0 \quad \forall \tilde{u} = u + \Delta u$$

$$H(u) = V \cos u + y \quad \text{pour tout } u(t) = \arctan(T - t)$$

$$H(\tilde{u}) = V \cos \tilde{u} + y$$

$$\Delta_{\tilde{u}} H = H(\tilde{u}) - H(u) = (V \cos \tilde{u} + y) - (V \cos u + y) = V(\cos \tilde{u} - \cos u)$$

$$\Delta_{\tilde{u}} H = -2V \left(\sin \frac{\tilde{u}+u}{2} \sin \frac{\tilde{u}-u}{2} \right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \Delta J(\tilde{u}) = J(\tilde{u}) - J(u) \geq 0 \quad \forall \tilde{u} \Rightarrow u \equiv \arctan(T - t) \text{ est optimal.}$$

Calcul de temps final

Remplaçons $u(t)$ par sa valeur dans :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = V \cos(\arctan(T-t)) + y \\ \dot{y}(t) = V \sin(\arctan(T-t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = (V \cos(\arctan(T-t)) + y)t + c_1 & x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ y(t) = (V \sin(\arctan(T-t)))t + c_2 & y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(T) = (V \cos(\arctan(T-t)) + y)T & (1) \\ y(T) = (V \sin(\arctan(T-t)))T & (2) \end{cases}$$

$$\text{De (1) } T_1 = \frac{x(T)}{(V \cos(\arctan(T-t)) + y)}$$

$$\text{De (2) } T_2 = \frac{y(T)}{(V \sin(\arctan(T-t)))}$$

$$T_1 = T_2 \Rightarrow \frac{x(T)}{(V \cos(\arctan(T-t)) + y)} = \frac{y(T)}{(V \sin(\arctan(T-t)))}$$

$$x_f = \frac{y(T)(V \cos(\arctan(T-t)) + y)}{(V \sin(\arctan(T-t)))}$$

$$\begin{cases} x(T) = \frac{y(T)}{T-t} + \frac{y(T)*y}{V \sin(\arctan(T-t))} \\ y(T) = x(T) * \frac{\sin(\arctan(T-t))}{\cos(\arctan(T-t)) + y} \end{cases}$$

Chapitre 3

Application et simulations

Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité, qui permet de calculer les trajectoires optimales, aussi son application peut être en pratique assez complexe. Pour trouver les solutions qui satisfont ces conditions, on fait appel à la méthode de Tir Simple.

3.1 Application de la méthode indirecte (tir simple)

Notre problème de Zermelo est donné par (2.1).

La connaissance de la fonction de tir simple, permet de considérer que ce problème optimal est entièrement résolu mathématiquement. Nous avons le problème à deux bouts suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos u(t) + c(y(t)) \\ \dot{y} = V \sin u(t) \\ \dot{p}_1 = 0 \\ \dot{p}_2 = -c'(y(t)) * p_1 \\ x(0) = 0, \quad x(T) = x_f \\ y(0) = 0, \quad y(T) = y_f \end{cases} \quad (3.1)$$

Désignons la fonction $z(t) = (X(t), P(t))$ définie dans X à valeur dans U . Alors le système extrémales est un système différentiel de la forme

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)).$$

Les conditions initiales, les conditions finales et les conditions de transversalité se mettent sous la forme $R(z(0), z(T)) = 0$.

Finalement, on obtient le problème aux deux bouts (valeurs limites) :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)) \\ R(z(0), z(T)) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Notons $z(t, z_0)$ solution du problème de cauchy

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

Posons $G(z_0) = R(z_0, z(T, z_0))$. Le problème (3.2) aux deux bouts est alors équivalent à $G(z_0) = 0$. où G est la fonction de Tir simple.

D'après le principe du maximum appliqué au problème de zermelo on trouve que le contrôle $u(t) = \arccos(\frac{V}{A-c(y(t))})$.

Posons $z(t) = (x(t), y(t), p_1(t), p_2(t)) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t))$.

Résoudre le problème à deux bouts est équivalent a déterminer un zéro de la fonction G associe à notre problème définie par :

$$G : z \rightarrow G(z) = z(t, 0, 0, h) - x_f = 0$$

Notre système devient :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = V \cos u(t) + c(y(t)) \\ \dot{z}_2 = V \sin u(t) \\ \dot{z}_3 = 0 \\ \dot{z}_4 = -c'(z_2(t)) * z_3(t) \\ z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = 0 \\ z_3(0) = h_1 \in \mathbb{R}, \quad z_4 = h_2 = - \int_0^T (c'(z_2(t)) * z_3(t)) dt \end{cases}$$

Soit $z(t, 0, 0, h_1, h_2)$ solution du système au temps t avec les conditions initiales et finales $(0, 0, h_1, h_2)$.

Si le temps final est libre :

$$z(T, 0, 0, h_1, h_2) - x_f = \begin{pmatrix} z_1(T, 0, 0, h_1, h_2) \\ z_2(T, 0, 0, h_1, h_2) \\ z_3(T, 0, 0, h_1, h_2) \\ z_4(T, 0, 0, h_1, h_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_{1f} \\ z_{2f} \\ qlq \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G(z) = \begin{pmatrix} z_1(T) - z_{1f} \\ z_2(T) - z_{2f} \\ H(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.2 Résolution par la méthode indirecte (tir simple) sous Matlab

3.2.1 premier cas

On pose $V = 2 \text{ m/s}$ et $c(y(t)) = -0.05*y(t)^2 + y(t)$. On désire minimiser le déport $x(t)$ pour atteindre la berge opposé démarrant du point initial $X_0 = (0.0)$.

$$\begin{cases} \min x(T) \\ \dot{x}(t) = V \cos u + c(y(t)) \\ \dot{y}(t) = V \sin u \\ \dot{p}_1(t) = 0 \\ \dot{p}_2(t) = -p_1 * c'(y(t)) \end{cases}$$

l'Hamiltonien du système s'écrit :

$$H(x, p, u) = p_1(V \cos u + c(y)) + p_2(V \sin u)$$

On maximise l'hamiltonien H en utilisant le principe du maximum, on aura

$$\begin{aligned} \max_{u \in [0, \frac{\pi}{2}]} H(x, p, u) &= \max_{u \in [0, \frac{\pi}{2}]} (p_1(V \cos u + c(y)) + p_2(V \sin u)) \\ &= p_1 * c(y) + \max_{u \in [0, \frac{\pi}{2}]} (p_1(V \cos u) + p_2(V \sin u)) \end{aligned}$$

On obtient un contrôle optimal

$$u^* = \begin{cases} 0 & \text{si } z(4) < -1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } z(4) \geq -1 \end{cases}$$

Le système différentiel d'état et d'état adjoint s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = V \cos u + c(y(t)) & x(0) = 0 & x(T) = qlq \\ \dot{y}(t) = V \sin u & y(0) = 0 & y(T) = 20 \\ \dot{p}_1(t) = 0 & p_1 = qlq & p_1(T) = -1 \\ \dot{p}_2(t) = -p_1 * c'(y(t)) & p_2 = qlq & p_2(T) = qlq \end{cases}$$

Le programme

```

function tir_simple1
clear all ;clf ;clc ;
global x0 tf V
V=2 ;
x0=[0 ;0] ;tf=10 ;p0=[0.5 ;1.5] ;
%calcul de zéro de la fonction de tir
(p0f) options=optimset('display','iter','LargeScale','on') ;
[p0f,FVAL,EXITFLAG]=fsolve(@S,p0,options) ;
p0f,FVAL,EXITFLAG ;
%Tracé des trajectoires optimales
options=odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9) ;
[t,y]=ode45(@sys,[0 ;tf],[x0 ;p0f],options) ;
subplot(321) ;plot(t,y( :,1)) ;title('Trajectoire de x(t)') ;grid on
subplot(322) ;plot(t,y( :,2)) ;title('Trajectoire de y(t)') ;grid on
subplot(323) ;plot(t,y( :,3)) ;title('Trajectoire de p1(t)') ;grid on
subplot(324) ;plot(t,y( :,4)) ;title('Trajectoire de p2(t)') ;grid on
%Trajectoire du contrôle optimal
if y(4)<-1
y( :,5)=0 ;
else
y( :,5)=pi/2
end
subplot(325) ;plot(t,y( :,5)) ;title('Trajectoire de u(t)') ;grid on
%====Définition de la méthode de tir====
function Yzero=S(Y)
global x0 tf
options=odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9) ;
[t,y]=ode45(@sys,[0 ;tf],[x0 ;Y],options) ;
Yzero=[y(end,2)-20 y(end,3)+1] ;

```

```

%=====Système extrémal=====
function ydot=sys(t,z)
global x0 tf V
if z(4)<-1
u=0;
else
u=pi/2;
end
ydot=[V*cos(u)-0.05*z(2)*(z(2)-20)
V*sin(u)
0
(0.1*z(2)-1)*z(3)];

```

les résultats sont donnée dans les figures suivantes :

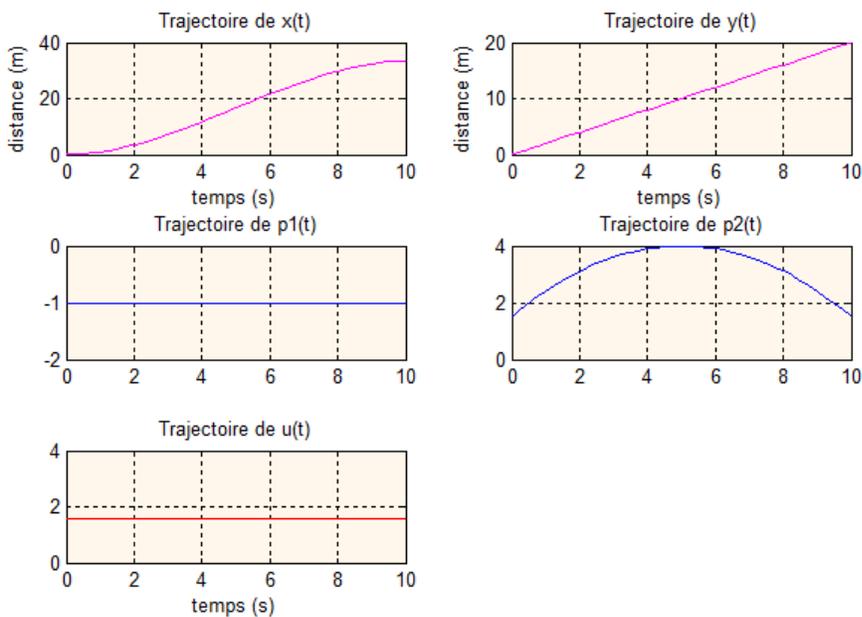


FIGURE 3.1 –

La valeur de la trajectoire $x(T)$ calculé par Matlab est $x(T) = 33.33 m$

3.2.1.1 Interprétation des résultats obtenus

En visualisant la figure ci-dessus, on remarque :

La trajectoire de $y(t)$ est une ligne droite, à $t = 0 s$ $y(0) = 0 m$ et à $t = 10 s$ $y(10) = 20 m$, qui est la longueur du fleuve.

La trajectoire de $x(t)$ se croit en fonction du temps. Sur l'intervalle $[0.2[\cup]8.10]$ on a une croissance légère. Sur l'intervalle $]2.8[$ on a une croissance importante.

Cela revient au vitesse du courant.

$t = 0 s$ $x(0) = 0 m$ et à $t = 10 s$ $x(10) = 33.33 m$

La trajectoire de $u(t)$ est une ligne droite. Car pour minimiser une trajectoire et pour atteindre une position finale y'a pas mieux d'aller tout droit.

Cette droite est commandé par $u(t) = \frac{\pi}{2}$.

La trajectoire de $p_1(t)$ est une ligne droite, vaut -1 . La trajectoire de $p_2(t)$ est une courbe du fait que $p_2(t)$ est calculer en fonction de $p_1(t)$.

3.2.2 deuxième cas

On pose $V = 2 \text{ m/s}$ et $c(y(t)) = -0.05 * y(t)^2 + y(t)$. On désire minimiser le temps T pour atteindre un point de la berge opposée (X_f n'est pas fixé) démarrant du point initial $X_0 = (0,0)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min T = \int_0^T 1 dt \\ \dot{x}(t) = V \cos u + c(y(t)) \\ \dot{y}(t) = V \sin u \\ \dot{p}_1(t) = 0 \\ \dot{p}_2(t) = -p_1 * c'(y(t)) \end{array} \right.$$

l'Hamiltonien du système s'écrit :

$$H(x, p, u) = -1 + p_1(V \cos u + c(y)) + p_2(V \sin u)$$

On maximise l'hamiltonien H en utilisant le principe du maximum, on aura :

$$\max_{u \in [0, \frac{\pi}{2}]} H(x, p, u) = \max_{u \in [0, \frac{\pi}{2}]} (-1 + p_1(V \cos u + c(y)) + p_2(V \sin u))$$

$$= -1 + p_1 * c(y) + \max_{u \in [0, \frac{\pi}{2}]} (p_1(V \cos u) + p_2(V \sin u))$$

On obtient un contrôle optimal :

$$u^* = \begin{cases} 0 & \text{si } z(3) > z(4) \text{ et } z(4) \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } z(3) < z(4) \text{ et } z(3) \leq 0 \\ \arctan\left(\frac{z(4)}{z(3)}\right) & \text{si } z(4) \geq 0 \text{ et } z(3) > 0 \end{cases}$$

Le système différentiel d'état et d'état adjoint s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = V \cos u + c(y(t)) & x(0) = 0 & x(T) = qlq \\ \dot{y}(t) = V \sin u & y(0) = 0 & y(T) = 20 \\ \dot{p}_1(t) = 0 & p_1 = qlq & p_1(T) = 0 \\ \dot{p}_2(t) = -p_1 * c'(y(t)) & p_2 = qlq & p_2(T) = qlq \end{cases}$$

Le programme

```
function exemple2
clear all;clf;clc;
global x0 V;
V=2;
x0=[0;0];p0=[0.9;0.9];tf=20;
%%%%%%%%%%Calcul de p0 et tf %%%%%%%%%%
options=optimset('Display','iter','LargeScale','on');
[p0tf,FVAL,EXITFLAG]=fsolve(@S,[p0;tf],options);
EXITFLAG
%%%%%%%%%%Tracer des trajectoires optimales%%%%%%%%%
options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
[t,y]=ode45(@sys,[0;p0tf(3)],[x0;p0tf(1);p0tf(2)],options);
subplot(231);plot(t,y(:,1));title('Trajectoire de x(t)');grid on
subplot(232);plot(t,y(:,2));title('Trajectoire de y(t)');grid on
subplot(233);plot(t,y(:,3));title('Trajectoire de p1(t)');grid on
subplot(234);plot(t,y(:,4));title('Trajectoire de p2(t)');grid on
%%%%%%%%%%Trajectoire de contrôle optimal%%%%%%%%%
if ((y(:,4)>0) & (y(:,3)>0))
y(:,5)=atan(y(:,4)./y(:,3));
else
if (y(:,3)>y(:,4) & (y(:,4)<0))
y(:,5)=0;
else
y(:,5)=pi/2;
```

```

end
end
subplot(235);plot(t,y(:,5));title('contrôle');grid on
t(end)
y(end,1)
%%%%%%%%%Definition de la fonction de tir%%%%%%%%%
function Yzero=S(Y)
global x0 V;
options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
[t,y]=ode113(@sys,[0;Y(3)],[x0;Y(1);Y(2)],options);
if ((y(4)>0) & (y(3)>0))
u=atan(y(4)/y(3));
else
if ((y(3)>y(4)) & (y(4)<0))
u=0;
else
u=pi/2;
end
end
HamEnd=y(end,3)*(V*cos(u)-0.05*y(end,2)*((y(end,2)-20)))+y(end,4)*V*sin(u)-
1;
Yzero=[y(end,2)-20
y(end,3)
HamEnd];
%%%%%%%%%systeme extremal%%%%%%%%%
function zdot=sys(t,z)
global x0 V;
if ((z(4)>0) & (z(3)>0))
u=atan(z(4)/z(3));
else
if ((z(3)>z(4)) & (z(4)<0))
u=0;
else

```

```

u=pi/2;
end
end
zdot=[V*cos(u)-0.05*z(2)*(z(2)-20) V*sin(u) 0 (0.1*z(2)-1)*z(3)];

```

les résultats sont donnée dans les figures suivantes

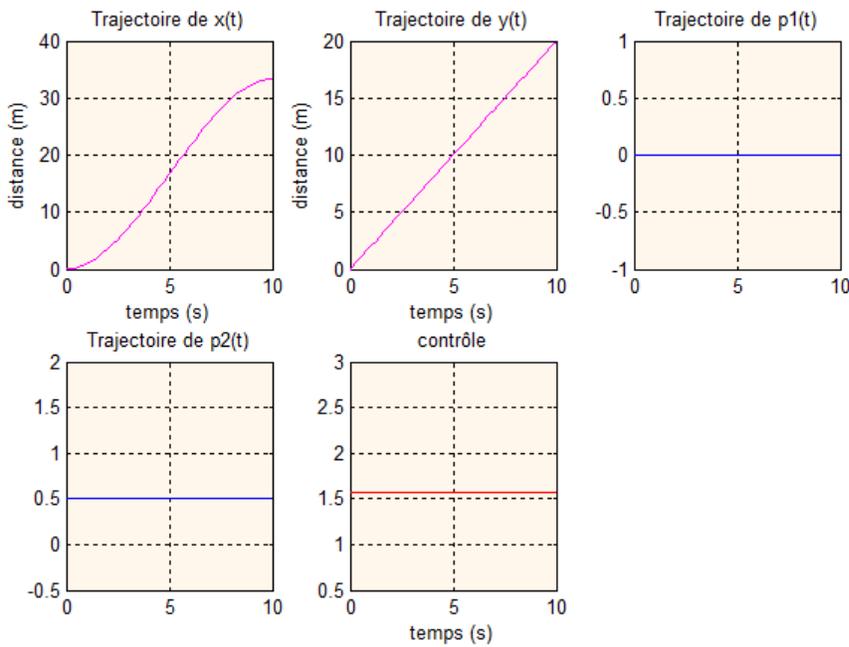


FIGURE 3.2 –

Le temps minimum pour atteindre un point de la berge opposé calculé par Matlab est :

$$T = 10 \text{ s}$$

3.2.2.1 Interprétation des résultats obtenus

Le temps minimum pour atteindre la berge opposée c'est d'aller tout droit, et cela est bien confirmé avec la trajectoire de contrôle qui est une ligne droite, la valeur de $u(t) = \frac{\pi}{2}$.

La trajectoire du $y(t)$ est une ligne droite, à $t = 0\text{ s}$ $y(0) = 0\text{ m}$ au temps minimal $T = 10\text{ s}$ $y(10) = 20\text{ m}$.

Et pour la trajectoire de $x(t)$ on observe une croissance importante du $t = 0\text{ s}$ jusqu'au temps minimal calculé avec le logiciel Matlab qui vaut $T = 10\text{ s}$ et la position final de $x(T) = 33.33\text{ m}$.

3.2.3 troisième cas

On pose $V = 2 \text{ m/s}$ et $c(y(t)) = -0.05 * y(t)^2 + y(t)$. On désire minimiser le temps T pour atteindre le point $X_f = (40, 20)$ de la berge opposée démarant du point initial $X_0 = (0,0)$.

$$\begin{cases} \min T = \int_0^T 1 dt \\ \dot{x}(t) = V \cos u + c(y(t)) \\ \dot{y}(t) = V \sin u \\ \dot{p}_1(t) = 0 \\ \dot{p}_2(t) = -p_1 * c'(y(t)) \end{cases}$$

l'Hamiltonien du système s'écrit :

$$H(x, p, u) = -1 + p_1(V \cos u + c(y)) + p_2(V \sin u)$$

On maximise l'hamiltonien H en utilisant le principe du maximum, on aura :

$$\begin{aligned} \max_{u \in [0, \frac{\pi}{2}]} H(x, p, u) &= \max_{u \in [0, \frac{\pi}{2}]} (-1 + p_1(V \cos u + c(y)) + p_2(V \sin u)) \\ &= -1 + p_1 * c(y) + \max_{u \in [0, \frac{\pi}{2}]} (p_1(V \cos u) + p_2(V \sin u)) \end{aligned}$$

On obtient un contrôle optimal :

$$u^* = \begin{cases} 0 & \text{si } z(3) > z(4) \text{ et } z(4) \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } z(3) < z(4) \text{ et } z(3) \leq 0 \\ \arctan\left(\frac{z(4)}{z(3)}\right) & \text{si } z(4) \geq 0 \text{ et } z(3) > 0 \end{cases}$$

Le système différentiel d'état et d'état adjoint s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = V \cos u + c(y(t)) & x(0) = 0 & x(T) = 40 \\ \dot{y}(t) = V \sin u & y(0) = 0 & y(T) = 20 \\ \dot{p}_1(t) = 0 & p_1 = qlq & p_1(T) = qlq \\ \dot{p}_2(t) = -p_1 * c'(y(t)) & p_2 = qlq & p_2(T) = qlq \end{cases}$$

Le programme

```
function exemple3
clear all;clf;clc;
global x0 V;
V=2;
x0=[0;0];p0=[0.9;0.9];tf=12;
%%%%%%%%%%Calcul de p0 et tf%%%%%%%%%%
options=optimset('Display','iter','LargeScale','on');
[p0tf,FVAL,EXITFLAG]=fsolve(@S,[p0;tf],options);
EXITFLAG
%%%%%%%%%%Tracer des trajectoires optimales%%%%%%%%%%
options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
[t,y]=ode45(@sys,[0;p0tf(3)],[x0;p0tf(1);p0tf(2)],options);
subplot(231);plot(t,y(:,1));title('Trajectoire de x(t)');grid on
subplot(232);plot(t,y(:,2));title('Trajectoire de y(t)');grid on
subplot(233);plot(t,y(:,3));title('Trajectoire de p1(t)');grid on
subplot(234);plot(t,y(:,4));title('Trajectoire de p2(t)');grid on
%%Trajectoire de contrôle optimal
if ((y(:,4)>0) & (y(:,3)>0))
y(:,5)=atan(y(:,4)./y(:,3));
else
if (y(:,3)>y(:,4) & (y(:,4)<0))
y(:,5)=0;
else y(:,5)=pi/2;
end
```

```

end
subplot(235);plot(t,y(:,5));title('contrôle');grid on
t(end)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Definition de la fonction de tir%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function Yzero=S(Y)
global x0 V;
options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
[t,y]=ode113(@sys,[0;Y(3)],[x0;Y(1);Y(2)],options);
if ((y(4)>0) & (y(3)>0))
u=atan(y(4)/y(3));
else
if ((y(3)>y(4)) & (y(4)<0))
u=0;
else
u=pi/2;
end
end
HamEnd=y(end,3)*(V*cos(u)-0.05*y(end,2)*((y(end,2)-20)))+y(end,4)*V*sin(u)-
1;
Yzero=[y(end,1)-40
y(end,2)-20
HamEnd];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
systeme extremal%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function zdot=sys(t,z)
global x0 V;
if ((z(4)>0) & (z(3)>0))
u=atan(z(4)/z(3));
else
if ((z(3)>z(4)) & (z(4)<0))
u=0;
else
u=pi/2;
end
end

```

```

end
zdot=[V*cos(u)-0.05*z(2)*(z(2)-20)
V*sin(u)
0
(0.1*z(2)-1)*z(3)];

```

Les résultats sont donnée dans les figures suivants

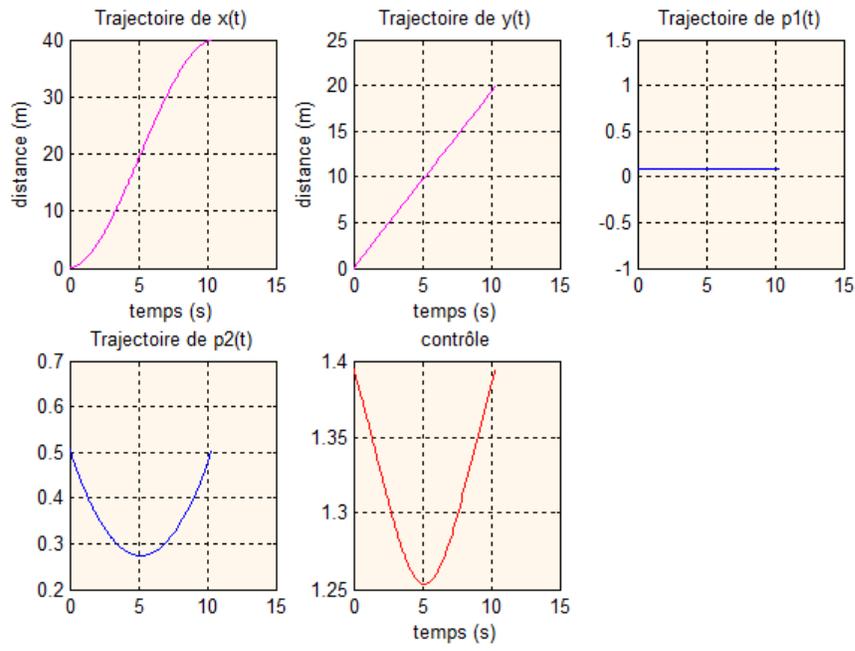


FIGURE 3.3 –

Le temps minimum pour atteindre le point (40,20) calculé par Matlab est

$$T = 10.35 \text{ s}$$

3.2.3.1 Interprétation des résultats obtenus

Minimiser le temps pour atteindre le point final fixé (40.20) de la berge opposée.

La trajectoire de $y(t)$ est une ligne droite jusqu'à atteindre la cible en temps minimal $T = 10.35$ s.

la trajectoire de $x(t)$ se croit en fonction du temps de sorte qu'à la moitié du temps la barque navigue la moitié de la trajectoire, et au temps final qui est minimal la barque atteint la cible de la berge opposée, la position finale $x(T) = 40$ m. et ceci à l'aide de la trajectoire du contrôle $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ qui est courbée, on a sur $[0, \frac{T}{2}[$ la trajectoire du contrôle décroît, et sur $] \frac{T}{2}, T]$ la trajectoire du contrôle croît, et cela pour bien guider la barque à atteindre la position finale.

Conclusion Générale

La détermination d'un modèle permettant un raisonnement afin de déterminer la commande d'un système constitue un préalable à toutes études et correspond à une phase de modélisation et d'application. Celle-ci s'effectue à partir de la connaissance à priori du système étudié, à partir des lois physiques et à partir d'un certain nombre d'expérimentations et de mesures.

Nous pouvons conclure qu'une résolution analytique d'un problème de contrôle est possible seulement si les solutions des équations différentielles sont connues et si elles ne sont pas trop complexes. Pour les expressions plus complexes, l'utilisation des techniques numériques est indispensable pour simuler l'évolution du système et analyser son comportement

L'objectif de ce manuscrit est l'étude d'un problème de contrôle optimal non linéaire sans contraintes sur l'état. Le chapitre 1 de ce manuscrit est consacré aux fondements théoriques du contrôle optimal et des systèmes de contrôle. Ensuite nous nous sommes intéressés à la présentation du principe du maximum dans deux cas différents, le premier est celui sans contraintes sur le contrôle, et le deuxième est celui avec contraintes sur le contrôle, ainsi que les conditions de transversalité. On a aussi présenté les méthodes numériques de résolution des problèmes de contrôle optimal. Nous avons opté pour la méthode indirecte qui est la méthode de tir simple basée sur le principe du maximum, elle est précise et rapide.

Ainsi, dans le cadre de ce travail, nous avons étudié le problème de la traversée d'un fleuve par une barque. Après l'avoir modélisé mathématiquement, on lui applique le principe du maximum et la méthode de tir simple. Ensuite on a fait une résolution sous Matlab en utilisant la méthode de tir simple.

Bibliographie

- [1] R.E. Kalman, Mathematical description of linear dynamical systems. J. SIAM. control. pp. 152-192, (1963).
- [2] E.Trélat, Contrôle optimal : théorie et applications ,Vuibert, 2008
- [3] Document internet : Optimal control- HomeWork-Exercice3, December 2010.
- [4] O.Daya, Principe du maximum et méthode de tir , 2011.
- [5] A.Merakeb , F. Achemine, COURS DE CONTÔRLE OPTIMAL : aspects théoriques et numériques , 2013/2014.
- [6] S.Hakkoum , S.Fateh , contrôle optimal de la traversée d'un fleuve par une barque , 2016.