

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

Faculté de Génie Electrique et d'Informatique

Département d'Electrotechnique



Mémoire de fin d'études

**En vue de l'obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat en
Electrotechnique**

Option : Machines Electriques

Thème

**Etude d'une machine linéaire
asynchrone en utilisant la
méthode des éléments finis**

Proposé et dirigé par :

M^r: ZAOUIA Mustapha

Etudié par :

M^r: CHABANE Hakim

M^r: RACELMA Mokrane

Promotion 2011

:

Remerciements

Remerciements

Nous tenons à remercier, en premier lieu le Bon Dieu de nous avoir donnée le courage et la patience pour faire ce travail.

Nous remercions aussi notre promoteur M^{er} Mustapha Zaouia Maître Assistant classe A à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou de nous avoir suivi et guidé du début à la fin de ce projet.

Nous remercions nos parents et tous les enseignants qui ont contribués à notre formation.

Nos remerciements vont également aux membres de jury et au président qui nous ferons l'honneur d'examiner notre travail.



Dédicaces

Dédicaces

Je dédie ce modeste mémoire :

*A toute ma Famille.
A tous mes Proches.
A tous mes Amis.*

R. Mokrane

Je dédie ce modeste mémoire :

*A toute ma Famille.
A tous mes Proches.
A tous mes Amis.*

C.Hakim



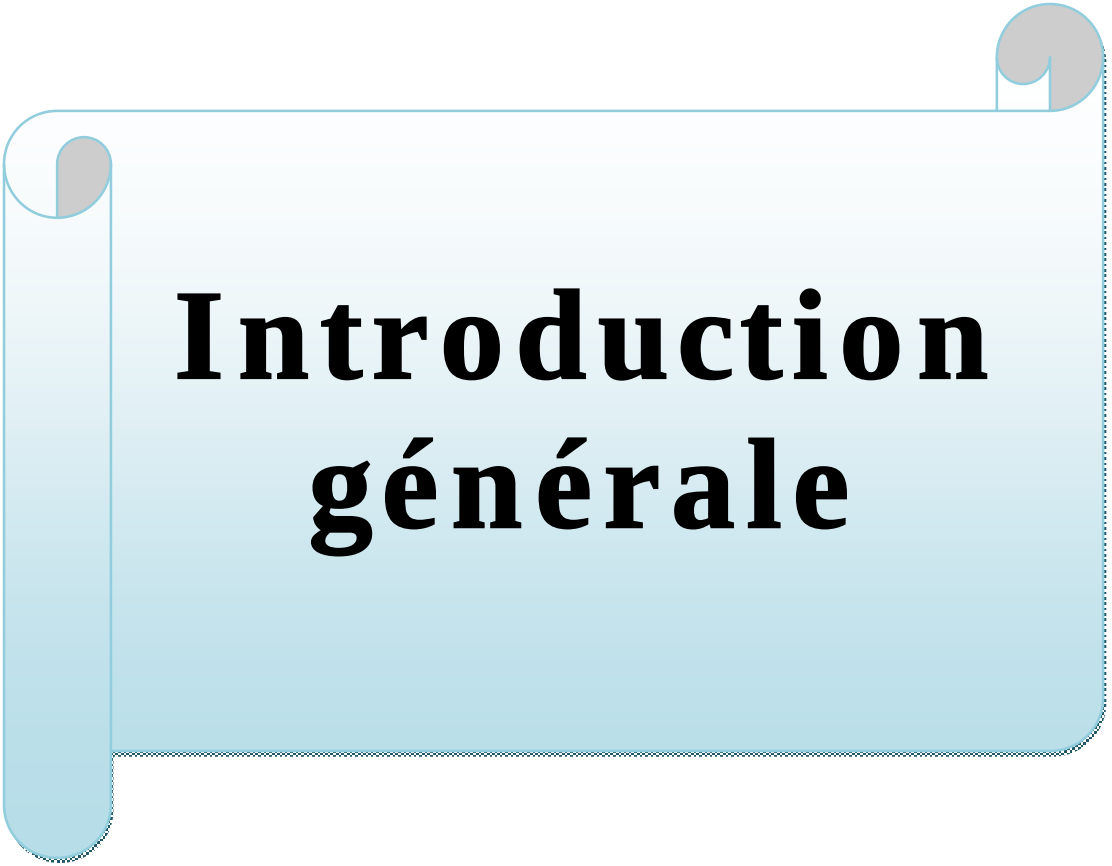
Sommaire

pSommaire

Introduction générale.....	1
Chapitre I : Généralités sur les machines électriques linéaires	
I.1. Introduction.....	3
I.2. Description.....	4
I.3. Particularités de la machine linéaire.....	5
I.4. Différences entre les machines linéaires et les machines tournantes.....	5
I.5. Les différents types de machines linéaires.....	6
I.5.1. Moteur linéaire à induction (MLI).....	7
I.5.1.1. Moteur linéaire tubulaire.....	8
I.5.2. Moteur linéaire synchrone (MLS).....	10
I.5.3. Moteur linéaire à courant continu.....	11
I.6. Bilan de puissance.....	12
I.7. Quelques applications des machines linéaires.....	13
I.8. Conclusion.....	14
Chapitre II : Equations de maxwell et modèles électromagnétiques	
II.1. Introduction.....	15
II.2. Les équations de Maxwell.....	15
II .2.1. Introduction.....	15
II.2.2. Première équation de Maxwell.....	15
II.2.3. Deuxième équation de Maxwell.....	16
II.2.4. Troisième équation de Maxwell.....	16
II.2.5. Quatrième équation de maxwell.....	16
II.3. Relations du milieu.....	16
II.4. Loi d'ohm.....	17
II.5. Effet de peau.....	18
II.6. Conditions aux limites et conditions de passages.....	18
II.6.1.Conditions aux limites.....	18
II.6.1.1. Conditions de Dirichlet.....	19
II.6.1.2. Condition de Neumann.....	19
II.6.1.3. Condition mixte.....	19
II.6.1.4 .Condition périodique.....	20
II.6 .2. Relations de passages.....	20
II.7. Les hypothèses simplificatrices.....	22
II.8. Modèle électromagnétique.....	22
II.8.1. Modèle magnétostatique.....	23
a. En coordonnées cartésiennes.....	23
b. En coordonnées cylindriques.....	24
II.8.2. Modèle magnétodynamique.....	26
a. En coordonnées cartésiennes.....	26
b. En coordonnées cylindriques.....	27
II.9. Différentes méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles.....	27
II.9.1. Méthodes analytiques.....	28
II.9.1.1. La méthode des transformations conformes.....	28
II.9.1.2. La méthode de séparation de variables.....	28
II.9.2. Méthodes numériques.....	29
II.9.2.1. La méthode des différences finies.....	29
a. Avantages de la méthode.....	31

b. Inconvénients de la méthode.....	31
II.9.2.2. LA méthode des circuits couplés.....	31
a. Avantages de la méthode.....	32
b. Inconvénients de la méthode.....	32
II.9.2.3. La méthode d'intégrale de frontière.....	32
a. Avantages de la méthode.....	33
b. Inconvénients de la méthode.....	33
II.9.2.4. La méthode des éléments finis.....	33
a. Avantages de la méthode.....	33
b. Inconvénients de la méthode.....	34
II.10. Conclusion.....	34
Chapitre III : Méthode des éléments finis et calcul des forces électromagnétiques	
III.1. Introduction.....	35
III.2. Présentation de la méthode des éléments finis.....	35
III.3. Le maillage.....	36
III.4. Principe de la méthode des éléments finis.....	37
a- Approximation par éléments finis (fonction d'approximation).....	37
b- Définition.....	37
c- Calcul de la fonction d'approximation.....	38
III.5. Formulation éléments finis des équations électromagnétiques.....	40
III.5.1. Formulation variationnelle.....	40
III.5.2. Formulation résidus pondérés (projective).....	42
III.6. Différentes méthodes déduites des résidus pondérés.....	43
1. La méthode de collation par sous domaine.....	43
2. La méthode de collation par points.....	43
3. La méthode des moindres carrés.....	43
4. La méthode de Galerkin.....	44
III.7. Discrétisation des équations aux dérivées partielles (système algébrique).....	44
III.7.1. Modèle magnétostatique.....	44
a. En coordonnées cartésienne.....	44
b. En coordonnées cylindriques.....	45
III.7.2. Modèle magnétodynamique.....	47
a. En coordonnées cartésienne.....	47
b. En coordonnées cylindriques.....	48
III.8. Méthodes de calcul des forces magnétiques.....	49
III.8.1. Notion d'énergie et co-énergie magnétique.....	50
III.8.1.1. L'énergie magnétique.....	51
III.8.1.2. La co-énergie magnétique.....	51
III.8.2. Force calculée par l'énergie magnétique.....	51
III.8.3. Force calculée par la co-énergie magnétique.....	51
III.8.4. Méthode des travaux virtuels.....	51
III.8.5. Tenseur de Maxwell.....	52
III.8.6. Force de Lorentz.....	53
III.9. Définition du logiciel F.E.M.M.....	53
III.9.1. Présentation de F.E.M.M (version 3.3).....	54
a. Processeur (femme.exe).....	54
b. Solutionneur (fkerne.exe).....	54
c. Post processeur (femmview.exe).....	54

III.10. Conclusion.....	55
Chapitre IV : Application, Validation et Résultats	
IV.1. Introduction.....	56
IV.2. Description du dispositif.....	56
IV.3. Caractéristiques physiques et géométriques.....	57
IV.3.1. Caractéristiques physiques.....	57
IV.3.2. Dimensions géométriques.....	58
IV.4. Organigramme.....	60
IV.5. Conditions aux limites et maillage du domaine de résolution.....	61
IV.5.1. Conditions aux limites.....	61
IV.5.2. Maillage du domaine de résolution.....	62
IV.6. Validation.....	63
IV.7. Résultats et interprétations.....	64
IV.8. Conclusion.....	86
Conclusion générale.....	87



Introduction générale

Introduction générale

L'apparition pour la première fois du moteur linéaire remonte au début du XIX^{ème} siècle. La littérature francophone, parle d'une première proposition de réalisation datant de 1852, alors que la littérature anglophone, avance l'année 1883. En 1885, Van Derpoel dépose un brevet de moteur linéaire à courant continu, prévu pour l'entraînement d'une machine à coudre. En 1901 est enregistré le premier brevet concernant un moteur asynchrone à mouvement limité, proposé par R.D.Mershon, alors qu'en 1902 A.Zeden prévoyait l'utilisation de ce type de moteur dans la traction ferroviaire. L'idée d'un moteur linéaire est donc d'autant plus ancienne que le moteur tournant, si ce n'est l'absence de maîtrise de technique de lévitation appropriée, qui ont isolé ce type de machine de l'industrie durant tout un siècle. Tous les types de machines tournantes existent en version linéaire. Toute fois c'est la configuration asynchrone du moteur linéaire qui à occupé un pôle dominant. Avec l'avènement d'aimants supraconducteurs et d'aimants permanents performants, et les facilités de commande introduites par l'électronique de puissance et de réglage, le moteur synchrone a acquis de l'intérêt pour certaines applications industrielles, telles que le transport terrestre à grande vitesse et la robotique.

L'évolution de la science et les technologies de l'électromagnétisme, la mise en évidence des phénomènes couplés (électromécaniques) et les résultats de recherche dans le domaine des aimants, ont permis le retour aux moteurs linéaires pour pouvoir les utiliser enfin, mais la recherche est toujours indispensable afin de les améliorer dans le but de réduire les coûts de leurs fabrications et augmenter leurs facteurs de puissance et leurs rendements, ce qui est le cas par exemple du moteur linéaire tubulaire. C'est pour cela justement qu'il faut tout d'abord étudier les phénomènes qui sont responsables de la création des forces de poussée qui permettent le mouvement des parties mobiles par rapport aux parties fixes, et trouver les liens qui existent entre les différents paramètres (électrique, magnétique, et mécanique) et les paramètres de base qui sont les propriétés physiques des matériaux constitutifs des machines afin de pouvoir mettre en exergue les propositions les plus pratiques et les plus réalistes [1].

La modélisation des systèmes électromagnétiques a pour but d'obtenir la distribution des champs en vue d'une évaluation précise des grandeurs globales (résistance, inductance, force). Cette modélisation peut être menée dans un premier temps à la description du dispositif électromagnétique à étudier par un ensemble de modèles mathématiques et équations aux dérivées partielles, régissant les phénomènes physiques, avec les caractéristiques des matériaux. En tenant compte des géométries (simple, complexe, 2D ou 3D), des natures des sources d'alimentation (en courant ou en tension) ainsi que du couplage des divers phénomènes

(électrique, magnétique, mécanique, thermique.....), on choisit les méthodes de résolution adaptées en s'appuyant essentiellement sur les méthodes numériques.

L'avènement de l'outil informatique a contribué au développement de plusieurs méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles, entre autre la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies, qui sont d'utilisation plus large.

Parmi ces méthodes on retiendra la méthode des éléments finis, qui est fortement développée, ses principes sont relativement simples du point de vue mathématique. Elle est très adaptée aux études des géométries complexes et aux traitements des non linéarités [2].

Notre travail sera consacré à l'étude d'une machine linéaire asynchrone en utilisant la méthode des éléments finis.

Nous allons commencer dans le premier chapitre par quelques généralités sur les machines linéaires et leurs principes de fonctionnement et les différents domaines de leurs utilisations.

Puis nous allons décrire dans le deuxième chapitre les modèles électromagnétiques en régime statique et dynamique sous forme d'équations aux dérivées partielles en se basant sur les formules mathématiques fondamentales de l'électromagnétisme voir les équations de Maxwell, la loi d'ohm généralisée et les relations du milieu. Nous exposerons par la suite les différentes méthodes de résolution de ces équations telles que les méthodes analytique ou numérique d'une façon globale ainsi que leurs avantages et inconvénients. Le troisième chapitre fera l'objet de la présentation de la méthode des éléments finis et la formulation des modèles électromagnétiques, discrétisation des équations aux dérivées partielles en utilisant la méthode projective de Galerkin. On présentera aussi les différentes méthodes de calcul des forces dans les dispositifs électromagnétiques, ainsi qu'un aperçu sur le logiciel F.E.M.M qui sera utilisé pour l'étude de notre application. Le quatrième et le dernier chapitre sera consacré à l'application qui représente une machine linéaire tubulaire.

Enfin nous terminerons notre travail par une conclusion générale.

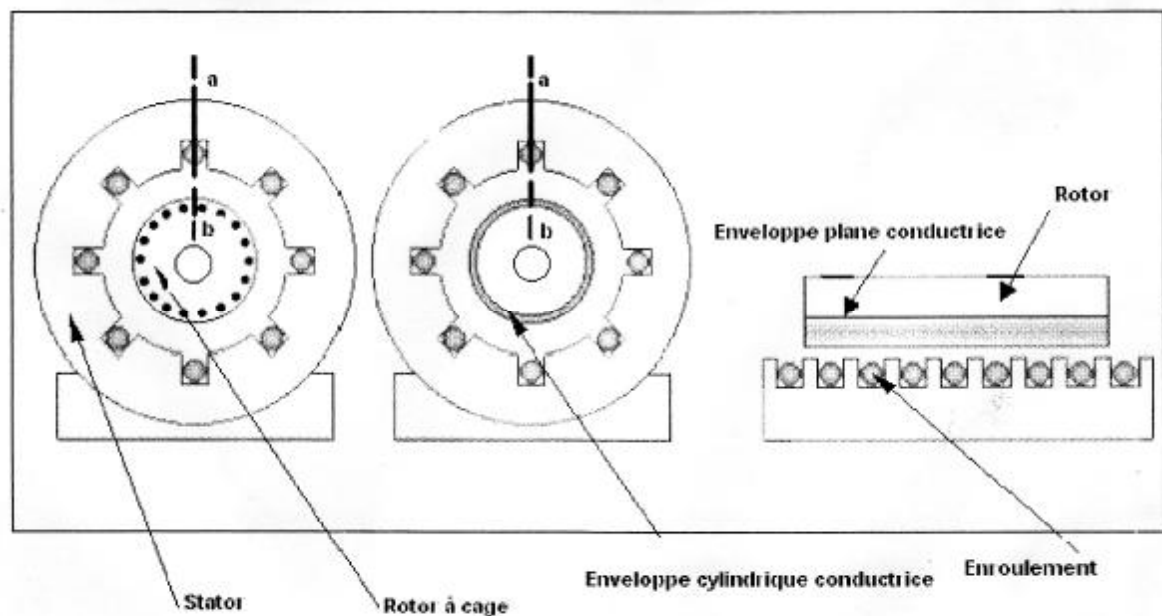
Chapitre I

Généralités sur les Machines linéaires

I.1.Introduction

Le convertisseur électromécanique a été imaginé sous deux formes dont la première est une machine tournante composée de deux armatures magnétiques cylindriques dont l'une est fixe et l'autre est mobile, la deuxième appelée machine linéaire, est également composée de deux armatures magnétiques, la différence est qu'elles sont planes et immobiles, séparées par un entrefer dans lequel on peut glisser une bande conductrice en se déplaçant avec une certaine vitesse de translation.

La conception d'une machine tournante et d'une machine linéaire dérive simplement des expériences de Faraday, de Tesla et de Ferrari pour les champs glissants. Le passage d'une machine tournante à une machine linéaire peut être démontré simplement en considérant un moteur asynchrone à cage et un moteur linéaire à induction. On doit tout d'abord placer le rotor du moteur asynchrone tournant dans une enveloppe cylindrique conductrice qui est généralement constituée d'aluminium ou du cuivre, et par l'imagination on découpe le moteur selon la droite (ab), en le développant sur un plan, on obtiendra une machine linéaire capable de produire une force de poussée rectiligne comme le montre la figure ci-dessous [1] :



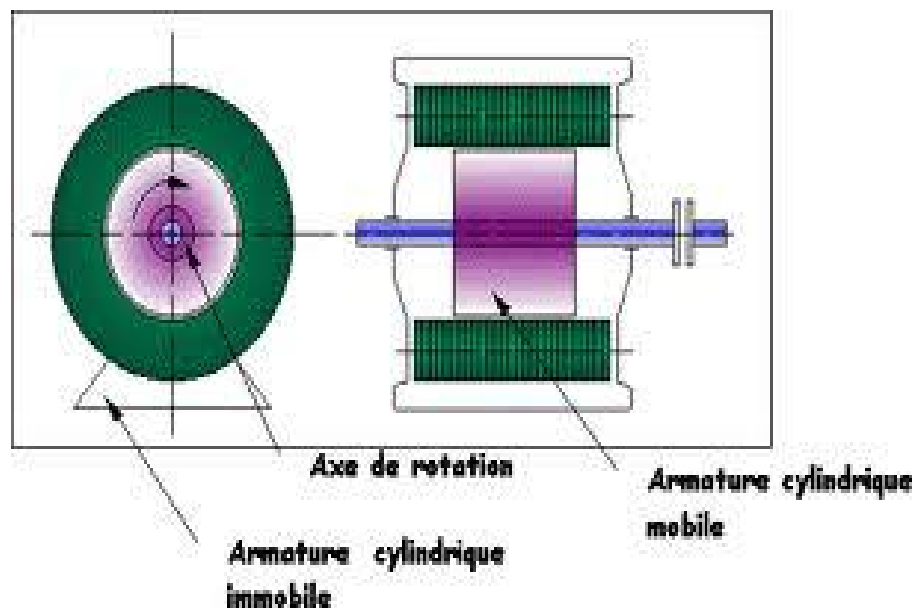
FigI.1 : Conception d'une machine linéaire à partir d'une machine tournante

I.2.Description :

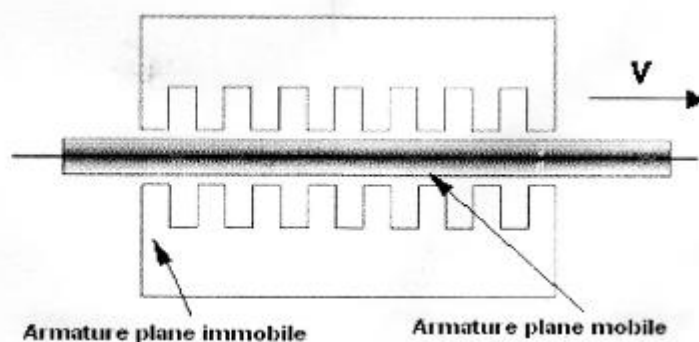
Les différents types de machines linéaires correspondent exactement aux différents types de machines tournantes du moment que la machine linéaire n'est qu'une machine tournante développée. On utilise généralement les termes primaire et secondaires pour désigner l'inducteur et l'induit au lieu des termes stator et rotor.

Les moteurs linéaires à induction sont les plus utilisés dans l'industrie des machines à mouvement linéaire, et leur principe de fonctionnement est presque semblable à celui des moteurs tournants asynchrones, tel que ses enroulements créent un champ magnétique glissant qui crée à son tour une force de poussée rectiligne qui entraînera ensuite l'induit (charge) en mouvement de translation le long de l'entrefer (FigI.2) [1][5].

a) Moteur asynchrone



b) Moteur Linéaire



FigI.2 : Comparaison des deux moteurs du point de vue de principe de fonctionnement

I.3 Particularité de la machine linéaire

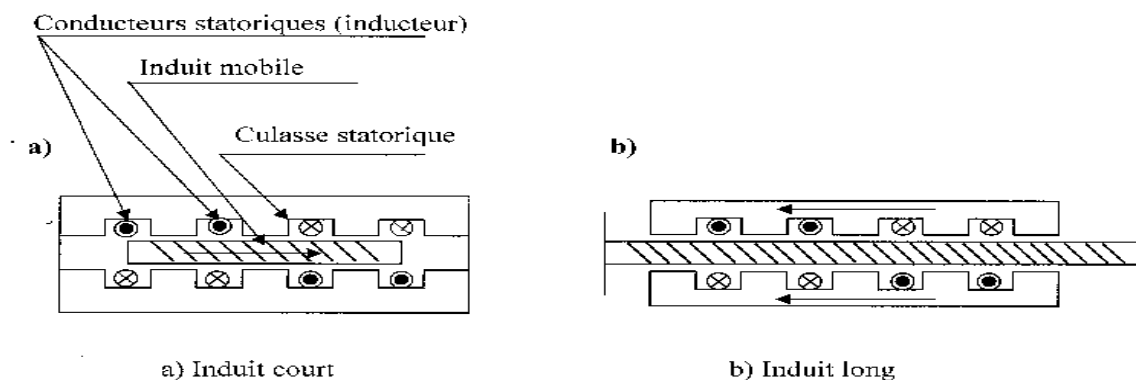
En développant un moteur conventionnel, on obtient un moteur linéaire. En effet, il faudrait disposer d'un circuit magnétique de longueur infinie pour que les champs tournants deviennent dans cette linéarisation des champs progressifs purs, mais en réalité des effets d'extrémités se traduisent par l'existence des champs pulsatoires générateurs de pertes.

On reproche surtout aux moteurs linéaires leur facteur de puissance et leur rendement toujours faible, et il est peu probable que l'on assiste à un développement spectaculaire de ces dispositifs. L'entrefer d'une machine linéaire est large, et des effets gênants de longueur finie apparaissent à cause de l'interruption (discontinuité) du circuit magnétique au niveau de ces deux extrémités. Ce phénomène est unique et ne se produit pas dans le cas des machines électriques tournantes. Notons aussi que ce type de machines présente une faible réactance de magnétisation, mais de bonnes performances thermiques [1][5].

I.4. Différences entre les machines linéaires et les machines tournantes

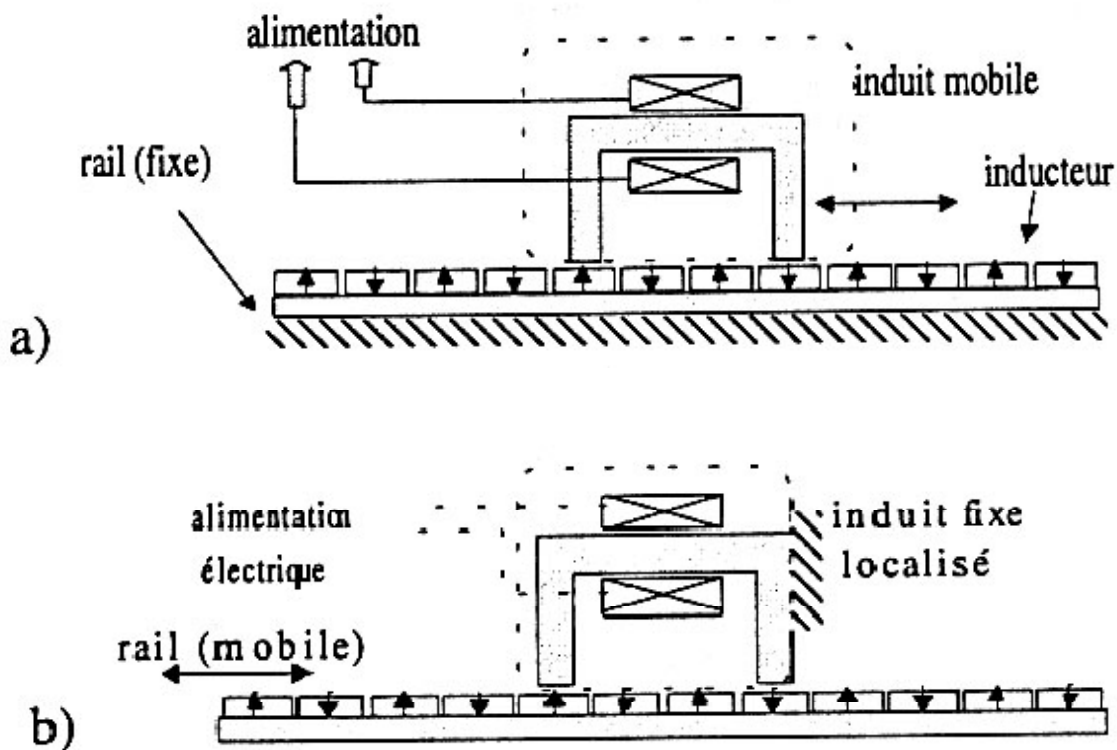
Trois différences essentielles entre les machines linéaires et les machines tournantes peuvent être repérées, ce sont les suivantes [2] :

- 1- le rotor d'une machine tournante est constitué en général de conducteurs physiquement séparés (cage d'écureuil ou rotor bobiné), alors que celui de la machine linéaire peut avoir un induit constitué d'une simple plaque conductrice solide.
- 2- les machines tournantes ont un stator et un rotor alors que dans les machines linéaires, on peut disposer de deux stators inducteurs posés face à face (FigI.3), ce qui facilite la fermeture du flux dans le circuit magnétique d'une part, et d'autre part l'induction magnétique dans l'entrefer sera plus importante.



FigI.3 : Moteur linéaire à inducteur double à rotor mobile

3- le rotor et le stator dans une machine tournante sont respectivement mobile et fixe, alors que dans une machine linéaire l'induit et l'inducteur peuvent être fixes ou mobiles, tels que si l'induit est fixe, alors l'inducteur serait mobile, dans ce cas l'inducteur est plus court que l'induit, et si l'inducteur est fixe alors l'induit serait mobile, dans ce cas l'induit est plus court que l'inducteur (FigI.4). Des exemples tels que les trains à grande vitesse, les chaînes de montages dans les usines et les ponts mobiles illustrent pratiquement cette particularité. Notons aussi que, du fait que, la machine linéaire est ouverte à ses extrémités, le nombre de pôles peut être pair ou impair contrairement à la machine tournante où ce nombre doit être pair [1][5].



FigI.4 : Différentes configurations de la machine linéaire

I.5. Les différents types de machines linéaires

Selon leurs principes de fonctionnement, on peut distinguer trois types de machines linéaires :

- 1- Moteur linéaire à induction (FigI.5).
- 2- Moteur linéaire synchrone (FigI.9) et (FigI.10).
- 3- Moteur linéaire à courant continu (FigI.11).

I.5.1. Moteur linéaire à induction (MLI)

De point de vue du principe de fonctionnement, le **MLI** est identique à son analogue tournant, sauf que son enroulement produit un champ glissant au lieu d'un champ tournant. Les courants supplémentaires induits dans le secondaire du moteur au niveau de ses deux extrémités à cause de la variation raide des champs magnétiques du primaire engendrent des effets d'extrémités qui sont responsables de la force de tirée longitudinale supplémentaire et de la distorsion de la distribution longitudinale de la densité de flux, donc réduction de facteur de puissance ainsi que le rendement [1].

Les **MLI** dont la structure est donnée par la (FigI.5), les moteurs de structures planes ou de structures tubulaires sont des moteurs dans lesquels le flux magnétique reste dans le plan du mouvement, c'est pour cette raison d'ailleurs qu'ils sont appelés moteur à flux longitudinaux. Le flux dans une machine linéaire se déplace à une vitesse linéaire donnée par la formule [1] :

$$V_s = \frac{2 \cdot \tau \cdot f}{\pi} \quad (\text{II. 1})$$

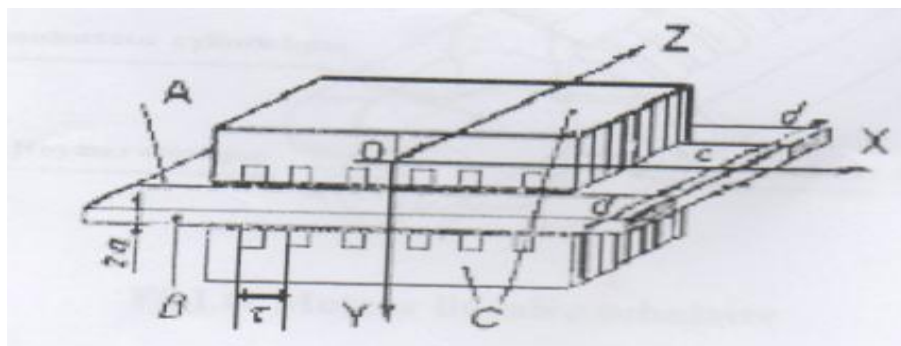
Avec :

V_s : Vitesse synchrone linéaire du champ magnétique [m/s].

τ : Longueur d'un pas polaire [m].

f : Fréquence du réseau [Hz].

Malgré que les **MLI** possèdent un facteur de puissance et un rendement légèrement inférieur par rapport à leur équivalents tournant, ils n'ont pas manqué de leur efficacité vis-à-vis de plusieurs applications comme dans les systèmes de transport, des portes coulissantes et des tests de crash de voiture [5].



FigI.5 : Moteur linéaire à induction

Avec :

A : Partie active de l'induit.

B : Barre de fermeture de l'induit.

C : Inducteur.

c : Largeur de la partie active de l'induit.

d : Largeur de la barre de fermeture de l'induit.

Z_a : Epaisseur de l'induit.

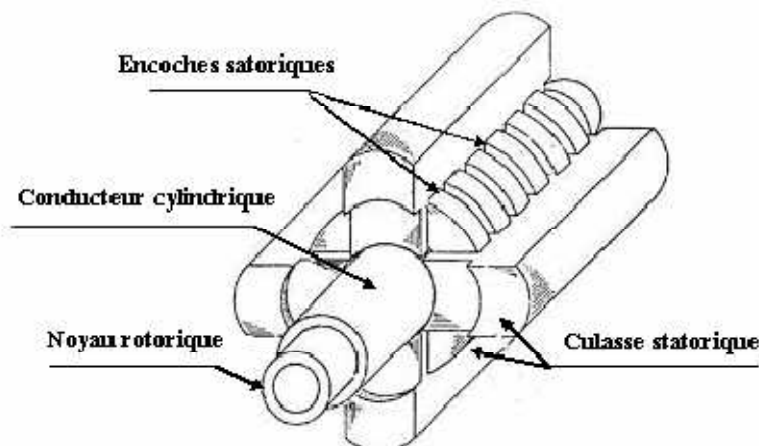
τ : Pas polaire.

I.5.1.1.Moteurs linéaires tubulaires

Le moteur tubulaire (FigI.6) est parmi l'innovation les plus importantes des moteurs linéaires à induction, sa structure est constituée principalement par [1] :

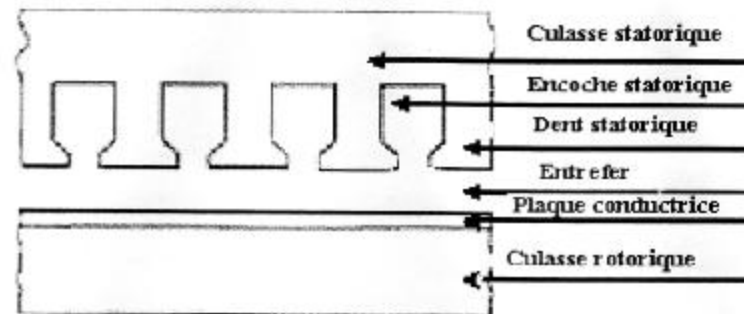
-Un barreau magnétique d'une longueur appropriée à la course utilisée se comportant comme le stator du moteur. Il contient des tranches d'aimants permanents, agencés dans un ordre particulier à l'intérieur d'un tube en acier inoxydable. Contrairement aux autres types de moteurs linéaires, la conception tubulaire permet d'optimiser les champs et générer des efforts que dans la direction du déplacement.

-un bloc mobile se déplaçant sur le barreau magnétique et exerçant la force de poussée sur la charge à déplacer. C'est un simple solénoïde, enfilé sur le barreau magnétique et comprend uniquement trois enroulements d'alimentation. il n'y a pas de contacts entre le bloc mobile et le barreau, le centrage de l'un par rapport à l'autre étant assuré par guidage extérieur (1.7mm de jeu admissible au diamètre).



FigI.6 : Moteur linéaire tubulaire

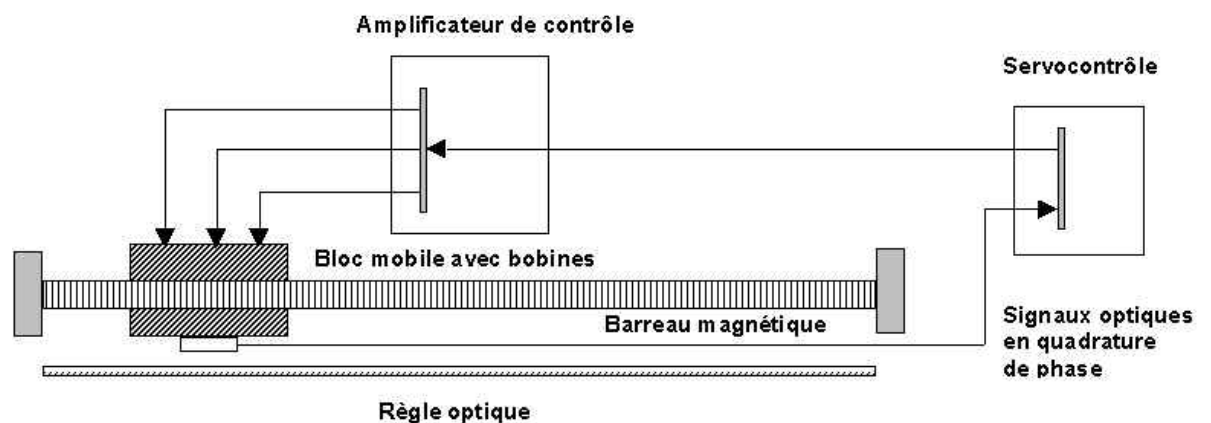
Une coupe transversale du moteur tubulaire à induction est représentée dans la figure ci-dessous :



FigI.7 : Coupe longitudinale d'un moteur linéaire tubulaire

Ce concept a l'avantage de convertir la totalité de l'énergie envoyée dans le bloc bobines en force de poussée linéaire d'où un excellent rendement et une faible dissipation thermique. Les efforts atteignent 3906 N en crête pour les moteurs les plus puissants. Ils sont supérieurs en terme de précision aux supports standards pour les applications de mesures.

Un amplificateur de puissance permet de fournir le courant nécessaire aux bobines du bloc mobile. Les amplificateurs se pilotent à partir d'un signal de consigne $\pm 10V$ en mode couple, fourni par le servocontrôleur de l'utilisateur (FigI.8) [1].



FigI.8: Fonctionnement d'un model de moteurs linéaires tubulaires

Caractéristiques essentielles maximales :

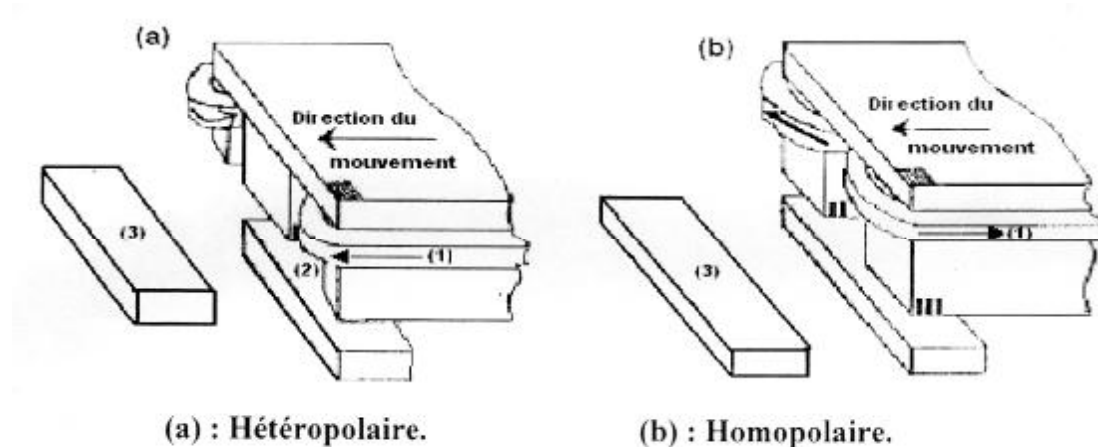
- Force disponible en continu : 263,2 N.
- Vitesse Crête: 14 m/s.
- Course utile: 1718 mm.

La force de poussée dans la partie mobile du moteur (induit) est produite par l'interaction électromagnétique du champ radial magnétique glissant et le courant induit circulant dans la couche conductrice de l'induit.

Le moteur tubulaire à induction est surtout utilisé pour les applications qui demandent un actionneur linéaire simple et robuste (la production de choc). L'inducteur comporte un enroulement triphasé permettant de créer dans l'entrefer une induction radiale glissante. L'induit est un simple cylindre en fer enrobé par une couche conductrice en cuivre [1].

I.5.2. Moteur linéaire synchrone (MLS)

Chaque moteur synchrone tournant a son équivalent linéaire, les moteurs linéaires synchrones peuvent être hétéropolaires ou bien homopolaires comme ils sont représentés dans la figure ci-dessous [2] :



FigI.9 : Machine linéaire synchrone

Avec :

- (1) : Enroulement d'excitation à courant continu.
- (2) : Les encoches logeant l'enroulement triphasé.
- (3) : Pièce massive ferromagnétique.

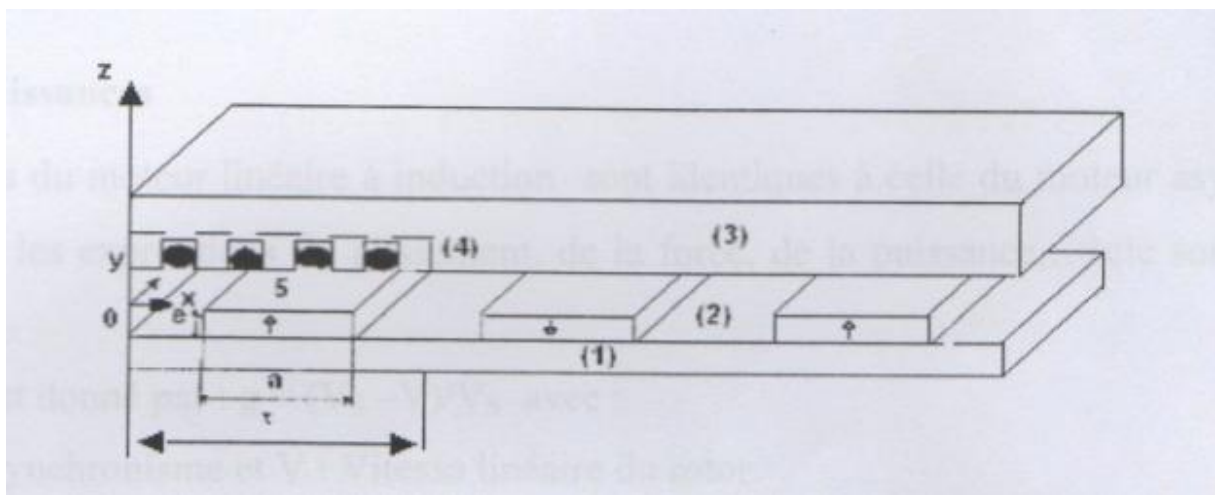
Ces moteurs sont utilisés dans différents domaines et surtout dans la technologie des ascenseurs et la technologie des machines outils [5].

Dans le cas d'un **MLS** l'entrefer est presque le même que celui d'un moteur synchrone tournant et pour les machines à moyenne et à grande puissance on peut remplacer l'enroulement par un aimant permanent (FigI.10), tel que le choix de l'aimant se fait selon deux critères [1]:

1-Critère énergétique : L'enroulement doit être remplacé par un aimant permanent à grande énergie.

2-Critère économique : Pour satisfaire le premier critère, on doit utiliser des aimants de terre rare qui sont très chères, alors on se contentera d'utiliser des aimants permanents moins coûteux mais avec l'application des systèmes de concentration de flux pour canaliser ses lignes dans l'entrefer ce qui nous permettra d'augmenter l'induction magnétique dans ce dernier de 0.5T à 0.7T.

Justement pour augmenter la rentabilité des chaînes de montage dans le domaine des semi-conducteurs, des moteurs linéaires synchrones à structure de Halbach sont utilisés, cette structure consiste à combiner des aimants afin d'obtenir une densité de flux plus importante pour l'excitation du moteur.

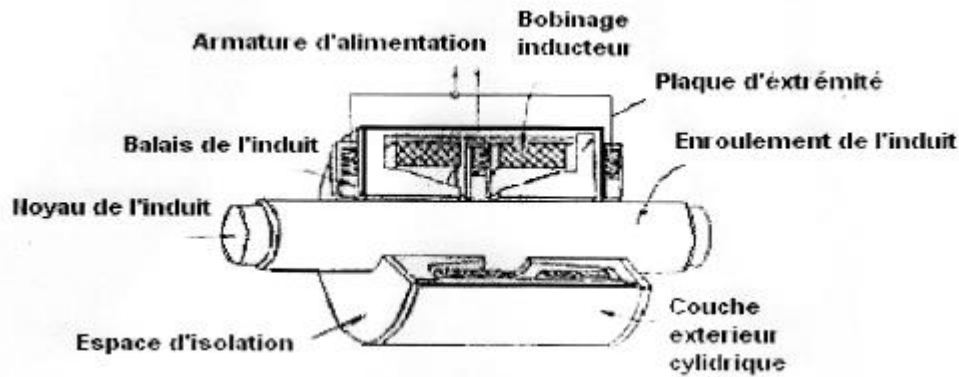


FigI.10 : Moteur linéaire synchrone à aimant permanent

- Avec : (1) : Culasse de l'induit.
 (2) : Aimant permanent.
 (3) : Culasse statorique.
 (4) : Cale amagnétique (non conductrice).
 (5) : Conducteurs de l'inducteur.

I.5.3. Moteurs linéaires à courant

La structure du moteur linéaire à courant continu (FigI.11), bien que légèrement modifiée, est identique à celle du moteur tournant à courant continu, soit à pôles saillants ou rotor cylindrique, cette technologie se limite aux très fortes puissances telle que la motorisation des véhicules électriques (jusqu'à plusieurs Méga-Watts), cette technologie est envisagée dans un nombre limité d'application principalement pour la motorisation des véhicules électriques et les systèmes de transport en général [2].



FigI.11 : Moteur linéaire à courant continu

I.6. Bilan de puissances

Les propriétés du moteur linéaire à induction sont identiques à celles du moteurs asynchrone et par conséquent, les expressions du glissement, de la force, de la puissance,...etc. sont similaires [12].

Le glissement est donné par :

$$g = (V_s - V)/V_s \quad (\text{II. 2})$$

Avec :

V_s : vitesse de synchronisme.

V : Vitesse linéaire du rotor.

La force de traction développée par le moteur linéaire est donnée par :

$$F = P_r / V_s \quad (\text{II. 3})$$

La puissance fournie au rotor est :

$$P_r = P_e - P_{JS} - P_f \quad (\text{II. 4})$$

Avec :

P_f : Pertes fer du rotor.

Les pertes joules du rotor sont données par :

$$P_{JR} = g \cdot P_r \quad (\text{II. 5})$$

Les pertes joules du stator sont données par :

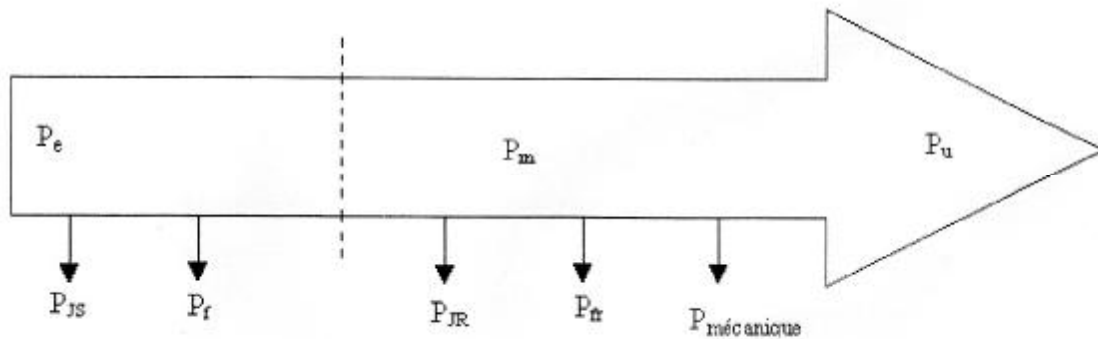
$$P_{JS} = 3RI^2 \quad (\text{II. 6})$$

Avec :

R et I sont la résistance et le courant traversant l'enroulement inducteur.

La puissance mécanique est donnée par :

$$P_m = P_r - P_{JR} \quad (\text{II.7})$$



FigI.12 : Schéma récapitulatif des différentes puissances

I.7 Quelques applications des machines linéaires

En plus de toutes les applications qu'on a citées précédemment, les machines linéaires peuvent être utilisées aussi dans les applications suivantes [1][2] :

- Remplacement des vérins hydrauliques par des moteurs linéaires.
- Quelques applications à très grande vitesse, comme les pompes et les compresseurs, les ventilateurs de grandes puissances, les machines outils, et les actionneurs.
- Application domestique comme, les aspirateurs, lave-linge, fermeture des rideaux, et les réfrigérateurs, dans ce dernier cas, un système à piston de compresseur entraîné par un moteur linéaire à aimant a été réalisé et testé, il permet un plus grand silence de fonctionnement.
- Informatique et audio-visuel, comme dans le cas d'un disque dur, pour des raisons d'encombrement, le moteur d'entraînement est intégré à l'intérieur de l'empilement de disque (cylindrique rotor extérieur), ce sont exclusivement des moteurs à aimants autopilotés par capteurs à effet de Hall ou indirect.
- Les grands huis dans les parcs d'attraction.
- L'utilisation sur les porte-avions, des moteurs à très grande poussée afin de propulser les avions au décollage.
- Les portes coulissantes et les rideaux de scènes théâtrales.
- Transport ; comme le tramway, traction routière, bicyclette à assistance électrique ; ici également, on cherche à réaliser les entraînements directs d'une roue pour des raisons d'amélioration de rendement, de meilleure intégration de silence.
- Les moteurs ascenseurs qui sont situés en haut de la cabine où l'ascenseur est tiré par un système de câbles.

I.8.Conclusion

Les inconvénients que présente la machine linéaire à savoir son large entrefer , sa puissance volumique et son faible rendement rendent le domaine d'application de ces machines limité par rapport aux domaines d'applications des machines tournantes, mais grâce au développement de spécialités telles que l'électronique de puissance, commande et surtout la technologie des aimants permanents, ce domaine connaîtra certainement une révolution dans les années à venir, ce qui nous permettra d'obtenir les meilleures performances et des bons rendements qui vont rendre les domaines d'applications plus vastes.

Chapitre II

Equations de Maxwell et modèles électromagnétiques

II.1.Introduction

Les équations de Maxwell, sont des lois fondamentales de la physique. Elles constituent les postulats de base de l'électromagnétisme avec l'expression de la force électromagnétique de Lorentz. Les équations de Maxwell traduisent sous forme locale, les différents théorèmes (Gauss, Ampère, Faraday) qui régissent l'électromagnétisme sous forme de relations intégrales. Elles donnent ainsi un cadre mathématique précis au concept fondamental du champ introduit en physique par Faraday.

Sur la base des équations de Maxwell, on construira les modèles électromagnétiques en régime statique et en régime dynamique (magnétostatique et magnétodynamique) en coordonnées cartésiennes et cylindriques sous forme d'équations aux dérivées partielles.

On exposera par la suite les différentes méthodes (analytiques et numériques) de résolution de ces équations d'une manière globale en se basant sur les avantages et les inconvénients de chacune d'entre elles pour pouvoir effectuer un choix selon deux critères essentiels, à savoir le temps de calculs et la précision des résultats à obtenir [2].

II.2. Les équations de Maxwell

II.2.1.Introduction

La première étape dans l'étude des problèmes physiques c'est l'établissement des équations qui le régissent. Pour établir ces équations, on fait appel aux équations de Maxwell qui font l'objet de cette partie. En effet, en démarrant des relations fondamentales de l'électricité et du magnétisme, Maxwell est arrivé à mettre en place quatre équations qui regroupent les deux domaines, c'est l'électromagnétisme [6].

II.2.2.Première équation de Maxwell

Cette équation exprime la conservation des charges électriques de conduction.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{II.1})$$

Avec :

$\vec{D}$: Vecteur de déplacement ou excitation électrique [C/m^2].

ρ : Densité de charge volumique [C/m^3].

II.2.3. Deuxième équation de Maxwell

Cette équation de l'électromagnétisme est la base du fonctionnement d'un grand nombre d'appareils électrique notamment des transformateurs et des moteurs. Elle caractérise le couplage entre les phénomènes magnétiques et les phénomènes électriques.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II. 2})$$

Avec :

$\vec{B}$: Vecteur induction magnétique [T].

$\vec{E}$: Vecteur champ électrique [V/m].

II.2.4. Troisième équation de Maxwell

Cette équation exprime que le champ magnétique $\vec{B}$ est à flux conservatif. Elle est valable dans tous les cas et dans tous les milieux.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II. 3})$$

II.2.5. Quatrième équation de Maxwell

Cette équation exprime le fait que le champ magnétique peut être créé non seulement par un courant électrique mais aussi par la variation d'un champ électrique.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II. 4})$$

Avec :

$\vec{J}_c$: Vecteur densité de courant de conduction [A /m²]

II.3. Relations du milieu

Les équations de Maxwell ne nous permettent pas de définir les phénomènes électromagnétiques dans un milieu. De nouvelles relations doivent donc venir compléter les équations de Maxwell, en fonction des propriétés spécifiques des milieux auxquels on les applique. Ces relations sont appelées relations du milieu.

Les relations du milieu expriment le lien existant d'une part entre le champ magnétique $\vec{H}$ et l'induction magnétique $\vec{B}$ à travers la perméabilité magnétique. D'autre part celui existant entre

l'induction électrique $\vec{D}$ et le champ électrique $\vec{E}$ à travers la permittivité électrique. Ces relations sont exprimées par [8] :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{II. 5})$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{II. 6})$$

Avec :

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

μ : Perméabilité absolue donnée en [H/m]

μ_0 : Perméabilité magnétique du vide égale à $(4. \pi).10^{-7}$ [H/m]

μ_r : Perméabilité magnétique relative du milieu

ε : Permittivité électrique absolue donnée en [F/m]

ε_0 : Permittivité électrique du vide égale à $(1/36. \pi).10^{-9}$ [F/m]

ε_r : Permittivité électrique relative du milieu

Dans le cas où les caractéristiques physiques du milieu considéré sont à comportement non linéaire, les relations constitutives s'écrivent sous la forme suivante :

$$\vec{D} = \varepsilon(\vec{E}).\vec{E} \quad (\text{II. 7})$$

$$\vec{B} = \mu(\vec{H}).\vec{H} \quad (\text{II. 8})$$

II.4.Loi d'ohm

Les courants électriques peuvent à priori prendre naissance dans tout milieu chargé dans lequel les charges sont susceptibles de se déplacer [8].

Le cas le plus fréquent est cependant celui des conducteurs et semi conducteurs ohmique.

La loi d'ohm est donnée par :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{II. 9})$$

En faisant intervenir le courant de source, la loi d'ohm s'écrira :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_s \quad (\text{II. 10})$$

Dans le cas d'un milieu en mouvement :

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + (\vec{V} \wedge \vec{B})) + \vec{J}_s \quad (\text{II. 11})$$

$\vec{J}$: Densité de courant totale [A/m²].

$\vec{J}_s$: Densité de courant de source [A/m²].

σ : Conductivité électrique [$\Omega \cdot m$]⁻¹.

V : vitesse de déplacement du milieu conducteur.

II.5.Effet de peau

Toute substance conductrice de l'électricité, sous l'effet d'un champ magnétique variable dans le temps est le siège des courants induits appelés aussi courants de Foucault. Le champ magnétique qui pénètre la substance décroît, à partir de la surface ainsi que les courants induits, on est alors en présence de ce qui est connu sous le nom de l'effet de peau, la grandeur caractéristique de ce phénomène est la profondeur de pénétration donnée par [9] :

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot f \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \sigma}} \quad (\text{II. 12})$$

Où:

f est la fréquence.

μ_r est la perméabilité magnétique relative du matériau.

σ est sa conductivité électrique.

La profondeur de pénétration dépend donc de la fréquence du champ variable et de la nature du matériau. En effet, celle ci est inversement proportionnelle à la fréquence et les propriétés du matériau.

II.6.Conditions aux limites et relations de passages

II.6.1.Conditions aux limites

La résolution des équations de Maxwell, ainsi que les équations aux dérivées partielles tiennent compte des conditions aux limites associées aux problèmes étudiés et aussi des relations de passage d'un milieu à un autre (condition de continuité).

On distingue trois types de conditions aux limites :

II.6.1.1. Condition de Dirichlet

Dans ce cas, le vecteur magnétique est constant sur la frontière, ce qui veut dire que l'induction magnétique est parallèle à ce contour qui présente alors une équipotentielle.

On rencontre cette condition lorsqu'une partie ou tout le contour se trouve suffisamment éloigné des sources d'excitations pour pouvoir négliger les valeurs du potentiel vecteur magnétique sur la frontière par rapport aux valeurs de ce même potentiel à l'intérieur du domaine.

La condition de Dirichlet s'écrit sous la forme suivante :

$$G(u) = g_0 \quad (\text{II. 13})$$

Avec :

u : Fonction de l'inconnue

g_0 : Constante

II.6.1.2. Condition de Neumann

On la trouve sur les plans ou les axes d'antisymétries magnétiques par exemple les axes inter polaires, sur cette frontière les lignes de l'induction magnétique sont normales de même lorsque ce type de condition aux limites apparait sur des axes d'antisymétries le maillage est limité à une portion du domaine.

La condition de Neumann s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial G(u)}{\partial n} = g_0 \quad (\text{II. 14})$$

Avec :

G : Opérateur différentiel.

u : Fonction de l'inconnue.

g_0 : Constante.

II.6.1.3. Condition mixte

Cette condition est appelée aussi condition mixte de Cauchy ou Robin. C'est une combinaison de deux conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann, elle s'exprime comme suit :

$$a. G(u) + b. \frac{\partial G(u)}{\partial n} = g \quad (\text{II. 15})$$

Avec :

G: Opérateur différentiel.

g : Valeur de l'inconnue sur la frontière considérée.

a, b : Coefficient définis sur le domaine d'étude.

u : Fonction de l'inconnue

II.6.1.4.condition périodique

Spécialement dans les machines cylindriques symétriques telles que les machines électriques tournantes et linéaires, on se retrouve non seulement avec une symétrie géométrique mais aussi avec une symétrie dans la distribution du champ magnétique. Cette périodicité du champ peut être utilisée pour définir un autre type de conditions aux limites, qui permet de réduire la taille du modèle numérique. On parle alors des conditions cycliques (périodique) ou anticyclique (anti-périodique).

Elle s'exprime comme suite :

$$A|_{\Gamma} = K_0 A|_{\Gamma+d\Gamma} \quad (\text{II. 16})$$

Avec :

A : Fonction inconnue.

Γ : Contour de la frontière.

$d\Gamma$: Période spatiale (suivant le contour Γ).

$K = 1$ condition cyclique.

$K = -1$ condition anticyclique.

II.6.2.Relations de passages

Les dispositifs électromagnétiques dont les machines électriques figurent sont constitués de plusieurs matériaux de différentes propriétés électromagnétiques et certains de ces matériaux sont soumis à des champs électriques et/ou magnétiques qui sont induit par le courant imposé au système.

Pour remédier aux problèmes d'interfaces entre deux frontières voisines à fin de passer d'un milieu à son voisin, la connaissance de la condition de passage est indispensable.

Dans le cas d'un problème électrostatique, la condition de passage entre deux milieux est exprimée par la relation suivante :

$$\vec{n} \wedge (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (\text{II. 17})$$

$\vec{E}_1$: Composante tangentielle du champ électrique dans le milieu 1

$\vec{E}_2$: Composante tangentielle du champ électrique dans le milieu 2

$\vec{n}$: Vecteur de la composante normale

Les composantes du champ électrique sont parallèles au plan de séparation et elles sont continues. Elles doivent être les mêmes sur les deux parts de la surface de séparation.

Dans le cas d'un problème magnétostatique, la condition de passage entre deux milieux voisins est la suivante :

$$\vec{n} \wedge (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K} \quad (\text{II. 18})$$

$\vec{H}_1$: Composante tangentielle du champ magnétique dans le milieu 1

$\vec{H}_2$: Composante tangentielle du champ magnétique dans le milieu 2

$\vec{K}$: Représente le courant de surface

Pour que les composantes tangentielles du champ magnétique soient continues, il faut que la surface de séparation ne puisse servir de support à aucun courant induit.

En terme d'induction magnétique, la continuité de la composante normale de $\vec{B}$ à l'interface est traduite par la relation suivante :

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (\text{II. 19})$$

$\vec{B}_1$: Composante tangentielle de l'induction magnétique dans le milieu 1

$\vec{B}_2$: Composante tangentielle de l'induction magnétique dans le milieu 2

La conservation de la composante normale de la densité de courant est donnée par la relation suivante :

$$\vec{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0 \quad (\text{II. 20})$$

$\vec{J}_1$: Composante tangentielle de la densité de courant dans le milieu 1

$\vec{J}_2$: Composante tangentielle de la densité de courant dans le milieu 2

II.7. Les hypothèses simplificatrices

Tout travail de modélisation doit obligatoirement conduire à une représentation correcte de la physique des phénomènes.

L'équation électromagnétique à établir sera obtenue à partir des hypothèses simplificatrices, souvent utilisées lors du traitement des phénomènes électromagnétiques dans le domaine électrotechnique suivant :

Les courants de déplacement sont négligeables

$$\frac{\vec{J}_D}{\vec{J}_C} = \omega \cdot \frac{\varepsilon}{\rho} = \frac{2\pi f}{\sigma} \varepsilon \ll 1$$

Donc on néglige la densité de courant de déplacement : $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant la densité de courant $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

II.8. Modèle électromagnétique

Généralement un dispositif électromagnétique comporte plusieurs matériaux dont certains ont des caractéristiques non linéaires par ailleurs les phénomènes électromagnétiques varient fortement au sein de la structure, c'est pour cela que l'analyse de la structure complète en trois dimensions (3D) s'avère fastidieuse et coûteuse en terme de temps et de calcul, d'autre part l'analyse à une dimension (1D) est moins représentative. L'emploi des modèles à deux dimensions (2D) est particulièrement simple et efficace et son choix est réaliste. Et pour pouvoir effectuer une analyse significative sur les phénomènes électromagnétiques, il faudrait élaborer les modèles électromagnétiques sous forme d'équations aux dérivées partielles qu'on pourrait ensuite résoudre par différentes méthodes. On aura donc à faire avec deux modèles, l'un est magnétostatique, l'autre est magnétodynamique en coordonnées cartésiennes et cylindriques [1].

A partir de l'équation (II. 3), on pourra introduire une équation en terme de potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ tel que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A} / \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (\text{II. 21})$$

II.8.1.Modèle magnétostatique

Pour ce modèle, on ne tiendra compte d'aucune variation des grandeurs par rapport au temps

($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) et on néglige les courants de déplacement, car les fréquences en électrotechnique sont inférieures aux radiofréquences ($f < 10^{12}$ Hz).

D'où, les équations de Maxwell s'écriront comme suit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (\text{II. 22})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \quad (\text{II. 23})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II. 24})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_c \quad (\text{II. 25})$$

a. En coordonnées cartésiennes

Sachant que :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = -\Delta \vec{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad (\text{II. 26})$$

En introduisant la condition de Jauge Colombe : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ et cela pour assurer l'unicité de la solution nous aurons :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = -\Delta \vec{A} \quad (\text{II. 27})$$

D'après l'équation (II. 5), nous avons : $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$

D'où l'équation (II. 25) devient :

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{J}_c \quad (\text{II. 28})$$

En considérant que les propriétés physiques des milieux sont linéaires (la saturation est négligeable) l'équation (II. 28) devient :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \vec{J}_c \quad (\text{II. 29})$$

La combinaison des équations (II. 21) et (II. 29) donnera :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \mu \vec{J}_c \quad (\text{II. 30})$$

En faisant la soustraction entre les équations (II.30) et (II.27) nous aurons :

$$\Delta \vec{A} + \mu \vec{J}_c = 0 \quad (\text{II. 31})$$

En posant le potentiel vecteur magnétique dirigé selon l'axe (Oz), donc $\vec{A} = (0,0,A_z)$ tel que :

$$\Delta \vec{A} = \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right)$$

Et $\vec{J}_c$ est la densité des courants de conduction.

D'où l'équation (II. 31) devient :

$$\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) + \mu J_c = 0 \quad (\text{II. 32})$$

Sachant que :

$$\vec{J}_c = \vec{J}_s - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Avec :

J_s est la densité des courants de source et $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$ car il s'agit d'un phénomène statique.

L'équation (II. 32) devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = -\mu J_s \quad (\text{II. 33})$$

En posant : $v = \frac{1}{\mu}$

L'équation finale sera alors :

$$v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = -J_s \quad (\text{II. 34})$$

Avec :

A : Potentiel vecteur magnétique [T.m]

v : Réductivité magnétique [H/m]⁻¹

L'équation (II. 34) représente l'équation aux dérivées partielles avec le terme source en coordonnées cartésiennes (2D) du modèle magnétostatique.

b. En coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques on a :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z} (r A_\varphi) \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_z \quad (\text{II. 35})$$

$\vec{A}$ est dirigé suivant le vecteur $\vec{\mu}_\varphi$ donc les composantes de $\vec{A}$ seront :

$$\vec{A} = (0, A_\varphi, 0) \quad \text{Ou bien} \quad \vec{A} = r \vec{A}_\varphi$$

D'où l'équation (II. 34) devient :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial}{\partial z} (r A_\varphi) \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \vec{u}_z \quad (\text{II. 36})$$

En appliquant le rotationnel à l'équation (II. 36) et en posant :

$$\vec{B}_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{B}_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \vec{u}_z$$

On aura :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge (B_r \cdot \vec{u}_r + B_z \cdot \vec{u}_z)$$

L'équation (II. 35) devient alors :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z} (r B_r) \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_z \quad (\text{II. 37})$$

En prenant [r, z] comme plan d'étude ce qui veut dire que $B_\varphi = 0$ et $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$

Alors l'équation (II. 37) devient :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\varphi \quad (\text{II. 38})$$

En remplaçant B_r et B_z par leurs valeurs respectives nous aurons :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \left(-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \right) \vec{u}_\varphi \quad (\text{II. 39})$$

D'autre part d'après l'équation (II. 30) nous savons que :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \mu \vec{J}_c$$

La combinaison des équations (II. 30) et (II. 39) nous donnera :

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \right) \vec{u}_\varphi = -\mu \vec{J}_c \quad (\text{II. 40})$$

Le phénomène est statique d'où : $J_c = J_{s\varphi}$ car toutes les variations par rapport au temps sont nulles.

En posant :

$$v = \frac{1}{\mu} \quad \text{et} \quad J_s = (0, 0, J_{s\varphi})$$

Alors l'équation finale s'écrira :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r A_\varphi) \right) = -J_{s\varphi} \quad (\text{II. 41})$$

L'équation (II. 41) représente l'équation aux dérivées partielles avec le terme source en coordonnées cylindriques (2D) du modèle magnétostatique.

II.8.2.Modèle magnétodynamique

Dans ce cas les variations des grandeurs par rapport au temps ne sont pas nulles et on néglige toujours les courants de déplacement, car les fréquences en électrotechnique sont inférieures aux radiofréquences ($f < 10^{12}$ Hz).

a. En coordonnées cartésiennes

C'est le même raisonnement que le précédent à l'exception que le terme $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ n'est pas nul.

D'où :

$$\vec{J}_c = \vec{J}_s - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Donc l'équation (II. 32) devient :

$$v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} = -J_s \quad (\text{II. 42})$$

L'équation (II. 42) représente l'équation aux dérivées partielles en coordonnées cartésiennes (2D) du vecteur magnétique avec le terme source sans courant de déplacement du modèle magnétodynamique.

En régime harmonique l'équation (II. 42) s'écrira :

$$v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - \sigma j\omega A_z = -J_s \quad (\text{II. 43})$$

b. En coordonnées cylindriques

C'est le même raisonnement que le précédent à l'exception que $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ n'est pas nul.

D'où :

$$\vec{J}_c = \vec{J}_s - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Donc l'équation (II. 41) devient :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r A_\varphi) \right) - \frac{\sigma}{r} \frac{\partial}{\partial t} (r A_\varphi) = -J_{s\varphi} \quad (\text{II. 44})$$

L'équation (II. 44) représente l'équation aux dérivées partielles du potentiel vecteur magnétique avec terme source sans courant de déplacement en coordonnées cylindriques (2D) du modèle magnétodynamique.

En régime harmonique l'équation (II. 44) s'écrira :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r A_\varphi) \right) - \frac{\sigma}{r} j\omega (r A_\varphi) = -J_{s\varphi} \quad (\text{II. 45})$$

Avec : $\vec{A} = r \vec{A}_\varphi$

II.9. Différentes méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles

La plupart des phénomènes électromagnétiques sont représentés mathématiquement par des équations aux dérivées partielles.

Pour la résolution de ces dernières, on se doit de choisir une méthode de résolution, à ce stade plusieurs possibilités s'offrent à nous, le choix de la méthode est lié à la nature ainsi qu'à la géométrie du dispositif.

Les méthodes de résolution peuvent être classées en deux grandes catégories, les méthodes analytiques et les méthodes numériques. En plus de ces méthodes, il y a des méthodes semi analytiques et les méthodes mixtes consistant en l'association de plusieurs méthodes.

Dans ce qui suit, nous allons présenter les différentes méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles [2][5][11].

II.9.1.Méthodes analytiques

Les méthodes de résolution analytiques utilisées pour la résolution des problèmes électromagnétiques régis par des équations aux dérivées partielles sont :

- La méthode de transformations conformes.
- La méthode de séparation des variables.
- La méthode des séries exponentielles.

La méthode des séries exponentielles est rarement utilisée, donc on se contentera de présenter la méthode de transformations conformes et celle de séparation des variables.

II.9.1.1.La méthode de transformations conformes

Les méthodes de transformations conformes sont considérablement utilisées dans la résolution analytique des champs Laplace, avec des géométries complexes, elles sont utilisées pour analyser le champ dans plusieurs dispositifs (entre deux câbles non concentriques, des lignes de transmission à haute fréquence de sections différentes, autour d'un conducteur de section polygonale et dans l'entrefer des machines tournantes...etc.).

Le principe de la méthode consiste à poser :

$$A_{\varphi}(r, z) = A_{\varphi}(r) \cdot A_{\varphi}(z) \quad (\text{II. 46})$$

Telle que :

$A_{\varphi}(r, z)$ est la solution de l'équation différentielle aux dérivées partielles considérées de telle sorte que les fonctions $A_{\varphi}(r)$ et $A_{\varphi}(z)$ dépendent des variables r et z respectivement.

II.9.1.2.La méthode de séparation des variables

Cette méthode consiste à remplacer une équation aux dérivées partielles (à trois dimensions) par trois équations différentielles linéaires à coefficients constants et cela pour remplacer un problème à plusieurs dimensions par des problèmes unidimensionnels qui seront plus faciles à résoudre, cette méthode est utilisée pour la résolution de l'équation de Laplace dans des systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques et quelques autres systèmes d'usage moins courant dont les systèmes elliptiques, paraboliques et hyperboliques font partie.

Avantages et inconvénients des méthodes analytiques

A l'aide des hypothèses simplificatrices, les méthodes analytiques présentent correctement les phénomènes physiques étudiés avec une mise en œuvre relativement facile, mais l'inconvénient de ces méthodes c'est lorsque les équations à résoudre deviennent de plus en plus non linéaires où les modèles seront lourds, et dans le cas où les dispositifs sont de géométries complexes on ne peut pas faire coïncider les limites de la structure avec des surfaces d'un système de coordonnées orthogonales (plans, cylindres et sphères...etc.).

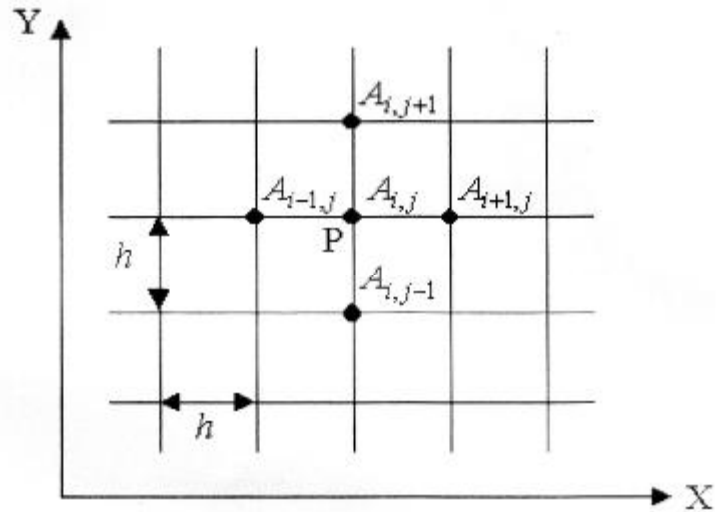
II.9.2. Méthodes numériques

Vu les avantages qu'elles présentent pour la modélisation des dispositifs électromagnétiques, les méthodes numériques sont devenues indispensables et d'un apport considérable. Parmi ces avantages, on trouve la prise en compte des problèmes de type vectoriel, des non linéarités et des géométries complexes. Ces méthodes consistent à transformer les équations aux dérivées partielles du champ en un système d'équations algébriques dont la solution fournit une approximation du champ en une grille discrète de points du plan ou de l'espace. Pour résoudre numériquement un problème de champ, une méthode appropriée doit être choisie parmi plusieurs telles que :

- La méthode des différences finies,
- La méthode d'intégrales de frontières,
- La méthode des éléments finis et la méthode des circuits couplés...etc.

II.9.2.1. La méthode des différences finies

Cette méthode est basée sur l'approximation de l'opérateur différentielle en un opérateur aux différences finies, où chaque dérivée est approchée par une différence de valeur de l'inconnue à déterminer en un certain nombre de points du domaine de résolution, donc l'équation aux dérivées partielles est remplacée par les équations algébriques en chaque point (nœud) en considérant une combinaison linéaire des valeurs de l'inconnu au point considéré et aux points environnants.



FigII.1 : Maillage type différences finies

Les dérivées partielles premières et secondaires de l'inconnue au point p sont données par :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2h}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2h}$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{h^2} \quad (\text{II. 47})$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{h^2}$$

Le Laplacien s'écrit alors comme suit :

$$(\Delta A)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1} + A_{i,j-1} - 4A_{i,j}}{h^2} \quad (\text{II. 48})$$

La variation de i et de j sur les points du maillage donne un système matriciel de la forme :

$$[S] \cdot [A] = [F] \quad (\text{II. 49})$$

Avec :

$[F]$: Le terme source

$[S]$: Une matrice contenant les caractéristiques du système (matrice inverse)

$[A]$: Le vecteur des inconnues

a. Avantage de la méthode

- Mise en œuvre relativement simple.
- Prise en considération des non linéarités.
- Préparation et introduction des données relativement simple.

b. inconvénients de la méthode

- Non considération des géométries complexes limitant ainsi son domaine d'application
- Taille des systèmes algébriques importante.
- Temps de calcul relativement important
- Précision des calculs nécessitant des ordinateurs de grande capacité mémoire.

II.9.2.2. La méthode des circuits couplés

La méthode des circuits couplés est une méthode semi analytique qui consiste à transformer le domaine d'étude en un circuit électrique équivalent en faisant une discrétisation de ce domaine en mailles auxquelles s'applique des expressions analytiques des grandeurs électromagnétiques en utilisant la théorie des circuits pour la résolution des équations de Maxwell et également une expression intégrale (loi de Biot et Savart) des grandeurs électromagnétiques. Le maillage consiste à subdiviser le domaine en spires élémentaires pour exprimer la résistance, l'inductance propre de chaque spire élémentaire et les inductances mutuelles entre les différentes spires. L'ensemble des éléments obtenus forme alors un système de circuits mutuellement couplés. Dans le cas des phénomènes électromagnétiques sinusoïdaux, le système d'équations obtenu est linéaire et à coefficients complexes de la forme suivante :

$$[Z]. [I] = [V] \quad (\text{II. 50})$$

Où les éléments Z_{ij} de la matrice $[Z]$, représentent l'impédance élémentaire, I_i le courant traversant une spire élémentaire i et V_i tension appliquée à cette spire.

Dans le cas du régime transitoire, le système d'équations linéaires obtenu est à coefficients réels et de la forme suivante :

$$[R]. [I] + [L]. \left[\frac{\partial I}{\partial t} \right] = [V] \quad (\text{II. 51})$$

La matrice est diagonale, ses éléments représentent les résistances des spires élémentaires.

La matrice $[L]$ est une matrice pleine où les éléments de la diagonale L_{ij} représentent les inductances propres des spires élémentaires, et les éléments hors de la diagonale M_{ij} représentent les inductances mutuelles des spires i et j .

a. Avantage de la méthode

- Application générale pour les problèmes de répartition des grandeurs électromagnétiques.
- Plus précise que la méthode analytique unidimensionnelle.
- Ne nécessite pas trop d'espace mémoire.

b. Inconvénients de la méthode

- Le principal inconvénient de cette méthode est la lourdeur des calculs nécessaires pour obtenir analytiquement les coefficients d'inductance mutuelle, une alternative consiste à calculer ceux-ci par éléments finis
- Notons aussi que le champ d'application de cette méthode est très limité

II.9.2.3. La méthode d'intégrales de frontières

La méthode d'intégrales de frontières permet la représentation du domaine (la détermination des grandeurs inconnues) tout en limitant la discrétisation à la frontière. Elle ne s'applique que dans le cas où le milieu considéré est linéaire. Cette méthode s'applique lorsque les fréquences de travail sont très importantes, car la profondeur de pénétration devient très faible par rapport aux autres dimensions géométriques du dispositif étudié. La méthode des intégrales de frontières est utilisée généralement en magnétostatique ou bien elle est couplée avec la méthode des éléments finis et cela pour calculer les champs électromagnétiques dans les milieux linéaires et non conducteurs.

En deux dimensions par exemple elle est basée sur la formulation intégrale suivante :

$$CA = \oint_c A \cdot \frac{\partial G}{\partial n} dc - \oint_c G \cdot \frac{\partial A}{\partial n} dc \quad (\text{II.52})$$

Où G est la fonction de Green de l'opérateur de Laplace en deux dimensions, elle est donnée par :

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (\text{II.53})$$

C est un facteur qui caractérise la forme de la frontière ($C=0.5$ sur un contour lisse), $\frac{\partial A}{\partial n}$ est la projection du gradient du module de la composante transversale du vecteur potentiel magnétique sur la normale à l'élément de frontière dc . L'intégrale est calculée sur la frontière c du domaine analysé. La discrétisation de l'équation (II. 52) aboutit à un système linéaire en termes de valeurs du module de la composante transversale du vecteur magnétique sur les nœuds de la frontière.

a. Avantage de la méthode

- Prise en compte de domaines infinis.
- Temps de calculs relativement réduit.
- Taille des systèmes algébriques réduite.

b. Inconvénients de la méthode

- Ne résout que les problèmes linéaires.
- Le système algébrique obtenu n'est pas symétrique.
- Imprécision due à la considération que des grandeurs surfaciques

II.9.2.4. La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis consiste en utilisation d'une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. La méthode des éléments finis est basée sur une formulation intégrale du problème aux dérivées partielles, cette formulation peut être de type variationnelle ou résidus pondérer.

Cette méthode constitue un outil de base pour un ingénieur appelé à concevoir des systèmes physiques ou à modifier des systèmes déjà existants.

a. Avantage de la méthode

- Elle s'applique à tout système physique traduit par des équations aux dérivées partielles car elle est de portée générale.
- Elle s'intègre à des logiciels de conception assistée par ordinateur C.O.A.
- Prise en compte de la pénétration pour des basses fréquences.
- Temps de calcul relativement avantageux.
- Prise en compte des non linéarités.
- Elle s'adapte aux géométries complexes.

b. Inconvénients de la méthode

- Imprécision dans le cas de domaines d'étude infinis ou de régions minces.
- Imprécision en cas de présence de singularités dans le domaine d'étude.
- Mise en œuvre relativement difficile.
- La construction d'une fonction approchée est difficile lorsque le nombre de nœuds (paramètres) devient important.

Cette méthode fera l'objet du troisième chapitre où sera donné un aperçu plus détaillé.

II.10.Conclusion

Le choix entre les méthodes analytiques et les méthodes numériques pour la résolution des équations aux dérivées partielles nous met à un dilemme à savoir gagner en terme de temps de programmation et de calcul, ou bien améliorer la précision des résultats.

Comparativement aux outils de modélisation analytique, on peut conclure de façon générale que les méthodes numériques résolvent directement les équations physiques de base du système à dimensionner, avec un faible niveau d'hypothèses et en utilisant des algorithmes mathématiques lourds. Ils fournissent ainsi, les grandeurs étudiées (potentiel vecteur magnétique, champ magnétique...etc.) en tous points du domaine de résolution et on en déduit les valeurs des grandeurs globales du problème avec plus de précision.

Parmi les méthodes numériques citées, nous avons opté pour la méthode des éléments finis. Grâce à son efficacité et sa capacité de s'intégrer à des logiciels de conception assistée par ordinateur, cette méthode pourra fournir de bons résultats en terme de précision avec un gain en terme de temps de calcul et de programmation.

Chapitre III

Méthode des éléments finis et calcul des forces électromagnétiques

III.1.Introduction

Avec l'apparition des ordinateurs assez puissants en terme d'espace mémoire, rapides en terme d'exécution des calculs et économiques (coûts réduits), l'utilisation de la méthode des éléments finis pour la résolution des problèmes de champs électromagnétiques devient un choix réaliste. Ce type de problème est modélisé de façon fondamentale, en partant des équations de Maxwell qui sont manipulées pour aboutir à une équation différentielle globale régissant le fonctionnement du dispositif électromagnétique dans un cadre restreint et bien déterminé.

L'efficacité de la méthode des éléments finis en tant que outil numérique de détermination de la répartition fine des grandeurs électromagnétiques au sein des machines électriques réside en sa puissance et sa souplesse, en effet cette méthode permet d'éliminer la plupart des hypothèses restrictives [2].

III.2.Présentation de la méthode des éléments finis

Pour résoudre un problème par cette méthode, on procède par les étapes suivantes [3] :

- 1- On pose un problème physique traduit sous forme d'équations aux dérivées partielles à satisfaire en tout point d'un domaine V , avec des conditions aux limites sur le bord V , nécessaires et suffisantes pour que la solution soit unique.
- 2- On construit une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites : c'est la formulation du problème.
- 3- On divise le domaine V en sous domaines V_e : c'est le maillage, les sous domaines sont appelés mailles.
- 4- On choisit la famille des champs locaux c'est-à-dire à la fois la position des nœuds dans les sous domaines et les polynômes (ou autres fonctions) qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux nœuds. La maille complétée par ces informations est alors appelée élément.
- 5- On ramène le problème à un problème discret : c'est la discrétisation. En effet, toute solution approchée est complètement déterminée par les valeurs aux nœuds des éléments. Il suffit donc de trouver la valeur à attribuer aux nœuds pour décrire une solution approchée.
- 6- On résout le problème discret : c'est la résolution.
- 7- On peut alors construire la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux nœuds et on en déduit d'autres grandeurs : c'est le post-traitement.

- 8- On visualise et on exploite la solution pour juger de sa qualité numérique et juger si elle satisfait le critère du cahier de charge : c'est l'exploitation des résultats.

III.3. Le maillage

En premier lieu, on choisit un ensemble de n points sur le domaine V qui sert à définir la géométrie, puis nous subdivisons le domaine V en sous domaines V_e en forme relativement simple et chaque élément du sous domaine V_e doit être défini analytiquement de manière unique en fonction des coordonnées des nœuds géométriques qui appartient à cette élément, c'est-à-dire qu'ils sont situés sur le domaine V et sur la frontière. Notons que deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leurs frontières communes, les frontières entre éléments peuvent être des points, des courbes ou des surfaces, et l'ensemble de tout les éléments V_e doit constituer le domaine V .

Les formes d'éléments classiques correspondant à des domaines à une ou deux dimensions sont présentées comme suit.

1. éléments à une dimension



Linéaire (deux nœuds)

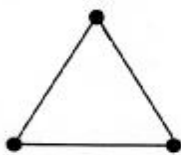


Quadratique (trois nœuds)

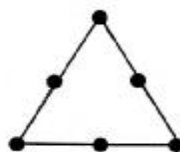


Cubique (quatre nœuds)

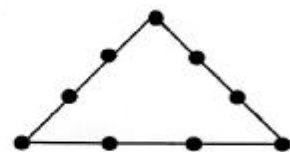
2. éléments à deux dimensions



Linéaire (trois nœuds)



Quadratique (six nœuds)



Cubique (neuf nœuds)

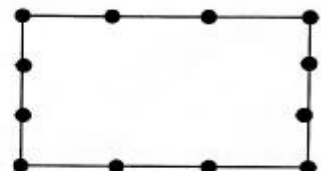
Les éléments carrés sont :



Linéaire (quatre nœuds)



Quadratique (huit nœuds)



Cubique (douze nœuds)

III.4. Principe de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à discrétiser le domaine d'étude (V) en sous domaines (V_e) appelés éléments finis, en respectant les frontières et les interfaces du domaine initial complet (V) tel que l'ensemble de sous domaines donne le domaine complet.

Le maillage par éléments finis se fait généralement en subdivisant le domaine d'étude en plusieurs éléments tout en prenant en considération la satisfaction des conditions suivantes :

- L'intersection de deux éléments doit être soit nulle, ou soit égale à l'un de leurs cotés ou encore égale à l'un de leurs sommets.
- La limite de séparation entre deux milieux de propriétés différentes doit coïncider avec le coté d'un élément.
- La déformation d'un élément doit être maintenue dans certaines limites.

a-Approximation par éléments finis (fonction d'approximation)

Sur le domaine d'étude (V), après le maillage, on obtient un ensemble de nœuds d'interpolations (de coordonnées x_i). Sur chaque élément (V_e), on applique la méthode d'approximation nodale pour simplifier la construction de la fonction approchée, cette méthode s'adapte très bien au calcul sur ordinateur. Elle consiste à :

- Identifier un ensemble de sous domaines (éléments) (V_e) dont l'union représente le domaine (V).
- Définir une fonction approchée $U_e(x)$ différente sur chaque sous domaine (V_e) par la méthode d'approximation nodale.

L'approximation par éléments finis est une méthode qui peut représenter les particularités suivantes:

- L'approximation nodale sur chaque sous domaine (V_e) ne fait intervenir que les variables attachées à des nœuds situées sur (V_e) et sur les frontières.
- Les fonctions approchées $U_e(x)$ sur chaque sous domaine (V_e) sont construites de manière à être continues sur (V_e) et à satisfaire les conditions de continuités entre les différents sous domaines (V_e).

b-Définition

- Les sous domaines (V_e) sont appelés des éléments finis.
- Les points en lesquels les fonctions approchées $U_e(x)$ coïncident avec la fonction $U(x)$ sont les nœuds d'interpolations ou points nodaux.

L'approximation par éléments finis présente deux aspects différents :

- Il faut d'abord définir la géométrie de tous les éléments, ce qui est plus ou moins compliqué selon leurs formes.
- Il faut ensuite construire les fonctions d'interpolations $N_i(x)$ correspondant à chaque élément et qui vérifient la continuité entre les éléments.

On a :

$$F(x) = \langle \alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x), \dots, \alpha_n(x) \rangle \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \langle \alpha_n(x) \rangle \{U_n(x)\} \quad (\text{III. 1})$$

Tels que :

$F(x)$: Fonction exacte.

$U(x)$: Fonction d'interpolation.

$\langle \text{---} \rangle$: Vecteur ligne.

$\begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix}$: Vecteur colonne

Avec :

x appartient à (V_e)

$U_1, U_2, \dots, U_n$ Sont les valeurs de $F(x)$ aux nœuds d'interpolations de l'élément ou variables nodales.

$\alpha_1(x), \alpha_2(x) \dots, \alpha_n(x)$ Sont les fonctions de forme ou d'interpolation sur l'élément réel.

Les fonctions d'interpolations dépendent des coordonnées des nœuds de l'élément et sont différentes pour chaque élément.

c-Calcul de la fonction d'approximation

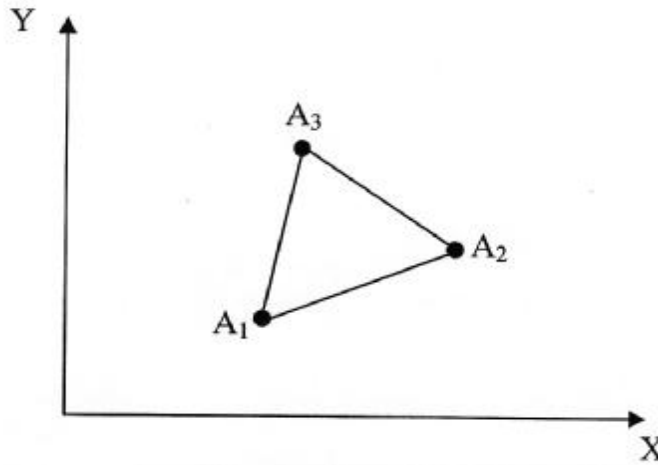
Dans cette étude on calcule la fonction d'approximation d'une grandeur $A(x, y)$ sur un domaine V . Les éléments choisis sont de type triangulaire linéaire (deux dimensions).

On choisit une approximation sous forme d'un polynôme du premier degré (linéaire) :

$$A(x, y) = ax + by + c \quad (\text{III. 2})$$

$$A(x, y) = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (\text{III. 3})$$

Soient A_1 , A_2 et A_3 les valeurs de la fonction d'interpolation aux nœuds 1, 2 et 3 comme le montre la figure ci-dessous :



FigIII.3 : Élément triangulaire type 2D

Sachant que: $A_1(x, y)$, $A_2(x, y)$ et $A_3(x, y)$ donc :

$$\begin{cases} A(x_1, y_1) = ax_1 + by_1 + c = A_1 \\ A(x_2, y_2) = ax_2 + by_2 + c = A_2 \\ A(x_3, y_3) = ax_3 + by_3 + c = A_3 \end{cases} \quad (\text{III. 4})$$

Le système matriciel correspondant est le suivant:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III. 5})$$

Les coefficients a, b et c se déduisent comme suit :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III. 6})$$

On aura :

$$A(x, y) = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III. 7})$$

Pour chaque élément e, on aura :

$$A^e(x, y) = \langle \alpha_1^e(x, y) \ \alpha_2^e(x, y) \ \alpha_3^e(x, y) \rangle \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III. 8})$$

Tel que :

$$\alpha_i^e(x, y) = \frac{1}{2D^e} [\sigma_i^e + \beta_i^e x + \mu_i^e y] \quad \text{où } i = 1, 2, 3$$

Avec :

$$\begin{cases} \sigma_1^e = x_3 - x_2 \\ \sigma_2^e = x_1 - x_3 \\ \sigma_3^e = x_2 - x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1^e = y_2 - y_3 \\ \beta_2^e = y_3 - y_1 \\ \beta_3^e = y_1 - y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_1^e = x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ \mu_2^e = x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ \mu_3^e = x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{cases}$$

Et :

$$2D^e = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}, \quad D^e = \text{est l'aire de l'élément}$$

Cette interpolation nous permet d'obtenir un système algébrique à résoudre dans le but d'obtenir des solutions physiquement significatives.

III.5. Formulation éléments finis des équations électromagnétiques

Le principe de la méthode des éléments finis est basé sur la formulation intégrale du problème aux dérivées partielles et de leurs conditions aux limites.

Cette formulation peut être de deux types [9] :

- Type variationnelle
- Où
- Type résidus pondérés

III.5.1. Formulation variationnelle

Le principe de la méthode est basé sur une formulation intégrale du problème aux dérivées partielles, elle nécessite la connaissance au préalable de la fonctionnelle d'énergie du système.

Cette formulation est basée sur le principe de l'action Hamiltonienne qui stipule l'existence d'une fonctionnelle type intégrale donnée par :

$$F(A) = \int_V L \cdot dV \quad (\text{III. 9})$$

L : est la fonction de Lagrange résultante de la coénergie du système de type cinétique et de son énergie potentielle.

V : est le domaine d'étude

Avec :

$$L = W_c - W_p$$

W_c : énergie de type cinétique

W_p : énergie de type potentielle

Dans le cas d'un phénomène magnétostatique cette fonction (L) aura pour expression :

$$L = \int_0^B v \cdot b \, db - JA \quad (\text{III. 10})$$

D'où la fonctionnelle suivante :

$$F(A) = \int_V \left[\int_0^B v \cdot b \, db - JA \right] dV \quad (\text{III. 11})$$

v : Réductivité magnétique

b : Module de l'induction magnétique

J : Densité de courant

A : Potentiel vecteur magnétique

Résoudre le problème variationnelle défini par la fonction d'énergie $F(A)$ revient à minimiser cette dernière. La minimisation est effectuée en utilisant le principe de Rayleigh Ritz qui consiste à écrire que :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = 0 \quad (\text{III. 12})$$

Ou bien :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_2} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_3} = \dots = \frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = \dots = \frac{\partial F(A)}{\partial A_N} = 0 \quad (\text{III. 13})$$

N : Nombre de nœuds du domaine d'étude

A_i : Inconnue au nœud i du domaine

L'utilisation de la méthode des éléments finis consiste à poser :

$$F(A) = \sum_{e=1}^{N_e} F_e(A^e) \quad (\text{III. 14})$$

e : élément fini du domaine

On obtient :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial F_e(A^e)}{\partial A_i} = 0 \quad (\text{III. 15})$$

Avec :

$$A^e = \sum_{j=1}^{N_e} \alpha_j^e A_j^e$$

$F_e(A^e)$: Fonction d'énergie de l'élément (e)

A_j^e : Inconnue de l'élément (e) au nœud (j)

α_j^e : Fonction de forme au nœud (j) de l'élément (e)

N_e : Nombre de subdivisions en sous domaines du domaine d'étude

A^e : Fonction d'approximation de l'élément (e)

On est ainsi à résoudre un système de N équation à N inconnue $A_1, A_2, A_3, \dots, A_j, A_n$.

III.5.2. Formulation résidus pondérés (projective)

Le principe de la méthode des résidus pondérés est basé sur la détermination des résidus R_i , elle consiste à choisir n fonctions de projections $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$, qui minimisent l'intégrale du résidu de l'approximation dont l'expression est :

$$W_i = \int_V R_i \phi_i dV \quad (\text{III. 16})$$

Tel que :

$$R_i = L(U) - f_v \quad i=1,2,\dots, nn$$

Avec :

R_i : Résidu de l'approximation

L : Opérateur différentiel

U : Grandeur physique inconnue

ϕ_i : Fonction de projection

f_v : Fonction définie sur le domaine V représente le terme source

Les fonctions de pondérations ϕ_i sont indépendantes et leur nombre doit être égal au nombre de paramètre de l'approximation.

III.6. Différentes méthodes déduites des résidus pondérés

Le choix de la fonction de pondération conduit à plusieurs méthodes parmi celles-ci on cite [3]:

1. Méthode de collation par sous domaines
2. Méthode de collation par points
3. Méthode des moindres carrés
4. Méthode de Galerkinge

1. méthode de collation par sous domaines

Dans cette méthode, on définit la fonction de pondération dans les sous domaines (V_e) du domaine d'étude (V), elle aura la forme suivante :

$$\phi_i(\vec{r}) = 1 \quad \text{dans } (V)$$

$$\phi_i(\vec{r}) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

2. méthode de collation par points

Dans cette méthode, on choisit la fonction de Dirac comme fonction de pondération. Elle est donnée comme suit :

$$\Phi_i = \delta(\vec{r}) \quad \text{(III. 17)}$$

Avec : $i=1,2,\dots, n$

δ : La fonction de Dirac

$\vec{r}$: La variable vectorielle telle que :

$\vec{r} = \{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\} \dots etc$

3. méthode des moindres carrés

Cette méthode est basée sur la minimisation de la norme quadratique de l'erreur sur l'équation et les conditions aux limites, elle est donnée par :

$$\psi_i(\vec{r}) = \frac{\partial R_i}{\partial a_i} \quad \text{(III. 18)}$$

a_i : coefficient qu'il faut déterminer de telle sorte que :

$$\|R_i^2\| = \int_V R_i^2 dV$$

Soit minimale.

$\|R_i^2\|$: La norme du résidu

4. méthode de Galerkin

On s'intéresse beaucoup plus à cette méthode car cette méthode ne nécessite pas la connaissance au préalable de l'expression énergétique du système et les fonctions de pondérations sont identiques aux fonctions de forme (ceci permet d'aboutir à un système matriciel symétrique).

III.7. Discrétisation des équations aux dérivées partielles (système algébriques)

Pour discrétiser les équations aux dérivées partielles à fin d'obtenir des systèmes algébriques à résoudre numériquement on va procéder par la formulation éléments finis des différents modèles électromagnétiques [9].

III.7.1. Modèle magnétostatique

a- en coordonnées cartésiennes

Pour la formulation en éléments finis du modèle magnétostatique en coordonnées cartésiennes (2D) donnée par (II. 34) on utilise la méthode projective de Galerkin :

On aura :

$$\iint_V \phi_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] dx dy = - \iint_V J_s \phi_i dx dy \quad (\text{III. 19})$$

On applique le théorème de Green et on aura :

$$\iint_V -\phi_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] dx dy = \iint_V v \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\Gamma} v \frac{\partial A}{\partial n} \phi_i d\Gamma$$

C'est l'équation (III. 20)

Pour des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann homogènes, le terme qui tient compte de la frontière s'annule dans les équations :

$$\int_{\Gamma} v \frac{\partial A}{\partial n} \phi_i d\Gamma = 0$$

On aura donc :

$$\iint_V v \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \iint_V J_s \phi_i dx dy \quad (\text{III. 21})$$

Avec :

ϕ_i : Fonction de projection ou de pondération.

Γ : La frontière du domaine V

Sur chaque nœud du maillage, l'élément A est représenté sous la forme suivante :

$$A = \sum_{k=1}^n \phi_k \cdot A_k \quad (\text{III. 22})$$

Avec:

ϕ_k : Fonction de forme associée au nœud (K) du domaine.

n : Nombre total de nœuds du domaine.

K : Entier naturel variant de 1 jusqu'à n.

On remplace l'expression (III. 22) dans l'équation (III . 21) et on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \iint_V v \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \right) \cdot A_k dx dy = \iint_V J_s \phi_i dx dy \quad (\text{III. 23})$$

Pour résoudre cette équation, il faut la transformer de sa forme différentielle en une forme matricielle. On aura donc le système algébrique suivant :

$$[M] \cdot [A] = [K] \quad (\text{II. 24})$$

Tel que :

$$M_{ik} = \iint_V v \cdot \vec{\nabla} \phi_i \cdot \vec{\nabla} \phi_k dx dy$$

$$K_i = \iint_V J_s \phi_i dx dy$$

[A] : vecteur des inconnues.

b- en coordonnées cylindriques

Le modèle magnétostatique (2D) en coordonnées cylindriques est représenté dans l'équation (II. 41). La formulation intégrale de cette équation est donnée par :

$$\iint_V \phi_i \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right) \right] dr dz = \iint_V \phi_i J_{s\varphi} dr dz \quad (\text{III. 25})$$

En utilisant le théorème de Green on obtient :

$$\iint_V \phi_i \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) \right] dr dz = \iint_V \frac{v}{r} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z} \right) dr dz$$

$$- \int_\Gamma v \phi_i \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial n} d\Gamma \quad (\text{III. 26})$$

Pour des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann homogènes, le terme qui tient compte de la frontière s'annule dans l'équation :

$$\int_\Gamma v \phi_i \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial n} d\Gamma = 0$$

En posant $A = rA_\varphi$ (A étant la variable), l'équation (III. 26) s'écrit comme suit :

$$\iint_V \frac{v}{r} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) dr dz = \iint_V \phi_i J_{s\varphi} dr dz \quad (\text{III. 27})$$

La forme discrétisée de la fonction d'approximation sera :

$$A = \sum_{k=1}^n \phi_k \cdot A_k \quad (\text{III. 28})$$

En remplaçant l'équation (III. 28) dans (III. 27) on aura :

$$\sum_{k=1}^n \iint_V \frac{v}{r} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial z} \right) \cdot A_k dr dz = \iint_V \phi_i J_{s\varphi} dr dz \quad (\text{III. 29})$$

Ou bien :

$$\sum_{k=1}^n \iint_V \frac{v}{r} (\vec{\nabla} \phi_i \cdot \vec{\nabla} \phi_k) \cdot A_k dr dz = \iint_V \phi_i J_{s\varphi} dr dz \quad (\text{III. 30})$$

On aura le système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] = [K] \quad (\text{III. 31})$$

Avec :

$$M_{ik} = \iint_V \frac{v}{r} \cdot \vec{\nabla} \phi_i \cdot \vec{\nabla} \phi_k dr dz$$

$$K_i = \iint_V \phi_i \cdot J_{sq} \, dr \, dz$$

III.7.2. Modèle magnétodynamique

a. en coordonnées cartésiennes

On a à résoudre l'équation (II. 42) où le terme $\frac{\partial}{\partial t}$ est remplacé par le terme $j\omega$, c'est l'équation qui représente le modèle magnétodynamique (2D) en régime harmonique. L'équation est donnée par :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(v \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \sigma \cdot j \cdot \omega \cdot A = J_{sz} \quad (\text{III. 32})$$

En utilisant la méthode projective de Galerkin, on aura la formulation intégrale de l'équation, ce qui est donnée par l'expression suivante :

$$\iint_V \phi_i \left[\left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(v \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right) + \sigma \cdot j \omega \cdot A \right] dx \, dy = \iint_V \phi_i J_s \, dx \, dy \quad (\text{III. 33})$$

En appliquant le théorème de Green, on aura :

$$\begin{aligned} - \iint_V \phi_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] dx \, dy &= \iint_V v \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \, dy \\ - \int_{\Gamma} v \frac{\partial A}{\partial n} \cdot \phi_i \, d\Gamma & \end{aligned} \quad (\text{III. 34})$$

Supposant que les conditions aux limites sont de type Dirichlet ou Neumann homogènes. Alors le terme sur la frontière s'annule et l'équation (III. 33) devient :

$$\iint_V v \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \, dy + \iint_V \phi_i \cdot \sigma \cdot j \omega \cdot A \, dx \, dy = \iint_V \phi_i J_s \, dx \, dy \quad (\text{III. 35})$$

En remplaçant (III. 29) dans (III. 35), on aura :

$$\sum_{k=1}^n \left[\iint_V v \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \right) \cdot A_k \, dx \, dy + j \omega \iint_V \sigma \cdot \phi_i \cdot \phi_k \cdot A_k \, dx \, dy \right] = \iint_V \phi_i J_s \, dx \, dy$$

C'est l'équation (III. 36)

Le système matriciel à résoudre est donné par :

$$[M].[A] + j\omega.[L].[A] = [K] \quad (\text{III. 37})$$

Avec :

$$M_{ik} = \iint_V v. \vec{\nabla} \phi_i. \vec{\nabla} \phi_k dx dy$$

$$L_{ik} = \iint_V \sigma. \phi_i. \phi_k dx dy$$

$$K_i = \iint_V \phi_i J_s dx dy$$

b- en coordonnées cylindriques

Les vecteurs de champ magnétique et de densité de courant de source sont dirigés suivant l'axe orthogonal($\vec{O}_\varphi$), d'où :

$$\vec{A} = (0, A_\varphi, 0) \text{ ou bien } \vec{A} = r. \vec{A}_\varphi \text{ et } \vec{J}_s = (0, J_{s\varphi}, 0)$$

Le modèle magnétodynamique en coordonnées cylindriques (2D) est représenté par l'équation suivante :

$$-\left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) \right] + \frac{\sigma}{r} \cdot j\omega(r.A_\varphi) = J_{s\varphi} \quad (\text{III. 38})$$

La formulation intégrale de l'équation (III. 38) est donnée par :

$$\begin{aligned} & \iint_V \phi_i \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) + \frac{\sigma}{r} \cdot j\omega(r.A_\varphi) \right] dr dz \\ &= \iint_V \phi_i J_{s\varphi} dr dz \end{aligned} \quad (\text{III. 39})$$

En appliquant le théorème de Green on obtient :

$$\begin{aligned} & \iint_V -\phi_i \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(r.A_\varphi)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(r.A_\varphi)}{\partial r} \right) \right] dr dz = \iint_V \frac{v}{r} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial(r.A_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial(r.A_\varphi)}{\partial z} \right) dr dz \\ & - \int_\Gamma \frac{v}{r} \phi_i \cdot \frac{\partial(r.A_\varphi)}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{III. 40})$$

Supposant que les conditions aux limites sont de type Dirichlet ou Neumann homogènes.

En posant $r \cdot A_\varphi = A$, L'équation (III. 40) s'écrit comme suit :

$$\iint_V \frac{v}{r} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) dr dz + \iint_V \frac{\sigma}{r} \cdot j\omega \cdot A \cdot dr dz = \iint_V \phi_i J_{s\varphi} dr dz \quad (\text{III. 41})$$

On remplace la variable (A) par sa fonction d'approximation :

$$A = \sum_{k=1}^n \phi_k \cdot A_k \quad (\text{III. 42})$$

On aura :

$$\sum_{k=1}^n \left[\iint_V \frac{v}{r} \vec{\nabla} \phi_i \cdot \vec{\nabla} \phi_k dr dz \right] \cdot A_k + j\omega \sum_{k=1}^n \left[\iint_V \phi_i \phi_k \cdot \frac{v}{r} dr dz \right] \cdot A_k = \iint_V \phi_i J_{s\varphi} dr dz \quad (\text{III. 43})$$

On généralise cette équation sur tous les nœuds du domaine, on aboutit au système matriciel à résoudre et qui est le suivant :

$$[[M] + j\omega[L]] \cdot [A] = [K] \quad (\text{III. 44})$$

Avec :

$$M_{ik} = \iint_V \frac{v}{r} \cdot \vec{\nabla} \phi_i \cdot \vec{\nabla} \phi_k dr dz$$

$$L_{ik} = \iint_V \frac{\sigma}{r} \cdot \phi_i \cdot \phi_k dr dz$$

$$K_i = \iint_V \phi_i J_{s\varphi} dr dz$$

III.8. Méthodes de calcul des forces magnétiques

Les forces magnétiques jouent un rôle déterminant dans le fonctionnement de tout système électromagnétique, mécanique en terme de déplacement ou de déformation. Les lois physiques de l'électromagnétisme donnent une réponse simple à ce sujet, tant que l'on ne considère pas les matériaux ferromagnétiques.

Dans le cas de conducteurs électriques par exemple, il n'y a pas d'ambiguïté la densité locale de la force suit la loi classique de Laplace.

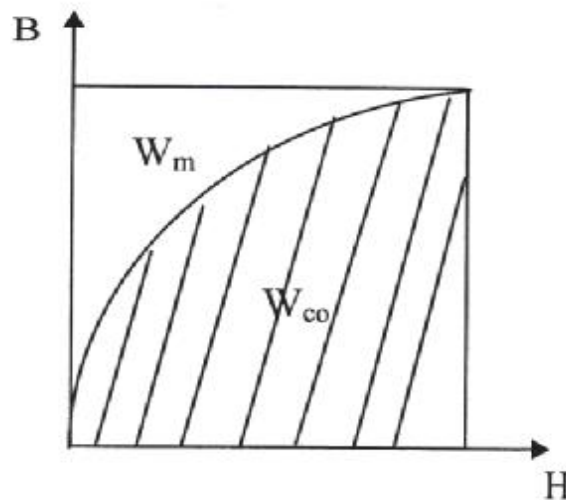
La littérature concernant le calcul des forces électromagnétiques, est très variée tant que les applications traitées par l'arsenal des approches adoptées sont nombreuses.

La force d'origine électromagnétique est déterminée en utilisant principalement les méthodes suivantes [13] :

- Méthode de la variation de l'énergie et co-énergie magnétique
- Méthode des travaux de virtuels
- Tenseur de Maxwell
- Force de Lorentz

III.8.1. Notion de l'énergie et de la co-énergie magnétique

Pour représenter ces deux notions d'énergie, on trace la courbe de l'induction magnétique en fonction de champ magnétique .



FigIII.2. Caractéristiques de .

- L'énergie est représentée par la surface délimitée par la courbe et l'axe des ordonnées (B).
- La co-énergie est représentée par la surface délimitée par la courbe et l'axe des abscisses (H).

La force magnétique peut être calculée par deux méthodes à travers la courbe :

- A courant constant, par la dérivation de la co-énergie magnétique W_{co} par rapport au déplacement.
- A flux constant, par la dérivation de l'énergie magnétique W_m par rapport au déplacement.

On peut quantifier les deux notions par les relations intégrales suivantes :

III.8.1.1.L'énergie magnétique W_m :

$$W_m = \int_V \left(\int_0^B H dB \right) dV \quad (\text{II. 45})$$

III.8.1.1.La co-énergie magnétique W_{co} :

$$W_{co} = \int_V \left(\int_0^H B dH \right) dV \quad (\text{II. 46})$$

V : domaine d'étude

III.8.2.Force calculée par l'énergie magnétique

Elle est parmi les méthodes les plus utilisée pour le calcul de la force, elle est basée sur la variation de l'énergie provoquée par un petit déplacement (utilisée dans les cas des petits déplacements). Cette force est déduite par la relation suivante :

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_V \left(\int_0^B H dB \right) dV \right) \quad (\text{II. 47})$$

x : est la variation spatiale de la coordonnée.

III.8.3.Force calculée par la co-énergie magnétique

La force magnétique dans ce cas est calculée par la dérivée de la co-énergie magnétique par rapport au déplacement à courant constant. Cette force est donnée par la relation suivante :

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_V \left(\int_0^H B dH \right) dV \right) \quad (\text{II. 48})$$

x : est la variation spatiale de la coordonnée.

III.8.2.Méthode des travaux virtuels

Le principe de la méthode consiste à utiliser des éléments finis pour calculer la force magnétique totale. Le calcul de la force est effectué par rapport à un système de coordonnées locales (U , V , W). Le calcul de la force se fait en faisant appel à la coénergie.

L'expression de la force s'écrit alors comme suit :

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_V \left(\int_0^H B dH \right) dV \right) \quad (\text{II. 49})$$

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_e \left(\int_{V_e} \left(\int_0^H B dH \right) dV_e \right) \right) \quad (\text{II. 50})$$

x : représente la coordonnée lié au déplacement dans un système de coordonnées locales (U, V, W). l'expression (II. 50) prend la forme suivante :

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_e \left(\int_V \left(\int_0^H B dH \right) |G| dV \right) \right) \quad (\text{II. 51})$$

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_e \left(\int_{V_e} \left(\int_0^H B dH \right) |G| dU dV dW \right) \right) \quad (\text{II. 52})$$

|G|:Determinant de la matrice Jacobéenne de transformation de coordonnées.

La méthode des travaux virtuels a l'avantage de bien s'adapter à la méthode des éléments finis et de fournir une bonne précision.

L'inconvénient de cette méthode est l'utilisation de deux modèles éléments finis pour évaluer une force électromagnétique

III.8.3.Tenseur de Maxwell

Dans les milieux non parcourus par des courants, les forces et les couples peuvent être calculés par l'application du tenseur de Maxwell. Ce dernier définit les forces directement du champ magnétique.

$$F = \oint_S \left[(\vec{B}_r \vec{H}_z) \cdot \vec{t} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\mu_0} B_r^2 - \mu_0 H_z^2 \right) \cdot \vec{n} \right] d\Omega \quad (\text{II. 53})$$

$\vec{B}_r$: est la composante normale de l'induction magnétique.

$\vec{H}_z$: est la composante tangentielle du champ magnétique.

$\vec{n}$: est la normale extérieure à la surface d'intégration.

$\vec{t}$: le vecteur unitaire tangent à la surface d'intégration.

S : la surface d'intégration contenant le milieu où la force doit être calculée.

III.8.4. Force de Lorentz

La force électromagnétique de Lorentz, résulte de la coexistence d'une induction magnétique résultante d'une source d'excitation et d'une densité de courant induit dans un milieu conducteur.

L'expression de cette force est donnée par :

$$F = \iiint_V (\vec{J} \wedge \vec{B}) dV \quad (\text{II. 54})$$

Le terme $(\vec{J} \wedge \vec{B})$ représente la densité de la force magnétique qui est souvent utilisée à la place de la force magnétique. Les composantes de la force de Lorentz, dans le cas d'un système axisymétrique 2D se déduiront à partir de :

$$F_r = 2\pi \iint_S J_\varphi B_z r dr dz \quad (\text{II. 55})$$

$$F_z = 2\pi \iint_S J_\varphi B_r r dr dz \quad (\text{II. 56})$$

Avec pour $\vec{A} = (0, \vec{A}_\varphi, 0)$

$$B_r = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z}$$

$$J_\varphi = -\frac{\gamma}{r} \cdot \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial t}$$

$$B_z = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial t}$$

Mise à part des méthodes citées, il existe encore d'autres qui font apparaître seulement des densités surfaciques de forces dans des milieux linéaires et homogènes dont l'expression diffère d'une méthode à une autre.

III.9. Définition du logiciel Finite Element Method Magnetics version 3.3 (F.E.M.M)

Une programmation efficace de la méthode des éléments finis (MEF) nécessite une bonne expérience à la fois dans le domaine des éléments finis et dans le domaine de l'informatique.

Les programmes sont compliqués car ils doivent exécuter des opérations très diverses : organisation des données, intégration numérique, résolution des systèmes, ..., etc.

Les quantités des données manipulées par un programme des éléments finis peuvent être très importantes où il faut souvent avoir recours à des techniques informatique peu répandues en calculs scientifiques, la programmation doit être efficace pour minimiser les coûts de traitement sur ordinateur.

En vue de l'importance de la méthode des éléments finis dans l'industrie, le critère économique s'impose pour l'ingénieur, la notion de temps minime dans l'étude et la réalisation des projets sont parmi ces critères. Cela a contribué à l'apparition de logiciel où on trouve la majorité des programmes utiles pour l'étude et la mise en œuvre de la MEF.

III.9.1.Présentation de F.E.M.M (version 3.3)

FEMM est une suite de programmes pour résoudre des problèmes statiques et de basses fréquences en magnétisme.

Les programmes actuels s'adressent aux problèmes bidimensionnels dans les domaines cartésiens et cylindriques. FEMM est divisé en trois parties [7]:

a- processeur (femme.exe)

C'est un programme permettant de définir la géométrie de la surface à étudier et d'affecter les propriétés des matériaux dans chaque région et les conditions aux limites choisies, ainsi que le type de problème à résoudre (plan, axisymétrique).

b- solutionneur (fkerne.exe)

Le solutionneur prend en considération le problème complètement défini et résout les équations de Maxwell appropriées pour obtenir les résultats recherchés.

c- post processeur (femmview.exe)

C'est une interface graphique qui permet de traiter les résultats fournis par le solutionneur dans les différentes régions, le programme permet aussi à l'utilisateur d'inspecter le champ dans n'importe quel point de la structure.

Deux programmes additionnels sont appelés pour accomplir des tâches spécialisées, qui sont les suivantes :

-Tringle.exe

C'est un programme qui décompose la région d'étude en un grand nombre de triangle, une partie essentielle du processus de la FEM.

-Femplot.exe

C'est un petit programme employé pour tracer les diverses courbes.

III.10.Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini le principe de la méthode des éléments finis d'une façon plus au moins détaillée de point de vue des étapes à suivre pour résoudre un problème électromagnétique et également, nous avons exposé la discrétisation des équations aux dérivées partielles qui sert à obtenir des systèmes algébriques prêts à être résolus numériquement, puis nous avons décrit les différentes méthodes de calcul de forces électromagnétiques dans les dispositifs électromagnétiques et nous avons terminé ce chapitre par la définition du logiciel F.E.M.M qui sera l'outil à utiliser pour l'étude de notre application.

Chapitre IV

Application, Validation et Résultats

IV.1.Introduction

Dans notre travail nous considérons un moteur linéaire à induction de type tubulaire. Les couches conductrices qui seront utilisées sont de types cuivre et aluminium. L'étude concernera l'évaluation de la force électromagnétique du moteur par la méthode de Lorentz en fonction de plusieurs paramètres principalement la fréquence, le nombre de paires de pôles et la nature de la couche conductrice, ainsi que la distribution du potentiel vecteur magnétique et de l'induction magnétique en fonction de la distance le long de l'entrefer. A partir des résultats obtenus, après variation de ces différents paramètres, nous mettrons en évidence leur importance et leur influence sur le bon fonctionnement de la machine.

L'étude s'effectuera en utilisant la méthode des éléments finis dans le plan $[r, z]$, cette méthode est très utilisée et adaptée pour des géométries complexes ainsi que pour l'étude des différents phénomènes régissant les dispositifs électromagnétiques.

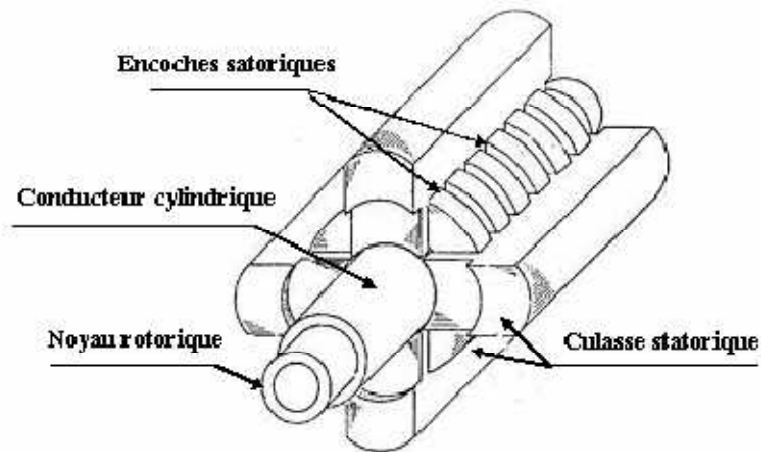
Afin de valider le programme développé, les résultats obtenus après application de ce programme ont été confrontés à des résultats fournis dans la littérature [12].

Le programme de calcul est écrit sous environnement F.E.M.M.

IV.2.Description du dispositif

Le dispositif à traiter est un moteur tubulaire à induction donné par la figure (IV.1) [12]. Il est dit tubulaire relativement à sa forme cylindrique puisqu'il est essentiellement constitué de deux cylindres concentriques (coaxiales) dont celui du diamètre supérieur est un barreau magnétique entouré d'une enveloppe en cuivre ou en aluminium qui représente la couche conductrice et le tout (barreau magnétique et couche conductrice) représente l'induit du moteur, le cylindre de diamètre inférieur c'est l'inducteur du moteur, il comporte des enroulements bobinés triphasés logés dans six encoches dont chacune est séparée de sa voisine par une dent bien dimensionnée.

La différence entre le rayon interne de l'inducteur et le rayon externe de l'induit représente l'entrefer, cette partie du moteur qui joue un rôle très important dans son fonctionnement car c'est là où se canalise le flux magnétique responsable de la création de la force électromagnétique de poussée tout au long de la couche conductrice.



FigIV.1 : Moteur linéaire tubulaire

IV.3. Caractéristiques physiques et géométriques

IV.3.1. Caractéristiques physiques

Les caractéristiques physiques sont données par :

Perméabilité magnétique du vide

$$\mu_0 = 4. \pi. 10^{-7} [H/m].$$

Inducteur

Perméabilité magnétique relative de la culasse

$$\mu_{r.p} = 4416.$$

Perméabilité magnétique relative de l'enroulement inducteur

$$\mu_{r.c} = 1.$$

Conductivité électrique de l'enroulement inducteur

$$\sigma_c = 5,9.10^7 [\Omega.m]^{-1}.$$

Induit

Le noyau rotorique a les mêmes propriétés physiques que la culasse de l'inducteur.

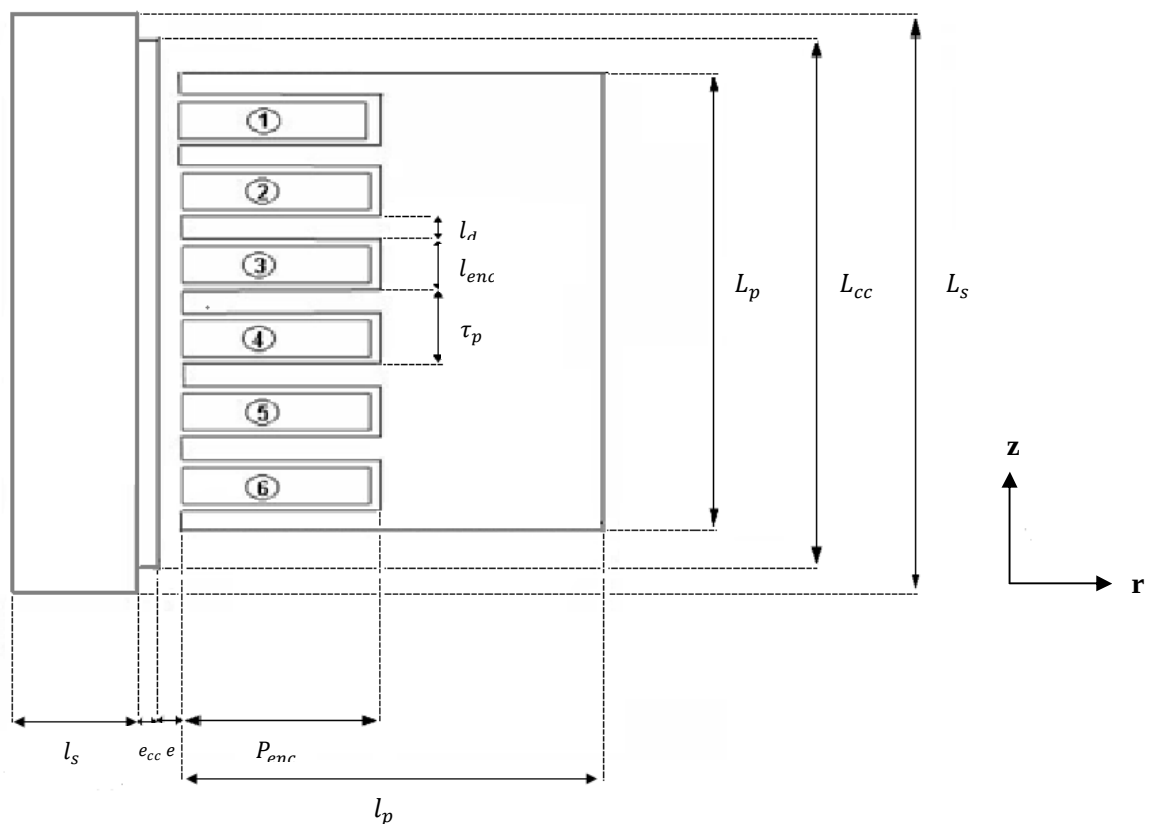
Pour la couche conductrice nous utiliserons deux types de matériaux à savoir, le cuivre et l'aluminium.

La conductivité électrique de l'aluminium est de $\sigma_a = 3,4.10^7 [\Omega.m]^{-1}$.

La conductivité électrique du cuivre est de $\sigma_c = 5,9.10^7 [\Omega.m]^{-1}$.

IV.3.2. Dimensions géométriques

Les dimensions et les données géométriques de notre système physique, fournies en référence [13], sont représentées par la figure suivante :



FigIV.2 : Géométrie et dimensions de la structure de la machine à étudier

Tel que :

Longueur du primaire : $L_p = 106$ mm

Longueur du secondaire : $L_s = 149$ mm

Longueur de la couche conductrice : $L_{cc} = 123$ mm

Largeur du primaire : $l_p = 76$ mm

Largeur du secondaire : $l_s = 25,5$ mm

Largeur de l'encoche : $l_{enc} = 12,5$ mm

Largeur de la dent : $l_d = 6,2$ mm

Epaisseur de la couche conductrice : $e_{cc} = 2$ mm

Dimension de l'entrefer : $e = 1,55$ mm

Profondeur de l'encoche : $P_{enc} = 37$ mm

Rayon intérieur du primaire : $R_p = 37,55$ mm

Rayon extérieur du secondaire : $R_s = 8,5$ mm

Pas polaire : $\tau_p = 18,7$ mm

Les indices p et s sont successivement relatifs au primaire qui désigne l'inducteur et au secondaire pour l'induit.

Pour le premier cas, dans le but de former une paire de pôles, les densités des courants de source sont telles que :

Les bobines 1, 2 et 3 sont de densité de courant $-J_s$.

Les bobines 4, 5 et 6 sont de densité de courant $+J_s$.

Pour le deuxième cas, pour avoir trois paires de pôles, les densités de courant de source sont telles que :

Les bobines 1, 3 et 5 sont de densité de courant $+J_s$.

Les bobines 2, 4 et 6 sont de densité de courant $-J_s$.

IV.4.Organigramme

Le programme de calcul est fait selon l'algorithme dont l'organigramme est le suivant :

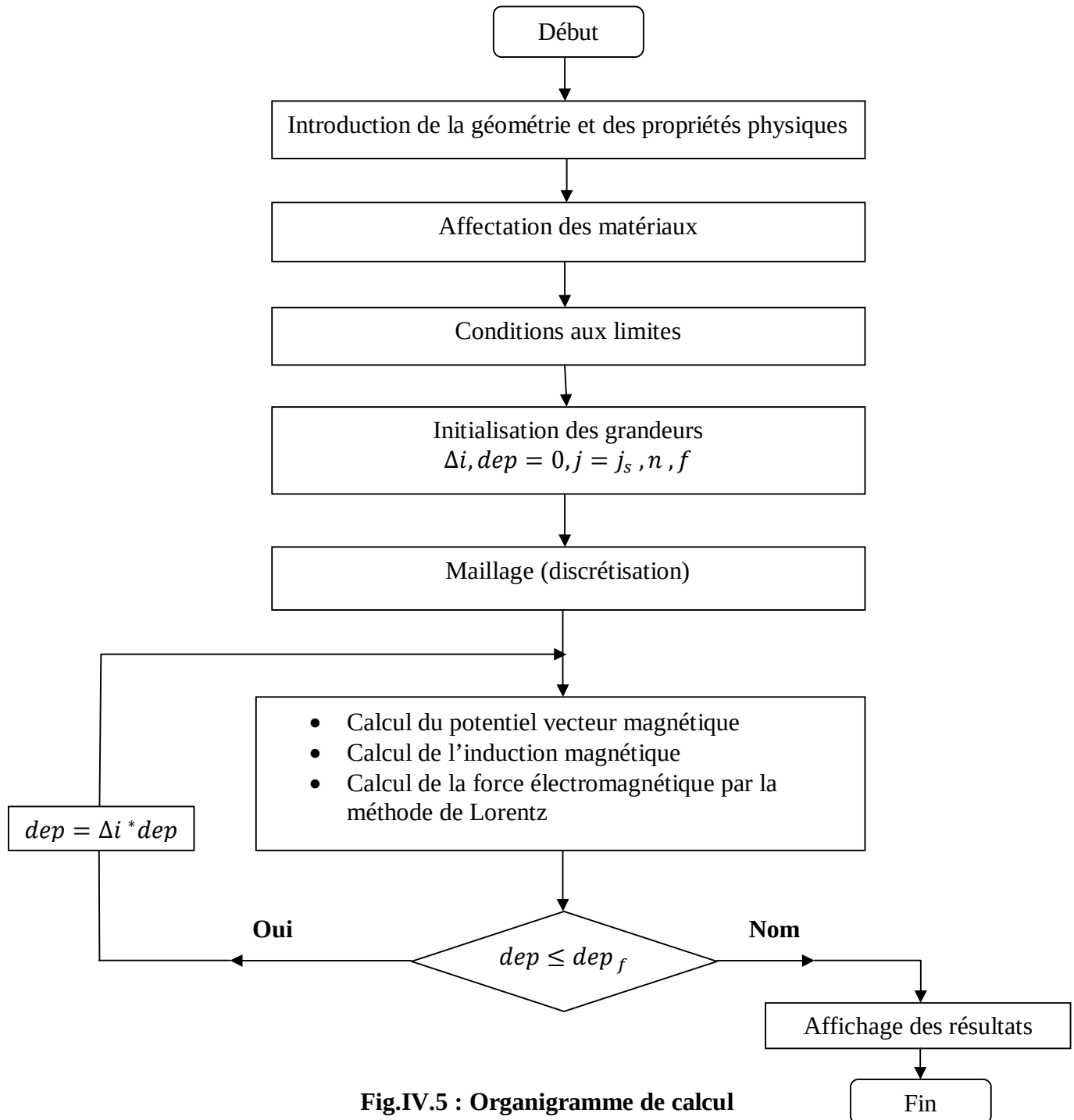


Fig.IV.5 : Organigramme de calcul

Tel que :

dep : Le déplacement.

dep_f : Le déplacement final.

J_s : La densité de courant de source.

Δi : Le pas

n : Le nombre d'itérations.

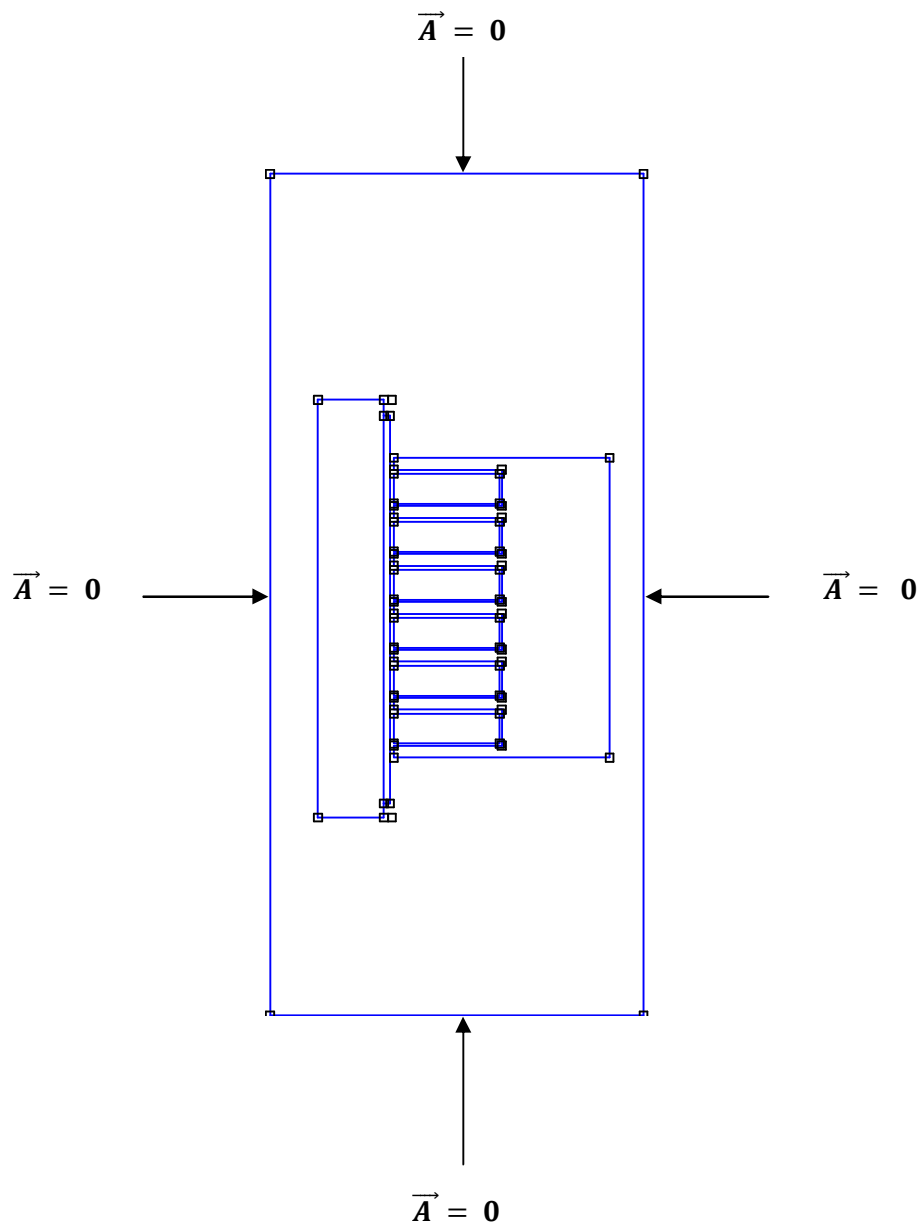
f : La fréquence

IV.5. Conditions aux limites et maillage du domaine de résolution

IV.5.1. Conditions aux limites

Le système présente une symétrie par rapport à l'axe des deux cylindres (Oz), donc on peut réduire le domaine d'étude à sa moitié.

Le domaine de résolution concerne le dispositif physique de la figure (IV.3) auquel sont associées des conditions aux limites sur les frontières du domaine, elles sont de type Dirichlet homogènes.

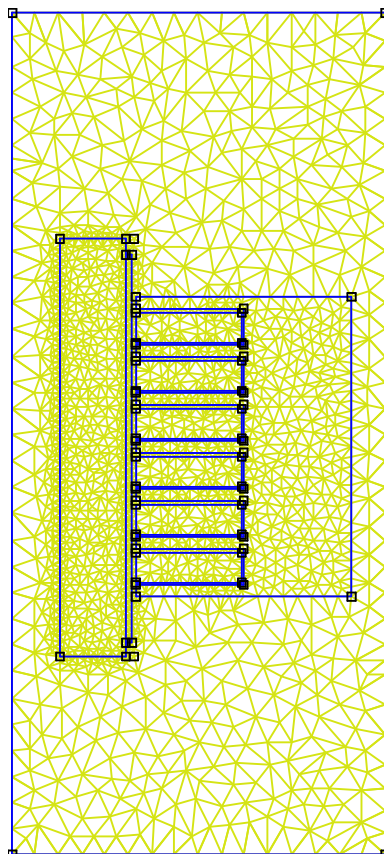


FigIV.3 : Conditions aux limites imposées au système

IV.5.2. Maillage du domaine de résolution

Le problème que nous avons à résoudre est un problème magnétostatique bidimensionnel (2D) dans le plan $[r,z]$ et le maillage éléments finis utilisé est de type triangulaire de premier ordre composé de 2891 nœuds et de 5669 éléments.

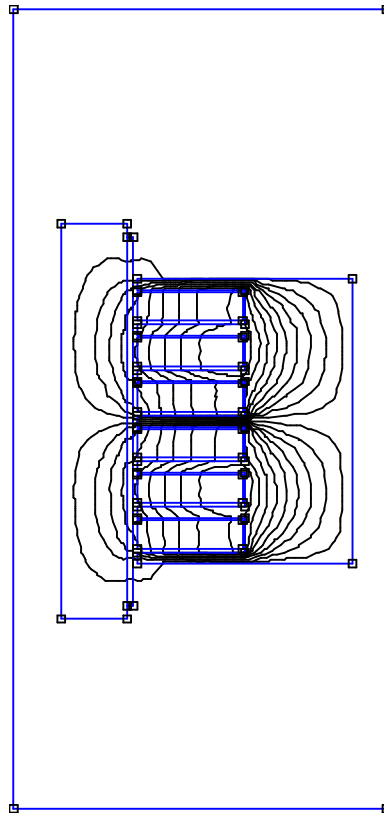
Le maillage est affiné au niveau des matériaux constituant la machine qu'au niveau de l'air ambiant à cause de la différence entre les perméabilités magnétiques.



FigIV.4 : Maillage éléments finis de la structure à étudier

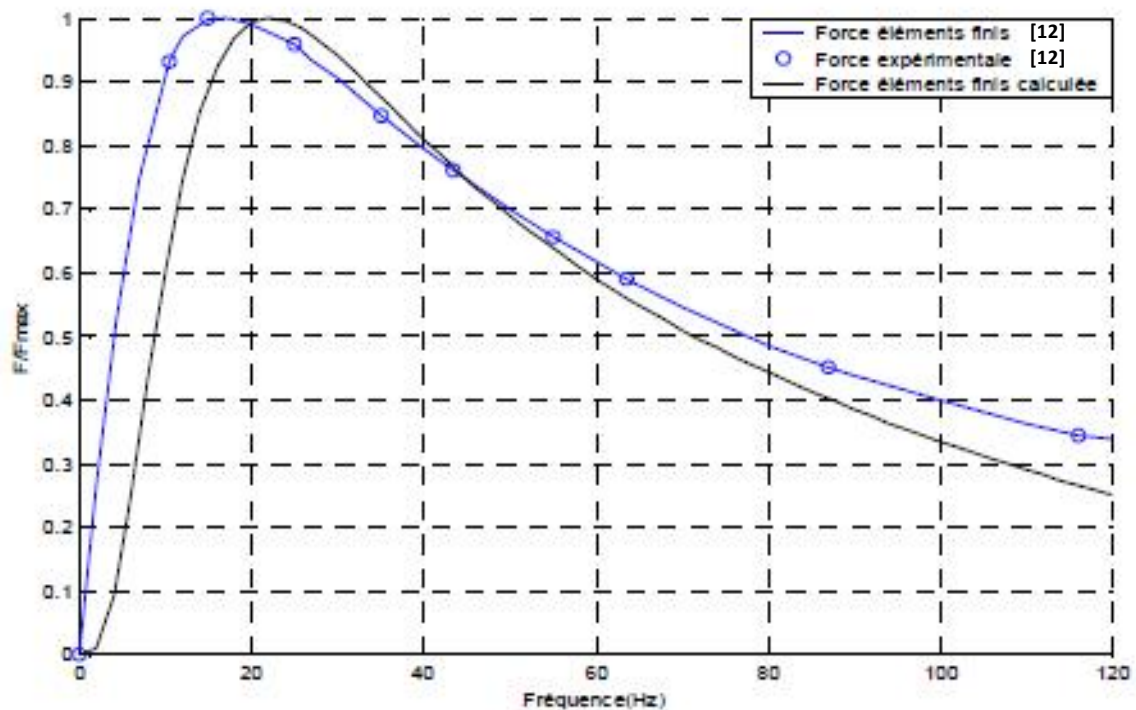
IV.6.Validation

Afin de valider notre programme de calcul, nous avons évalué la force électromagnétique en fonction de la fréquence et nous l'avons comparée à celle donnée par la référence [12].



FigIV.6 : Répartition des isovaleurs du potentiel vecteur magnétique dans la machine pour $p=1$, $f=20\text{Hz}$ et la couche conductrice en cuivre.

La figure (IV.6) illustre la répartition des isovaleurs du potentiel vecteur magnétique dans la machine. Les lignes sont dans leur quasi-totalité distribuées en deux parties à l'intérieur de la machine, créées dans les bobines du primaire, elles traversent l'entrefer et la couche conductrice puis la culasse du secondaire et retournent à travers les dents qui séparent les pôles en traversant la culasse du primaire pour se renfermer.



FigIV.7 : Confrontation de l'allure de la force en fonction de la fréquence avec celle fournie par [12]

La figure (IV.7) montre l'allure de la force électromagnétique en valeur relative $\left(\frac{F}{F_{max}}\right)$ en fonction de la fréquence pour un entrefer de 1.55 mm confrontée à celle donnée par la référence [12].

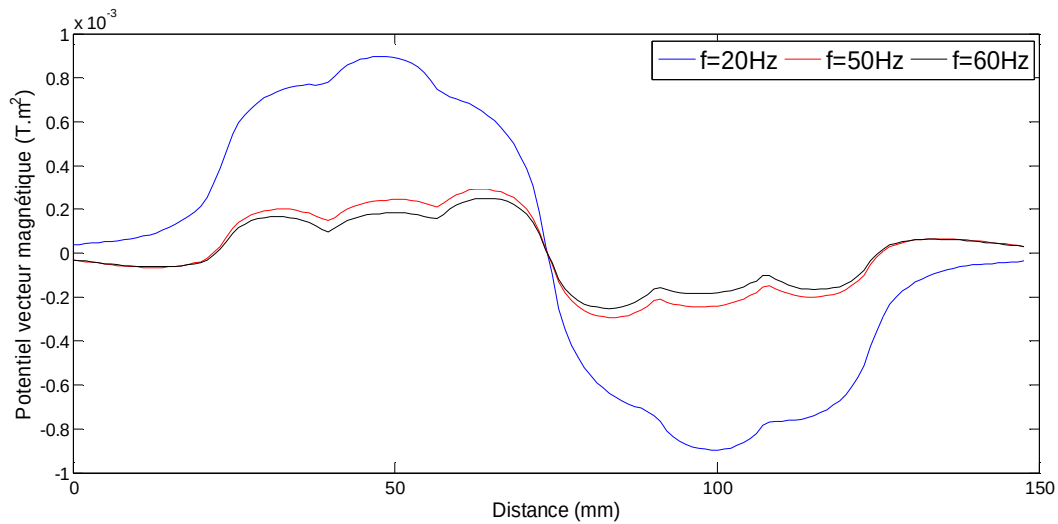
Nous constatons que l'allure de la force calculée et celles obtenues expérimentalement et par éléments finis sont très proches, d'où la validation de notre programme de calcul.

IV.7.Résultats et interprétations

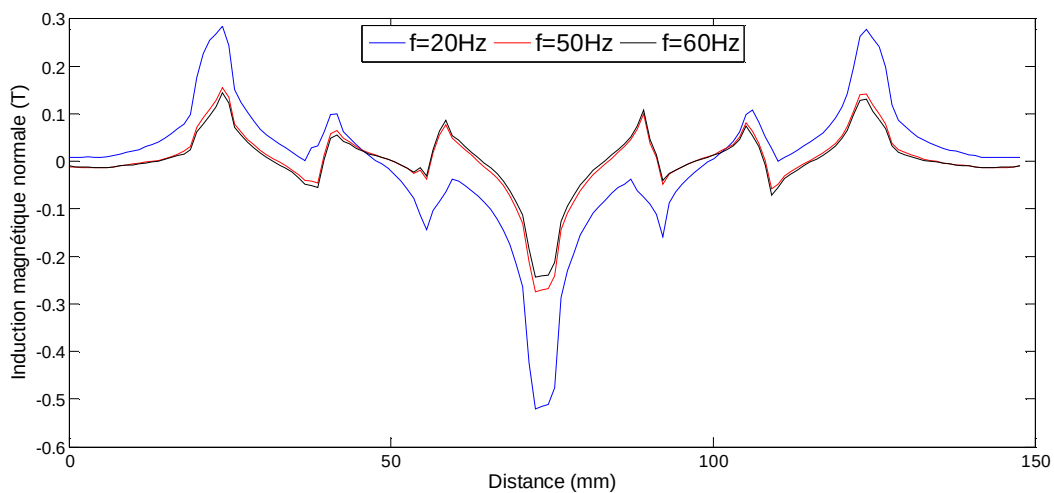
Dans le but de savoir l'influence de la fréquence et de la couche conductrice, un calcul a été effectué pour trois valeurs de la fréquence $f=20\text{Hz}$, $f=50\text{Hz}$ et $f=60\text{Hz}$, avec une couche conductrice en cuivre.

Un autre calcul a été effectué pour savoir l'influence de la fréquence et de la couche conductrice avec trois valeurs de la fréquence $f=20\text{Hz}$, $f=50\text{Hz}$ et $f=60\text{Hz}$ pour une couche conductrice en aluminium.

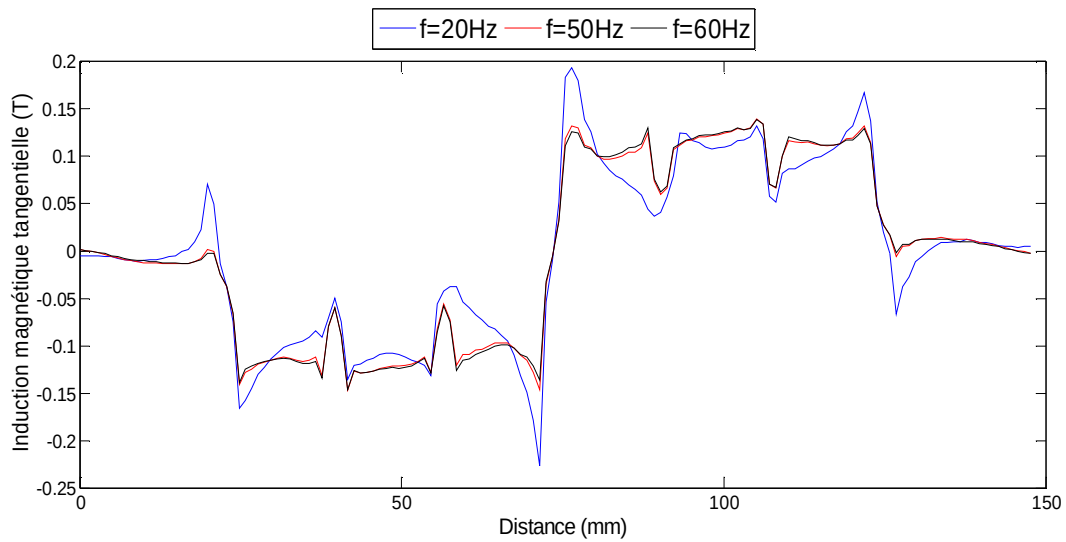
Pour le cas où le moteur à une paire de pôle ($p=1$) et la couche conductrice en cuivre (Cu), les résultats obtenus sont les suivants :



FigIV.8 : Allures du potentiel vecteur magnétique en fonction de la distance pour différentes fréquences



FigIV.9 : Allures de l'induction magnétique normale en fonction de la distance pour différentes fréquences

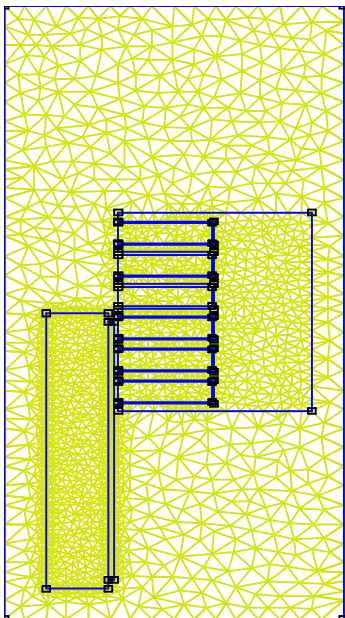


FigIV.10 : Allures de l'induction magnétique tangentielle en fonction de la distance pour différentes fréquences

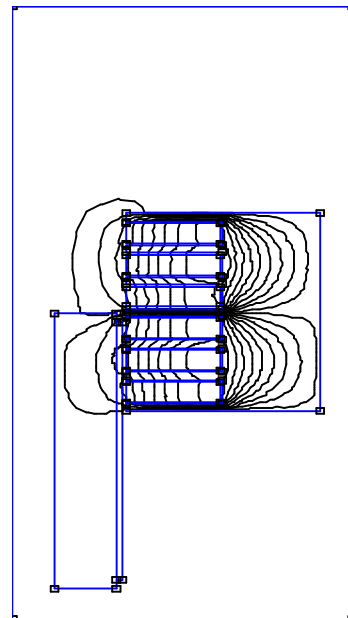
- **Calcul de la force**

Pour faire le calcul de la force, nous avons effectué un déplacement pour l'induit

a) Position initiale

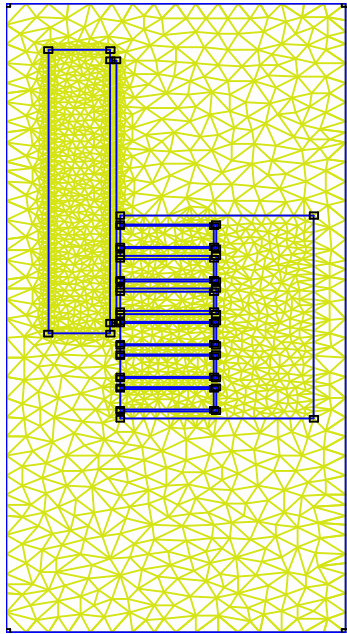


FigIV.11 : Maillage éléments finis 2891 nœuds et 5669 éléments

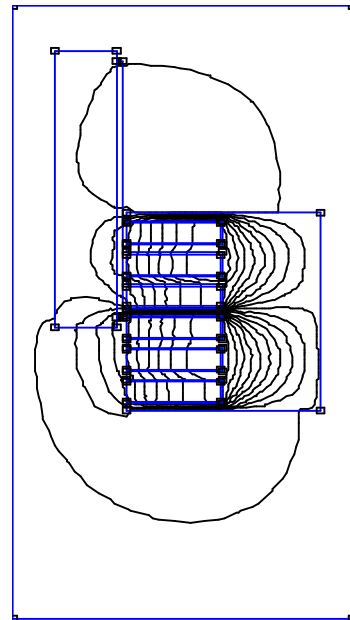


FigIV.12 : Répartition des isovaleurs du potentiel vecteur magnétique dans la machine pour P=1 et f=20Hz

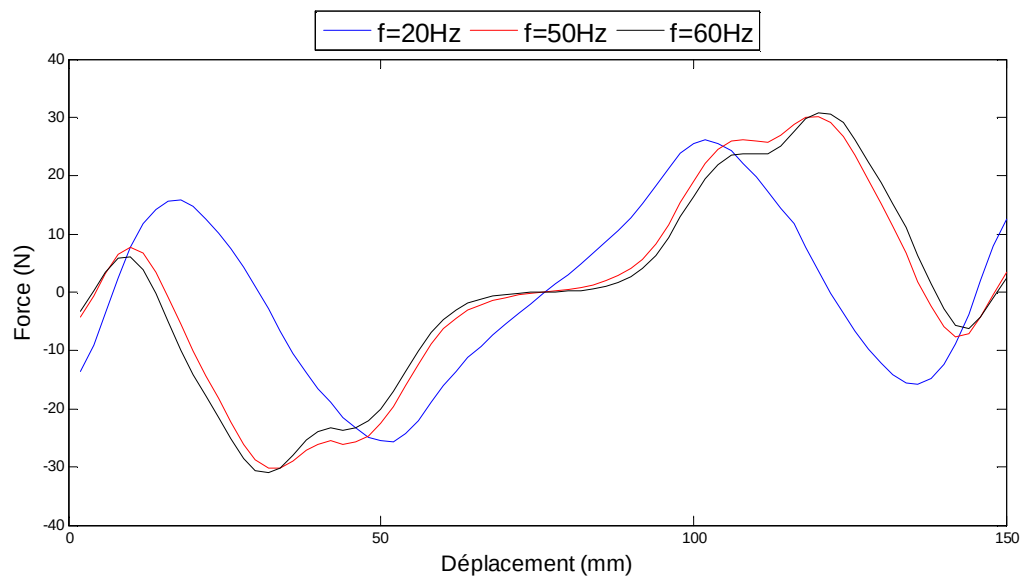
b) Position finale



FigIV.13 : Maillage éléments finis 2891 nœuds et 5669 éléments



FigIV.14 : Répartition des isovalues du potentiel vecteur magnétique dans la machine pour $P=1$ et $f=20\text{Hz}$



FigIV.15 : Allures de la force obtenue en fonction du déplacement pour différentes fréquences

La figure (IV.8) montre l'influence de la fréquence sur la courbe du potentiel vecteur magnétique en fonction de la distance le long de l'entrefer dont l'épaisseur est $e=1,55$ mm et $p=1$.

Nous constatons que le potentiel vecteur magnétique est périodique pour les trois valeurs de la fréquence, la seule différence est l'ordre de grandeur.

La figure (IV.9) montre les allures de l'induction magnétique normale dans l'entrefer en fonction de la distance. L'allure de cette induction est périodique, nous remarquons que ces allures ont presque la même forme mais d'amplitudes différentes.

La figure (IV.10) nous donne les allures de l'induction magnétique tangentielle dans l'entrefer en fonction de la distance. L'allure de cette induction est périodique, nous remarquons que ces allures ont presque la même forme mais d'amplitudes différentes.

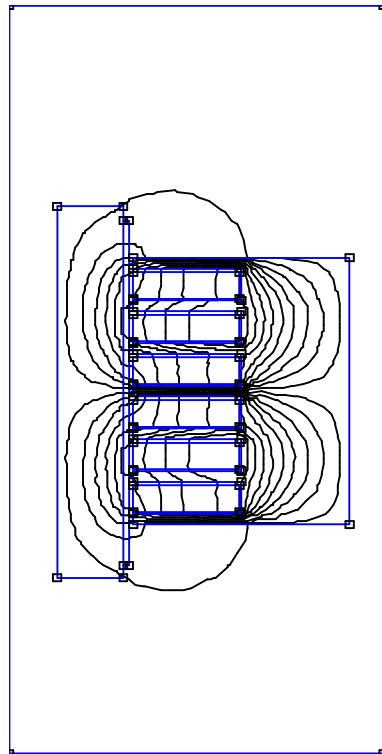
Les figures (IV.11) et (IV.13) représentent respectivement le maillage éléments finis du système au début et à la fin du déplacement de l'induit (charge), où le nombre de nœuds est de 2891 et le nombre d'éléments est de 5669. Le maillage est affiné au niveau de l'induit et l'inducteur où les variations des phénomènes physiques (électromagnétiques) sont très sensibles.

Les figures (IV.12) et (IV.14) illustrent respectivement la répartition du potentiel vecteur magnétique dans le système au début et à la fin du déplacement de l'induit, nous remarquons qu'à la fin du déplacement les lignes de fuites sont importantes ce qui va engendrer des effets d'extrémités à cause de la différence entre les perméabilités magnétiques.

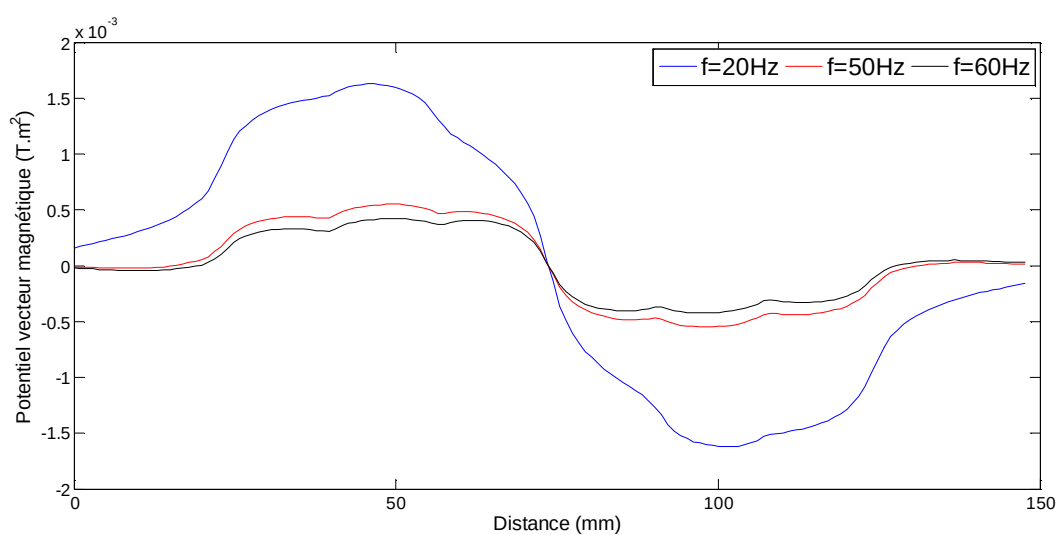
La figure (IV.15) représente les allures de la force électromagnétique en fonction du déplacement pour les différentes fréquences d'alimentations.

Nous constatons que les allures de la force sont périodiques avec des amplitudes atteignant les valeurs maximales d'ordre 16.5 N, 8 N et 6 N respectivement aux fréquences $f=20$ Hz, 50Hz et 60Hz pour un déplacement compris entre 0mm et 75mm et d'ordre de 26 N, 30 N et 32 N respectivement aux fréquences $f=20$ Hz, 50Hz et 60Hz pour un déplacement compris entre 75mm et 150mm. La variation de l'amplitude de la force est due à la variation de la densité des courants induits dans la couche conductrice.

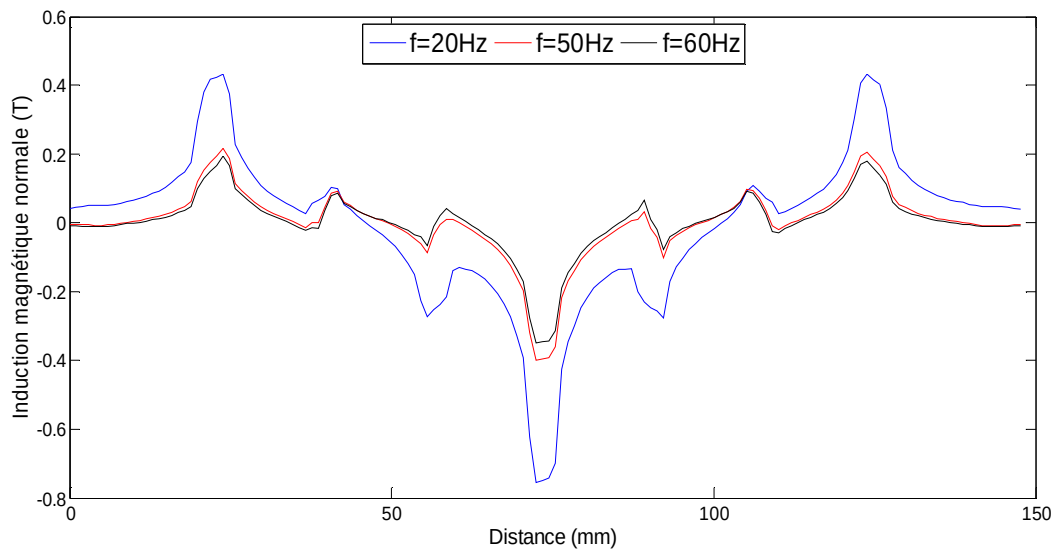
Pour le cas où le moteur à une paire de pôles ($p=1$) et la couche conductrice en aluminium (Al), les résultats obtenus sont comme suit :



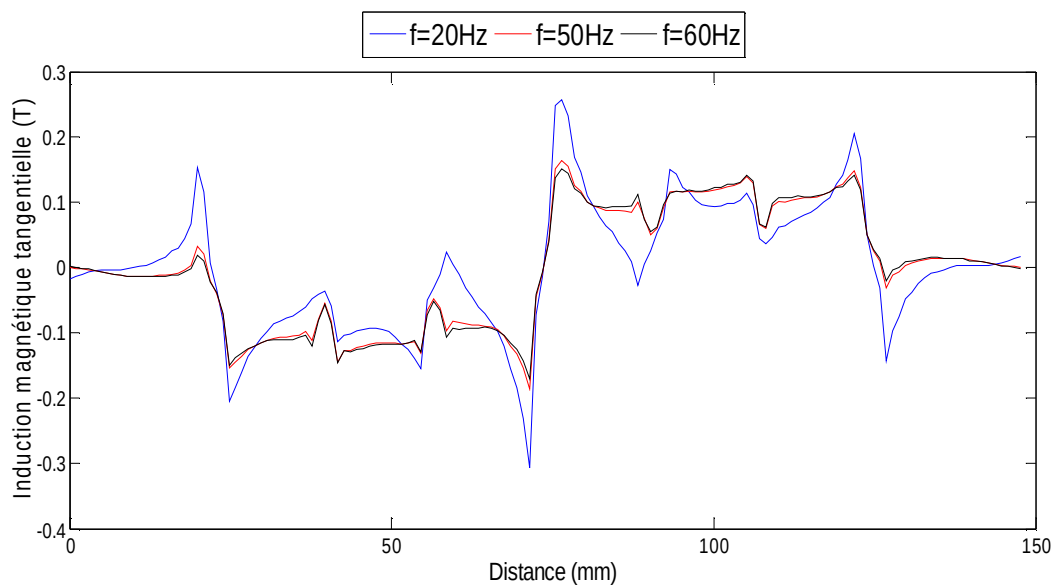
FigIV.16 : Répartition des isovalues du potentiel vecteur magnétique dans la machine pour $P=1$, $f=20\text{Hz}$ et la couche conductrice en aluminium



FigIV.17 : Allures du potentiel vecteur magnétique en fonction de la distance pour différentes fréquences



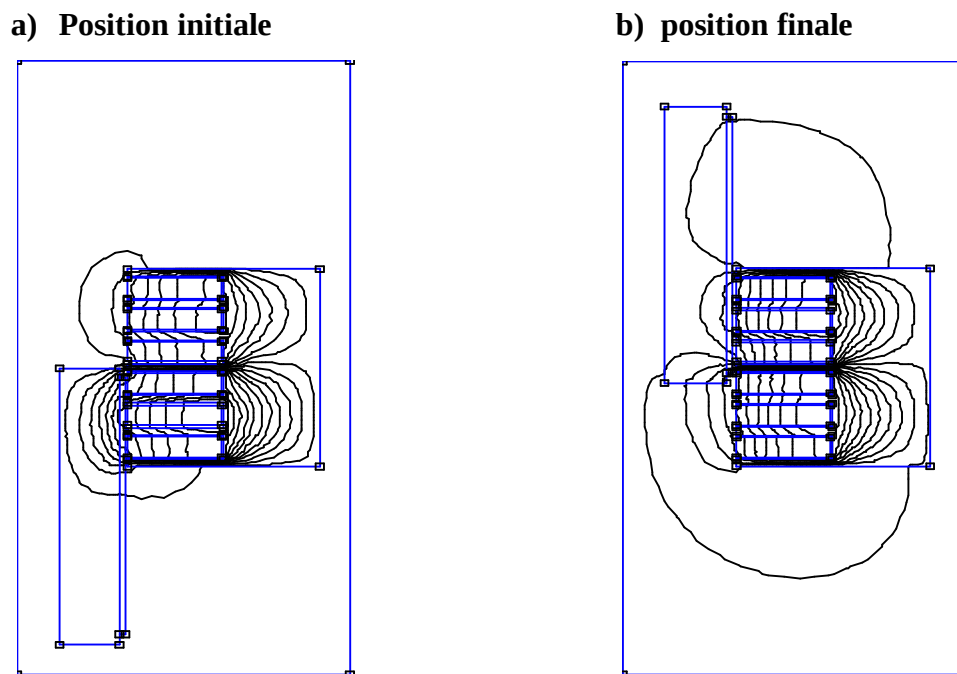
FigIV.18 : Allures de l'induction magnétique normale en fonction du déplacement pour différentes fréquences



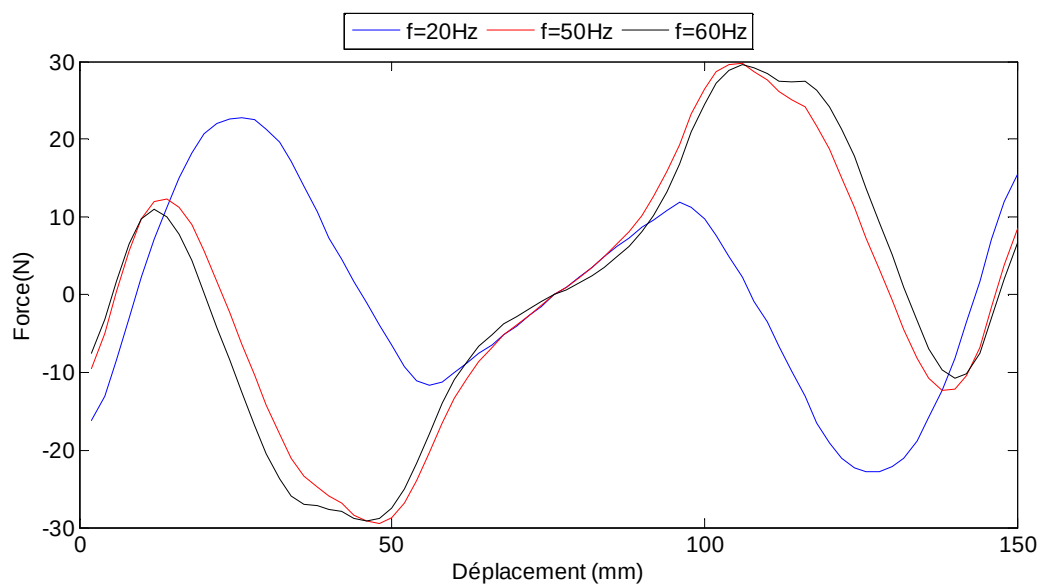
FigIV.19 : Allures de l'induction magnétique tangentielle en fonction de la distance pour différentes fréquences

- Calcul de la force

Pour faire le calcul de la force, nous avons effectué un déplacement pour l'induit



FigIV.20 : Répartition des isovalues du potentiel vecteur magnétique pour $p=1$, $f=20\text{Hz}$ et la couche conductrice en aluminium



FigIV.21 : Allures de la force obtenue en fonction du déplacement pour différentes fréquences

La figure (IV.16) illustre la répartition des lignes isovaleurs du potentiel vecteur magnétique dans la machine. Les lignes sont dans leur quasi-totalité distribuées en deux parties à l'intérieur de la machine, créées dans les bobines du primaires, elles traversent l'entrefer et la couche conductrice (couche conductrice en aluminium) puis la culasse du secondaire et retournent à travers les dents qui séparent les pôles en traversant la culasse du primaire pour se renfermer.

La figure (IV.17) nous donne les allures du potentiel vecteur magnétique en fonction de la distance le long de l'entrefer.

Nous remarquons que la variation de la fréquence fait changer les résultats, de telle sorte que la variation de l'amplitude des allures est inversement proportionnelle à celle de la fréquence.

La figure (IV.18) représente les allures de l'induction magnétique normale dans l'entrefer. L'allure de cette induction est périodique, nous remarquons que ces allures ont presque la même forme, la seule différence est l'ordre de grandeur.

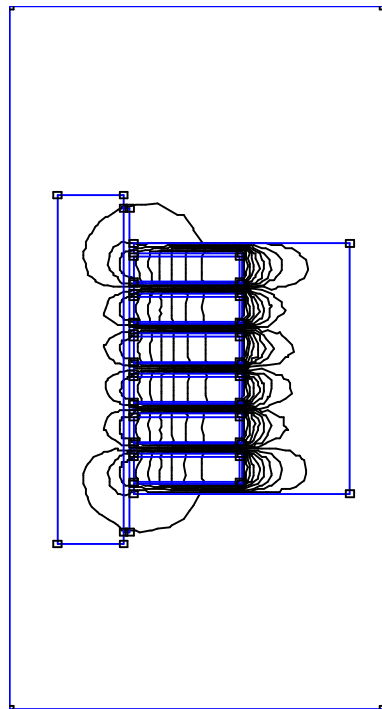
La figure (IV.19) montre les allures de l'induction magnétique tangentielle dans l'entrefer. L'allure de cette induction est périodique, nous remarquons que ces allures ont presque la même forme mais d'amplitudes différentes.

La figure (IV.20) représente les isovaleurs du potentiel vecteur magnétique dans le système au début et à la fin du déplacement, nous remarquons que dans la position finale de l'induit le système présente des lignes de fuites dues à la différence des perméabilités, ce qui va engendrer des effets d'extrémités considérables.

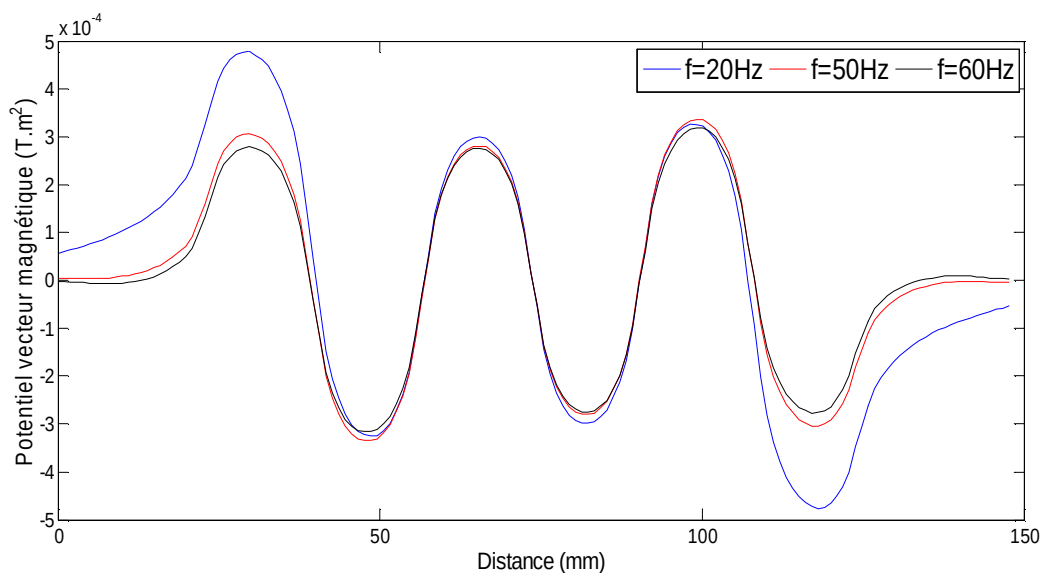
La figure (IV.21) représente les allures de la force électromagnétique en fonction du déplacement pour les différentes fréquences d'alimentations.

Nous remarquons que la force est périodique avec une valeur maximale de 23 N pour $f=20\text{Hz}$ et des valeurs maximales de 30 N et 29.6 N respectivement aux fréquences $f=50\text{Hz}$ et 60Hz .

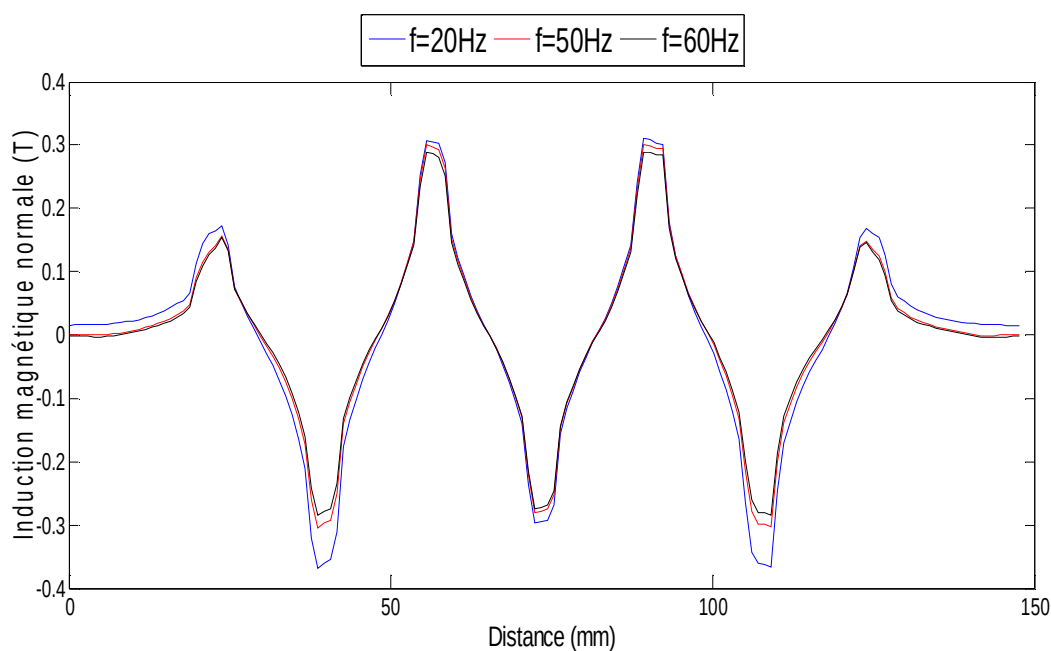
Nous avons refait les mêmes calculs dans les mêmes conditions pour chaque test mais pour une conception à trois paires de pôles ($p=3$), nous avons obtenu les résultats illustrés par les figures suivantes :



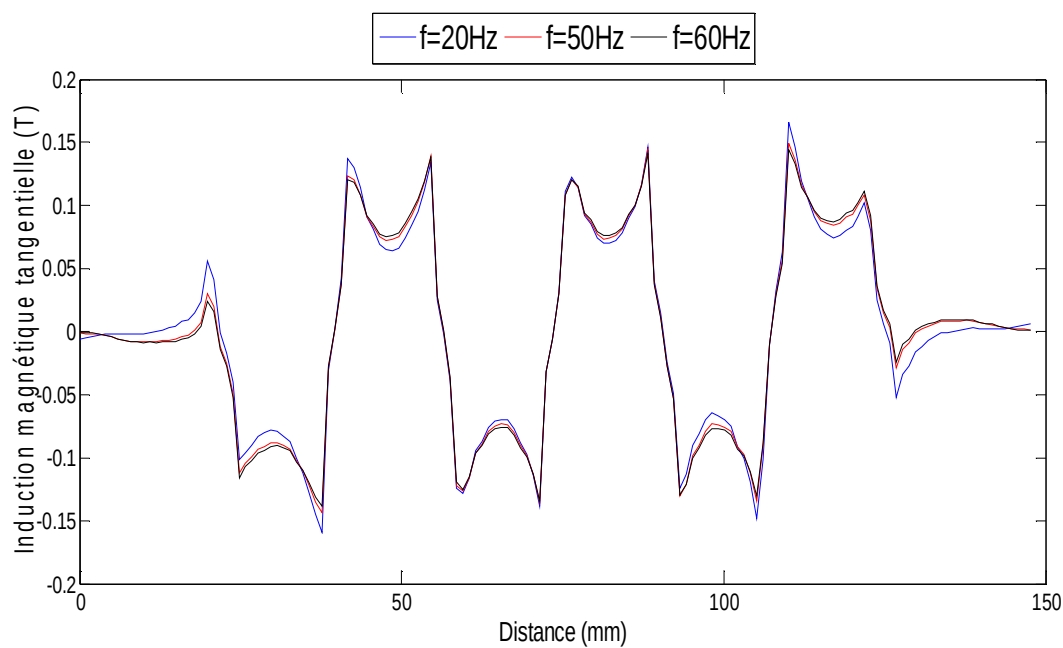
FigIV.22 : Répartition des isovalues du potentiel vecteur magnétique pour $p=3$, $f=20\text{Hz}$ et la couche conductrice en cuivre



FigIV.23 : Allures du potentiel vecteur magnétique en fonction de la distance pour différentes fréquences



FigIV.24 : Allures de l'induction magnétique normale en fonction de la distance pour différentes fréquences

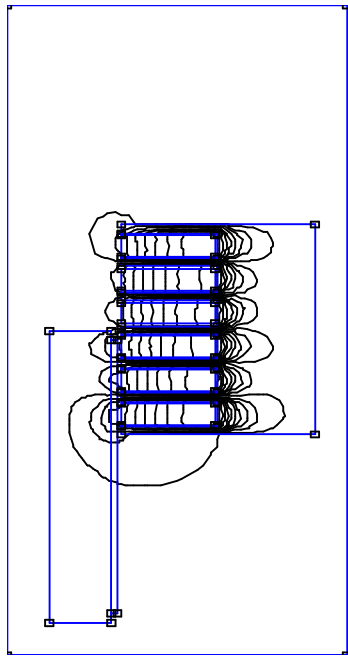


FigIV.25: Allures de l'induction magnétique tangentielle en fonction de la distance pour différentes fréquences

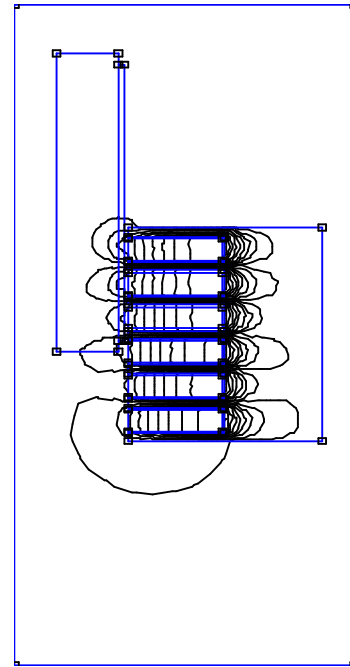
- Calcul de la force

Pour faire le calcul de la force, nous avons effectué un déplacement pour l'induit

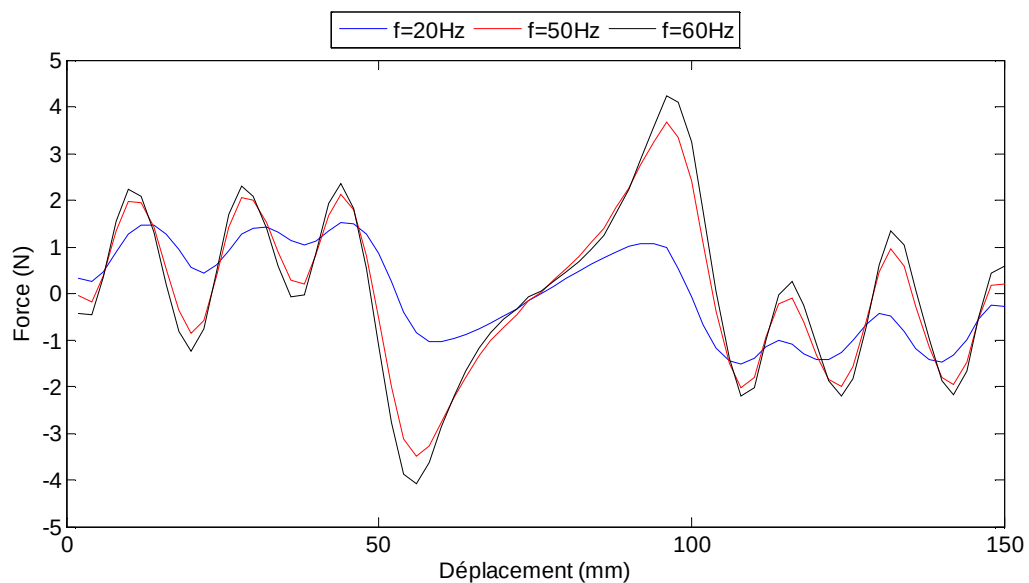
a) Position initiale



b) Position final



FigIV.26 : Répartitions des isovalues du potentiel vecteur magnétique dans la machine pour $p=3$, $f=20\text{Hz}$ et une couche conductrice en cuivre



FigIV.27 : Allures de la force obtenue en fonction du déplacement pour différentes fréquences

La figure (IV.22) montre la répartition des lignes isovaleurs du potentiel vecteur magnétique dans la machine. Les lignes sont dans leur quasi-totalité distribuées en six parties à l'intérieur de la machine, créées dans les bobines du primaire, elles traversent l'entrefer et la couche conductrice (couche conductrice en cuivre) puis la culasse du secondaire et retournent à travers les dents qui séparent les pôles en traversant la culasse du primaire pour se renfermer.

La figure (IV.23) représente le potentiel vecteur magnétique en fonction de la distance le long de l'entrefer, nous remarquons que la variation de la fréquence fait changer les résultats de telle sorte que la variation des amplitudes au niveau des extrémités sont plus importantes que celles du milieu à cause de la perméabilité de l'air qui est plus petite que celles des matériaux constitutifs du moteur (fuites et effets d'extrémités).

La figure (IV.24) illustre l'allure de la composante normale de l'induction magnétique dans l'entrefer en fonction de la distance. Les allures de cette induction sont de formes périodiques, nous constatons qu'elles ont les mêmes formes et présentent d'amplitudes identiques.

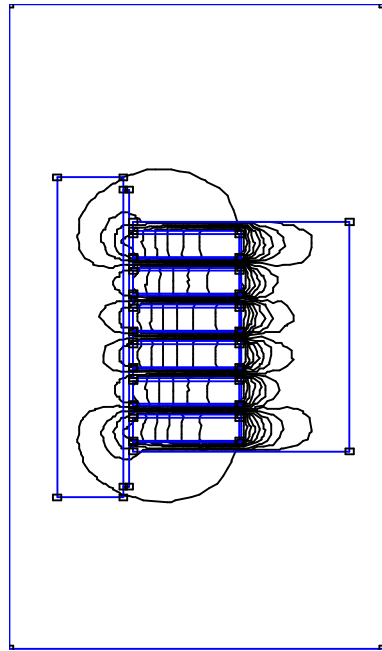
La figure (IV.25) représente l'allure de la composante tangentielle de l'induction magnétique dans l'entrefer en fonction de la distance le long de l'entrefer. Les allures de cette induction sont de formes périodiques, nous remarquons qu'elles ont les mêmes formes et présentent d'amplitudes identiques.

Les figures (IV.26)) illustre la répartition du potentiel vecteur magnétique dans le système au début et à la fin du déplacement de l'induit.

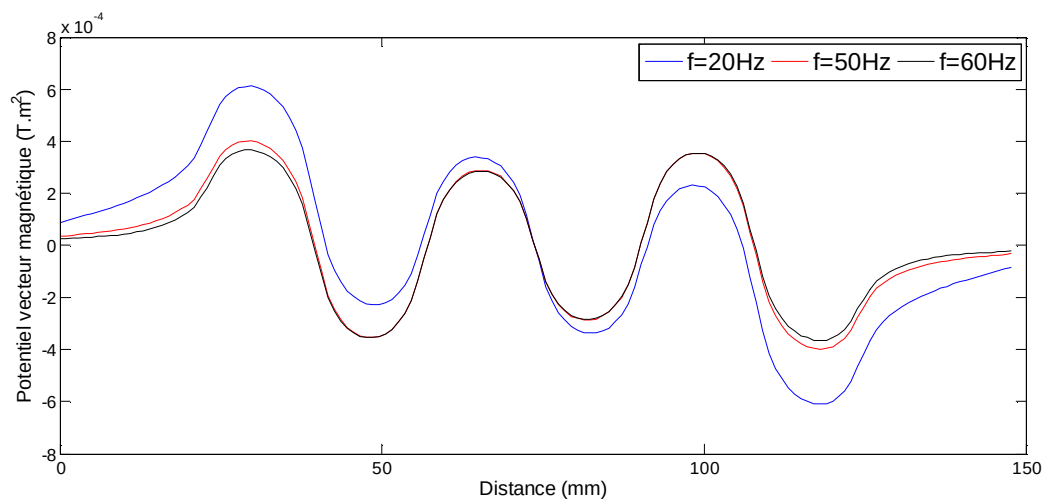
La figure (IV.27) montre les allures de la force électromagnétique en fonction du déplacement pour les différentes fréquences d'alimentations.

Nous remarquons que les allures de la force en fonction du déplacement sont périodiques, de forme différente, elle atteint sa valeur crête (maximale) d'ordre 4 N pour une fréquence de 60Hz au voisinage des bobines inductrices car la densité de courant induit dans la couche conductrice est plus importante.

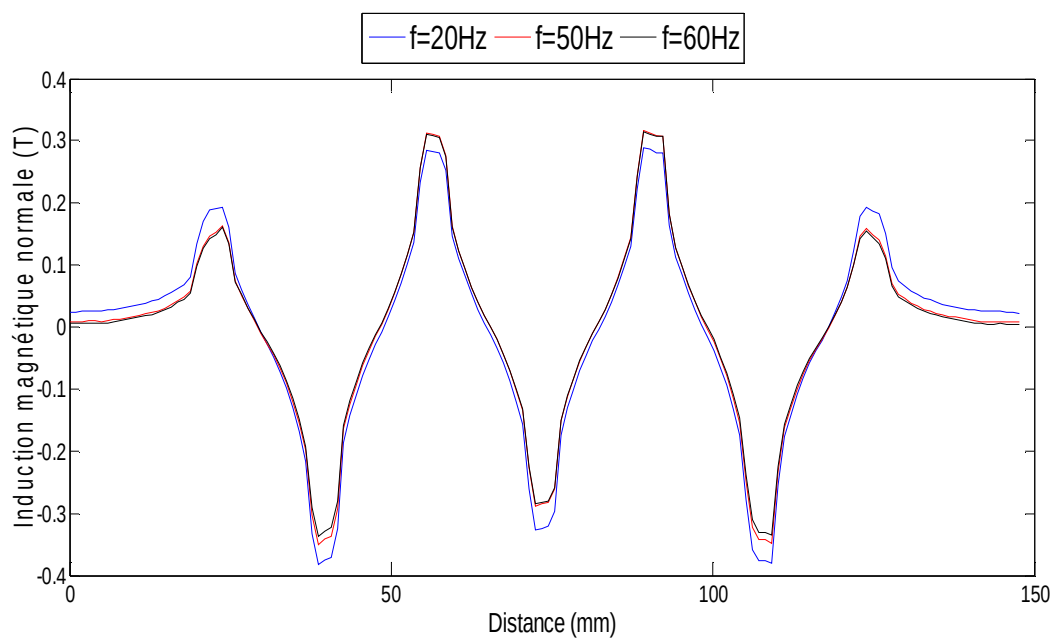
Pour le cas où la couche conductrice en aluminium (Al) et $p=3$, les résultats obtenus sont comme suit :



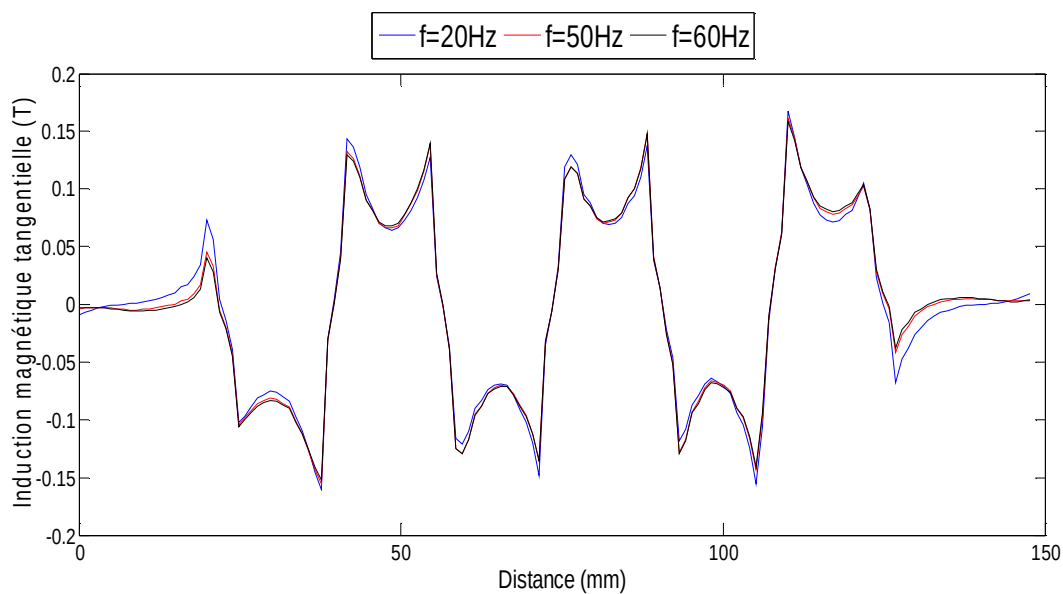
FigIV.28 : Répartition des isovateurs du potentiel vecteur magnétique pour $p=3$, $f=20\text{Hz}$ et la couche conductrice en aluminium



FigIV.29 : Allures du potentiel vecteur magnétique en fonction de la distance pour différentes fréquences



FigIV.30 : Allures de l'induction magnétique normale en fonction de la distance pour différentes fréquences

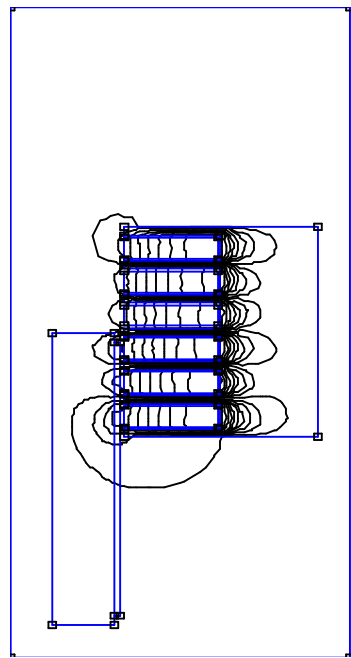


FigIV.31 : Allures de l'induction magnétique tangentielle en fonction de la distance pour différentes fréquence

- Calcul de la force

Pour faire le calcul de la force, nous avons effectué un déplacement pour l'induit

a) position initiale



b) position finale

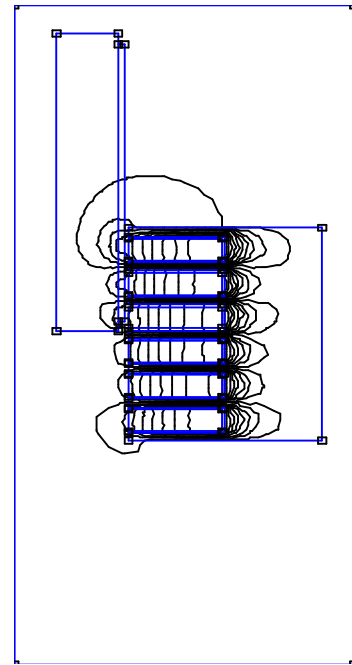


Fig.IV.32 : Répartition des isovalues du potentiel vecteur magnétique pour $p=3$, $f=20\text{Hz}$ et la couche conductrice en aluminium

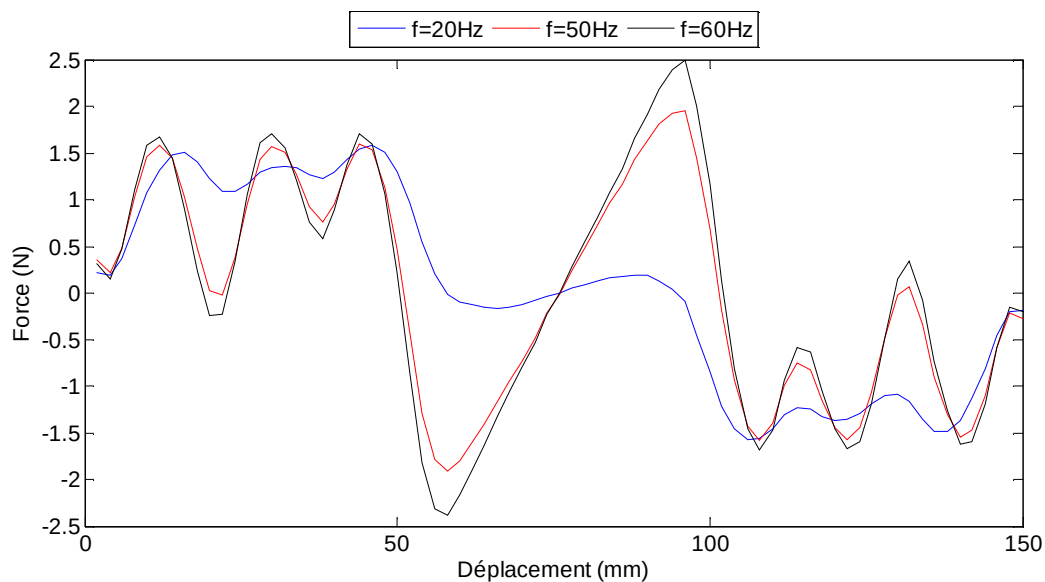


Fig.IV.33 : Allures de la force obtenue en fonction du déplacement pour différentes fréquences

La figure (IV.28) illustre la répartition des lignes isovaleurs du potentiel vecteur magnétique dans la machine pour les mêmes conditions que précédemment en tenant compte du nombre de paire de pôles $P=3$.

La figure (IV.29) représente le potentiel vecteur magnétique dans l'entrefer en fonction de la distance, nous remarquons sur cette figure que l'amplitude du potentiel n'est pas constante, elle diminue avec l'augmentation de la distance cela s'explique par la répartition des lignes de champ magnétique selon les perméabilités air-matériaux comme le montre la figure (IV.28) où les lignes sont plus concentrées entre la couche conductrice et les bobines inductrices.

La figure (IV.30) nous donne l'allure de la composante normale de l'induction magnétique dans l'entrefer en fonction de la distance. Les allures de cette induction sont de formes périodiques, nous remarquons qu'elles ont les mêmes formes et présentent la même amplitude pour $f=50\text{Hz}$ et $f=60\text{Hz}$.

La figure (IV.31) illustre l'allure de la composante tangentielle de l'induction magnétique dans l'entrefer. Les allures de cette induction sont de formes périodiques, nous remarquons qu'elles ont les mêmes formes et présentent des amplitudes identiques.

La figure (IV.32) représente les isovaleurs du potentiel vecteur magnétique dans le système au début et à la fin du déplacement, nous remarquons que le système présente des lignes de fuites dues à la différence des perméabilités, ce qui va engendrer des effets d'extrémités considérables.

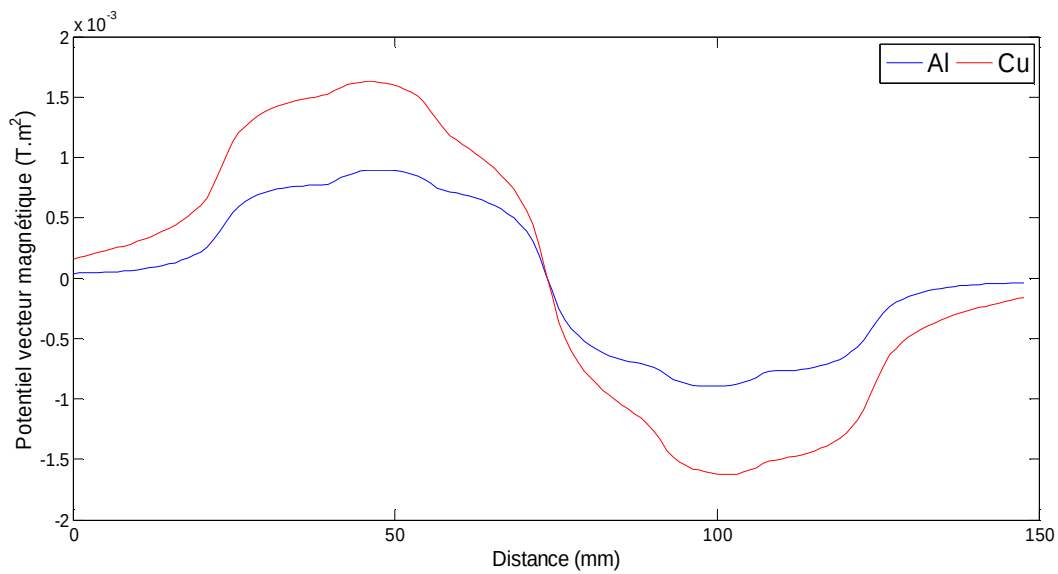
La figure (IV.33) montre les allures de la force électromagnétique en fonction du déplacement pour les différentes fréquences d'alimentations.

Nous remarquons que les allures de la force en fonction du déplacement sont périodiques, de formes différentes, elle atteint sa valeur crête (maximale) d'ordre 2.5N pour une fréquence de 60Hz au voisinage des bobines inductrices car la densité de courant induit dans la couche conductrice est plus importante.

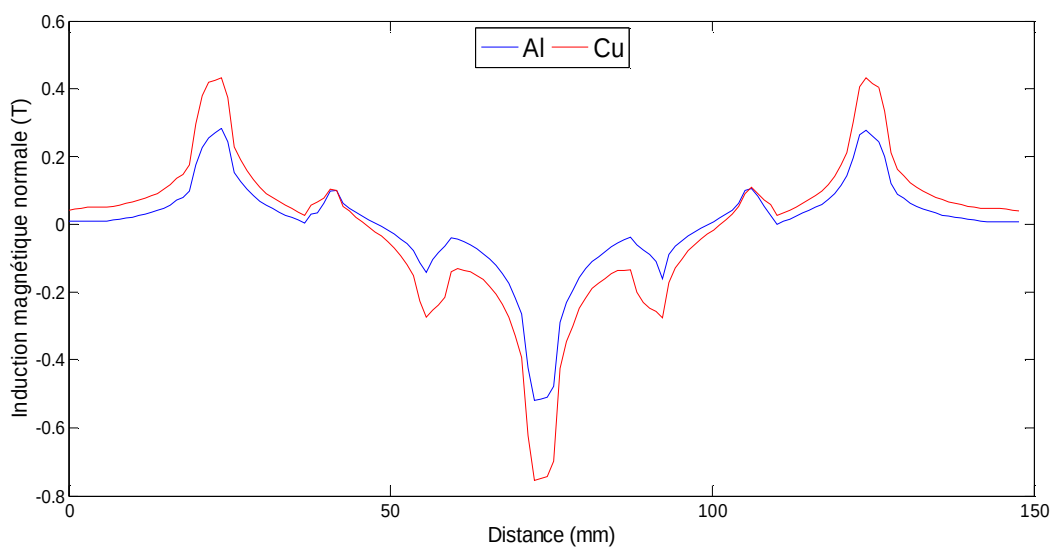
Comparaison

Dans ce calcul une comparaison a été effectuée entre les différents résultats obtenus pour le cas où la couche conductrice est en cuivre et pour le cas où la couche conductrice est en aluminium, nous avons obtenu les résultats suivants :

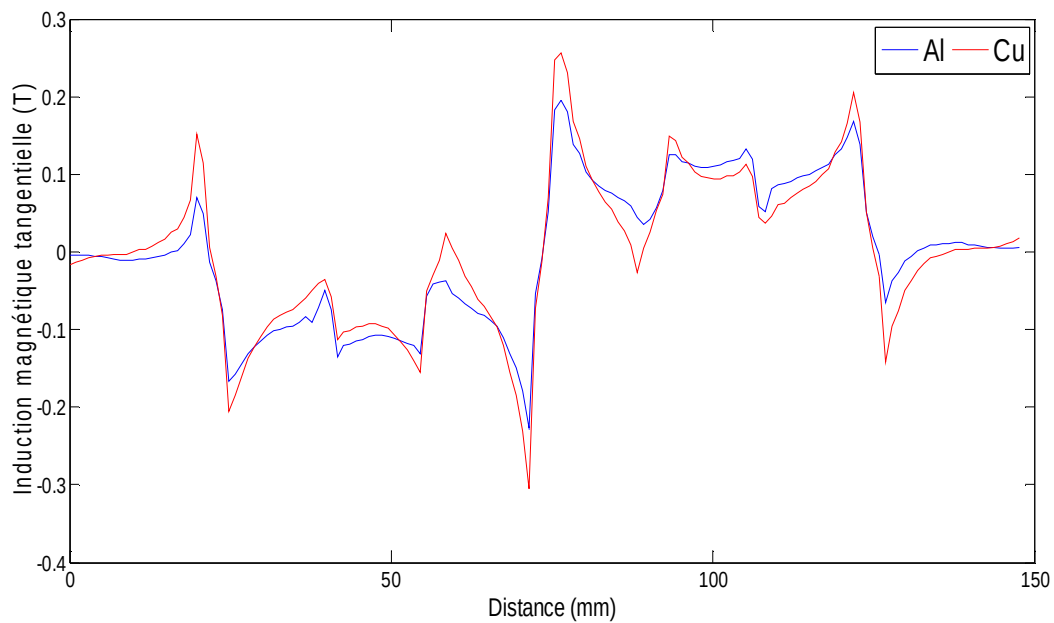
- pour $p=1$



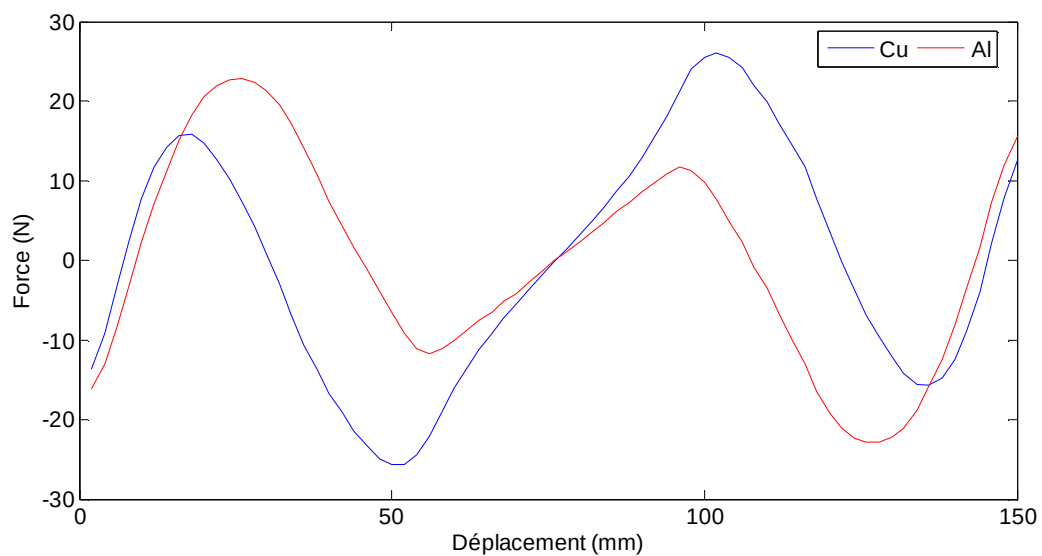
FigIV.34 : Confrontation entre les allures du potentiel vecteur magnétique en fonction de la distance pour deux types de couche conductrice, $f=20\text{Hz}$ et $p=1$



FigIV.35 : Confrontation entre les allures de l'induction magnétique normale en fonction de la distance pour deux types de couche conductrice, $f=20\text{Hz}$ et $p=1$

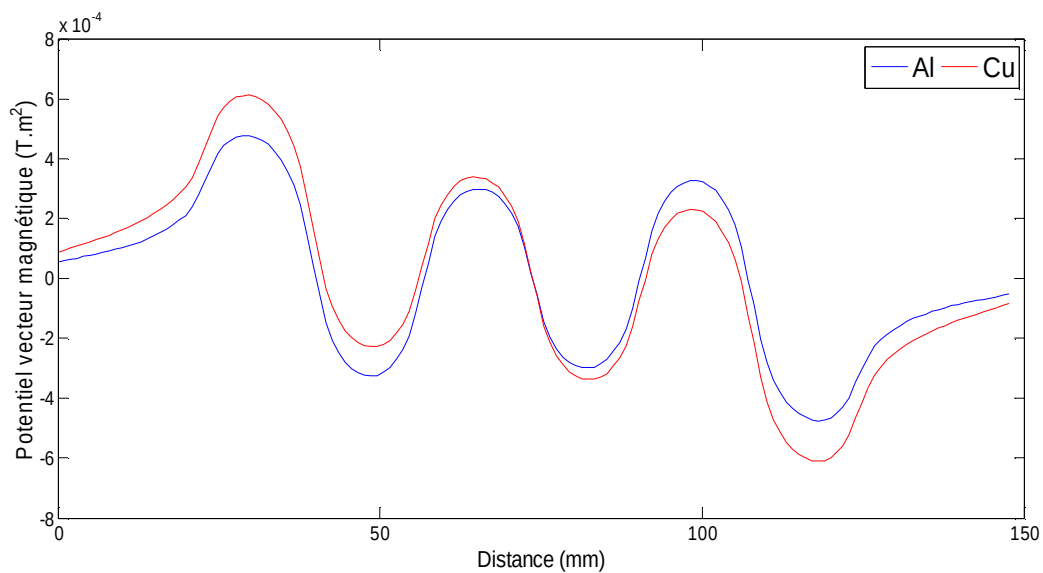


FigIV.36 : Confrontation entre les allures de l'induction magnétique tangentielle en fonction du déplacement pour deux types de couche conductrice, $f=20\text{Hz}$ et $p=1$

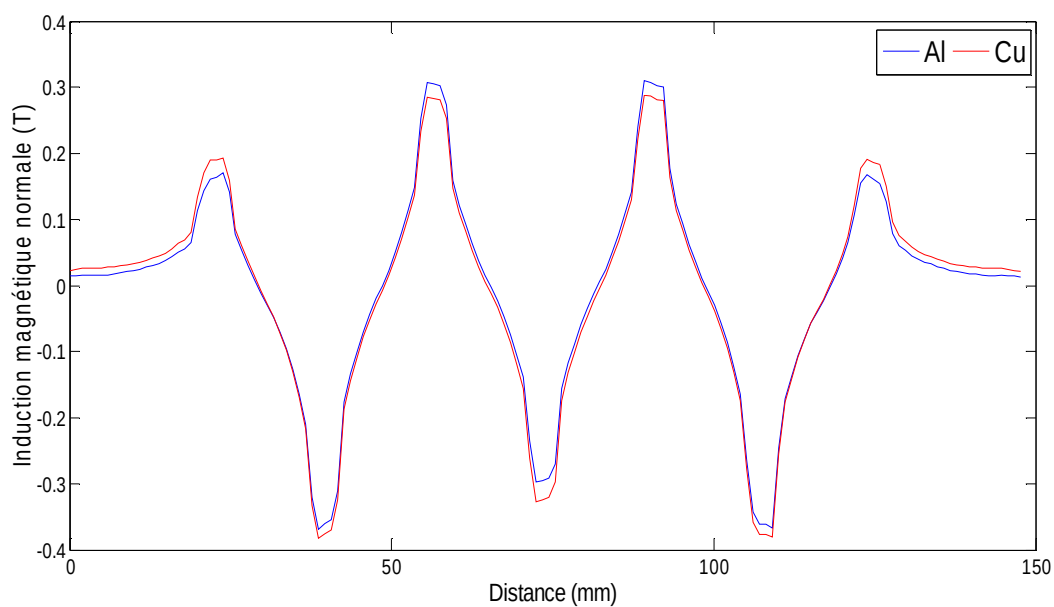


FigIV.37 : Confrontation des forces obtenues en fonction de déplacement pour deux types de couche conductrice, $f=20\text{Hz}$ et $p=1$

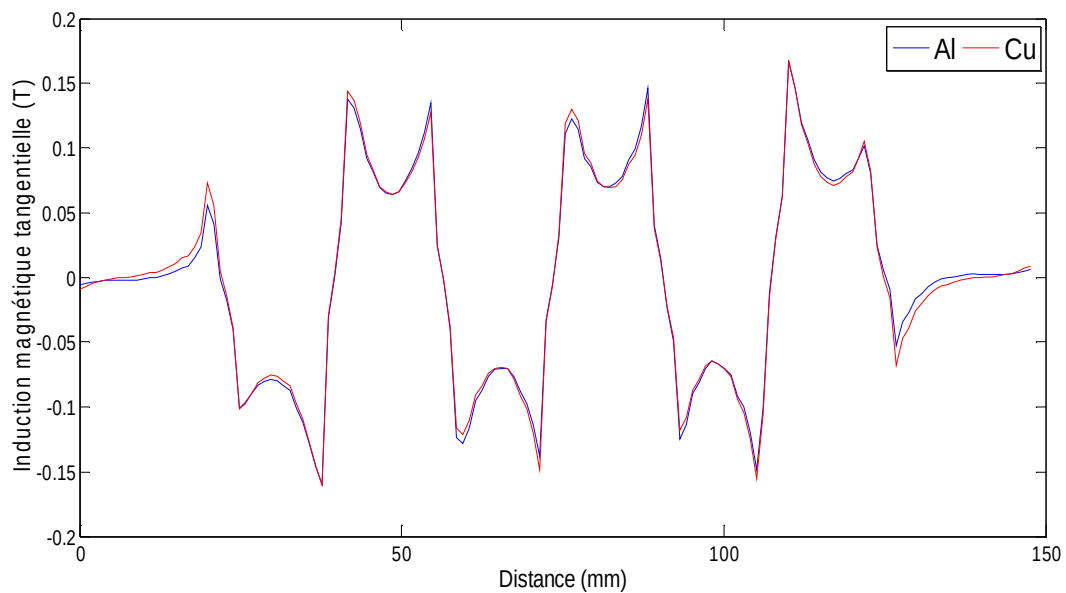
- Pour $p=3$



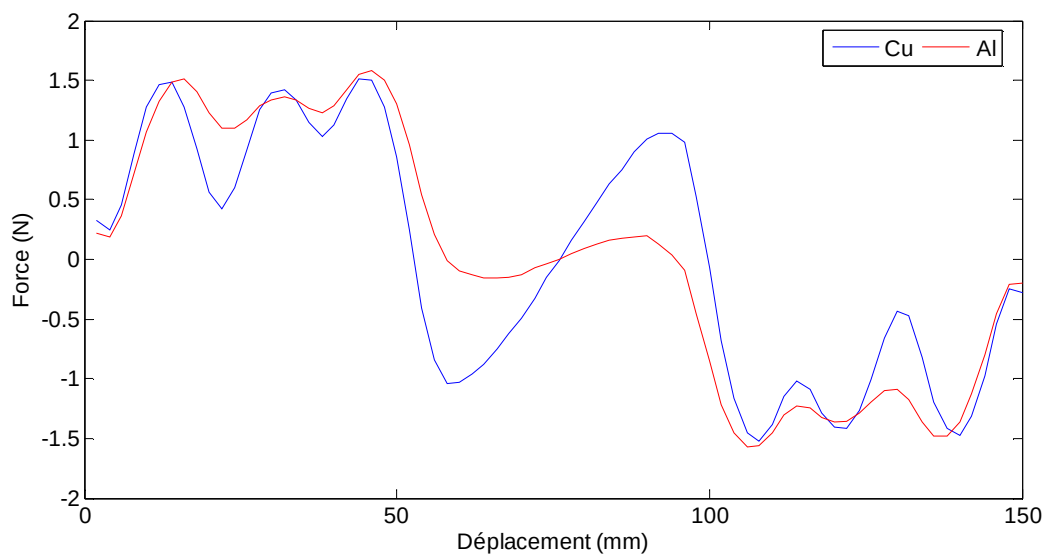
FigIV.38 : Confrontation entre les allures du potentiel vecteur magnétique en fonction de la distance pour deux types de couche conductrice, $f=20\text{Hz}$ et $p=3$



FigIV.39 : Confrontation entre les allures de l'induction magnétique normale en fonction de distance pour deux types de couche conductrice, $f=20\text{Hz}$ et $p=3$



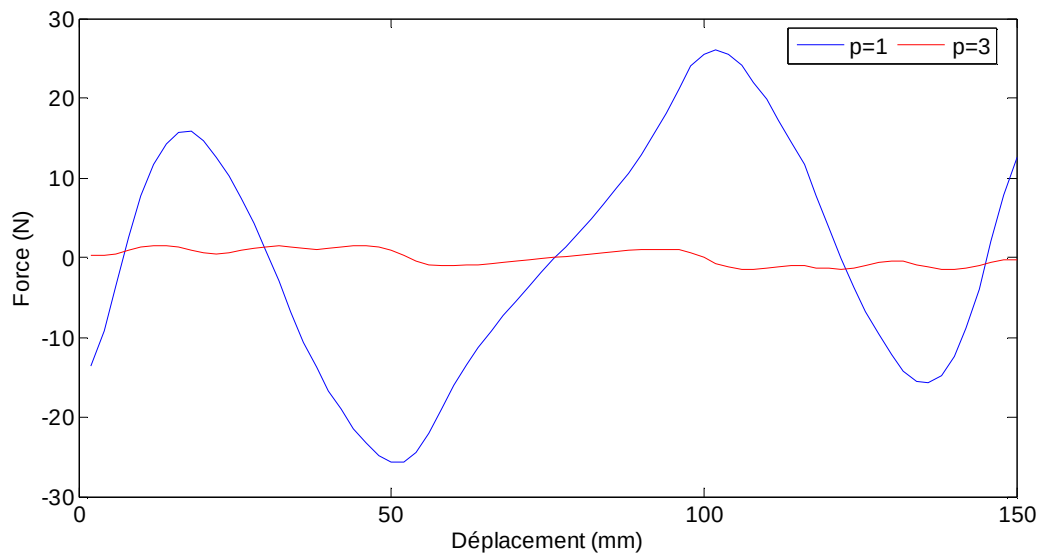
FigIV.40 : Confrontation entre les allures de l'induction magnétique tangentielle en fonction du déplacement pour deux types de couche conductrice, $f=20\text{Hz}$ et $p=3$



FigIV.41 : Confrontation des forces obtenues en fonction de déplacement pour deux types de couche conductrice, $f=20\text{Hz}$ et $p=3$

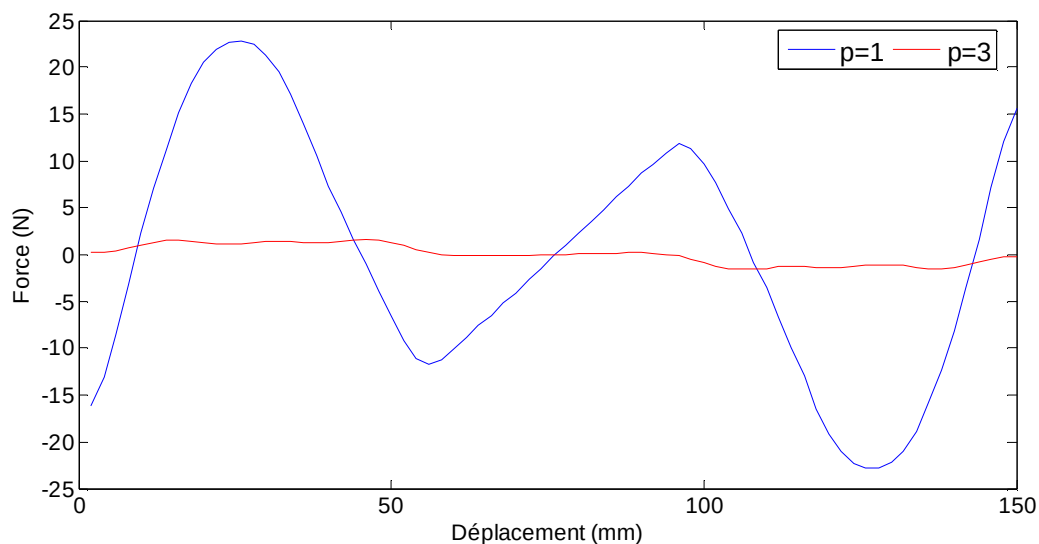
Pour ce cas une comparaison a été effectuée entre les allures de la force en fonction du déplacement pour le cas où $p=1$ et le cas où $p=3$ et pour les deux types de couches conductrices, les résultats obtenus sont comme suit:

- **Couche conductrice en cuivre**



FigIV.42 : Confrontation des forces obtenues en fonction du déplacement pour différents nombres de paires de pôles et $f=20\text{Hz}$

- **Couche conductrice en aluminium**



FigIV.43 : Confrontation des forces obtenues en fonction du déplacement pour différents nombres de paires de pôles et $f=20\text{Hz}$

En analysant les figures précédentes, nous remarquons que les grandeurs électromagnétiques, (force électromagnétique, potentiel vecteur magnétique, l'induction normale et tangentielle) obtenues sont plus importantes dans le cas où la couche conductrice est en cuivre, de plus la force électromagnétique de poussée obtenue est plus importante pour $P=1$ que celle obtenue pour $P=3$.

Conclusion

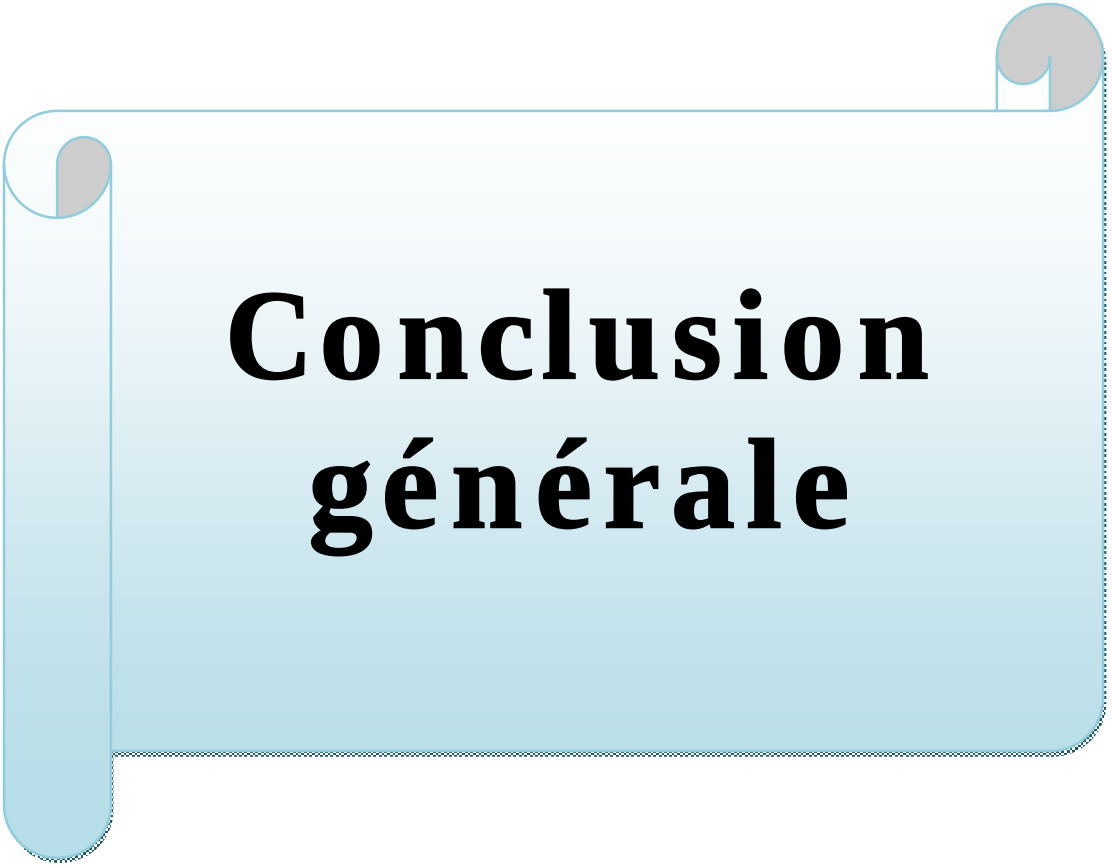
Après avoir exécuté le programme de calcul en introduisant toutes les données nécessaires pour chaque étape, nous avons obtenu des résultats significatifs sous formes de courbes que nous avons interprétées.

La force a été calculée en fonction du déplacement par la méthode de Lorentz selon les paramètres considérés à savoir la fréquence, la nature de la couche conductrice et le nombre de paire de pôles.

D'autre part, nous avons visualisé la répartition du potentiel vecteur magnétique et les inductions magnétiques dans l'entrefer en fonction de la distance, selon les mêmes paramètres dans le but de voir ces grandeurs.

L'étude nous a permis de constater que la nature du matériau constituant la couche conductrice (cuivre ou aluminium) du moteur, le nombre de paire de pôles et la fréquence, ont une grande influence sur les grandeurs électromagnétiques et mécaniques du moteur.

A l'aide de ces résultats on pourra fixer les paramètres tels que, la fréquence, la nature de la couche conductrice et le nombre de paires de pôles.



Conclusion générale

Conclusion générale

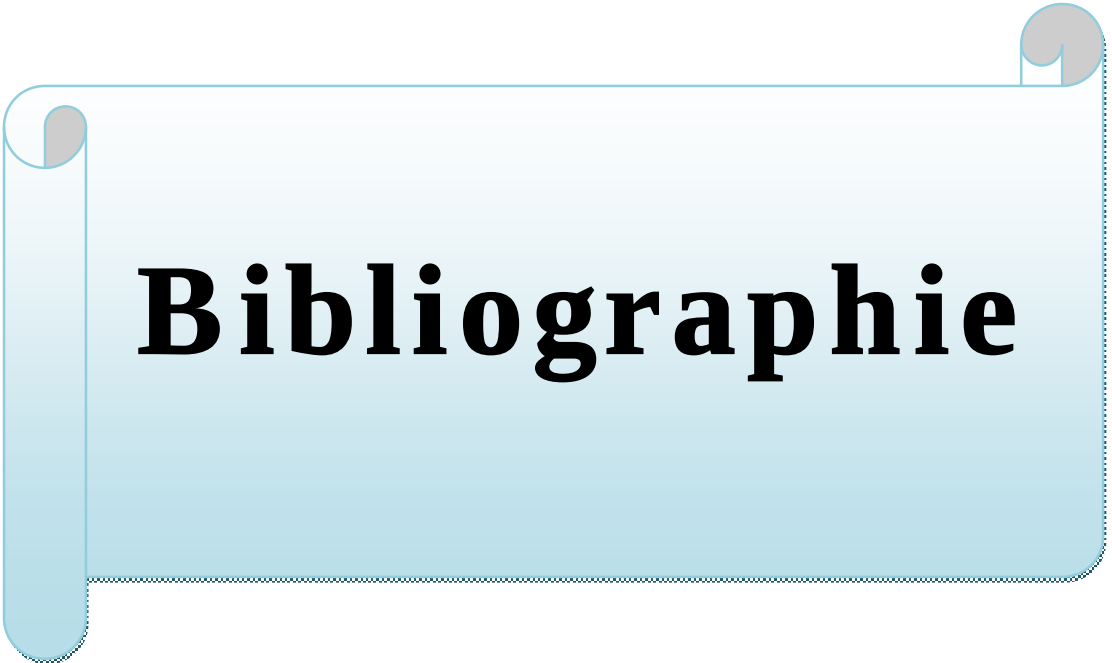
Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la modélisation par éléments finis d'un moteur linéaire tubulaire. Nous avons évoqué au début quelques généralités sur les différents types de machines linéaires, leurs principes de fonctionnement et les différents domaines de leurs utilisations. Comme tous les problèmes électromagnétiques, il faut passer d'abord par la discrétisation des équations aux dérivées partielles obtenues à travers la combinaison des équations de Maxwell avant de les résoudre et aboutir aux solutions approchées.

Pour faciliter la tâche des calculs, nous avons fait appel au logiciel FEMM efficace et simple, où un programme a été écrit et exécuté.

Nous avons choisi la méthode de Lorentz qui a été appliquée pour calculer la force électromagnétique en fonction du déplacement pour différentes fréquences et pour les différents nombres de paires de pôles ainsi que la déduction du potentiel vecteur magnétique et les inductions magnétiques en fonction de la distance le long de l'entrefer, pour cela deux types de couches conductrices ont été utilisées pour l'étude du moteur à savoir le cuivre et l'aluminium.

Les résultats obtenus nous ont permis de constater l'influence de la fréquence d'alimentation, le nombre de paires de pôles et la nature de la couche conductrice sur la force électromagnétique, le potentiel vecteur magnétique et les inductions magnétiques.

Nous avons constaté que les amplitudes de la force électromagnétique sont plus importantes lorsque la couche conductrice est en cuivre ainsi que le moteur conçu à une paire de pôles engendre des forces électromagnétiques plus intéressantes que celui conçu à trois paires de pôles.



Bibliographie

Bibliographie

- [1] R. Benramdane et B. Meddane, « Etude d'une machine électrique à mouvement linéaire par la méthode des éléments finis », Mémoire d'Ingénieur, Promotion 2006, Université de Tizi-Ouzou.
- [2] Y. Samira et C. Zina, « Etude d'une machine linéaire à aimants permanents en utilisant la méthode des éléments finis », Mémoire d'Ingénieur, promotion 2008, Université de Tizi-Ouzou.
- [3] Y. Sadjia et S.Fariza, « Etude d'une machine synchrone linéaire à aimants permanents par la méthode des éléments finis », Mémoire d'Ingénieur, Promotion 2006, Université de Tizi-Ouzou.
- [4] B. Djamila, C. Dahbia et H. Khalida, « Etude comparative axisymétrique cartésienne et analyse d'un lanceur électromagnétique sous le logiciel FEMM » Promotion 2004, Université de Tizi-Ouzou.
- [5] K.Fekrache et H.Mebbtouche, « Modélisation d'une structure de machine linéaire à aimants permanents et simulation du mouvement par la technique de Macroélément », Mémoire d'Ingénieur, Promotion 2001, Université de Tizi-Ouzou.
- [6] Olivier Darrigol « Les Equations de maxwell de Mac cullagh à Lorentz».
- [7] www.femm.berlios.de © 2002.
- [8] Theodore WILDI et Gilbert SYBILLE, «Electrotechnique » 3^{eme} édition de Book université, Edition 2003.
- [9] Gouri Dhati, Gilbert Touzot et Emmanuel Lefrançois, « Méthode des éléments finis », édition LAVOISIER, édition 1984.
- [10] R. Amimer et N. Belhanafi, « Prise en compte de l'aimantation magnétique dans la modélisation par éléments finis en régime dynamique d'une machine linéaire synchrone à aimants permanents », Mémoire d'Ingénieur, promotion 2002, Université de Tizi-Ouzou.
- [11] M.ZAOUIA, B.MEDDANE, R.BEN RAMDANE « Etude d'un moteur linéaire tubulaire par la méthode des éléments finis». International Conference on Computer Integrated Manufacturing CIP 2007.
- [12] J. F. EASTHAM, R. AKMESE, D. RODJER, R.J.HILL-COTTINGHAM, « Prediction of thrust forces in tubular induction machines », IEEE transactions on magnetics, vol.28, No. 2, March 1992, university of bath, PP 1375-1377.
- [13] Mr M. RACHEK « Modélisation 3D par éléments finis de systèmes électromagnétiques en mouvement de structure tridimensionnelle». Thèse doctorat Université de Tizi Ouzou février 2007.