

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI OUZOU  
FACULTE DU GENIE DE LA CONSTRUCTION  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



## MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du diplôme de Master  
En Génie Mécanique  
Option : Construction Mécanique

### **THEME**

---

*CORRELATION ENTRE ELEMENTS FINIS  
ET L'ANALYSE ISOGEOMETRIQUE*

---

**Proposé et Dirigé par :**

Mr: F. ASMA

**réalisé par :**

Mr: KACEL Sofiane

<< Année 2012 >>

# *Remerciements*

*Je remercie mon promoteur Mr F.ASMA  
pour avoir bien voulu m'encadrer et  
pour ses précieux conseils et  
orientations.*

*Je remercie également tous mes  
enseignants, les responsables et  
personnel du département de Génie  
mécanique.*

*Je remercie ma famille surtout mes  
sœurs qui m'ont soutenu moralement  
tout au long de mes études.*

*J'adresse mes plus vifs remerciements  
à tous ceux qui ont contribué de près  
ou de loin à la réalisation de ce  
travail.*

## DEDICACES

*Je dédie ce travail*

*A mes chers parents*

*A mes chères sœurs et mon cher frère*

*A la mémoire de mes grands parents*

*A toute la famille*

*A tous mes amis et camarades*

*KACEL Sofiane*

TABLE DES MATIERES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

NAUMENCLATURE

RESUME

INTRODUCTION GENERALE .....1

**CHAPITRE (I) : MODELISATION EN CAO**

<b>I.1. MODELE DE BEZIER:</b>	<b>6</b>
I.1.1. Introduction:	6
I.1.2. Courbes de Bézier:	6
I.1.2.1. L'algorithme de De Casteljau:	7
I.1.2.2. Forme de Bernstein :	10
I.1.2.2.1. Propriétés des polynômes de Bernstein:	11
I.1.3. Courbes de Bézier non rationnelles:	12
I.1.3.1. Influence des sommets du polygone caractéristique sur la forme d'une courbe de Bézier :	13
I.1.3.2. Propriétés des courbes non rationnelles:	14
I.1.4. Les courbes de Bézier rationnelles :	15
I.1.4.1. Cordonnées homogènes :	15
I.1.4.2. Courbe de Bézier rationnelle, équation :	17
I.1.4.3. Propriétés des courbes de Bézier rationnelles :	17
I.1.4.4. Influence des poids ( $w_i$ ) sur la courbe de Bézier rationnelle :	18
I.1.5. Surfaces de Bézier :	20
I.1.5.1. Surface de Bézier non rationnelle :	20
I.1.6. Surface de Bézier rationnelle :	21
<b>I.2. MODELE B-SPLINE:</b>	<b>24</b>
I.2.1. Motivation:	24
I.2.2. Fonctions B-Splines :	24
I.2.2.1. Vecteur nodal :	24
I.2.2.2. Propriétés des fonctions de bases B-Splines :	25
I.2.2.3. Graphes de quelques fonctions B-Splines :	25
I.2.2.3.1. B-Splines uniformes :	25
I.2.2.3.2. B-Splines non uniformes :	26
I.2.2.4. Dérivées des fonctions de bases b-Spline :	27
I.2.3. Courbes B-Splines non rationnelles uniformes:	28
I.2.4. Courbes B-Splines non rationnelles non uniformes:	29
I.2.4.1. Contrôle local :	31

I.2.4.2. Autres propriétés :	31
I.2.4.3. Avantages et inconvénients :	31
I.2.5. Courbes B-Splines rationnelles non uniformes (NURBS):	31
I.2.5.1. Effet des poids sur les courbes NURBS :	33
I.2.5.2. Propriétés géométriques des courbes NURBS :	34
I.2.6. Surfaces B-Spline non rationnelles:	35
I.2.6.1. Propriétés des surfaces B-Spline:	36
I.2.7. Surfaces B-Spline rationnelles non uniforme NURBS :	36
I.2.8. Construction des surfaces particulières par les NURBS :	38
I.2.8.1. Les surfaces de révolution :	38
I.2.8.2. Les surfaces réglées :	40
I.2.8.3. Les surfaces d'extrusion :	41
I.2.8.3.a. Construction de la génératrice	42
I.2.8.3.b. L'extrusion :	42
I.3. Conclusion	43

## CHAPITRE (II) METHODE DES ELEMENTS FINIS

II.1. Introduction	45
II.2. Démarche éléments finis	45
II.2.1. Discrétisation du milieu	46
II.2.1.1. Discrétisation géométrique	46
II.2.2. Approximation nodale	46
II.2.2.1. Définition de l'approximation nodale	47
II.2.2.2. Construction de l'approximation nodale	47
II.2.2.3. Les éléments de type Lagrange :	49
i) Eléments à une dimension :	49
i.1) Approximation linéaire :	50
i.2) Approximation quadratique	50
i.3) Approximation cubique:	50
ii) Elément à deux dimensions :	51
ii.1) Elément à deux dimensions triangulaires :	51
ii.2) Elément à deux dimensions rectangulaire :	51
II.2.3. Calcul des matrices élémentaires	54
II.2.3.1. Formulation en mécanique des structures	54
II.2.3.2. Techniques de calcul au niveau élémentaire	55
II.2.3.3. Matrice jacobienne - transformation des opérateurs de dérivation	58
II.2.3.4. Calcul numérique d'une intégrale	58
II.2.3.5. Organisation des calculs numériques	59
II.2.4. Assemblage et conditions aux limites	60

## CHAPITRE (III). TABLE DES MATIERES

III.1. Introduction	62
III.2. Principe des éléments finis isogéométrique	63

III.2.1. Représentation de la géométrie .....	63
III.2.2. Subdivision de domaine en éléments .....	64
III.2.2.1. Cas unidimensionnel .....	64
III.2.2.2. Cas bidimensionnel .....	66
III.2.3. Calcul des matrices élémentaires .....	67
III.2.3.1. Matrice de raideur élémentaire .....	67
III.2.3.2. Matrice de masse élémentaire .....	68
III.2.4. Assemblage et conditions aux limites .....	68

## CHAPITRE(IV). FONCTIONS DE CORRELATION EN DYNAMIQUE DES STRUCTURES

IV.1. Introduction .....	70
IV.2. Critère MAC .....	70
IV.3. Critère MSF .....	71
IV.4. Critère COMAC .....	71
IV.5. Méthodes d'orthogonalité .....	71
IV.6. Méthodes énergétique- Equilibre des forces .....	72
IV.7. Corrélacion des réceptances .....	73
IV.8. Conclusion .....	74

## CHAPITRE (V) : APPLIQUATION

V.1. Introduction .....	76
V.2. Définition du model .....	76
V.3. Calcul du modèle par les deux méthodes .....	77
V.3.1. Méthode des éléments finis classiques .....	77
V.3.1.1. Discrétisation de la géométrie .....	77
V.3.1.2. Calcul au niveau élémentaire .....	78
V.3.1.3. Assemblage et résolution .....	79
V.3.2. Méthode des éléments finis isogéométrique .....	80
V.3.2.1. Représentation de la géométrie et discrétisation.....	80
V.3.2.2. Calcul au niveau élémentaire .....	81
V.4. Comparaison des deux méthodes .....	83
V.4.1. Application du critère MAC .....	83
V.5. Conclusion .....	85

## CONCLUSION GENERALE

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

## ANNEXES

LISTE DES FIGURES

**Figure (I.1) :** Le calcul scientifique : Une nouvelle discipline ..... 1

**Figure (I.2) :** Le calcul scientifique : méthodologie..... 2

**Figure (I.3) :** Méthodologie de résolution d'un problème numérique ..... 3

**Figure (I.1) :** Schéma de la construction de De Casteljaou avec 4 points de contrôle .... 7

**Figure (I.2) :** Courbe de Bézier avec 4 point de contrôle tracée par l'algorithme  
de DeCasteljau ..... 8

**Figure (I.3) :** Courbe de Bézier à 3 points de contrôle ..... 8

**Figure (I.4) :** Schéma pyramidal de De Casteljaou avec 4 points de contrôle ..... 8

**Figure (I.5) :** Courbe de Bézier à 4 points de contrôle ..... 10

**Figure (I.6) :** Polynômes de Bernstein de degré 4. .... 11

**Figure (I.7) :** Courbe de Bézier non rationnelle et son polygone caractéristique. .... 13

**Figure (I.8) :** Courbe de Bézier non rationnelle avec 4 points de contrôle ..... 13

**Figure (I.9) :** Influence des sommets du polygone caractéristique sur la forme  
d'une courbe de Bézier ..... 14

**Figure (I.10) :** Illustration de la transformation homogène entre  $R^3$  et  $R^2$  ..... 16

**Figure (I.11) :** Illustration d'une courbe Bézier obtenue par une projection conique.. 16

**Figure (I.12) :** Courbe obtenue sur le plan z en 2D..... 16

**Figure (I.13) :** Courbe Bézier rationnelle avec  $w=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$  ..... 17

**Figure (I.14) :** Influence des poids ( $w_i$ ) sur la courbe de Bézier rationnelle. .... 19

**Figure (I.15) :** Surface de Bézier non rationnelle et son réseau caractéristique ..... 20

**Figure (I.16) :** Surface de Bézier rationnelle de vecteurs poids  $W_1=[1 \ 1 \ 2 \ 5 \ 1 \ 1]$  ;  
et  $W_2 = [1 \ 1 \ 10 \ 2 \ 1 \ 1]$  ..... 21

**Figure (I.17) :** Effet des poids  $W_{i,j}$  sur la surface de Bézier rationnelle ..... 22

**Figure (I.2.1) :** Fonctions B-Splines uniformes de degré 0 à 3 ..... 26

**Figure (I.2.2) :** B-Splines non uniformes de degré 0 et de vecteur nodal  
 $u=[0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1 \ 1 \ 1]$  ..... 26

**Figure (I.2.3) :** B-Splines non uniformes de degré 1 et de vecteur nodal  
 $u=[0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1 \ 1 \ 1]$  ..... 26

**Figure (I.2.4) :** B-Splines non uniformes de degré 2 et de vecteur nodal  
 $u=[0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.8 \ 1 \ 1 \ 1]$ ; ..... 27

**Figure (I.2.5) :** B-Splines non uniformes de degré 2 et de vecteur nodal  
 $u=[0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.7 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ ; ..... 27

**Figure (I.2.6) :** Allure de la première et seconde dérivée des fonctions de bases  
B- Spline d'ordre  $p=3$  définies par un vecteur nodal  
 $\Xi=\{0, 0, 0, 0, 1/3, 1/2, 2/3, 1, 1, 1, 1\}$ . .... 28

**Figure (I.2.7) :** Courbe B-Spline non rationnelle uniforme..... 29

<b>Figure (I.2.8):</b> Courbe B-Spline et sa fonction de base de vecteur nœud $\xi = [0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ .....	29
<b>Figure (I.2.9):</b> Courbe B-Spline et sa fonction de base de vecteur nœud $\xi = [0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ .....	29
<b>Figure (I.2.10):</b> Courbe B-Spline et sa fonction de base de vecteur nœud $\xi = [0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.4 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ .....	30
<b>Figure (I.2.11):</b> Courbes NURBS avec $\xi = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$ ; $w = [1 \ w_2 \ 1]$ ; $P = \{(0,0), (1, \sqrt{3}), (2,0)\}$ .....	32
<b>Figure(I.2.12):</b> Modélisation d'un cercle parfait par le modèle NURBS .....	33
<b>Figure(I.2.13) :</b> Effet des poids sur les courbes NURBS .....	34
<b>Figure (I.2.14):</b> Surface B-Spline non rationnelle et son réseau caractéristique et de vecteurs nodaux : $\Xi = [0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ ; et $H [0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ ; .....	35
<b>Figure (I.2.15):</b> Surface B-Spline rationnelle non uniforme et son réseau caractéristique et de vecteurs nodaux: $\Xi = [0 \ 0 \ 0 \ 0.2 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1]$ , $H = [0 \ 0 \ 0 \ 0.2 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1]$ .....	37
<b>Figure(I.2.16) :</b> Schémas de construction d'une surface de révolution. ....	38
<b>Figure (I.2.17) :</b> Surface de révolution autour d'un axe parallèle à $\vec{Oz}$ , et son réseaux caractéristique. ....	39
<b>Figure (I.2.18) :</b> Schémas de construction d'une surface réglée. ....	40
<b>Figure (I.2.19) :</b> Surface réglées NURBS.....	40
<b>Figure (I.2.20):</b> Réseau caractéristique de la surface réglée de la figure (I.2.17) .....	41
<b>Figure (I.2.21) :</b> Les deux courbe utilisé pour la surface réglée (figure(I.2.19)) .....	41
<b>Figure (I.2.22):</b> Génératrice de la surface d'extrusion (Courbe NURBS) .....	42
<b>Figure (I.2.23):</b> Surface d'extrusion NURBS et son Réseau caractéristique .....	43
<b>Figure(II.1) :</b> Erreur de discrétisation géométrique. ....	46
<b>Figure (II.2):</b> Approximation nodale linéaire à une dimension.....	47
<b>Figure(II.3) :</b> Élément réel et ses coordonnées cartésiennes.....	48
<b>Figure (II.4):</b> Élément de Lagrange linéaire .....	50
<b>Figure (II.5):</b> Élément de Lagrange quadratique .....	50
<b>Figure(II.6):</b> Élément de Lagrange cubique .....	50
<b>Figure(II.7) :</b> Fonctions d'interpolation linéaires du triangle.....	51
<b>Figure (II.8) :</b> Fonctions d'interpolation quadratiques du triangle. ....	51
<b>Figure(II.9) :</b> Fonction d'interpolation $N_1$ du quadrangle. ....	52
<b>Figure (II.10):</b> Élément de Lagrange biquadratique de type Q9 .....	52
<b>Figure (II.11):</b> Élément de Lagrange biquadratique de type Q8 .....	53
<b>Figure(II.12) :</b> Transformation géométrique linéaire d'un carré.....	56
<b>Figure(II.13) :</b> Transformations géométriques d'éléments à une dimension .....	56
<b>Figure (II.14):</b> Transformations géométriques d'éléments à deux dimensions .....	57
<b>Figure(II.15) :</b> Éléments volumiques à transformation linéaire .....	57

<b>Figure(II.16) :</b> Organisation des calculs .....	59
<b>Figure (III.1): (a)</b> Points de contrôles, <b>(b)</b> Géométrie représentant une plaque mince.....	64
<b>Figure(III.2) :</b> Poutre unidimensionnelle subdivisée en sous domaines et la fonction de base associée .....	64
<b>Figure (III.3):</b> Poutre unidimensionnelle subdivisée en sous domaines et la fonction de base associée .....	65
<b>Figure (III.4):</b> Poutre unidimensionnelle subdivisée en sous domaines et la fonction de base associée .....	65
<b>Figure (III.5):</b> Poutre unidimensionnelle subdivisée en sous domaines et la fonction de base associée .....	65
<b>Figure(III.6) :</b> Maillages en deux dimensions et les fonctions de base associées.....	66
<b>Figure (III.7) :</b> Evolution du raffinement d'un maillage en deux dimensions par insertion des nœuds (h-raffinement) .....	66
<b>Figure (III.8):</b> Transformation d'un maillage dans l'espace paramétrique vers l'espace physique.....	68
<b>Figure (V.1):</b> Le modèle à étudier .....	76
<b>Figure (V.2) :</b> Plaque discrétisée en 9 éléments par Q4 .....	77
<b>Figure (V.3):</b> Plaque discrétisée en 9 éléments par Q9 .....	77
<b>Figure (V.4):</b> Les valeurs propres aux nœuds du modèle analysé pour le cas Q4.....	79
<b>Figure (V.5):</b> Les valeurs propres aux nœuds du modèle analysé pour le cas Q9.....	79
<b>Figure (V.6) :</b> (a) Géométrie du modèle obtenue par les fonctions NURBS d'ordre1 et (b) L'espace paramétrique associé.....	80
<b>Figure (V.7):</b> (a) Géométrie du modèle obtenue par les fonctions NURBS d'ordre2 et (b) L'espace paramétrique associé.....	82
<b>Figure (V.8) :</b> Les valeurs propres aux nœuds du modèle analysé par des fonctions NURBS d'ordre 1 .....	82
<b>Figure (V.9):</b> Les valeurs propres aux nœuds du modèle analysé par des fonctions de base NURBS d'ordre 2.....	83
<b>Figure (V.10) :</b> Matrice MAC obtenue entre les modes propres donnés par Lagrange d'ordre 1 est NURBS d'ordre 1 .....	84
<b>Figure (V.11) :</b> Matrice MAC obtenue entre les modes propres donnés par Lagrange d'ordre 2 est NURBS d'ordre 2.....	85

## LISTE DES TABLEAUX

<b>Tableau (I.2.1):</b> Coordonnées des points de contrôle et leurs poids respectifs .....	42
<b>Tableau (II.1) :</b> Dérivées des fonctions de forme Q4.....	52
<b>Tableau (II.2) :</b> Dérivées des fonctions de forme Q9.....	53
<b>Tableau (II.3) :</b> Dérivées des fonctions de forme Q8.....	54
<b>Tableau (III.1):</b> Différences entre éléments finis isogométrique et les éléments finis classiques .....	54

NOMENCLATURE

$\mathbf{B}_{i,n}$  : Polynômes de Bernstein

$\mathbf{P}_i$  : Points de contrôle.

$G_i^n$  : Polynôme de Bernstein rationnel.

$\mathbf{W}$  : vecteur poids.

$\Xi, H$  : vecteurs nodaux.

$N_{i,p}, \mathbf{M}_{j,q}$  : Fonctions de base B-spline.

$p$  : Ordre polynômial.

$\mathbf{R}_{i,p}, \mathbf{T}_{j,q}$  : Les fonctions de base NURBS.

$D$  : Domaine continu.

$D_e$  : Sous domaine ou domaine élémentaire.

$\mathbf{u}^*$  : Valeur de la fonction approchée en tout point  $M$  de l'élément.

$[\mathbf{N}]$  : Matrice des fonctions d'interpolation de l'élément.

$\{\mathbf{Un}\}$  : Variables nodales relatives aux nœuds d'interpolation de l'élément.

$\langle \Phi_{(M)} \rangle$  : Base d'une fonction polynômiale.

$\mathbf{T3}$  : Élément triangulaire à trois nœuds.

$\mathbf{T6}$  : Élément triangulaire à six nœuds.

$\mathbf{Q4}$  : Élément rectangulaire à quatre nœuds.

$\mathbf{Q8}$  : Élément rectangulaire à huit nœuds.

$\mathbf{Q9}$  : Élément rectangulaire à neuf nœuds.

$[\mathbf{B}]$  : Matrice d'opérateurs différentiels appliqués aux fonctions d'interpolation

$\mathbf{M}_e$  : Matrice de masse élémentaire.

$\rho$  : Densité volumique de la structure.

$\mathbf{K}_e$  : Matrice de rigidité élémentaire.

$\mathbf{D}$  : la matrice caractéristique au comportement élastique du matériau.

$\mathbf{F}_{de}$  : Vecteur force généralisée

$[\mathbf{J}]$  : Matrice jacobienne de la transformation.

$\mathbf{M}$  : Matrice de masse globale.

$\mathbf{K}$  : Matrice de raideur globale.

$\mathbf{F}_i$  : Force interne

**F<sub>d</sub>** : force dynamique ou externe.

**Abréviations :**

**IAO** : Ingénierie Assistée par Ordinateur

**CSG** : Construction Solid Geometry

**DAO** : Dessin Assistée par Ordinateur.

**CAO** : Conception Assisté par Ordinateur.

**NURBS** : Non Uniform Rational B-Spline.

**AEF** : Analyse par Elément Finis.

**MEF** : Méthode des Eléments Finis.

**AI** : Analyse Isogéométrique.

**EDP** : Equations aux Dérivés Partielles

**PTV** : Principe des Travaux Virtuels.

**MAC**: Modal Assurance Criterion

**MSF**: Modal Scale Factor

**COMAC**: Co-Ordinate Modal Assurance Criterion

**POC**: Pseudo Orthogonality check

**SEREP**: System Equivalent Reduction and Expansion Proces

**FRAC**: Frequency Response Assurance Criterion

**FDAC**: Frequency Domain Assurance Criterion

**FRSF**: Frequency Response Scale Factor)

## RESUME

Une approche proposée récemment par J.R.Hughes, permet de faire le lien entre le D.A.O. (Dessin Assisté par Ordinateur) et l'analyse par élément finis. Le nom de l'analyse isogéométrique signifie que les mêmes fonctions de base peuvent être employées dans le DAO et l'AEF (Analyse par Élément finis).

Le but principal de notre travail est de mesurer ou définir l'écart entre le modèle classique par éléments finis et le nouveau modèle isogéométrique dans le cas des plaques.

L'idée directrice de l'analyse isogéométrique est de rapprocher l'analyse éléments finis de la modélisation CAO en exploitant le modèle géométrique comme support pour le calcul. Cela peut se faire grâce au développement de nouveaux types de modèles éléments finis utilisant les mêmes fonctions de base que celles utilisées dans les modèles CAO définissant une géométrie exacte. A l'heure actuelle, la majorité des outils de modélisation utilise les fonctions NURBS (Non Uniform Rational B-Splines) pour la description géométrique. Ces dernières ont des propriétés intéressantes et il existe des algorithmes stables permettant de les générer et les manipuler de façon efficace. Cette approche semble prometteuse et a fait l'objet de nombreuses publications. Le fait d'utiliser une géométrie exacte ouvre des perspectives intéressantes pour les problèmes de verrouillages et de propagation de singularités dans le calcul numérique des coques élastiques minces.

Dans ce travail, nous détaillerons ces fonctions et leurs propriétés ainsi que la description des géométries à partir de ces dernières. Puis on expliquera le principe de l'analyse élément finis et celui de l'analyse isogéométrique en utilisant les fonctions de base NURBS.

Dans une seconde partie nous développons un maillage en deux dimensions que nous allons étudier avec les deux méthodes, la méthode des éléments finis classique et les éléments finis isogéométriques.

Pour conclure, nous comparons les résultats obtenus avec les fonctions de corrélations en dynamique des structures.

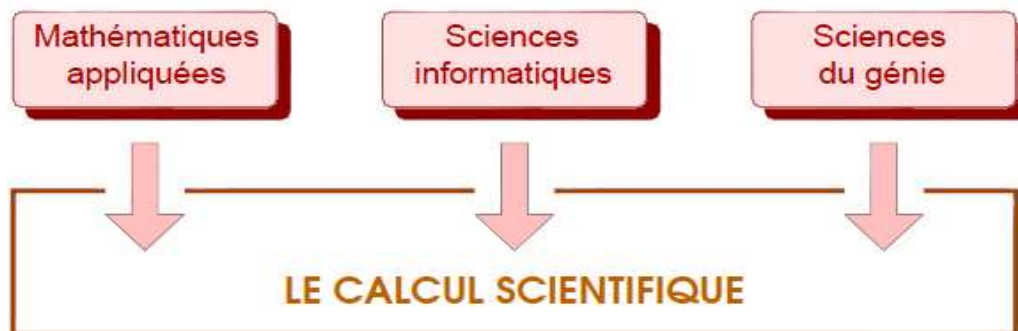
---

# *INTRODUCTION GENERALE*

---

## INTRODUCTION GENERALE

Historiquement, les approches principales dans le domaine de la conception et l'analyse en ingénierie ont été fondées sur les techniques expérimentales et empiriques ainsi que les méthodes analytiques. Récemment, ces outils traditionnels ont été complétés par les technologies d'assistance par ordinateur. Connues sous divers vocables tels que la CAO (Conception Assistée par Ordinateur), IAO (Ingénierie Assistée par Ordinateur), celles-ci reposent toutes à la base sur l'informatisation des diverses techniques utilisées par les scientifiques et ingénieurs. Les avancées les plus importantes sont dans l'ordinateur pour simuler les phénomènes ou le comportement de systèmes complexes d'ingénierie. Cette nouvelle discipline, appelée calcul scientifique ou simulation numérique, est issue de la combinaison des mathématiques appliquées, de l'informatique et des sciences de l'ingénieur.[1]



**Figure (1.1) :** Le calcul scientifique : Une nouvelle discipline

La résolution de problèmes d'ingénierie par simulation numérique est une démarche qui intègre rigoureusement différentes spécialités et disciplines. L'application de cette approche débute par la modélisation du phénomène ou du système à étudier sur le plan physique. Ce qui implique une représentation de la géométrie ainsi que des hypothèses simplificatrices qui déterminent la validité du modèle. On appelle domaine de calcul cette portion de l'espace physique borné par les frontières ou la géométrie où a lieu le phénomène. Généralement ceci donne lieu à des systèmes d'équations aux dérivées partielles avec des conditions de frontières ou conditions aux limites. Cet ensemble constitue la traduction mathématique plus ou moins fidèle de la physique selon les hypothèses invoquées. Cette fidélité allant de pair avec le nombre de paramètres ou la complexité du modèle qui sera plus lourd à traiter mais qui prend en compte des phénomènes physiques qui se rapprochent de plus en plus du monde réel. On nomme cette étape la formulation ou modélisation du problème.

Pour la grande majorité des problèmes d'intérêt pratique, on ne peut obtenir des solutions analytiques aux équations à cause de leur complexité. Alors, des méthodes numériques permettent d'obtenir une solution approchée pour résoudre ces systèmes

d'équations. Ces méthodes développées depuis les années 1950, sont basées sur une discrétisation des équations. Ce passage du monde physique, au monde numérique de l'ordinateur est devenu, à cause de sa spécialisation une discipline scientifique à part entière et constitue les fondements scientifiques du calcul ou simulation numérique.

Les équations différentielles sont discrétisées par diverses méthodes, telles les différences finies, les volumes finis ou les éléments finis. La solution est recherchée en certains points, appelés nœuds, puis elle est interpolée sur le reste du domaine. Pour réaliser cette opération, le domaine étudié doit être préalablement découpé en éléments simples dont les sommets sont les Nœuds de la discrétisation : les éléments sont des polyèdres, petits volumes de l'espace ou polygones surfaces dans le plan. On souligne que cette étape, appelée discrétisation, comprend deux volets : la discrétisation des équations qui donne lieu aux schémas numériques; et la discrétisation des frontières et du domaine appelé maillage. Le maillage servant de support aux schémas.

Le résultat de l'étape de discrétisation est un système d'équations algébriques qui est l'équivalent discret des équations différentielles continues. Les inconnues de système sont les valeurs des variables du problème (pression, température, et...) en chacun des nœuds de la discrétisation. La taille du système à résoudre dépend du nombre de variables, du schéma de discrétisation et de la finesse (nombre d'éléments) du maillage. La solution de la simulation sera la solution numérique de ce système algébrique. Et est obtenue par diverses techniques algébriques appelées résolveurs.[1]

La dernière étape de cette démarche est l'analyse de la solution pour fins de validation ou d'interprétation. L'outil privilégié est la visualisation qui permet grâce à des logiciels et des équipements spécialisés d'afficher sur des consoles graphiques la géométrie et la solution.

L'ensemble de cette démarche est illustrée par la figure 1.2.

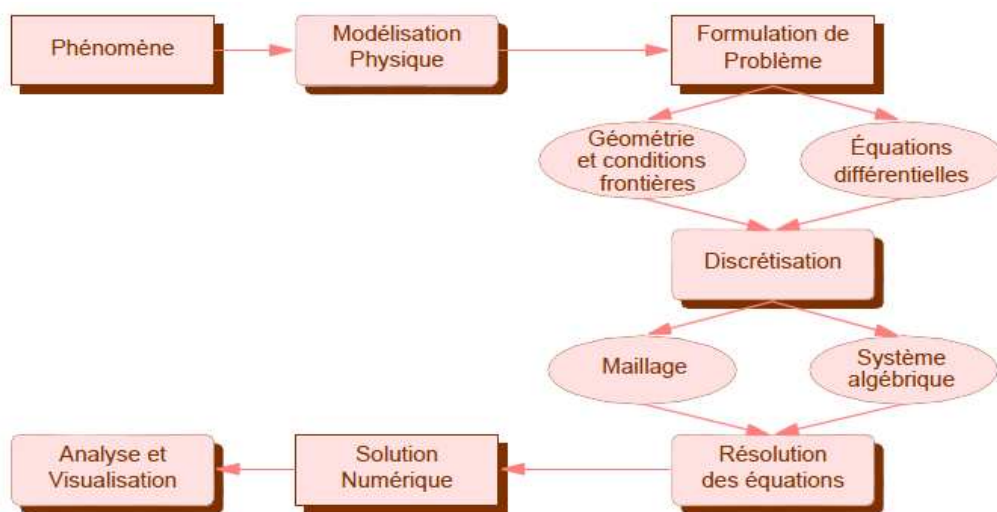


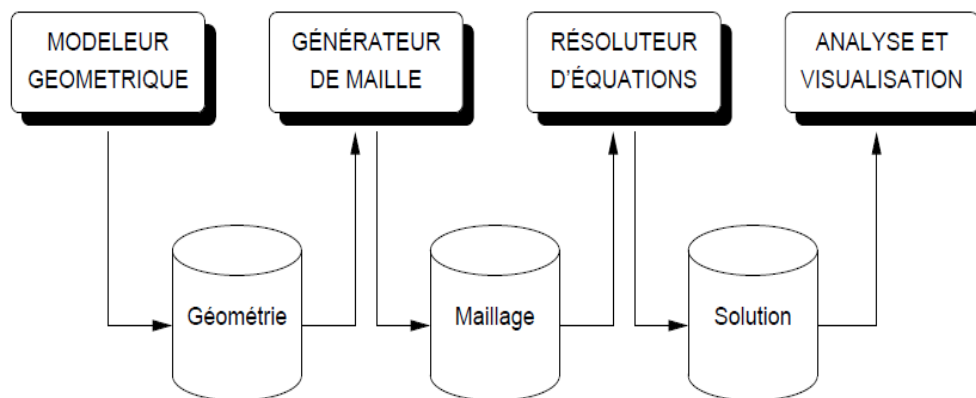
Figure (1.2) : Le calcul scientifique : méthodologie

## Processus de simulation numérique

Les développements et les progrès réalisés au cours des trois dernières décennies ont conduit à l'application d'une méthodologie qui est devenue standard. Comme pour tout système complexe, la clef de maîtrise réside dans l'identification et la modulation des tâches. Actuellement, la méthodologie standard découpe le processus de simulation en quatre tâches distinctes, qui sont :

- ❖ Modélisation Géométrique
- ❖ Maillage
- ❖ Résolution
- ❖ Analyse et visualisation

La figure (1.3) montre comment ces quatre modules s'intègrent dans le processus de simulation numérique, et comment ils communiquent entre eux. La transmission d'information, c'est-à-dire la façon dont les objets sont échangés entre modules, se fait sous la forme de fichiers informatiques.



**Figure (1.3):** Méthodologie de résolution d'un problème numérique

### a) Modélisation géométrique

Le rôle du modelleur géométrique est de traduire la géométrie des objets en deux ou en trois dimensions sous la forme d'une représentation informatique. Les entités constituant la description complète de la géométrie sont des formes élémentaires assemblées pour former la géométrie. La modélisation solide appelée CSG (Construction Solid Geometry) est basée sur des volumes élémentaires tels que cubes, sphères, cônes, et autres volumes géométrique de base. Le modèle final est obtenu en appliquant des opérations booléennes sur ces volumes élémentaires. Les opérations sont l'union, l'intersection, la soustraction, etc. la modélisation B-rep (Boundary representation) utilise, comme son nom l'indique, les frontières pour construire le modèle. Cette modélisation définit un volume à partir des surfaces qui le bornent. Les techniques de représentation des ces surfaces sont issues des développements mathématique sur les fonctions splinaires, de Bézier et plus récemment les NURBS.

Ces surfaces sont elles-mêmes délimitées par des courbes Qui sont définies par des points.[1]

### **b) Maillage**

Un maillage est une partition de l'espace ou d'un domaine en cellules appelées éléments. Le mailleur prend en entrée la géométrie, c'est-à-dire le fichier produit par le modeleur géométrique, et fournit en sortie un maillage. Ceci comprend une information géométrique sur les sous-volumes et une information topologique sur la connectivité entre les éléments. Les maillages non structurés sont sous la forme d'une liste d'éléments interconnectés. Les formes sont souvent des triangles ou des quadrilatères en deux dimensions, et des tétraèdres, des cubes ou des hexaèdres en trois dimensions. La connectivité d'un élément est la liste de ses voisins. Un élément possède un voisin par arête ou par face, selon que le maillage est bi ou tridimensionnel. Dans le cas des maillages structurés, la connectivité est par définition implicite, et donc le maillage se résume à une simple liste de nœuds.

### **c) Résolution**

Au cours de cette étape, les équations différentielles décrivant le phénomène physique sont discrétisées et transformées en un système d'équations algébriques. Les techniques utilisées sont les différences finies, les volumes finis ou bien les éléments finis, et permettent d'exprimer les variables du problème sur le support géométrique que constitue le maillage. Des conditions aux frontières et/ou des conditions initiales viennent compléter ces équations, rendant la solution du système unique. Le résolveur prend donc en entrée un maillage et avec le schéma de discrétisation retenu, construit le système d'équation. La solution de système algébrique, c'est à dire la liste des valeurs, pour chaque point du maillage, de la où les variables et obtenue par différents schémas itératifs.

### **d) Analyse et visualisation**

Les résultats fournis par la résolution des équations constituent une quantité phénoménale des données qui dans leur forme brute défit toute analyse par humain. Les outils d'analyse et de compréhension, utilisant des procédures de post-traitement, les caractéristiques globales qui sont l'objectif final de la solution numérique, sont calculées à partir des données ponctuelles de la solution. Par exemple, lors de l'étude d'une aile d'avion, la traînée et la portance font partie de ces caractéristiques obtenues par l'intégration numérique des valeurs surfaciques.

La visualisation regroupe l'ensemble des techniques qui permettent de représenter les quantités physique (telles les vitesses, les températures etc....) sous une forme graphique pour faciliter la compréhension des résultats.

# *CHAPITRE (I)*

---

## *MODELISATION EN CAO*

### *1. MODELE DE BEZIER*

## **I. MODELISATION EN CAO**

### **I.1. MODELE DE BEZIER**

#### **I.1.1. Introduction**

L'interpolation n'est pas toujours très adaptée pour certaines utilisations telles que le dessin par ordinateur, la CAO (conception assistée par ordinateur), etc.

C'est dans le domaine de la CAO que les courbes de Bézier ont été inventées et plus précisément dans l'industrie automobile. Dans les années 1960, les machines à commandes numériques sont apparues, il fallait donc décrire les formes (comme les courbes de carrosserie) avec des équations mathématiques.

La première solution était d'interpoler linéairement un grand nombre de points. Cette méthode a de nombreux inconvénients :

- Pour la machine, il y a beaucoup de paramètres.
- Il est impossible d'agrandir (mais aussi de translater, de déformer, . . .) une partie d'une pièce sans rajouter de points supplémentaires.
- Placer des points n'est pas intuitif pour les designers.
- Il est très fastidieux de modifier la courbe.

Un autre procédé était donc nécessaire pour exprimer une courbe avec peu de paramètres et que ceux ci soient naturels.

L'idée révolutionnaire des courbes de Bézier est l'utilisation de points de contrôle et non de points d'interpolation. Cela veut dire que la courbe ne passe pas par les points donnés mais les approche. Les courbes de Bézier ne sont donc pas des interpolations mais des approximations. Il y a plusieurs avantages à cela :

- La courbe est stable, il est facile de déformer la courbe sans résultats inattendus.
- Il est facile de modifier la courbe, il ne faut que modifier les points de contrôle qui sont peu nombreux.
- Le placement des points de contrôle est relativement évident.
- Il est plus facile d'avoir une courbe naturelle, fluide, non brusquée avec des points de contrôle qu'avec des points d'interpolation.

Et tout cela en gardant les avantages du modèle numérique (agrandissement, déformation, etc.).[3]

#### **I.1.2. Courbes de Bézier**

Les courbes de Bézier ont entre autres été créées par Pierre Bézier chez Renault en 1962. Bien que ce type de courbes porte son nom, il n'est pas certain que Bézier ait été le premier à construire cette courbe. En effet Paul De Casteljaou chez Citroën, a développé la même courbe plus ou moins à la même époque bien que son approche

diffère de celle de Bézier. L'approche de De Casteljau étant plus intuitive et plus utilisée.

**I.1.2.1.L'algorithme de De Casteljau**

L'algorithme de De Casteljau est la manière la plus simple de dessiner une courbe de Bézier. La conception est entièrement géométrique. Si nous voulons une courbe de Bézier avec quatre points de contrôle, nous devons procéder de la manière suivante. La figure 1 montre le schéma de la construction (avec  $t = 1/2$ ). Aux extrémités et aux cassures de la courbe bleue, il y a les points de contrôle. Le trait bleu forme le polygone de contrôle. Les points sont numérotés  $P^0_0, P^0_1, P^0_2, P^0_3, \dots$

Nous prenons un paramètre  $t$  entre 0 et 1. Nous trouvons le point  $P^1_0$  qui est défini comme  $\vec{OP^1_0} = \vec{OP^0_0} + t \cdot \vec{P^0_0P^0_1}$ .

$P^1_0$  est le barycentre de  $P^0_0$  et  $P^0_1$  (affectés des poids  $t$  et  $1-t$ ). De la même manière, nous trouvons  $P^1_1$  (le barycentre de  $P^0_1$  et  $P^0_2$ ) et  $P^1_2$  (le barycentre de  $P^0_2$  et  $P^0_3$ ). Ensuite, nous trouvons  $P^2_0$  le barycentre de  $P^1_0, P^1_1$  puis  $P^2_1$  celui de  $P^1_1$  et  $P^1_2$ . Et, finalement,  $P^3_0$  le barycentre de  $P^2_0$  et  $P^2_1$ , qui est le point de la courbe de Bézier avec le paramètre  $t$  choisi.

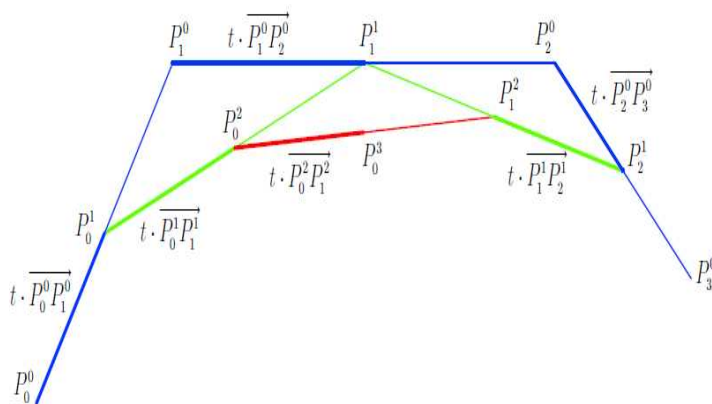
Nous prendrons pour  $O$  l'origine (0; 0) et pour simplifier la notation  $P^i_n = OP^i_n$ . Nous verrons plus tard que le choix de l'origine n'a pas d'importance.

Si nous faisons varier  $t$  de 0 à 1 nous obtenons un certain nombre de points appartenant à la courbe de Bézier. Le (a) de la figure (I,3) montre la construction d'une courbe de Bézier à trois points de contrôle ((0; 5); (5; 0); (10; 5)) avec  $t$  variant par pas de 0,1. Le (b) de la figure (I.3) montre la même courbe mais sans les constructions barycentriques. [3]

A présent, nous allons voir comment calculer les points d'une courbe de Bézier. Pour trouver le barycentre  $P^1_0 (x^1_0 ; y^1_0)$  entre deux points  $P^0_0 (x^0_0 ; y^0_0)$  et  $P^0_1(x^0_1;y^0_1)$  nous utilisons la formule suivante :

$$x^1_0 = t \cdot x^0_1 + (1-t) \cdot x^0_0$$

$$y^1_0 = t \cdot y^0_1 + (1-t) \cdot y^0_0$$



**Figure (I.1) :** Schéma de la construction de De Casteljau avec 4 points de contrôle

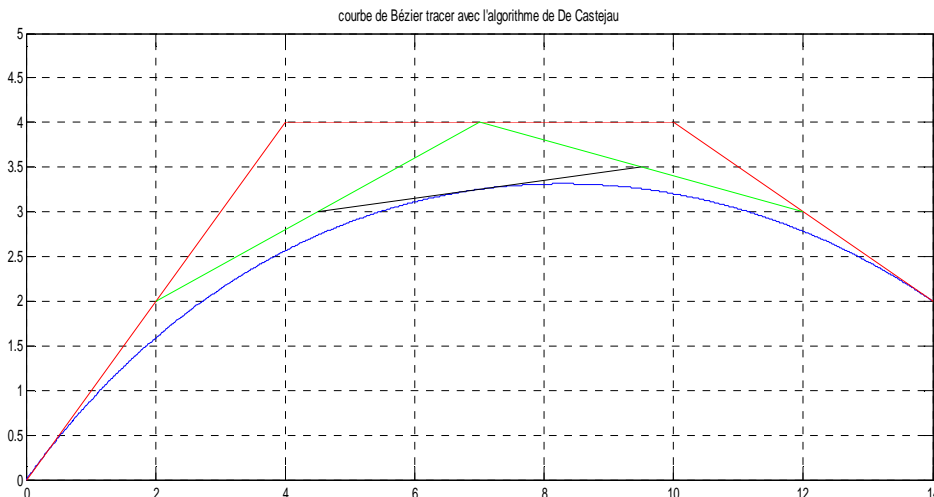


Figure (I.2) : Courbe de Bézier avec 4 point de contrôle tracée par l’algorithme de De Casteljaou

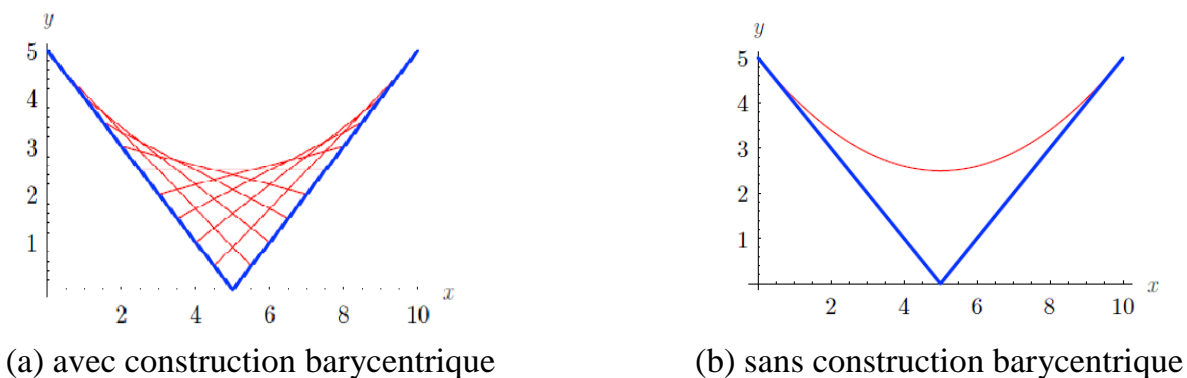


Figure (I.3) : Courbe de Bézier à 3 points de contrôle

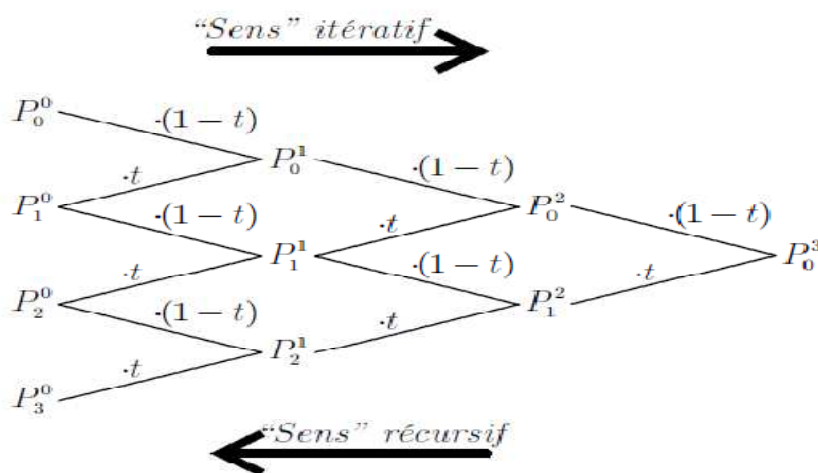


Figure (I.4) : Schéma pyramidal de De Casteljau avec 4 points de contrôle

Ainsi le barycentre se déplace entre  $P^0_0$  et  $P^0_1$  sur la droite les reliant. Comme nous l'avons vu, il faut répéter plusieurs fois l'opération pour obtenir le niveau  $P^3$ . La figure (I.4) montre le schéma de l'algorithme de De Casteljaou (connu aussi sous le nom de schéma pyramidal de De Casteljaou). Ce schéma est valable pour 4 points de contrôle. Comme nous le voyons le schéma dispose d'autant de niveaux qu'il y a de points de contrôle. Donc, comme pour changer de niveau nous multiplions par  $t$  ou  $1-t$ , notre courbe à 4 points de contrôle est de degré 3. Bien sûr ce type d'arbre est aussi valable pour une courbe avec plus de 4 points de contrôle.

Le degré d'une courbe de Bézier est inférieur d'une unité au nombre de points de contrôle.

Précisons que la courbe de Bézier de degré  $n$  avec  $n + 1$  points est unique.

Il est possible de trouver l'expression d'une courbe de Bézier. Nous allons le voir pour une courbe à 4 points de contrôle mais la démarche est généralisable. Le plus simple est de prendre le schéma dans le sens itératif de la figure (I.4). Pour le deuxième niveau, nous avons :

$$\begin{aligned} P^1_0 &= P^0_0 \cdot (1 - t) + P^0_1 \cdot t \\ P^1_1 &= P^0_1 \cdot (1 - t) + P^0_2 \cdot t \\ P^1_2 &= P^0_2 \cdot (1 - t) + P^0_3 \cdot t \end{aligned}$$

Pour le troisième niveau :

$$\begin{aligned} P^2_0 &= P^1_0 \cdot (1 - t) + P^1_1 \cdot t \\ P^2_1 &= P^1_1 \cdot (1 - t) + P^1_2 \cdot t \end{aligned}$$

Et pour le quatrième :

$$P^3_0 = P^2_0 \cdot (1 - t) + P^2_1 \cdot t$$

En assemblant ces équations, nous pouvons obtenir  $P^3_0$  en fonction des points de contrôle. Nous avons alors l'expression suivante de la courbe de Bézier :

$$P^3_0 = (1 - t)^3 \cdot P^0_0 + 3 \cdot t (1 - t)^2 \cdot P^0_1 + 3 \cdot t^2 (1 - t) \cdot P^0_2 + t^3 \cdot P^0_3$$

Il est aussi possible de trouver cette expression à partir du sens récursif :

$$\begin{aligned} P^3_0 &= (1-t) \cdot ((1-t) \cdot ((1-t) \cdot P^0_0 + t \cdot P^0_1) + t \cdot ((1-t) \cdot P^0_1 + t \cdot P^0_2)) \\ &\quad + t \cdot ((1-t) \cdot ((1-t) \cdot P^0_1 + t \cdot P^0_2) + t \cdot ((1-t) \cdot P^0_2 + t \cdot P^0_3)) \\ &= (1-t)^3 \cdot P^0_0 + 3 \cdot t (1-t)^2 \cdot P^0_1 + 3 \cdot t^2 (1-t) \cdot P^0_2 + t^3 \cdot P^0_3 \end{aligned}$$

Cette manière donne évidemment le même résultat.

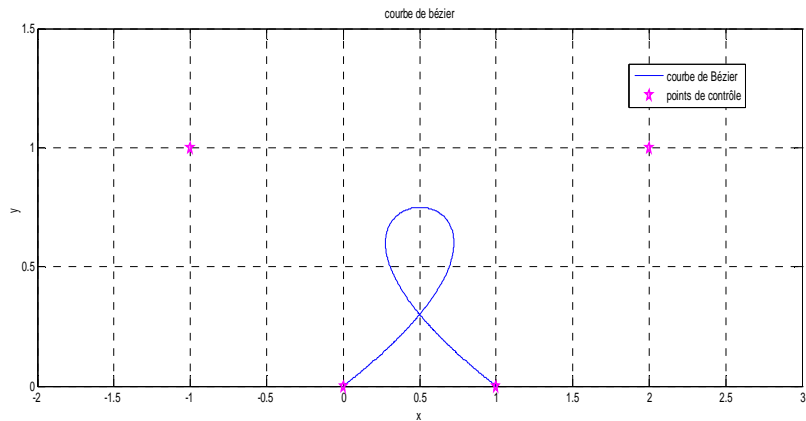


Figure (I.5) : Courbe de Bézier à 4 points de contrôle

Les courbes de Bézier sont toujours exprimées sous forme paramétrique car pour une utilisation pratique (dessin, CAO, etc.) il est nécessaire que la courbe puisse avoir des points de rebroussement. La figure (I.5) montre une courbe de Bézier à 4 points de contrôle et qui se croise. La courbe dessine un caractère  $\alpha$ . [3]

**I.1.2.2. Forme de Bernstein**

Bien que l'algorithme de De Casteljau soit très simple, il est relativement long de trouver l'expression de la courbe lorsqu'il y a beaucoup de points de contrôle. La forme de Bernstein permet d'exprimer plus simplement une courbe de Bézier. [3]

**Définition:** soit  $n$  un entier positif, on défini pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $t \in [0,1]$  les polynômes de Bernstein par la formule :

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} \times t^i \times (1-t)^{n-i} \dots\dots\dots (I.1.1)$$

Tel que :  $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i! \times (n-i)!}$  (Coefficient du binôme de Newton)..... (I.1.2)

**Exemple :** soit  $t \in [0,1]$  et  $n=4$ . On se donne de calculer les fonctions de Bernstein :  $N_{i,4}$  :

$$\begin{cases} B_{0,4} = \binom{4}{0} t^0 \times (1-t)^4 = (1-t)^4 \\ B_{1,4} = \binom{4}{1} t^1 \times (1-t)^3 = 4 \times t \times (1-t)^3 \\ B_{2,4} = \binom{4}{2} t^2 \times (1-t)^2 = 6 \times t^2 \times (1-t)^2 \\ B_{3,4} = \binom{4}{3} t^3 \times (1-t)^1 = 4 \times t^3 \times (1-t)^1 \\ B_{4,4} = \binom{4}{4} t^4 \times (1-t)^0 = t^4 \end{cases}$$

Ce qui donne graphiquement :

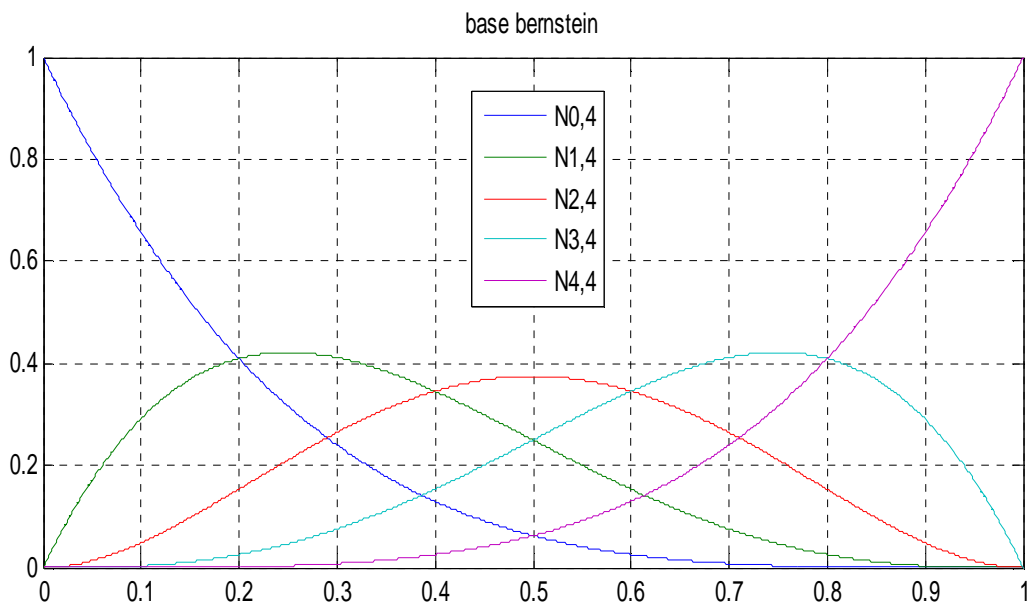


Figure (I.6): Polynômes de Bernstein de degré 4.

### I.1.2.2.1. Propriétés des polynômes de Bernstein

(i).  $\forall i \in \{0, \dots, n\}$  et  $\forall t \in [0,1]$ ;  $B_{i,n}(t) \geq 0$ .

(ii). *partition de l'unité*:  $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1$ .

(iii).  $\max B_{i,n} = B_{i,n}(t = i/n)$ .

(iv). on a la récurrence qui nous permet de calculer  $B_{i,n}(t)$  :

$$B_{n,n}(t) = t \times B_{n-1,n-1}(t).$$

$$B_{0,n}(t) = (1-t)B_{0,n-1}(t).$$

$$B_{i,n}(t) = (1 - t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t). \text{ Avec } 1 \leq i \leq n-1.$$

(v). symétrie:  $\forall t \in [0,1]; B_{i,n}(t) = B_{n-i}(1 - t).$

(vi). intégration: il est montré que:  $\forall i \in [0, n]; \int_0^1 B_{i,n}(t)dt = \frac{1}{n + 1}.$

(vii). dérivée: 
$$B_{i,n}(t) = \begin{cases} -nB_{i,n-1}(t) \dots \dots (i = 0). \\ B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t) \dots \dots (i = 1, \dots, n - 1) \\ nB_{i-1,n-1}(t) \dots \dots (i = n) \end{cases}$$

**Remarque :** Les fonctions  $B_{i,n}(t)$  sont aussi appelées fonctions mélanges ou fonctions pondérantes.[2]

### 1.1.3. Courbes de Bézier non rationnelles

Une courbe de Bézier de degré n est caractérisée généralement par n+1 points, appelés points de contrôle qui définissent le polygone caractéristique associé à cette courbe. Le premier point et le dernier sont des nœuds. Les autres points de contrôle permettent de définir la forme de la courbe, la courbe ne passant pas en général par ces points. [3]

**Définition :** Pour n + 1 points du plan  $P_i = (x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n) \in R^2$ , on définit la courbe de Bézier C associée à l'ensemble de ces points par :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot x_i \dots \dots \dots \text{(I.1.3)} \\ \mathbf{y}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot y_i \dots \dots \dots \text{(I.1.4)} \end{cases}$$

Pour  $t \in [0,1]$ . En abrégé :  $\mathbf{C}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot P_i \dots \dots \dots \text{(I.1.5)}$

$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} \times t^i \times (1 - t)^{n-i}$  : polynômes de Bernstein où n est le degré de la courbe.

$P_i$  : sont appelés points de contrôle.

$i = [1 \ 2 \ 3 \dots n]$

**Exemple :**

Un exemple de courbe de Bézier avec 5 points de contrôle est donné sur la Figure (I.7).

$P_i = \{P_0(0,0) ; P_1(2,4) ; P_2(4,6) ; P_3(8,4) ; P_4(10,0)\}$

**Donc :**

Sur l'axe des abscisses :  $x = [0 \ 2 \ 4 \ 8 \ 10]$ .

Sur l'axe des ordonnées :  $y = [0 \ 4 \ 6 \ 4 \ 0]$ .

La courbe de Bézier est définie ainsi :

$$(C) = \begin{cases} x(t) = 0 \cdot B_{0,4} + 2 \cdot B_{1,4} + 4 \cdot B_{2,4} + 8 \cdot B_{3,4} + 10 \cdot B_{4,4} \\ y(t) = 0 \cdot B_{0,4} + 4 \cdot B_{1,4} + 6 \cdot B_{2,4} + 4 \cdot B_{3,4} + 0 \cdot B_{4,4} \end{cases}$$

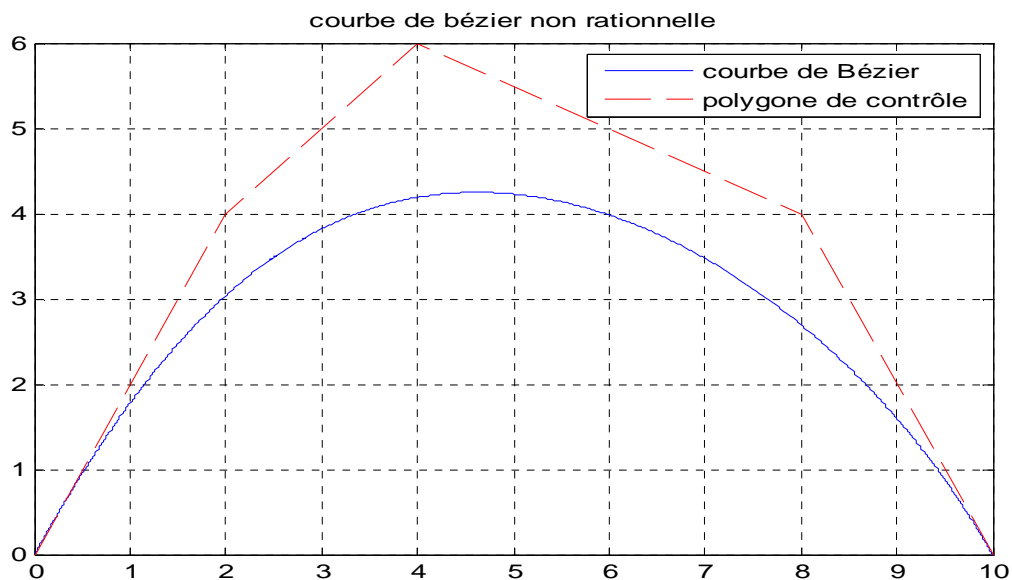


Figure (I.7) : Courbe de Bézier non rationnelle et son polygone caractéristique.

### I.1.3.1. Influence des sommets du polygone caractéristique sur la forme d'une courbe de Bézier

Nous allons générer une courbe de Bézier avec 04 points de contrôle :

Les coordonnées des sommets sont :

$$P_i = \{P_0(0,0) ; P_1(2,8) ; P_2(4,2) ; P_3(8,8)\}$$

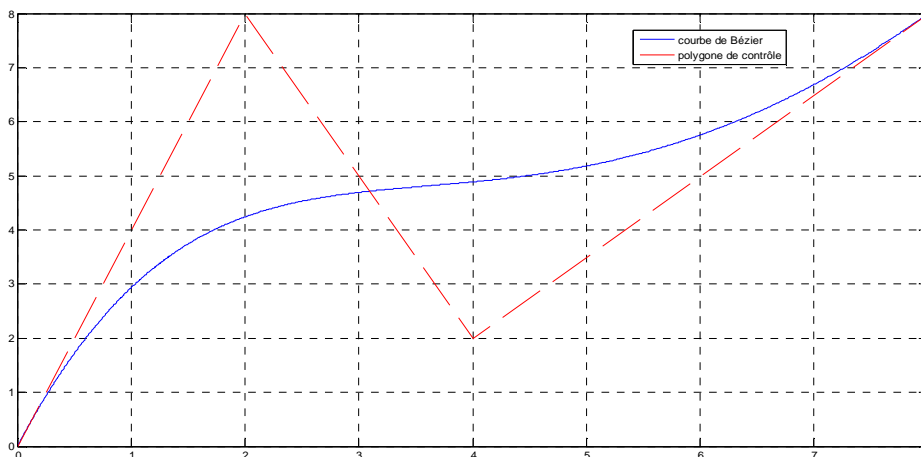


Figure (I.8) : Courbe de Bézier non rationnelle avec 4 points de contrôle

Et en procédera au déplacement des sommets comme suit :

Figure 9.1  $\Rightarrow P_i = \{P_0(0,0) ; P_1(2,8) ; P_2(4,0) ; P_3(8,8)\}$

Figure 9.2  $\Rightarrow P_i = \{P_0(0,0) ; P_1(2,15) ; P_2(4,2) ; P_3(8,8)\}$

Figure 9.3  $\Rightarrow P_i = \{P_0(0,0) ; P_1(2,2) ; P_2(4,2) ; P_3(8,8)\}$

Figure 9.4  $\Rightarrow P_i = \{P_0(0,0) ; P_1(8,4) ; P_2(4,0) ; P_3(8,2)\}$

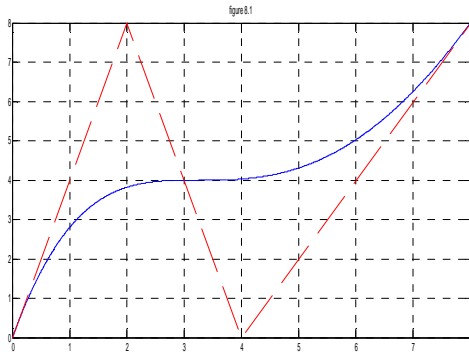


Figure (I.9.1)

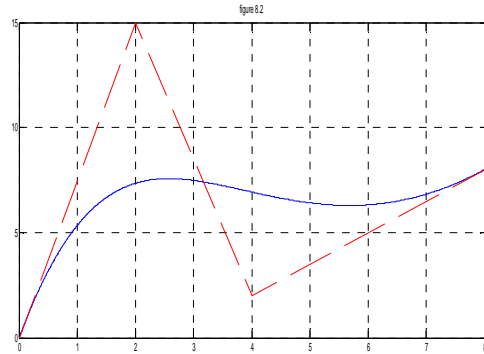


figure (I.9.2)

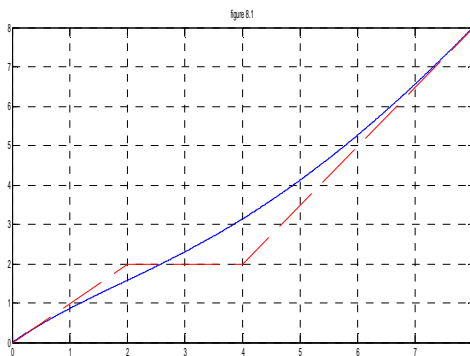


Figure (I.9.3)

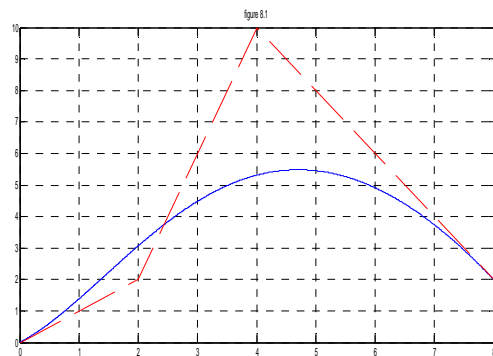


figure (I.9.4)

**Figure (I.9) :** Influence des sommets du polygone caractéristique sur la forme d'une courbe de Bézier

L'ensemble de la courbe est affecté par le déplacement du sommet hormis les deux points extrêmes  $P_0$  et  $P_3$  lorsque le sommet déplacé n'est ni  $P_0$  ni  $P_3$ . Si le sommet déplacé est l'un des points extrême seul l'autre point extrême qui reste inchangé de la courbe et réciproquement.[5]

### I.1.3.2. Propriétés des courbes non rationnelles

(i). Contrôle local : le point de contrôle  $P_i$  influence la courbe au voisinage de  $t = i/n$ . De plus  $C(0) = P_0$  et  $C(1) = P_n$ .

(ii). Si on note  $C_n(P_0, \dots, P_n)$  la courbe associée aux points de contrôle  $(P_i)_{0, \dots, n}$ , on a la définition récursive .

$$C_n(P_0, \dots, P_n)(t) = (1-t) C_{n-1}(P_0, \dots, P_{n-1})(t) + t \cdot C_{n-1}(P_1, \dots, P_n)(t)$$

- (iii). La courbe est à l'intérieur de l'enveloppe convexe des points de contrôle.
- (iv). La droite  $((x_0; y_0); (x_1; y_1))$ ,  $((x_{n-1}; y_{n-1}); (x_n; y_n))$  est tangente à la courbe en  $(x_0; y_0)$ ,  $(x_n; y_n)$  respectivement.
- (v). Une courbe de Bézier est infiniment dérivable.
- (vi). Une ligne droite rencontre au plus autant de fois la courbe de Bézier que la ligne polygonale joignant les points de contrôle (ceci signifie que la courbe suit assez fidèlement cette ligne sans osciller).

**Remarque :**

Le fait d'ajouter des points de contrôle permet d'influer sur la forme de la courbe. Cependant il n'est pas judicieux d'élever trop le degré d'une courbe. On préfère donc utiliser le cas  $n = 3$  (courbe de Bézier cubique) et les relier entre elles de manière à garantir une continuité  $C^1$ . La courbe de Bézier cubique se trace en partant du point  $P_0$ , en se dirigeant vers  $P_1$  et en arrivant au point  $P_3$  selon la direction  $(P_2; P_3)$ . En général, la courbe ne passe ni par  $P_1$  ni par  $P_2$  : ces points sont simplement là pour donner une information de direction. La distance entre  $P_0$  et  $P_1$  détermine la 'longueur' du déplacement dans la direction de  $P_1$  avant de tourner vers  $P_3$ . [5]

**I.1.4. Les courbes de Bézier rationnelles**

Pour décrire très exactement des courbes comme les cercles, il faut des degrés de liberté supplémentaires.

L'idée est d'ajouter des poids aux points de contrôle (les  $w_i$ ). le dénominateur n'est là que pour normaliser la somme des poids supplémentaires, afin que la courbe soit correctement définie. Les modèles géométriques rationnels font appel aux concepts des coordonnées homogènes. [2]

**I.1.4.1. Coordonnées homogènes**

Le concept général des coordonnées homogènes est d'exprimer des points de l'espace  $R^N$  dans un espace  $R^{N-1}$ .

Soit P un point de coordonnées  $(x, y, w)$  de  $R^3$ , sa projection est obtenue comme suit:

$$\begin{array}{ccc}
 F : R^3 & \longrightarrow & R^2 \\
 C \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \end{pmatrix}
 \end{array}$$

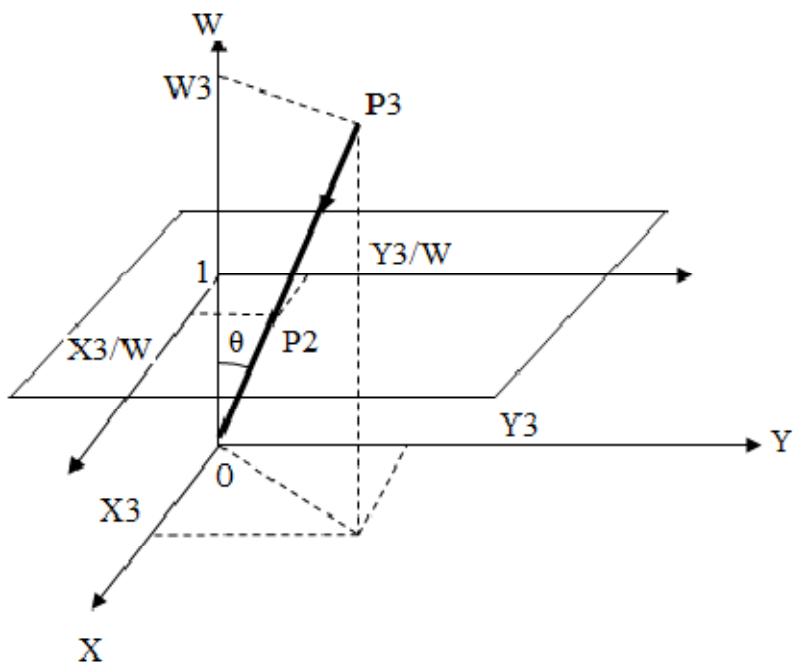


Figure (I.10): Illustration de la transformation homogène entre  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$

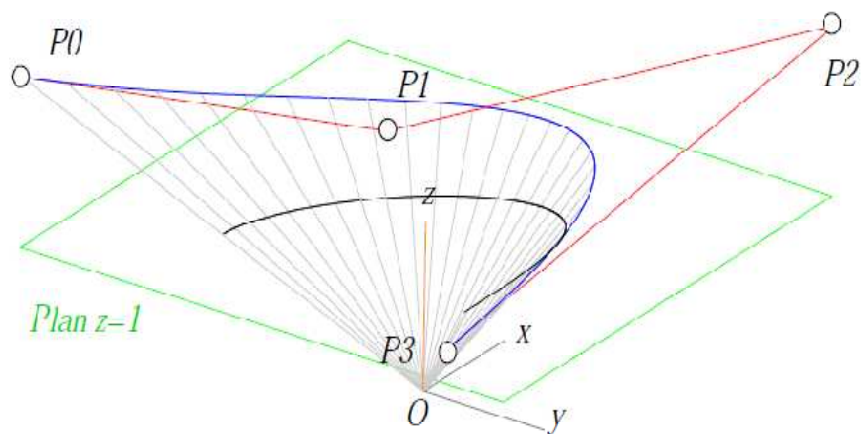


Figure (I.11): Illustration d'une courbe Bézier obtenue par une projection conique.

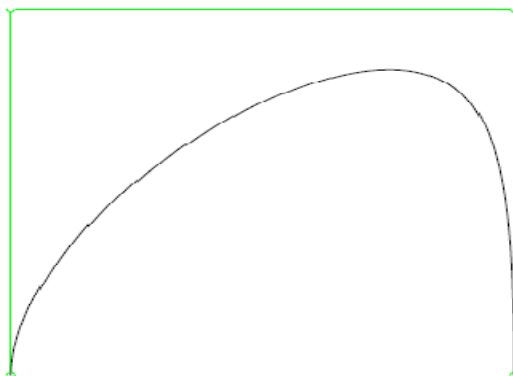


Figure (I.12): Courbe obtenue sur le plan z en 2D

### I.1.4.2. Courbe de Bézier rationnelle, équation

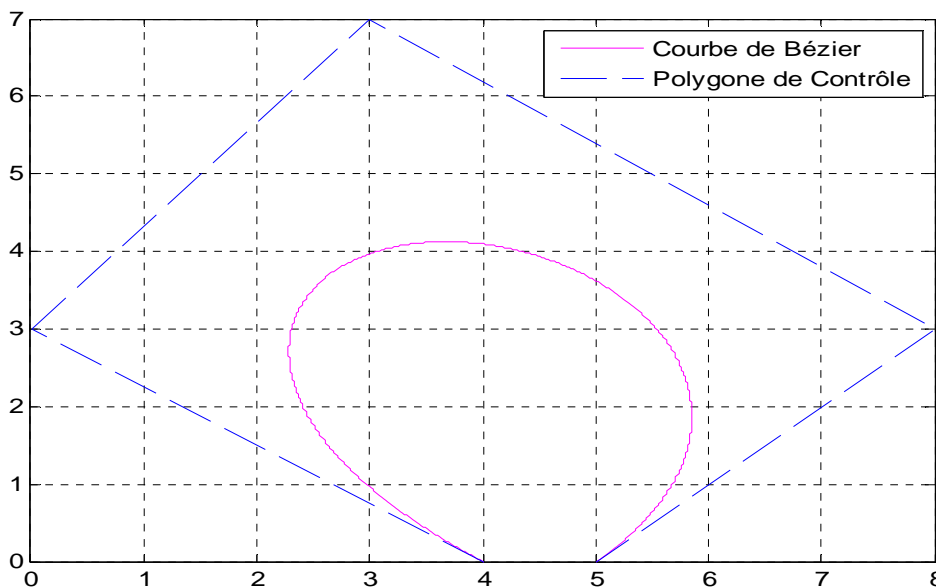
**Définition :** On se donne  $n+1$  points  $P_i$  et pour chaque point, un poids  $w_i \in \mathbb{R}$ , on définit alors :

$$C(t) = G_i^n(t).P_i, \quad t \in [0, 1] \dots\dots\dots (I.1.6)$$

$$\text{Avec } G_i^n(t) = \frac{w_i.B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i.B_i^n(t)} \dots\dots\dots (I.1.7)$$

$$\text{Donc } C(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i.B_i^n(t).P_i}{\sum_{i=0}^n w_i.B_i^n(t)} \dots\dots\dots (I.1.8)$$

- $B_i^n(t)$  : polynôme de Bernstein étudié au début de ce chapitre.
- $G_i^n(t)$  : Polynôme de Bernstein rationnel.
- $P_i$  : points de contrôle de la courbe.
- $W_i$  : sont appelées, poids des point  $P_i$ , et le vecteur  $w_i$  est appelé, vecteur poids.



**Figure (I.13) :** Courbe Bézier rationnelle avec  $w=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

### I.1.4.3. Propriétés des courbes de Bézier rationnelles

- Toute courbe de Bézier passe par les points de contrôle extrêmes
- Invariance affine : la transformation affine d’une courbe de Bézier est la courbe passant par la transformée des points
- Enveloppe convexe : une courbe de Bézier appartient à l’enveloppe convexe des points qui la contrôlent si les poids  $w_i$  sont tous positifs.

- La symétrie : la courbe de Bézier rationnelle associée au polygone de contrôle ne changera pas de forme lorsqu'on fait inverser les pôles du ce polygone et les vecteurs poids associés

La courbe de Bézier rationnelle présente deux autres propriétés par rapport au modèle de Bézier non rationnel [2]:

- La première propriété c'est l'invariance projective : si on veut transformer une courbe de Bézier rationnelle par une transformation projective, on n'a qu'à agir sur le polygone de contrôle en écrivant les poids ( $w_i$ ) en coordonné homogène
- La deuxième est la précision linéaire.[3]

#### I.1.4.4. Influence des poids ( $w_i$ ) sur la courbe de Bézier rationnelle

Les poids  $w_i$  offrent une souplesse et une efficacité dans le contrôle de la courbe, en effet, la variation du poids d'un point de contrôle s'exprime sur la courbe telle une force d'attraction ou de répulsion.

- Si on augmente un poids  $W_i$  la courbe se rapproche du point ( $P_i$ ) associé comme le montre les figures (a, b, c, d)
- Si  $W_i = 0$  le point  $P_i$  associé perd toute influence sur la forme de la courbe figure(e)
- Si on change le signe d'un poids  $w_i$ , la courbe s'éloigne du point ( $P_i$ ) associé comme le montrent les figures (f, g, h).

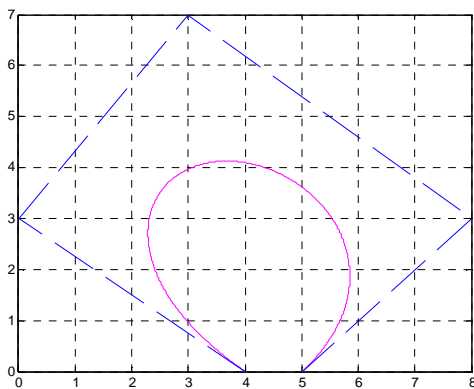


Figure (I.14.a):  $w = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

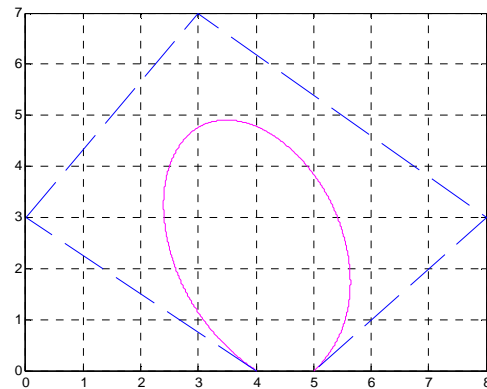


Figure (I.14.b):  $w = [1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1]$

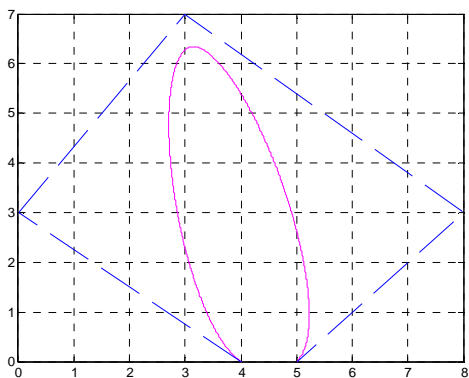


Figure (I.14.c):  $w = [1 \ 1 \ 10 \ 1 \ 1]$

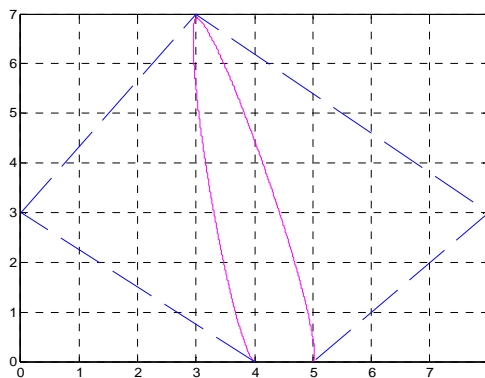


Figure (I.14.d):  $w = [1 \ 1 \ 100 \ 1 \ 1]$

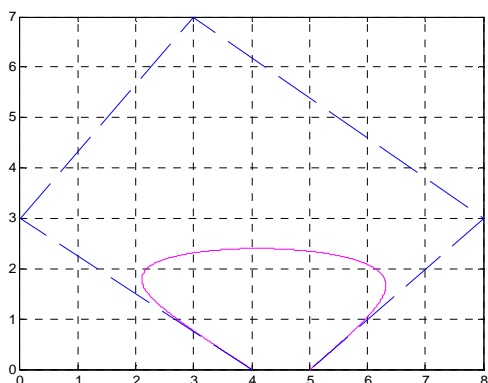


Figure (I.14.e):  $w = [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]$

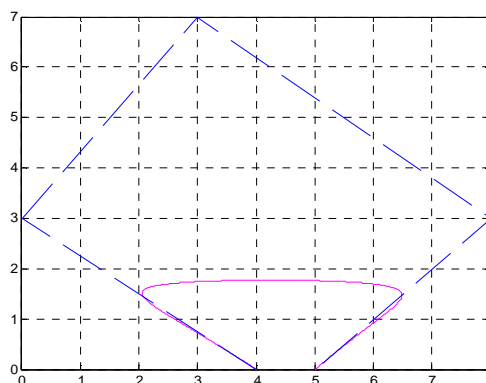


Figure (I.14.f):  $w = [1 \ 1 \ -1/5 \ 1 \ 1]$

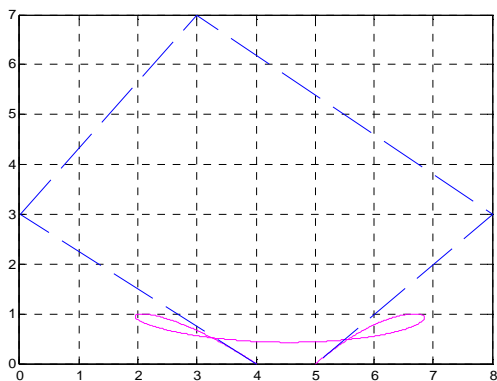


Figure (I.14.g):  $w = [1 \ 1 \ -1/2 \ 1 \ 1]$

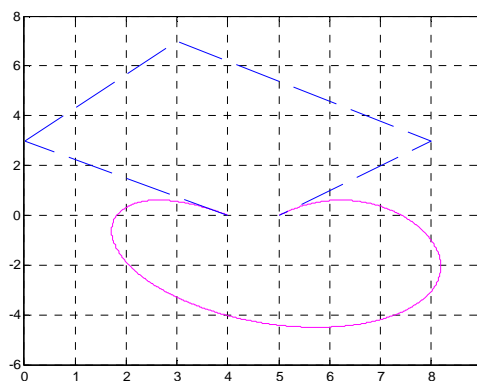


Figure (I.14.h):  $w = [1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1]$

Figure (I.14): Influence des poids ( $w_i$ ) sur la courbe de Bézier rationnelle.

**Remarque :** nous remarquons que la modification des poids  $W_i$  a une grande influence sur la forme de la courbe même si on peut obtenir cette modification par une modification des points de contrôle ( $P_i$ ) mais la modification des poids est plus souple et simple à mettre en œuvre dans la pratique.

### I.1.5. Surfaces de Bézier

#### I.1.5.1. Surface de Bézier non rationnelle

##### Définition

Le raisonnement développé sur les courbes peut s'appliquer aux surfaces. Cette fois-ci deux paramètres interviennent pour la définition d'une surface et les surfaces sont déterminées à partir de grilles (patches) de points de contrôle.

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) P_{i,j} \dots\dots\dots(I.1.9)$$

$P_{i,j}$ : Les pôles du réseau caractéristique (les points de contrôles) avec :

- $0 \leq i \leq n$ .
- $0 \leq j \leq m$ .

$B_{i,n}(u), B_{j,m}(v)$ : Les polynômes de Bernstein avec  $(u, v) \in [0,1]^2$

Les points de contrôle associés à la surface de Bézier sont aussi les points de contrôle correspondant à un ensemble de courbes de Bézier.

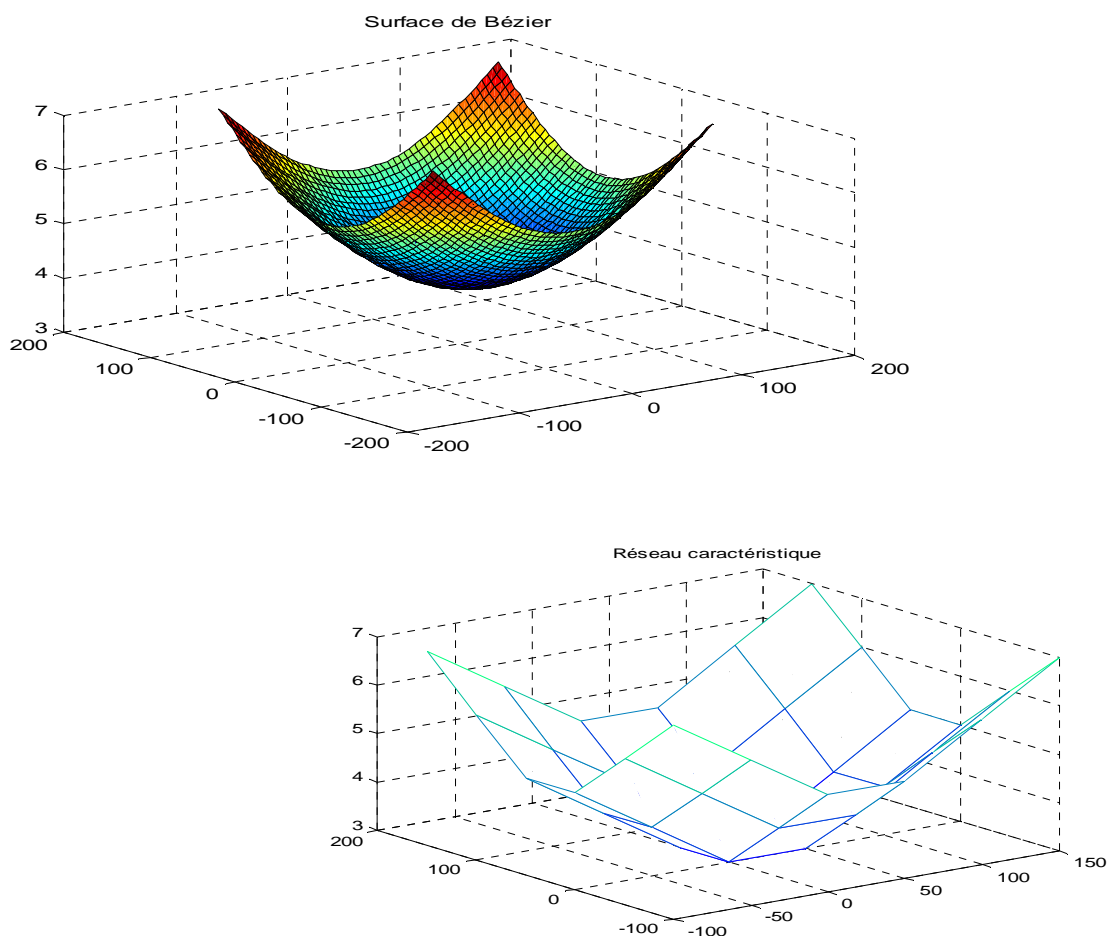


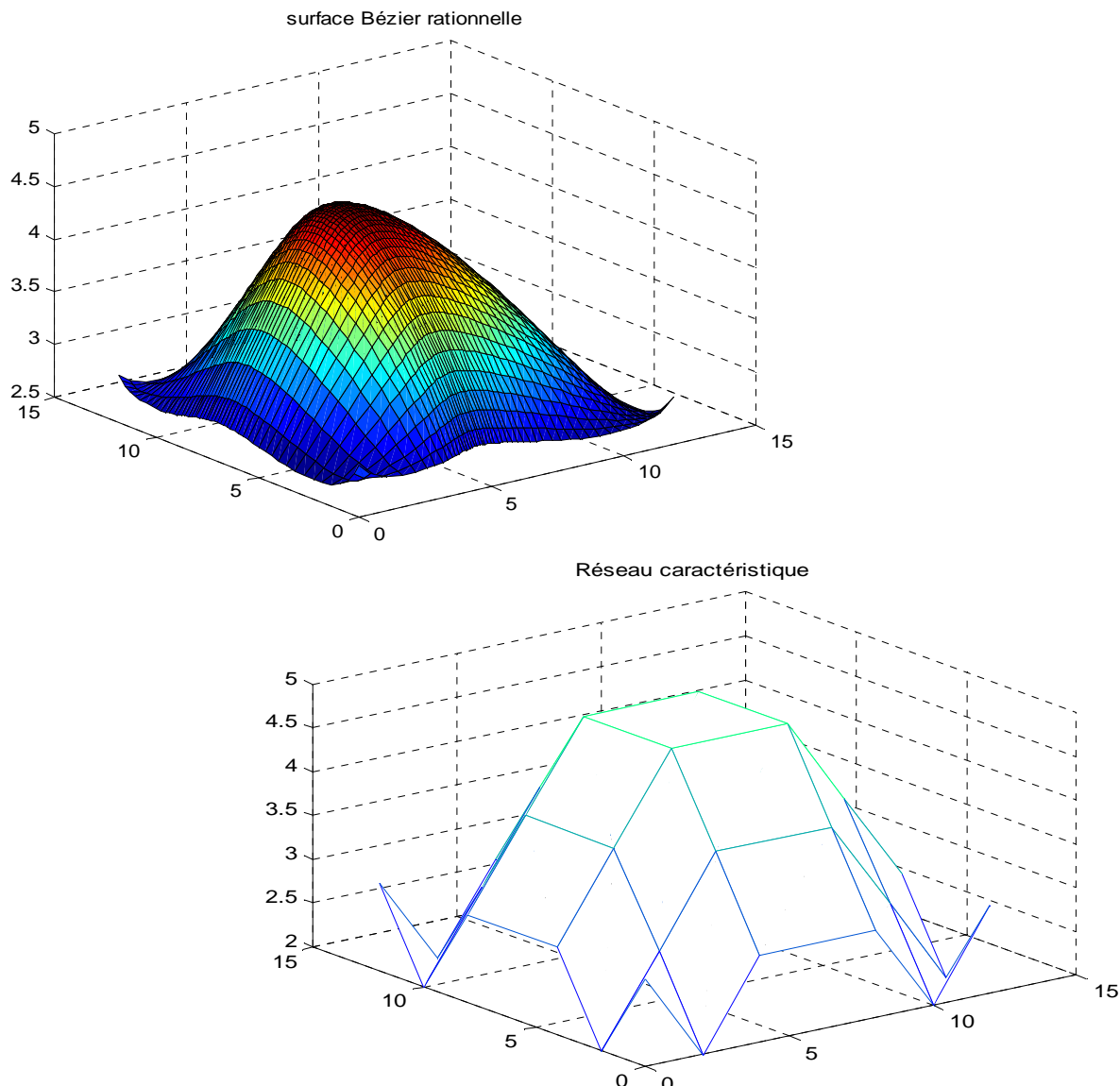
Figure (I.15) : Surface de Bézier non rationnelle et son réseau caractéristique

### I.1.6. Surface de Bézier rationnelle

La surface de Bézier rationnelle se construit d'une manière analogue à celle de Bézier non rationnelle (polynômiale), mais en ajoutant des poids  $W_{i,j}$  comme le montre la formule suivante :

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m W_{i,j} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m W_{i,j} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v)} \dots\dots\dots (I.1.10)$$

La figure illustrée si dessous est une surface de Bézier rationnelle de vecteurs poids  $W_i = [1 \ 1 \ 2 \ 5 \ 1 \ 1]$  ;  $W_j = [1 \ 1 \ 10 \ 2 \ 1 \ 1]$

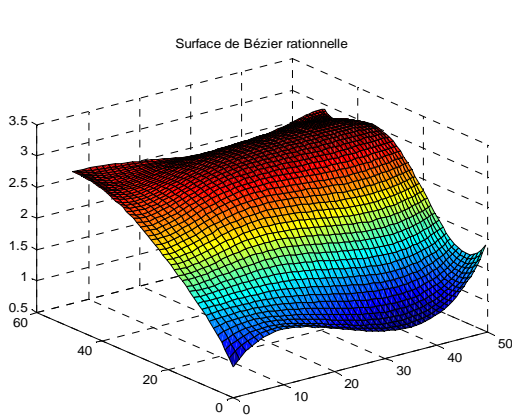


**Figure (I.16):** surface de Bézier rationnelle de vecteurs poids  $W_1 = [1 \ 1 \ 2 \ 5 \ 1 \ 1]$  ; et  $W_2 = [1 \ 1 \ 10 \ 2 \ 1 \ 1]$

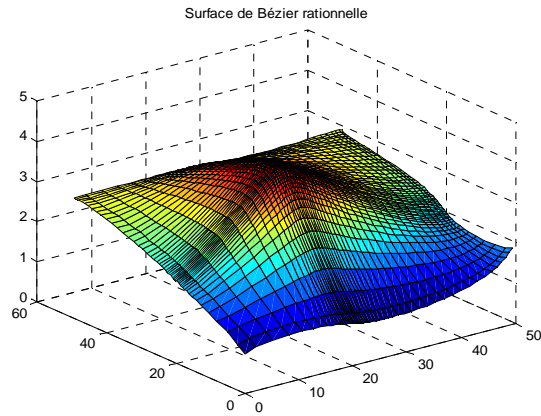
Le comportement de la surface vis-à-vis son réseau caractéristique est le même que celui de la courbe de Bézier rationnelle en vers son polygone de contrôle. Si on augmente le poids ou plusieurs points de réseau caractéristique la surface se rapproche de ces points et si on les diminue la surface s'éloigne.

En changeant la valeur de poids  $W$  sur un point de contrôle, tous les points de la surface se déplacent excepté les quatre points extrêmes de la surface là où elle coïncide avec le réseau caractéristique.

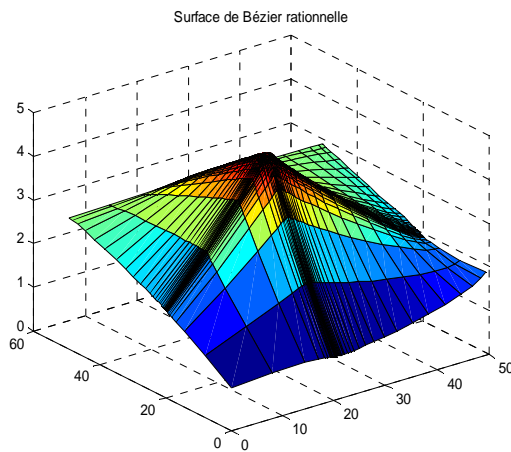
Les figures ci-dessous montrent le comportement de la surface en changeant les valeurs des vecteurs poids  $W_{i,j}$  tout en gardant le même réseau caractéristique.



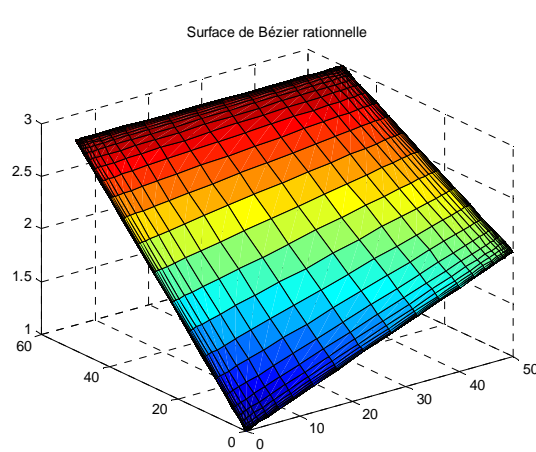
**Figure (I.17.a):**  $W_i = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$  ;  
 $W_j = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$



**Figure (I.17.b):**  $W_i = [1 \ 1 \ 10 \ 1 \ 1 \ 1]$  ;  
 $W_j = [1 \ 1 \ 10 \ 1 \ 1 \ 1]$



**Figure (I.17.c):**  $W_i = [1 \ 1 \ 100 \ 1 \ 1 \ 1]$  ;  
 $W_j = [1 \ 1 \ 100 \ 1 \ 1 \ 1]$



**Figure (I.17.d):**  $W_i = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$  ;  
 $W_j = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$

**Figure (I.17) :** effet des poids  $W_{i,j}$  sur la surface de Bézier rationnelle

# *CHAPITRE (I)*

---

## *MODELISATION EN CAO*

### *2. MODELE B-SPLINE*

## I.2. MODELE B-SPLINE

### I.2.1. Motivation

Il s'agit de fabriquer une courbe qui présente tous les avantages des courbes de Bézier mais sans ses inconvénients. Ainsi, la courbe devra approximer les points de contrôle, être simple à manipuler, présenter les mêmes propriétés que les courbes de Bézier, etc.

Le degré de la courbe ne devra pas être proportionnel au nombre de points de contrôle mais fixe. La modification d'un point ne doit pas affecter toute la courbe.

Les B-Splines ont été développée chez Boeing dans les années 70 et 80. Les B-Splines existait déjà avant mais n'était pas utilisées et le concept n'est pas finalisé.

L'idée principale des B-Splines est de remplacer les polynômes de Bernstein par des fonctions. Ensuite, nous sommerons ces fonctions avec les points de contrôles pour obtenir la courbe. Une B-Spline ne dépend pas uniquement des points de contrôle mais aussi d'un vecteur nœud.[5]

### I.2.2. Fonctions B-Splines

Les B-Splines sont des fonctions polynomiales par morceaux possédant une classe de continuité donnée. Elles sont construites à partir d'un vecteur de nœuds, qui est lui-même constitué d'un ensemble de coordonnées dans l'espace paramétrique  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ , où  $\xi_i \in \mathbb{R}$  est le  $i^{\text{ème}}$  nœud,  $i$  est l'indice,  $i = 1, 2, \dots, n + p + 1$ ,  $p$  est le degré polynomial et  $n$  est le nombre de fonctions considérées. Les fonctions d'un ordre  $p$  donné quelconque sont définies récursivement à l'aide de la formule de Cox-de Boor à partir du vecteur de nœud  $\Xi$ . [5]

On commence par définir les fonctions constantes par morceaux ( $p=0$ )

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \dots\dots\dots(I.2.1)$$

Pour  $p \geq 1$ , la relation de récurrence est :

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \dots\dots\dots(I.2.2)$$

Le dénominateur de plusieurs de ces fonctions peut s'annuler en présence de nœuds répétés, quand cela arrive, on adopte la convention :  $\frac{x}{0} = 0$ .

#### I.2.2.1. Vecteur nodal

Il existe deux familles de vecteurs nodaux :

##### Vecteur uniforme

Un vecteur nodal est dit uniforme si l'espacement entre ses nœuds est uniforme

$$\Xi = [0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1]$$

**Vecteur non uniforme**

Un vecteur est dit non uniforme si l'espacement entre ses nœuds n'est pas régulier.

$$\Xi = [0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.6 \ 1 \ 1 \ 1].$$

**I.2.2.2. Propriétés des fonctions de bases B-Splines**

- $N_{i,p}(\xi)$  est un polynôme de degré  $p$  sur  $[\xi_i, \xi_{i+1}[$
- $N_{i,p}(\xi) = 0$  si  $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+p+1}[$  support compact
- $0 < N_{i,p}(\xi) < 1$  si  $\xi \in ] \xi_i, \xi_{i+p+1}[$
- $N_{i,p}(\xi_i) = 0$  sauf si  $\xi_i = \xi_{i+1} = \dots = \xi_{i+k} < \xi_{i+k+1}$  alors  $N_{i,p}(\xi_i) = 1$
- Pour  $\xi \in ] \xi_i, \xi_{i+p+1}[$ ,  $N_{i,p}(\xi) = 1$  si et seulement si  $\xi_i = \xi_{i+1} = \dots = \xi_{i+k} = \xi$

• Partition de l'unité

$$\sum_{i=j-p}^{i=j} N_{i,p}(\xi) = 1 \text{ Pour } \xi \notin [\xi_j, \xi_{j+1}[$$

$$\sum_{i=0}^{i=m-k-1} N_{i,p}(\xi) = 1 \text{ Pour } \xi_p < \xi < \xi_{m-p}$$

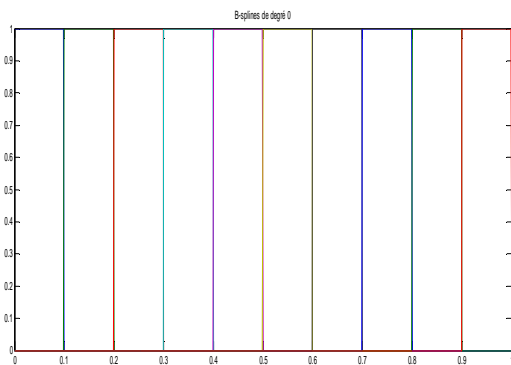
$$\sum_{i=0}^{i=n-1} N_{i,p}(\xi) = 1 \text{ Pour } n \leq m - p \text{ et } \xi_p \leq \xi < \xi_n$$

- $N_{i,p}$  est  $C^1$  à droite de chaque point
- $N_{i,p}$  est  $C^{p-r}$  au voisinage de chaque nœud de multiplicité  $r$
- $\forall \xi, N_{i,p}(\xi)$  est dérivable à droite et

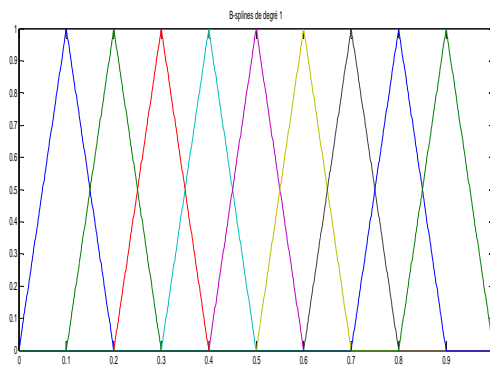
$$N'_{i,p}(\xi) = p * \left[ \frac{N_{i,p-1}(\xi)}{\xi_{i+p} - \xi_i} - \frac{N_{i+1,p-1}(\xi)}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \right] \dots \dots \dots (I.2.3)$$

**I.2.2.3. Graphes de quelques fonctions B-Splines**

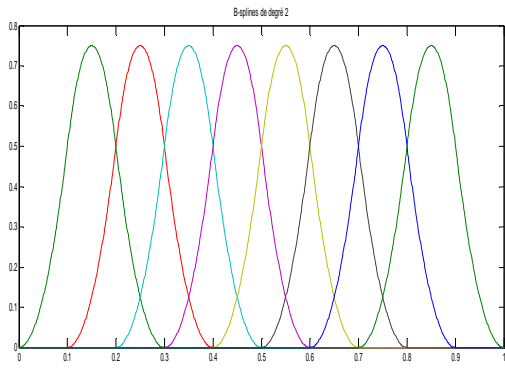
**I.2.2.3.1. B-Splines uniformes**



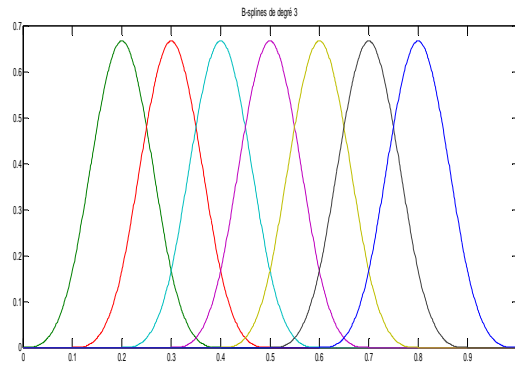
a. Dix fonctions B-splines de degré 0



b. neuf fonctions B-splines de degré 1



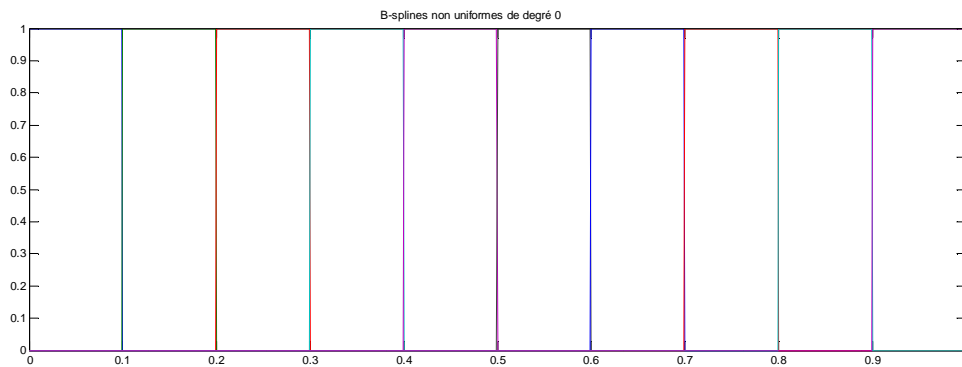
c. Huit fonctions B-splines de degré 2



d. Sept fonctions B-splines de degré 3

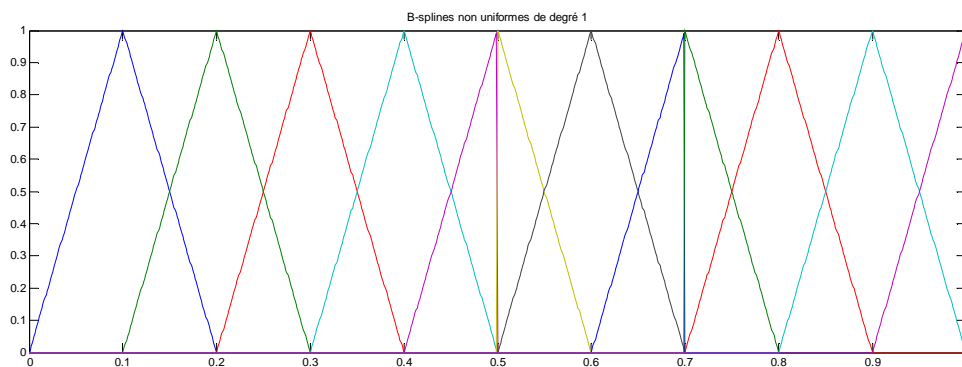
**Figure (I.2.1):** Fonctions B-Splines uniformes de degré 0 à 3

### I.2.2.3.2. B-Splines non uniformes



**Figure (I.2.2):** B-Splines non uniformes de degré 0 et de vecteur nodal

$$u=[0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1 \ 1 \ 1]$$



**Figure (I.2.3):** B-Splines non uniformes de degré 1 et de vecteur nodal

$$u=[0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1 \ 1 \ 1]$$

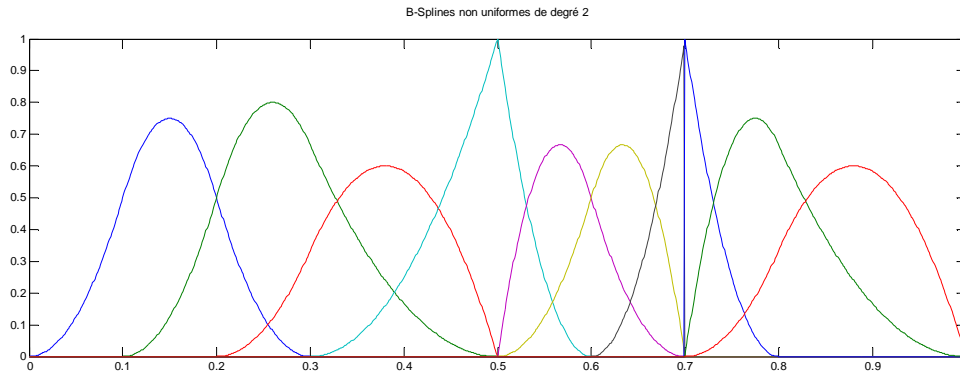


Figure (I.2.4):B-Splines non uniformes de degré 2 et de vecteur nodal  $u=[0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.8 \ 1 \ 1 \ 1]$ ;

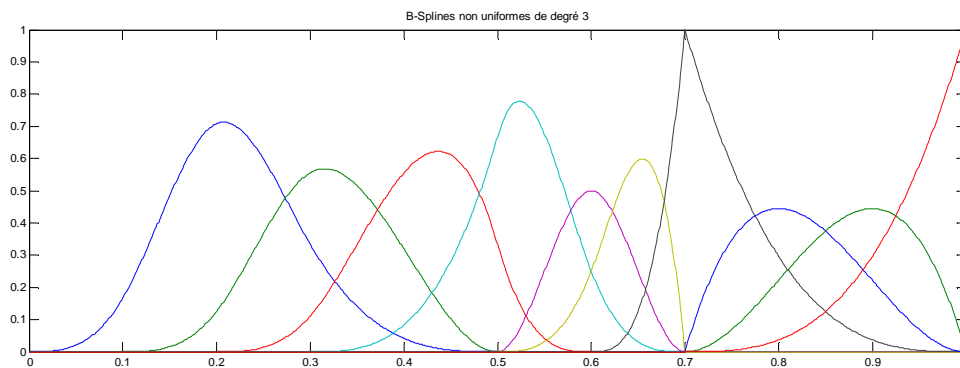


Figure (I.2.5): B-Splines non uniformes de degré 2 et de vecteur nodal  $u=[0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.7 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ ;

#### 1.2.2 .4. Dérivées des fonctions de bases b-Spline

Les dérivées des fonctions de base B-Spline peuvent être représentées d’une manière efficace en terme de B-Spline d’ordre inférieur, Cela se déduit de la définition récursive des fonctions de base B-Spline vues précédemment. Pour un polynôme donné d’ordre  $p$  et de vecteur nodal  $\Xi$ , la drivée de la  $i^{\text{ème}}$  fonction de base est donnée par :

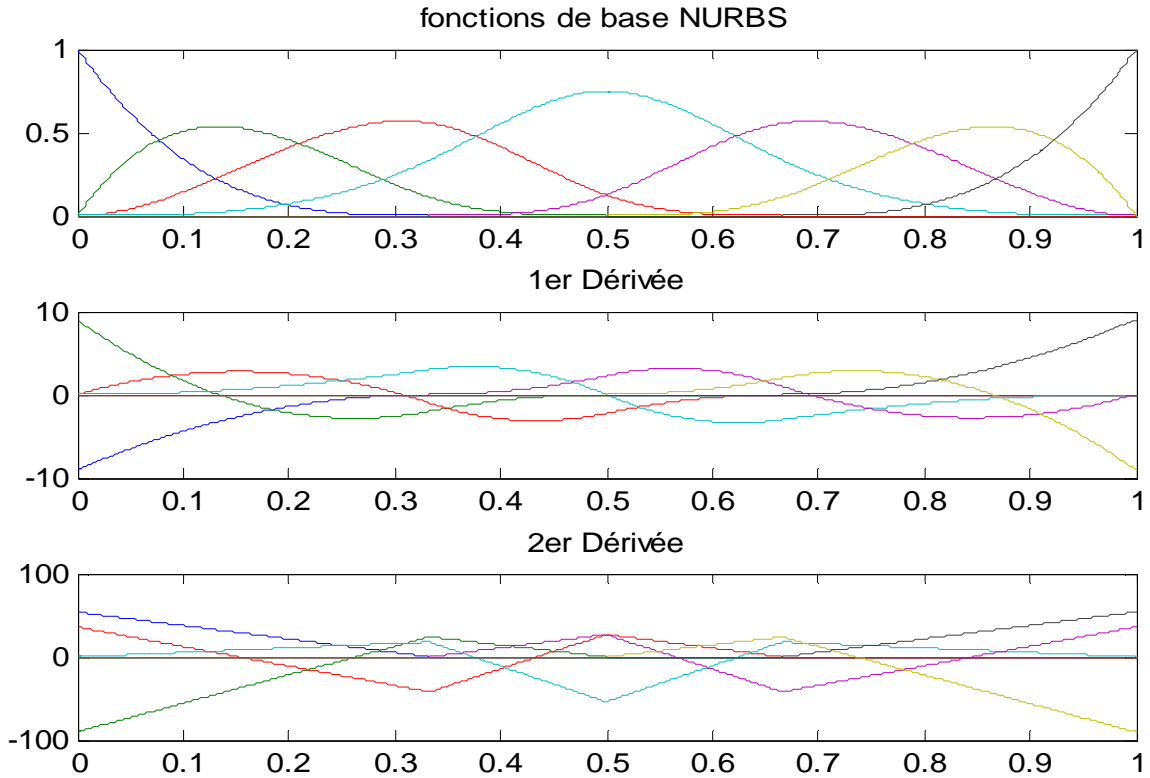
$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \dots \dots \dots (I. 2. 4)$$

Cette relation peut être généralisée pour les dérivées d’ordre supérieur par différenciation de chacun de ses termes pour aboutir à :

$$\frac{d^k}{d^k \xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \left( \frac{d^{k-1}}{d^{k-1} \xi} N_{i,p-1}(\xi) \right) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left( \frac{d^{k-1}}{d^{k-1} \xi} N_{i+1,p-1}(\xi) \right) \dots \dots \dots (1. 2. 5)$$

Le dénominateur de plusieurs de ces fonctions peut s'annuler en présence de nœuds répétés, quand cela arrive, on adopte la convention :  $\frac{x}{0} = 0$ .

La figure (I.2.6) donne l'allure de la première et seconde dérivées des fonctions de bases d'ordre  $p=3$  définies par un vecteur nodal  $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 1/3, 1/2, 2/3, 1, 1, 1, 1\}$ .



**Figure (I.2.6):** Allure de la première et seconde dérivées des fonctions de bases B-Spline d'ordre  $p=3$  définies par un vecteur nodal  $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 1/3, 1/2, 2/3, 1, 1, 1, 1\}$ .

**I.2.3. Courbes B-Splines non rationnelles uniformes**

**Définition :** On se donne un vecteur de nœuds  $(\xi_0, \dots, \xi_m)$  et des points  $P_0, \dots, P_m$  dans  $R^n$ , appelés points de contrôles et qui forment ensemble le polygone de contrôle. La courbe B-Spline de degré  $p$  associée est :

$$C(t) = \sum_{i=0}^{i=n} N_{i,p}(\xi) P_i \dots\dots\dots(I.2.6)$$

Avec  $N_{i,p}$  : Fonctions de base uniforme de degré  $p$   
 Pour  $p=2$  la courbe B-Spline est de degré 2

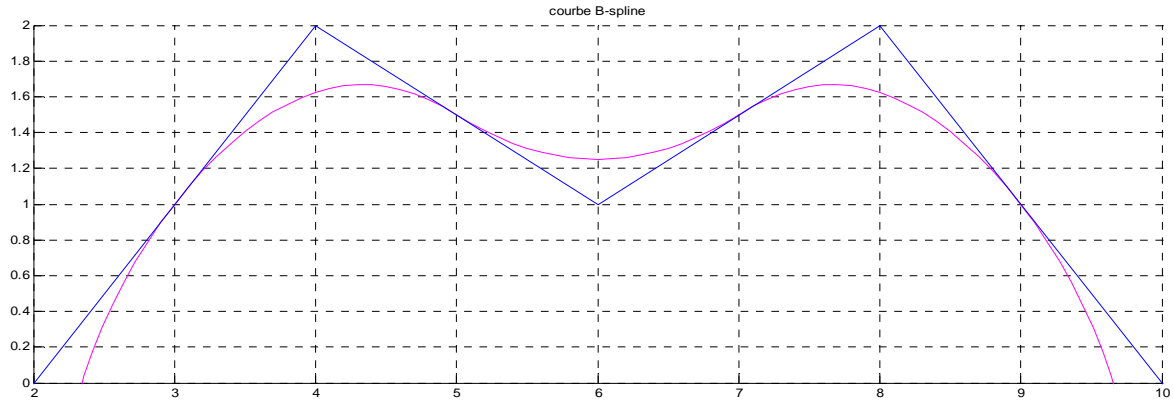


Figure (I.2.7): Courbe B-Spline non rationnelle uniforme

### I.2.4. Courbes B-Splines non rationnelles non uniformes

Contrairement à la courbe précédente, ici on utilise une fonction de base B-Spline non uniforme (vecteur nœud non uniforme) au lieu d'une base uniforme.

Les figures ci-dessous montrent les courbes B-Splines non uniforme et l'influence du vecteur nœud sur la forme de la courbe B-Spline.

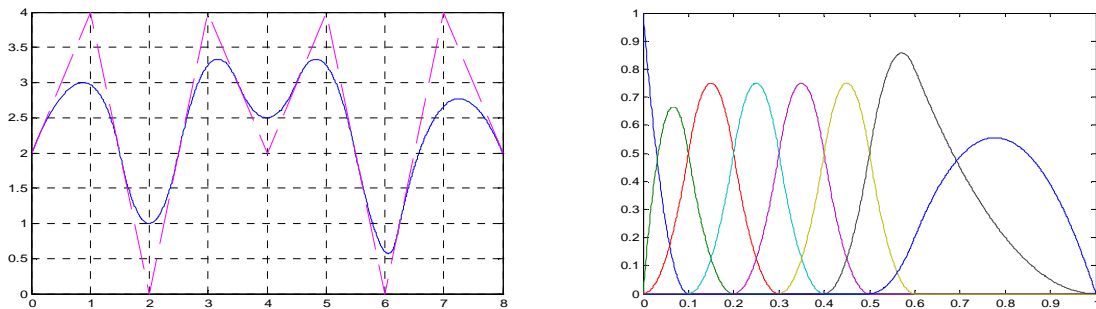


Figure (I.2.8): Courbe B-Spline et sa fonction de base de vecteur nœud  
 $\xi = [0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

Maintenant on prend la même courbe, mêmes points de contrôle mais en multipliant les Nœuds sur le vecteur nœud.

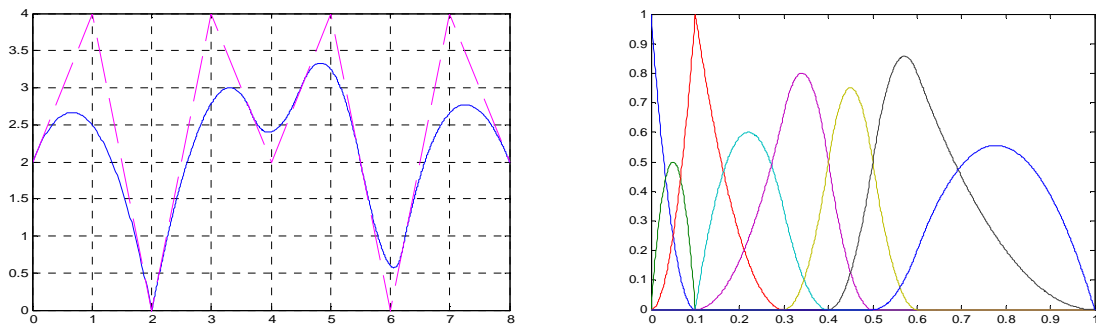
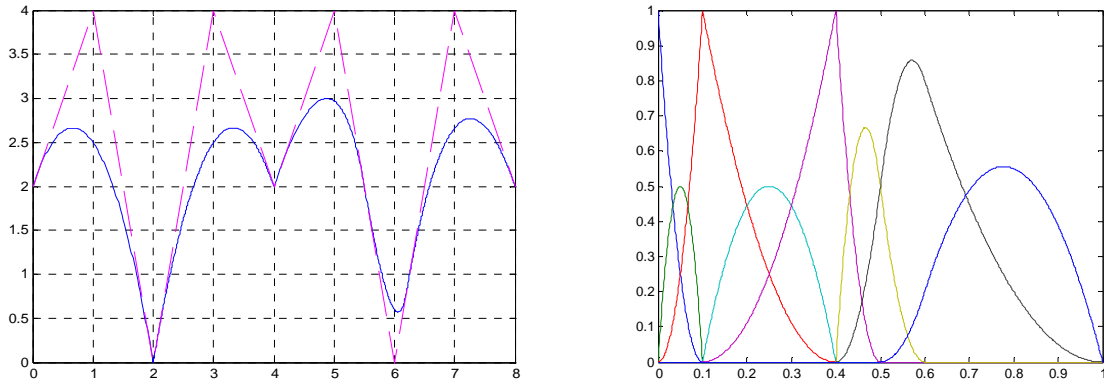


Figure (I.2.9): Courbe B-Spline et sa fonction de base de vecteur nœud  
 $\xi = [0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$



**Figure (I.2.10):** Courbe B-Spline et sa fonction de base de vecteur nœud  $\xi = [0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.4 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

**Remarque :** Dans le cas où les fonctions B-Splines sont les polynômes de Bernstein (deux nœuds de même multiplicité) on parle alors de courbe de Bézier. Dans ce cas, seuls les  $k + 1$  premiers points de contrôle interviennent.[4]

Ces courbes possèdent des propriétés géométriques très intéressantes, propriétés qui découlent presque immédiatement des propriétés des fonctions B-Splines

La courbe B-Spline  $C(\xi)$  a les propriétés suivantes :

1. Les composantes de  $C(\xi)$  sont sur chaque intervalle  $[\xi_i; \xi_{i+1}[$  des polynômes de degré  $p$ ,
2. en un nœud de multiplicité  $r$  la courbe est de classe  $C^{p-r}$ ,
3. Si  $\xi \in [\xi_i; \xi_{i+1}[$  alors  $C(\xi)$  ne dépend que des points de contrôle  $P_{i-p}, \dots, P_i$  et se trouve dans l'enveloppe convexe de ces points,
4. Si  $\xi_i = \dots = \xi_{i+p} < \xi_{i+p+1}$  est un nœud de multiplicité  $p+1$  alors on a  $C(\xi_i) = P_i$  et  $C'(\xi_i) = \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_i} (P_{i+1} - P_i)$

On dit qu'une courbe B-Spline est vissée aux extrémités si elle est de degré  $k$  et si les nœuds extrêmes  $\xi_0$  et  $\xi_m$  sont de multiplicité  $p+1$  ( $\xi_0 = \dots = \xi_k < \xi_{k+1}$  et  $\xi_{m-k} = \dots = \xi_m$ ). Dans ce cas le nombre de points de contrôle effectivement utiles est  $m-k-1$ . De plus, il résulte des propriétés précédentes qu'une courbe vissée aux extrémités est tangente à son polygone de contrôle aux extrémités. Noter que les courbes de Bézier sont des courbes vissées aux extrémités.[4]

### I.2.4.1. Contrôle local

Il est possible de contrôler localement une B-Spline. La modification d'un point de contrôle ou d'un nœud ne modifie pas toute la courbe.

Modification d'un nœud :

La modification d'un nœud n'influe que sur les  $N_{i,k}$  qui sont autour. Pour  $k = 3$ , la modification d'un nœud  $t_i$  ne touche que les courbes de  $N_{i-4,k}$  à  $N_{i,k}$  (ceci n'est évidemment pas valable aux extrémités). Cela modifie la B-Spline pour les  $t$  entre  $t_{i-4}$  et  $t_{i+4}$ . [6]

Modification d'un point de contrôle :

La modification d'un point de contrôle  $P_i$  fait varier la courbe pour les  $t$  entre  $t_i$  et  $t_{i+4}$ .

### I.2.4.2. Autres propriétés

Les B-Splines ont beaucoup de propriétés, parmi elles :

- La différentiabilité, il est possible de dériver une B-Spline.
- L'invariance par transformation affine.
- La périodicité d'une B-Spline, si nous avons des nœuds et des points de contrôle périodique alors la courbe l'est aussi.
- Si les points de contrôle sont symétriques, la courbe l'est également.
- Ajout d'un nœud sans modifier la courbe.
- Elévation du degré sans faire bouger la courbe.

### I.2.4.3. Avantages et inconvénients

Les B-Splines résolvent les problèmes que nous avons constatés pour les courbes de Bézier, il est possible de contrôler les B-Splines localement et l'ajout de points n'augmente pas le degré de la courbe. De plus, il est possible d'interpoler les points de contrôle même si ce n'est pas très concluant.

Le principal inconvénient des B-Splines est leur complexité. En effet, il n'est pas facile de calculer les fonctions de base. Les points de contrôle ne sont plus les seuls paramètres des courbes, il y a aussi le vecteur nœud. Il est difficile de gérer les points et les nœuds en même temps. C'est pourquoi nous ne faisons que varier les points de contrôle, les nœuds sont généralement ouverts aux extrémités et uniforme au milieu. [6]

### I.2.5. Courbes B-Splines rationnelles non uniformes (NURBS)

Excepté les paraboles, une Spline non rationnelle ne peut représenter exactement une conique ; on peut considérer que c'est un défaut, bien qu'une cubique soit capable d'en fournir une acceptable approximation.

C'est pourquoi on a étudié les formes rationnelles qui remédient à cet inconvénient.

**Définition** : Soit  $\xi$  un vecteur de nœuds, soit P un polygone de contrôle dans  $R^n$  et  $w_i$  des poids attachés à chaque point de contrôle  $P_i$ . On suppose que les poids ne sont pas tous nuls. La courbe B-Spline rationnelle (NURBS) de degré p associée a ces données est la courbe paramétrée par

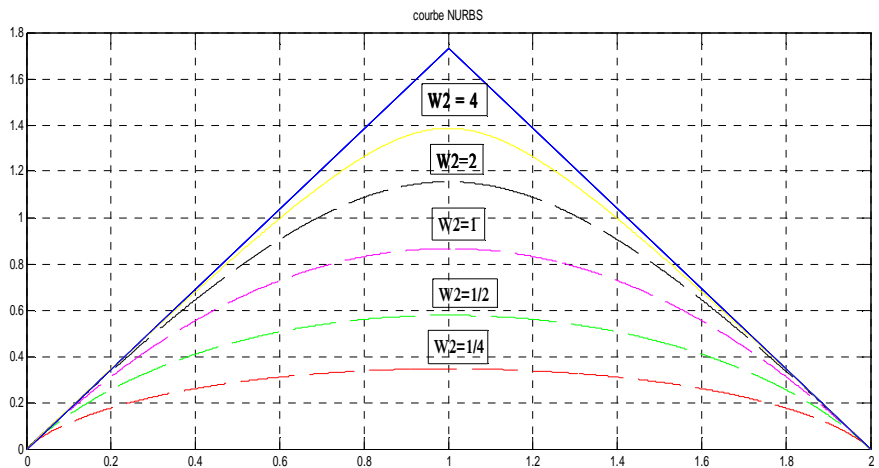
$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) P_i \dots \dots \dots (I.2.7)$$

$$\text{Avec } R_i^p = \frac{N_{i,p} w_i}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p} w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \dots \dots \dots (I.2.8)$$

$R_i^p$  : Les fonctions de base NURBS

$N_{i,p}$  : fonctions de base B-Spline

Dans laquelle les  $w_i$  sont des poids attribués aux sommets  $P_i$  du polygone caractéristique, et cette forme se prête à la représentation exacte des coniques (ellipse, parabole, hyperbole). Comme illustré sur la figure ci-dessous.



**Figure (I.2.11):** Courbes NURBS avec  $\xi=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$  ;  $w=[1 \ w_2 \ 1]$  ;  $P=\{(0,0),(1,\sqrt{3}),(2,0)\}$

Lorsque le vecteur de nœuds prend la forme spéciale  $(0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1)$ , on parle de courbe de Bézier rationnelle.

Autrement dit, la courbe B-Spline rationnelle est la projection centrale de la courbe B-Spline dans  $R^{n+1}$  associée au vecteur de nœuds  $\xi$  et aux points de contrôle  $R_i = (w_i, w_i P_i) \in R^{n+1}$ . Noter que le polygone de contrôle P est la projection centrale du polygone R. D'autre part, multiplier tous les poids par une même constante non nulle ne change rien.[5]

**Exemple :**

Construction d'un cercle parfait par le modèle NURBS (B-Spline rationnel).

On prend les mêmes points de contrôles, le même vecteur nœud.

$$P = \{(1,0) ; (0,0) ; (1/2, \sqrt{3}/2) ; (1, \sqrt{3}) ; (3/2, \sqrt{3}/2) ; (2,0) ; (1,0)\}$$

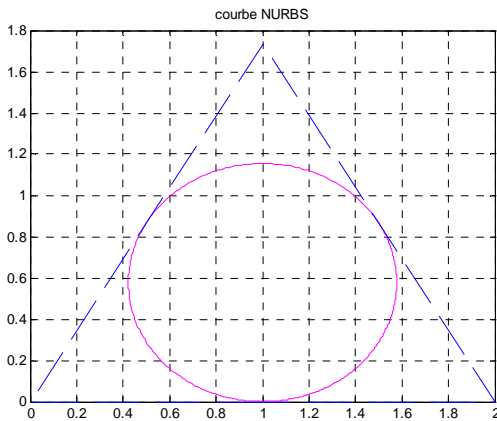
$$\xi = [0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.2 \ 1 \ 1 \ 1]$$

La figure (a) :  $w = [1 \ 0.5 \ 1 \ 0.5 \ 1 \ 0.5 \ 1]$

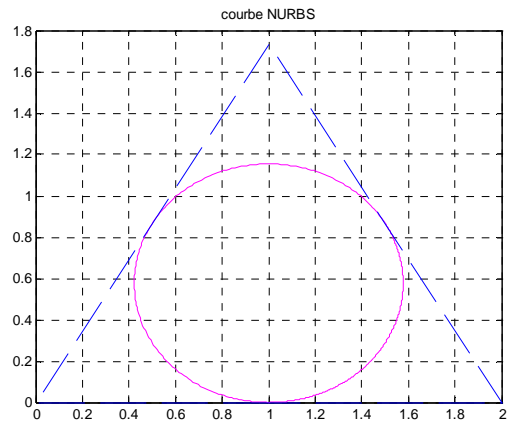
La figure(b) : on a multiplié le vecteur poids par une constante non nulle qui est :2

Donc ;  $w = [2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2]$

Et le résultat on a deux cercles identiques



(a):  $w=[1 \ 0.5 \ 1 \ 0.5 \ 1 \ 0.5 \ 1]$

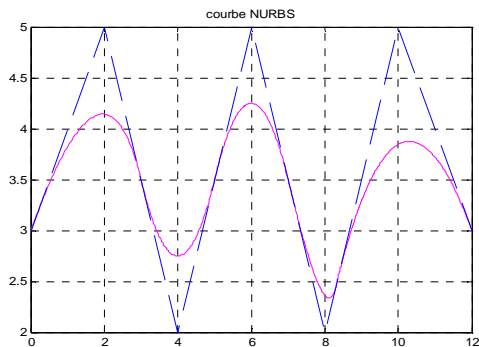


(b):  $w=[2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2]$

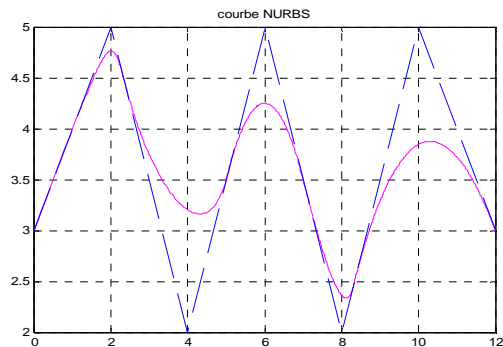
Figure(I.2.12): Modélisation d'un cercle parfait par le modèle NURBS

### I.2.5.1. Effet des poids sur les courbes NURBS

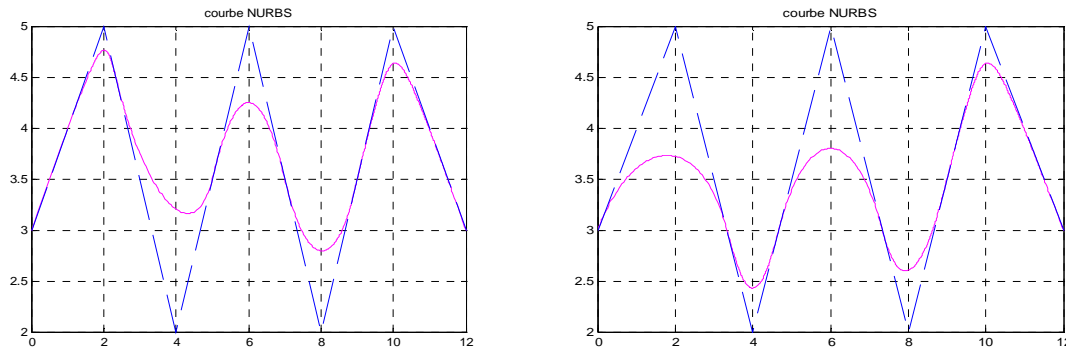
On se limite au cas où les poids sont positifs ou nuls. Clairement, si on décrit un point Q de  $R^n$  comme barycentre de points  $P_i$  avec poids positifs ou nuls  $w_i$ , lorsque le rapport  $w_i/\sum w_i$  tend vers l'infini, le point Q se rapproche de  $P_i$ . Par conséquent, augmenter le poids d'un point de contrôle rapproche la courbe de ce point. Ce phénomène est illustré dans les figures ci-dessous.



(a):  $W = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$



(b):  $W = [1 \ 5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$



(c):  $W = [ 1 5 1 1 1 5 1 ]$

(d):  $W = [ 1 0.5 1 0.5 1 5 1 ]$

Figure(I.2.13) : Effet des poids sur les courbes NURBS

**Remarque :**

Contrairement aux courbes de Bézier les courbes NURBS ne souffrent pas de manque de contrôle local, la modification d'un point ne fait pas varier toute la courbe. Dans l'industrie automobile, par exemple, il est gênant que toute la pièce change de forme lorsque nous voulons seulement faire varier une partie de la pièce. Au niveau des calculs, il faudra calculer à nouveau toute la pièce.[5]

**I.2.5.2. Propriétés géométriques des courbes NURBS**

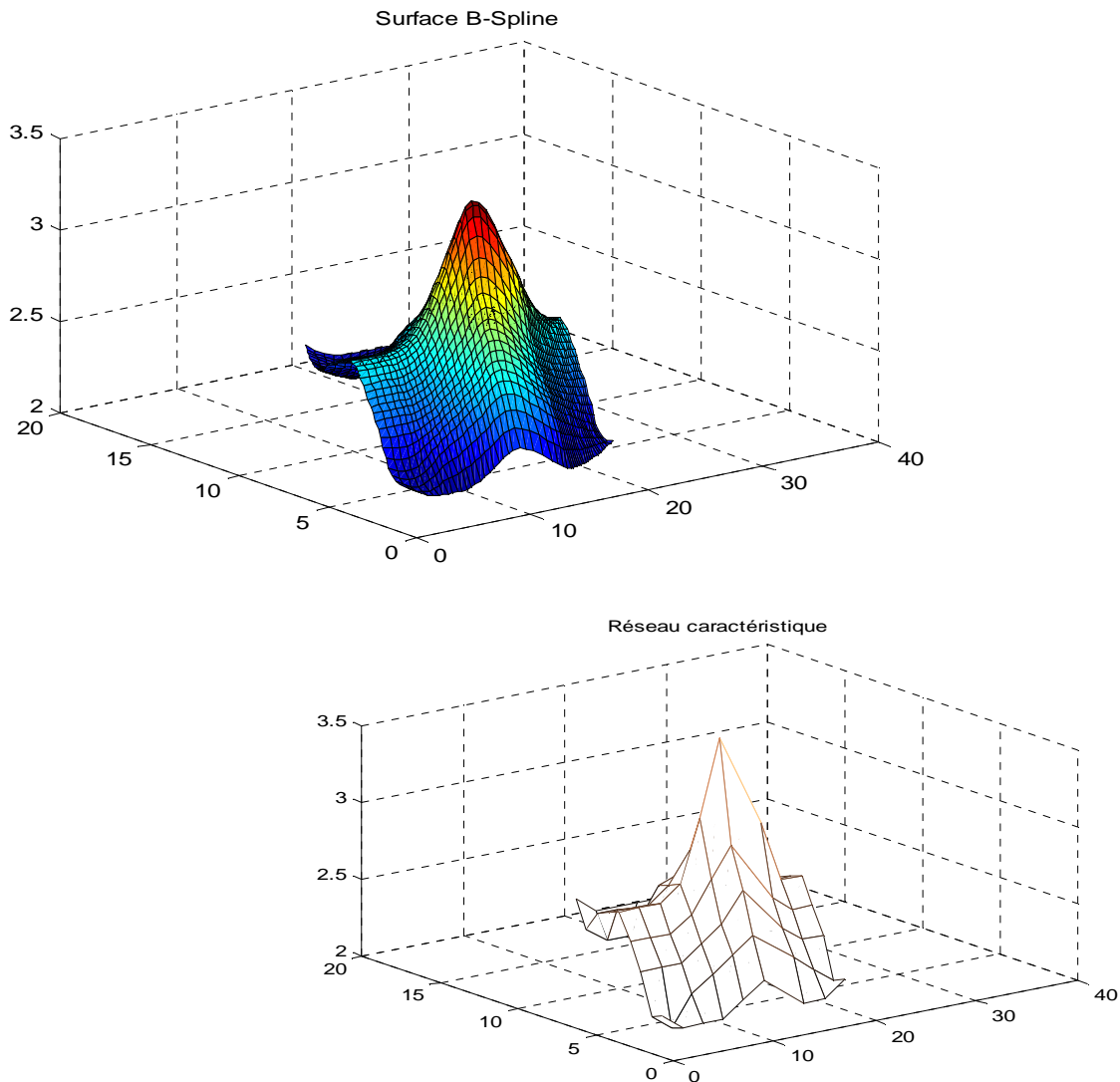
- Représentation des coniques : en choisissant correctement les points de contrôle toute forme conique peut être représentée exactement par une NURBS.
- Invariance affine : la transformée affine d'une courbe NURBS est la courbe passant par la transformée des points de contrôle.
- Invariance projective : contrairement aux courbes B-Spline l'image d'une courbe NURBS par une projection est la courbe NURBS passant par la projection des points.(Les poids doivent être recalculés en fonction de la matrice de projection)
- Dérivation et continuité : pour tout  $\xi$  qui n'est pas une valeur nodale,  $C(\xi)$  est infiniment dérivable, si  $\xi$  est égale à une valeur nodale de multiplicité  $k$  alors  $C(\xi)$  est  $(m-k)$  fois dérivable ( $C(\xi)$  n'est pas nécessairement continue).
- Les courbes NURBS peuvent représenter exactement toutes les formes coniques usuelles de conception
- L'influence de la variation des poids  $W_i$  sur les pôles  $P_i$  est analogue à celle de Bézier rationnelle sauf que la variation dans le cas de NURBS est locale.

### I.2.6. Surfaces B-Spline non rationnelles

**Définition :** On étend naïvement à la dimension 2 l'idée des courbes B-splines. Le domaine de variation des paramètres est un rectangle, produit cartésien de deux intervalles. On se donne deux vecteurs de nœuds  $\xi_0, \dots, \xi_{n+p+1}$  et  $\eta_0, \dots, \eta_{m+q+1}$ . On se donne, à la place d'un polygone de contrôle, un réseau de contrôle, des points  $P_{ij}$  indexés par les couples de nœuds  $i = 0, \dots, n+p+1, j = 0, \dots, m+q+1$ .

La surface B-Spline de bi-degré  $(p, q)$  associée aux vecteurs de nœuds  $\xi$  et  $\eta$  et au réseau de contrôle  $P$  est la surface paramétrée :

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) B_{ij} \dots \dots \dots (I.2.9)$$



**Figure (I.2.14):** Surface B-Spline non rationnelle et son réseau caractéristique et de vecteurs nodaux :  $\Xi = [0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$  et  $H = [0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

### I.2.6.1. Propriétés des surfaces B-Spline

Plusieurs des propriétés des surfaces B-Spline résultent de leur nature de produit tensoriel.

- La base est non négative et forme une partition de l'unité, puisque,  $\forall(\xi, \eta) \in [\xi_1, \xi_{n+p+1}] \times [\eta_1, \eta_{m+q+1}]$ ,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) = \left( \sum_{i=1}^p N_{i,p}(\xi) \right) \left( \sum_{j=1}^q M_{j,q}(\eta) \right) \dots \dots \dots (I. 2. 10)$$

- Le nombre de dérivées partielles continues dans une direction paramétrique donnée, peut être déterminé à partir du vecteur nodal et de l'ordre polynomial associé à cette direction.
- La surface procède les propriétés de covariance affine et d'enveloppe convexe (voir la figure 1.3.1).
- Le support local des fonctions de base découle directement des fonctions de base monodimensionnelles qui les forment. Le support d'une fonction donnée  $\tilde{N}_{i,j;p,q}(\xi, \eta) = N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta)$  est exactement :  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$ .

### I.2.7. Surfaces B-Spline rationnelles non uniforme NURBS

Comme pour les surfaces polynomiales, la surface NURBS est donnée par le produit tensoriel suivant :

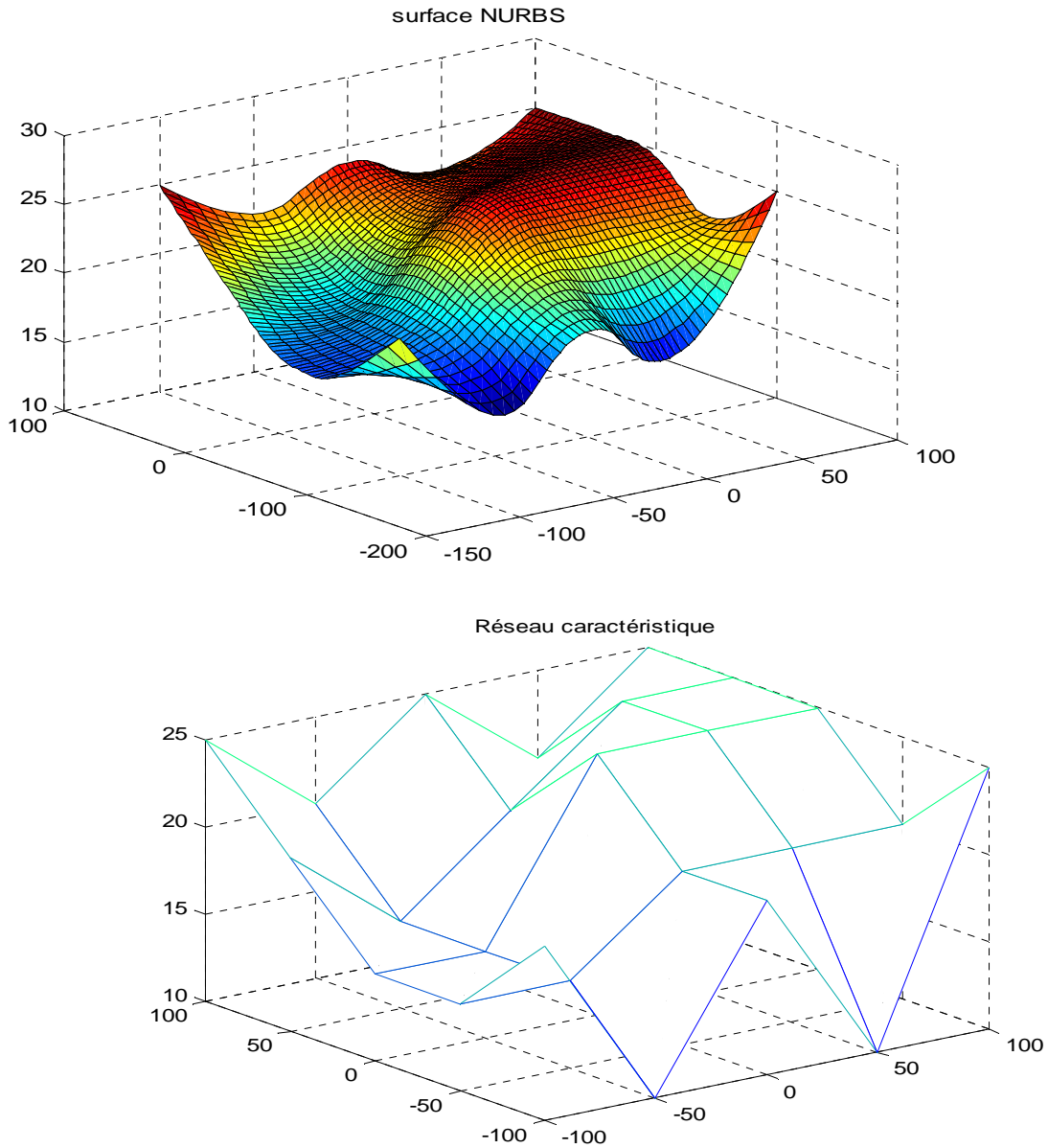
$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,p}(\xi) T_{j,q}(\eta) P_{i,j} \dots \dots \dots (I. 2. 11)$$

$R_{i,p}(\xi)$  et  $T_{j,q}(\eta)$  sont des fonctions de bases NURBS.

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \dots \dots \dots (I. 2. 13)$$

$P_{i,j}$  est un réseau de points de contrôle et  $w_{i,j}$  : les poids des points de contrôle.

Ces fonctions de base rationnelles héritent des propriétés de leurs prédécesseurs polynomiales, en particulier : la continuité des fonctions et le support local qui découlent directement du vecteur nodal, exactement comme avant. La base constitue toujours une partition de l'unité et elle est positive en tout point.



**Figure (I.2.15):** Surface B-Spline rationnelle non uniforme et son réseau caractéristique et de vecteurs nodaux:  $\Xi=[0\ 0\ 0\ 0.2\ 0.5\ 1\ 1\ 1]$ ,  $H=[0\ 0\ 0\ 0.2\ 0.5\ 1\ 1\ 1]$

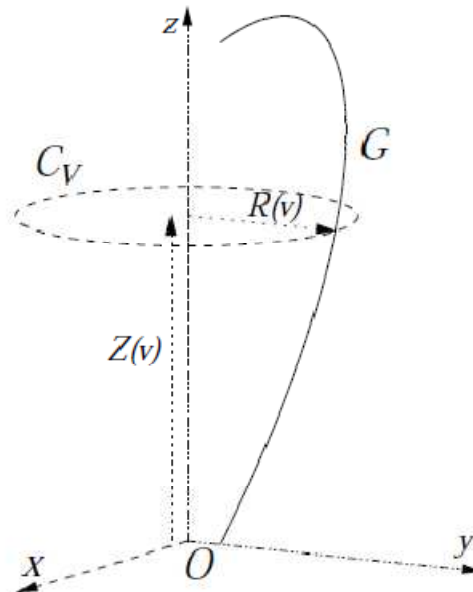
**Remarque :**

Il faut noter que les poids jouent un rôle important dans la définition de la base, mais ils ne sont associés à aucune interprétation géométrique explicite dans ce cadre, et nous sommes libres de choisir les points de contrôle indépendamment de leur poids associés. Aussi, il faut noter que si tous les poids sont égaux, alors,  $R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = N_{i,j;p,q}(\xi, \eta)$  et la courbe est de nouveau polynomiale, ainsi, les B-Splines ne sont qu'un cas particulier de NURBS [6].

### I.2.8. Construction des surfaces particulières par les NURBS

#### I.2.8.1. Les surfaces de révolution

Soit une courbe  $C(\xi)$  dans un plan donné  $(\vec{Ox}, \vec{Oz})$  de l'espace, Une surface de révolution est engendrée par la rotation de  $C(\xi)$  autour d'un axe de rotation défini, soit  $\vec{Oz}$ . Le réseau caractéristique (points de contrôle), doit être construit sur des plans perpendiculaires à  $\vec{Oz}$  (Voir la figure (I.2.16)).



Figure(I.2.16) : Schémas de construction d'une surface de révolution.

En pratique, l'une des méthodes pour la construction d'une surface de révolution de type NURBS, est la suivante :

La surface est donnée par l'équation :

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^q R_{i,2}(\xi) \cdot R_{j,n}(\eta) \cdot B_{ij} \dots \dots \dots (I.2.14)$$

Tel que :

- $R_{i,2}$  et  $R_{j,n}$  sont des fonctions de base NURBS d'ordres respectifs 2 et  $n$ .
- Afin d'assurer la révolution circulaire, on peut choisir les poids de la base quadratique  $R_{i,2}$ , comme suit :  $w_i = \{1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\}$ . et son vecteur nodal :  $\Xi = \{0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1\}$ , voir la figure (1.3.3) (construction d'un cercle).
- Enfin, les points de contrôle doivent être minutieusement choisis afin que le réseau caractéristique soit symétrique par rapport à l'axe de révolution

L'exemple suivant (figure : (I.2.17)) illustre une surface de révolution autour de l'axe passant par le point  $A(2, 2, 0)$  et parallèle à l'axe  $\vec{Oz}$ .

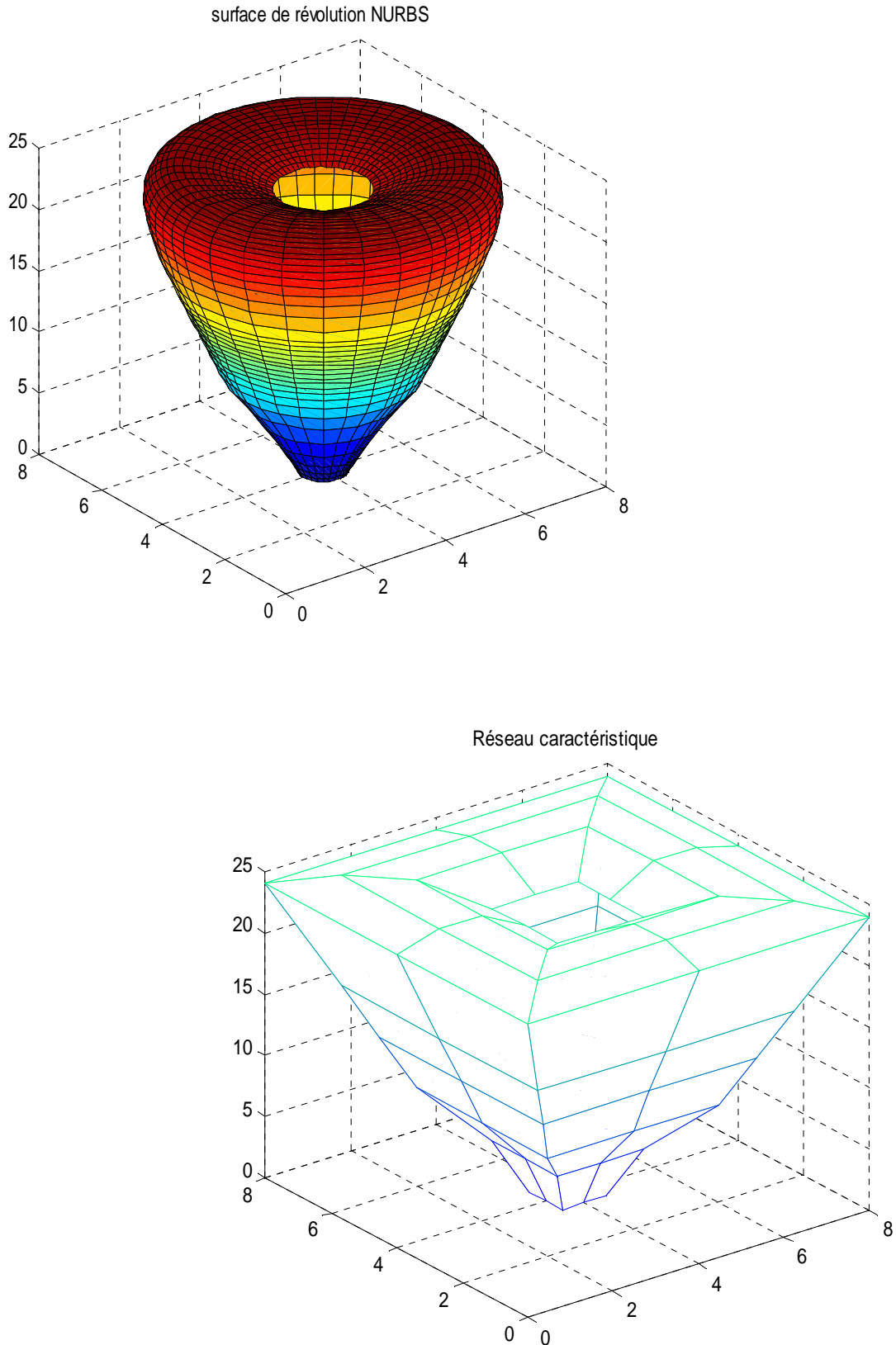
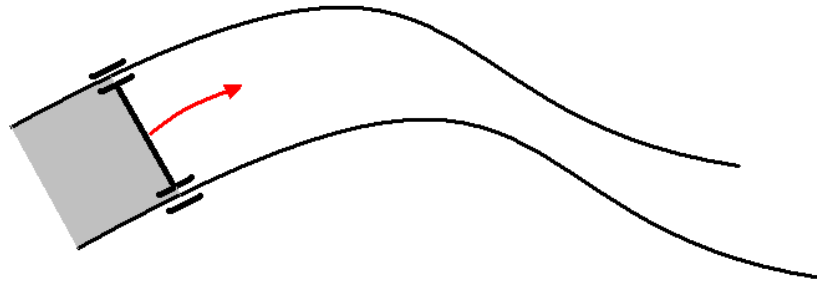


Figure (I.2.17) : Surface de révolution autour d'un axe parallèle à  $\vec{Oz}$ , et son réseaux caractéristique.

### I.2.8.2. Les surfaces réglées

La surface réglée est engendrée à partir d'une droite appelée « règle » glissant le long de deux courbes (figure (I.2.18)).



**Figure (I.2.18) :** Schémas de construction d'une surface réglée.

En pratique, une surface réglée est donnée par la relation (I.2.15) :

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^2 R_{i,p}(\xi) \cdot R_{j,1}(\eta) \cdot B_{ij} \dots \dots \dots (I. 2. 15)$$

Telle que :  $R_{i,p}(\xi)$  et  $R_{j,1}$  sont des fonctions de base NURBS, respectivement d'ordre p et 1.

La figure (I.2.19) représente une surface réglée engendrée par une génératrice droite glissant le long de deux courbes (a) et (b) représentées dans la figure (I.2.21).



**Figure (I.2.19) :** Surface réglées NURBS

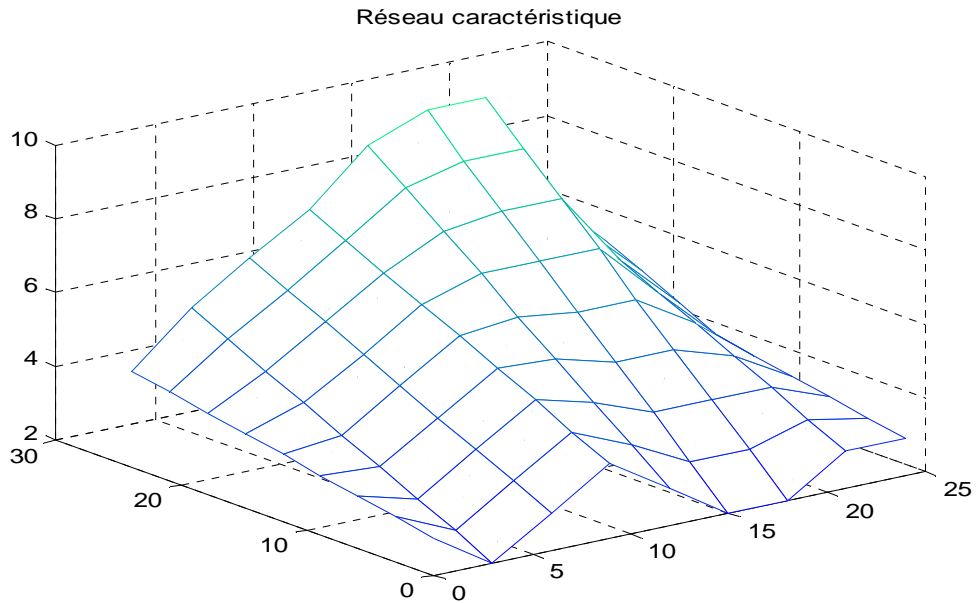
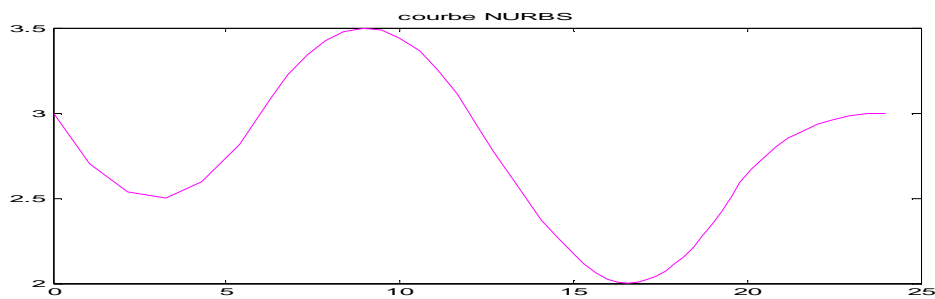
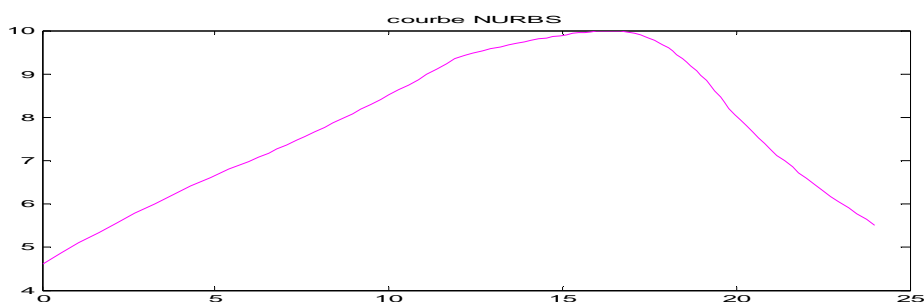


Figure (I.2.20): Réseau caractéristique de la surface réglée de la figure (I.2.17)



(a): courbe NURBS



(b): courbe NURBS

Figure (I.2.21) : Les deux courbes utilisées pour la surface réglée figure(I.2.19)

### I.2.8.3. Les surfaces d'extrusion

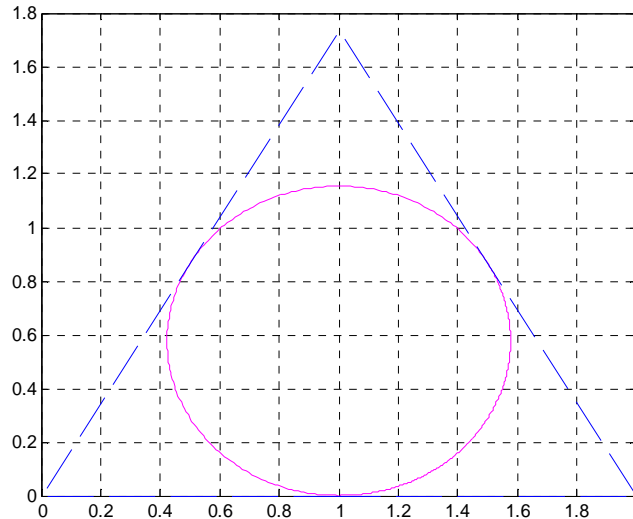
Une surface d'extrusion est générée par une courbe généralement plane glissant le long d'une trajectoire rectiligne ou non, la courbe initiale reste parallèle à elle-même

(translation pure), dans la figure (I.2.23), l'extrusion d'une surface cylindrique se fait par la translation d'une esquisse génératrice qui est un cercle.

**Exemple :** construction d'une surface cylindrique.

**I.2.8.3.a. Construction de la génératrice**

Le cercle est l'une des géométries les plus courantes en dessin d'ingénierie. Il existe plusieurs manières de construire un cercle en utilisant les NURBS. Dans la figure (1.2.22), un cercle complet a été construit à partir de trois arcs de 120° mais en n'utilisant qu'une seule courbe NURBS d'ordre  $p=2$ . La courbe (le cercle) est formée de trois éléments, une continuité de  $C^0$  est assurée par la multiplicité  $m=p$  aux frontières des éléments, dans cet exemple, le vecteur nodal est  $\Xi=[0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.2 \ 1 \ 1 \ 1]$ , il faut noter que le cercle a été fermé en positionnant le premier et dernier points de contrôles dans la même position. Le tableau (I.2.1) représente les coordonnées des points de contrôles est leur masses respectives.



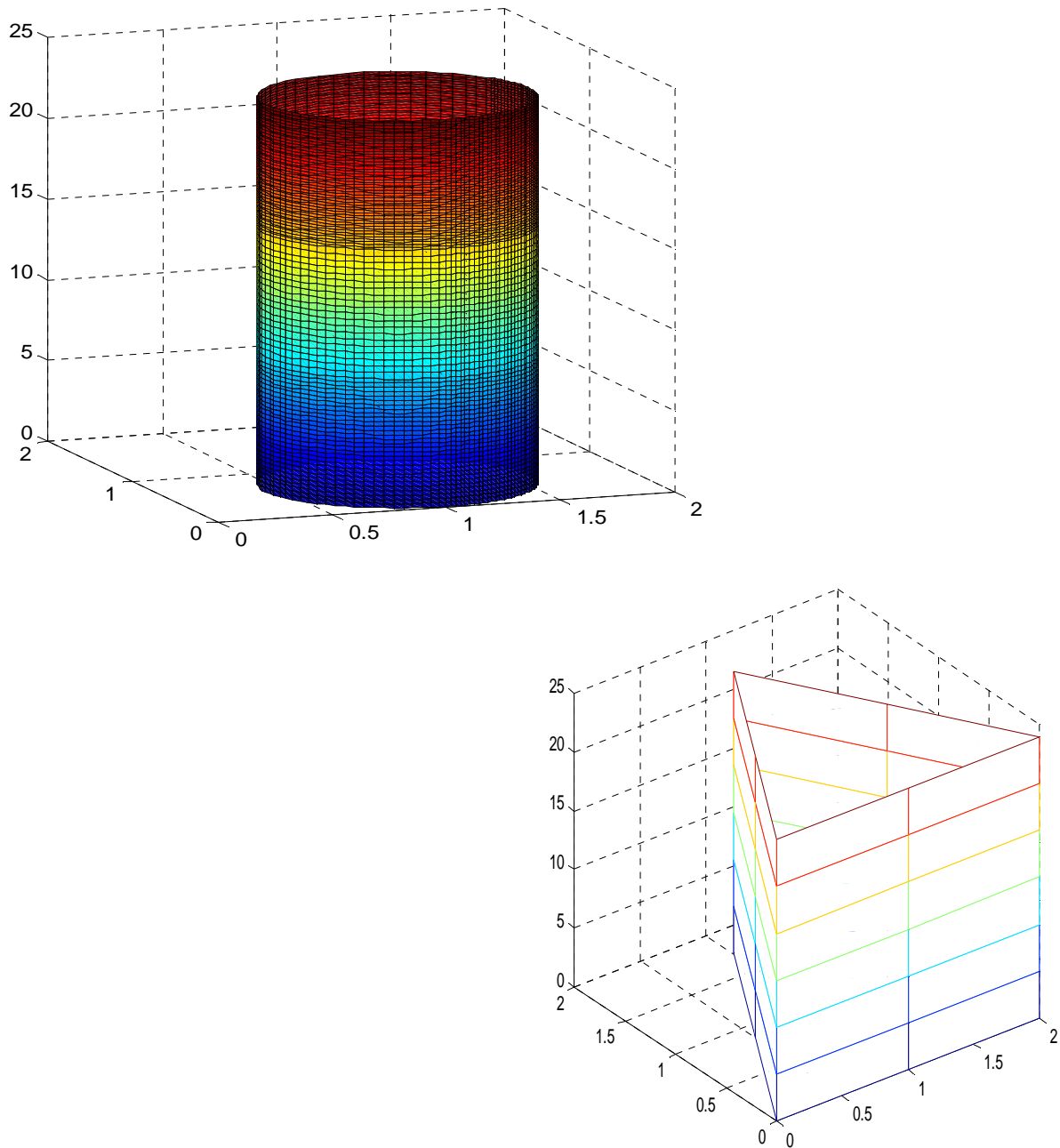
**Figure (I.2.22):** Génératrice de la surface d'extrusion (Courbe NURBS)

<b>i</b>	<b>xi</b>	<b>yi</b>	<b>wi</b>
1	1	0	1
2	0	0	1/2
3	1/2	$\sqrt{3}/2$	1
4	1	1	1/2
5	2/3	$\sqrt{3}/2$	1
6	2	0	1/2
7	1	0	1

**Tableau (I.2.1):** Coordonnées des points de contrôle et leurs poids respectifs.

**I.2.8.3.b. L'extrusion :** la surface B-Spline est extrudée en faisant glisser sa generatrice dans la direction  $z$ , cela se fait en introduisant une deuxieme base NURBS d'ordre 1, la base est ainsi :  $R_{i,j}^{2,1}(\xi, \eta) = S_{i,2}(\xi) \times T_{j,1}(\eta)$  , telle que  $S_{i,2}(\xi)$  et  $T_{j,1}(\eta)$

sont des fonctions de base NURBS, respectivement d'ordre  $p=2$  et  $q=1$ . le reseau de points de contrôles est donné par le tableau (I.2.1).



**Figure (I.2.23):** Surface d'extrusion NURBS et son Réseau caractéristique

### I.3. Conclusion

Les éléments géométriques utilisés en CAO ont été développées en présentant les principaux avantages et inconvénients.

Ceci nous a permis de maîtriser la programmation et l'implémentation de ces modèles en vue de les utiliser en analyse isogéométrique.

La maîtrise du modèle mathématique nous permet d'apporter des modifications au modèle d'analyse s'il a lieu.

# *CHAPITRE (II)*

---

## *METHODE DES ELEMENTS FINIS*

## II. METHODE DES ELEMENTS FINIS

### II.1. Introduction

Les codes éléments finis font maintenant partie des outils couramment utilisés lors de la conception et l'analyse des produits industriels. Les outils d'aide à la modélisation devenant de plus en plus perfectionnés, l'utilisation de la méthode des éléments finis s'est largement développée et peut sembler de moins en moins une affaire de spécialistes. Si l'utilisation de la méthode se démocratise de par la simplicité croissante de mise en œuvre, la fiabilité des algorithmes et la robustesse de la méthode, il reste néanmoins des questions essentielles auxquelles l'ingénieur devra répondre s'il veut effectuer une analyse par éléments finis dans de bonnes conditions :

- formaliser les non dits et les réflexions qui justifient les choix explicites ou implicites de son analyse du problème ;
- évaluer la confiance qu'il accorde aux résultats produits ;
- analyser les conséquences de ces résultats par rapport aux objectifs visés.

Il ne faut pas perdre de vue que l'analyse des résultats nécessite une bonne compréhension des différentes étapes mathématiques utilisées lors de l'approximation, pour pouvoir estimer l'erreur du modèle numérique par rapport à la solution exacte du problème mathématique. Sans oublier que le modèle numérique ne peut fournir que des résultats relatifs aux informations contenues dans le modèle mathématique qui découle des hypothèses de modélisation.

L'idée fondamentale de cette méthode est de discrétiser le problème en décomposant le domaine matériel à étudier en éléments de forme géométrique simple. Sur chacun de ces éléments il sera plus simple de définir une approximation nous permettant d'appliquer les méthodes d'approximations. Il ne reste alors qu'à assembler les formes matricielles élémentaires pour obtenir les équations relatives à la structure à étudier. C'est sous cette forme pragmatique qu'elle est utilisée par les ingénieurs, et que nous allons maintenant l'aborder.[8]

### II.2. Démarche éléments finis

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis, qui sont détaillées par la suite, sont les suivantes :

- discrétisation du milieu continu en sous domaines ;
- construction de l'approximation nodale par sous domaine ;
- calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème ;

- assemblage des matrices élémentaires; prise en compte des conditions aux limites ;
- résolution du système d'équations.

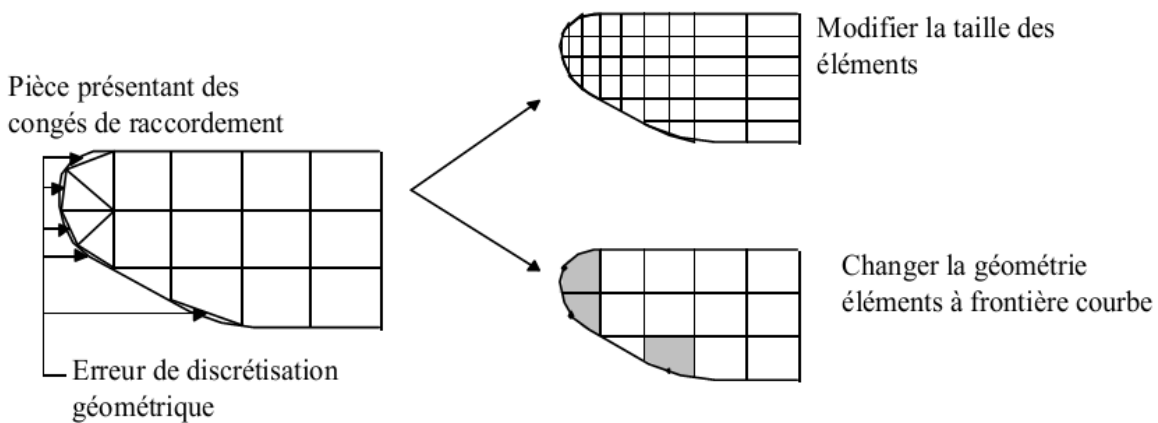
**II.2.1. Discrétisation du milieu**

**II.2.1.1. Discrétisation géométrique**

Cette opération consiste à décomposer le domaine continu en un nombre fini de sous domaines « éléments finis »

$$D = \sum_{e=1}^{ne} D_e \text{ telle que } \lim_{taille\ des\ e \rightarrow 0} \cup_e D_e = D \dots \dots \dots (II.2.1)$$

Il ne doit y avoir ni recouvrement ni trou entre deux éléments ayant une frontière commune. De plus lorsque la frontière du domaine est complexe, une erreur de discrétisation géométrique est inévitable. Cette erreur doit être estimée, et éventuellement réduite en modifiant la forme ou en diminuant la taille des éléments concernés.[8]



**Figure(II.1) : Erreur de discrétisation géométrique.**

Les problèmes de l'ingénieur sont généralement complexes, des hypothèses simplificatrices sont donc nécessaires pour définir le cadre de l'étude, sans avoir à représenter la « réalité physique » dans toute sa complexité.

Les DAO des pièces complexes devront être simplifiés avant d'être calculés par éléments finis

**II.2.2. Approximation nodale**

La méthode des éléments finis est basée sur la construction systématique d'une approximation  $u^*$  du champ des variables  $u$  par sous domaine. Cette approximation est construite sur les valeurs approchées du champ aux nœuds de l'élément. On parle de représentation nodale de l'approximation ou plus simplement d'approximation nodale.

**II.2.2.1. Définition de l'approximation nodale**

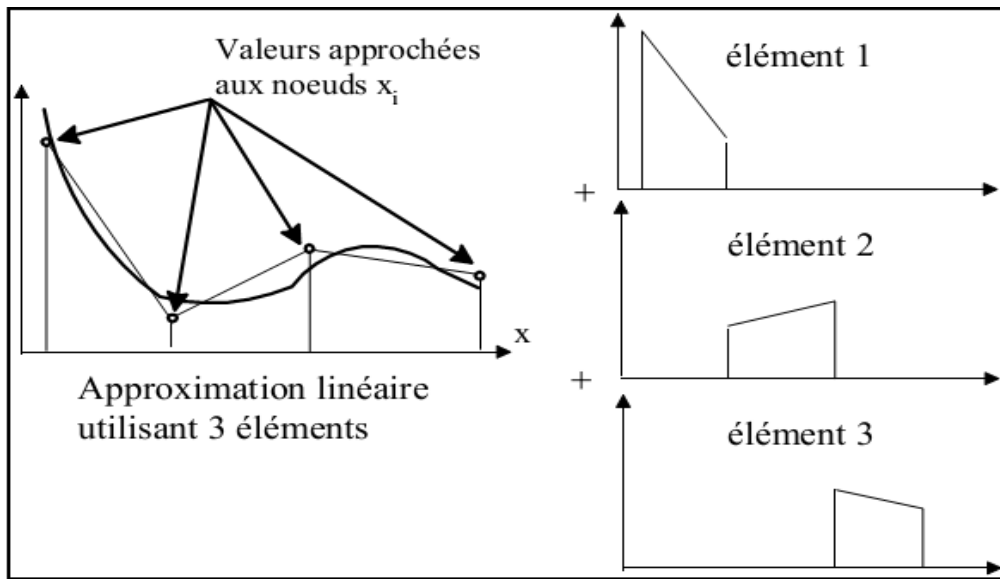
L'approximation par éléments finis est une approximation nodale par sous domaines ne faisant intervenir que les variables nodales du domaine élémentaire  $De$  :

$$\forall M \in De \quad \{u^*(M)\} = [N(M)] \{U_n\} \dots\dots\dots(II.2.2)$$

$u^*$  valeur de la fonction approchée en tout point  $M$  de l'élément

$[N]$  matrice des fonctions d'interpolation de l'élément

$\{U_n\}$  variables nodales relatives aux nœuds d'interpolation de l'élément



**Figure (II.2):** Approximation nodale linéaire à une dimension

**II.2.2.2. Construction de l'approximation nodale**

L'approximation nodale est construite à partir d'une approximation générale :

$$\forall M \quad u^*(M) \forall = \langle \Phi(M) \rangle \{a\} \dots\dots\dots(II.2.3)$$

$\langle \Phi(M) \rangle$  est une base de fonctions connues indépendantes (en général une base polynomiale)

$\{a\}$  est le vecteur des  $n$  paramètres de l'approximation (paramètres généralisés)

Les  $n$  nœuds  $M_i$  sont des points de l'élément pour lesquels l'approximation  $u^*$  est identifiée à la valeur du champ de variables  $u$ .

$$\{U_n\} = \{u^*(M_n)\} = \langle \Phi(M_n) \rangle \{a\} \dots\dots\dots(II.2.4)$$

Inversons ces relations pour exprimer les paramètres généralisés  $\{a\}$  en fonction des variables nodales  $\{U_n\}$

$$\{a\} = [T] \{U_n\} \text{ avec } [T] = \begin{bmatrix} \langle \dots \rangle \\ \langle \Phi(M_i) \rangle \\ \langle \dots \rangle \end{bmatrix}^{-1} \dots\dots\dots(II.2.5)$$

En reportant ce résultat dans l'approximation, nous obtenons la matrice des fonctions d'interpolation.

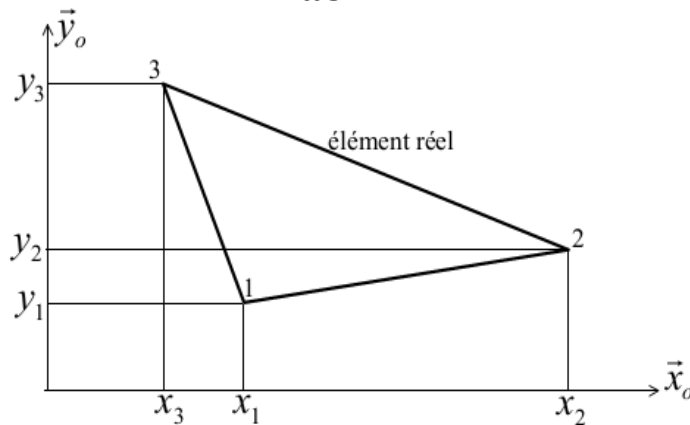
$$\langle \mathbf{N}_{(M)} \rangle = \langle \Phi_{(M)} \rangle [\mathbf{T}] \dots\dots\dots(\text{II.2.6})$$

Qui satisfont la propriété suivante  $\forall = M_i \quad N_j(M_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

Illustration de la construction des fonctions d'interpolation d'un élément triangulaire quelconque

Soit un élément triangulaire à trois nœuds, nous avons trois variables nodales à identifier. Nous cherchons donc une approximation polynomiale linéaire de la forme :

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{1} \ \mathbf{x} \ \mathbf{y}] \begin{Bmatrix} \mathbf{a1} \\ \mathbf{a2} \\ \mathbf{a3} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(\text{II.2.7})$$



Figure(II.3) : Elément réel et ses coordonnées cartésiennes

Identifions les valeurs nodales :  $u^*(x_i, y_i) = u_i$

Nous obtenons la relation matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u1} \\ \mathbf{u2} \\ \mathbf{u3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{x1} & \mathbf{y1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{x2} & \mathbf{y2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{x3} & \mathbf{y3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a1} \\ \mathbf{a2} \\ \mathbf{a3} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(\text{II.2.8})$$

Il est simple de vérifier que la relation inverse est de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a1} \\ \mathbf{a2} \\ \mathbf{a3} \end{Bmatrix} = 1/2A \begin{bmatrix} \Delta 23 & \Delta 31 & \Delta 12 \\ \mathbf{y23} & \mathbf{y31} & \mathbf{y12} \\ \mathbf{x32} & \mathbf{x13} & \mathbf{x21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u1} \\ \mathbf{u2} \\ \mathbf{u3} \end{Bmatrix} \text{ Avec } \begin{cases} A \text{ aire du triangle} \\ x_{ij} = x_i - x_j \text{ et } y_{ij} = y_i - y_j \dots\dots(\text{II.2.9}) \\ \Delta_{ij} = x_i y_i - x_j y_i \end{cases}$$

Reportons ce résultat dans l'approximation, nous obtenons :

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{N1} \ \mathbf{N2} \ \mathbf{N3}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u1} \\ \mathbf{u2} \\ \mathbf{u3} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(\text{II.2.10})$$

Avec par permutation circulaire de i j k

$$\mathbf{N}_i = 1/2A (\Delta i k + x y_{jk} - y x_{jk}) \dots\dots\dots(\text{II.2.11})$$

**Remarque:**

- Les calculs sont relativement longs du fait de la forme quelconque de l'élément. En pratique les fonctions d'interpolation seront construites pour des éléments de référence possédant des propriétés géométriques permettant de simplifier ces calculs.
- Un élément de référence est un élément de forme géométrique simple (frontières rectilignes, bords de longueur unité). Le passage de l'élément de référence à l'élément réel sera réalisé par une transformation géométrique. Pour un élément de référence, l'approximation nodale est construite en suivant la démarche analytique précédente.[9]

La majorité des éléments de référence sont construits sur une base polynomiale de degré 1 ou 2. Le nombre de variables nodales à identifier étant égal à la dimension de la base.

**Bases polynomiales complètes:**

1D: linéaire [1, x]	2 variables
Quadratique [1, x, x <sup>2</sup> ]	3 variables
2D: linéaire [1, x, y]	3 variables
Quadratique [1, x, y, x <sup>2</sup> , xy, y <sup>2</sup> ]	6 variables
3D: linéaire [1, x, y, z]	4 variables
Quadratique [1, x, y, z, x <sup>2</sup> , xy, y <sup>2</sup> , xz, z <sup>2</sup> , yz]	10 variables

**Bases polynomiales incomplètes:**

2D: "bi - linéaire" [1, x, y, xy]	4 variables
3D: "tri - linéaire" [1, x, y, z, xy, xz, yz, xyz]	8 variables

Deux grandes familles d'éléments sont souvent présentées

- Les éléments de type Lagrange
- Les éléments de type Hermite

Pour les éléments de type Lagrange les variables nodales concernent uniquement le champ inconnu, alors que les variables nodales des éléments de type Hermite sont le champ et ses dérivées.[9]

**II.2.2.3. Les éléments de type Lagrange**

**i) Eléments à une dimension**

C'est un segment de droite de longueur unité. La variable de référence est  $s \in [0,1]$



**i.1) Approximation linéaire**

La base polynomiale utilisée est  $(1, s) \rightarrow 2$  nœuds

Les fonctions d'interpolation sont :

$$\begin{cases} N_1(s) = L_1 = 1 - s \\ N_2(s) = L_2 = s \end{cases} \dots\dots\dots(\text{II.2.12})$$

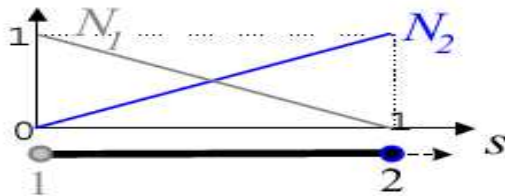


Figure (II.4): Élément de Lagrange linéaire

**i.2) Approximation quadratique**

Approximation  $(1, s, s^2) \rightarrow 3$  nœuds

Les fonctions d'interpolation sont :

$$\begin{aligned} N_1(s) &= L_1(2L_1-1) \\ N_2(s) &= 4L_1L_2 \dots\dots\dots(\text{II.2.13}) \\ N_3(s) &= L_2(2L_2-1) \end{aligned}$$

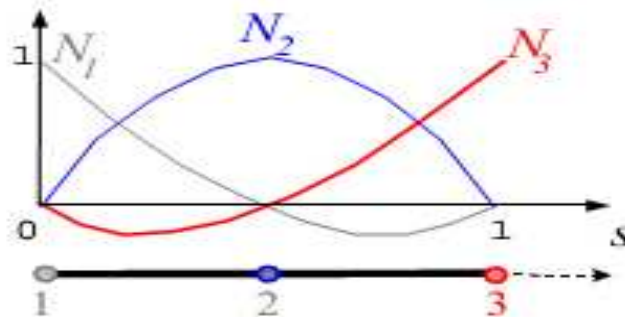


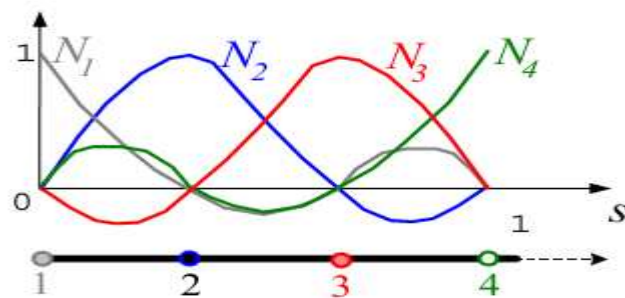
Figure (II.5): Élément de Lagrange quadratique

**i.3) Approximation cubique**

Approximation  $(1, s, s^2, s^3)$

Pour l'élément à 4 nœuds (1 variable par nœud) Les fonctions d'interpolations sont :

$$\begin{cases} N_1(s) = L_1/2(3L_1-1)(3L_1-2) \\ N_2(s) = 9/2(L_1L_2(3L_1-1)) \\ N_3(s) = 9/2(L_1L_2(3L_2-1)) \dots\dots\dots(\text{II.2.14}) \\ N_4(s) = L_2/2(3L_2-1)(3L_2-2) \end{cases}$$

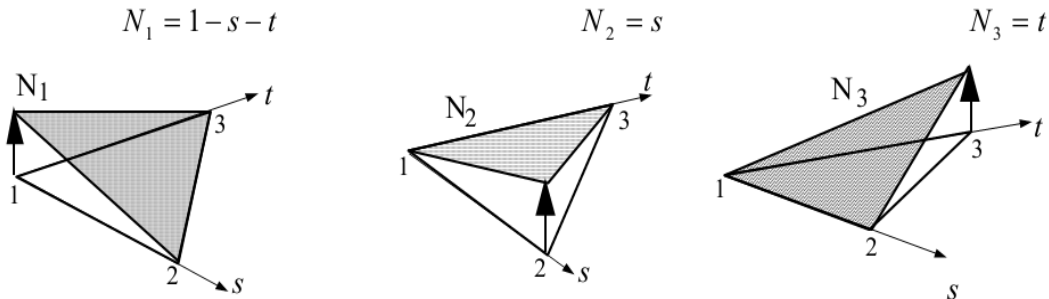


Figure(II.6): Élément de Lagrange cubique

**ii) Elément à deux dimensions**

**ii.1) Elément à deux dimensions triangulaires**

Pour ce type d'élément, l'approximation utilise la base polynomiale linéaire (1, s, t). L'élément de référence, aussi dit parent, est un triangle rectangle à trois nœuds de type « T 3 ».



**Figure(II.7) :** Fonctions d'interpolation linéaires du triangle

L'approximation quadratique quant à elle utilise la base (1, s, t, s<sup>2</sup>, st, t<sup>2</sup>). L'élément de référence est un triangle rectangle à six nœuds de type « T6 ».

Posons  $L_1 = 1 - s - t$ ,  $L_2 = s$  et  $L_3 = t$ . Pour :

– les trois nœuds sommet  $i = 1, 2, 3$ , les fonctions de forme s'écrivent :

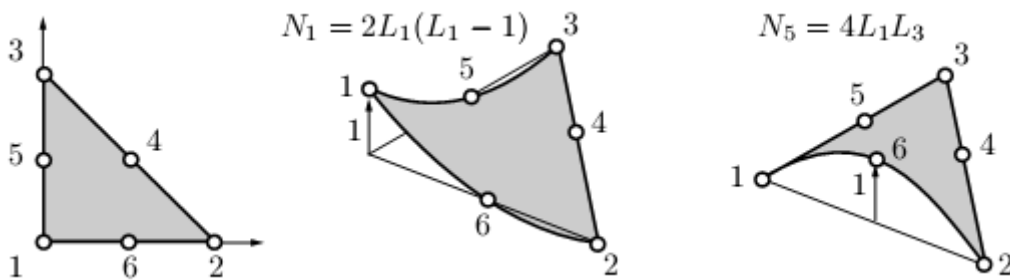
$$N_i = L_i(2L_i - 1)$$

– les trois nœuds d'interface  $i = 1, 2, 3$  :

$$N_{i+3} = 4L_j L_k$$

pour  $j \neq i, k \neq i, j$

La figure (II.8) donne une représentation de deux des fonctions d'interpolation. Les autres s'obtiennent par permutation des indices



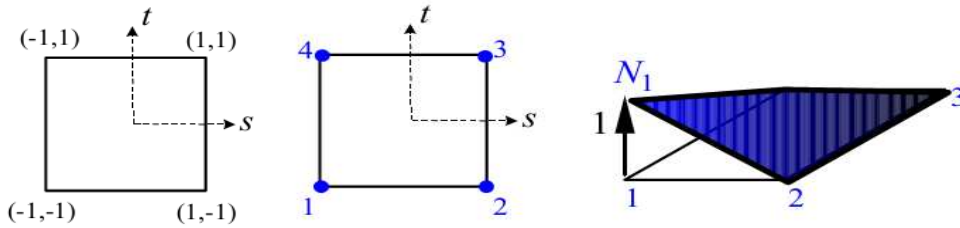
**Figure (II.8) :** Fonctions d'interpolation quadratiques du triangle. Les autres sont obtenues par rotation

**ii.2) Elément à deux dimensions rectangulaire**

L'approximation bilinéaire est déduite de la base polynomiale (1, s, t, st) sur  $(s,t) \in [-1, 1]$ . L'élément de référence est un carré à quatre nœuds de type « Q4 ». Les fonctions d'interpolation sont : [8]

$$\begin{aligned} N1 &= 1/4 * (1 - s) * (1 - t) ; N2 = 1/4 * (1 + s) * (1 - t) \\ N3 &= 1/4 * (1 + s) * (1 + t) ; N4 = 1/4 * (1 - s) * (1 + t) \dots\dots\dots (II.2.15) \end{aligned}$$

Sur la figure II.9, seule la fonction  $N_1$  est représentée, les autres s'obtenant par permutation.



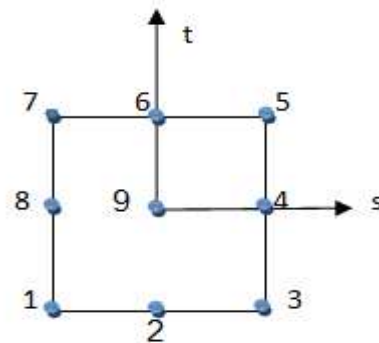
**Figure(II.9) :** Fonction d'interpolation  $N_1$  du quadrangle. Les autres sont obtenues par rotation

Et les premières dérivées  $\frac{dN_i}{ds}$ ;  $\frac{dN_i}{dt}$  sont représentées dans le tableau ci-dessous:

$\frac{dN_i}{ds}$	$\frac{dN_i}{dt}$
$\frac{dN_1}{ds} = -1/4 * (1 - t);$	$\frac{dN_1}{dt} = -1/4 * (1-s);$
$\frac{dN_2}{ds} = 1/4 * (1 - t);$	$\frac{dN_2}{dt} = -1/4 * (1+s);$
$\frac{dN_3}{ds} = 1/4 * (1 + t);$	$\frac{dN_3}{dt} = 1/4 * (1+s);$
$\frac{dN_4}{ds} = -1/4 * (1 + t);$	$\frac{dN_4}{dt} = 1/4 * (1-s);$

**Tableau (II.1) :** Dérivées des fonctions de forme Q4

De la même façon, on peut construire, à partir d'une base polynomiale complète, les fonctions d'interpolation des éléments rectangulaires à neuf nœuds type « Q9 ». Les fonctions d'interpolation sont :[10]



**Figure (II.10):** Élément de Lagrange biquadratique de type Q9

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4} * (s * t * (s - 1) * (t - 1)); & N_6 &= \frac{1}{4} * (-2 * t * (s + 1) * (s - 1) * (t + 1)) \\
 N_2 &= \frac{1}{4} * (-2 * t * (s + 1) * (s - 1) * (t - 1)); & N_7 &= \frac{1}{4} * (s * t * (s - 1) * (t + 1)) \\
 N_3 &= \frac{1}{4} * (s * t * (s + 1) * (t - 1)); & N_8 &= \frac{1}{4} * (-2 * s * (s - 1) * (t + 1) * (t - 1))
 \end{aligned}$$

$$N_4 = \frac{1}{4} * (-2 * s * (s + 1) * (t + 1) * (t - 1)); \quad N_9 = \frac{1}{4} * (4 * (s + 1) * (s - 1) * (t + 1) * (t - 1))$$

$$N_5 = \frac{1}{4} * (s * t * (s + 1) * (t + 1))$$

Et les premières dérivées  $\frac{dN_i}{ds}$ ;  $\frac{dN_i}{dt}$  sont représentés dans le tableau ci-dessous:

$\frac{dN_i}{ds}$	$\frac{dN_i}{dt}$
$\frac{dN_1}{ds} = \frac{1}{4} * (t * (2 * s - 1) * (t - 1));$	$\frac{dN_1}{dt} = \frac{1}{4} * (s * (s - 1) * (2 * t - 1));$
$\frac{dN_2}{ds} = \frac{1}{4} * (-4 * s * t * (t - 1));$	$\frac{dN_2}{dt} = \frac{1}{4} * (-2 * (s + 1) * (s - 1) * (2 * t - 1));$
$\frac{dN_3}{ds} = \frac{1}{4} * (t * (2 * s + 1) * (t - 1));$	$\frac{dN_3}{dt} = \frac{1}{4} * (s * (s + 1) * (2 * t - 1));$
$\frac{dN_4}{ds} = \frac{1}{4} * (-2 * (2 * s + 1) * (t + 1) * (t - 1));$	$\frac{dN_4}{dt} = \frac{1}{4} * (-4 * s * t * (s + 1));$
$\frac{dN_5}{ds} = \frac{1}{4} * (t * (2 * s + 1) * (t + 1));$	$\frac{dN_5}{dt} = \frac{1}{4} * (s * (s + 1) * (2 * t + 1));$
$\frac{dN_6}{ds} = \frac{1}{4} * (-4 * s * t * (t + 1));$	$\frac{dN_6}{dt} = \frac{1}{4} * (-2 * (s + 1) * (s - 1) * (2 * t + 1));$
$\frac{dN_7}{ds} = \frac{1}{4} * (t * (2 * s - 1) * (t + 1));$	$\frac{dN_7}{dt} = \frac{1}{4} * (s * (s - 1) * (2 * t + 1));$
$\frac{dN_8}{ds} = \frac{1}{4} * (-2 * (2 * s - 1) * (t + 1) * (t - 1));$	$\frac{dN_8}{dt} = \frac{1}{4} * (-4 * s * t * (s - 1));$
$\frac{dN_9}{ds} = \frac{1}{4} * (8 * s * (t^2 - 1));$	$\frac{dN_9}{dt} = \frac{1}{4} * (8 * t * (s^2 - 1));$

Tableau (II.2) : Dérivées des fonctions de forme Q9

**Approximation quadratique "Q8"** : (1, s, t, st, s<sup>2</sup>, t<sup>2</sup>, s<sup>2</sup>t, t<sup>2</sup>s)

Pour éviter d'avoir des nœuds internes, on utilise des bases polynomiales incomplètes mais symétriques contenant tous les monômes d'un même degré.[10]

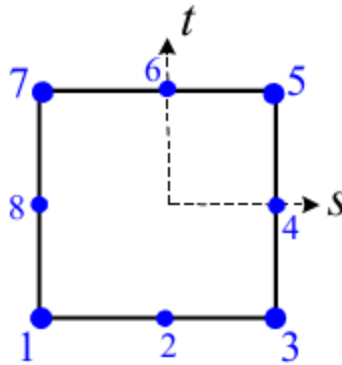


Figure (II.11): Élément de Lagrange biquadratique de type Q8

Les fonctions d'interpolation sont :

$$N_1 = -\frac{1}{4} * (1 - s) * (1 - t) * (1 + s + t);$$

$$N_2 = \frac{1}{2} * (1 - s^2) * (1 - t);$$

$$N_3 = \frac{1}{4} * (1 + s) * (1 - t) * (1 - s + t);$$

$$N_4 = (1 + s) * (1 - t^2);$$

$$\begin{aligned}
 N_5 &= -1/4*(1+s)*(1+t)*(1-s-t); \\
 N_6 &= 1/2*(1-s^2)*(1+t); \\
 N_7 &= -1/4*(1-s)*(1+t)*(1+s-t); \\
 N_8 &= 1/2*(1-s)*(1-t^2);
 \end{aligned}$$

Et les premières dérivés  $\frac{dNi}{ds}$ ;  $\frac{dNi}{dt}$  sont représentés dans le tableau ci-dessous:

$\frac{dNi}{ds}$	$\frac{dNi}{dt}$
$\frac{dN1}{ds} = 1/4*(1-t)*(2*s+t);$	$\frac{dN1}{dt} = 1/4*(1-s)*(s+2*t);$
$\frac{dN2}{ds} = -(1-t)*s;$	$\frac{dN2}{dt} = -1/2*(1-s^2);$
$\frac{dN3}{ds} = 1/4*(1-t)*(2*s-t);$	$\frac{dN3}{dt} = -1/4*(1+s)*(s-2*t);$
$\frac{dN4}{ds} = 1/2*(1-t^2);$	$\frac{dN4}{dt} = -(1+s)*t;$
$\frac{dN5}{ds} = 1/4*(1+t)*(2*s+t);$	$\frac{dN5}{dt} = 1/4*(1+s)*(s+2*t);$
$\frac{dN6}{ds} = -1/2*(1+t)*s;$	$\frac{dN6}{dt} = 1/2*(1-s^2);$
$\frac{dN7}{ds} = 1/4*(1+t)*(2*s-t);$	$\frac{dN7}{dt} = -1/4*(1-s)*(s-2*t);$
$\frac{dN8}{ds} = -1/2*(1-t^2);$	$\frac{dN8}{dt} = -(1-s)*t;$

Tableau (II.3) : Dérivées des fonctions de forme Q8

### II.2.3. Calcul des matrices élémentaires

Présentons maintenant les techniques numériques élémentaires (utilisées sur chaque élément) permettant de calculer les formes matricielles déduites de la formulation variationnelle (forme intégrale) d'un problème de physique. Dans un premier temps nous rappelons l'écriture matricielle de la forme variationnelle d'un problème de mécanique des structures, cette formulation est une des plus complexe car elle fait intervenir quatre champs «contraintes, déformations, forces et déplacements» [6]

#### II.2.3.1. Formulation en mécanique des structures

La forme intégrale du PTV (Principe des Travaux Virtuels)est :[8]

$$\forall \delta \vec{u} \int_D \rho \vec{u} \cdot \delta \vec{u} dV = - \int_D \vec{\sigma} : \overline{\delta \epsilon} dV + \int_D \vec{f} \cdot \delta \vec{u} dV + \int_D \vec{T} \delta \vec{u} dS \dots\dots(II.3.1)$$

Pour chaque élément  $\forall M \in De$

L'approximation nodale des déplacements :

$$\{\vec{u}(M)\} = [N(M)]\{Ue\} \dots\dots\dots(II.3.2)$$

Le champ des déformations

$$\{\epsilon(M)\} = [B(M)]\{Ue\} \text{ avec } [B(M)]=[L][N(M)] \dots\dots(II.3.3)$$

[B] : matrice d'opérateurs différentiels appliqués aux fonctions d'interpolation

Le champ des contraintes

$$\{\sigma(M)\} = [D(M)]\{\varepsilon(Me)\{Ue\} \dots\dots\dots(II.3.4)$$

D'où le premier terme :

$$\int_{De} \rho \vec{u} \cdot \delta \vec{u} \, dV = \{\delta Ue\}^T [Me]\{\ddot{U}e\} \dots\dots\dots(II.3.5)$$

Avec [Me]=  $\int_{De} [N(M)]^T \rho [N(M)] \, dV$  matrice de masse élémentaire.

Le second terme :

$$\int_D \bar{\sigma} \bar{\delta \varepsilon} \, dV = \{ [\delta Ue]^T [Ke]\{Ue\} \dots\dots\dots (II.3.6)$$

$$[Ke] = \int_{De} [B(M)]^T [D][B(M)] \, dV \text{ matrice de raideur élémentaire}$$

Le travail virtuel des champs de force donnés sur l'élément :

$$\delta Tde = \int_{De} \vec{f} \cdot \delta \vec{u} \, dV + \int_{De} \vec{Td} \delta \vec{u} \, dS \dots\dots\dots (II.3.7)$$

$$\delta Tde = \{\delta Ue\}^T \{F_{de}\} \dots\dots\dots (II.3.8)$$

$$\text{Avec } \{F_{de}\} = \int_{De} \langle N(M) \rangle^T \{\vec{f}\} \, dV + \int_{De} \langle N(M) \rangle^T \{\vec{Td}\} \, dS \dots\dots(II.3.9)$$

$$\text{Le PTV : } \forall De \quad [Me]\{\ddot{u}_n\} + [Ke]\{u_n\} = \{F_{de}\} + \{F_{ie}\} \dots\dots(II.3.10)$$

Les efforts inconnus représentent les actions mécaniques extérieures à l'élément considéré, on y trouve les efforts de liaison entre les éléments, et pour les éléments de frontière les efforts associés aux liaisons cinématiques de la structure.

Lors de l'assemblage des éléments d'une structure la somme des actions mécaniques « inter – élémentaire » est nulle. Il ne reste donc aux nœuds internes que les efforts donnés. Et aux nœuds de frontière les efforts de liaisons inconnus.[11]

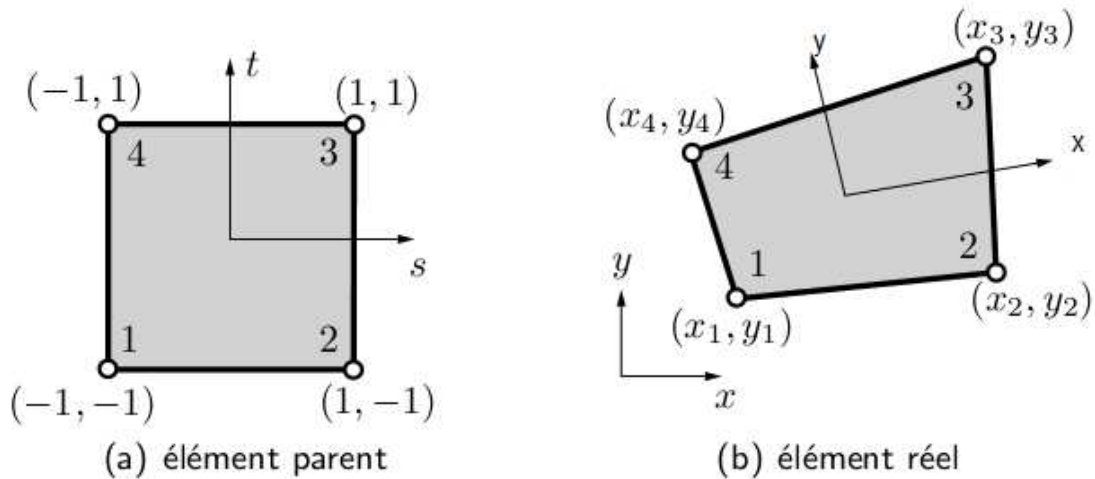
### II.2.3.2. Techniques de calcul au niveau élémentaire

Ce paragraphe présente quelques aspects du calcul numérique, indispensables pour comprendre, lors de l'analyse de résultats, les erreurs numériques liées au maillage.

#### Transformation géométrique

Tout élément réel peut être défini comme l'image par une transformation géométrique d'un élément parent dit de référence pour lequel les fonctions d'interpolation sont connues. La transformation géométrique définit les coordonnées (x, y, z) de tout point de l'élément réel à partir des coordonnées (s, t, u) du point

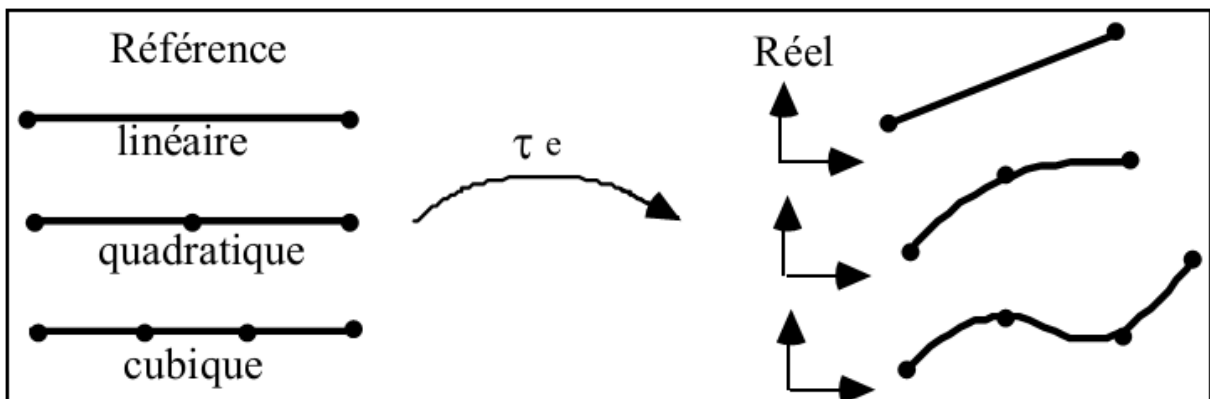
correspondant de l'élément de référence. Un même élément de référence permet donc de générer toute une classe d'éléments réels. A chaque élément du domaine réel correspond une transformation bijective unique. Chaque transformation dépend des coordonnées des nœuds géométriques de l'élément réel. Pour les éléments les plus simples, la transformation utilise une base de fonctions polynomiales et sera identique pour chaque coordonnée.[8]



Figure(II.12) : Transformation géométrique linéaire d'un carré

**Exemples d'éléments de référence classiques**

**Eléments à une dimension**



Figure(II.13) : Transformations géométriques d'éléments à une dimension

**Eléments à deux dimensions**

Pour ces éléments les transformations géométriques conduisent respectivement à des frontières linéaires, quadratiques ou cubiques.

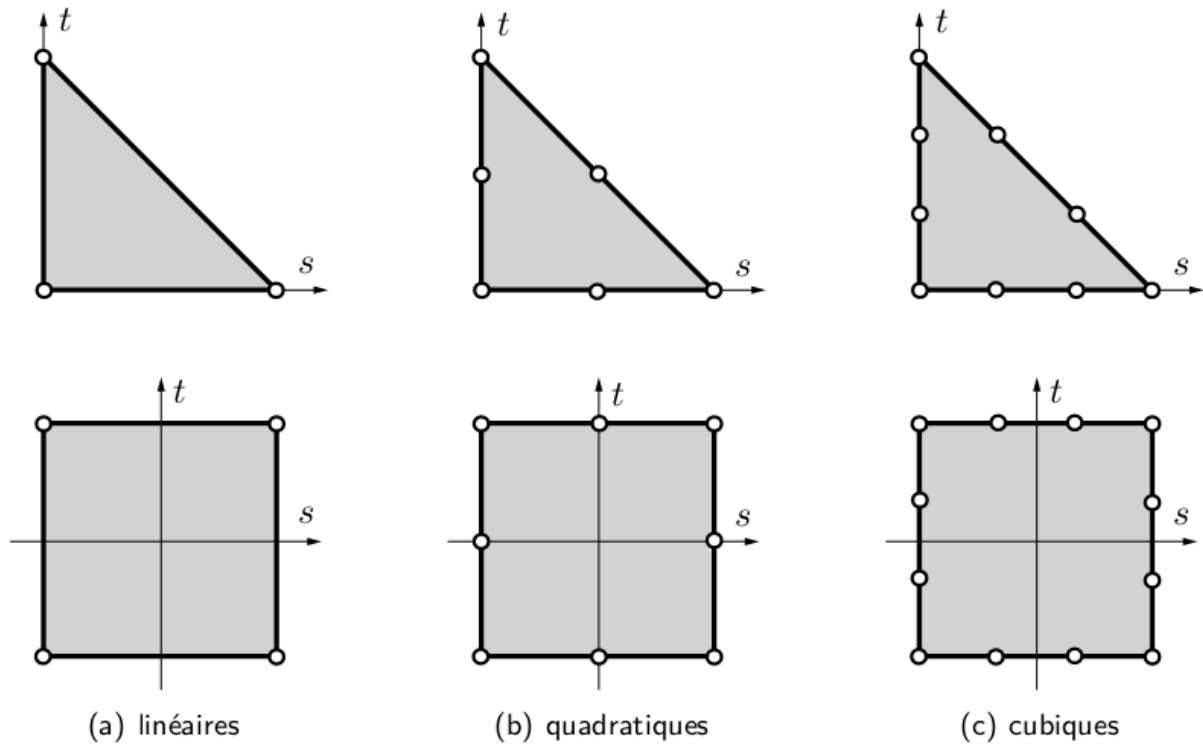
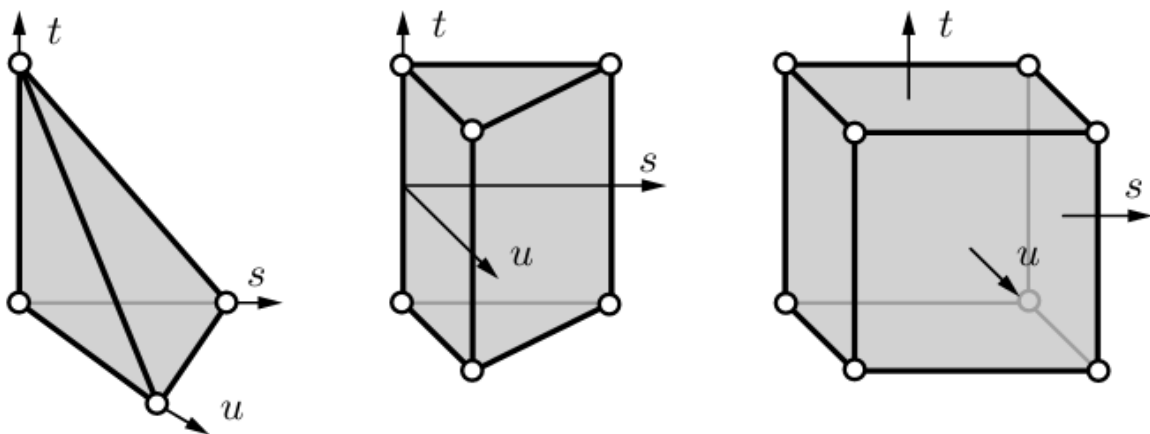


Figure (II.14): Transformations géométriques d'éléments à deux dimensions

### Éléments à trois dimensions

Sur la figure suivante seuls les nœuds sommets sont représentés. Pour les éléments quadratiques et cubiques les nœuds d'interface sont respectivement au milieu et au tiers des cotés



Figure(II.15) : Eléments volumiques à transformation linéaire

#### Remarque

Ces transformations géométriques utilisent les fonctions d'interpolation linéaire, quadratique et cubique définies plus haut.

**II.2.3.3. Matrice jacobienne - transformation des opérateurs de dérivation**

Nous connaissons les dérivées des fonctions d'interpolation par rapport aux coordonnées de l'élément de référence. (s, t, u). Or il faut calculer les dérivées des fonctions d'interpolation par rapport aux coordonnées réelles (x, y, z).

Posons :

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta s} \\ \frac{\delta}{\delta t} \\ \frac{\delta}{\delta u} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta s} & \frac{\delta y}{\delta s} & \frac{\delta z}{\delta s} \\ \frac{\delta x}{\delta t} & \frac{\delta y}{\delta t} & \frac{\delta z}{\delta t} \\ \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta u} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(\text{II.3.11})$$

[ J ] est la matrice jacobienne de la transformation.

Pour chaque élément, cette matrice s'exprime en fonction des dérivées des fonctions de la transformation géométrique et des coordonnées des nœuds géométriques de l'élément réel.

La relation inverse permet alors de calculer les dérivées premières par rapport aux coordonnées réelles des fonctions d'interpolation.

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} = [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta s} \\ \frac{\delta}{\delta t} \\ \frac{\delta}{\delta u} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(\text{II.3.12})$$

Une singularité de J peut apparaître lorsque l'élément réel est trop "distordu" par rapport à l'élément de référence « élément dit dégénéré ». De façon générale on évite lors du maillage d'utiliser des éléments trop disproportionnés, car ils nuisent à la précision numérique du modèle

**II.2.3.4. Calcul numérique d'une intégrale**

Le jacobien de la transformation géométrique permet de passer de l'intégration d'une fonction f définie sur l'élément réel à l'intégration sur l'élément de référence :

$$\int_{D_e} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{D_{ref}} f(s, t, u) |\det [J]| ds dt du \dots\dots(\text{II.3.13})$$

Cette dernière intégrale ne peut être évaluée analytiquement que dans des cas extrêmement simples. En général, la fonction à intégrer est une fraction rationnelle polynomiale compliquée. Le calcul de l'intégrale sur l'élément de référence est donc effectué numériquement

### II.2.3.5. Organisation des calculs numériques

Nous avons trois calculs à effectuer au niveau élémentaire (calcul des structures)

Matrice masse élémentaire:  $[M_e] = \int_{D_{ref}} N(\epsilon)^T \rho N(\epsilon) |\det [J]| dv_{ref} \dots\dots(II.3.14)$

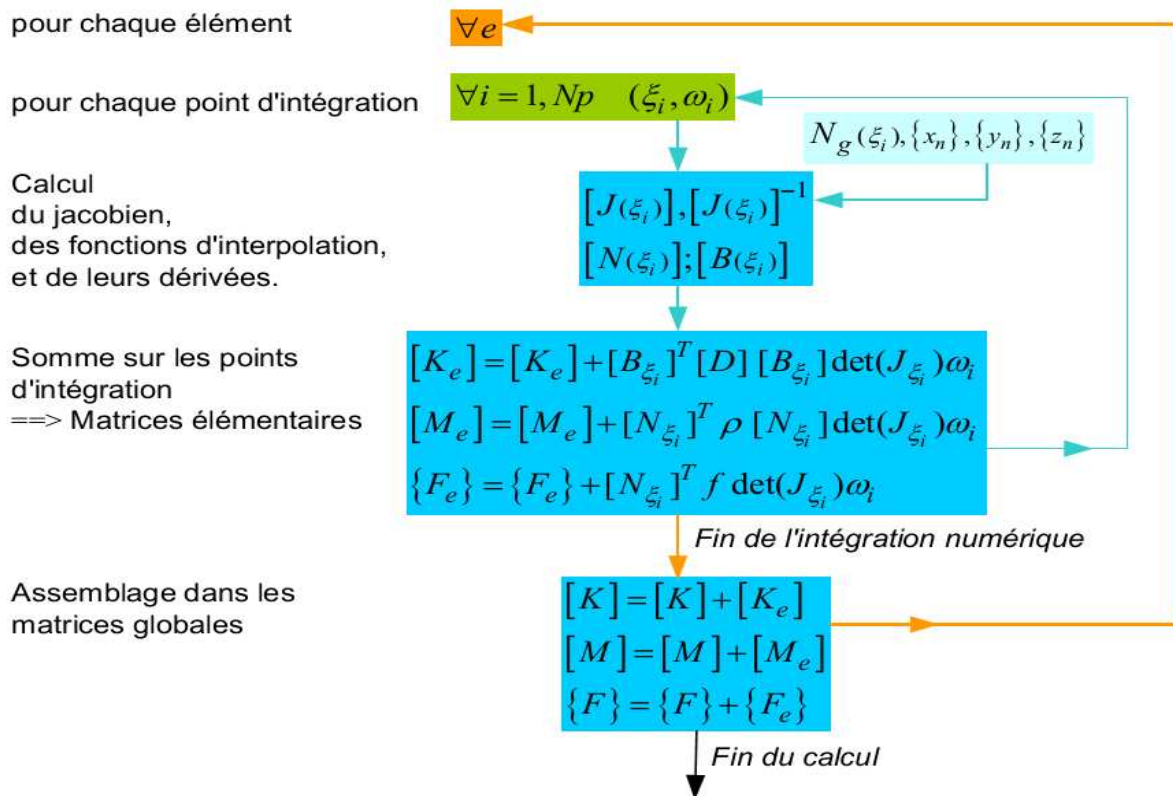
Matrice raideur élémentaire:  $[K_e] = \int_{D_{ref}} B(\epsilon)^T D B(\epsilon) |\det [J]| dv_{ref} \dots\dots(II.3.15)$

Force généralisée :  $\{F_{de}\} = \int_{D_{ref}} N(\epsilon)^T \vec{f}_d |\det [J]| dv_{ref} \dots\dots\dots(II.3.16)$

L'intégration numérique exacte n'est possible que si la fonction à intégrer est polynomiale. La matrice jacobienne doit être constante (l'élément réel garde la même forme que l'élément de référence). Nous connaissons alors l'ordre de la fonction polynomiale à intégrer, et nous pouvons choisir en conséquence le nombre de points d'intégration.

Dans le cas d'éléments réels de forme quelconque, la matrice jacobienne est une fonction polynomiale. Les termes à intégrer sont donc des fractions rationnelles, et la précision de l'intégration numérique diminue lorsque l'élément réel est mal conditionné (disproportionné)

La précision de l'intégration numérique dépend aussi du choix du nombre de points d'intégration, ce nombre est proposé par défaut (affaire d'expérience) dans les codes éléments finis. Pour les problèmes non linéaires en dynamique On utilise souvent un nombre de points d'intégration plus faible pour diminuer les temps de calcul, mais attention si le nombre de points est insuffisant cela peut conduire à des résultats faux. [9]



Figure(II.16) : Organisation des calculs

**II.2.4. Assemblage et conditions aux limites**

Les règles d'assemblage sont définies par la relation :  $D \cong \sum_{e=1}^{Ne} D_e$

$$\sum_{e=1}^{Ne} \{\delta U_e\}^T [M_e] \{\ddot{U}_e\} = \{\delta U\}^T [M] \{\ddot{U}\} \dots \dots \dots (II.4.1)$$

$$\sum_{e=1}^{Ne} \{\delta U_e\}^T [K_e] \{\ddot{U}_e\} = \{\delta U\}^T [K] \{\ddot{U}\} \dots \dots \dots (II.4.2)$$

$$\sum_{e=1}^{Ne} \{\delta U_e\}^T \{F_{de}\} = \{\delta U\}^T \{F_d\} \dots \dots \dots (II.4.3)$$

Cette opération traduit simplement que l'énergie associée au domaine étudié est la somme des énergies élémentaires des sous domaines. Cela consiste à ranger dans une matrice globale les termes des matrices élémentaires. Le programme définira l'ordre des variables globales {U} pour optimiser la place mémoire (disque) de la matrice globale, mais aussi le temps de calcul en fonction des algorithmes de résolution utilisés.[8]

Après assemblage, nous obtenons la forme matricielle du principe des travaux virtuels:

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{F_d\} \{F_i\} \dots \dots \dots (II.4.4)$$

A cette étape on peut appliquer les conditions aux limites, en supprimant ligne colonne sur la matrice globale de rigidité et de masse, là ou les degrés de liberté son supprimés et même sur le vecteur force, on supprime les lignes concerné et on ajoute des forces extérieures si il y a lieu.

**Remarque :**

Ses développements mathématiques effectués dans ce chapitre ont été utilisés pour implémenter un programme informatique en langage Matlab pour une structure plaque et des éléments du 1<sup>er</sup> et 2<sup>nd</sup> ordre

# *CHAPITRE (III)*

---

## *ELEMENTS FINIS ISOGOMETRIQUES*

### III. ELEMENTS FINIS ISOGEOMETRIQUES

#### III.1. Introduction

La grande majorité des développements numériques actuels en mécanique du solide utilise la méthode des éléments finis, basée sur des approximations polynomiales par morceaux de champs de déplacements. Ce mode de discrétisation introduit deux caractéristiques fortement contraignantes dont il serait intéressant de s'affranchir :

- la précision géométrique n'est pas exacte, et est en général polynomiale par morceaux comme les champs de déplacements lorsque des éléments isoparamétriques sont utilisés. Ce point peut être limitant pour certains phénomènes comme par exemple les instabilités géométriques (flambement) des coques minces qui sont très sensibles aux imperfections géométriques alors qu'elles sont fréquemment représentées par des maillages à facettes planes,
- tout raffinement de la discrétisation se base en général sur la description CAO de la géométrie.

Une approche proposée récemment par J.R.Hughes, permet de faire le lien entre le D.A.O. et l'analyse par élément finis. Le nom de l'analyse isogéométrique signifie que les mêmes fonctions de base peuvent être employées dans le DAO et l'AEF.[12]

Contrairement à la méthode des éléments finis classique qui utilise comme fonctions de forme, le polynôme de Lagrange ou d'Hermite,... Les éléments finis isogéométrique utilise les fonctions polynômiales B-spline et NURBS qui sont une extension des B-splines (définies dans le premier chapitre), ces dernières nous permette de représenter une géométrie exacte et donnent une solution plus précise, comparant aux polynômes de Lagrange qui nous donnent qu'une approximation de la géométrie. Le tableau suivant illustre quelques différences entre l'analyse isogéométrique en utilisant les NURBS et l'analyse aux éléments finis classiques :

Analyse isogéométrique	Analyse aux éléments finis classiques
-description exacte de la géométrie	- description approximative de la géométrie
-utilise les points de contrôles	-utilise les points nodaux
-utilise les variables de contrôles	-utilise les variables nodales
h-p-k raffinement	h-p raffinement
- Continuité élevée et facilement contrôlée	-continuité $C^0$ , fixée

**Tableau (III.1):** Différences entre éléments finis isogéométrique et les éléments finis classiques

### III.2. Principe des éléments finis isogéométriques

Les éléments finis isogéométrique sont basés principalement sur les fonctions NURBS pour représenter la géométrie et comme fonctions de forme. Un des avantages principaux des ces fonctions est leur continuité qui est supérieure à celle utilisée dans les éléments finis classiques.

La procédure du calcul des éléments finis isogéométriques est la même que dans les éléments finis classiques la différence est dans la façon de représenter la géométrie.

- Représentation de la géométrie par des fonctions NURBS
- L'espace inter-nodal subdivise le domaine en éléments.
- calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème ;
- assemblage des matrices élémentaires
- prise en compte des conditions aux limites
- résolution du système d'équations.

#### III.2.1. Représentation de la géométrie

La géométrie du modèle  $C(\xi)$  est exprimée par une combinaison linéaire des fonctions de base NURBS  $R_i$  et de points de contrôles  $B_i$  (chapitre (I)), telle que :

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i(\xi)B_i \dots\dots\dots(III.1)$$

$$\text{Avec } R_{i,p} = \frac{N_{i,p}w_i}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p}w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi)w_i} \dots\dots\dots(III.2)$$

$R_{i,p}$ : Les fonctions de base NURBS

$N_{i,p}$ : fonctions de base B-Spline

Pour une géométrie bidimensionnelle on a besoin de fonctions de base NURBS, telles que :

$$C(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)B_{i,j} \dots\dots\dots(III.3)$$

$N_{i,p}, M_{j,q}$  : Les fonctions de base NURBS.

La figure ci-dessous illustre une géométrie bidimensionnelle qui représente une plaque mince, et ces points de contrôles.

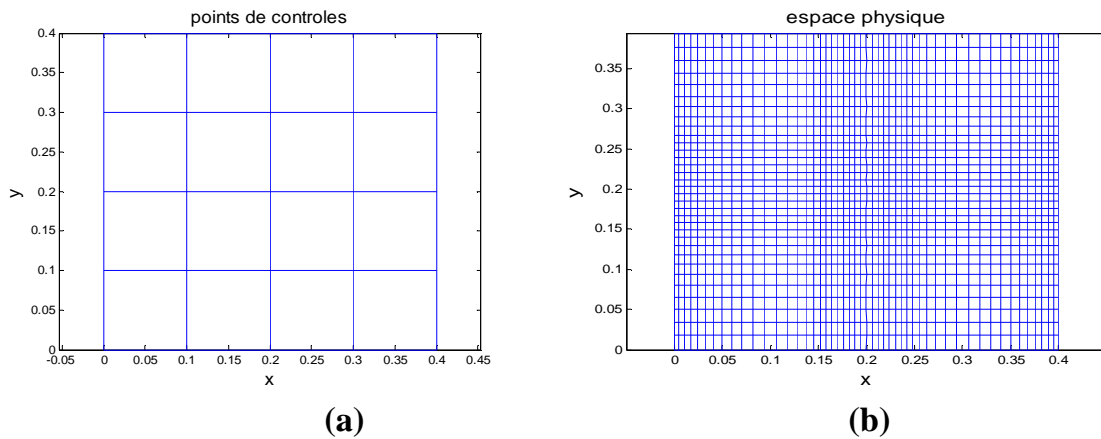


Figure (III.1): (a) Points de contrôles, (b) Géométrie représentant une plaque mince

### III.2.2. subdivision de domaine en éléments

Le maillage par les NURBS est défini par le produit des vecteurs nœuds. Pour une structure unidimensionnelle par le vecteur nodal  $\Xi$ , et par le produit vectoriel  $\Xi \times H$ . pour une structure bidimensionnelle, et l'espace inter-nodal définit le domaine élémentaire.

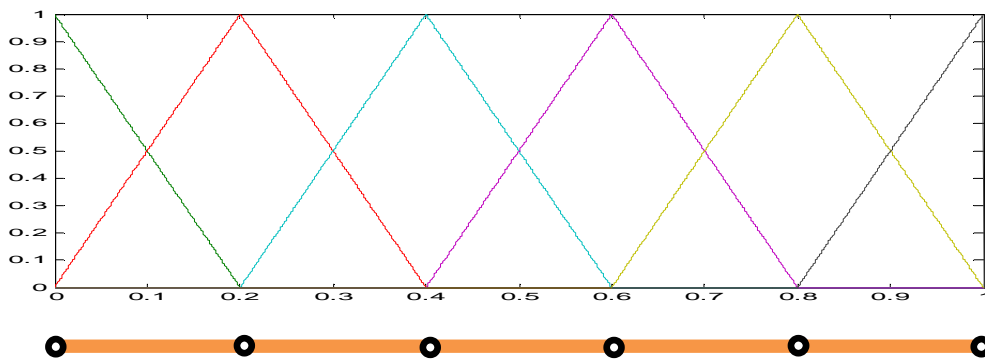
#### III.2.2.1. Cas unidimensionnel

Une poutre de longueur L représentée par une simple droite, la fonction NURBS utilisée pour générer le maillage est d'ordre 1 et de vecteur nœud :

$$\Xi = [0 \ 0 \ 0 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.8 \ 1 \ 1 \ 1]$$

L'espace entre les nœuds de vecteur  $\Xi$  représente un élément de la poutre

La figure (III.2) représente la poutre subdivisée en en cinq éléments et la fonction de base NURBS associée.



Figure(III.2) : Poutre unidimensionnelle subdivisée en sous domaines et la fonction de base associée

#### Remarque

On a trois possibilités pour raffiner notre maillage :

1. **p-raffinement** : l'élévation de l'ordre des fonctions de base, la figure(III.3) représente la même poutre subdivisée en en cinq éléments mais la fonction de base NURBS associée est d'ordre 2

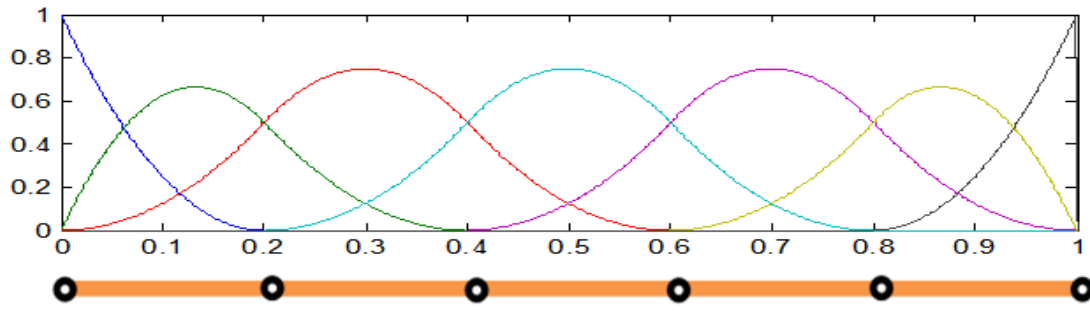


Figure (III.3): Poutre unidimensionnelle subdivisée en sous domaines et la fonction de base associée

2. **h-raffinement** : insertion des nœuds, plus le sous domaine est petit plus les résultats se rapprochent des valeurs exactes, la figure suivante représente la même poutre que précédemment mais avec un nouveau vecteur nœud, qui est :

$$H=[0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1 \ 1 \ 1]$$

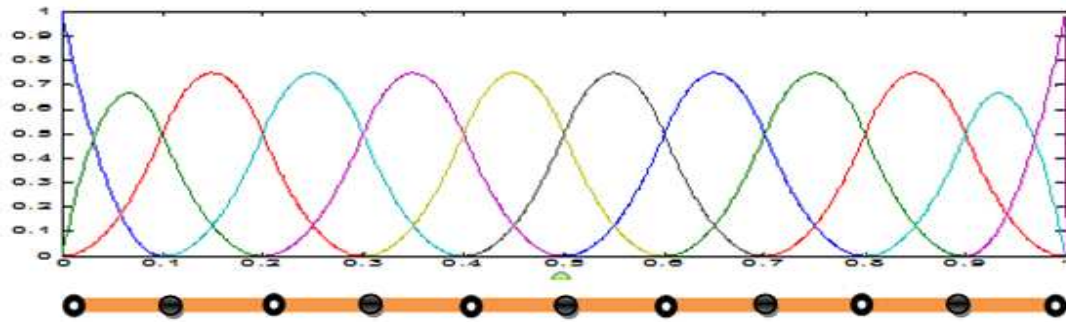
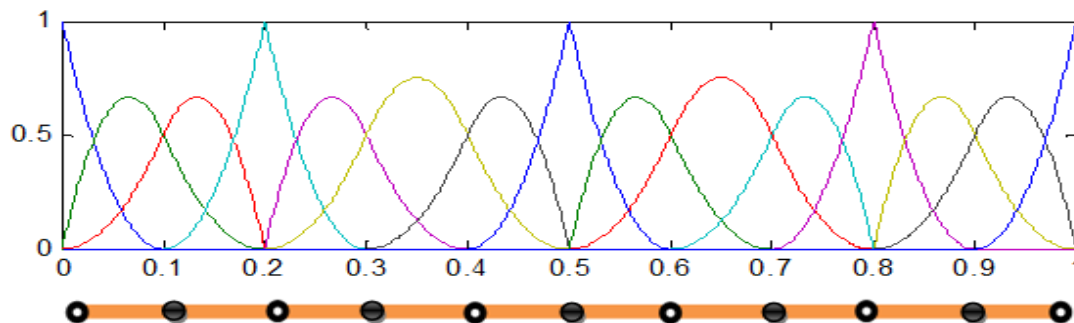


Figure (III.4): Poutre unidimensionnelle subdivisée en sous domaines et la fonction de base associée

3. **k-raffinement** : l'élévation d'ordre de continuité à un point donné, ce genre de raffinement se réalise en doublant des nœuds sur le vecteur nodal afin d'augmenter la continuité à un point ou plusieurs. La figure suivante représente la même poutre que précédemment mais cette fois on a augmenté l'ordre de continuité aux nœuds 3, 6 et 9 et le nouveau vecteur nœud associé est :

$$H=[0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.8 \ 0.9 \ 1 \ 1 \ 1]$$

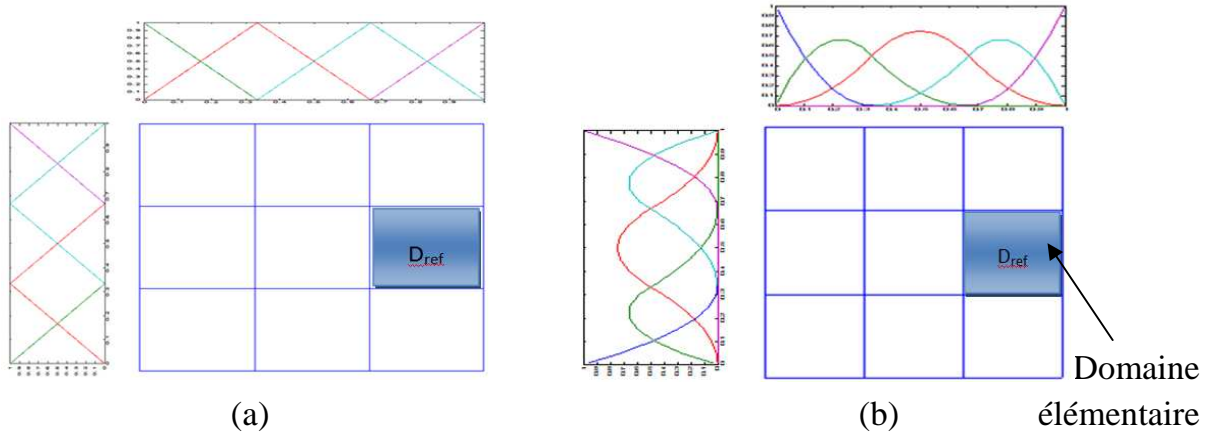


Figure(III.5) : Poutre unidimensionnelle subdivisé en sous domaine et la fonction de base associée

**Remarque** : Le k-raffinement dans l'analyse isogéométrique est un avantage en comparant aux éléments finis classiques.

III.2.2.2. Cas bidimensionnel

Dans ce cas le maillage sera défini par deux fonctions de base NURBS la figure (a) représente un maillage 2D par des fonction NURBS d'ordre 1 et de vecteurs nœuds ;  $\Xi=[0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1]$  et  $H=[0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1]$ , et la figure(b) le même maillage mais les fonction sont d'ordre 2.



Figure(III.6) : Maillages en deux dimensions et les fonctions de base associées

Pour ce qui concerne le raffinement le concept est le même que dans le cas unidimensionnel, sauf qu'ici nous manipulons deux vecteurs nœuds, la figure ci-dessous montre l'évolution de raffinement d'un maillage en deux dimensions obtenu par h-raffinement.

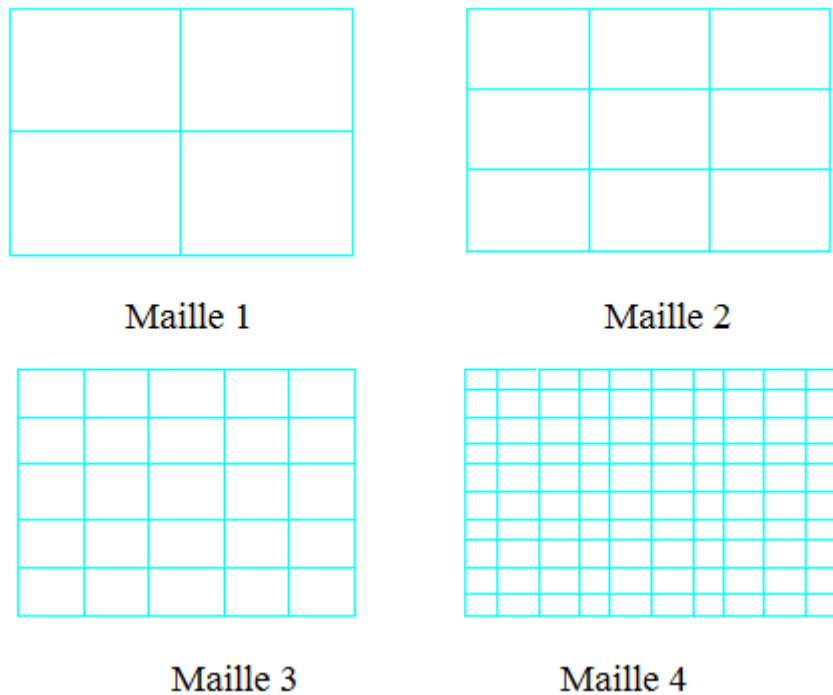


Figure (III.7) : Evolution du raffinement d'un maillage en deux dimensions par insertion des nœuds (h-raffinement)

III.2.3. calcul des matrices élémentaires

III.2.3.1. Matrice de raideur élémentaire

Dans le chapitre précédent on a déduit à partir du principe des travaux virtuels que la matrice de raideur élémentaire est de la forme :

$$K_e = \int_{D_{ref}} B(\epsilon, n)^T D B(\epsilon, n) |\det [J]| dv_{ref} \dots \dots \dots (III.4)$$

**D** : la matrice caractéristique au comportement élastique du matériau.

Pour le cas d'élasticité plane que nous utilisons dans notre travail

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (III.5)$$

**B**: définissant l'opérateur des déformations linéaires dont la notation matricielle est donnée par :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{dR_{1,1}}{dx} & 0 & \frac{dR_{2,1}}{dx} & 0 & \dots & \frac{dR_{n,m}}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dR_{1,1}}{dy} & 0 & \frac{dR_{2,1}}{dy} & \dots & 0 & \frac{dR_{n,m}}{dy} \\ \frac{dR_{1,1}}{dy} & \frac{dR_{1,1}}{dx} & \frac{dR_{2,1}}{dy} & \frac{dR_{2,1}}{dx} & \dots & \frac{dR_{n,m}}{dy} & \frac{dR_{n,m}}{dx} \end{bmatrix} \dots \dots (III.6)$$

La transformation entre le système de coordonnées physique et les coordonnées paramétriques des NURBS est donnée par la matrice Jacobienne qui est définie comme suit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta \epsilon} \\ \frac{\delta}{\delta n} \\ \frac{\delta}{\delta u} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta \epsilon} & \frac{\delta y}{\delta \epsilon} & \frac{\delta z}{\delta \epsilon} \\ \frac{\delta x}{\delta n} & \frac{\delta y}{\delta n} & \frac{\delta z}{\delta n} \\ \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta u} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (III.7)$$

[ J ] est la matrice jacobienne de la transformation.

Pour le cas de deux dimensions :

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta \epsilon} \\ \frac{\delta}{\delta n} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta \epsilon} & \frac{\delta y}{\delta \epsilon} \\ \frac{\delta x}{\delta n} & \frac{\delta y}{\delta n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (III.8)$$

La relation inverse permet alors de calculer les dérivées premières par rapport aux coordonnées réelles des fonctions d'interpolation.

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \end{pmatrix} = [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta s} \\ \frac{\delta}{\delta t} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (III.9)$$

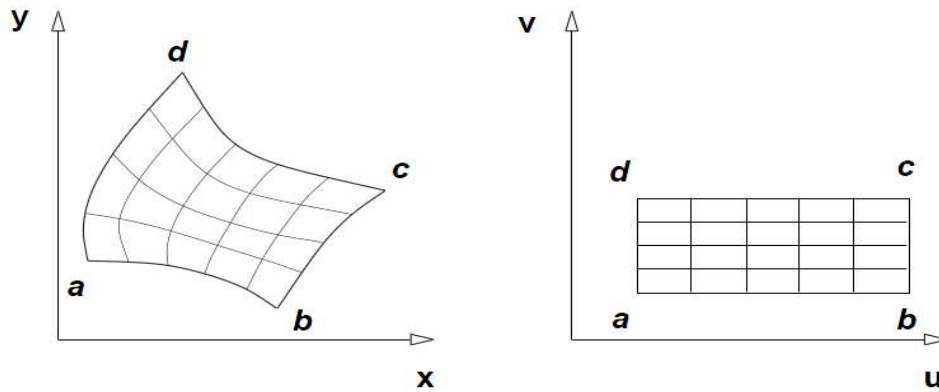


Figure (III.8): Transformation d'un maillage dans l'espace paramétrique vers l'espace physique

**III.2.3.2. Matrice de masse élémentaire**

La matrice de masse élémentaire est aussi défini dans le chapitre précédent.

$$Me = \int_{D_{ref}} R(\epsilon, n)^T \rho R(\epsilon, n) |\det [J]| dv_{ref} \dots \dots \dots (III.10)$$

Où  $\rho$  : densité volumique de la structure.

**R** : est la matrice des fonctions de base dont la notation matricielle est donnée par :

$$R = \begin{bmatrix} R_{1.1} & 0 & R_{2.1} & 0 & \dots & R_{n.m} & 0 \\ 0 & R_{1.1} & 0 & R_{2.1} & \dots & 0 & R_{n.m} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (III.11)$$

**Remarque :**

Vu la complexité analytique des fonctions de base NURBS, une intégration numérique s'impose, pour cela plusieurs méthodes peuvent être employées, telles que la quadrature de Simpson, la méthode du point milieu, la méthode des trapèzes, et la quadrature de gauss, cette dernière sera employée dans l'application accompagnant ce présent mémoire.

**III.2.4. assemblage et conditions aux limites**

Cette étape consiste à ranger dans une matrice globale les termes des matrices élémentaires, comme nous l'avons expliqué dans le chapitre précédent et nous obtenons la même forme matricielle.

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{F_d\} \{F_i\} \dots \dots \dots (III.12)$$

Avant la résolution du système d'équation, on doit appliquer les conditions aux limites s'il y a lieu (encastrement, forces extérieurs,...).

**Remarque :**

Un programme de simulation en langage Matlab a été effectué en utilisant l'analyse isogéométrique développée dans ce chapitre pour l'ordre 1 et 2.

# *CHAPITRE (IV)*

---

## *FONCTIONS DE CORRELATION EN DYNAMIQUE DES STRUCTURES*

**IV. FONCTIONS DE CORRELATION EN DYNAMIQUE DES STRUCTURES**

**IV.1. Introduction**

L'étape de corrélation vise à mettre en œuvre un ensemble de méthodes permettant d'évaluer le niveau de correspondance entre deux grandeurs, que se soit des grandeurs analytiques et expérimentales ou des grandeurs d'une méthode analytique et une autre.

Si cette corrélation s'inscrit dans certaines limites définies par l'utilisateur, il peut être décidé d'arrêter la procédure de corrélation et de valider ainsi le modèle constitué. Inversement, lorsque cette correspondance se dégrade, une correction du modèle s'avère nécessaire qui voit sa qualité progressivement évaluée au sens des mêmes méthodes de corrélation. Lorsque la correspondance initiale entre les deux grandeurs est trop pauvre, une redéfinition du modèle est nécessaire, la correction perdant rapidement tout sens physique.

Dans l'ensemble des cas, il est, par ailleurs, essentiel de s'assurer que les grandeurs comparées par la procédure corrective le sont de manière cohérente. Les méthodes de corrélation permettent ainsi de procéder à un appariement efficace de celles d'entre elles destinées à constituer les résidus utiles.[14]

**IV.2. Critère MAC**

Le critère MAC (Modal Assurance Criterion) est un outil le plus classiquement rencontré dans l'appariement et la comparaison des modes. Il est défini comme suit :[16]

$$MAC(i, j) = \frac{(\{\psi_i\}^T \cdot \{\psi_j\})^2}{(\{\psi_i\}^T \cdot \{\psi_i\}) \cdot (\{\psi_j\}^T \cdot \{\psi_j\})} \dots\dots\dots (IV.1)$$

Les valeurs du critère MAC sont comprises dans l'intervalle [0 1], une valeur de 0 indiquant une complète dissociation des deux modes concernés, une valeur de 1 indiquant, au contraire, une parfaite corrélation de ces derniers.

Une représentation usuelle du critère est celle d'une matrice prenant les modes propres analytiques comme abscisses et les modes propres expérimentaux comme ordonnées. Selon cette représentation, une bonne corrélation entre les deux espace doit matérialiser une diagonale à hautes valeurs de MAC (>0.8).

Dans le cadre d'une utilisation en appariement, on associe à chaque mode expérimental celui d'entre les modes analytiques qui présente la plus haute valeur de MAC.[14]

**IV.3. Critère MSF**

Le critère MSF (Modal Scale Factor) se base sur une comparaison directe des modes propres par tracé des contributions analytiques et expérimentales, un parfait appariement concourant à l'apparition d'une ligne droite de pente unitaire, bissectrice du plan de représentation.

En ce sens, tout point de cette droite, calculé localement pour chaque paire de modes voit sa contribution déterminée selon :

$$\text{MSF} (\psi_i, \psi_j) = \frac{\{\psi_i\}^T \cdot \{\psi_j\}}{(\{\psi_i\}^T \cdot \{\psi_i\})} \dots\dots\dots \text{(IV.2)}$$

La distance de chacun de ces points à la droite de repère donne une idée de la corrélation locale entre les modes propres concernés. Cette opération peut révéler l'absence de certains modes, voire des différences locales au sein de ces modes.[15]

**IV.4. Critère COMAC**

Le critère COMAC (Co-Ordinate Modal Assurance Criterion) traduit la même information que le critère MAC en recentrant sur un degré de liberté spécifique, permettant ainsi d'analyser les imperfections de manière locale. Pour un degré de liberté j quelconque, on a :

$$\text{COMAC} (j) = \frac{(\sum_{r=1}^m |(\psi_a(j))_r \cdot |(\psi_b(j))_r|)^2}{(\sum_{r=1}^m |(\psi_a(j))_r \cdot |(\psi_a(j))_r|) \cdot (\sum_{r=1}^m |(\psi_b(j))_r \cdot |(\psi_b(j))_r|)} \dots\dots\dots \text{(IV.3)}$$

Cette dernière relation faisant l'hypothèse de m modes contenus dans l'espace d'intérêt.

Comme dans le cas précédent la qualité de la corrélation est fonction de la proximité des valeurs calculées de l'unité. Le critère présente l'avantage de ne nécessiter aucune opération d'uniformisation des matrices structurelles ou des modes propres mis en œuvre mais reste très sensible aux différences d'échelles pouvant apparaître entre ceux-ci et produit parfois, des résultats difficilement interprétables.[14]

**IV.5. Méthodes d'orthogonalité**

Ces méthodes sont basées sur les relations d'orthogonalité liant les modes propres aux matrices structurelles.

$$[\Psi]^T \cdot [M] \cdot [\Psi] = [m_i] \dots\dots\dots \text{(IV.4)}$$

$$[\Psi]^T \cdot [K] \cdot [\Psi] = [k_i] = [\omega_i^2 \cdot m_i] \dots\dots\dots (IV.5)$$

Expression dans lesquelles  $[m_i]$  représente la matrice diagonale des masses modales et  $[k_i]$  la matrice diagonale des raideurs Modales.

Basées sur ces propriétés, deux relations existent qui permettent de caractériser le niveau de correspondance entre les modes des deux méthodes ou entre le modèle analytique et les modes expérimentaux :

$$[\Psi_e]^T \cdot [M_a] \cdot [\Psi_e] = [m_{ee}] \dots\dots\dots (IV.6)$$

- Orthogonalités croisées :

$$[\Psi_e]^T \cdot [K_a] \cdot [\Psi_{be}] = [k_{ee}] \dots\dots\dots (IV.7)$$

$$[\Psi_a]^T \cdot [M_a] \cdot [\Psi_e] = [m_{ae}] \dots\dots\dots (IV.8)$$

- Orthogonalités mixtes:

$$[\Psi_a]^T \cdot [K_a] \cdot [\Psi_e] = [m_{ae}] \dots\dots\dots (IV.9)$$

Si les deux représentations sont corrélées, les matrices modales de masse et de raideur présentent des termes non-diagonaux d'amplitudes négligeables comparées à celles des termes diagonaux. Pour une mise à l'échelle des matrices, de sorte que les termes diagonaux aient une amplitude unitaire, il est admis que des termes non-diagonaux n'excédant pas 0.1 indiquant une bonne corrélation.

Ce type de méthodes nécessite la réduction des matrices structurelles analytiques ou l'expression et la normalisation des modes propres expérimentaux, opérations qui peuvent affecter la qualité de la corrélation. Des variations de type POC (Pseudo Orthogonality check) sont proposées dans la littérature qui mettent en œuvre une uniformisation de type SEREP (System Equivalent Reduction and Expansion Proces) permettant, dans une certaine mesure, de limiter l'effet des condensations matricielles.[14]

**IV.6. Méthodes énergétique- Equilibre des forces**

La méthode énergétique établit une comparaison entre les énergies cinétiques et potentielles calculées au départ des paramètres modaux analytiques et expérimentaux. Pour un mode r quelconque on peut ainsi définir les indicateurs résiduels :

$$\epsilon_c = \frac{1}{2} \cdot \{\Psi_e\}_r^T \cdot [M_a] \cdot \{\Psi_e\}_r - \frac{1}{2} \cdot \{\Psi_a\}_r^T \cdot [M_a] \cdot \{\Psi_a\}_r \dots\dots\dots (IV.10)$$

$$\epsilon_p = \frac{1}{2} \cdot \{\Psi_e\}_r^T \cdot [K_a] \cdot \{\Psi_e\}_r - \frac{1}{2} \cdot \{\Psi_a\}_r^T \cdot [K_a] \cdot \{\Psi_a\}_r \dots\dots\dots (IV.11)$$

Les énergies résiduelles donnent, mode par mode, une idée de la corrélation analytico-expérimentale

Par ailleurs, diverses méthodes simples sont proposées pour caractériser, en termes de forces non équilibrées, les défauts de corrélation entre un modèle éléments finis et la structure réelle qu'il représente. On peut ainsi associer à chaque mode r une force élastique résiduelle définie selon :

$$\epsilon_F = [K_a] \cdot \{\Psi_e\}_r - [K_a] \cdot \{\Psi_a\}_r \dots \dots \dots (IV.12)$$

Ou encore, en se basant sur l'équation d'équilibre

$$\{F^{res}\}_r = ([K_a] - \omega_{e,r}^2 [M_a]) \cdot \{\Psi_e\}_r \dots \dots \dots (IV.13)$$

Les degrés de liberté en déséquilibre indiquent les zones où le modèle présente une faible corrélation.[14]

**IV.7. Corrélation des réceptances**

Si l'on dispose d'un modèle d'amortissement cohérent, la simple comparaison des tracés de Bode associés aux réceptances donne déjà une bonne idée de la corrélation entre les deux espaces.

Basé sur une philosophie identique à celle déjà présentée dans le cadre du critère COMAC, un critère simple, le critère FRAC (Frequency Response Assurance Criterion), peut être introduit qui mesure le taux de corrélation entre deux réceptances analytique et expérimentale de manière locale selon :[14]

$$FRAC ( j ) = \frac{(\{H_{a,j}\}_w^T \cdot \{H_{e,j}\}_w)^2}{(\{H_{a,j}\}_w^T \cdot \{H_{a,j}\}_w) \cdot (\{H_{e,j}\}_w^T \cdot \{H_{e,j}\}_w)} \dots \dots \dots (IV.14)$$

Expression dans laquelle le vecteur  $\{H_j\}_w$  représente, pour une excitation donnée, la réceptance générée au même degré de liberté j pour l'ensemble des fréquences d'intérêt considérées.

Classiquement, les valeurs du FRAC indique une forte ou faible corrélation selon quelles tendent, ou non, vers 1. Néanmoins, dans les cas où le système présente une simple imperfection générale de masse ou de raideur (et, par extension, dans tous les cas pratiques ou de telles imperfections peuvent apparaitre, éventuellement couplées à d'autres), les fonctions de transfert indiquent une correspondance certaine que ne décèle pas le critère FRAC, interprétant directement les décalages en fréquence et en amplitude comme indices de non-corrélation.[14]

Dans cet ordre d'idées, on peut mettre en œuvre un critère du MAC, le critère FDAC (Frequency Domain Assurance Criterion) permettant d'apparier des réceptances de fréquences différentes :

$$\text{FDAC} (\omega_a, \omega_e, \mathbf{j}) = \frac{\{H_a(\omega_a)\}_j^T \cdot \{H_e(\omega_e)\}_j}{|\{H_a(\omega_a)\}_j^T| \cdot |\{H_e(\omega_e)\}_j|} \dots\dots\dots \text{(IV.15)}$$

Expression dans laquelle les vecteurs  $\{H_a(\omega_a)\}_j \{H_e(\omega_e)\}_j$  représentent l'ensemble des réceptances (degrés de liberté accédés) mesurées, en ces fréquences, pour une excitation quelconque.

Les valeurs de FDAC sont comprises dans [-1 1] ; une valeur de 0 indiquant l'absence de corrélation, une valeur de 1 une parfaite corrélation et une valeur de -1 une parfaite corrélation avec un déphasage de 180°.

Par ailleurs, comme le critère établi par (IV.15) est insensible au facteur d'échelle pouvant apparaître entre les deux réceptances, un critère FRSF (Frequency Response Scale Factor) peut être constitué qui quantifie cette information.

On le définit ainsi :

$$\text{FRSF} (\omega_a, \omega'_e, \mathbf{j}) = \frac{\{H_a(\omega_a)\}_j^T \cdot \{H_a(\omega_a)\}_j}{|\{H_e(\omega'_e)\}_j^T| \cdot |\{H_e(\omega'_e)\}_j|} \dots\dots\dots \text{(IV.16)}$$

Expression dans laquelle  $\omega'_e$  est la pulsation correspondant à  $\omega_a$  au sens de (IV.15) si les grandeurs sont appariées en échelle, le facteur FRSF tend vers l'unité.[14]

**IV.8. Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons mis en évidence les différentes fonctions de corrélations que nous pouvons utiliser. Le choix est porté sur le critère MAC qui est très utilisé. Pour nous, il sera utilisé pour comparer les modes des deux méthodes d'analyse EF et isogéométriques. La programmation est simple à mettre en œuvre mais elle nécessite d'ordonner les modes de chaque méthode pour une comparaison homogène.

## *CHAPITRE (V)*

---

# *APPLICATION ET COMPARAISON DES DEUX METHODES*

## V. APPLIQUATION ET COMPARAISON DES DEUX METHODES

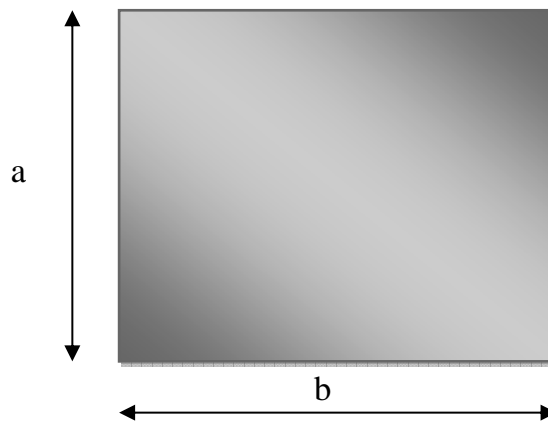
### V.1. Introduction

Généralement, les fonctions de corrélation sont utilisées pour comparer les modes propres (ou fréquences) obtenus par une méthode analytique avec ceux obtenus expérimentalement. Dans notre cas nous allons les utiliser pour voir le niveau de correspondance des résultats obtenus entre deux méthodes analytiques, La méthode des éléments finis classique et les éléments finis isogéométriques.

Dans les chapitres précédents, nous avons expliqué le principe et la procédure de calcul de chacune de ces méthodes analytiques et avons illustré quelques critères de corrélation. Ce chapitre fera l'objet d'une application de ces deux méthodes sur un même modèle en deux dimensions qui est une plaque mince, cette dernière sera étudiée dans le cas de la dynamique. A la fin des calculs nous allons faire une comparaison des résultats par le critère MAC expliqués dans le chapitre précédent.

### V.2. définition du model

Les propriétés du matériau et les dimensions de la plaque à étudier sont :



**Figure (V.1):** Le modèle à étudier

On considère que le matériau de la plaque est un matériau isotrope

Le module d'élasticité  $E=21 \cdot 10^4$  Pa.

Masse volumique  $\rho= 7890$  Kg/m<sup>3</sup>.

Epaisseur de la plaque  $e=1$  mm

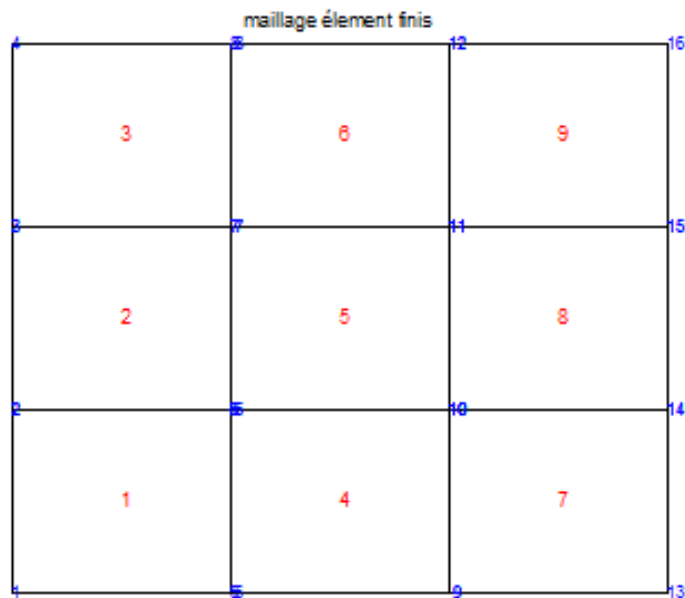
Largeur et longueur de la plaque  $a=b=0.4$  m

### V.3. Calcul du modèle par les deux méthodes

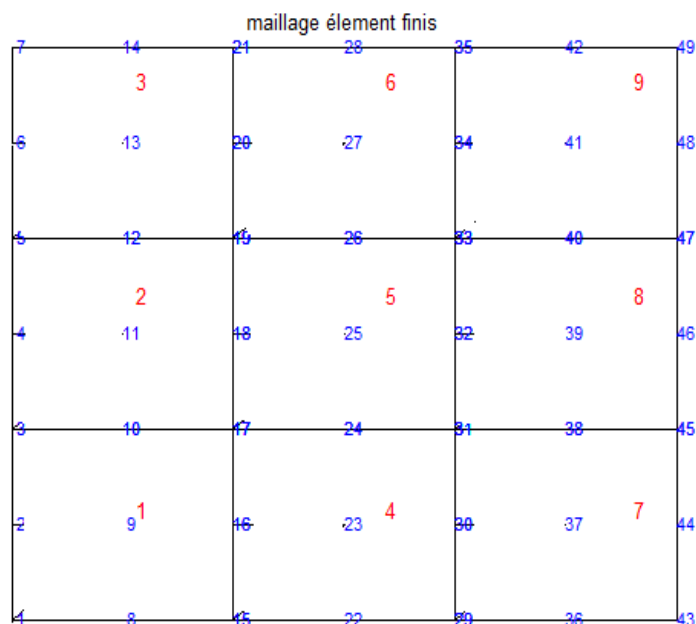
#### V.3.1. méthode des éléments finis classiques

##### V.3.1.1. Discrétisation de la géométrie

Les équations de formes utilisées pour la discrétisation sont celles de l'élément rectangulaire, celles vue dans le chapitre (II), dans le premier cas on utilise l'élément de Lagrange Q4 qui représente l'ordre 1 pour le polynôme de Lagrange et dans le second cas en utilise l'élément de Lagrange Q9 qui représente l'ordre 2 de polynôme de Lagrange. les figures ci-dessous illustrent la plaque discrétisée en 9 éléments.



**Figure (V.2) :** Plaque discrétisée en 9 éléments par Q4



**Figure (V.3):** Plaque discrétisée en 9 éléments par Q9

**V.3.1.2. Calcul au niveau élémentaire**

Les matrices de raideur et masse sont obtenues à partir des formes intégrales suivantes :

$$K_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e * B(\epsilon, n)^T D B(\epsilon, n) |\det [J]| d\epsilon dn \dots\dots\dots (V.1)$$

$$M_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e * N(\epsilon, n)^T \rho N(\epsilon, n) |\det [J]| d\epsilon dn \dots\dots\dots (V.2)$$

Pour l'élément Q4:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{4} *$$

$$\begin{bmatrix} (n-1) & 0 & (1-n) & 0 & (1+n) & 0 & (-1-n) & 0 \\ 0 & (\epsilon-1) & 0 & (-1-\epsilon) & 0 & (1+\epsilon) & 0 & (1-\epsilon) \\ (\epsilon-1) & (n-1) & (-1-\epsilon) & (1-n) & (1+\epsilon) & (1+n) & (1-\epsilon) & (-1-n) \end{bmatrix}$$

$$N = \frac{1}{4} * \begin{bmatrix} (1-n) * (1-\epsilon) & 0 & (1+n) * (1-\epsilon) & 0 \\ 0 & (1-n) * (1-\epsilon) & 0 & (1+n) * (1-\epsilon) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1+n) * (1+\epsilon) & 0 & (1-n) * (1+\epsilon) & 0 \\ 0 & (1+n) * (1+\epsilon) & 0 & (1-n) * (1+\epsilon) \end{bmatrix}$$

La matrice jacobienne pour un élément est obtenue comme suit :

$$J = \begin{pmatrix} (n-1) & (1-n) & (1+n) & (-1-n) \\ (\epsilon-1) & (-1-\epsilon) & (1+\epsilon) & (1-\epsilon) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix}$$

Les matrices élémentaires Me et Ke seront de dimension (8,8), huit lignes et huit colonnes. Pour le cas de Q9 la procédure est la même sauf que les dimensions des matrices, après répartition des équations de forme et les dérivées de l'élément Q9 dans ces dernières seront comme suit :

$$B=(3,18)$$

$$N=(2,18)$$

$$J=(2,2)$$

Me et Ke de dimension (18,18).

**Remarque :**

Vue la complexité des fonctions nous avons utilisé une méthode numérique qui est la quadrature de gauss pour calculer l'intégrale.

### V.3.1.3. Assemblage et résolution

Après avoir obtenu les matrices de raideur et de masse de chaque élément, on les range dans des matrices de raideur et de masse globales. Après assemblage, on procède à la résolution.

Les valeurs et vecteurs propres du modèle sont obtenus par la résolution de l'équation :

$$(K - \omega^2 M) * \psi = 0 \dots\dots\dots(V.3)$$

Les valeurs propres de notre modèle pour le cas de Q4 et de Q9 sont représentées sur les figures ci-dessous :

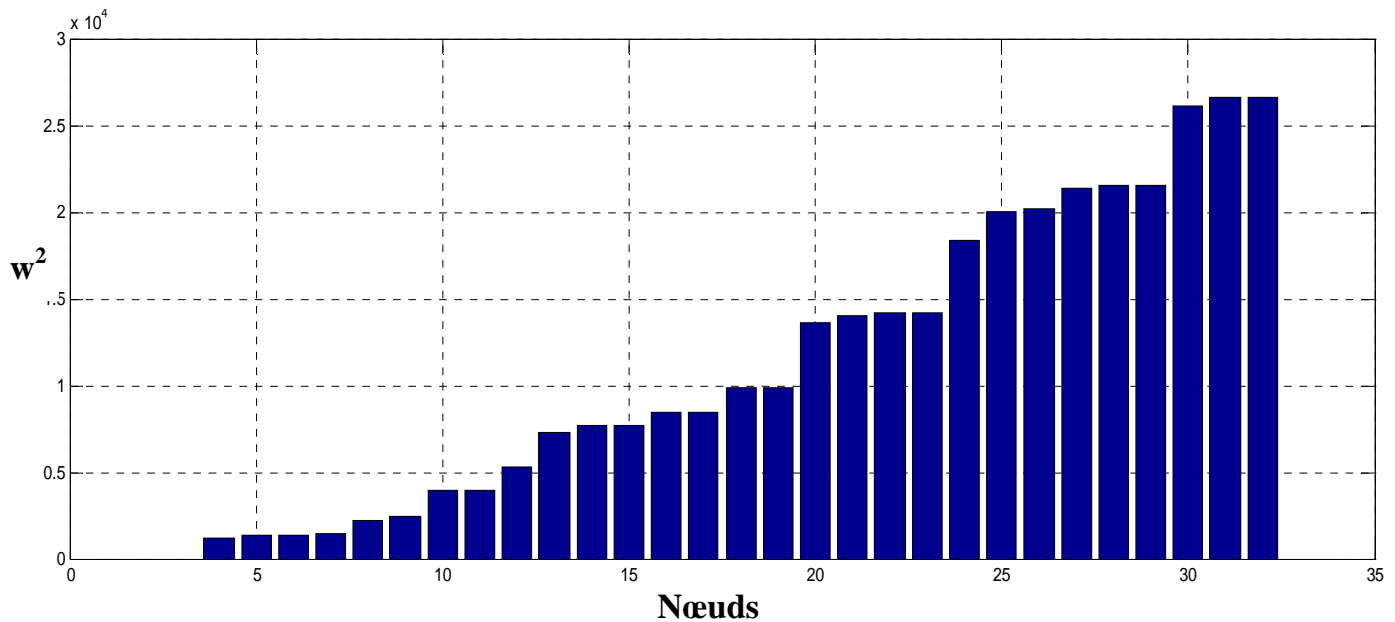
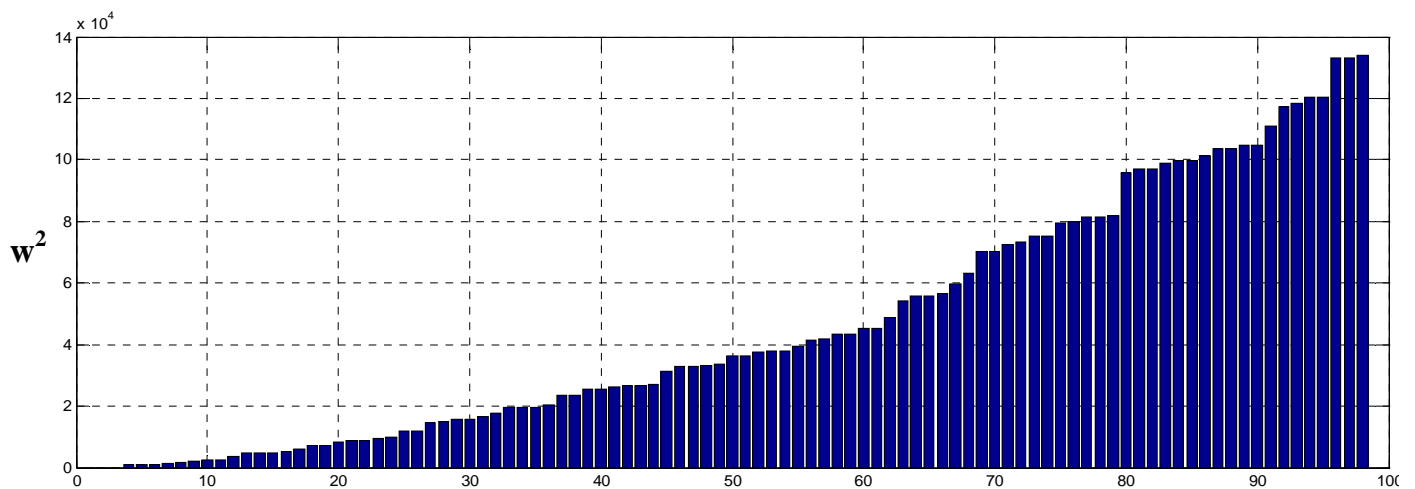


Figure (V.4): Les valeurs propres aux nœuds du modèle analysé pour le cas Q4



Nœuds

Figure (V.5): Les valeurs propres aux nœuds du modèle analysé pour le cas Q9

V.3.2. Méthode des éléments finis isogéométriques

V.3.2.1. Représentation de la géométrie et discrétisation

La géométrie du modèle est exprimée par une combinaison linéaire de fonctions de base NURBS  $R_i$  et de points de contrôles  $B_i$  :

$$C(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) B_{i,j} \dots \dots \dots (V.4)$$

$N_{i,p}, M_{j,q}$  : Les fonctions de base NURBS.

Le produit de ces fonctions de base nous donne l'espace paramétrique, subdivisé en sous domaine appelé élément référence

Pour l'ordre 1, on utilise des fonctions de base d'ordre 1 et de vecteurs nœuds :  $\Xi=[0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1]$  et  $H=[0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1]$ , les vecteurs nœuds utilisés ont trois espaces inter-nodaux chacun afin de subdiviser le modèle 9 élément, même nombre d'élément que dans cas précédent (élément finis classiques), afin de pouvoir faire une étude comparative avec les fonctions de corrélation. La figure ci-dessous illustre la géométrie du modèle obtenu par les fonctions NURBS et l'espace paramétrique associé.

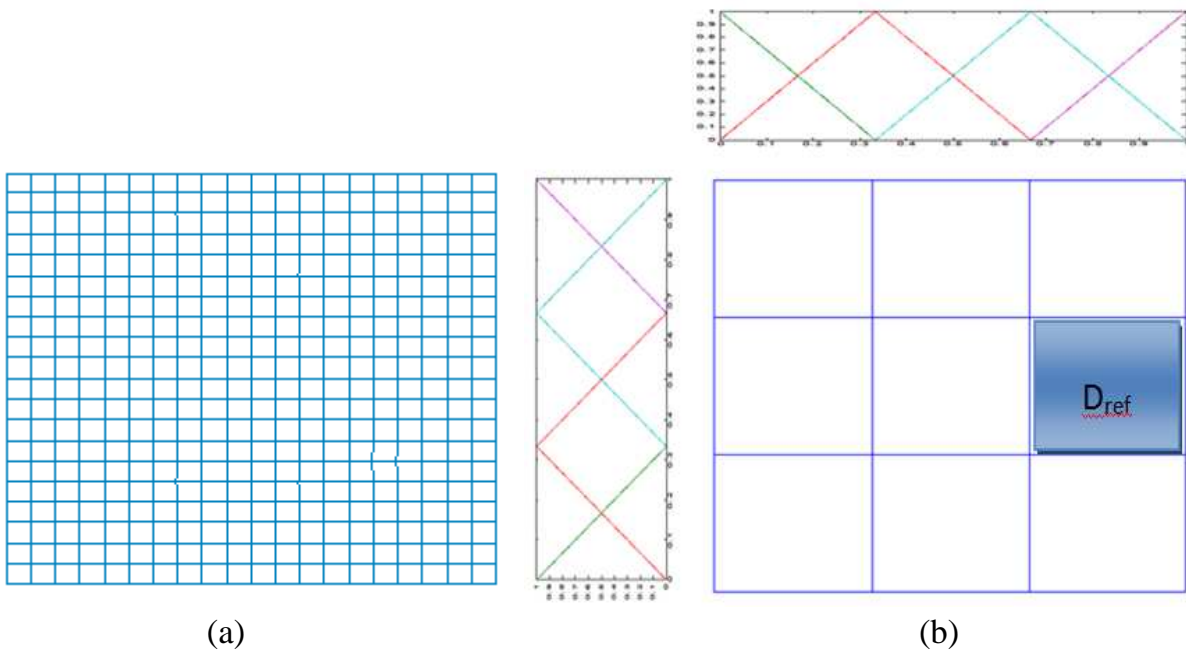


Figure (V.6) : (a) Géométrie du modèle obtenue par les fonctions NURBS d'ordre 1 et (b) L'espace paramétrique associé

**V.3.2.2. Calcul au niveau élémentaire**

Les matrices de raideur et masse sont obtenues à partir des formes intégrales suivantes :

$$K_e = \int_0^1 \int_0^1 e * C(\epsilon, n)^T D C(\epsilon, n) |\det [J]| d\epsilon dn \dots\dots (V.5)$$

$$M_e = \int_0^1 \int_0^1 e * M(\epsilon, n)^T \rho M(\epsilon, n) |\det [J]| d\epsilon dn \dots\dots (V.6)$$

Pour l'ordre 1:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{1}{4} * \begin{bmatrix} (n-1) & 0 & (1-n) & 0 & n & 0 & -n & 0 \\ 0 & (\epsilon-1) & 0 & -\epsilon & 0 & \epsilon & 0 & (1-\epsilon) \\ (\epsilon-1) & (n-1) & -\epsilon & (1-n) & \epsilon & n & (1-\epsilon) & -n \end{bmatrix}$$

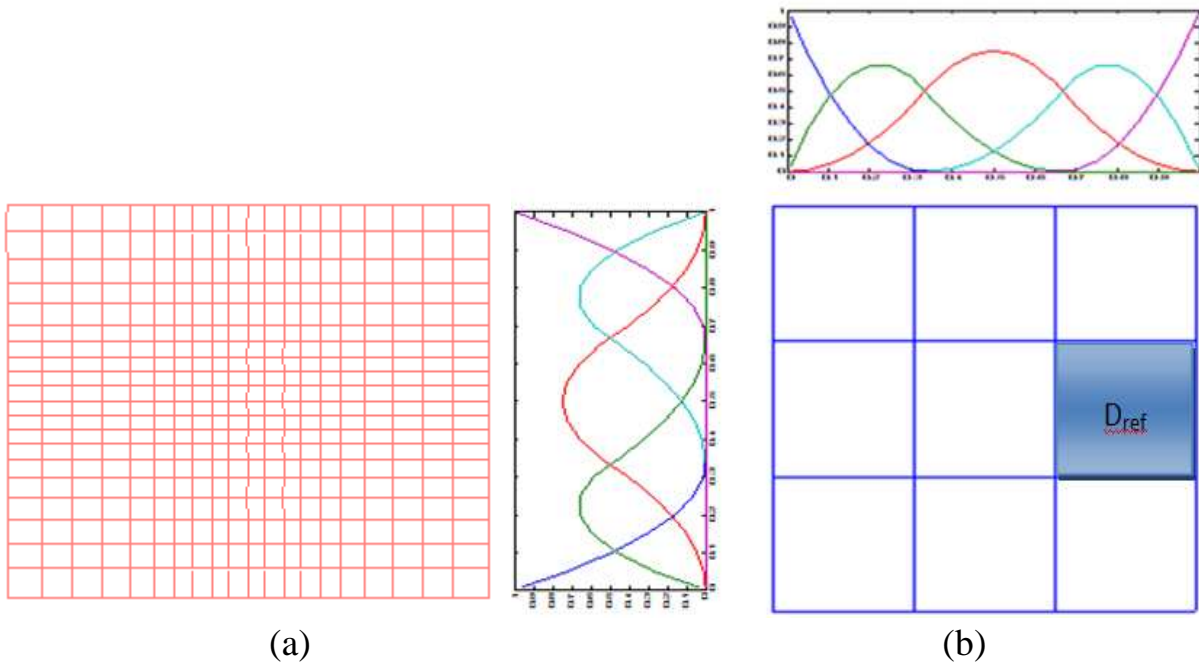
$$M = \frac{1}{4} * \begin{bmatrix} (1-n) * (1-\epsilon) & 0 & (1-n) * \epsilon & 0 \\ 0 & (1-n) * (1-\epsilon) & 0 & (1-n) * \epsilon \\ n * \epsilon & 0 & s * (1-\epsilon) & 0 \\ 0 & n * \epsilon & 0 & s * (1-\epsilon) \end{bmatrix}$$

La matrice jacobienne pour un élément est obtenue comme suit :

$$J = \begin{pmatrix} (n-1) & (1-n) & n & -n \\ (\epsilon-1) & -\epsilon & \epsilon & (1-\epsilon) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \\ X_4 & Y_4 \end{pmatrix}$$

Les matrices élémentaires Me et Ke seront de dimension (8,8), huit lignes et huit colonnes, et nous avons utilisé la quadrature de gauss comme dans le cas des éléments finis classique pour le calcul de l'intégrale.

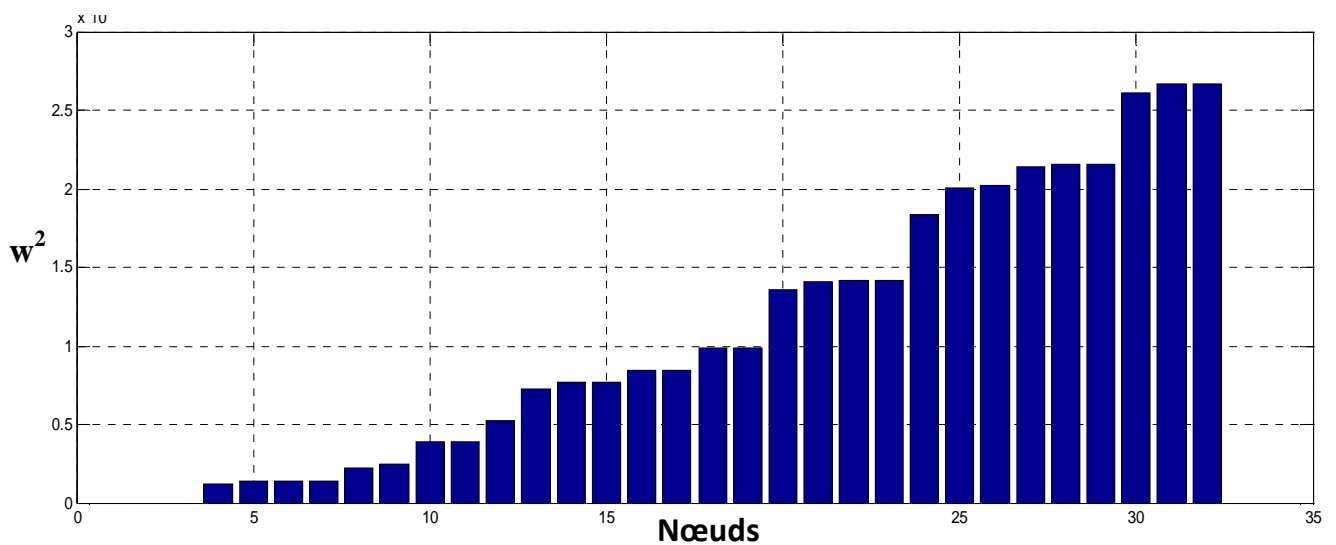
Pour l'ordre 2, on utilise des fonctions de base d'ordre 2 et de même vecteurs nœuds que le précédent :  $\Xi = [0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1]$  et  $H = [0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1]$ ,



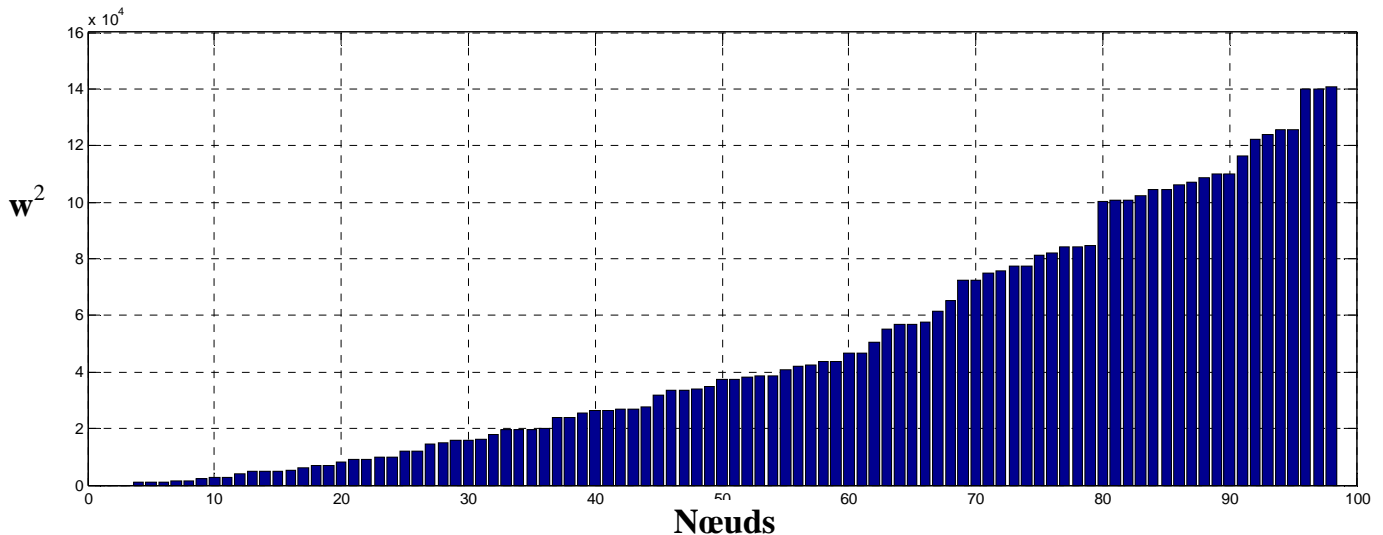
**Figure (V.7):** (a) Géométrie du modèle obtenue par les fonctions NURBS d'ordre 2 et (b) L'espace paramétrique associé

La procédure de calcul est la même que dans cas d'ordre 1, la différence est dans les fonctions de forme et le nombre de ddl. Dans l'ordre 1 le nombre de ddl par élément est quatre comme l'élément Q4 dans Lagrange, et le nombre de ddl dans l'ordre 2 est neuf comme Q9 dans Lagrange.

Après calcul et assemblage des matrices raideur et masse, la résolution de l'équation matricielle (V.3), donne les valeurs propres illustrées sur les figure suivant :



**Figure (V.8) :** Les valeurs propres aux nœuds du modèle analysé par des fonctions NURBS d'ordre 1



**Figure (V.9):** Les valeurs propres aux nœuds du modèle analysé par des fonctions de base NURBS d'ordre 2

#### V.4. Comparaison des deux méthodes

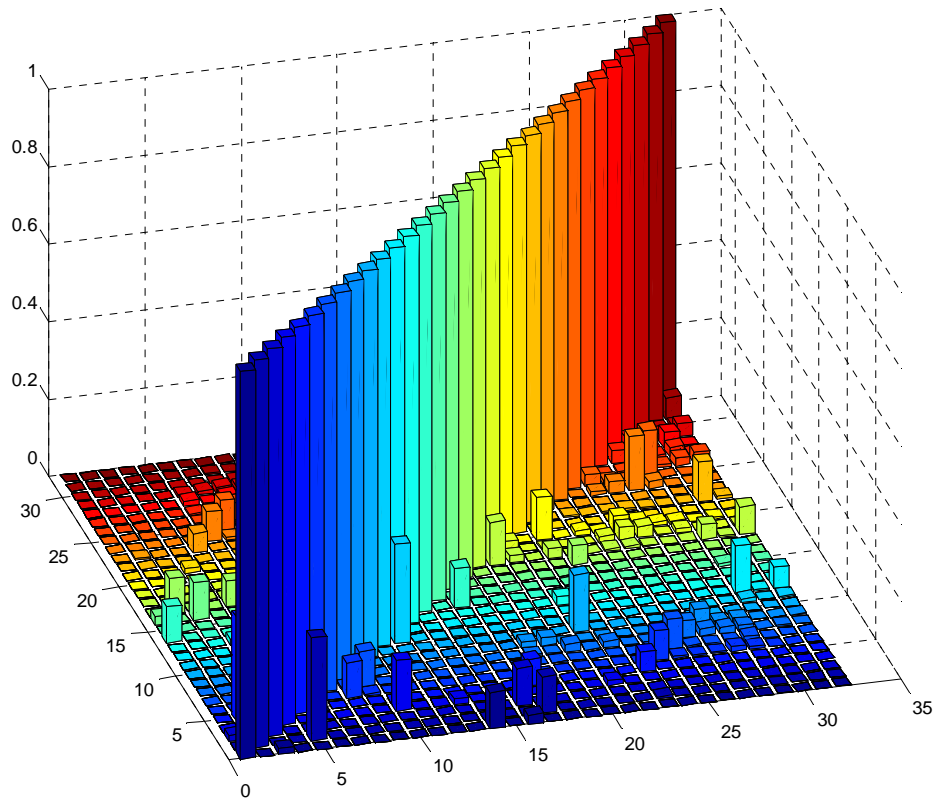
Les valeurs propres données par les deux méthodes dans le cas où les fonctions de forme sont d'ordre 1 sont les mêmes (**Figure (V.4)**, **figure (V.8)**), cela est due aux fonctions de forme qui sont les mêmes.

Pour le cas du deuxième ordre (**Figure (V.5)**, **figure (V.9)**), les valeurs propres sont très proches, cette légère différence est due à l'erreur de discrétisation de la géométrie dans la méthode des éléments finis classiques, alors que l'analyse isogéométrique nous donne une géométrie exacte.

##### V.4.1. application du critère MAC

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent le critère MAC est un outil qui sert à comparer entre les modes propres. Les valeurs de la matrice MAC sont comprises dans l'intervalle de  $[0, 1]$ , et une bonne corrélation entre les deux espace doit matérialiser une diagonale à hautes valeurs de MAC ( $>0.8$ ).

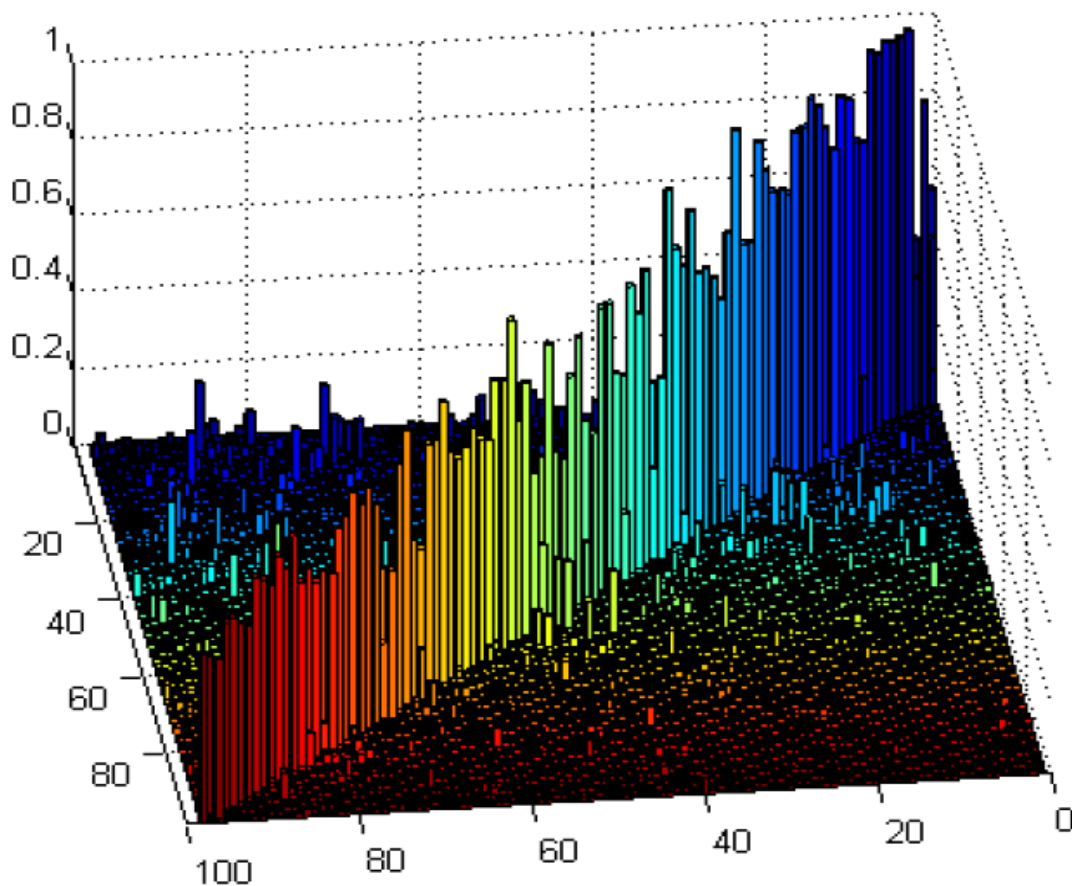
Pour la comparaison entre Lagrange d'ordre 1 (Elément de Lagrange Q4) et NURBS d'ordre 1 la matrice MAC donnée est illustrée sur la figure qui suit.



**Figure (V.10) :** Matrice MAC obtenue entre les modes propres donnés par Lagrange d'ordre 1 est NURBS d'ordre 1

Toutes les valeurs de la diagonale de la matrice MAC sont égales à 1, ce qui veut dire ; une parfaite corrélation entre les modes propres de Lagrange d'ordre 1 et ceux de NURBS d'ordre 1. Il ne faut pas oublier que dans le cas de l'ordre 1 les fonctions de base des deux polynômes (Lagrange et NURBS) sont les mêmes, et c'est pour cela que nous avons obtenu une parfaite corrélation.

Et pour la comparaison entre Lagrange d'ordre 2 (Elément de Lagrange Q9) et NURBS d'ordre 2 la matrice MAC donnée est illustrée sur la figure ci-dessous :



**Figure (V.11) :** Matrice MAC obtenue entre les modes propres donnés par Lagrange d'ordre 2 est NURBS d'ordre 2

Les premières valeurs de la diagonale de la matrice MAC sont assez importantes, ce qui veut dire qu'il ya une ressemblance entre les premiers modes des deux méthodes, quelque valeurs atteints la valeur 0.98, l'écart entre les premier modes est minime, mais il reste un nombre important de valeurs inférieur à 0.8 même elles atteints des valeurs de 0.02, ces dernières valeurs indique un niveau assez faible ressemblance entre un mode est un autre.

### V.5. Conclusion

Pour l'ordre 1, une corrélation parfaite est exprimée par les résultats qui s'explique par le fait que les NURBS d'ordre 1 et Lagrange d'ordre 1 sont égales. Par contre la corrélation pour l'ordre 2 montre une légère différence qui met en évidence une classification différente des deux méthodes. Théoriquement l'analyse isogéométrique est meilleure mais il reste à le prouver ou le montrer par la comparaison avec des mesures expérimentales qui fera l'objet d'un travail approfondi ultérieurement.

---

# *CONCLUSION GENERALE*

---

## CONCLUSION GENERALE

Au début de ce travail, nous avons développé les éléments géométriques utilisés dans la conception assistée par ordinateur. Nous avons modélisé deux modèles, le modèle de Bézier en premier, ce dernier utilise les fonctions de base de Bernstein qui sont simples à manipuler, et qui nous a permis d'exprimer facilement les géométries avec des points de contrôle. En seconde partie nous avons développé le modèle B-spline, il est plus complexe par rapport au premier à mettre en œuvre, mais il présente tous les avantages de ce dernier sans ces inconvénients. Le modèle B-spline nous donne des degrés de liberté en plus, il ne dépend pas que des points de contrôle mais aussi du vecteur nœuds pour représenter les géométries. Cette partie du travail nous a permis de maîtriser ces modèles en vue de les utiliser dans comme fonctions de base pour les éléments finis isogéométriques.

L'approche disciplinaire utilisée pour les deux méthodes analyse isogéométrique et éléments finis afin d'étudier notre modèle est la même. La différence est dans les équations de forme utilisées, dans la méthode des éléments finis les fonctions base utilisées (polynômes de Lagrange) interpolent aux points nodaux, et elles sont de continuité  $C^0$  au niveau des points nodaux, par contre dans l'analyse isogéométrique nous avons utilisé des fonctions de base NURBS, ces dernière ont une continuité élevée et n'interpolent pas au point de contrôle. Pour l'étude comparative des résultats des deux méthodes, nous avons choisi le critère MAC, un critère classique qui est très utilisé pour évaluer le niveau de correspondance des modes propres. En raison d'égalité des fonctions de forme de Lagrange et NURBS pour l'ordre 1, la fonction de corrélation nous a donné une parfaite corrélation des modes propres des deux méthodes, par contre la corrélation pour l'ordre 2 nous a montré une légère différence, ce qui met en évidence une classification différente des deux méthodes.

Ce travail nous a permis de maîtriser des outils numériques d'une nouvelle génération d'éléments finis tout en exploitant des méthodes numériques classiques et universelles. A titre d'une conclusion générale les mesures expérimentales seront d'un apport incontournable pour mettre en valeur ce genre d'analyse isogéométrique. Il serait encore plus intéressant de voir le comportement numérique de ce genre d'analyse dans le cas de l'analyse non linéaire.

---

*REFERENCES*  
*BIBLIOGRAPHIQUES*

---

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- [1] **RICARDO CAMARERO**, Génération de Maillages, Ecole Polytechnique de Montréal, 2008.
- [2] **CHRISTOPHE RABUT**, Petite Histoire d'une Idée Bizarre : Les Courbes et les Surfaces de Bézier. 13.03.2001.  
URL : [www-gmm.insa-toulouse.fr/~rabut/bezier/ensam/ensam.html](http://www-gmm.insa-toulouse.fr/~rabut/bezier/ensam/ensam.html).
- [3] **CHRISTOPHE RITZENTHALER**, courbes de bézier, 19<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique 2009
- [4] **VINCENT LESAGE**, Les Courbes de Bézier et les B-Splines. 10.2001.  
URL : [www4.ac-lille.fr/~math/classes/analyse/bezierspline/bezier-spline.htm](http://www4.ac-lille.fr/~math/classes/analyse/bezierspline/bezier-spline.htm).
- [5] **J-C FIOROT & P JEANNIN**, courbes et surfaces rationnelles (application à la cfao). éditions MASSON 1989.
- [6] **De Stefanie Hahman**, cours de modélisation géométrique, □laboratoire LMC-IMAG.
- [7] T.J.R. HUGHES , J.A. COTTRELL, Y. BAZILEVS, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 194 (2005) 4135–4195
- [8] **G. DHATT AND G. TOUZOT**, Une présentation de la méthode des éléments finis. Les presses de l'Université Laval, Québec, 1981.
- [9] **BATOZ J.L. AND DHATT G.** Modélisation des structures par éléments finis. Hermès, 1990. Volume 1 : Solides élastiques.
- [10] **Pentice. Hall, Inc, Englewood Cliffs**, introduction aux éléments finis, New Jersey, USA. ISBN 0-13-317248-11975
- [11] **Alaa CHATEAUNEUF** : Comprendre les éléments finis, Elipses Edition Marketing S.A, 2010, ISBN 978-2-7298-5430-0
- [12] **BHAVYA AGGARWAL**. b-spline finite elements for plane elasticity problems Submitted to the Office of Graduate Studies of Texas A&M University in partial fulfillment of the requirements for the degree of MASTER OF SCIENCE December 2006.
- [13] **YOUNG W. KWON? HYOCCHOONG BANG**, the finite element method using matlab, edited by Frank.A. Kulacki, university of Minnesota.

[14] **HERVE ALGAIN**, recalage de modeles dynamiques de structures dissipatrice. Faculté Polytechnique de Mons service de Mécanique Rationnelle, Dynamique et vibrations, Janvier 2000.

[15] **RANDALL J.ALLEMANG**, the modal assurance crirerion-twenty years of use and abuse, university of Cincinnati, ohio. the 1<sup>st</sup> International Modal Analysis Conference, pages 110-116, 1982

[16] **HAND R.DORFI, ROBERT L. WHEELER AND GORDON H. GRIFFITHS**, tire vibration transmission part I: FEA eigensolution correlation , the engineering technology hankook tire Co, Akon Technical Center.

---

# *ANNEXES*

---

**A. Points d'intégration et coefficients de pondération de la quadrature Gauss pour le polynôme de Lagrange dans l'intervalle de [-1 1].**

Pts	Deux points d'intégration	Trois points d'intégration	quatre points d'intégration	cinq points d'intégration
1	-0.5773502691896	-0.77459666924148	-0.86113631159405	-0.90617984593866
2	0.5773502691896	0	-0.33998104358485	-0.53846993101056
3		0.77459666924148	0.33998104358485	0
4			0.86113631159405	0.53846993101056
5				0.90617984593866
<b>Coef</b>				
1	1	0.555555555555556	0.347854845137454	0.236926885056189
2	1	0.888888888888889	0.652145154862546	0.478628670499366
3		0.555555555555556	0.652145154862546	0.568888888888889
4			0.347854845137454	0.478628670499366
5				0.236926885056189

**B. Points d'intégration et coefficients de pondération de la quadrature Gauss pour les fonctions bas NURBS dans l'intervalle [0 1]**

Pts	Trois points d'intégration	Quatre points d'intégration	Cinq points d'intégration	Six points d'intégration
1	0.166666666666667	0.111111111111111	0.083333333333333	0.066666666666667
2	0.500000000000000	0.375774001250012	0.305555555555555	0.244444444444444
3	0.833333333333333	0.624225998749988	0.500000000000000	0.424121308936067
4		0.888888888888889	0.694444444444445	0.575878691063933
5			0.916666666666667	0.755555555555556
6				0.933333333333333
<b>Coef</b>				
1	0.375000000000000	0.250000000000000	0.187500000000000	0.150000000000000
2	0.250000000000000	0.250000000000000	0.241071428571428	0.192857142857143
3	0.375000000000000	0.250000000000000	0.142857142857144	0.157142857142857
4		0.250000000000000	0.241071428571428	0.157142857142857
5			0.187500000000000	0.192857142857143
6				0.150000000000000