

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MÉMOIRE DE MASTER II

SPECIALITE: RECHERCHE OPERATIONNELLE

OPTION: METHODES ET MODELES DE DECISION

Présenté par:

M^{elle} **Haouchine Manel**

M^{elle} **Hocine Dehbia**

Sujet:

Étude d'un jeu bi-matriciel avec paiements incertains

Devant le jury d'examen composé de:

M. Kasdi Kamel;

Mme Achmine Farida;

Mme Louadj Kahina;

M. Hamaz A.Ghani;

MAA;

MCB;

MCB;

MCB;

U.M.M.T.O;

U.M.M.T.O;

U.M.M.T.O;

U.M.M.T.O;

Président

Rapporteur

Examinatrice

Examineur

Soutenu : 23 Juin 2013

Remerciements

D'abord, Nous remercions notre Dieu le tout puissant de nous avoir aidé, et de nous avoir donné le courage. Nous espérons bien être à la hauteur.

Nous tenons, avant tout, à exprimer notre profonde gratitude à Madame Achemine Farida pour nous avoir accueillies, encadrées et soutenues tout au long de ce travail et qui nous a porté conseils et encouragement continuels. Nous lui sommes particulièrement reconnaissantes de nous avoir laissé une grande liberté scientifique.

Nous remercions également tous les professeurs membre du jury. Qu'ils veuillent trouver ici toute notre reconnaissance pour la peine qu'ils ont prise afin d'examiner et d'évaluer ce travail.

Nous remercions tout le personnel du département mathématique de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui, directement ou indirectement ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

*A ma très chère maman **Zoulikha** en qui j'ai puisé tout le courage, la volonté et la confiance, je lui serai éternellement reconnaissante, elle qui m'a donné un honorable modèle de labeur et de persévérance, elle qui a lutté, sacrifié tout au long de mes études.*

Merci infiniment, pour ta disponibilité, dévouement, et ton affection tout au long de ma vie.

*A mon cher mari **SOFIANE** qui n'est pas celui qui sèche les larmes mais celui qui les empêche de sortir.*

*A ma sœur **SAMIRA** et mes belles sœurs **KARIMA, KAHINA, NASSIMA, KATIA** avec toute ma reconnaissance.*

*A mon beau frère **KARIM**.*

*A mes nièces **LILIANE, DJANET, ANIES LEA**, et mon neveu **AMIR**.*

A ma belle mère, mes Tantes et mes Oncles

*A ma binôme **DEHBIA**, avec qui j'ai pu travailler en toute sérénité et avec qui j'ai passé d'agréables moments ainsi que pour toute sa famille.*

Qu'ils en soient, encore une fois, tous remerciés, leur bon souvenir sera toujours évoqué avec nostalgie et regret.

MANEL

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mon père et ma mère en qui j'ai puisé tout le courage, la volonté et la confiance, je leurs serai éternellement reconnaissante, eux qui m'ont donné un honorable modèle de labeur et de persévérance, eux qui ont lutté, sacrifié tout au long de mes études.

Merci infiniment, pour votre dévouement, disponibilité, et votre affection tout au long de ma vie.

*A mes sœurs **ZAHIA** et **HOURIA** et leurs époux.*

*A mes frères **MEZIANE** et son épouse **NACIRA**, **AREZKI**, **SIDALI**, **MADJID** et **YACINE**.*

*A mes nièces **DYHIA** et **LITITIA** et mes neveux **SYPHAX**, **AREZKI** et **WALID**.*

A mes Tantes et Oncles.

*A mes coupines **AICHA**, **RYMA**, **SONIA**, **HAYET**, **NABILA**, **FARIZA** et mon cher ami **AHCENE**.*

*A mon binôme **MANEL**, avec qui j'ai pu travailler en toute sérénité et avec qui j'ai passé d'agréables moments ainsi que pour toute sa famille.*

Qu'ils en soient, encore une fois, tous remerciés, leur bon souvenir sera toujours évoqué avec nostalgie et regret.

DEHBIA

Table des matières

Introduction	3
1 Notions générales de la théorie des jeux	4
1.1 Introduction	4
1.2 Définitions de base de la théorie des jeux	4
1.3 Classification générale des jeux	6
1.3.1 Classification selon l'information que possède chaque joueur .	6
1.3.2 Classification selon le nombre de coups	7
1.3.3 Classification selon les relations entre les joueurs	10
1.3.4 Autres classes de jeux	11
1.4 Élimination répétée des stratégies strictement dominées	12
1.5 Procédure d'élimination itérée des stratégies strictement dominées .	14
2 Équilibre de Nash dans les jeux sous forme normale	16
2.1 Introduction	16
2.2 Équilibre de Nash en stratégies pures	17
2.3 Problème d'existence de l'équilibre de Nash	19
2.3.1 Équilibre de Nash et correspondance de meilleure réponse . .	19
2.4 Condition d'existence de l'équilibre de Nash	21
2.5 Stratégies Mixtes	24
2.6 Définition des concepts	25
2.6.1 Stratégies mixtes	25
2.6.2 Extension mixte d'un jeu	26
2.7 Quelques propriétés de l'équilibre de Nash	30
2.8 Jeux Bi-matriciels	33
2.9 Équilibre de Nash pour un jeu bi-matriciel en stratégies mixtes . . .	34

3	Jeux bi-matriciel avec paiements incertains	36
3.1	Introduction	36
3.2	Preliminaires	37
3.3	Jeu bi-matriciel incertain	39
3.4	Concepts de solutions	40
	3.4.1 Définitions	40
3.5	Théorème d'existence des solutions	43
3.6	Calcul des équilibres	45
	Conclusion	54
	Annexe	55
	Bibliographie	57

Introduction

La théorie des jeux constitue une approche mathématique de problèmes de stratégie tels qu'on trouve dans de nombreuses situations de la vie quotidienne, la performance d'un acteur, qu'il soit un individu, une entreprise ou un pays, ne dépend pas uniquement de son action, mais aussi de celle prise par les autres. Cette interdépendance stratégique est le domaine de prédilection de la théorie des jeux. Au cours de ces dernières décennies, cette théorie a fait sa marque dans le développement de nombreuses disciplines, à savoir, les sciences économiques, la gestion, la recherche opérationnelle, le génie, les sciences politiques, l'informatique et la biologie, pour ne citer que quelques unes. L'apprentissage de la théorie des jeux est devenu ainsi important pour quiconque qui s'intéresse à ces disciplines.

La théorie des jeux étudie les situations où les choix de deux protagonistes - ou davantage - ont des conséquences pour l'un comme pour l'autre. Un de ses buts est d'abord de créer des modèles mathématiques de base. Ces modèles essaient de synthétiser tous les éléments essentiels pour décrire l'interaction, puis d'introduire des concepts de solution pour décrire les issues possibles d'un jeu et en fin, d'appliquer ces outils pour mieux comprendre les phénomènes sociaux mais aussi pour prédire les conséquences d'une interaction stratégique.

Dans ce mémoire, nous présenterons dans un premier temps des généralités sur la théorie des jeux afin de nous appuyer sur des concepts clairement établis. Ensuite nous étudierons l'équilibre de Nash. Enfin nous terminerons en présentant les grandes découvertes récentes sur la théorie des jeux incertaine "Jeux bi-matriciels avec paiements incertains" plus spécialement.

Chapitre 1

Notions générales de la théorie des jeux

1.1 Introduction

La théorie des jeux est une branche des mathématiques, de la recherche opérationnelle et de l'économie qui traite les situations de *conflit*. Elle consiste à analyser *l'interaction* dans *un groupe d'agents relationnels* qui ont un comportement *stratégique*.

On appelle un jeu, une situation où des individus "les joueurs" sont conduit à faire des choix parmi un certain nombre d'actions possibles appelées "stratégies", où chaque stratégie est une description complète de la façon dont un joueur entend jouer du début à la fin du jeu et dans un cadre défini à l'avance "règles du jeu". Le résultat de ces choix constituant une issue du jeu à laquelle est associé un gain positif ou négatif pour chacun des participants.

1.2 Définitions de base de la théorie des jeux

L'introduction comporte certains mots qui méritent d'être précisés, pour plus de détails sur certains concepts de la théorie des jeux, nous vous referons aux ouvrages suivants : [2], [3], [14], [16].

Conflit :

Un conflit est une situation où les questions suivantes ont un sens :

1. Qui participe à cette situation ?

2. Quels sont les résultats possibles de cette situation?
3. Qui est (et comment) intéressé(r) par ces résultats?

Groupe d'agents (joueurs) :

Toute personne qui participe au conflit et capable de prendre une décision est appelée joueur.

Stratégie :

Une stratégie d'un joueur est un choix parmi la liste de décision qu'il envisage de prendre. Le résultat des choix des joueurs constitue une (issue) ou profil d'action du jeu.

Interaction :

Toute action choisie par un joueur aura une influence sur celles des autres joueurs.

Gain (profit) :

Le gain d'un joueur est le bénéfice négatif (perte) ou positif qui résulte des choix de tous les joueurs.

Rationalité :

La rationalité individuelle d'un joueur est une règle de maximisation du profit individuel.

Coalition :

Une coalition est une partie de l'ensemble des participants (joueurs) qui s'organise d'une certaine façon.

Structure de coalitions :

On appelle structure de coalitions toute partition de l'ensemble des joueurs.

Accord contraignant :

Un accord entre les joueurs est dit contraignant s'il existe un organe de contrôle qui peut garantir son application, par exemple "un état, un gouvernement,...etc."

1.3 Classification générale des jeux

La diversité des situations conflictuelles qu'on peut rencontrer en pratique engendre différents types de jeux et des méthodes spécifiques de résolution.

Il existe plusieurs classifications des jeux selon les critères suivants :

- Nombre de joueurs.
- Nombre de stratégies.
- Types de relations entre les joueurs.
- Types des gains.
- La forme des fonctions des gains.
- Le nombre de pas dans le jeu.
- L'état de l'information.

1.3.1 Classification selon l'information que possède chaque joueur

- Jeux à information complète

On dit qu'un jeu est à information complète si chacun des participants connaît :

1. son ensemble de stratégies;
2. l'ensemble des stratégies des autres joueurs;
3. toute la gamme des issues possibles, les gains qui leur sont associés;
4. les motifs des autres joueurs (en plus des siens propres).

Cette classe des jeux regroupe tous les cas où toute l'information pertinente pour le jeu est observable pour tous.

- Jeux à information incomplète

Un jeu est dit à information incomplète, lorsque les joueurs manquent d'information à propos :

1. des stratégies disponibles;
2. des fonctions gains (des résultats provenant du choix des diverses stratégies)

1.3.2 Classification selon le nombre de coups

Dans un jeu d'échec, les joueurs jouent à tour de rôle; on dira qu'il s'agit d'un jeu séquentiel. Par contre, dans le cas d'un appel d'offre, les participants font leurs offres en même temps; il s'agit alors d'un jeu simultané. Deux catégories des jeux sont identifiées :

- Jeux sous forme normale (stratégique)

Ce sont les jeux qui se déroulent en un seul coup. La forme normale d'un jeu peut être utilisée dans le cas où les joueurs interviennent simultanément. Dans le cas des jeux finis à deux joueurs (les ensembles de stratégies des joueurs sont finis) la représentation se fait par un tableau donnant les gains des joueurs pour chacune des issues possibles, les lignes et les colonnes correspondent aux diverses stratégies. Un jeu sous forme normale est donné de trois éléments :

1. $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$: représente l'ensemble des joueurs qui est toujours fini et non vide, un joueur quelconque est appelé joueur i avec $i \in N$, $n \geq 2$.
2. X_i : l'ensemble non vide des stratégies du joueur i , une stratégie du joueur i est x_i avec $x_i \in X_i$. Une issue $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une combinaison possible des stratégies des n joueurs.
3. $f_i : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction de gain, d'utilité ou de paiement du joueur $i \in N$, l'issue $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ du jeu donne le gain $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ du joueur i .

On parlera de jeu fini si X_i est fini, $\forall i \in N$.

Le gain du joueur dépend de ses stratégie et celles des autres joueurs.

Un profil x domine un profil x' au sens de Pareto s'il est moins aussi bon pour tous les joueurs et si x est strictement meilleur pour au moins l'un d'entre eux. Autrement dit :

- 1) $f_i(x) \geq f_i(x'), \forall i \in N$.
- 2) $\exists j \in N, f_j(x) > f_j(x')$.

Une issue est un optimum de Pareto (Ou Pareto dominante) s'il n'existe pas une issue qui la Pareto-domine.

Notations :

1) On note jeu sous forme normale par :

$$\langle N, X, f \rangle \quad (1.1)$$

où

$$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \prod_{i=1}^n X_i;$$

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n);$$

2) $\forall t = (t_1, \dots, t_n) \in X, x = (x_1, \dots, x_n) \in X$

$(x_{-i}, t_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \dots, t_i, \dots, x_{i+1}, \dots, x_n);$

avec $x_{-i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n);$

x_{-i} : le sous ensemble des stratégies choisies par les joueurs autres que le joueur i .

Exemple 1. *Dilemme du prisonnier*

Le dilemme du prisonnier est l'exemple le plus connu de la théorie des jeux, ainsi dénommé parce qu'on peut le présenter sous la forme suivante :

"La police arrête deux suspects qui ont commis un délit ensemble et les interrogent séparément.

A chacun d'eux, on présente le marché suivant :

Si ton complice avoue et que tu te tais, tu croupira de dix ans ferme et lui s'en tirera avec un sursis. Si c'est l'inverse, c'est toi qui pourras obtenir un sursis tandis qu'il croupira en prison. Si vous avouez tous les deux, la peine sera partagée (cinq ans ferme). Si tous les deux se taisent, la peine sera trois ans ferme pour chacun".

Les choix possibles des prisonniers (noté P_1 et P_2) peuvent être représentés selon le tableau suivant :

		P1	
P2		se taire	avouer
	se taire	(-3,-3)	(-10,0)
	avouer	(0,-10)	(-5,-5)

TAB1

Dans cette situation, deux choix se présentent pour les deux prisonniers (joueurs), avouer et ne pas avouer. Chaque joueur va choisir la stratégie qui lui convient le

mieux compte tenu de la réaction de l'autre. Cette situation se modélise sous forme d'un jeu à deux personnes, sous forme stratégique (se déroule en un seul coup)

1. L'ensemble des stratégies des deux joueurs est $X_i = \{\text{avouer}, \text{se taire}\}; i = \overline{1,2}$;
2. L'ensemble des profils d'actions du jeu est $X = X_1 \times X_2$ c-à-d $X = \{(\text{avouer}, \text{avouer}), (\text{se taire}, \text{avouer}), (\text{avouer}, \text{se taire}), (\text{se taire}, \text{se taire})\}$
3. Les paiements des joueurs représentent les années de prison aux quelles ils sont condamnés en fonction de leurs attitudes, la fonction gain d'un joueur i , $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$f_1(\text{se taire}, \text{se taire}) = f_2(\text{se taire}, \text{se taire}) = -3.$$

$$f_1(\text{avouer}, \text{se taire}) = f_2(\text{se taire}, \text{avouer}) = 0.$$

$$f_1(\text{se taire}, \text{avouer}) = f_2(\text{avouer}, \text{se taire}) = -10.$$

$$f_1(\text{avouer}, \text{avouer}) = f_2(\text{avouer}, \text{avouer}) = -5.$$

4. L'objectif de chaque joueur est de minimiser son gain.

Selon le principe de la rationalité individuelle, la meilleure stratégie de chaque joueur c'est d'avouer.

- Jeux sous forme extensive

Ce sont les jeux qui comportent plusieurs coups. La forme extensive d'un jeu peut être utilisée dans le cas où les règles du jeu stipulent que certains joueurs interviennent plusieurs fois. La représentation d'un tel jeu se fait par l'arbre de Kuhn qui consiste à clarifier la séquence des actions des joueurs et l'information dont ils disposent à chaque nœud.

Représentation de la forme extensive :

Arbre du jeu :

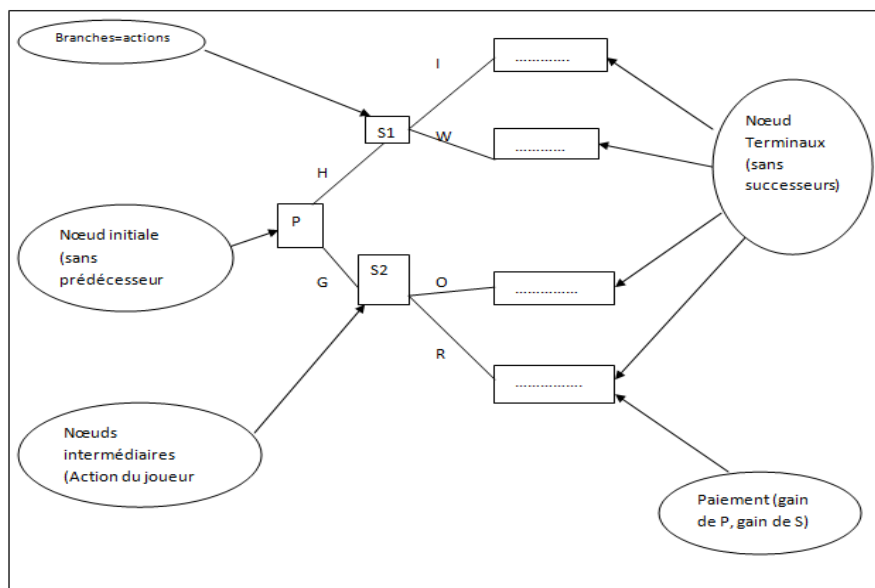


FIG. 1.1 – *Arbre du jeu sous forme extensive*

Remarque 1.1.

- Dans un jeu séquentiel, chaque joueur doit penser : Si je fais ceci, comment vont réagir les autres joueurs. Le choix de la stratégie sera déterminé par le calcul des conséquences futures.
- Dans un jeu simultané, un joueur donné est dans l'obligation de chercher à deviner ce que les autres joueurs vont faire tout de suite. Au même temps, les autres joueurs essayeront de deviner ce que ce joueur va faire de suite, en sachant qu'ils sont entrain de faire tous la même chose que lui.

1.3.3 Classification selon les relations entre les joueurs

- Jeux coopératifs

On dit qu'un jeu est coopératif, lorsque les joueurs qui y participent communiquent entre eux et peuvent former des coalitions par un accord contraignant. Autrement dit, les joueurs ont la possibilité de remettre leur pouvoir de décision entre les mains

d'une instance collective qu'ils auront créée ensemble.

- Jeux non coopératifs

On appelle un jeu non coopératif, tout jeu où les joueurs ne peuvent pas se regrouper en coalition, mais peuvent être d'accord sur telle ou telle issue, à condition qu'ils ne contractent pas d'accord contraignant. Aucun joueur ne cherchera à manipuler les autres, il ne cherche qu'à maximiser son propre gain.

Remarque 1.2.

Notons que les jeux coopératifs sont divisés en deux sous classes :

1. Jeux avec paiement latéraux : ce sont les jeux où les transferts d'utilité entre les joueurs sont possibles. Il permet aux joueurs de céder une partie de leur gain à d'autre joueur pour former des coalitions dans le but d'augmenter leurs gains.
2. Jeux sans paiement latéraux : ce sont les jeux où les joueurs reçoivent seulement le gain que leur donnent les règles du jeu. Elles leur interdit de recevoir ou de donner une partie de leurs gains aux autres.

1.3.4 Autres classes de jeux

- Jeux à deux personnes

Les jeux à deux personnes, ou duels, constituant la plus grande partie des jeux courants, comme les jeux d'échec, ou encore les jeux d'équipes. Les jeux à deux personnes ont fait l'objet d'analyses poussées par les théoriciens.

- Jeux à n-personnes, $n \geq 3$

Un jeu à n-personnes est un jeu où le nombre de joueurs intervenant dans le jeu est supérieur à deux. Lorsque l'on étend les résultats obtenus par la théorie des jeux à deux personnes aux jeux à n-personnes, le problème de savoir les interactions possibles entre les différents joueurs se pose.

- Jeux à somme nulle

On dit qu'un jeu à deux personnes est à somme nulle si le montant total des gains à la fin de la partie est nul, en d'autre terme si le montant total gagné par un joueur est égale au montant perdu par l'autre.

- Jeux monocritères et jeux multicritères

Selon le nombre de critères pris en considération par chaque joueur, on peut distinguer les jeux monocritères (chaque joueur possède une fonction gain) et les jeux multicritères (chaque joueur s'intéresse à plus d'un critère).

1.4 Élimination répétée des stratégies strictement dominées

On considère le jeu sous forme normale (1.1)

Définition 1.1.

Une stratégie $x_i \in X_i$ du joueur i est dite dominée si :

$\exists y_i \in X_i$ tel que :

$$f_i(x_i, x_{-i}) \leq f_i(y_i, x_{-i}), \forall x_{-i} \in X_{-i}$$

On dit alors que x_i est dominée par y_i .

Une stratégie $x_i \in X_i$ du joueur i est dite strictement dominée si :

$\exists y_i \in X_i$ tel que :

$$f_i(x_i, x_{-i}) < f_i(y_i, x_{-i}), \forall x_{-i} \in X_{-i}$$

on dit alors que x_i est strictement dominée par y_i

Remarque 1.3.

Si x_i est strictement dominée par y_i , alors face à n'importe quelle stratégie des autres joueurs, en jouant y_i , le joueur i gagne strictement plus que ce qu'il aurait gagné en jouant x_i . Il paraît donc naturel et logique de supposer qu'un joueur rationnel ne va jamais jouer une stratégie strictement dominée.

Un joueur jouera à coup sur une stratégie strictement dominante si elle existe et ne perd rien à jouer une stratégie dominante.

Lorsque tous les joueurs sont rationnels, ils savent que leurs adversaires, le sont. Chacun peut supprimer ses stratégies dominées et s'attendre à ce que les autres fassent de même. De nouvelles stratégies strictement dominées peuvent apparaître dans le jeu, donc on est conduit à itérer cette opération.

Considérons l'exemple suivant :

Le jeu initial est défini par la matrice suivante, où les stratégies du premier joueur1 sont dans la première ligne et les stratégies du joueur2 sont dans la première colonne :

		Joueur1		
		L	M	R
Joueur2	T	(1,0)	(1,2)	(0,1)
	B	(0,5)	(0,1)	(2,0)

TAB2

La stratégie R est strictement dominée par M pour le premier joueur, donc elle peut être éliminée, on obtient alors ce nouveau jeu :

		Joueur1	
		L	M
Joueur2	T	(1,0)	(1,2)
	B	(0,3)	(0,1)

TAB3

Mais dans ce nouveau jeu, B est strictement dominée par T pour le joueur1, B peut être éliminé :

		Joueur1	
Joueur2		L	M
	T	(1,0)	(1,2)

TAB4

Dans ce jeu aussi, L peut être éliminée car elle est dominée par M, ceci nous ramène à un jeu à une seule issue (T,M) de paiement (1,2).

Ce procédé est appelé : *procédé d'élimination itéré des stratégies strictement dominées*.

1.5 Procédure d'élimination itérée des stratégies strictement dominées

Pour tout jeu $J = \langle N, X, f \rangle$ et tout joueur $i \in N$, on note :

$SD^i(J)$ l'ensemble des stratégies du joueur i strictement dominées dans J .

- Partons d'un jeu $J_0 = \langle N, X, f \rangle$.

- Pour tout $i \in N$ on pose :

$$X_i^1 = X_i \setminus SD^i(J_0),$$

$$\text{et } J_1 = \langle J, X^1, f \rangle$$

$$X^1 = X_1^1 \times X_2^1 \times \dots \times X_n^1 = \prod_{i=1}^n X_i^1.$$

- Pour tout $k \geq 1$ et pour tout $i \in N$ on pose :

$$X_i^k = X_i^{k-1} \setminus SD^i(J_{k-1}),$$

$$\text{et } J_k = \langle N, X^k, f \rangle$$

$$X^k = \prod_{i=1}^n X_i^k.$$

- Pour tout $i \in N$ on pose :

$$X_i^\infty = \bigcap_{k \geq 0} X_i^k,$$

$$\text{et } J_\infty = \langle N, X^\infty, f \rangle$$

$$X^\infty = \prod_{i=1}^n X_i^\infty.$$

On dit qu'un jeu est soluble par l'élimination répétée des stratégies strictement dominées si on obtient un seul profil en éliminant successivement les stratégies strictement dominées, en d'autre terme $X^\infty = \text{singleton}$ (un élément).

Chapitre 2

Équilibre de Nash dans les jeux sous forme normale

2.1 Introduction

Jhon Forbs Nash est un économiste et un mathématicien américain né le 13 Juin 1928 à Bluefield en Virginie-Occidentale, fils de Jhon Nash, ingénieur, et Virginia Martin, enseignante.

Jeune, il passait beaucoup de temps à lire et à faire des expériences dans sa chambre qu'il avait convertie en laboratoire.

De Juin 1945 à Juin 1948, Nash a étudié au Carnegie Institue of Technology a Pittsburgh, dans l'intention de devenir ingénieur comme son père. À la place, il a développé une passion durable pour les mathématiques, et en particulier pour la théorie des nombres et la théorie de la relativité. Avec le groupe de théorie des jeux de Carnegie, il a commencé à se plonger dans le problème de la négociation, posé par Jhon Von Neumann dans son livre de la Théorie des jeux et du comportement économique (The theory of Games and Economic Behaviour, 1944).

Ses travaux ont été publiés dans trois articles :

"Equilibrium Points in N-person Games", dans Proceedings of the National Academy of Sciences (USA) (1950).

"The Bargaining Problem" dans Econometrica (Avril 1950).

"Two-person Cooperative Games" Dans tout processus de décision, dans Econometrica (Janvier 1953).

Le seul cours officiel d'économie qu'il ait suivi portait sur le commerce international. Il obtient en 1978 le Jhon Von Neumann Theory Prize pour ses découvertes

sur les équilibres non coopératifs.

Il a reçu le Prix de la Banque du Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel en 1994, pour ses travaux d'étudiant à Princeton sur la théorie des jeux.

Il envisage encore d'établir des résultats scientifiques significatifs.

Il a partagé le prix Nobel d'économie en 1994 avec Reinhard Selten et Jhon Harsanyi pour leurs travaux en théorie des jeux.

Dans la théorie des jeux, l'équilibre de Nash, nommé d'après Jhon Forbes Nash, est un concept de solution dans lequel l'équilibre entre plusieurs joueurs, connaissant leurs stratégies réciproques, est devenu stable du fait qu'aucun ne peut modifier sa stratégie sans affaiblir sa position personnelle.

2.2 Équilibre de Nash en stratégies pures

L'équilibre de Nash est un concept fondamental en théorie des jeux. Il décrit une issue dans la quelle aucun joueur ne souhaite modifier sa stratégie étant donnée les stratégies de ses adversaires.

Définition 2.1.

Un profil de stratégie $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ est un équilibre de Nash pour le jeu sous forme normale $J = \langle N, X, f \rangle$, donné par (1.1), si et seulement si :

$$\forall i \in N : f_i(x_i, x_{-i}^*) \leq f_i(x_i^*, x_{-i}^*), \forall x_i \in X_i.$$

Interprétation

1. Le concept de l'équilibre de Nash décrit une propriété de stabilité de la situation x^* , dans le sens où aucun joueur i , $i \in I$, n'a intérêt à modifier seul son choix x_i^* lorsque les autres joueurs choisissent leurs stratégies dans x_{-i}^* .
2. L'équilibre de Nash est une situation de non regret, puisque dans cet équilibre, chaque joueur ne regrette pas le choix qu'il a effectué après avoir constaté celui des autres.
3. L'équilibre de Nash est une situation individuellement rationnelle. Autrement dit, si x^* est un équilibre de Nash alors :

$$f_i(x^*) \geq \alpha_i, \forall i \in I.$$

$$\alpha_i = \max_{x_i} \min_{x_{-i}} f_i(x_i, x_{-i}), \forall i \in I.$$

Remarque 2.1.

En d'autres termes, l'équilibre de Nash est une issue où simultanément le joueur i choisit la meilleure stratégie compte tenu du meilleur choix du joueur j , et le joueur j choisit la meilleure stratégie compte tenu du meilleur choix du joueur i .

Remarque 2.2.

La différence entre l'équilibre en stratégies strictement dominantes et l'équilibre de Nash est donc la suivante :

Dans l'équilibre en stratégies dominantes, le choix du joueur i est optimal pour tout choix du joueur j , alors que dans l'équilibre de Nash, le choix du joueur i est optimal pour seulement tout choix optimal du joueur j . Comme pour l'équilibre en stratégies dominantes, l'équilibre de Nash est stable car c'est une issue où aucun joueur n'est incité à dévier de façon unilatérale.

Remarque 2.3.

Deux équilibres de Nash $\bar{x}$ et x^* tels que: $\bar{x} = (\bar{x}_i, \bar{x}_{-i})$ et $x^* = (x_i^*, x_{-i}^*)$.

Sont dit :

1) Interchangeable si

$$(\bar{x}_i, x_{-i}^*) \text{ et } (x_i^*, \bar{x}_{-i}) \text{ sont des équilibres de Nash.}$$

2) Équivalent si

$$\forall i \in N, f_i(\bar{x}) = f_i(x^*).$$

2.3 Problème d'existence de l'équilibre de Nash

Réunir les conditions qui garantissent l'existence d'un équilibre de Nash est un problème mathématique difficile [12]. Nash a utilisé un instrument très puissant d'analyse mathématique qui est le théorème du point fixe.

2.3.1 Équilibre de Nash et correspondance de meilleure réponse

Définition 2.2.

Pour chaque joueur $i \in N$, et profil de stratégie des autres joueurs x_{-i} . On dit que x_i est la meilleure réponse contre x_{-i} si :

$$f_i(x_i, x_{-i}) \geq f_i(y_i, x_{-i}), \forall y_i \in X_i.$$

Remarque 2.4.

Dans l'équilibre de Nash x^* , on a x_i^* (composante de l'équilibre de Nash) est la meilleure réponse pour x_{-i}^* , $\forall i \in N$.

Définition 2.3.

On appelle correspondance des meilleures réponses du joueur i l'application :

$$\begin{aligned} C_i : X_{-i} &\longrightarrow 2^{X_i} \\ x_{-i} &\longrightarrow C(x_{-i}) \end{aligned}$$

Qui associe à x_{-i} l'ensemble des meilleures réponses du joueur i à x_{-i} .

$$\begin{aligned} C_i(x_{-i}) &= \{x_i \in X_i / f_i(x_i, x_{-i}) \geq f_i(y_i, x_{-i}), \forall y_i \in X_i\}. \\ C_i(x_{-i}) &= \{x_i \in X_i / f_i(x_i, x_{-i}) = \sup_{y_i \in X_i} f_i(y_i, x_{-i})\}. \end{aligned}$$

Dans l'équilibre de Nash, si le joueur i anticipe que les autres participants au jeu vont choisir les stratégies associées au vecteur x_{-i}^* , il peut que maximiser son gain en choisissant la stratégie x_i^* . Celle-ci est en fait la meilleure réponse de i à x_{-i}^* , notée aussi mr_i , et elle correspond à :

$$mr_i : x_{-i} \longrightarrow \arg \max_{x_i \in X} f_i(x_i, x_{-i}).$$

Définition 2.4. [15]

On appelle une application multivoque de X dans Y une application :

$$C: X \longrightarrow 2^Y.$$

À $x \in X$ est associé un sous-ensemble non vide de Y .

Définition 2.5.

Lorsque $(X = Y)$

x est dit un point fixe de $C \iff x \in C(x)$.

La correspondance des meilleures réponses d'un joueur, donne ses choix optimaux vis-à-vis de toutes les stratégies possibles des autres joueurs. Ainsi, on peut réunir les meilleures réponses de tous les joueurs en définissant la correspondance :

$$\begin{aligned} C: X &\longrightarrow X \\ x &\longrightarrow C(x) = \prod_{i \in I} C_i(x_{I-i}) \end{aligned}$$

La relation entre l'équilibre de Nash et la correspondance de meilleure réponses du jeu (J) est présentée dans la proposition suivante :

Proposition 2.1.

Un profil de stratégies x^ de J est un équilibre de Nash si et seulement si x^* est un point fixe de $C(\cdot)$.*

Démonstration.

x^* est un équilibre de Nash $\iff \forall i \in I, \forall x_i \in X_i, f_i(x_i^*, x_{I-i}^*) \leq f_i(x_i^*, x_{I-i}^*) = f_i(x^*)$.

$$\iff \forall i \in I, x_i^* \in C_i(x^*).$$

$$\iff x^* \in C(x^*).$$

□

Remarque 2.5.

La proposition ci-dessus nous donne une caractérisation des équilibre de Nash à l'aide de la correspondance des meilleures réponses $C(\cdot)$. Cette caractérisation nous permet de présenter des conditions suffisantes d'existence d'un point fixe de la correspondance $C(\cdot)$ en utilisant le théorème de point fixe de Kakutani.

2.4 Condition d'existence de l'équilibre de Nash

Grâce aux théorèmes de point fixe, de nombreux résultats en économie et en théorie des jeux ont été démontrés. Ils constituent des outils mathématiques qui nous permettent de vérifier l'existence d'un point particulier (Comme par exemple un point d'équilibre en théorie des jeux).

Théorème 2.1. [7]

Soit X un sous ensemble non vide, convexe et compact et $C : X \mapsto 2^X$ une correspondance fermé à valeurs non vide convexe et compact, alors C admet un point fixe c'est à dire :

$$\exists x^\circ \in X, \text{ tel que } x^\circ \in C(x^\circ).$$

Théorème 2.2. [13]

Supposons que dans (J) les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $X_i, i = \overline{1, n}$, sont non vides, convexes et compacts;
2. Les fonctions $x_i \mapsto f_i(x_i, x_{N-i})$ sont quasi-concaves, $\forall x_{N-i} \in X_{N-i}, i = \overline{1, n}$;
3. Les fonctions $x \mapsto f_i(x)$ sont continues, $i = \overline{1, n}$.

Alors (J) possède au moins un équilibre de Nash.

Démonstration.

i) On a $X_i, i = \overline{1, n}$, sont non vide, convexes et compact donc il en est de même pour $X = \prod_{i \in I} (X_i)$.

ii) $\forall x \in X, C(x) \neq \emptyset$.

Les fonctions $x \mapsto f_i(x), i \in I$ sont continues. Par conséquent, les fonctions $x_i \mapsto f_i(x_i, x_{I-i}), i \in I$ sont continues sur le compact X . Cela entraîne que $\sup_{x_i \in X_i} f_i(x_i, x_{I-i})$ est atteint, $\forall x_{I-i} \in X_{I-i}, i \in I$. Ce qui signifie que $C_i(x_{I-i}) \neq \emptyset, \forall x_{I-i} \in X_{I-i}, i \in I$. Par conséquent $\forall x \in X, C(x) \neq \emptyset$.

iii) $\forall x \in X, C(x)$ est compact :

Pour un $x \in X$, considérons une suite $(x^l)_{l \geq 1} \subset C(x)$ telle que :

$\lim_{l \rightarrow \infty} x^l = x^0, (x^0 \in X_i \text{ car } X \text{ est compact}).$ Montrons que $x^0 \in C(x)$:
 $x^l \in C(x), \forall l \geq 1 \implies \forall i \in I, \forall x_i \in X_i, f_i(x_i, x_{I-i}) \leq f_i(x_i^l, x_{I-i}), \forall l \geq 1;$

$$\implies \forall i \in I, \forall x_i \in X_i, \lim_{l \rightarrow \infty} f_i(x_i, x_{I-i}) \leq \lim_{l \rightarrow \infty} f_i(x_i^l, x_{I-i}).$$

De la continuité des fonctions $f_i(\cdot), i \in I$, sur X , on déduit :

$$\begin{aligned} \forall i \in I, \forall x_i \in X_i, f_i(x_i, x_{I-i}) &\leq f_i(\lim_{l \rightarrow \infty} x_i^l, x_{I-i}). \\ \forall i \in I, \forall x_i \in X_i, f_i(x_i, x_{I-i}) &\leq f_i(x_i^0, x_{I-i}). \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\forall i \in I, x_i^0 \in C_i(x_{I-i}).$$

Par conséquent, $x^0 \in C(x)$.

Comme x est quelconque dans X , on déduit alors $\forall x \in X, C(x)$ est fermé, donc compact.

iv) $\forall x \in X, C(x)$ est convexe :

Pour un $x \in X$, considérons deux meilleures réponses, x^1, x^2 et $\lambda \in [0, 1]$.

On a $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in X$ (Car X est convexe).

$$x^1 \in C(x) \implies \forall i \in I, \forall x_i \in X_i, f_i(x_i, x_{I-i}) \leq f_i(x_i^1, x_{I-i}).$$

$$x^2 \in C(x) \implies \forall i \in I, \forall x_i \in X_i, f_i(x_i, x_{I-i}) \leq f_i(x_i^2, x_{I-i}).$$

Donc

$$\forall i \in I, \forall x_i \in X_i, f_i(x_i, x_{I-i}) \leq \inf(f_i(x_i^1, x_{I-i}), f_i(x_i^2, x_{I-i})) \quad (1)$$

Comme les fonctions $x_i \mapsto f_i(x_i, x_{I-i})$ sont quasi-concaves, on a " $\forall x_i^\circ, y_i^\circ \in X_i, \forall \lambda \in [0,1], f_i(\lambda x_i + (1-\lambda)y_i) \geq \inf(f_i(x_i), f_i(y_i))$ ".

Alors

$$f_i(\lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^2, x_{I-i}) \geq \inf(f_i(x_i^1, x_{I-i}), f_i(x_i^2, x_{I-i})) \quad (2)$$

Les inégalités (1) et (2) implique :

$$\forall i \in I, \forall x_i \in X_i, f_i(x_i, x_{I-i}) \leq f_i(\lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^2, x_{I-i}).$$

Donc

$$\forall i \in I, \lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^2 \in C_i(x_{I-i}).$$

Cela entraine que

$$\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in C(x).$$

x étant quelconque dans X , on déduit alors que $\forall x \in X, C(x)$ est convexe.

v) Graphe de C est fermé :

On note graphe de C par $\text{Graph}C$.

$$\text{Graph}C = \{(x, y) \in X \times X, y \in C(x)\}$$

Soient une suite $(x^l, y^l)_{l \geq 1}$ à valeur dans Graphe de C , telle que :

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (x^l, y^l) = (x^0, y^0) \in X \times Y, \text{ car } X \times X \text{ est compact.}$$

Montrons que $(x^0, y^0) \in \text{Graph}C$:

On a $(x^l, y^l) \in \text{Graph}C, \forall l \geq 1$ cela implique que $y^l \in C(x^l), \forall l \geq 1$.

$y^l \in C(x^l), \forall l \geq 1$, implique que $\forall i \in I, \forall x_i \in X_i, f_i(x_i, x_{I-i}^l) \leq f_i(y_i^l, x_{I-i}^l)$.

Ce qui entraîne alors

$$\forall i \in I, \forall x_i \in X_i, \lim_{l \rightarrow \infty} f_i(x_i, x_{I-i}^l) \leq \lim_{l \rightarrow \infty} f_i(y_i^l, x_{I-i}^l).$$

De la continuité des fonctions $x \mapsto f_i(x), \forall x \in X, \forall i \in I$;

On obtient

$$\begin{aligned}\forall i \in I, \forall x_i \in X_i, f_i(x_i, \lim_{l \rightarrow \infty} x_{I-i}^l) &\leq f_i(\lim_{l \rightarrow \infty} y_i^l, \lim_{l \rightarrow \infty} x_i^l), \\ \forall i \in I, \forall x_i \in X_i, f_i(x_i, x_{I-i}^\circ) &\leq f_i(y_i^\circ, x_{I-i}^\circ).\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\forall i \in I, y_i^\circ \in C_i(x_{I-i}^\circ).$$

Donc

$$y^\circ \in C(x^\circ)$$

Par conséquent

$$(x^\circ, y^\circ) \in \text{Graph} C.$$

De *i*) à *v*), on déduit que l'application multivoque $C(\cdot)$ vérifie toutes les conditions du théorème du point fixe de Kakutani donc elle admet au moins un point fixe, et d'après la proposition précédente c'est un équilibre de Nash de jeu J .

□

2.5 Stratégies Mixtes

Un des problèmes inhérents au concept d'équilibre de Nash en stratégies pures est que pour certains jeux, de tels équilibres n'existent pas. Par exemple le jeu de "Pierre, Papier, Ciseaux" :

	Pi	Pa	Ci
Pi	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
Pa	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
Ci	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

Pierre, Papier, Ciseaux

n'admet pas d'équilibre de Nash.

La raison pour laquelle on n'a pas d'équilibre est la suivante :

La notation d'équilibre de Nash en stratégies pures suppose que chaque joueur connaît les stratégies des autres joueurs. Or, nous sommes dans des jeux où chaque

joueur a intérêt à cacher sa stratégie, ou a bluffer. En effet, dans les jeux "Pile ou Face" ou "Tirer un Penalty", on n'utilise pas toujours la même stratégie, et on ne connaît pas non plus à l'avance celle de l'adversaire.

	Pi	Fa
Pi	(1, -1)	(-1, 1)
Fa	(-1, 1)	(1, -1)

Pile ou Face

Les stratégies mixtes, vont permettre de représenter ces possibilités de bluff, ou de jouer aléatoirement.

2.6 Définition des concepts

2.6.1 Stratégies mixtes

Nous commençons par définir le concept de stratégies mixtes. Soit donc $J = \langle I, X, f \rangle$ un jeu sous forme normale fini (les ensembles de stratégies sont finis). Avec :

$$X = \prod_{i=1}^n X_i,$$

$$I = \{1, 2, \dots, n\},$$

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Définition 2.6.

Une stratégie mixte pour le joueur i est une loi de probabilités sur X_i . On note $\Sigma_i = \Delta(X_i)$ l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i , $i \in I$.

$$\Sigma_i = \{p \in \mathbb{R}^{|X_i|}, P_k \geq 0, \sum_k P_k = 1\}.$$

où $P = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ est un vecteur qui exprime les probabilités qu'un joueur joue une stratégie x_k .

Proposition 2.2.

L'ensemble Σ_i des stratégies mixtes du joueur i est convexe. Ses points extrémaux sont les stratégies qui mettent probabilité 1 sur un seul point de X_i .

Remarque 2.6.

Une stratégie pure x_i correspond à la stratégie mixte qui joue x_i avec probabilité 1. On considère donc X_i comme un sous-ensemble de Σ_i . Par conséquent, toute stratégie pure est vue comme une stratégie mixte.

2.6.2 Extension mixte d'un jeu

Si chaque joueur j joue la stratégie σ_j , la probabilité que $x = (x_1, \dots, x_n)$ soit le profil d'actions effectivement joué est $\prod_j \sigma_j(x_j)$. Par conséquent, le paiement espéré du joueur j est :

$$F_j(\sigma) = \sum_{x \in X} (\prod_j \sigma_j(x_j)) f_j(x).$$

Remarque 2.7.

On fait l'hypothèse de fonctions d'utilités de Von Neumann et Morgenstern; l'utilité pour l'aléa est l'espérance de l'utilité obtenue.

La relation précédente définit des fonctions de paiement $F_i : \Sigma \mapsto \mathbb{R}$.

Définition 2.7.

L'extension mixte du jeu sous forme normale $\langle I, X, F \rangle$, est le jeu sous forme normale,

$\langle I, \Sigma, F \rangle$, où :

$$F = (F_1, \dots, F_n),$$

$$\Sigma = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_n).$$

Dans l'extension mixte :

- L'ensemble des joueurs est I .
- Chaque joueur choisit une stratégie mixte $\sigma_i \in \Sigma_i$.
- Le paiement de i est $F_i(\sigma)$.

Remarque 2.8.

L'application $F : \Sigma \mapsto \mathbb{R}$ est multilinéaire, c'est à dire elle est linéaire sur chaque coordonnée Σ_i .

Définition 2.8.

Un équilibre de Nash en stratégies mixtes de G est un équilibre de Nash du jeu avec ensembles de stratégies Σ_i et fonction de paiement F_i .

Un équilibre de Nash en stratégies mixtes est donc un profil de stratégies mixtes $\sigma \in \Sigma$ tel que $\forall i, \forall \sigma'_i \in \Sigma_i$.

$$F_i(\sigma_{-i}, \sigma_i) \geq F_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i)$$

Théorème 2.3. [13]

Tout jeu fini admet au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Pour montrer comment obtenir un équilibre de Nash en stratégie mixtes, considérons le jeu "Apparier les sous" (qui rappelons-le, n'a pas d'équilibre en stratégies pures) et soit maintenant $(p, 1-p)$ la stratégie mixte du joueur 1, avec p représentant la probabilité que le joueur 1 joue Pile et $(1-p)$ la probabilité que le joueur 1 joue Face. Et soit $(q, 1-q)$ la stratégie mixte du joueur 2, avec q représentant la probabilité que le joueur 2 joue Pile et $(1-q)$ la probabilité que le joueur 2 joue Face.

		joueur 2		
		σ_2	q	$(1-q)$
joueur 1	σ_1		Pile(P)	Face(F)
	p	Pile(P)	(1, -1)	(-1, 1)
	$(1-p)$	Face(F)	(-1, 1)	(1, -1)

L'équilibre de Nash est obtenu lorsque pour chacun des joueurs, la stratégie choisie est une meilleure réponse aux meilleurs choix des autres joueurs. Pour cela, la recherche de l'équilibre de Nash commence par la détermination de la fonction (ou correspondance) de meilleure réponse de chaque joueur.

Commençons par déterminer la correspondance $r(q)$ du joueur 1 pour que sa stratégie mixte $\sigma_1 = (p, 1-p)$, soit la meilleure réponse que la stratégie mixte $\sigma_2 = (q, 1-q)$ du joueur 2. Le paiement espéré du joueur 1 en adoptant la stratégie mixte $(p, 1-p)$ étant donné que le joueur 2 adopte la stratégie mixte $(q, 1-q)$ est :

$$f_1(\sigma_1, \sigma_2) = pq(+1) + p(1-q)(-1) + (1-p)q(-1) + (1-p)(1-q)(+1) = (1-2q) + p(4q-2).$$

On remarque que le paiement espéré du joueur 1 étant donné que le joueur 2 joue la stratégie mixte $(q, 1-q)$ est croissant par rapport à p si $(4q-2) > 0$, décroissant

par rapport à p si $(4q - 2) < 0$. En d'autres termes, si $q > 1/2$ le paiement espéré du joueur 1 est à son maximum lorsque la probabilité p prend sa valeur maximale. Dans ce cas, nous avons donc $p = 1$, c'est à dire que le joueur 1 choisit Pile. De même si $q < 1/2$ le paiement espéré du joueur 1 est indépendant de la stratégie mixte.

$(p, 1-p)$ est la meilleure réponse à la stratégie mixte $(q, 1-q)$ pour toutes les valeurs de p comprises entre 0 et 1 incluses. Notons que pour $q = 1/2$ $C_1(q)$ prend plus d'une valeur. On dira dans ce cas que $C_1(q)$ est une correspondance de meilleure réponse. La correspondance de meilleure réponse $r(q)$ du joueur 1 est donc de la forme suivante :

$$C_1(q) = \begin{cases} 1, & \text{si } q > 1/2; \\ [0,1], & \text{si } q = 1/2; \\ 0, & \text{si } q < 1/2. \end{cases}$$

Sa représentation graphique est donné par cette figure :

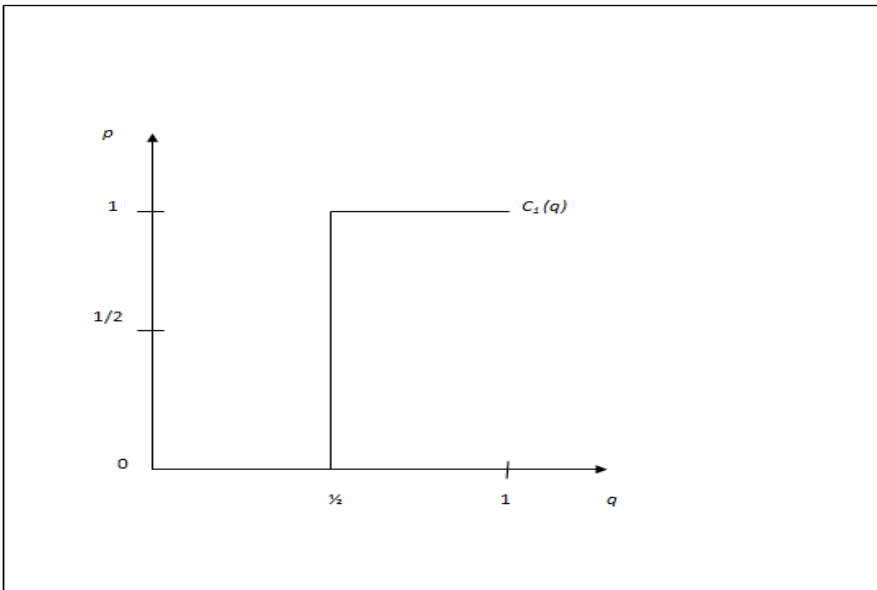


FIG. 2.1

Après avoir obtenu $C_1(q)$, la correspondance de meilleure réponse du joueur 1, il faut déterminer $C_2(p)$, la correspondance de meilleure réponse du joueur 2. La correspondance $C_2(p)$ est déterminée de telle sorte que la stratégie mixte $(q, 1 - q)$ du joueur 2 soit sa meilleure réponse à la stratégie mixte $(p, 1 - p)$ du joueur 1. Le paiement espéré du joueur 2 en adoptant la stratégie mixte $(q, 1 - q)$ étant donné que le joueur 1 adopte la stratégie mixte $(p, 1 - p)$ est :

$$f_2(\sigma_1, \sigma_2) = qp(-1) + q(1 - p)(+1) + (1 - q)p(+1) + (1 - q)(1 - p)(-1).$$

En utilisant la même démarche que celle utilisée pour le joueur 1, on obtient la correspondance de meilleure réponse $C_2(p)$ du joueur 2.

$$C_2(p) = \begin{cases} 1, & \text{si } p < 1/2; \\ [0, 1], & \text{si } p = 1/2; \\ 0, & \text{si } p > 1/2. \end{cases}$$

La figure suivante donne la représentation graphique de la correspondance de meilleure réponse $C_2(p)$:

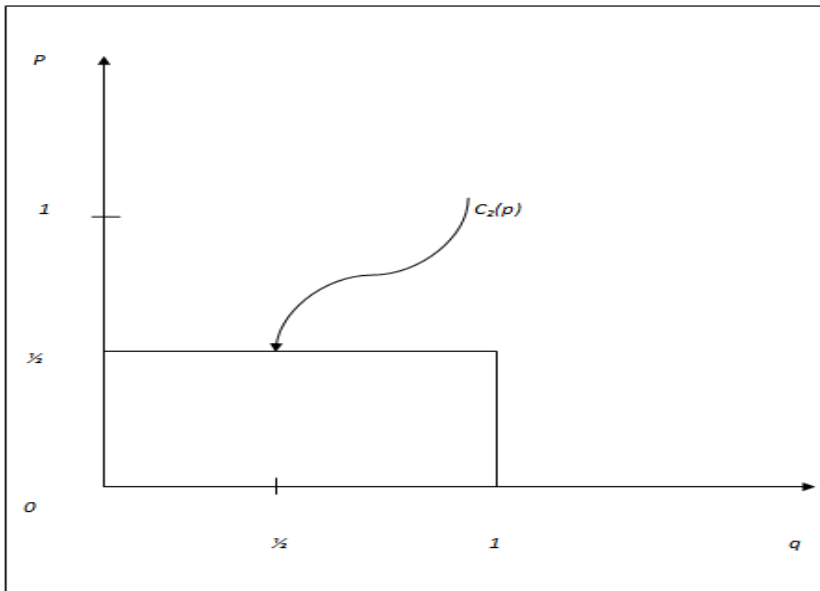


FIG. 2.2

On combine les deux figures, on obtient la figure suivante :

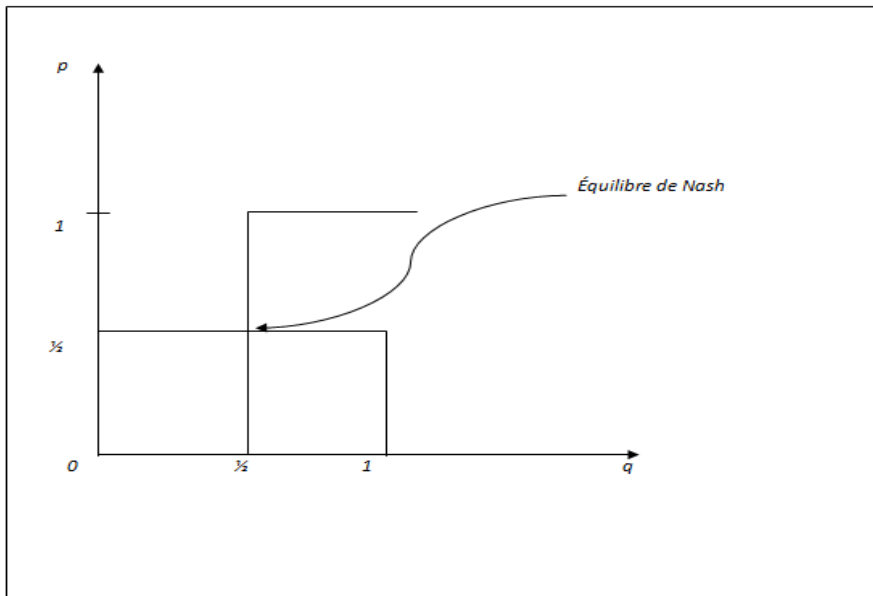


FIG. 2.3

2.7 Quelques propriétés de l'équilibre de Nash

1) Pluralité des équilibres de Nash : Un jeu peut avoir plusieurs équilibres de Nash.

Exemple 2. (*Bataille des sexes*)

		Homme	
		D	B
Femme	D	(2,1)	(0,0)
	B	(0,0)	(1,2)

Soit

	D	B
D	2	0
B	0	1

représente les gains de la Femme.

Soit

	D	B
D	1	0
B	0	2

représente les gains de l'Homme.

Si on note par $(\star)$ les meilleures gains de la Femme. Et si on note $(\diamond)$ les meilleures gains de l'Homme.

On aura alors

	D	B
D	$(\star, \diamond)$	
B		$(\star, \diamond)$

L'intersection entre $(\star)$ et $(\diamond)$ donne un équilibre de Nash.

Comme $(\star) \cap (\diamond) = \{(2,1), (1,2)\}$.

donc il admet plusieurs équilibre de Nash.

2) Un jeu peut ne pas posséder un équilibre de Nash.

Exemple 3. (Pile ou Face).

		joueur2	
		P	F
joueur1	P	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
	F	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

Soit

	P	F
P	1	-1
F	-1	1

représente les meilleures réponses du joueur 1.

Soit

	P	F
P	-1	1
F	1	-1

représente les meilleures réponses du joueur 2.

Si on note par $(\star)$ les meilleures réponses du joueur 1. Et on note par $(\diamond)$ les meilleures réponses du joueur 2.

On aura alors

	P	F
P	$\star$	$\diamond$
F	$\diamond$	$\star$

On remarque qu'il n'y a pas d'intersection entre $(\star)$ et $(\diamond)$, donc il n'admet pas d'équilibre de Nash.

3) L'équilibre de Nash n'est pas forcément Pareto optimal.

Exemple 4. Voici le tableau des gains suivant :

		Joueur 1	
		A	B
Joueur 2	A	(5,5)	(3,6)
	B	(6,3)	(4,4)

On note par $(\star)$ les meilleurs réponses du joueur 1

On note par $(\triangle)$ les meilleurs réponses du joueur 2

Alors on obtient :

		Joueur 1	
		A	B
Joueur 2	A	$(\triangle)$	$(\triangle)$
	B	$(\star)$	$(\star, \triangle)$

$(\star) \cap (\triangle) = (B,B)$ qui est un équilibre de Nash qui donne les gains $(4,4)$

Voici le graphe qui donne l'optimum de pareto

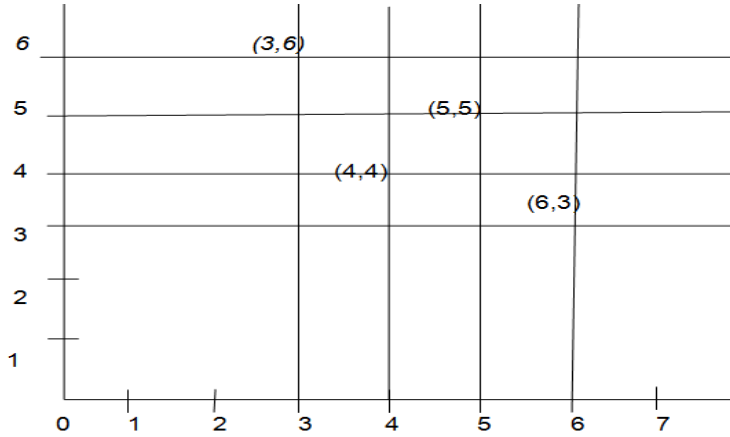


FIG. 2.4

D'après la figure au dessus on constate bien que la stratégie (A,A) qui donne les gains $(5,5)$ pareto-domine l'équilibre de Nash.

Donc on déduit que dans ce cas l'équilibre de Nash n'est pas pareto-optimal.

2.8 Jeux Bi-matriciels

Dans ce modèle de jeu, les gains de chaque joueur sont présentés par une matrice. Notons qu'un jeu matriciel à somme non nulle est un cas particulier d'un jeu Bi-matriciel.

Définition 2.9.

Un jeu Bi-matriciel est présenté sous la forme suivante

$$J_B = \langle I, A, B, X, Y \rangle$$

Où

$I = \{1,2\}$ est l'ensemble des joueurs.

A : la matrice des gains du joueur 1, tel que $A = (a_{ij})_{ij}$. $i = \overline{1, m}$. $j = \overline{1, n}$.

B : la matrice des gains du joueur 2, tel que $B=(b_{ij})_{ij}$. $i = \overline{1,m}$. $j = \overline{1,n}$.

X : l'ensemble des stratégies pures du joueur 1, tel que $X=\{1,\dots,i,\dots,m\}$.

Y : l'ensemble des stratégies pures du joueur 2, tel que $Y=\{1,\dots,j,\dots,n\}$.

Lorsque le joueur 1 choisit la stratégie pure $i \in X$ et le joueur 2 choisit la stratégie pure $j \in Y$, alors le joueur 1 reçoit le gain (a_{ij}) et le joueur 2 reçoit le gain (b_{ij}) .

Remarque 2.9.

Un jeu matriciel est un cas particulier d'un jeu Bi-matriciel, il suffit de considérer la matrice $B=-A$ dans le jeu J_B .

2.9 Équilibre de Nash pour un jeu bi-matriciel en stratégies mixtes

Définition 2.10.

Une stratégie mixte pour un joueur i , $i \in \{I,J\}$, est une distribution de probabilité sur son ensemble des stratégies pures.

On note X_I l'ensemble des stratégies mixtes du joueur 1 et X_J l'ensemble des stratégies mixtes du joueur 2.

Pour une paire de stratégies mixtes $(x,y) \in X_I \times X_J$, le gain du joueur 1 (noté $E_1(x,y)$) est défini par l'espérance mathématique des gains $(a_{ij})_{i,j}$.

$$E_1(x,y) = x^t A y = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i y_j.$$

Le gain du joueur 2 (noté $E_2(x,y)$) est défini par l'espérance mathématique des gains $(b_{ij})_{i,j}$.

$$E_2(x,y) = x^t B y = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ij} x_i y_j.$$

On obtient la forme mixte du jeu bi-matriciel, donné par :

$$BG = \langle I, E_1(x,y), E_2(x,y), X_I, X_J \rangle.$$

Définition 2.11.

Une paire $(x^*, y^*) \in X_I \times Y_J$ est un équilibre de Nash du jeu bi-matriciel $BG = (X_I, Y_J, A, B)$ si :

$$x^T A y^* \leq x^{*T} A y^* \text{ et } x^{*T} B y \leq x^{*T} B y^*.$$

Théorème 2.4. [1]

Soit BG le jeu bi-matriciel donné. Une condition nécessaire et suffisante pour que $(x^*, y^*) \in X_I \times X_J$ soit l'équilibre de Nash de BG est que (x^*, y^*) soit une solution du problème de programmation quadratique

$$\begin{aligned} & \max x^T (A + B) y - v - w \\ & \text{sous les contraintes, } A y - v e \leq 0 \\ & B^T x - w e \leq 0 \\ & e^T x - 1 = 0 \\ & e^T y - 1 = 0 \\ & v, w \in \mathbb{R} \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Jeux bi-matriciel avec paiements incertains

3.1 Introduction

Depuis le travail séminal de Von Neumann et Morgenstern [17], la théorie des jeux a été utilisée pour analyser des conflits et des situations coopératives de l'économie, sociologie, etc. Un des problèmes fondamentaux de la théorie des jeux est le jeu bi-matriciel.

Dans la littérature un jeu bi-matriciel est à information complète. Cependant il existe des situations où les joueurs manquent d'informations aux sujets des paiements du jeu, pour résoudre un tel type de problème on peut utiliser la théorie de probabilité qui est une branche de mathématiques qui permet d'analyser le hasard. Pour déterminer la distribution de probabilité ou la fonction de densité on a besoin d'assez de données, mais les choses vont souvent contrairement à nos vœux. Sans assez de données on a recours à la théorie du flou qui a été initiée par Zadeh [19]. Pour le même but la théorie d'incertitude fondée par Liu en 2007 et raffiné par Liu en 2010 [8], [9], est basée sur un système axiomatique.

Dans ce chapitre nous étudions un jeu bi-matriciel avec paiements incertains basé sur la théorie d'incertitude .

3.2 Préliminaires

La théorie de l'incertitude [10], [8] a été fondée par **Liu** (2007) et raffinée par Liu [10]. De nos jours cette théorie est devenue une branche de mathématiques qui incluent la programmation incertaine, l'analyse du risque incertain, processus incertain, calculs incertains, équations différentielles incertaines, déduction incertaine, et logique incertaine, etc.

Soit Γ un ensemble non-vide, et $\mathcal{L}$ un σ -algèbre sur Γ . Chaque élément Λ de $\mathcal{L}$ est appelé un événement. Une fonction M de $\mathcal{L}$ dans $[0,1]$ est appelée une mesure incertaine si elle satisfait ces trois axiomes:

- Axiome de normlité

$$M(\Gamma)=1$$

- Axiome de dualité

$$M(\Lambda)+M(\Lambda^c)=1, \quad \forall \Lambda \in \Gamma$$

- Axiome de subadditivité

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(\Lambda_i), \quad \forall \Lambda_i \in \Gamma$$

Le triplet $(\Gamma, \mathcal{L}, M)$ est appelé espace d'incertitude.

Soit $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, M_k)$ un espace d'incertitude, $k=1,2,\dots$

On écrit $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots$ et $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \times \dots$. Alors l'espace produit est donné par l'axiome suivant :

-Axiome du produit : soit $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, M_k)$ un espace d'incertitude pour $k=1,2,\dots$. Le produit de la mesure incertaine M est une mesure incertaine qui satisfait :

$$M\left\{\prod_{k=1}^{\infty} \Lambda_k\right\} = \min_{1 \leq k \leq \infty} M_k\{\Lambda_k\}. \quad (3.1)$$

Définition 3.1. [11]

Les variables incertaines $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sont dites indépendantes si et seulement si :

$$M\left\{\bigcap_{i=1}^n (\xi_i \in B_i)\right\} = \min_{1 \leq i \leq n} M\{\xi_i \in B_i\}$$

Pour tous ensembles borelien de $\mathbb{R}$ $B_1, \dots, B_n$.

Définition 3.2. [10]

Une variable incertaine est une fonction mesurable ξ d'un espace d'incertitude $(\Gamma, \mathcal{L}, M)$ dans l'ensemble des nombres réels. Pour décrire une variable incertaine en pratique, le concept de la distribution d'incertitude est défini comme suit :

$$\Phi(x) = M\{\xi \leq x\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Peng et Iwamura [18] ont prouvé qu'une fonction $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ est une distribution d'incertitude si et seulement si elle est croissante et monotone sauf en $\Phi(x) \equiv 0$ et $\Phi(x) \equiv 1$. Par exemple, la fonction zigzag suivante :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq a; \\ (x-a)/2(b-a), & \text{si } a \leq x \leq b; \\ (x+c-2b)/2(c-b), & \text{si } b \leq x \leq c; \\ 1, & \text{si } x \geq c. \end{cases} \quad (3.3)$$

est une fonction de distribution d'incertitude notée par $Z(a,b,c)$, tels que a, b, c des nombres réels avec $a < b < c$. Une distribution d'incertitude ϕ est dite régulière si son inverse $\phi^{-1}(\alpha)$ existe et est unique pour chaque $\alpha \in [0,1]$. Dans ce cas, ϕ^{-1} est dite l'inverse de la distribution de ξ . Dans ce chapitre on va supposer que tous les paiements sont caractérisés par des variables incertaines régulières.

Remarque 3.1. 1) Soient ζ_1 et ζ_2 deux variables incertaines et indépendantes $Z(a,b,c)$ et $Z(d,e,f)$, respectivement. On a $\zeta_1 + \zeta_2$ est aussi une variable zigzag : $Z(a+d, b+e, c+f)$; 2) Soit $\lambda > 0$, on a $\lambda Z(a,b,c) = Z(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ [10]

Définition 3.3. [10]

Soit ξ une variable incertaine. Alors la valeur de l'espérance de ξ est défini par :

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} M\{\xi \geq r\} dr - \int_{-\infty}^0 M\{\xi \leq r\} dr. \quad (3.4)$$

à condition qu'au moins l'une des deux intégrales soit finie.

Si ξ est une variable incertaine et ϕ est sa distribution d'incertitude, alors la valeur de l'espérance doit être calculée comme suit :

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} (1 - \phi(x)) dx - \int_{-\infty}^0 \phi(x) dx. \quad (3.5)$$

Définition 3.4. [10]

Soit ξ une variable incertaine régulière, et $\alpha \in (0,1)$. Alors :

$$\xi_{sup}(\alpha) = \sup\{r / M\{\xi \geq r\} \geq \alpha\} = \phi^{-1}(1 - \alpha) \quad (3.6)$$

est dite la valeur α -optimale de ξ .

Lemme 3.1. [10]

Soient ξ et η des variables incertaine régulières, $\alpha \in]0,1[$. Alors pour tout nombres réels a et b non-négatifs nous avons :

$$E[a\xi + b\eta] = aE[\xi] + bE[\eta]. \quad (3.7)$$

$$(a\xi + b\eta)_{sup}(\alpha) = a\xi_{sup}(\alpha) + b\eta_{sup}(\alpha). \quad (3.8)$$

Remarque 3.2. [4]

Soient ξ et η deux variables régulières incertaines, α et r sont des nombres réels avec $\alpha \in]0,1[$. Alors nous avons trois critères de comparaisons des variables incertaines :

1. Le critère de la valeur de l'espérance : $\xi \geq \eta$ si et seulement si : $E[\xi] \geq E[\eta]$;
2. Le critère de la valeur optimale : $\xi \geq \eta$ si et seulement si : $\xi_{sup}(\alpha) \geq \eta_{sup}(\alpha)$;
3. Le critère de la mesure incertaine : $\xi \geq \eta$ si et seulement si : $M\{\xi \geq r\} \geq M\{\eta \geq r\}$.

3.3 Jeu bi-matriciel incertain

Supposons qu'il ya deux joueurs I et J dans le jeu. Soit $U = \{1,2,...,m\}$ les stratégies pures du joueur I , et $V = \{1,2,...,n\}$ les stratégies pures du joueur J . Un jeu bi-matriciel est un jeu G de la forme

$$G = \langle \{I,J\}, U \times V, A, B \rangle$$

tels que A et B sont des matrices de dimension $m \times n$, composées de ξ_{ij} et η_{ij} qui sont les paiements des joueurs I et J correspondants aux stratégies (i,j) , respectivement. Les stratégies mixtes de chaque joueur sont des distributions de probabilité sur son ensemble de stratégies pures.

Dans les situations réelles des jeux, l'environnement de la décision est souvent caractérisé par un grand nombre de stratégies possibles avec des relations compliquées entre les choix des stratégies et leurs influences sur les paiements, donc

on ne peut pas faire les matrices des paiements ni d'une manière exacte ni par estimation probabiliste. Dans de telles situations on doit spécifier les paiements ξ_{ij} comme des variables incertaines avec des distributions incertaines ϕ_{ij} , et η_{ij} comme une variable incertaine avec des distributions incertaines Ψ_{ij} , pour tout $i=1, \dots, m$ et $j=1, \dots, n$.

Dans le reste de ce chapitre, on considère les paiements comme des variables incertaines régulières, par exemple la fonction zigzag.

On note les matrices des paiements incertains des joueurs I et J par $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ respectivement. Pour toute stratégie mixte, dite $(x, y) \in X_I \times X_J$, les objectives des deux joueurs sont $x^T \tilde{A}y$ et $x^T \tilde{B}y$ qui sont des variables incertaines.

3.4 Concepts de solutions

Dans ce paragraphe, nous présentons les trois critères qui sont souvent utilisés pour caractériser le comportement des décideurs : le critère de la valeur de l'espérance, le critère de la valeur optimale et le critère de la mesure incertaine. Comme solution du jeu bi-matriciel incertain, nous présentons trois concepts de l'équilibre incertain basés sur ces critères.

3.4.1 Définitions

1) Supposons que les joueurs emploient le critère de la valeur de l'espérance. Alors les meilleures réponses de joueur i à une stratégie $y^* \in X_J$ sont les solutions optimales du problème :

$$\max_{x \in X_I} \mathbf{E}[x^T \tilde{A}y^*], \quad (3.9)$$

Et les meilleures réponses de joueur j à une stratégie $x^* \in X_I$ sont les solutions optimales du problème

$$\max_{y \in X_J} \mathbf{E}[x^{*T} \tilde{B}y]. \quad (3.10)$$

Basé sur les réactions rationnelles des joueurs, nous présentons le premier concept d'équilibre incertain.

Définition 3.5. [6]

Le couple (x^*, y^*) est dit équilibre de Nash espéré (Expected Nash Equilibrium (ENE)), s'il satisfait :

$$u^* = \mathbf{E}[x^{*\text{T}} \tilde{A}y^*] \geq E[x^{\text{T}} \tilde{A}y^*], \forall x \in X_I,$$

et

$$v^* = \mathbf{E}[x^{*\text{T}} \tilde{B}y^*] \geq E[x^{*\text{T}} \tilde{B}y], \forall y \in X_J,$$

Le couple (u^*, v^*) est appelé une valeur espérée du jeu.

2) Par le critère de la valeur optimale, on modélise la situation pour qu'un décideur mette une marge de sécurité $(1 - \alpha)$, et maximise le α -optimale de son objectif incertain. Supposons que le joueur i veut maximiser le α -optimale de son paiement incertain $x^{\text{T}} \tilde{A}y$, et le joueur j veut maximiser le β -optimale de son paiement incertain $x^{\text{T}} \tilde{B}y$. Alors les meilleures réponses du joueur i à une stratégie $y^* \in X_J$ sont les solutions optimales du problème

$$\max_{x \in X_I} \max_u M\{x^{\text{T}} \tilde{A}y^* \geq u\} \geq \alpha. \quad (3.11)$$

Les meilleures réponses du joueur j à une stratégie $x^* \in X_I$ sont les solutions optimales du problème

$$\max_{y \in X_J} \max_v M\{x^{*\text{T}} \tilde{B}y \geq v\} \geq \beta, \quad (3.12)$$

Définition 3.6. [6]

Le couple (x^*, y^*) est appelé un (α, β) -équilibre de Nash optimale (Optimistic Nash Equilibrium (α, β) -ONE) s'il satisfait :

$$u^* = \max\{u | M\{x^{*\text{T}} \tilde{A}y^* \geq u\} \geq \alpha\} \geq \max\{u | M\{x^{\text{T}} \tilde{A}y^* \geq u\} \geq \alpha\}; \forall x \in X_I$$

et

$$v^* = \max\{v | M\{x^{*T} \tilde{B}y^* \geq v\} \geq \beta\} \geq \max\{v | M\{x^{*T} \tilde{B}y \geq v\} \geq \beta\}; \forall y \in X_J$$

Le point (u^*, v^*) est appelé un (α, β) -valeur optimale du jeu.

3) Le critère de la mesure incertaine correspond à la situation qu'un décideur peut souligner un événement (c'est à dire, son objectif est prédéterminé), et veut maximiser la mesure incertaine de cet événement. Supposons que le joueur i , fixe un niveau de paiement u , et veut maximiser la mesure incertaine d'un événement $x^T \tilde{A}y \geq u$. Le joueur j , fixe son niveau de paiement à v , et veut maximiser la mesure incertaine d'un événement $x^T \tilde{B}y \geq v$. Alors les meilleures réponses de joueur i à une stratégie $y^* \in X_J$ sont les solutions optimales du modèle de la programmation incertaine

$$\max_{x \in X_I} M\{x^T \tilde{A}y^* \geq u\}. \quad (3.13)$$

Et les meilleures réponses du joueur j à une stratégie $x^* \in X_I$ sont les solutions optimales du modèle de la programmation incertaine

$$\max_{y \in X_J} M\{x^{*T} \tilde{B}y \geq v\}. \quad (3.14)$$

Alors, il est basé sur les réactions rationnelles des joueurs, nous représentons la troisième stratégie de l'équilibre incertain.

Définition 3.7. [6]

Le couple (x^*, y^*) est appelé un (u, v) -most uncertainty Nash equilibrium $((u, v)$ -MUNE), s'il satisfait :

$$\alpha^* = M\{x^{*T} \tilde{A}y^* \geq u\} \geq M\{x^T \tilde{A}y^* \geq u\}, \forall x \in X_I,$$

$$\beta^* = M\{x^{*T} \tilde{B}y^* \geq v\} \geq M\{x^{*T} \tilde{B}y \geq v\}, \forall y \in X_J.$$

Le point (α^*, β^*) est appelé un (u, v) -Most uncertain mesure of the game.

3.5 Théorème d'existence des solutions

Nous allons présenter le théorème qui donne les conditions suffisantes d'existence de ces concepts.

Théorème 3.1. [6]

Soient $\tilde{A} = (\zeta_{ij})$ et $\tilde{B} = (\eta_{ij})$, où ζ_{ij} et η_{ij} sont des variables incertaines régulières indépendantes, pour $i = \overline{1,m}$ et $j = \overline{1,n}$. Alors :

1. Il existe au moins un équilibre de Nash espéré, noté (x^*, y^*) , et la valeur de l'espérance du jeu bi-matriciel incertain est $(x^{*\top} \tilde{A}_{\mathbf{E}} y^*, x^* \tilde{B}_{\mathbf{E}} y^*)$ où

$$\tilde{A}_{\mathbf{E}} = (\mathbf{E}[\zeta_{ij}])_{m \times n}, \tilde{B}_{\mathbf{E}} = (\mathbf{E}[\eta_{ij}])_{m \times n}. \quad (3.15)$$

2. Il existe au moins un (u,v) -ONE, noté (x^*, y^*) , et le (α, β) -Critique le jeu bi-matriciel incertain est $(x^{*\top} \tilde{A}_{sup}^{\alpha} y^*, x^* \tilde{B}_{sup}^{\beta} y^*)$ où :

$$\tilde{A}_{sup}^{\alpha} = (\phi_{ij}^{-1}(1 - \alpha))_{m \times n}, \tilde{B}_{sup}^{\beta} = (\psi_{ij}^{-1}(1 - \beta))_{m \times n}; \quad (3.16)$$

3. Il existe au moins un (u,v) -MUNE (la mesure plus incertaine), noté (x^*, y^*) , et le (u,v) -MUNE du jeu bi-matriciel incertain est (α^*, β^*) où :

$$\alpha^* = M\{x^{*\top} \tilde{A} y^* \geq u\}, \beta^* = M\{x^* \tilde{B} y^* \geq v\}. \quad (3.17)$$

Démonstration.

1. On a les gains des joueurs I et J sont données par :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x^t \tilde{A} y) = x^t \mathbf{E}(\tilde{A}) y, & \forall x \in X_I, y \in X_J \\ \mathbf{E}(x^t \tilde{B} y) = x^t \mathbf{E}(\tilde{B}) y, \end{cases}$$

Donc l'existence de ENE est équivalente à l'existence d'un équilibre de Nash dans le jeu $\langle \{I, J\}, X_I \times X_J, \tilde{A}_{\mathbf{E}}, \tilde{B}_{\mathbf{E}} \rangle$.

2. Soit x une stratégie mixte, ses composantes x_i ($i = \overline{1,m}$) sont des nombres non négatifs. Soit y une stratégie mixte du joueur 2 de composantes non négatives. D'après le lemme 1 on a :

$$\max\{u | M\{x^{\top} \tilde{A} y \geq u\} \geq \alpha\} = x^{\top} \tilde{A}_{sup}^{\alpha} y, \quad (3.18)$$

$$\max\{v | M\{x^T \tilde{B}y \geq v\} \geq \beta\} = x^T \tilde{B}_{sup}^\beta y. \quad (3.19)$$

Alors l'existence d'un (α, β) -ONE est équivalent à l'existence d'un équilibre de Nash dans le jeu $G = \langle \{I, J\}, X_I \times X_J, \tilde{A}_{sup}^\alpha, \tilde{B}_{sup}^\beta \rangle$. D'après le lemme 2, la partie 2 du théorème est démontrée.

3. En premier, nous considérons les meilleures réponses de chaque joueur étant donnée la stratégie de l'autre. D'après les équations (3.13) et (3.14), les meilleures réponses de joueur i est une fonction résolue $F_I(y)$ est défini par :

$$F_I(y) = \arg \max_{x \in X_I} M\{x^T \tilde{A}y \geq u\}, \forall y \in X_J$$

Les meilleures réponses de joueur j est une fonction résolue $F_J(x)$ définie par :

$$F_J(x) = \arg \max_{y \in X_J} M\{x^T \tilde{A}y \geq v\}, \forall x \in X_I$$

Pour tout $x \in X_I$.

Deuxièmement, montrons que $F_I(y)$ est non vide et convexe pour tout $y \in X_J$.

On pose $\alpha = M\{x^T \tilde{A}y \geq u\}$. Si $\alpha = 0$ ou 1 , alors nous avons $F_I(y) = X_I$ le résultat est évident. Si $\alpha \in]0, 1[$, alors nous avons $x^T \tilde{A}_{sup}^\alpha y = u$. Pour $x_1, x_2 \in F_I(y)$ et $\lambda \in (0, 1)$, nous avons aussi $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X_I$. C'est facile de vérifier que $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)^T \tilde{A}_{sup}^\alpha y = u$, qui implique que $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in F_I(y)$. La convexité de $F_I(y)$ est prouvée. De la même façon, nous pouvons prouver que $F_J(x)$ est non vide et convexe pour toute donnée $x \in X_I$.

Troisièmement, montrons que $F_I(y)$ et $F_J(x)$ sont fermées. Soit :

$F : X_I \times X_J \mapsto 2^{(X_I \times X_J)}$, la fonction donnée par :

$$F(z) = F_I(y) \times F_J(x), \forall z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X_I \times X_J.$$

On a donc

$$\bar{x} \in F_I(y), \bar{y} \in F_J(x) \iff (\bar{x}, \bar{y}) \in F(z).$$

On considère la suite

$$z_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

et $\bar{z}_n$ telle que

$$\bar{z}_n = (\bar{x}_n, \bar{y}_n) \in F(z_n)$$

Où :

$$\bar{x}_n \mapsto \bar{x}_\circ, \bar{y}_n \mapsto \bar{y}_\circ,$$

$$x_n \mapsto x_\circ, y_n \mapsto y_\circ,$$

Quand $n \mapsto \infty$ comme $\bar{x}_n \in F_I(y_n)$, pour $x \in X_I$, on a :

$$M\{x^T \tilde{A}y_n \geq u\} \leq M\{\bar{x}_n^T \tilde{A}y_n \geq u\}.$$

Par passage à la limite,

$$\lim_{n \mapsto \infty} M\{x^T \tilde{A}y_n \geq u\} \leq \lim_{n \mapsto \infty} M\{\bar{x}_n^T \tilde{A}y_n \geq u\}.$$

On aura

$$M\{x^T \tilde{A}y_\circ \geq u\} \leq M\{\bar{x}_\circ^T \tilde{A}y_\circ \geq u\}.$$

Ainsi $\bar{x}_\circ \in F_I(y_\circ)$, de la même façon, on obtient $\bar{y}_\circ \in F_J(x_\circ)$.

D'où, $F_I(y)$ et $F_J(x)$ sont convexes.

$(x_\circ, y_\circ) \in F(\bar{x}_\circ, \bar{y}_\circ)$ F est fermée.

On considère la fonction multivoque F . On a $F_I(y)$ et $F_J(x)$ sont convexes et fermées, nous avons F convexe et fermée. D'où, F est semi-continue, supérieurement. D'après le théorème du point fixe du Kakutani il existe au moins un point $(x^*, y^*) \in X_I \times X_J$, tel que $x^* \in X_I(y^*)$, $y^* \in X_J(x^*)$,

C'est à dire

$$M\{x^{*T} \tilde{A}y^* \geq u\} \leq M\{x^T \tilde{A}y^* \geq u\}, \forall x \in X_I$$

et

$$M\{x^{*T} \tilde{A}y^* \geq v\} \leq M\{x^{*T} \tilde{A}y \geq v\} \forall y \in X_J.$$

□

3.6 Calcul des équilibres

Pour trouver les stratégies incertaines de l'équilibre dans un jeu bi-matriciel incertain, nous présentons des conditions suffisantes et nécessaires.

Théorème 3.2. [4]

Soient ζ_{ij} et η_{ij} sont des variables incertaines régulières indépendantes qui sont dans les matrices du paiement $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ pour $i = \overline{1,m}$ et $j = \overline{1,n}$. Alors :

1. Un profil de stratégie (x^*, y^*) est une ENE si et seulement si le point (x^*, y^*, u^*, v^*) est une solution optimale du modèle de la programmation quadratique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{x,y,u,v} x^T (\tilde{A}_{\mathbf{E}} + \tilde{B}_{\mathbf{E}}) y - u - v \\ (\tilde{A}_{\mathbf{E}}) y \leq (u, u, \dots, u)^T \\ (\tilde{B}_{\mathbf{E}}^T) x \leq (v, v, \dots, v)^T \end{array} \right. \quad \forall x \in X_I, y \in X_J, u, v \in \mathbb{R} \quad (3.20)$$

Où $u^* = x^{*T} \tilde{A}_{\mathbf{E}} y^*$, et $v^* = x^{*T} \tilde{B}_{\mathbf{E}} y^*$;

2. Un profil de stratégie (x^*, y^*) est un (α, β) -ONE si et seulement si le point (x^*, y^*, u^*, v^*) est une solution optimale du modèle de la programmation quadratique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{x,y,u,v} x^T (\tilde{A}_{sup}^{\alpha} + \tilde{B}_{sup}^{\beta}) y - u - v \\ (\tilde{A}_{sup}^{\alpha}) y \leq (u, u, \dots, u)^T \\ (\tilde{B}_{sup}^{\beta T}) x \leq (v, v, \dots, v)^T \end{array} \right. \quad \forall x \in X_I, y \in X_J, u, v \in \mathbb{R} \quad (3.21)$$

Où $u^* = x^{*T} \tilde{A}_{sup}^{\alpha} y^*$, et $v^* = x^{*T} \tilde{B}_{sup}^{\beta} y^*$;

3. un profil de stratégie (x^*, y^*) est un (u, v) -MUNE si et seulement si le point (x^*, y^*, u^*, v^*) est une solution optimale du modèle de la programmation quadratique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{x,y,\alpha,\beta} M\{x^T \tilde{A} y \geq u\} + M\{x^T \tilde{B} y \geq v\} - \alpha - \beta \\ M\{x^T \tilde{A} y \geq u\} \geq \alpha \\ M\{x^T \tilde{B} y \geq v\} \geq \beta \\ \forall x \in X_I, y \in X_J, u, v \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Où $\alpha^* = M\{x^T \tilde{A}y \geq u\}$, $\beta^* = M\{x^T \tilde{B}y \geq v\}$.

Démonstration.

Montrons la partie 2. En premier, supposons que (x^*, y^*, u^*, v^*) est une solution optimale au modèle de la programmation quadratique (3.21), montrons que $(x^*, y^*) \in X_I \times X_J$ est un (α, β) -ONE du jeu bi-matriciel incertain.

Pour qu'une solution optimale soit une solution réalisable, nous avons :

$$\tilde{A}_{sup}^\alpha y^* \leq (u^*, u^*, \dots, u^*)^T \text{ et } \tilde{B}_{sup}^\beta x^* \leq (v^*, v^*, \dots, v^*)^T.$$

D'après la définition de la stratégie mixte on a :

$$x^T \tilde{A}_{sup}^\alpha y^* \leq u^* = x^{*T} \tilde{A}_{sup}^\alpha y^*, \forall x \in X_I$$

et

$$x^{*T} \tilde{B}_{sup}^\beta y \leq v^* = x^{*T} \tilde{B}_{sup}^\beta y^*, \forall y \in X_J$$

Cela signifie que (x^*, y^*) est un (α, β) -ONE et $(x^T \tilde{A}_{sup}^\alpha y^*, x^{*T} \tilde{B}_{sup}^\beta y^*)$ est la valeur optimale du jeu bi-matriciel incertain. La condition suffisante est démontrées.

Deuxièmement, supposons que (x^*, y^*) est un (α, β) -ONE du jeu bi-matriciel incertain, montrons que :

$$(x^*, y^*, x^{*T} \tilde{A}_{sup}^\alpha y^*, x^{*T} \tilde{B}_{sup}^\beta y^*)$$

est la solution optimale du modèle (3.21).

de la définition du (α, β) -ONE, on a :

$$x^T \tilde{A}_{sup}^\alpha y^* \leq u^* = x^{*T} \tilde{A}_{sup}^\alpha y^*, \forall x \in X_I$$

et

$$x^{*T} \tilde{B}_{sup}^\beta y \leq v^* = x^{*T} \tilde{B}_{sup}^\beta y^*, \forall y \in X_J$$

x et y étant quelconque de X_I et X_J respectivement.

On aura :

$$\tilde{A}_{sup}^\alpha y^* \leq (u^*, u^*, \dots, u^*)^T$$

et

$$\tilde{B}_{sup}^{\alpha} x^* \leq (v^*, v^*, \dots, v^*)^T$$

Ce qui signifie que $(x^*, y^*, x^{*T} \tilde{A}_{sup}^{\alpha} y^*, x^{*T} \tilde{B}_{sup}^{\beta} y^*)$ est une solution réalisable du modèle (3.20).

C'est aussi évident que $x^T (\tilde{A}_{sup}^{\alpha} + \tilde{B}_{sup}^{\beta}) y - u - v \leq 0$. Alors d'après :

$$x^{*T} (\tilde{A}_{sup}^{\alpha} + \tilde{B}_{sup}^{\beta}) y^* - u^* - v^* = 0$$

Donc $(x^*, y^*, x^{*T} \tilde{A}_{sup}^{\alpha} y^*, x^{*T} \tilde{B}_{sup}^{\beta} y^*)$ est une solution optimale au modèle (3.21) qui complète la preuve de la condition nécessaire. □

Pour illustrer ces concepts, nous allons reprendre et détailler les calculs d'un exemple donné par gao J. [6].

Exemple 5. [6]

Considérons une situation où deux entreprises en concurrence projettent de commercialiser un nouveau produit. Le but de chaque entreprise est d'attirer autant de clients que possible en choisissant un élément parmi son ensemble de stratégies commercialisation comportant la publicité à la TÉLÉ, les échantillons gratuits, les offres spéciales, le rabais de l'argent, etc...

Les différentes stratégies de la commercialisation des deux entreprises peuvent mener à la demandes totales du produit.

Nous supposons que les entreprises sont dans la situation du jeu à somme non nulle.

Une stratégie mixte détermine comment diviser son budget parmi ses plusieurs alternatives de commercialisation.

Pour simplifier, on suppose que chaque entreprises a seulement deux alternatives de commercialisation. Les stratégies pures du joueur I et J sont $M = \{1,2\}$ et $N = \{1,2\}$, respectivement. Dû au manque de statistiques (du passé) sur leurs demandes des nouveaux produits, les deux entreprises doivent compter sur les expériences, les jugements subjectifs et les intuitions d'experts. Alors les demandes des produits peuvent être caractériser par des variables incertaines.

Supposons que ζ_{ij} et η_{ij} sont des variables incertaines, comme suit :

$$\begin{aligned} \zeta_{11} &= Z(90,100,110), \quad \zeta_{12} = Z(110,160,170), \\ \zeta_{21} &= Z(130,140,190), \quad \zeta_{22} = Z(60,110,120), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{11} &= Z(80,105,110), \quad \eta_{12} = Z(110,150,190), \\ \eta_{21} &= Z(120,140,200), \quad \eta_{22} = Z(80,90,140),\end{aligned}$$

Où ζ_{ij} et η_{ij} sont exprimés dans l'unité des milliers pour $i = \overline{1,2}$ et $j = \overline{1,2}$.

Premièrement, on suppose que les deux entreprises adoptent le critère de la valeur de l'espérance, on a

$$\Phi_{ij}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq a; \\ (x-a)/2(b-a), & \text{si } a \leq x \leq b; \\ (x+c-2b)/2(c-b), & \text{si } b \leq x \leq c; \\ 1, & \text{si } x \geq c. \end{cases}$$

Alors pour $\zeta_{11} = Z(a,b,c) = Z(90,100,110)$ on a

$$\Phi_{11}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 90; \\ (x-90)/20, & \text{si } 90 \leq x \leq 100; \\ (x-90)/20, & \text{si } 100 \leq x \leq 110; \\ 1, & \text{si } x \geq 110. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}E[\zeta] &= \int_0^{+\infty} (1-\phi(x))dx - \int_{-\infty}^0 \phi(x)dx. \\ E[\zeta_{11}] &= -\int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{90} 0dx + \int_{90}^{110} (1-(x-90)/20)dx + \int_{110}^{+\infty} 0dx. \\ E[\zeta_{11}] &= 90-302.5+202.5+605-495=100.\end{aligned}$$

$$\zeta_{12} = Z(110,160,170).$$

$$\Phi_{12}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 110; \\ (x-110)/100, & \text{si } 110 \leq x \leq 160; \\ (x-150)/20, & \text{si } 160 \leq x \leq 170; \\ 1, & \text{si } x \geq 170. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}E[\zeta_{12}] &= -\int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{110} 0dx + \int_{110}^{160} (1-(x-110)/100)dx + \int_{160}^{170} (1-(x-150)/20)dx + \int_{170}^{+\infty} 0dx. \\ E[\zeta_{12}] &= 110-128+60.5+336-231-722.5+640+1445-1360=150\end{aligned}$$

$$\zeta_{21} = Z(130,140,190).$$

$$\Phi_{21}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 130; \\ (x-130)/20, & \text{si } 130 \leq x \leq 140; \\ (x-90)/100, & \text{si } 140 \leq x \leq 190; \\ 1, & \text{si } x \geq 190. \end{cases}$$

$$E[\zeta_{21}] = -\int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{130} dx + \int_{130}^{140} (1-(x-130)/20)dx + \int_{140}^{190} (1-(x-90)/100)dx + \int_{190}^{+\infty} 0dx.$$

$$E[\zeta_{21}] = 130 - 490 + 422.5 + 1050 - 975 - 180.5 + 98 + 361 - 266 = 150.$$

$$\zeta_{22} = Z(60, 110, 120).$$

$$\Phi_{22}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 60; \\ (x-60)/100, & \text{si } 60 \leq x \leq 110; \\ (x-100)/20, & \text{si } 110 \leq x \leq 120; \\ 1, & \text{si } x \geq 120. \end{cases}$$

$$E[\zeta_{22}] = -\int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{60} dx + \int_{60}^{110} (1-(x-60)/100)dx + \int_{110}^{120} (1-(x-100)/20)dx + \int_{120}^{+\infty} 0dx.$$

$$E[\zeta_{22}] = 60 - 60.5 + 18 + 176 - 96 - 360 + 302.5 + 720 - 660 = 100.$$

On obtient

$$\tilde{A}_E = (E[\zeta_{ij}]) = \begin{pmatrix} 100 & 150 \\ 150 & 100 \end{pmatrix}$$

Pour calculer $\tilde{B}_E$, on refait les mêmes calculs que précédemment sur les variables η_{ij} et on trouve que :

$$\tilde{A}_E = \tilde{B}_E = \begin{pmatrix} 100 & 150 \\ 150 & 100 \end{pmatrix}$$

Le modèle (3.20) est donné par :

$$\begin{cases} \max_{x_1, x_2, y_1, y_2, u, v} 200x_1y_1 + 300x_2y_1 + 300x_1y_2 + 200x_2y_2 - u - v, & ; \\ 100y_1 + 150y_2 \leq u \\ 150y_1 + 100y_2 \leq u & \forall x_1, x_2 \in X_I, y_1, y_2 \in X_J, u, v \in \mathbb{R} \\ 100x_1 + 150x_2 \leq v \\ 150x_1 + 100x_2 \leq v \end{cases}.$$

On le programmant sur **MATLAB** comme suit :

function Jeux

clear all, clc;

format long

```

A=[ 0 0 100 150 -1 0
0 150 100 -1 0
100 150 0 0 0 -1
150 100 0 0 0 -1];
b=[0;0;0;0];

```

```

Aeq=[1 1 0 0 0 0
0 0 1 1 0 0];
beq=[1; 1];

```

```

lb=[0;0;0;0;-Inf;-Inf]; ub=[1;1;1;1;Inf;Inf];

```

```

z0=[0;0;0;0;0;0];

```

```

[x,fval,exitflag] = fmincon(@fonct,z0,A,b,Aeq,beq,lb,ub);

```

```

x

```

```

fval

```

```

exitflag

```

```

function y=fonct(z) y = - 200*z(1)*z(3) - 300*z(2)*z(3) - 300*z(1)*z(4) - 200*z(2)*z(4)
+ z(5) + z(6);

```

on obtient une solution optimale (0.5,0.5,0.5,0.5,125,125). Le vecteur (0.5,0.5,0.5,0.5) est une ENE, et la stratégie optimale de chaque joueur est (0.5,0.5) qui donne un paiement espéré de 125.

Deuxièmement, on suppose que les deux entreprises veulent attirer autant de clients possible avec les niveaux de confiance 0.85 et 0.70 respectivement.

On a $\tilde{A}_{sup}^{\alpha} = (\phi_{ij}^{-1}(1 - \alpha))_{m \times n}$, $\alpha = 0.85$ et $\Rightarrow 1 - \alpha = 0.15$

$$\Phi_{11}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 90; \\ (x - 90)/20, & \text{si } 90 \leq x \leq 100; \\ (x - 90)/20, & \text{si } 100 \leq x \leq 110; \\ 1, & \text{si } x \geq 110. \end{cases}$$

Puisque $\Phi_{11}(x)$ est bijective sur l'intervalle $[90,110]$, donc c'est là où on lui calcule son inverse

$$\Phi_{11}^{-1}(y) = 20y + 90$$

$$\Phi_{11}^{-1}(0.15) = 93 \in [90,110].$$

$$\Phi_{12}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 110; \\ (x - 110)/100, & \text{si } 110 \leq x \leq 160; \\ (x - 150)/20, & \text{si } 160 \leq x \leq 170; \\ 1, & \text{si } x \geq 170. \end{cases}$$

$\Phi_{12}(x)$ est bijective sur les deux intervalles $[110,170]$.

$$\text{Si } 110 \leq x \leq 160, \Phi_{12}^{-1}(y) = 100y + 110 \Rightarrow \Phi_{12}^{-1}(0.15) = 125 \in [110;160]$$

Si $160 \leq x \leq 170, \Phi_{12}^{-1}(y) = 20y + 150 \Rightarrow \Phi_{12}^{-1}(0.15) = 153$ n'appartient pas à l'intervalle $[160,170]$ donc on le prend pas, on garde 125.

En continuant les calculs de la même manière, on trouve que

$$\tilde{A}_{sup}^{0.85} = \begin{pmatrix} 93 & 125 \\ 133 & 75 \end{pmatrix}$$

Et de la même façon on trouve

$$\tilde{B}_{sup}^{0.70} = \begin{pmatrix} 95 & 134 \\ 132 & 86 \end{pmatrix}$$

Le modèle de la programmation quadratique (3.21) devient :

$$\begin{cases} \max_{x_1, x_2, y_1, y_2, u, v} 188x_1y_1 + 265x_2y_1 + 259x_1y_2 + 161x_2y_2 - u - v, & ; \\ 93y_1 + 133y_2 \leq u \\ 125y_1 + 75y_2 \leq u \\ 95x_1 + 132x_2 \leq v \\ 134x_1 + 86x_2 \leq v \end{cases} \quad \forall x_1, x_2 \in X_I, y_1, y_2 \in X_J, u, v \in \mathbb{R}$$

On utilise le programme suivant sur **MATLAB**

function Jeux

clear all, clc;

format long

A=[0 0 100 150 -1 0


```
0 125 75 -1 0
95 132 0 0 0 -1
134 86 0 0 0 -1];
b=[0;0;0;0];
```

```
Aeq=[1 1 0 0 0 0
0 0 1 1 0 0];
beq=[1; 1];
```

```
lb=[0;0;0;0;-Inf;-Inf]; ub=[1;1;1;1;Inf;Inf];
```

```
z0=[0;0;0;0;0;0];
```

```
[x,fval,exitflag] = fmincon(@fonct,z0,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
```

x

fval

exitflag

```
function y=fonct(z) y = - 188*z(1)*z(3) - 265*z(2)*z(3) - 259*z(1)*z(4) - 161*z(2)*z(4)
+ z(5) + z(6);
```

On obtient une solution optimale (0.5412,0.4588,0.5556,0.4444,107.2,112.0) avec zéro optimum. Donc, la stratégie optimale pour l'entreprise I est $x^* = (0.5412, 0.4588)$ qui donne un paiement de niveau 107.2 avec une mesure incertaine de 0.85. La stratégie optimale de l'entreprise J est $x^* = (0.5556, 0.4444)$ qui donne un paiement de niveau 112.0 avec une mesure incertaine de 0.70. En plus, (0.5412,0.4588,0.5556,0.4444) est un (0.85,0.7)-ONE du jeu bi-matriciel incertain.

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, notre intérêt a porté sur l'étude d'un jeu bi-matriciel avec paiements incertains qui est un problème fondamental de la théorie des jeux incertaine.

Après avoir rappelé les notions générales de la théorie des jeux, nous avons donné le procédé d'élimination des stratégies strictement dominées avec quelques concepts de solution. Nous avons aussi repris la définition de l'équilibre de Nash et le théorème de son existence en stratégies pures et mixtes.

Dans le chapitre trois, on a étudié le jeu bi-matriciel incertain qui est un concept qui correspond aux différentes situations de décision. En étudiant ce type de jeu on a repris trois stratégies incertaines de l'équilibre. On a donné en suite le théorème qui assure l'existence de ces concepts de solution. On a présenté également des conditions suffisantes et nécessaires qui fournit une méthode de trouver les équilibres. Et en dernier, un exemple a été présenté pour illustrer l'utilisation de la théorie des jeux incertaine.

Comme perspectives futures on propose de :

- Comparer ces concepts de solution.*
- Trouver un modèle réel pour l'application de ces résultats.*

Annexe

1) Espace Topologique

Définition

Un espace topologique est un couple (E, T) , où E un ensemble et T est une topologie sur E , à savoir un ensemble de parties de E que l'on définit comme les ouverts de (E, T) . Vérifiant les propriétés suivantes :

- 1) L'ensemble vide et E appartiennent à T ;
- 2) Toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert, c'est à dire si $(O_i)_i \in I$ est une famille d'éléments de T indexée par un ensemble I quelconque (pas nécessairement fini ni même dénombrable) alors :

$$\bigcup_{i \in I} O_i \in T$$

- 3) Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert, c'est à dire si $O_1, O_2, \dots, O_n$ sont des éléments de T (avec $n > 2$), alors $O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_n \in T$.

Et le fermé d'une topologie est défini comme le complémentaire d'un ouvert.

Définition d'un Compact :

Un espace topologique X est dit compact si chacune de ses couvertures ouvertes a un fini couverture ouverte, sinon il est appelé non-compact. Explicitement, cela signifie que pour chaque collection arbitraire $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ des parties ouvertes de X de telle sorte que

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

Il existe un sous ensemble fini J de A de telle sorte que

$$X = \bigcup_{i \in J} U_i$$

2) Espace mesurable

Définition: On appelle un espace mesurable un couple (X, Σ) où Σ est une tribu sur X , les éléments de Σ sont dits ensembles mesurables.

Définition d'une fonction mesurable :

(Y, τ) est un espace topologique (τ) étant l'ensemble des ouverts de Y), une fonction f définie sur X à valeurs dans Y sera dite fonction mesurable si pour $V \in \tau$, $f^{-1}(V) \in \Sigma$. De plus, si E est un ensemble mesurable de (X, Σ) une fonction f de E dans Y sera dite mesurable sur E si pour tout ouvert V de Y , $f^{-1}(V) \cap E$ est mesurable.

3) Espace de probabilité

définition d'un espace de probabilité :

On appelle un espace de probabilité un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable et P une probabilité sur $\mathcal{A}$ et les éléments de $\mathcal{A}$ sont des événements.

définition d'une variable aléatoire :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un variable aléatoire et (E, Σ) un espace mesonction mesurable. On appelle variable aléatoire se Ω vers E toute fonction mesurable X de Ω vers E .

4) σ -algèbre :

σ -algèbre ou bien une tribu borélienne c'est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$, $]a, b[$.

5) Borélien de $\mathbb{R}$:

C'est la σ -algèbre engendrée par les ouverts $]a, b[$.

Bibliographie

- [1] Bector C.R., and Chandra S., Fuzzy Mathematical Programming and Fuzzy Matrix Games, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [2] Binmore K., Jeux et Théorie des jeux, DeBoek Université de Paris (1999).
- [3] Fudenberg D. And Tirole J. Game Theory. The MIT Press Cambridge, Massachusetts, London England, First Printed (1995) .
- [4] Gao J. Uncertainty bimatrix game with applications, Fuzzy optimization and decision making V12, 65-78 (2013).
- [5] Gao J. Credibilistic game with fuzzy information, *Journal of uncertain system*, Vol.1, pp.779-799, 2010.
- [6] Gao J., Uncertain bi-matrix Game with applications, Fuzzy Optimization and Decision Making. v12(1), 65-78, (2013).
- [7] Kakutani, Shisuo. "A generalization of Brower's fixed point theorem". *Duke Mathematical Journal* 8(3).1941.
- [8] Liu B., Uncertainty Theory, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin. 2007.
- [9] Liu B., Uncertainty Theory: A Branch of Mathematics for Modeling Human Uncertainty, Springer- Verlag, Berlin, 2010.
- [10] Liu B., Uncertainty Theory: A Branch of Mathematic for Modeling Human Uncertainty, Springer-Verlag, Berlin. 2011.
- [11] Liu D, Some research problems in uncertainty theory, *Journal of Uncertain Systems* Vol 3. No 1, 3-10 2009.
- [12] Moulin J. H. *Théorème des Jeux pour l'Economie et la politique*. Hermann, Paris. 1981.
- [13] Nash J., Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36: 48-49. 1950.
- [14] Owen G. Game Theory. W. B. Sanders Company, Philadelphia. 1968.

-
- [15] Marcellin S., Evolution problems associated with primal lower nice function. Journal of convex Analysis 1312(2006) 385-421 (avec Thibault).
 - [16] Van Damme E. *Stability and perfection of equilibria*, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York. 1987.
 - [17] Neumann J. and Morgenstern O., Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, 1944.
 - [18] Peng K. and Iwamura K., A Sufficient and necessary Condition of Uncertainty Distribution, Journal of Interdisciplinary Mathematics, to be published.
 - [19] Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control, Vol.8, pp.338-353, 1965.