République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
Université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Spécialité : MATHÉMATIQUES

Option : Modélisation Mathématique

Intitulé du mémoire

Solutions Pseudo-Presque Périodiques et Pseudo-Presque Automorphes des Équations d'Évolution dans des espaces de Hilbert.

Réalisé par :

MOULLA Thiziri

Dirigé par :

SMAALI Manal

Devant le jury d'examen composé de :

MORSLI	Mohamed	Professeur	UMMTO	Président
SMAALI	Manal	MCA	UMMTO	Rapporteur
BEDOUHENE	Fazia	Professeur	UMMTO	Examinatrice
CHALLALI	Nouredine	MCB	UMMTO	Examinateur

Soutenu le : 06/07/2017

Année Universitaire : 2016/2017

Table des matières

Introduction générale

Le mathématicien Danois H. Bohr [1] a introduit la théorie de fonctions presque périodiques durant les années 1924-1926, ses premiers travaux constituent les fonctions à valeurs dans un espace vectoriel complexe. Une décennie plus tard de nombreux mathématiciens principalement Salamon Bochner [2] ont contribué à l'amélioration de cette théorie, dont les moyens utilisés pour démontrer certains résultats étaient plus maniables que ce que Bohr avait donné.

Cette théorie généralise celle de la périodicité, et elle joue un rôle important dans divers domaines, y compris l'analyse harmonique, les systèmes dynamiques, la physique,...etc.

Au début des années 90, le mathématicien chinois C. Zhang [3] a introduit un concept plus large à celui de la presque périodicité, celui de la pseudo-presque périodicité qui a été utilisé par exemple pour étudier les équations différentielles de comportement qualitatif et les équations différentielles partielles impliquant des coefficients pseudo-presque périodiques (voir [8]).

En 2006, T. Diagana [4] a introduit le concept de pseudo-presque périodicité à poids, ce concept est plus général et riche que celui de pseudo-presque périodicité.

Citons maintenant un autre concept dit presque automorphie qui a été introduit en littérature par S. Bochner [5] en 1955 dans le contexte de la géométrie différentielle. Willian A. Veech [6] a étendu ce concept aux groupes. Toute fonction

1. H. Bohr, Zur Theorie der festperiodischen Funktionen I. Acta Math. 45, 29-127 (1925).
2. S. Bochner, Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. I. Math. Ann. 96, 119-147 (1927).
3. Chuan Yi Zhang. Integration of vector-valued pseudo-almost periodic functions, Proc. Amer. Math. Soc. 121(1) (1994) 167-174.
4. T. Diagana, Weighted pseudo-almost periodic functions and applications. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I 343 (10), 643-646 (2006).
5. S. Bochner, Curvature and Betti numbers in real and complex vector bundles. Università e Politecnico de Torino, Rendiconti del Seminario Matematico 15, 225-253 (1955-1956).
6. W. A. Veech. Almost automorphic functions on groups. Amer. J. Math., 87 : 719-751,

presque périodique est presque automorphe, l'inverse n'étant pas vrai.

La pseudo-presque automorphie généralise la notion de presque automorphie, elle a été introduite en littérature par Xio et al[7], elle participe dans divers développements et extensions, son utilité apparait aussi dans l'étude de plusieurs variétés d'équations différentielles partielles et équations à coefficients pseudo-presque automorphes. Ce dernier a aussi été déployé au concept de pseudo-presque automorphie à poids par Blot et al[8].

La théorie des fonctions presque périodiques a suscité un intérêt important surtout dans le domaine des équations différentielles.

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à l'étude d'une classe particulière d'équations différentielles, à savoir

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + Bu(t) + F(t, u(h(t))), \ \forall t \in \mathbb{R},$$

où A et B des opérateurs linéaires fermés à domaines denses dans $\mathbb{H}$, F et h sont deux fonctions satisfaisant certaines propriétés que nous préciserons par la suite.

Notre travail est basé sur l'article [14], il est réparti en deux chapitres :

Le chapitre 1 constitue une synthèse des propriétés et des résultats fondamentaux de la théorie des fonctions presque périodiques et ses généralités : presque automorphie, pseudo-presque périodicité, pseudo-presque automorphie, pseudo-presque périodicité à poids et pseudo-presque automorphie à poids, illustrés par quelles que exemples et remarques.

Le chapitre 2 étudie le problème d'existence et d'unicité d'une solution pseudo-presque périodique à poids et pseudo-presque automorphe à poids des équations différentielles citées ci dessus, en utilisant le théorème du point fixe de Banach qui tient un rôle majeur pour la résolution de ces problèmes. On terminera ensuite par un exemple d'application explicite.

1955.

7. T. J. Xiao, J. Liang, J. Zhang, Pseudo-almost automorphic solutions to semilinear differential equations in Banach spaces. Semigroup Forum 76, 518-524 (2008)

8. J. Blot, G. M. Mophou, G. M. N'Guérékata, D. Pennequin, Weighted pseudo-almost automorphic functions and applications to abstract differential equations. Nonlinear Anal. 71(3-4), 903-909 (2009).

Nous finaliserons ce mémoire par un appendice, dans lequel on fera un petit rappel sur les espaces de Hilbert, sur les opérateurs, sur la propriété de Radon-Nikodym et sur le théorème du point fixe de Banach.

Chapitre 1

Les Fonctions Presque Périodiques et Presque Automorphes dans un espace de HILBERT

1.1 Fonctions Presque Périodiques

1.1.1 Définitions et propriétés générales

Définition 1.1.1. ***(Presque périodicité au sens de Bohr)***
*Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ est dite **presque périodique**, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre positif $l(\epsilon)$ tel que, tout intervalle de longueur $l(\epsilon)$ contienne un nombre τ vérifiant :*

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| < \epsilon \ , \ \forall t \in \mathbb{R},$$

*où τ est appelé **ϵ-translation** (ou **ϵ-période**) de la fonction f. On note $T(f, \epsilon)$ l'ensemble des ϵ-translations de f.*
L'ensemble de toutes les fonctions presque périodiques définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{H}$ est noté par $PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$.

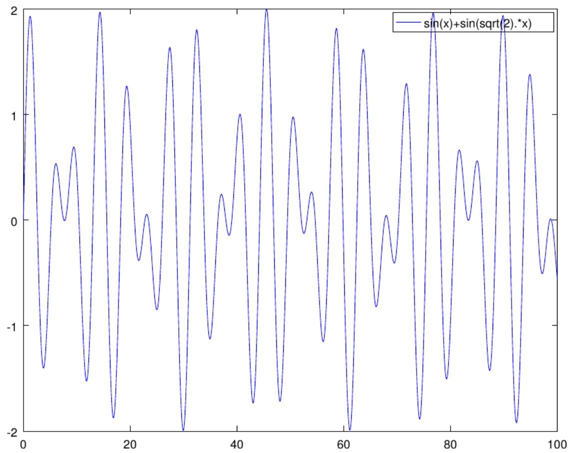
Remarque 1.1.1.

1. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ est presque périodique si :*
   - $\star$ *f est continue ;*
   - $\star$ *Pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $T(f, \epsilon)$ est relativement dense*[1] *dans $\mathbb{R}$.*

1. Un ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit **relativement dense** dans $\mathbb{R}$, s'il existe un réel positif l tel que tout intervalle de longueur l rencontre A, c'est à dire $A \cap [a, a+l] \neq \emptyset$, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

2. *Il est claire qu'une fonction continue périodique est aussi presque périodique. Le concept de presque périodicité est plus large que celui de la périodicité, comme le montre l'exemple suivant, (voir [8]) :*

   Exemple 1. *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \sin(t) + \sin(\sqrt{2}t)$ est presque périodique mais pas périodique.*



Définition 1.1.2. *Soit la fonction $T : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ définie par :*

$$T(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k t} \ , \ t \in \mathbb{R}$$

où $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $c_k \in \mathbb{H}$. T est appelée ***polynôme trigonométrique*** *à valeurs dans $\mathbb{H}$.*

Définition 1.1.3. *(**Approximation polynomiale**)*
Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ possède la ***propriété de l'approximation polynômiale****, si pour tout $\epsilon > 0$, on peut déterminer un polynôme trigonométrique T_ϵ à valeur dans $\mathbb{H}$ tel que :*

$$\| f(t) - T_\epsilon(t) \| < \epsilon \ , \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.1.4. *(**Propriété de normalité**)*
Une fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ est dite ***normale****, si de toute suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, on peut extraire une sous suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite de fonctions $(f_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $f_n(\cdot) = f(\cdot + \varphi_n)$ soit uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. D'une autre manière f est dite normale si l'ensemble des translatés : $\{f(.+t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est relativement compact[2] dans $(CB(\mathbb{R}, \mathbb{H}), \| \cdot \|_\infty)$[3].*

2. Une partie R d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ est dite **relativement compact**, si son adhérence $\overline{R}$ est compact.
3. $CB(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ est l'espace de toutes les fonctions **continues** et **bornées** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{H}$, muni

Le résultat suivant fait le lien entre la presque périodicité au sens de Bohr, la normalité et l'approximation polynômiale.

Théorème 1.1.1. *[10] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ une fonction continue bornée. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- ⋆ *f possède la propriété d'approximation polynômiale ;*
- ⋆ *f est normale ;*
- ⋆ *f est presque périodique.*

Définition 1.1.5. *(**Valeur moyenne d'une fonction presque périodique**)*
*Soit $f \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, on appelle **valeur moyenne de** f la quantité donnée par :*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_0^r f(t)dt,$$

notée par $\mathcal{M}\{f\}$.

Proposition 1.1.1. *Si la valeur moyenne d'une fonction presque périodique positive $f \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est nulle c'est à dire $\mathcal{M}\{f\} = 0$, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$*

Théorème 1.1.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ une fonction presque périodique, alors :*

1. *f est uniformément continue.*
2. *Le rang de f : $R(f) = \{f(t), t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact dans $\mathbb{H}$.*

Démonstration.

1. Comme f est presque périodique, il vient que : $\forall \epsilon > 0$ il existe $l_\epsilon > 0$ tel que tout intervalle de longueur l_ϵ contient un nombre τ tel que :
$$\|f(t+\tau) - f(t)\| < \frac{\epsilon}{3} \text{ , } \forall t \in \mathbb{R}.$$
Par l'uniforme continuité de f sur tout compact de $\mathbb{R}$, soit $\delta \in [0, 1]$ tel que :
$$\|f(t) - f(s)\| \leq \frac{\epsilon}{3} \text{ , pour } 0 \leq t, s \leq l_\epsilon + 1 \text{ et } |t - s| \leq \delta.$$

de la norme *sup* définie par :

$$\|x\|_{CB(\mathbb{R},\mathbb{H})} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|.$$

Soit maintenant $t, s \in \mathbb{R}$ tels que $|t-s| \leq \delta$. Choisissons τ tel que $0 \leq t+\tau, s+\tau \leq l_\epsilon + 1$, on en déduit

$$\begin{aligned} \|f(t)-f(s)\| &\leq \|f(t)-f(t+\tau)\| + \|f(t+\tau)-f(s+\tau)\| + \|f(s+\tau)-f(s)\| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

2. Comme f est presque périodique, il vient que : $\forall \epsilon > 0$ il existe $l_\epsilon > 0$ tel que tout intervalle de longueur l_ϵ contient un nombre τ tel que :

$$\|f(t+\tau)-f(t)\| < \frac{\epsilon}{2} \ , \forall t \in \mathbb{R}.$$

$f([0, l_\epsilon])$ est compact dans $\mathbb{H}$, choisissons alors une suite finie : $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$, telle que :

$$f(t) \in \bigcup_{i=1}^{i=n} B(f(t_i), \frac{\epsilon}{2}) \ , \ t \in [0, l_\epsilon].$$

Soit maintenant : $t \in \mathbb{R}$, $\tau = \tau(t)$ tel que $0 < t+\tau < l_\epsilon$, il existe t_j un élément de la suite $t_1, ..., t_n$ tel que $f(t+\tau) \in B(f(t_j), \frac{\epsilon}{2})$, alors

$$\begin{aligned} \|f(t)-f(t_j)\| &\leq \|f(t)-f(t+\tau)\| + \|f(t+\tau)-f(t_j)\| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon \end{aligned} ,$$

c'est à dire

$$f(t) \in B(f(t_j), \epsilon),$$

donc

$$f(t) \in \bigcup_{i=1}^{i=n} B(f(t_i), \epsilon) \ , \ \forall t \in \mathbb{R},$$

d'où

$$R(f) \subseteq \bigcup_{i=1}^{i=n} B(f(t_i), \epsilon)$$

Puisque ϵ est arbitraire il s'en suit que $R(f)$ est relativement compact dans $\mathbb{H}$.

□

Proposition 1.1.2. *[8] Supposons que f et g appartiennent à l'ensemble $PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ alors :*

- ⋆ *Les applications suivantes : $t \mapsto \lambda f(t)$, $t \mapsto f(\lambda t)$, $t \mapsto f(\lambda + t)$, $t \mapsto \|f(t)\|$, $t \mapsto f^n(t), \forall n \in \mathbb{N}$ sont presque périodiques.*
- ⋆ *$f+g$ et fg sont presque périodiques.*

$\star$ $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\| < \infty$.

Théorème 1.1.3. *[8] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ une fonction continue, on a :*

1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions presque périodique qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, alors f est aussi presque périodique.*
2. *Si f est presque périodique, et est dérivable telle que f' est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors f' est presque périodique.*
3. *Si f est presque périodique, alors*
$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(\sigma)d\sigma,$$
est presque périodique si et seulement si F est bornée.
4. *Soit $f \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ et soit l'application $g : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{E}$ (où $\mathbb{E}$ est un espace de Hilbert) continue sur $\overline{R(f)}$, alors $g(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ est presque périodique.*

Démonstration.

1. En utilisant le fait que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$, il vient que pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $N(\epsilon)$ tel que :
$$\|f_n(t) - f(t)\| \leq \frac{\epsilon}{3}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et } n \geq N(\epsilon).$$
Par la presque périodicité de f_N, il existe $l_\epsilon > 0$ tel que chaque intervalle de longueur l_ϵ contienne un nombre τ on aura
$$\|f_N(t+\tau) - f_N(t)\| < \frac{\epsilon}{3} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$
Maintenant
$$\begin{aligned}\|f(t+\tau) - f(t)\| &= \|f(t+\tau) - f_N(t+\tau) + f_N(t+\tau) - f_N(t) + f_N(t) - f(t)\| \\ &\leq \|f(t+\tau) - f_N(t+\tau)\| + \|f_N(t+\tau) - f_N(t)\| + \|f_N(t) - f(t)\| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon\end{aligned}$$
pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où la conclusion.
2. Soit $f_n(t) = n[f(t + \frac{1}{n}) - f(t)]$, pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et et pour $n \in \mathbb{N}$. Il est claire que $f_n\mathbb{R} \to \mathbb{H}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ est une suite de fonctions presque periodiques (voir les propriétés 1 et 2 de la proposition 1.1.2), qui converge uniformément vers f' sur $\mathbb{R}$, et d'après la propriété 1 du théorème 1.1.3, f' est presque périodique.

3. Voir Corduneanu [6, Preuve du théorème 6.20 page 179-180].
4. Observons, en premier lieu, que $g(f(\cdot))$ est une fonction continue (composée de deux fonctions continues). De plus, $g(\cdot)$ est uniformément continue sur $\overline{R(f)}$, donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que pour tout $x, x' \in \overline{R(f)}$, on a :

$$\|x - x'\| \leq \delta_\epsilon, \text{ alors } \|g(x) - g(x')\| \leq \epsilon.$$

Soit τ une δ_ϵ-translation de f, alors $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| \leq \delta_\epsilon,$$

par conséquent, en posant $x = f(t+\tau)$ et $x' = f(t)$ on aura

$$\|g(f(t+\tau)) - g(f(t))\| < \epsilon.$$

τ est alors une ϵ-translation de $g(f(\cdot))$. D'où $g(f(\cdot))$ est presque périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$.

□

Remarque 1.1.2. *On déduit du théorème précédent que* $(PP(\mathbb{R}, \mathbb{H}), \|.\|_\infty)$ *est un sous espace vectoriel fermé de l'espace de Banach* $(CB(\mathbb{R}, \mathbb{H}), \|\cdot\|_\infty)$ *donc* $(PP(\mathbb{R}, \mathbb{H}), \|\cdot\|_\infty)$ *est un espace de Banach tel que :*

$$\|u\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\| \ , \ \forall u \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$$

1.1.2 Théorème de composition

Avant d'énoncer le théorème de composition, nous donnons la définition d'une fonction presque périodique à paramètre.

Définition 1.1.6. *Une fonction continue* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *est dite* ***presque périodique par rapport à*** t ***uniformément par rapport aux compacts de*** $\mathbb{H}$*, si pour tout* $\epsilon > 0$ *et pour tout sous ensemble compact* K *de* $\mathbb{H}$*, il existe un nombre positif* $l(\epsilon)$ *tel que tout intervalle de longueur* $l(\epsilon)$ *contient un nombre* τ *de façon que :*

$$\|f(t+\tau, y) - f(t, y)\| < \epsilon \ , \ \forall (t, y) \in \mathbb{R} \times K.$$

L'ensemble de tels τ *sera noté* $T(f, K, \epsilon)$.
On note l'ensemble de toutes ces fonctions par $PPU_c(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H})$.

La proposition suivante nous donne une caractérisation des fonctions $PPU_c(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H})$:

Proposition 1.1.3. *[7] Soit* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$*. Alors* $f \in PPU_c(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H})$ *si et seulement si* *(i) Pour tout* $x \in \mathbb{H}$*,* $f(\cdot, x) \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$*,*

(ii) f *est uniformément continue sur tout ensemble compact* $K \subset \mathbb{H}$ *uniformément par rapport à* t*, c'est à dire pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $x_1, x_2 \in K$*, on a*

$$\|x_1 - x_2\| \leq \delta \Rightarrow \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \epsilon.$$

Théorème 1.1.4. *[4] Soit* $f \in PPU_c(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H})$*. Si* $g \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$*, alors la fonction* $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ *définie par* $\Gamma(.) = f(., g(.))$ *appartient à* $PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$*.*

Comme souvent dans les applications aux équations différentielles une condition de Lipschitz (par rapport au paramètre x uniformément par rapport à t) est imposée, nous énonçons avec preuve le théorème suivant qui est une conséquence du théorème 1.1.4.

Théorème 1.1.5. *Soit* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$*,* $(t, x) \mapsto f(t, x)$ *une fonction continue telle que pour tout* $x \in \mathbb{H}$ *la fonction* $f(\cdot, x)$ *est presque périodique en* $t \in \mathbb{R}$*. Supposons que* f *est Lipschitzienne en* $x \in \mathbb{H}$ *uniformément en* $t \in \mathbb{R}$*, c'est à dire, il existe* $L > 0$ *tel*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \ \forall x, y \in \mathbb{H}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ *est presque périodique, alors la fonction* $\Gamma(\cdot) = f(\cdot, g(\cdot)) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ *est aussi presque périodique.*

Démonstration. Puisque $g \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, alors $\overline{R(g)}$ est compact dans $\mathbb{H}$. Soit $\epsilon > 0$, posons alors $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{2L}, \frac{\epsilon}{2}\right\}$. Maintenant, d'après la proposition 1.1.3 $f \in PPU(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H})$, soit $\tau \in T(f, \overline{R(g)}, \delta) \cap T(g, \delta)$ alors, on a

$$\|g(t + \tau) - g(t)\| < \frac{\epsilon}{2L}, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t + \tau, g(t)) - f(t, g(t))\| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.2}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|\Gamma(t + \tau) - \Gamma(t)\| &= \|f(t + \tau, g(t + \tau)) - f(t, g(t))\| \\
&\leq \|f(t + \tau, g(t + \tau)) - f(t + \tau, g(t))\| + \|f(t + \tau, g(t)) - f(t, g(t))\| \\
&\leq L\|g(t + \tau) - g(t)\| + \|f(t + \tau, g(t)) - f(t, g(t))\| \\
&\leq L\frac{\epsilon}{2L} + \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

D'où

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\Gamma(t+\tau)-\Gamma(t)\| = \sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t+\tau, g(t+\tau)) - f(t, g(t))\| < \epsilon.$$

Finalement $\Gamma : t \mapsto f(t, g(t))$ est presque périodique. □

1.2 Fonctions Presque Automorphes

Dans cette section, nous formulons des résultats qui généralisent ceux des fonctions presque périodiques. Les démonstrations suivent pratiquement les mêmes techniques que ceux de la section précédente.

1.2.1 Définitions et propriétés générales

Définition 1.2.1. *Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ est dite presque automorphe si de toute suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, il existe une sous suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :*

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} f(t+s_n) \text{ et } f(t) = \lim_{n\to\infty} g(t-s_n)\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

D'une autre manière, f est presque automorphe, si

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} f(t+s_n-s_m) = f(t).$$

On note l'ensemble de toutes ces fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{H}$ par $PA(\mathbb{R}, \mathbb{H})$.

Remarque 1.2.1.

1. *Si la convergence donnée dans la définition 1.2.1 est uniforme sur $\mathbb{R}$, alors f est presque périodique. Le concept de presque automorphie est plus large que celui de presque périodicité. Il existe des fonctions presque automorphes qui ne sont pas presque périodiques, tel que le montre les exemples suivants :*
   (a) *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ donnée par*

   $$f(t) = \frac{2+e^{it}+e^{i\sqrt{2}t}}{|2+e^{it}+e^{i\sqrt{2}t}|}.$$

   Pour plus de détails sur l'exemple, le lecteur est orienté vers l'article de W.A. Veech [15].

   (b) *La fonction f définie par :*

   $$f(t) = cos\left(\frac{1}{p(t)}\right) \text{ avec } p(t) = 2+\sin(\alpha t)+\sin(\beta t),$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *vérifiant* $\dfrac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$, *voir [8].*

2. *La fonction* g *de la définition 1.2.1 est mesurable, mais pas nécessairement continue.*

Proposition 1.2.1. *Si* f_1, f_2 *et* f *sont des fonctions presque automorphes définies de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{H}$, *alors les propriétés suivantes sont vraies :*

1. $f_1 + f_2$ *est presque automorphe.*
2. λf *est presque automorphe, pour tout scalaire* λ.
3. $f_a(\cdot) = f(a + \cdot)$ *est presque automorphe, pour tout* a *fixé dans* $\mathbb{R}$.
4. $\widehat{f}(t) = f(-t)$ *est presque automorphe.*
5. $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\| < \infty$, *c'est à dire que* f *est bornée.*
6. *Si* $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{E}$ *est continue (*$\mathbb{E}$ *un espace de Hilbert), alors la composée :* $\phi(f(\cdot)) : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ *est presque automorphe.*

Démonstration.

Les propriétés $1., 2., 3.$, et 4. sont évidentes.

Montrons 5. Raisonnons par l'absurde, c'est à dire, supposons qu'il existe une suite $(s')_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, tel que $\lim_{n\to\infty} \|f(s'_n)\| = \infty$.
Puisque f est presque automorphe, par définition, on peut donc extraire une sous suite $(s_n) \subset (s'_n)$, tel que :

$$\text{Pour } t = 0,\ \lim_{n\to\infty} f(s_n) = \alpha \text{ existe,}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \|f(s_n)\| = \|\alpha\| < \infty,$$

qui est contradictoire avec la supposition.

La propriété 6. (voir [8]), se démontre avec le même raisonnement utilisé dans le cas des fonctions presque périodiques.

□

Théorème 1.2.1. *[8] [12] Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ *presque automorphe*

- ⋆ *Le rang* $R(f)$ *est relativement compact dans* $\mathbb{H}$.
- ⋆ $F(t) = \int\limits_0^t f(s)ds \in PA(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ *si et seulement si* F *est bornée .*
- ⋆ *Si* f *est dérivable telle que* f' *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$, *alors* f' *est presque automorphe.*

⋆ *Soit* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions presque automorphes qui converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers* $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{H})$*, alors* g *est aussi presque automorphe.*

Remarque 1.2.2. *[2]* $(PA(\mathbb{R},\mathbb{H}), \|\cdot\|_\infty)$ *est un espace de Banach muni de la norme sup donnée par :*

$$\|u\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\| \ , \ \forall u \in PA(\mathbb{R},\mathbb{H})$$

Théorème 1.2.2. *Soit* f *une fonction presque automorphe. Si* $f(t) = 0, \forall t > \alpha$*, pour un certain nombre réel* α*, alors* $f(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$*.*

Démonstration. Il suffit de monter que $f(t) = 0$ pour tout $t \leq \alpha$. Considérons une suite de nombres naturels $\mathbb{N} = (n)$, alors il existe une sous suite $(n_k) \subset (n)$, tel que :

$$\lim_{k\to\infty} f(t + n_k) = g(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

et

$$\lim_{k\to\infty} g(t - n_k) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Il est évident que, $\forall t \leq \alpha$, on peut trouvé $(n_{kj}) \subset (n_k)$ avec $t+n_{kj} > \alpha, \forall j = 1, 2, ...$ Alors que $f(t + n_{kj}) = 0, \forall j = 1, 2, ...$ Et puisque

$$\lim_{j\to\infty} f(t + n_{kj}) = g(t), \text{ alors } g(t) = 0.$$

Finalement $f(t) = 0$. □

1.2.2 Théorème de superposition

Avant d'énoncer le théorème de superposition, nous donnerons la définition d'une fonction presque automorphe à paramètre.

Définition 1.2.2. *Une fonction continue* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *est dite presque automorphe en* $t \in \mathbb{R}$ *pour chaque* $x \in \mathbb{H}$ *si pour toute suite de nombres réels* $(\sigma_n)_{n\mathbb{N}}$*, il existe une sous suite* $(s_n) \subset (\sigma_n)$ *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} f(t + s_n, x) = g(t, x), \text{ existe pour chaque } t \in \mathbb{R} \text{ et chaque } x \in \mathbb{H}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} g(t - s_n, x) = f(t, x), \text{ existe pour chaque } t \in \mathbb{R} \text{ et chaque } x \in \mathbb{H}.$$

Définition 1.2.3. *Une fonction continue* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *est dite* ***presque automorphe en*** t***, uniformément par rapport à*** $x \in \mathbb{H}$ *si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) Pour tout $x \in \mathbb{H}$, $f(\cdot, x) \in PA(\mathbb{R}, \mathbb{H})$,

(ii) f *est uniformément continue sur tout ensemble compact* $K \subset \mathbb{H}$ *uniformément par rapport à* t, *si pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $x_1, x_2 \in K$, *on a*

$$\|x_1 - x_2\| \leq \delta \Rightarrow \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \epsilon.$$

On note l'ensemble de toutes ces fonctions par $PAU(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H})$.

Théorème 1.2.3. *[12] Si la fonction* $f(\cdot, x)$ *est presque automorphe en* t *pour chaque* $x \in \mathbb{H}$ *et si* f *est Lipschitzienne en* x *uniformément en* t, *alors* g *de la définition 1.2.2 satisfait la même condition de Lipschitz en* x *uniformément en* t.

Théorème 1.2.4. *Soit* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $(t, x) \to f(t, x)$ *une fonction continue telle que pour tout* $x \in \mathbb{H}$ $f(\cdot, x)$ *est presque automorphe. Supposons que* f *satisfait la condition de Lipschitz en* x *uniformément en* $t \in \mathbb{R}$, *c'est à dire, il existe* $L > 0$ *tel que :*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \ , \forall x, y \in \mathbb{H} \ , \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si $\varphi \in PA(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, *alors la fonction* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ *définie par* $F(t) = f(t, \varphi(t))$ *est presque automorphe.*

Démonstration. Soit $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arbitraire de nombres réels. Par définition de fonctions presque automorphes, on peut extraire une sous suite $(s_n) \subset (s'_n)$, telle que :

1. $\lim\limits_{n \to \infty} f(t + s_n, x) = g(t, x)$, pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{H}$.
2. $\lim\limits_{n \to \infty} g(t - s_n, x) = f(t, x)$, pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{H}$.
3. $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(t + s_n) = \phi(t)$, pour chaque $t \in \mathbb{R}$.
4. $\lim\limits_{n \to \infty} \phi(t - s_n) = \varphi(t)$, pour chaque $t \in \mathbb{R}$.

Considérons la fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ définie par $G(t) = g(t, \phi(t))$, on peut voir que pour chaque $t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to \infty} F(t + s_n) = G(t), \text{ et } \lim_{n \to \infty} G(t - s_n) = F(t).$$

Posons :

$$F(t + s_n) - G(t) = f(t + s_n, \phi(t)) - g(t, \phi(t)).$$

Alors :

$$\begin{aligned}\|F(t+s_n)-G(t)\| &\leq \|f(t+s_n,\varphi(t+s_n))-f(t+s_n,\phi(t))\| \\ &+\|f(t+s_n,\phi(t))-g(t,\phi(t))\| \\ &\leq L\|\varphi(t+s_n)-\phi(t)\|+\|f(t+s_n,\phi(t))-g(t,\phi(t))\|.\end{aligned}$$

On déduit de 1. et 3., que : $\lim\limits_{n\to\infty} F(t+s_n)=G(t)$, pour chaque $t\in\mathbb{R}$.

D'une manière similaire, et en utilisant le théorème 1.2.3 on démontre que $\lim\limits_{n\to\infty} G(t-s_n)=F(t)$ pour chaque $t\in\mathbb{R}$, d'où F est presque automorphe. $\square$

1.3 Fonctions Pseudo-Presque Périodiques

La notion de pseudo-presque périodicité est une généralisation de la presque périodicité.

Définition 1.3.1. ***Fonctions Pseudo-Presque Périodiques***
Une fonction continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{H}$ est dite ***pseudo-presque périodique****, si elle admet l'écriture suivante :*

$$f=g+\varphi,$$

où $g\in PP(\mathbb{R},\mathbb{H})$ et $\varphi\in\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H})$, avec

$$\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H})=\{\varphi\in CB(\mathbb{R},\mathbb{H}):\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\|\varphi(s)\|ds=0\}.$$

L'ensemble $\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H})$ est dit ***espace des perturbations ergodiques****.*

L'ensemble de toutes ces fonctions pseudo-presque périodiques est noté par $PPP(\mathbb{R},\mathbb{H})$.

Remarque 1.3.1.

◇ *Une relation d'inclusion se déduit :*

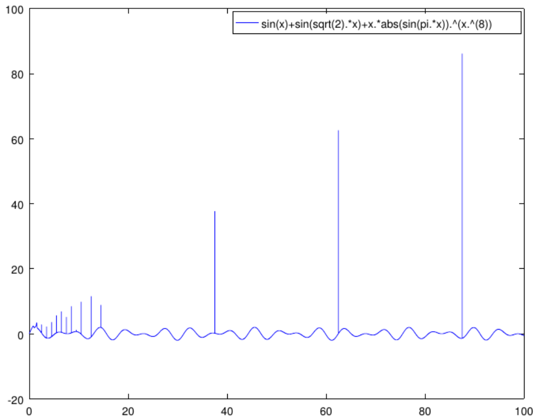
$$PP(\mathbb{R},\mathbb{H})\subset PPP(\mathbb{R},\mathbb{H})\subset CB(\mathbb{R},\mathbb{H}).$$

◇ *L'espace $(\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H}),\|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach (voir [2]).*

Exemple 2. *[8] Les fonctions suivantes $f_1,f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont des exemples de fonctions pseudo-presque périodiques :*

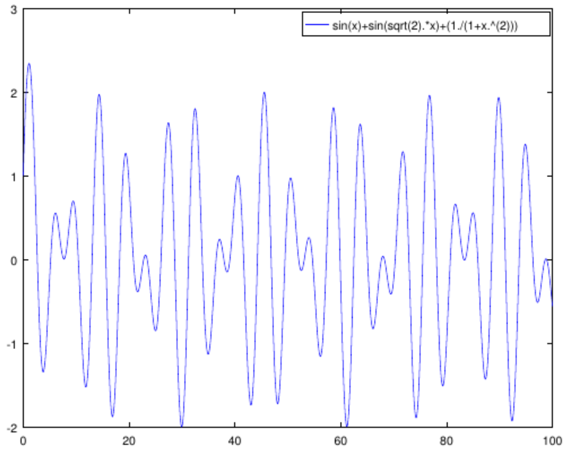
· $f_1(t)=\sin(t)+\sin(\pi t)+t|\sin(\pi t)|^{t^8}$.

Sa représentation graphique et donné comme suit :



· $f_2(t) = \sin(t) + \sin(\sqrt{2}t) + (1+t^2)^{-1}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Sa représentation graphique et donné comme suit :



Proposition 1.3.1. *La décomposition d'une fonction pseudo-presque périodique donnée en définition 1.3.1 est unique, c'est à dire :*

$$PPP(\mathbb{R}, \mathbb{H}) = PP(\mathbb{R}, \mathbb{H}) \oplus \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{H}).$$

Démonstration. Soit $f \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{H}) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{H})$. Posons $g = \|f\|$, il est facile de voir que $g \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{H}) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, et $g > 0$, et puisque $M\{g\} = 0$. En utilisant la proposition 1.1.1, on aura $g(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, donc $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$ d'où

$$PP(\mathbb{R}, \mathbb{H}) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{H}) = \{0\}.$$

Maintenant, soit : $f = h_1 + \varphi_1$ et $f = h_2 + \varphi_2$, avec $h_1, h_2 \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, alors $h_1 - h_2 = \varphi_1 - \varphi_2$. En tenant compte de ce qui précède, on aura : $h_1 - h_2 = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$, d'où $h_1 = h_2$ et $\varphi_1 = \varphi_2$ ce qui achève la démonstration. $\square$

Proposition 1.3.2. *[8] Si* $f = g + \varphi \in PPP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$*, où* $g \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ *et* $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{H})$*, alors* $g(\mathbb{R}) \subset \overline{f(\mathbb{R})}$ *et*

$$\|f\|_\infty \geq \|g\|_\infty.$$

Proposition 1.3.3.

1. *Soient* $f, g \in PPP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$*, et* $\lambda \in \mathbb{R}$*, alors* $f + g$*,* λf *appartiennent à* $PPP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$*.*
2. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, une suite de fonctions pseudo-presque périodiques qui converge uniformément vers une fonction continue* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ *alors* $f \in PPP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$*.*

Démonstration.

1. La propriété 1. est directe.
2. Soit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset PPP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$. Montrons que $f \in PPP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset PPP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, alors :
$$f_n = h_n + \varphi_n,$$
où $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{H})$. De la proposition 1.3.2, on a
$$\|h_n\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty,$$
d'autre part
$$f_n - f_m = h_n - h_m + \varphi_n - \varphi_m \in PPP(\mathbb{R}, \mathbb{H}), \forall n, m \in \mathbb{N},$$
où $(h_n - h_m) \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ et $(\varphi_n - \varphi_m) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, alors de la même proposition 1.3.2, on aura
$$\|h_n - h_m\|_\infty \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$
Puisque $\|f_n - f_m\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suit de Cauchy et donc $\|h_n - h_m\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ est aussi une suite de Cauchy, et comme $PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ est un espace de Banach, alors il existe $h \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ telle que $\|h_n - h\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Posons $\varphi = f - h$, il est facile de voir que $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$, ce qui donne $\varphi \in CB(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, montrons que $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{H})$
$$\begin{aligned}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \|\varphi(t)\| dt &= \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \|\varphi(t) - \varphi_n(t) + \varphi_n(t)\| dt \\ &\leq \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \|\varphi(t) - \varphi_n(t)\| dt + \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \|\varphi_n(t)\| dt \\ &\leq \|\varphi - \varphi_n\|_\infty + \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \|\varphi_n(t)\| dt.\end{aligned}$$

Comme $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H})$, on a

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\|\varphi_n(t)\|dt = 0,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

alors

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\|\varphi(t)\|dt \leq \|\varphi-\varphi_n\|_\infty,$$

et quand $n \to +\infty$, on aura

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\|\varphi(t)\|dt = 0.$$

D'où $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H})$. En conclusion $f \in PPP(\mathbb{R},\mathbb{H})$.

□

Remarque 1.3.2. *D'après la proposition précédente, l'espace* $(PPP(\mathbb{R},\mathbb{H}), \|.\|_\infty)$ *est un espace de Banach muni de la norme* sup.

1.4 Fonctions Pseudo-Presque Automorphes

Définition 1.4.1. *Une fonction continue* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ *est dite **pseudo-presque automorphe**, si elle admet l'écriture suivante :*

$$f = h + \varphi,$$

où $h \in PA(\mathbb{R},\mathbb{H})$ *et* $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H})$*. Les deux fonctions* h *et* φ *sont dites respectivement fonction presque automorphe et composante ergodique de* f*.*

L'ensemble de toutes ces fonctions est noté par $PPA(\mathbb{R},\mathbb{H})$.

Exemple 3. *[8] Soit la fonction* f *définie par :*

$$f(t) = \cos\left(\frac{1}{\sin(t)+\sin(\sqrt{2}t)} + \frac{1}{(1+t^2)}\right).$$

La fonction f *est un exemple d'une fonction pseudo-presque automorphe mais qui n'est pas pseudo-presque périodique* [4].

Proposition 1.4.1. *[8] Si* $f = g + \varphi \in PPA(\mathbb{R},\mathbb{H})$*, où* $g \in PA(\mathbb{R},\mathbb{H})$ *et* $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H})$*, alors* $g(\mathbb{R}) \subset \overline{f(\mathbb{R})}$ *et*

$$\|f\|_\infty \geq \|g\|_\infty.$$

4. L'espace des fonctions pseudo-presque automorphes est plus large que l'espace des fonctions pseudo-presque périodique, et on a $PPP(\mathbb{R},\mathbb{H}) \subset PPA(\mathbb{R},\mathbb{H})$

Proposition 1.4.2. *[12] Soit $f, g \in PPA(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :*

- $\star$ $f + g \in PPA(\mathbb{R}, \mathbb{H})$.
- $\star$ $\lambda f \in PPA(\mathbb{R}, \mathbb{H})$.
- $\star$ *Soit $f \in CB(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset PPA(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, si f_n converge uniformément vers f, alors f est pseudo-presque automorphe.*

Démonstration. Un raisonnement similaire au cas pseudo-presque périodique nous permet de démontrer ce résultat en utilisant la proposition précédente 1.4.1. □

Remarque 1.4.1.

- $\diamond$ $PA(\mathbb{R}, \mathbb{H}) \subset PPA(\mathbb{R}, \mathbb{H}) \subset CB(\mathbb{R}, \mathbb{H})$.
- $\diamond$ *L'espace $(PPA(\mathbb{R}, \mathbb{H}), \|, \|_\infty)$ est un espace de Banach (voir [3]).*

Proposition 1.4.3. *La décomposition d'une fonction pseudo-presque automorphe est unique, c'est à dire :*

$$PPA(\mathbb{R}, \mathbb{H}) = PA(\mathbb{R}, \mathbb{H}) \oplus \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{H}).$$

Démonstration. Pour la démonstration, on utilise le même raisonnement au cas des fonctions pseudo-presque périodiques, voir la preuve de la proposition (1.3.1). □

1.5 Fonctions μ-Pseudo-Presque Périodiques et μ-Pseudo-Presque Automorphes

1.5.1 Définitions et propriétés générales

Dans toute la suite, on note par $\mathcal{M}$ l'ensemble de toutes les mesures positives sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$, où $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ est la tribu de Lebesgue (voir [5]), vérifiant $\mu(\mathbb{R}) = \infty$ et $\mu([a, b]) < \infty$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$.

Définition 1.5.1. *Soit $\mu \in \mathcal{M}$. Une fonction continue bornée $g : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ est dite **μ-ergodique**, si :*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r,r]} \|g(s)\| d\mu(s) = 0.$$

L'ensemble de toutes ces fonctions sera noté $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu)$.

Définition 1.5.2. *Soit $\mu \in \mathcal{M}$. Une fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ est dite **μ-pseudo presque périodique**, si elle admet l'écriture :*

$$f = g + \varphi,$$

où $g \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu)$.

On note l'ensemble de toutes ces fonctions $PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$. On déduit alors :

$$PP(\mathbb{R},\mathbb{H}) \subset PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu) \subset BC(\mathbb{R},\mathbb{H}).$$

Définition 1.5.3. *Soit $\mu \in \mathcal{M}$. Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ est dite **μ-pseudo presque automorphe**, si elle admet l'écriture :*

$$f = g + \varphi,$$

où $g \in PA(\mathbb{R},\mathbb{H})$, et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$.

On note l'ensemble de toutes ces fonction par $PPA(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$. On aura alors :

$$PA(\mathbb{R},\mathbb{H}) \subset PPA(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu) \subset BC(\mathbb{R},\mathbb{H}).$$

Remarque 1.5.1.

- ◇ *L'espace $(\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach muni de la norme* sup.
- ◇ *Quand la mesure μ est celle de Lebesgue, alors les fonctions μ-pseudo presque périodiques sont pseudo presque périodiques (même chose pour les fonctions μ-pseudo presque automorphes).*

Formulons maintenant les hypothèses suivantes :

· (**Hy1**) Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq a < b \leq c$; il existe $\tau_0 \geq 0$ et $\alpha_0 > 0$ tels que :

$$|\tau| \geq \tau_0 \Longrightarrow \mu(]a+\tau, b+\tau[) \geq \alpha_0 \mu([\tau, c+\tau]).$$

· (**Hy2**) Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, il existe $\beta > 0$ et un intervalle borné I tel que :

$$\mu(\{a+\tau, a \in A\}) \leq \beta\mu(A), \text{ où } A \in \mathcal{B} \text{ satisfait } A \cap I = \emptyset.$$

Lemme 1.5.1. *[2] L'hypothèse (**Hy2**) implique (**Hy1**).*

Démonstration. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, tels que $0 \leq a < b \leq c$. Alors, il existe $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ tels que $a < a_1 < b_1 < b$. Par conséquent, on aura :

$$[a_1+\tau, b_1+\tau] \subset]a+\tau, b+\tau[\ ,\ \forall \tau \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

et, il existe $N \in \mathbb{N}$ $(N \geq 1)$ et $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$c = N(b_1 - a_1) + r, o\ 0 \leq r < b_1 - a_1. \tag{1.4}$$

De l'hypothèse (**Hy2**), pour tout $n \in \{0, ..., N\}$, il existe $\beta_n > 0$ et un intervalle borné I_n tel que

$$\mu(\{m + n(b_1 - a_1) - a_1 : m \in A\}) \leq \beta_n \mu(A) \text{ pour } A \in \mathcal{B} \text{ vérifiant } A \cap I_n = \emptyset.$$

En prenant $I_* = \bigcup_{n=0}^{N} I_n$ un intervalle borné et $\beta_* = \max\{\beta_0, ..., \beta_N\}$, on déduit que :

$$\mu(\{m + n(b_1 - a_1) - a_1 : m \in A\}) \leq \beta_* \mu(A), \tag{1.5}$$

pour $A \in \mathcal{B}$ vérifiant $A \cap I_* = \emptyset$.
De (1.4), on obtient $[\tau, c+\tau] \subset [\tau, \tau + (N+1)(b_1 - a_1)]$, de plus :

$$\begin{aligned} [\tau, \tau + (N+1)(b_1 - a_1)] &= \bigcup_{n=0}^{N} [\tau + n(b_1 - a_1), \tau + (n+1)(b_1 - a_1)] \\ &= \bigcup_{n=0}^{N} [\{m + n(b_1 - a_1) - a_1 : m \in [a_1 + \tau, b_1 + \tau]\}], \end{aligned}$$

il vient que :

$$\mu([\tau, c+\tau]) \leq \sum_{n=0}^{N} \mu(\{m + n(b_1 - a_1) - a_1 : m \in [a_1 + \tau, b_1 + \tau]\}). \tag{1.6}$$

Puisque I_* est un intervalle borné , il existe $\tau_0 \geq 0$ tel que pour tout τ vérifiant $|\tau| \geq \tau_0$ implique que

$$[a_1 + \tau, b_1 + \tau] \cap I_* = \emptyset,$$

alors, en utilisant (1.5), on aura

$$\mu(\{m + n(b_1 - a_1) - a_1 : m \in [a_1 + \tau, b_1 + \tau]\}) \leq \beta_* \mu([a_1 + \tau, b_1 + \tau]). \tag{1.7}$$

De (1.3), (1.6) et (1.7), on obtient :

$$|\tau| \geq \tau_0 \Longrightarrow \mu([\tau, c+\tau]) \leq (N+1)\beta_* \mu(]a + \tau, b + \tau[).$$

□

Proposition 1.5.1. *[2] Soit $\mu \in \mathcal{M}$ satisfait (**Hy1**) et $f \in PPP(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu)$ telle que $f = g + \varphi$, où $g \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu)$, alors*

$$\{g(t);\ t \in \mathbb{R}\} \subset \overline{\{f(t);\ t \in \mathbb{R}\}}$$

Théorème 1.5.1. *Soit $\mu \in \mathcal{M}$ vérifiant (**Hy1**), alors la décomposition des fonctions μ-pseudo presque périodiques sous la forme $f = g + \varphi$, où $g \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu)$ est unique.*

Démonstration. Supposons que $f = g_1 + \varphi_1 = g_2 + \varphi_2$, où $g_1, g_2 \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, et $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu)$, alors $0 = (g_1 - g_2) + (\varphi_1 - \varphi_2) \in PPP(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu)$, où $g_1 - g_2 \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ et $\varphi_1 - \varphi_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu)$. De la proposition 1.5.1, on obtient $(g_1 - g_2)(\mathbb{R}) \subset (f - f)\{\mathbb{R}\} = \{0\}$, ainsi, on aura $g_1 = g_2$ et $\varphi_1 = \varphi_2$. □

Théorème 1.5.2. *Soit $\mu \in \mathcal{M}$ satisfait (**Hy1**), alors la décomposition des fonctions μ-pseudo presque automorphes sous la forme $f = g + \varphi$, où $g \in PA(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu)$ est unique.*

Démonstration. On procède de la même façon que dans le cas du théorème 1.5.1. □

Théorème 1.5.3. *Soit $\mu \in \mathcal{M}$ satisfait **(Hy1)**, alors $(PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu), \|\cdot\|_\infty)$ et $(PPA(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu), \|\cdot\|_\infty)$ sont des espaces de Banach.*

Démonstration. En premier lieu, montrons que si (**Hy1**) est vérifiée alors l'espace $(PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. Supposons alors qu'on a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$. On peut écrire donc $f_n = g_n + \varphi_n$, où $g_n \in PP(\mathbb{R},\mathbb{H})$ et $\varphi_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$, en utilisant la proposition 1.5.1 on aura $\|g_n - g_m\|_\infty \leq \|f_n - f_m\|_\infty$, par conséquent $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $(PP(\mathbb{R},\mathbb{H}), \|\cdot\|_\infty)$, donc $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n - g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $(\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu), \|\cdot\|_\infty)$. En s'appuyant sur le fait que $(PP(\mathbb{R},\mathbb{H}), \|\cdot\|_\infty)$ et $(\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu), \|\cdot\|_\infty)$ sont des espaces de Banach on pourra conclure que $\lim_{n\to\infty} g_n = g \in PP(\mathbb{R},\mathbb{H})$, et $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$. Finalement, $\lim_{n\to\infty} f_n = g + \varphi \in PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$. D'où $(PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.
Pour l'espace $(PPA(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu), \|\cdot\|_\infty)$, on procédera de la même façon. □

Théorème 1.5.4. *[2][3] Soit $\mu \in \mathcal{M}$ satisfait **(Hy2)**, alors la classe des fonctions $PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$ et $PPA(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$ sont invariants par translation.*

1.5.2 Théorèmes de composition

Dans la suite nous énonçons deux théorèmes de composition qui nous serons utiles en chapitre 2.

Définition 1.5.4. *Soit $\mu \in \mathcal{M}$. Une fonction continue $g : \mathbb{R}\times\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ est dite **μ-ergodique en t uniformément par rapport à** $y \in \mathbb{H}$ si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- *Pour tout $y \in \mathbb{H}$: $g(\cdot, y) \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$,*
- *$g(t,x)$ est uniformément continue sur tout ensemble compact K de $\mathbb{H}$ uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}$.*

L'ensemble de toutes ces fonctions est noté par $\mathcal{E}U(\mathbb{R}\times\mathbb{H},\mathbb{H},\mu)$.

Définition 1.5.5. *Soit $\mu \in \mathcal{M}$. Une fonction continue $f : \mathbb{R}\times\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ est dite **μ-pseudo presque périodique en $t \in \mathbb{R}$ uniformément par rapport à** $y \in \mathbb{H}$ si f admet l'écriture :*

$$f = g + \varphi,$$

où $g \in PPU(\mathbb{R}\times\mathbb{H},\mathbb{H})$ et $\varphi \in \mathcal{E}U(\mathbb{R}\times\mathbb{H},\mathbb{H},\mu)$.

L'ensemble de toutes ces fonctions est donné par $PPPU(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H}, \mu)$.

Théorème 1.5.5. *[2] Soit $\mu \in \mathcal{M}$, $F \in PPPU(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H}, \mu)$ et $h \in PPP_c(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu)$. Supposons que pour tout sous ensemble borné B de $\mathbb{H}$, F est bornée sur $\mathbb{R} \times B$, alors $t \mapsto F(t, h(t)) \in PPP(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu)$.*

Définition 1.5.6. *[14] Soit $\mu \in M$. Une fonction continue $f : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ est dite μ-**pseudo presque automorphe en** $t \in \mathbb{R}$ **uniformément par rapport à** $y \in \mathbb{H}$ si f admet l'écriture :*

$$f = g + \varphi,$$

où $g \in PAU(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H})$ et $\varphi \in \mathcal{E}U(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H}, \mu)$.

L'ensemble de toutes ces fonctions est donné par $PPAU(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H}, \mu)$.

Théorème 1.5.6. *[3] Soit $\mu \in \mathcal{M}$ et $F \in PPAU(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H}, \mu)$ et $h \in PPA(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu)$. Supposons que , pour tout sous ensemble borné B de $\mathbb{H}$, F est bornée sur $\mathbb{R} \times B$, alors $t \mapsto F(t, h(t)) \in PPA(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu)$.*

Remarque 1.5.2. *Les théorème 1.5.5 et 1.5.6 jouent un rôle important pour l'étude des solutions μ-pseudo presque périodiques et μ-pseudo presque automorphes. Leurs démonstrations se basent sur les propriétés des ensembles $PPPU(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H}, \mu)$ et $PPAU(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H}, \mu)$ et la mesure μ associée, pour plus de détail, on réfère le lecteur à voir [2] et [3].*

Chapitre 2

Problème d'existence de Solutions μ-Pseudo Presque Périodiques et μ-Pseudo Presque Automorphes

Soit l'équation :

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + Bu(t) + F(t, u(h(t))),\ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

où A et B représentent des opérateurs linéaires fermés à domaine denses dans $\mathbb{H}$, F et h sont deux fonctions satisfaisant certaines propriétés à préciser par la suite. Notre but dans ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution μ-pseudo presque périodique ou μ-pseudo presque automorphe pour l'équation (2.1).

2.1 Solutions μ-Pseudo Presque Périodiques

Supposons les hypothèses suivantes vérifiées :

· (**H1**) $F = \varphi + \psi \in PPPU(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H}, \mu)$, où $\varphi \in PPU_c(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H})$, et $\psi \in \mathcal{E}U(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H}, \mu)$. Les fonctions φ, ψ sont Lipschitziennes par rapport au second argument uniformément en $t \in \mathbb{R}$, alors il existe deux constantes positives L_φ et L_ψ telles que pour tout $(t, x), (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{H}$, on a :

$$\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| \leq L_\varphi \|x - y\|,$$
$$\|\psi(t, x) - \psi(t, y)\| \leq L_\psi \|x - y\|.$$

· (**H2**) Il existe $C \subset \mathbb{H}$, un sous espace fermé qui réduit à la fois les opérateurs A et B. P_C est la projection orthogonale sur C et $Q_C = (I - P_C) = P_{\mathbb{H} \ominus C}$ la projection orthogonale sur $\mathbb{H} \ominus C$, où I représente l'opérateur identité.

· (**H3**)$A,\ B$ sont des générateurs infinitésimaux des C_0-groupes d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t\in\mathbb{R}},\ (R(t))_{t\in\mathbb{R}}$ respectivement, tels qu'il existe $M_1,\ M_2,\ \delta_1,\ \delta_2 > 0$ avec

$$\|T(t-s)P_C\| \leq M_1 e^{-\delta_1(t-s)} \text{ pour tout } t \geq s,$$

et

$$\|R(t-s)Q_C\| \leq M_2 e^{-\delta_2(t-s)} \text{ pour tout } t \geq s.$$

· (**H4**) $R(A) \subset R(P_C) = N(Q_C)$.

· (**H5**) $R(B) \subset R(Q_C) = N(P_C)$.

· (**H6**) La fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue strictement croissante, et il existe une fonction $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ continue, telle que

$$d\mu_h(s) \leq \lambda(s)d\mu(s) \text{ où } \mu_h(A) = \mu(h^{-1}(A)) \text{ pour tout } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

et

$$\sup_{s\in h[-r,r]} \lambda(s) = M_r,\ \limsup_{r\to\infty} \frac{\mu([-\alpha(r),\alpha(r)])}{\mu([-r,r])} M_r < \infty,$$

où $\alpha(r) = \sup\limits_{t\in[-r,r]} |h(t)|$, et pour tout $u(\cdot) \in PP(\mathbb{R},\mathbb{H})$, $u(h(\cdot)) \in PP(\mathbb{R},\mathbb{H})$

Le lemme suivant joue un rôle très important pour la résolution du problème (2.1).

Lemme 2.1.1. *Supposons que l'hypothèse (**H6**) est vérifiée. Si $u \in PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$, alors $u(h(\cdot)) \in PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$, où h est la fonction donnée en (**H6**).*

Démonstration. Soit $u \in PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$, alors u admet l'écriture $u = u_1 + u_2$, où $u_1 \in PP(\mathbb{R},\mathbb{H})$ et $u_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$. Par l'hypothèse (**H6**), on a $u_1(h(\cdot)) \in PP(\mathbb{R},\mathbb{H})$. On souhaite maintenant démontrer que la fonction $u_2(h(\cdot)) \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$. On a :

$$0 \leq \frac{1}{\mu([-r,r])} \int\limits_{[-r,r]} \|u_2(h(t))\| d\mu(t),$$

de (**H6**) et avec un changement de variables, on aura

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\mu([-r,r])} \int\limits_{h([-r,r])} \|u_2(t)\| d\mu_h(t) \\ &= \frac{1}{\mu([-r,r])} \int\limits_{[h(-r),h(r)]} \|u_2(t)\| d\mu_h(t), \ \textit{car } h \textit{ est stictement croissante}, \end{aligned}$$

D'autre part, on a $d\mu_h(s) \leq \lambda(s)d\mu(s) \leq \sup\limits_{s\in h([-r,r])} \lambda(s)d\mu(t) \leq M_r d\mu(t)$, en utilisant le fait que $\alpha(r) = \sup\limits_{t\in[-r,r]} |h(t)|$, donc $[h(-r),h(r)] \subset [-\alpha(r),\alpha(r)]$, on aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu([-r,r])}\int_{[-r,r]}\|u_2(h(t))\|d\mu(t) &\leq \frac{M_r}{\mu([-r,r])}\int_{[h(-r),h(r)]}\|u_2(t)\|d\mu(t)\\ &\leq \frac{M_r}{\mu([-r,r])}\int_{[-\alpha(r),\alpha(r)]}\|u_2(t)\|d\mu(t)\\ &\leq \frac{M_r\mu([-\alpha(r),\alpha(r)])}{\mu([-r,r])}\frac{1}{\mu([-\alpha(r),\alpha(r)])}\int_{[-\alpha(r),\alpha(r)]}\|u_2(t)\|d\mu(t).\end{aligned}$$

De (**H6**), $\limsup_{r\to+\infty}\dfrac{M_r\mu([-\alpha(r),\alpha(r)])}{\mu([-r,r])}<\infty$, posons alors $\lim_{r\to\infty}\alpha(r)=\alpha^*$, par définition de $\alpha(\cdot)$ et $h(\cdot)$ on aura $\alpha(r)\leq\alpha^*$, de plus

$$[-\alpha(r),\alpha(r)]\subseteq[-\alpha^*,\alpha^*] \text{ et } M_r=\sup_{t\in h([-r,r])}\lambda(t)\leq\sup_{t\in[-\alpha^*,\alpha^*]}\lambda(t)=M_{\alpha^*},$$

d'où :

$$\frac{1}{\mu([-r,r])}\int_{[-r,r]}\|u_2(h(t))\|d\mu(t)\leq\frac{M_{\alpha^*}}{\mu([-r,r])}\int_{[-\alpha^*,\alpha^*]}\|u_2(t)\|d\mu(t).$$

Puisque $u_2\in\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$, alors il existe une constante positive K_{α^*} telle que

$$\int_{[-\alpha^*,\alpha^*]}\|u_2(t)\|d\mu(t)\leq K_{\alpha^*},$$

alors

$$\frac{1}{\mu([-r,r])}\int_{[-r,r]}\|u_2(h(t))\|d\mu(t)\leq\frac{C}{\mu([-r,r])}\ \longrightarrow 0,\text{ quand } r\to\infty,$$

où $C=M_{\alpha^*}K_{\alpha^*}$.

Si $\lim_{r\to\infty}\alpha(r)=+\infty$, et puisque $u_2\in\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$ et $\limsup_{r\to\infty}\dfrac{M_r\mu([-\alpha,\alpha(r)])}{\mu([-r,r])}<\infty$, alors :

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{\mu([-r,r])}\int_{[-r,r]}\|u_2(h(t))\|d\mu(t)=0.$$

Par conséquent $u_2(h(\cdot))\in\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$. On a finalement conclut que $u(h(\cdot))\in PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$. □

Lemme 2.1.2. *Supposons que les hypothèses **(H1)-(H5)** soient vérifiées, alors toute solution du problème (2.1) vérifie :*

$$\begin{aligned}u(t) &= \int_{-\infty}^{t}T(t-s)P_C\varphi(s,u(h(s)))ds+\int_{-\infty}^{t}R(t-s)Q_C\varphi(s,u(h(s)))ds\\ &\quad+\int_{-\infty}^{t}T(t-s)P_C\psi(s,u(h(s)))ds+\int_{-\infty}^{t}R(t-s)Q_C\psi(s,u(h(s)))ds.\end{aligned}$$

Démonstration. Soit u solution du problème (2.1), en utilisant l'hypothèse (**H2**), u peut être décomposée comme suit :

$$u(t) = P_C u(t) + (I - P_C)u(t) = P_C u(t) + Q_C u(t),\ t \in \mathbb{R},$$

où, par (**H4**) et (**H5**,) $P_C u(t) \in R(P_C) = N(Q_C)$ et $Q_C u(t) \in R(Q_C) = N(P_C)$.

Maintenant soit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(P_C u(t)) &= P_C A u(t) + P_C B u(t) + P_C F(t, u(h(t))) \\ &= A P_C u(t) + P_C B u(t) + P_C F(t, u(h(t))), \end{aligned}$$

par (**H2**) et (**H5**), on aura $P_C B u(t) = 0$, alors

$$\frac{d}{dt}(P_C u(t)) = A P_C u(t) + P_C F(t, u(h(t))),\ \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

De l'équation (2.2), il est clair que $P_C u(t)$ est solution de

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + P_C F(t, u(h(t))),\ t \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$\begin{aligned} P_C u(t) &= \int_{-\infty}^{t} T(t-s) P_C F(s, u(h(s))) ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} T(t-s) P_C \varphi(s, u(h(s))) ds + \int_{-\infty}^{t} T(t-s) P_C \psi(s, u(h(s))) ds. \end{aligned}$$

D'une manière similaire, et par l'hypothèse (**H2**), on aura

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Q_C u(t)) &= A Q_C u(t) + B Q_C u(t) + Q_C F(t, u(h(t))) \\ &= A Q_C u(t) + Q_C B u(t) + Q_C F(t, u(h(t))), \end{aligned}$$

en utilisant les hypothèses (**H2**) et (**H4**), on aura $Q_C A u(t) = 0$, alors :

$$\frac{d}{dt}(Q_C u(t)) = B Q_C u(t) + Q_C F(t, u(h(t))),\ \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

De l'équation(2.3), $Q_C u(t)$ est solution de :

$$\frac{d}{dt}y(t) = By(t) + Q_C F(t, u(h(t))),\ t \in \mathbb{R}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} Q_C u(t) &= \int_{-\infty}^{t} R(t-s) Q_C F(s, u(h(s))) ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} R(t-s) Q_C \varphi(s, u(h(s))) ds + \int_{-\infty}^{t} R(t-s) P_C \psi(s, u(h(s))) ds. \end{aligned}$$

De ce qui précède, il suit que :

$$\begin{aligned} u(t) &= P_C u(t) + Q_C u(t) \\ &= \int_{-\infty}^{t} T(t-s)P_C\varphi(s,u(h(s)))ds + \int_{-\infty}^{t} R(t-s)Q_C\varphi(s,u(h(s)))ds \\ &+ \int_{-\infty}^{t} T(t-s)P_C\psi(s,u(h(s)))ds + \int_{-\infty}^{t} R(t-s)Q_C\psi(s,u(h(s)))ds, \end{aligned}$$

est solution du problème (2.1). □

Lemme 2.1.3. *Soit $\mu \in \mathcal{M}$ satisfait l'hypothèse **(Hy2)**, supposons de plus que les hypothèses **(H1)-(H6)** sont vérifiées. Si $u \in PPP(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu)$, alors $\Gamma u \in PPP(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu)$, où :*

$$\begin{aligned} \Gamma u(t) &= \int_{-\infty}^{t} T(t-s)P_C\varphi(s,u(h(s)))ds + \int_{-\infty}^{t} R(t-s)Q_C\varphi(s,u(h(s)))ds \\ &+ \int_{-\infty}^{t} T(t-s)P_C\psi(s,u(h(s)))ds + \int_{-\infty}^{t} R(t-s)Q_C\psi(s,u(h(s)))ds. \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons en premier lieux que l'opérateur Γ est bien défini, pour cela soit $u \in PPP(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu)$ et $\Gamma : PPP(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu) \to C(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, et

$$\Gamma u(t) = \Gamma_1 u(t) + \Gamma_2 u(t),\ t \in \mathbb{R},$$

où

$$\Gamma_1 u(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)P_C\varphi(s,u(h(s)))ds + \int_{-\infty}^{t} R(t-s)Q_C\varphi(s,u(h(s)))ds,$$

et

$$\Gamma_2 u(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)P_C\psi(s,u(h(s)))ds + \int_{-\infty}^{t} R(t-s)Q_C\psi(s,u(h(s)))ds.$$

On souhaite démontrer, en premier lieu que $\Gamma_1 u(\cdot) \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{H})$. En utilisant le théorème 1.5.5 et le lemme 2.1.1, on déduit que

$$s \mapsto G(s) = F(s, u(h(s))) \in PPP(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu) \text{ tel que } G(s) = \phi(s) + \Psi(s),$$

ce qui implique que

$$\phi(\cdot) = \varphi(\cdot, u(h(\cdot))) \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{H}), \text{ et } \Psi(\cdot) = \psi(\cdot, u(h(\cdot))) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu).$$

Soit

$$\Gamma_1 u(t) = I_1(t) + I_2(t),$$

où

$$I_1(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)P_C\phi(s)ds, \text{ et } I_2(t) = \int_{-\infty}^{t} R(t-s)Q_C\phi(s)ds.$$

Montrons que $I_1(\cdot) \in PP(\mathbb{R},\mathbb{H})$. Soit $\epsilon > 0$, puisque $\phi(\cdot) \in PP(\mathbb{R},\mathbb{H})$, alors il existe un nombre positif $l(\epsilon)$ tel que tout intervalle de longueur $l(\epsilon)$ contient un nombre τ tel que

$$\|\phi(t+\tau) - \phi(t)\| < \epsilon, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\|I_1(t+\tau) - I_1(t)\| &= \|\int_{-\infty}^{t+\tau} T(t+\tau-s)P_C\phi(s)ds - \int_{-\infty}^{t} T(t-s)P_C\phi(s)ds\| \\
&= \|\int_{-\infty}^{t} T(t-u)P_C\phi(u+\tau)du - \int_{-\infty}^{t} T(t-s)P_C\phi(s)ds\| \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \|T(t-u)P_C\|\|\phi(u+\tau) - \phi(u)\|du \\
&\leq M_1\epsilon \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta_1(t-u)}du \\
&= M_1\epsilon \int_{0}^{+\infty} e^{-\delta_1 s}ds \\
&= M_1\epsilon\delta_1^{-1}.
\end{aligned}$$

D'une manière similaire, on montre que :

$$\|I_2(t+\tau) - I_2(t)\| \leq M_2\epsilon\delta_2^{-1},$$

en conséquence, on a :

$$\|\Gamma_1 u(t+\tau) - \Gamma_1 u(t)\| \leq \epsilon(M_1\delta_1^{-1} + M_2\delta_2^{-1}),$$

ce qui montre que $\Gamma_1(\cdot) \in PP(\mathbb{R},\mathbb{H})$.
Maintenant, montrons en deuxième lieu que, $\Gamma_2 u(\cdot) \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$. Soit alors

$$\Gamma_2 u(t) = I_3(t) + I_4(t),$$

où

$$I_3 = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)P_C\Psi(s)ds \quad \text{et } I_4(t) = \int_{-\infty}^{t} R(t-s)Q_C\Psi(s)ds.$$

Comme dans le cas précédent, il suffit de montrer que $I_3(\cdot) \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$, puisque la preuve de $I_4(\cdot) \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$ suit le même raisonnement que $I_3(\cdot)$. Il est évident de voir que $s \mapsto I_3(s)$ est une fonction continue bornée. On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\mu([-r,r])}\int_{[-r,r]}\|I_3(t)\|d\mu(t) &\leq \lim_{r\to\infty}\frac{1}{\mu([-r,r])}\int_{[-r,r]}\int_{-\infty}^{t}\|T(t-s)P_C\Psi(s)\|dsd\mu(s)\\
&\leq \lim_{r\to\infty}\frac{1}{\mu([-r,r])}\int_{[-r,r]}\int_{-\infty}^{t}M_1e^{-\delta_1(t-s)}\|\Psi(s)\|dsd\mu(t)\\
&= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{\mu([-r,r])}\int_{[-r,r]}\int_{0}^{+\infty}M_1e^{-\delta_1 s}\|\Psi(t-s)\|dsd\mu(t)\\
&= \lim_{r\to\infty}M_1\int_{0}^{+\infty}e^{-\delta_1 s}(\frac{1}{\mu([-r,r])}\int_{[-r,r]}\|\Psi(t-s)\|d\mu(t))ds.
\end{aligned}$$

Puisque μ satisfait (**Hy2**), de plus comme l'espace $PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$ est invariant par translation, on aura $t\mapsto\psi(t-s)\in\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$ pour tout $s\in\mathbb{R}$. Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue [5], on a :

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{\mu([-r,r])}\int_{[-r,r]}\|I_3(s)\|d\mu(s)=0.$$

De cette façon, nous pouvons conclure que $I_4(\cdot)\in\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$.
En vue de ce qui précède, finalement :

$$\Gamma u=\Gamma_1 u+\Gamma_2 u\in PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu).$$

□

Théorème 2.1.1. *Soit $\mu\in\mathcal{M}$ satisfait (**Hy2**). Supposons que les hypothèses (**H1**)-(**H6**) sont vérifiées, alors le problème (2.1) admet une unique solution μ-pseudo presque périodique sur $\mathbb{R}$ pourvu que :*

$$(L_\varphi+L_\psi)\left(\frac{M_1}{\delta_1}+\frac{M_2}{\delta_2}\right)<1.$$

Démonstration. Soit Γ, Γ_1 et Γ_2 les opérateurs définis comme dans le lemme 2.1.3, en utilisant le même lemme et le lemme 2.1.2, on déduit que, toute solution du problème (2.1) admet l'écriture suivante :

$$\Gamma u=\Gamma_1 u+\Gamma_2 u.$$

Toujours du lemme 2.1.3, on a $\Gamma(PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu))\subset PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$.
On souhaite monter que Γ est un opérateur contractant [1] sur $PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$. Soit $u,v\in PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$ et $t\in\mathbb{R}$, on a :

1. Une application d'un espace métrique dans lui même lipschitzien de rapport L strictement inférieur à 1 est dite **contractante** de rapport L.

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(t)-\Gamma v(t)\| &= \|\Gamma_1 u(t)-\Gamma_1 v(t)+\Gamma_2 u(t)-\Gamma_2 v(t)\| \\
&\leq \|\Gamma_1 u(t)-\Gamma_1 v(t)\|+\|\Gamma_2 u(t)-\Gamma_2 v(t)\| \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \|T(t-s)P_C\|\|\varphi(s,u(h(t)))-\varphi(s,v(h(t)))\|ds \\
&+\int_{-\infty}^{t} \|R(t-s)Q_C\|\|\varphi(s,u(h(t)))-\varphi(s,v(h(t)))\|ds \\
&+\int_{-\infty}^{t} \|T(t-s)P_C\|\|\psi(s,u(h(t)))-\psi(s,v(h(t)))\|ds \\
&+\int_{-\infty}^{t} \|R(t-s)Q_C\|\|\psi(s,u(h(t)))-\psi(s,v(h(t)))\|ds \\
&\leq M_1 L_\varphi \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta_1(t-s)}\|u-v\|_\infty ds + M_2 L_\varphi \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta_2(t-s)}\|u-v\|_\infty ds \\
&+M_1 L_\psi \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta_1(t-s)}\|u-v\|_\infty ds + M_2 L_\psi \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta_2}(t-s)\|u-v\|_\infty ds \\
&\leq \left(\frac{M_1 L_\varphi}{\delta_1}+\frac{M_2 L_\varphi}{\delta_2}+\frac{M_1 L_\psi}{\delta_1}+\frac{M_2 L_\psi}{\delta_2}\right)\|u-v\|_\infty \\
&= (L_\varphi+L_\psi)\left(\frac{M_1}{\delta_1}+\frac{M_2}{\delta_2}\right)\|u-v\|_\infty.
\end{aligned}$$

On aura alors

$$\|\Gamma u-\Gamma v\| \leq (L_\varphi+L_\psi)\left(\frac{M_1}{\delta_1}+\frac{M_2}{\delta_2}\right)\|u-v\|_\infty.$$

Puisque $(L_\varphi+L_\psi)\left(\frac{M_1}{\delta_1}+\frac{M_2}{\delta_2}\right) < 1$, alors Γ est une application contractante sur $PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$, alors en utilisant le théorème du point fixe de Banach Γ admet un unique point fixe dans $PPP_c(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$, c'est à dire, il existe un seul $u \in PPP(\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$ tel que $\Gamma u = u$. Donc, l'équation (2.1) a unique solution mild μ-pseudo presque périodique. □

2.2 Solutions μ-Pseudo Presque Automorphes

Dans cette partie, les techniques de démonstration des résultats qui suivent se font d'une manière semblable au cas de la section précédente. Dans cette section, les hypothèses (**H1**) et (**H6**) seront remplacées respectivement par les hypothèses similaires suivantes (**H1'**) et (**H6'**) :

- **(H1')** $F = \varphi + \psi \in PPAU(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H}, \mu)$, où $\varphi \in PAU(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H})$ et $\psi \in \mathcal{E}U(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H}, \mu)$. Les fonctions φ, ψ sont Lipschitziennes par rapport à la seconde variable uniformément en $t \in \mathbb{R}$, alors il existe deux nombres positifs L_φ et L_ψ tels que, pour $(t, x), (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{H}$, on a
$$\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| \leq L_\varphi \|x - y\|,$$
$$\|\psi(t, x) - \psi(t, y)\| \leq L_\psi \|x - y\|.$$
- **(H6')** La fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue strictement croissante, et il existe une fonction $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ continue telle que
$$d\mu_h(s) \leq \lambda(s) d\mu(s), \; d\mu_h(A) = \mu(h^{-1}(A)),$$
$$\sup_{s \in h([-r,r])} \lambda(s) = M_r, \; \limsup_{r \to \infty} \frac{\mu([-\alpha(r), \alpha(r)])}{\mu([-r, r])} M_r < \infty,$$
où
$$\alpha(r) = \sup_{t \in [-r,r]} |h(t)|, \text{ et pour } u(\cdot) \in PA(\mathbb{R}, \mathbb{H}), \; u(h(\cdot)) \in PA(\mathbb{R}, \mathbb{H}).$$

Lemme 2.2.1. *Supposons que l'hypothèse (**H6'**) est vérifiée. Si $u \in PPA(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu)$, alors $u(h(\cdot)) \in PPA(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu)$, où h est la fonction donnée en (**H6'**).*

Démonstration. La démonstration de ce lemme suit le même raisonnement que celui du lemme 2.1.1 sauf qu'ici , on prend l'hypothèse (**H6'**) au lieu de (**H1'**). □

Lemme 2.2.2. *Supposons que les hypothèses (**H1'**) et (**H2)-(H5**) sont vérifiées, alors toute solution du problème (2.1) peut être exprimée comme suit :*
$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^{t} T(t-s) P_C \varphi(s, u(h(s))) ds + \int_{-\infty}^{t} R(t-s) Q_C \varphi(s, u(h(s))) ds \\ &+ \int_{-\infty}^{t} T(t-s) P_C \psi(s, u(h(s))) ds + \int_{-\infty}^{t} R(t-s) Q_C \psi(s, u(h(s))) ds. \end{aligned}.$$

Démonstration. La preuve de ce résultat suit le même raisonnement du lemme 2.1.2, en s'appuyant sur les même hypothèses **(H2)-(H5)**. □

Lemme 2.2.3. *Soit $\mu \in \mathcal{M}$ satisfait (**Hy2**). Supposons que les hypothèses (**H1'**), (**H2)-(H5**) et (**H6'**) sont vérifiées. Si $u \in PPA(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu)$ est solution du problème (2.1), alors*
$$\begin{aligned} \Gamma u(t) &= \int_{-\infty}^{t} T(t-s) P_C \varphi(s, u(h(s))) ds + \int_{-\infty}^{t} R(t-s) Q_C \varphi(s, u(h(s))) ds \\ &+ \int_{-\infty}^{t} T(t-s) P_C \psi(s, u(h(s))) ds + \int_{-\infty}^{t} R(t-s) Q_C \psi(s, u(h(s))) ds. \end{aligned},$$
est μ-pseudo presque automorphe.

Théorème 2.2.1. *Soit $\mu \in \mathcal{M}$ satisfaisant (**Hy2**). Supposons que les hypothèses (**H1'**), (**H2**)-(**H5**) et (**H6'**) sont vérifiées, alors le problème (2.1) a une unique solution μ-pseudo presque automorphe sur $\mathbb{R}$ à condition que :*

$$(L_\varphi + L_\psi)\left(\frac{M_1}{\delta_1} + \frac{M_2}{\delta_2}\right) < 1.$$

Démonstration. Même raisonnement avec la preuve du théorème 2.1.1, on peut voir, en utilisant l'hypothèse (**H6'**) et les deux lemmes 2.2.2 et 2.2.3, que l'équation (2.1) a une unique solution mild μ-pseudo presque automorphe. □

2.3 Application

Pour illustrer le résultat du théorème 2.1.1, nous disposons de l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) &= A_0 x(t) + f(t, (x(at+b), y(at+b))),\ t \in \mathbb{R} \\ \dfrac{d}{dt}y(t) &= B_0 y(t) + g(t, (x(at+b), y(at+b))),\ t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Où :

(a) A_0 est le générateur infinitésimal d'un C_0-groupe $(T_0(t))_{t\in\mathbb{R}}$ sur l'espace de Hilbert $\mathbb{H}_1$, tel que $\|T_0(t)\| \le M_1 e^{-\delta_1 t}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $M_1, \delta_1 \ge 0$,

(b) B_0 est le générateur infinitésimal d'un C_0-groupe $(R_0(t))_{t\in\mathbb{R}}$ sur l'espace de Hilbert $\mathbb{H}_2$, tel que $\|R_0(t)\| \le M_2 e^{-\delta_2 t}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $M_2, \delta_2 \ge 0$,

(c) $0 < a \le 1$, $b \in \mathbb{R}$,

(d) Les fonctions f et g données par, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}_1$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}_2$, sont continues, où $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_2$,

Soit $u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, alors le système (2.4) peut être réécrit comme suit :

$$u'(t) = Au(t) + Bu(t) + F(t, u(h(t))),\ t \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

sur l'espace de Hilbert $\mathbb{H}$, où :

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_0 \end{pmatrix}, \qquad h(t) = at + b$$

et

$$F(t, u(h(t))) = \begin{pmatrix} f(t, (x(h(t)), y(h(t)))) \\ g(t, (x(h(t)), y(h(t)))) \end{pmatrix},$$

où $D(A) = D(A_0) \times \mathbb{H}_2$ et $D(B) = \mathbb{H}_2 \times D(B_0)$.

Si on prend $C = \mathbb{H}_1 \times \{0\}$, il est clair que c'est un sous espace fermé de $\mathbb{H}$. On a $R(A) \subset C$ et $R(B) \subset \{0\} \times \mathbb{H}_2 = C^{\perp}$. D'autre part, on a aussi A et B des générateurs infinitésimaux des C_0-groupes d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ et $(R(t))_{t\in\mathbb{R}}$ respectivement, tels que

$$\|T(t-s)P_C\| \leq M_1 e^{-\delta_1(t-s)} \text{ pour tout } t \geq s,$$

et

$$\|R(t-s)Q_C\| \leq M_2 e^{-\delta_2(t-s)} \text{ pour tout } t \geq s.$$

Puisque l'équation (2.5) est équivalente au système (2.4), on a juste à étudier l'existence et l'unicité de solution μ-pseudo presque périodique et μ-pseudo presque automorphe de (2.4). Pour mettre au point ce problème, on a besoin de :

$$F(t, u(h(t))) = \begin{pmatrix} f_1(t,(x(h(t)), y(h(t)))) + f_2(t,(x(h(t)), y(h(t)))) \\ g_1(t,(x(h(t)), y(h(t)))) + g_2(t,(x(h(t)), y(h(t)))) \end{pmatrix},$$

où

· Les fonctions $f_1, f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}_1$ sont continues, et il existe deux nombres positifs L_{f_1}, L_{f_2} tels que, pour tout $(t,y),(t,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{H}$, on a :

$$\|f_1(t,y) - f_1(t-z)\| \leq L_{f_1}\|y-z\|,$$

et

$$\|f_2(t,y) - f_2(t-z)\| \leq L_{f_2}\|y-z\|.$$

· Les fonctions $g_1, g_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}_2$ sont continues, et il existe deux nombres positifs L_{g_1}, L_{g_2} tels que, pour tout $(t,y),(t,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{H}$, on a :

$$\|g_1(t,y) - g_1(t-z)\| \leq L_{g_1}\|y-z\|,$$

et

$$\|g_2(t,y) - g_2(t-z)\| \leq L_{g_2}\|y-z\|.$$

En suite, considérons la mesure μ, où sa dérivée de Radon-Nikodym est donnée par :

$$\rho(t) = \begin{cases} e^t \ si\ t \leq 0 \\ 1 \ si\ t > 0 \end{cases}$$

De [2] ρ est Lebesgue localement intégrable sur $\mathbb{R}$, et vérifie $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(t)dt = +\infty$ donc $\mu \in \mathcal{M}$ satisfait (**Hy1**) et (**Hy2**). De plus la fonction $h : t \mapsto at + b$ pour $0 < a \leq 1$ et $b \in \mathbb{R}$ satisfait l'hypothèse (**H6**). On en déduit du théorème 1.5.5 le résultat suivant :

Corollaire 2.3.1. *Supposons que* $f_1 \in PPU(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H}_1)$, $g_1 \in PPU(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H}_2)$, $f_2 \in \mathcal{E}U(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, H_1, \mu)$ *et* $g_2 \in \mathcal{E}U(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{H}_2, \mu)$, *si :*

$$\left(\sqrt{L_{f_1}^2 + L_{f_2}^2} + \sqrt{L_{g_1}^2 + L_{g_2}^2}\right)\left(\frac{M_1}{\delta_1} + \frac{M_2}{\delta_2}\right) < 1,$$

alors le problème (2.4) a une unique solution μ*-pseudo presque périodique sur* $\mathbb{R}$.

Appendice

.1 Espace de Hilbert et opérateurs

1. **Un espace de Hilbert**, noté $\mathbb{H}$, est un espace vectoriel complet de dimension finie ou infinie, sur lequel est donné un produit scalaire $<,>$, muni d'une norme issue de ce produit scalaire, telle que $\forall x \in \mathbb{H}$: $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ une fonction, on note $R_s f$ la fonction **translatée** de f par $s \in \mathbb{R}$, définie par $R_s f(t) = f(t+s)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. A est dit **opérateur linéaire, fermé, borné** de $\mathbb{H}$ dans lui même, si :
   - $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall x, y \in \mathbb{H}$, on a : $A(\lambda x + y) = \lambda Ax + Ay$,
   - Son graphe $G(A)$ est fermé dans $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$, où
   $$G(A) = \{(x, y) \in \mathbb{H}, \mathbb{H}/A(x) = y\},$$
   - Pour tout $x \in \mathbb{H}$, il existe une constante c positive telle que :
   $$\|A(x)\| \leq c\|x\|.$$
4. Soit A un opérateur linéaire sur $\mathbb{H}$ alors :
   - $D(A) \subset \mathbb{H}$ définit **le domaine de définition** de A.
   - $R(A) = \{A(x),\ x \in D(A)\}$ est ***le rang*** de A.
   - $N(A) = \{x \in D(A) : A(x) = 0\}$ est ***le noyau*** de A.
5. C est dit **sous espace propre** de $\mathbb{H}$, si $C \subset \mathbb{H}$ avec inclusion stricte.
6. Soit C un sous espace fermé de $\mathbb{H}$, on note par $\mathbb{H} \ominus C$ **le complémentaire orthogonal** de C dans $\mathbb{H}$
7. P_c est l'application **projection orthogonale** sur le sous espace fermé $C \subset \mathbb{H}$
8. Soient A et B deux opérateurs linéaires, non bornés, fermés, denses dans $\mathbb{H}$, leur somme algébrique est l'opérateur linéaire défini sur $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$, tel que :
$$(A+B)u = Au + Bu,\ \forall u \in D(A) \cap D(B).$$

Définition .1.1. *Soit une famille de paramètres $T(t)$, $-\infty < t < +\infty$, d'opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Banach $\mathbb{E}$. La famille $\{T(t)\}_{-\infty<t<+\infty}$ est dite C_0-**groupe** d'opérateurs bornés, si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- $T(0) = I$,
- $T(t+s) = T(t)T(s)$, *pour* $-\infty < t, s < +\infty$,

- $\lim\limits_{t\to 0} T(t)x = x$, *pour* $x \in \mathbb{E}$.

Définition .1.2. *Soit A l'opérateur linéaire défini sur l'espace de Banach $\mathbb{E}$ par*

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t},$$

A est dit ***générateur infinitésimal*** *du C_0-groupe $T(t)$, sont domaine de définition est donné par :*

$$D(A) = \{x \in \mathbb{E},\ tel\ que,\ \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t}\ existe\}.$$

Remarque .1.1. *Supposons qu'on a A et B deux générateurs infinitésimaux des C_0-groupes $T(t)$ et $R(t)$ respectivement, alors leur somme algébrique $A + B$ ne donnera pas forcément un générateur infinitésimal d'un C_0-groupe.*

Définition .1.3. *L'ensemble $C \subset \mathbb{H}$ est dit sous espace invariant pour l'opérateur A si on a l'inclusion suivante : $A(D(A) \cap C) \subset C$.*

Exemple 4. *Soit A un opérateur linéaire sur $\mathbb{H}$, alors $C = N(A)$ est un sous espace invariant pour A, car $A(N(A) \cap D(A)) = A(N(A)) = \{0\} \subset N(A)$.*

Lemme .1.1. *L'égalité $P_cAP_c = AP_c$ est une condition nécessaire et suffisante pour que le sous espace C soit invariant pour l'opérateur linéaire A.*

Démonstration. Supposons qu'on a : $P_cAP_c = AP_c$ et si $x \in D(A) \cap C$, alors $x = P_cx \in D(A)$, et $Ax = P_cAP_cx \in C$.
Inversement, si C est invariant pour A, soit $x \in \mathbb{H}$ tel que $P_cx \in D(A)$, alors $AP_cx \in C$ et aussi $P_cAP_cx = AP_cx$. Donc $AP_c \subset P_cAP_c$, puisque $D(AP_c) = D(P_cAP_c)$, alors $AP_c = P_cAP_c$. $\square$

Définition .1.4. *On dit qu'un sous espace propre fermé C d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ réduit l'opérateur A si $P_cD(A) \subset D(A)$ et de plus C et $\mathbb{H} \ominus C$ sont invariants pour A.*

Lemme .1.2. *[9] Le sous espace fermé C de $\mathbb{H}$ réduit l'opérateur A si et seulement si $P_cA \subset AP_c$, c'est à dire, l'inclusion $P_cA \subset AP_c$ implique que :*

$$si\ x \in D(A),\ alors\ P_cx \in D(A)\ et\ P_cAx = AP_cx$$

.2 Propriété de Radon-Nikodym

Définition .2.1. *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que la mesure μ est σ-finie, lorsqu'il existe un recouvrement dénombrable de X par des sous ensembles de mesure finie, c'est à dire, il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ telle que :*

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n,$$

où $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition .2.2. *Soient μ et ν deux mesures sur $(X, \mathcal{B})$. On dit que ν est absolument continue par rapport à μ, et on note $\nu << \mu$, si pour tout $A \in \mathcal{B}$ on a :*

$$\mu(A) = 0 \;\Rightarrow\; \nu(A) = 0.$$

Théorème .2.1. ***(Radon-Nikodym)***
Un espace de Banach $\mathbb{H}$ admet la propriété de Radon Nikodym, si pour tout espace $(X, \mathcal{B}, \mu)$ et toute mesure $\nu : \mathcal{B} \to \mathbb{H}$ à variation bornée telle que $\nu << \mu$, on peut trouver $\rho \in L^1(X, \mathcal{B})$ telle que :

$$\nu(A) = \int_A \rho \, d\mu, \text{ pour tout } A \in \mathcal{B}.$$

ρ est appelée ***la dérivée de Radon Nikodym*** *de ν par rapport à μ, notée $\dfrac{d\nu}{d\mu}$.*

.3 Théorème du point fixe de Banach

On distingue plusieurs théorèmes du point fixe, qui se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

Définition .3.1. *Une application T d'un espace métrique (E, d) dans lui même lipschitzienne de rapport k strictement inférieur à 1, telle que :*

$$d(Tx, Ty) \leq k\; d(x, y), \text{ pour tout } x, y \in E,$$

est dite ***contractante*** *dans le rapport k.*

Théorème .3.1. *Soit (E, d) un espace métrique complet, et $T : E \to E$ une application contractante, alors T a un unique point fixe $x^* \in E$, c'est à dire $T(x^*) = x^*$, et pour lequel la suite récurrente $x_{n+1} = Tx_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers ce même point x^*.*

Démonstration. La démonstration contient trois longues parties ; pour plus de détails, le lecteur se réfère à voir Goebel [11, théorème 2.1 page 7-12] □

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés au problème d'existence et d'unicité de solutions μ-pseudo-presque périodiques et μ-pseudo-presque automorphes des équations différentielles semi-linéaires dans des espaces de Hilbert :

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + Bu(t) + F(t, u(h(t))), \ \forall t \in \mathbb{R},$$

Nous avons plus précisément présenté et développé l'article [14], dans lequel les auteurs ont pu montrer l'existence et l'unicité d'une solution mild μ-pseudo presque périodique et μ-pseudo presque automorphe sous certaines conditions de régularités imposées au coffécients A, B et F.

Bibliographie

[1] L. Amerio G. Prouse. Almost-Periodic Functions and Functional Equations. Springer-Verlag New York 184[191] (1971).

[2] J. Blot, P. Cieutat, K. Ezzinbi. New approach for weighted pseudo-almost periodic functions under the light of measure theory, basic results and applications. Applicable Analysis, pp. 1-34 (2011).

[3] J. Blot, P. Cieutat, K. Ezzinbi. Measure theory and seudo almost automorphic functions : new developments and applications. Nonlinear Anal. 75, 2426-2447 (2012).

[4] J. Blot, P.Cieuta, G. M. N'Guérékata and D. Pennequin ; Superposition operators between various almost periodic functions spaces and applications ; Commun. Math. Anal. 6(1) 2008, pp 42-70.

[5] A. BOUZIAD et J. CALBRIX, THÉORIE de la MESURE et de l'INTÉGRATION, Publications de l'Université de Rouen 1993.

[6] C. Corduneanu. Almost periodique functions. Interscience publishers [John Wiley & Sons]. New York-London-Sydney, 1968.

[7] P. Cieuta, S. Fatajou and G. M. N'Gué rékata, Composition of pseudo almost periodic and pseudo-almost auomorphic functions and application to evolution equations, Appl. Anal. 89(1)(2010), pp (11-27).

[8] T. Diagana. Almost Automorphic Type and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces. Springer International Publishing. Washington, DC. November 2012.

[9] T. Diagana, Pseudo almost periodic solutions to some differential equations. Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 60(7), 1277-1286 (2005).

[10] D.Giraudo. Fonctions presque périodiques. Technical report, Université de Rouen, 2011.

[11] K. Goebel . Topics in mertic fixed point theory. Cambridge University Press 1990.

[12] G. M. N'Guerekata, ALMOST AUTOMORPHIC AND ALMOST PERIODIC FUNCTIONS IN ABSTRACT SPACE, Springer Science+Business Media, LLC New York. 2001.

[13] J. Liang, J. Zhang, T. J. Xio, Composition of pseudo almost automorphic and asymptotically almost automorphic functions, J. Math. Anal. Appel. 340(2)(2008) 1493-1499.

[14] M. B. Salah, K. Ezzinbi and A. Rebey. Pseudo-almost Periodic and Pseudo-almost Automorphic Solutions to Evolution Equations in Hilbert Spaces. Springer Basel 2015.

[15] W.A. Veech, Almost automorphic functions on groups, Amer. J. Math. 87 (July 1965), pp. 719-751.

[16] C. Y. Zhang, Integration of vector-valued pseudo almost periodic functions. Proc. Am. Math. Soc.121, 167-174(1994).