

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**Ministère de l'enseignement Supérieur et de la  
Recherche Scientifique**



**Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou  
Faculté du Génie de la Construction Département de  
Génie Mécanique**



*Mémoire de fin d'études*

*En vue de l'obtention du Diplôme de Master Académique en Génie  
Mécanique*

*Option : Énergétique*

*Thème*

***Modélisation de la turbulence : cas  
de l'écoulement sur plaque plane***

*Proposé et dirigé par :*

**M<sup>r</sup> : K. BOUSSAFEUR**

*Réalisé par :*

**DJAFOUR KOCEILA**

**AIT MOUSSA ABDENOUR**

*Promotion : 2018/2019*

## *Remerciements*

Nous remercions dieu ALLAH le tous puissant et le miséricordieux de nous avoir donné la force et la patience de mener à bien ce travail.

Nous tenons également, à exprimer nos forts remerciements à notre encadreur, Monsieur Boussafeur, pour avoir dirigé ce travail et également pour son accueil, ses conseils et sa patience, nous sommes heureux d'avoir travaillé avec lui.

Nous remercions l'ensemble des membres du jury qui ont accepté d'être examinateurs de ce manuscrit. Nos sincères remerciements à tous nos enseignants qui nous ont accompagnés le long de notre cursus universitaire au sein du département de génie mécanique.

Nos sincères remerciements à tous le personnel de la faculté du génie de la construction, pour leur veille quotidienne à assurer de bonnes conditions de travail aux étudiants, un remerciement particulier au personnel de la bibliothèque qui ont mis tous les moyens nécessaires à notre disposition.

Nous remercions aussi nos camarades et nos amis, avec qui nous avons partagé de formidables années d'amitié, d'entraide et de solidarité.

Nous ne saurons terminer sans remercier nos chers parents, frères et sœurs pour leur soutien durant nos années d'études.

Merci aux personnes qui viendront nous encourager et partager notre joie le jour de la soutenance.

## *Dédicaces*

‘’ Je tiens à dédier ce travail à toute la communauté scientifique. À mes parents qui ont beaucoup sacrifiés pour m’assurer de bonnes conditions de vie et me donner une bonne éducation, que dieu les protège. À mon frère Aghiles et à ma sœur Lynda. À toute personne qui croit en mes compétences. À tous les gens qui m’aident et m’encouragent dans la vie même avec un simple sourire. À tous mes amis ‘’

**« Koceila Djafour »**

‘’ Je tiens à dédier ce travail à mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leurs amour, leurs soutient permanant et leurs prière tout au long de mes études, que dieu vous préserve et que ce travail soit l’accomplissement de vos vœux et le fruit de votre sacrifice. À mes chers frères, à ma chère sœur. À tous les gens qui m’aident. À tous mes amis ‘’

**« Ait Moussa Abdenour »**

**" Ne crains pas d'avancer lentement, crains seulement de t'arrêter "**

## Liste des figures

<i>Figure. I.1. Force d'interaction au niveau de la surface élémentaire d'un fluide.....</i>	<i>2</i>
<i>Figure. I.2. Appareil de Reynolds .....</i>	<i>6</i>
<i>Figure.I.3. Repérage de la position d'une étoile à partir de la terre.....</i>	<i>7</i>
<i>Figure. I.4. Description lagrangienne du mouvement .....</i>	<i>9</i>
<i>Figure. II.1. Volume de contrôle en mouvement sur lequel s'appliquent des efforts volumiques et surfaciques .....</i>	<i>11</i>
<i>Figure. II.2. Contraintes agissant sur un volume de contrôle cubique.....</i>	<i>12</i>
<i>Figure.III.1. Développement de la couche limite le long d'une plaque plane.....</i>	<i>17</i>
<i>Figure.III.2.Epaisseur de couche limite .....</i>	<i>18</i>
<i>Figure.III.3. développement d'une couche limite le long d'une paroi solide .....</i>	<i>20</i>
<i>Figure.III.4. couche limite sur une plaque plane .....</i>	<i>22</i>
<i>Figure.III.5. Fluctuation de la vitesse en régime turbulent.....</i>	<i>26</i>
<i>Figure.III.6. Profil de vitesse à travers la couche limite turbulente d'une plaque plane .....</i>	<i>32</i>
<i>Figure. IV.1. cascade d'énergie en turbulence .....</i>	<i>34</i>
<i>Figure V.1. Créations des points.....</i>	<i>46</i>
<i>Figure V.2. Créations des faces .....</i>	<i>47</i>
<i>Figure V.3. Maillage des lignes .....</i>	<i>47</i>
<i>Figure V.4. Maillage des faces.....</i>	<i>48</i>
<i>Figure V.5. Imposition des conditions aux limites .....</i>	<i>49</i>
<i>Figure V.6. Enregistrement et exportation du fichier créé sous Gambit .....</i>	<i>49</i>
<i>Figure V.7. Importation de la géométrie.....</i>	<i>50</i>
<i>Figure V.8. Vérification du maillage sous Fluent.....</i>	<i>50</i>
<i>Figure V.9. Lissage du maillage .....</i>	<i>51</i>
<i>Figure V.10. Vérification des dimensions et des unités .....</i>	<i>51</i>
<i>Figure V.11. Choix du solveur et du type d'écoulement .....</i>	<i>52</i>
<i>Figure V.12. Choix du régime laminaire .....</i>	<i>52</i>
<i>Figure V.13. Choix du régime turbulent .....</i>	<i>53</i>
<i>Figure V.14. Choix du fluide d'écoulement .....</i>	<i>53</i>

## Liste des figures

<i>Figure V.15. Conditions aux limites du cas laminaire</i> .....	54
<i>Figure V.16. Conditions aux limites du cas turbulent</i> .....	54
<i>Figure V.17. Choix d'ordre des équations et de l'algorithme</i> .....	55
<i>Figure V.18. Choix des critères de convergence</i> .....	55
<i>Figure V.19. Initialisation des calculs</i> .....	56
<i>Figure V.20. Paramétrage de la visualisation graphique</i> .....	56
<i>Figure V.21. Lancement du calcul</i> .....	57
<i>Figure V.22. Convergence des résidus pour le cas laminaire</i> .....	57
<i>Figure V.23. Convergence des résidus pour le modèle k-<math>\epsilon</math></i> .....	58
<i>Figure V.24. Convergence des résidus pour le modèle k-<math>\omega</math></i> .....	58
<i>Figure V.25. Profil de vitesses laminaires longitudinales pour <math>x = 0.05</math> m</i> .....	59
<i>Figure V.26. Profil de vitesses laminaires longitudinales pour <math>x = 0.25</math> m</i> .....	59
<i>Figure V.27. Profil de vitesses laminaires longitudinales pour <math>x = 0.5</math> m</i> .....	60
<i>Figure V.28. Profil de vitesses turbulentes longitudinales pour <math>x = 0.05</math> m</i> .....	61
<i>Figure V.29. Profil de vitesses turbulentes longitudinales pour <math>x = 0.25</math> m</i> .....	61
<i>Figure V.30. Profil de vitesses turbulentes longitudinales pour <math>x = 0.5</math> m</i> .....	62

## Liste des tableaux

Tableau III.1- Solution numérique de l'équation de Blasius .....	24
Tableau IV.1- Résultats obtenus en fonction du modèle choisi.....	37
Tableau IV.2- Coefficients du modèle $k-\varepsilon$ .....	41
Tableau.IV.3- Coefficients du modèle RANG $k-\varepsilon$ .....	42

## ***Nomenclature***

### **Caractères latins :**

$(x, y, z)$  : Coordonnées cartésiennes.

$(u, v, w)$  : Composants de la vitesse en coordonnées cartésiennes.

$D$  : Flux d'énergie dissipée.

$C_f$  : Coefficient de frottement local.

$C_F$  : Coefficient de frottement global.

$C, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, C_{\varepsilon 2}^*, C_{\mu}, C_{\mu l}, C_3, C_4$  : Constantes.

$d$  : Densité du fluide.

$d\vec{F}$  : Force d'interaction au niveau de la surface élémentaire d'un fluide

$d\vec{F}_N$  : Composante normale de la force d'interaction.

$d\vec{F}_T$  : Composante tangentielle de la force d'interaction.

$dS$  : Élément de surface.

$dv$  : Volume élémentaire du fluide.

$\vec{F}_{ext}$  : Forces extérieures.

$\vec{f}$  : Efforts volumique par unité de masse.

$f$  : Fonction algébrique.

$J_{ij}^T$  : Gradient des corrélations doubles.

$H$  : Facteur de forme.

$K$  : La constante de Von Karman.

$k$  : Energie cinétique turbulente

$L$  : La longueur caractéristique de l'écoulement.

$\ell$  : Echelle de dissipation d'énergie.

$l_m$  : Longueur de mélange.

$l$  : Échelle de longueur.

$m$  : Masse.

$\vec{n}$  : Vecteur unitaire normal à un élément de surface.

$P$  : Pression.

$P_a$  : Pression atmosphérique.

$P_e$  : Pression effective.

## ***Nomenclature***

$R_e$  : Nombre de Reynolds.

$Re_{cr}$  : Nombre de Reynolds critique.

$R_{ij}$  : Tenseur de Reynolds.

$S$  : Surface extérieure du volume de contrôle.

$S_{ij}$  : Tenseur des déformations moyennes.

$t$  : Temps.

$U$  : Vitesse à l'extérieur de la couche limite (dans l'écoulement libre).

$u_\ell$  : Vitesse caractéristique des tourbillons de taille  $\ell$ .

$u^*$  : Vitesse de frottement à la paroi.

$\vec{V}$  : Vecteur de la vitesse cartésienne de l'écoulement.

### **Caractères grecs :**

$\alpha$  : Constante.

$\beta, \beta_0, \beta^*, \beta_0^*$  : Constantes.

$\vec{\gamma}$  : Vecteur accélération.

$\delta$  : Epaisseur de la couche limite.

$\delta_{ij}$  : Kronecker Delta.

$\delta m$  : Masse élémentaire.

$\delta_1$  : Epaisseur de déplacement.

$\delta_2$  : Epaisseur de quantité de mouvement.

$\delta_3$  : Epaisseur d'énergie.

$\varepsilon$  : Taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente.

$\eta$  : Variable de Blasius.

$\eta$  : Echelle dissipative de Kolmogorov.

$\eta_0$  : Constante.

$\mu$  : viscosité dynamique du fluide.

$\mu_t$  : viscosité dynamique turbulente.

$\nu$  : viscosité cinématique du fluide.

$\nu_t$  : viscosité cinématique turbulente.

$\rho$  : Masse volumique en  $[\text{kg}/\text{m}^3]$ .

$\sigma_{ii}$  : Contrainte normale.

## ***Nomenclature***

$\sigma_k, \sigma_\varepsilon, \sigma^*$  : Constantes.

$\bar{\sigma}$  : Tenseur de contraintes des efforts surfaciques.

$\tau_{ij}$  : Contrainte tangentielle.

$\tau_\ell$  : Temps caractéristique d'un tourbillon.

$\tau_p$  : Contrainte tangentielle à la paroi.

$\tau_{\text{tot}}$  : Frottement total.

$\nu$  : Volume du volume de contrôle.

$\Phi$  : Une équation algébrique.

$\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_\omega$  : Constantes.

$\chi_T$  : Coefficient de compressibilité isotherme.

$\psi$  : Fonction de courant.

$\omega$  : Fréquence caractéristique de la turbulence.

### ***Indices caractérisant :***

+

 : Quantités réduites (sans dimensions).

–

 : Valeurs moyennes. : Valeurs fluctuantes.

# Sommaire

---

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

## Chapitre I Généralité sur les fluides

1. Définition physique d'un fluide. ....	2
2. Classification des fluides.....	2
2.1. Fluide parfait.....	2
2.2. Fluide réel. ....	3
2.3. Fluide incompressible.....	3
2.4. Fluide compressible. ....	3
3. Grandeurs caractéristiques des fluides. ....	3
3.1. Masse volumique.....	3
3.2. Densité. ....	4
3.3. La viscosité. ....	4
3.3.2. La viscosité dynamique.....	4
3.3.1. La viscosité cinématique.....	4
3.4. La pression.....	4
3.4.1. Pression absolue et pression effective.....	5
3.4.2. Compressibilité. ....	5
4. Régime d'écoulement.....	5
4.1. Expérience de Reynolds. ....	5
5. Hypothèse d'un milieu continu. ....	6
6. Repère et référentiel. ....	7
7. Système matériel. ....	7
8. Domaine matériel. ....	8
9. Le temps. ....	8
10. Description du mouvement. ....	8
10.1. Description lagrangienne.....	8
10.2. Description eulérienne. ....	9

## Chapitre II Equations de Navier-Stokes

1. Introduction. ....	10
2. Rappel sur la dérivée particulière.....	10

## Sommaire

---

3. Rappel sur l'équation de la continuité.....	10
4. Efforts s'exerçant sur un volume de contrôle.....	11
4.1. Les efforts volumiques .....	11
4.2. Les efforts surfaciques .....	11
4.3. Tenseur des contraintes .....	12
5. Application du principe fondamental de la dynamique sur un volume de contrôle.....	12
6. Conclusion.....	16

### Chapitre III Couche limite dynamique

1. Introduction.....	17
2. Concept de la couche limite.....	17
3. Développement de la couche limite.....	17
4. Paramètres caractéristiques de la couche limite.....	18
4.1. Epaisseur de la couche limite.....	18
4.2. Epaisseur de déplacement.....	18
4.3. Epaisseur de quantité de mouvement.....	18
4.4. Epaisseur d'énergie.....	18
4.5. Facteur de forme.....	19
4.6. La contrainte tangentielle à la paroi.....	19
4.7. Coefficient de frottement local.....	19
4.8. Coefficient de frottement global sur une surface.....	19
4.9. Flux d'énergie dissipée.....	19
5. Couche limite laminaire.....	19
5.1. Equations pour la couche limite laminaire.....	19
5.2. Equations sous forme adimensionnées.....	20
6. Couche limite laminaire de la plaque plane parallèle à l'écoulement.....	22
7. Couche limite turbulente.....	24
7.1. Décomposition de Reynolds des équations de Navier stokes.....	24
7.2. Explication sur la moyenne de Reynolds.....	25
7.3. Opérateur de moyenne.....	25
7.3.1. Axiomes de Reynolds.....	25
7.4. Grandeurs moyennées de l'écoulement.....	26
7.5. Équations moyennées.....	27
7.5.1 Rappel des équations instantanées.....	27

## Sommaire

---

7.5.2. Application de l'opérateur moyenne à l'équation de la continuité .....	27
7.5.3. Application de l'opérateur de moyenne aux équations de Navier-stokes.....	28
7.6. Contraintes visqueuses. ....	29
7.7. Couche limite turbulente de la plaque plane parallèle à l'écoulement.....	30
8.Profil de vitesse dans la couche limite turbulente.....	30
8.1. La sous-couche linéaire.....	31
8.2. La zone tampon.....	31
8.3. La zone logarithmique.....	32

## Chapitre IV Modèles de turbulence

1. Introduction.....	33
2. La turbulence.....	33
2.1. Quelques caractéristiques générales de la turbulence.....	33
2.1.1. Caractère aléatoire.....	33
2.1.2. Caractère non linéaire.....	33
2.1.3. Caractère diffusif.....	33
2.2. Turbulence homogène.....	34
2.3. Turbulence isotrope.....	34
3. Cascade d'énergie de Richardson .....	34
4. Aperçu sur la théorie de Kolmogorov .....	35
4.1. Taux de dissipation d'énergie.....	35
4.2. Vitesse caractéristique des tourbillons.....	35
4.3. Echelle dissipative de Kolmogorov.....	36
5. Modélisation de la turbulence.....	36
5.1. Rôle d'un modèle de turbulence.....	36
5.2. Choix du modèle de turbulence.....	36
6. Classification des modèles de turbulence.....	37
6.1. Modèles de viscosité turbulente.....	37
6.1.2. Hypothèse de Boussinesq .....	37
6.1.3. Modèles du premier ordre.....	38
6.1.3.1. Modèle à zéro équation .....	38
6.1.3.2. Modèles à une équation.....	38
6.1.3.3. Modèles à deux équations( $k$ - $\Phi$ ).....	39

## Sommaire

---

6.2. Modèles au second ordre-RSM. ....	43
7. Fermeture des équations à résoudre par le modèle $k-\epsilon$ .....	44
8. Conclusion.....	44

### Chapitre V Simulation numérique

1. Introduction.....	45
2. Logiciels utilisés. ....	45
2.1. Logiciel GAMBIT. ....	45
2.2. Logiciel FLUENT.....	45
3. Problème à modéliser. ....	45
3.1. Géométrie du problème.....	46
4. Création et maillage de la géométrie sur gambit.....	46
4.1. Création des points. ....	46
4.2. Création de la face. ....	47
4.3. Maillage des lignes. ....	47
4.4. Maillage des faces.....	48
4.5. Maillage utilisés. ....	48
4.6. Conditions aux limites.....	48
4.7. Enregistrement et exportation du fichier maillé. ....	49
5. Étapes de la simulation sous Fluent. ....	50
5.1. Importation de la géométrie. ....	50
5.2. Vérification du maillage.....	50
5.3. Lissage du maillage. ....	51
5.4. Vérification des dimensions et des unités.....	51
5.5. Choix du solveur et du type d'écoulement. ....	52
5.6. Choix du régime d'écoulement. a) Cas laminaire. ....	52
5.7. Définition du fluide. ....	53
5.8. Application des Conditions aux limites. ....	53
5.9. Choix d'ordre des équations et d'algorithme de calcul. ....	54
5.10. Choix du critère de convergence. ....	55
5.11. Initialisation du calcul. ....	56
5.12. Paramétrage de la visualisation graphique.....	56
5.13. Lancement du calcul numérique.....	57
5.14. Convergence des résidus. ....	57

## Sommaire

---

6. Comparaison des profils de vitesses longitudinales.....	59
6.1. Cas d'une couche limite laminaire. ....	59
6.1.1. Interprétation des résultats.....	60
6.2. Cas d'une couche limite turbulente. ....	60
6.2.1. Interprétation des résultats.....	62
7. Conclusion. ....	62

## Introduction générale

Les écoulements rencontrés dans l'industrie ou dans notre vie quotidienne, sont pour la majorité turbulents c'est-à-dire leur mouvement est désordonné et aléatoire. L'impact de la turbulence peut être positif ou négatif, ce qui met l'ingénieur dans l'obligation de prédire ces effets lors de la conception de systèmes. Ainsi, pour pouvoir décrire le mouvement d'un fluide, et surtout prédire son comportement dans une situation donnée, quatre fonctions inconnues doivent être déterminées : les trois composantes  $(u, v, w)$  du vecteur vitesse et la pression  $p$ , c'est-à-dire résoudre les équations de Navier Stokes en chaque point et à tout instant.

Malheureusement, à nos jours l'outil mathématique n'est pas parvenu à résoudre analytiquement ces équations, la turbulence est l'un des obstacles. Pour contourner cette situation les chercheurs ont élaborés d'autres alternatives permettant d'approcher les solutions, parmi celles-ci la modélisation statistique de la turbulence. Le traitement statistique des équations du mouvement fait apparaître des inconnues supplémentaires, par conséquent un problème de fermeture ; ce qui nécessite un modèle de turbulence pour fermer le problème.

Les résultats de la simulation numérique des écoulements turbulents, sont liés au modèle de turbulence choisi. Alors pour adapter ou valider un modèle pour une situation donnée, la fiabilité de ses résultats doit être vérifiée. Cela se fait en les validant sur des configurations académiques simples, dont la solution donnée par la littérature est bien connue. Parmi les configurations les plus utilisées en mécanique des fluides l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible sur une plaque plane vu d'une part, la simplicité que présente son étude notamment l'absence d'un gradient de pression et la connaissance de la solution exacte (solution de Blasius) pour le cas laminaire d'autre part.

## 1. Définition physique d'un fluide.

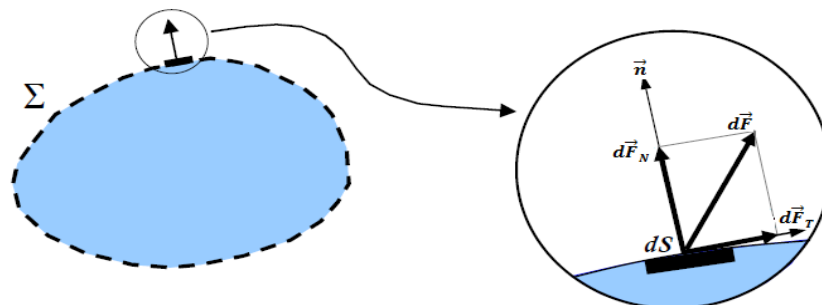
Un fluide est un milieu matériel, continu, déformable et sans rigidité qui peut s'écouler (C'est-à-dire subir de grandes variations de forme) sous l'action de forces qui sont d'autant plus faibles que ces variations de forme sont plus lentes. Un fluide est supposé être une matière formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Les forces de cohésion entres particules élémentaires sont très faibles de sorte que le fluide est un corps sans forme propre qui prend la forme du récipient qui le contient, par exemple : les métaux en fusion sont des fluides qui permettent par moulage d'obtenir des pièces brutes de formes complexes. Il est important de souligner qu'un fluide est considéré comme un milieu continu : même si l'on choisit un très petit élément de volume, il sera toujours beaucoup plus grand que la dimension des molécules qui le constitue. Par exemple, une gouttelette de brouillard, aussi petite soit-elle à notre échelle, est toujours immense à l'échelle moléculaire. Elle sera toujours considérée comme un milieu continu. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz. [01]

## 2. Classification des fluides.

Les fluides peuvent être classés en deux familles relativement à leur viscosité qui est une de leur caractéristique physico-chimique qui sera définie ultérieurement. Les fluides peuvent être classés en deux grande familles : La famille des fluides "newtoniens" (comme l'eau, l'air et la plupart des gaz) et celle des fluides "non newtoniens" (quasiment tout le reste... le sang, les gels, les boues, les pâtes, les suspensions, les émulsions...). Les fluides "newtoniens" ont une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température. La deuxième famille est constituée des fluides "non newtoniens" qui ont la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent. [01]

### 2.1. Fluide parfait.

Soit un système fluide, c.à.d. un volume délimité par une surface fermée  $\Sigma$  fictive ou pas.



*Figure.I.1 : Force d'interaction au niveau de la surface élémentaire d'un fluide [01].*

Considérons  $d\vec{F}$  la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire  $dS$  de normale  $\vec{n}$  entre le fluide et le milieu extérieur. On peut toujours décomposer  $d\vec{F}$  en deux composantes :

- une composante  $d\vec{F}_N$  normale à  $dS$ .
- une composante  $d\vec{F}_T$  tangentielle à  $dS$ .

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement, c'est à dire quand la composante tangentielle est nulle. Autrement dit, la force est  $d\vec{F}$  normale à l'élément de surface  $dS$ .

### 2.2. Fluide réel.

A l'inverse d'un fluide parfait, qui n'est qu'un modèle simplifiant les calculs, quasiment inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prises en considération. Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide.

C'est seulement au repos, qu'on accepte que le fluide réel se comporte comme un fluide parfait et on suppose que les forces de contact sont perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent. La statique des fluides réels se confond avec celle des fluides parfaits.

### 2.3. Fluide incompressible.

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.).

### 2.4. Fluide compressible.

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure, les gaz sont des fluides compressibles. Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles.

## 3. Grandeurs caractéristiques des fluides.

### 3.1. Masse volumique.

La masse volumique ou spécifique d'une substance est définie par la masse d'une unité de volume de cette substance. On la calcule par la relation :

$$\rho = \frac{\text{masse}}{\text{volume}} = \frac{m}{V}$$

Où  $\rho$  : masse volumique en  $[\text{kg}/\text{m}^3]$ .

$m$  : La masse en  $[\text{kg}]$ .

$V$  : Volume en  $[m^3]$ .

**3.2. Densité.**

La densité d'un corps est le nombre sans dimension qui exprime le rapport de la masse du corps à la masse d'un volume égal d'une substance de référence. Les solides et les liquides sont comparés à l'eau (à 4 °C) prise Comme référence, tandis que les gaz sont souvent comparés à l'air (sans gaz carbonique et sans hydrogène) pris comme référence (à 0°C et 1 atmosphère =  $1,013.10^5$  Pa).

La densité est une grandeur sans unité définie par :

$$d(\text{densité}) = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse du fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{\text{réf}}}$$

**3.3. La viscosité.**

On appelle viscosité la propriété qui traduit la résistance d'un fluide à l'écoulement. Elle caractérise les frottements internes ou intermoléculaires à l'intérieur du fluide. Plus la fluidité augmente (vitesse d'écoulement du fluide) plus la viscosité diminue et inversement.

On distingue deux types de viscosités, à savoir :

**3.3.2. La viscosité dynamique.**

La viscosité dynamique correspond à la contrainte de cisaillement qui accompagne l'existence d'un gradient de vitesse d'écoulement dans la matière, elle notée  $\mu$  et exprimée en  $[kg.m^{-1}.s^{-1}]$ .

Contrairement au cas des gaz, la viscosité des liquides diminue avec la température. Des formules empiriques ou semi-empiriques permettent de relier  $\mu$  à T. C'est par exemple celle de Walther qui est applicable aux huiles de graissage :

$$\mu = \mu_0 e^{(T_0 - T)^m}$$

Avec m une constante qui dépend du liquide étudié.

**3.3.1. La viscosité cinématique  $\nu$ .**

Elle est le rapport de la viscosité dynamique  $\mu$  à la masse volumique  $\rho$ . Elle est notée  $\nu$  et exprimée en  $[m^2.s^{-1}]$  ou en stockes (St) ( $1\text{St} = 10^{-4} m^2.s^{-1}$ )

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} [m^2.s^{-1}]$$

**3.4. La pression.**

La pression est définie comme étant la force normale exercée par un fluide par unité de surface. On parle de pression quand on traite les gaz et les liquides seulement. L'équivalent de la pression dans les solides est la contrainte normale. Comme la pression est définie comme force par unité de surface, elle a l'unité en newtons par mètre carré (N/m<sup>2</sup>), qui est nommée le Pascal (Pa), qui est :

$$1Pa = N m^{-2}$$

### 3.4.1. Pression absolue et pression effective.

En pratique, les pressions envisagées sont les pressions absolues mais dans de nombreux problèmes on peut mesurer les pressions à partir d'une origine quelconque (pression relative), et comme origine il est fréquent de prendre la pression atmosphérique  $P_a$ . La pression correspondante est appelée pression effective. [02]

$$P_e = P - P_a$$

- La pression effective peut être positive ou négative.
- Dans le deuxième cas on l'appelle encore *vide*, puisqu'elle correspond à des pressions inférieure à la pression atmosphérique.
- La notion de la pression effective est très importante, car la plupart des manomètres industriels sont gradués justement en pression effective : le zéro de graduation correspond à la pression atmosphérique.

### 3.4.2. Compressibilité.

On peut caractériser un fluide par son coefficient de compressibilité isotherme défini par :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

Ce coefficient mesure l'aptitude d'un fluide à diminuer de volume quand la pression augmente (en maintenant la température constante). Par exemple, dans le cas du modèle du gaz parfait, on a  $PV = nRT$  donc :  $\chi_T = \frac{1}{P}$ . Ainsi quand la pression augmente, le volume du gaz a de plus en plus de mal à diminuer car  $\chi_T$  diminue.

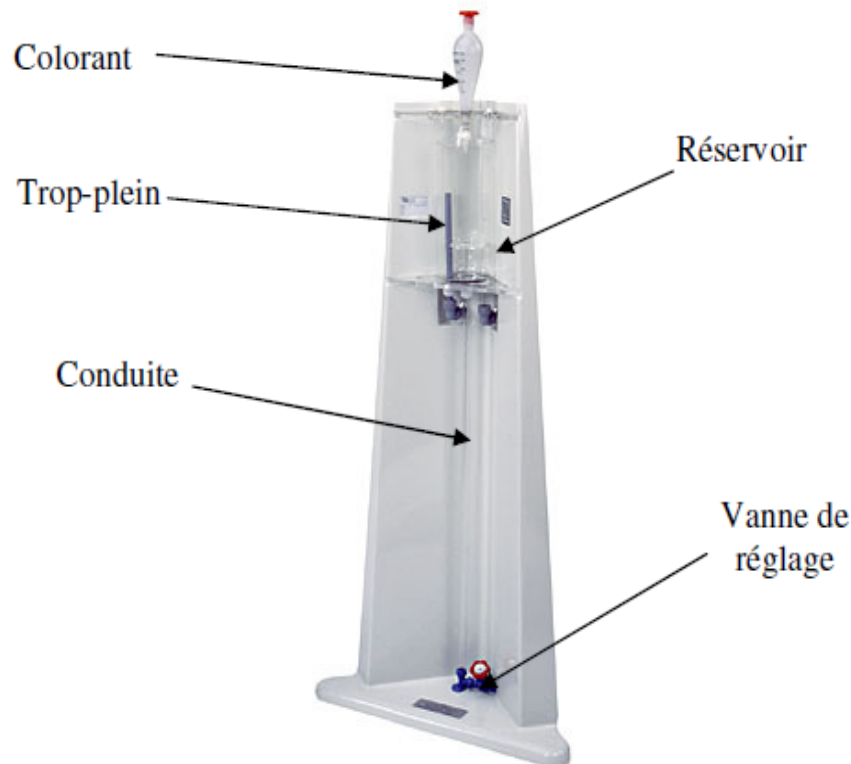
## 4. Régime d'écoulement.

Un régime d'écoulement peut être défini comme étant le mode de mouvement des particules fluides entre elles dans un écoulement.

### 4.1. Expérience de Reynolds {1}.

Les hydrauliciens ont remarqués depuis longtemps l'existence des régimes d'écoulement mais c'est Osborne Reynolds qui démontra leur existence expérimentalement et développa des critères permettant de les différencier.

L'expérience de Reynolds schématisée ci-après consiste à envoyer à l'aide d'un dispositif un liquide coloré au sein d'une masse liquide en mouvement dans un tube en verre.



**Figure.I.2** : Appareil de *Reynolds*. {1}

En ouvrant plus ou moins le robinet de vidange on fait varier la vitesse de l'écoulement dans le tube, quand la vitesse de l'écoulement est suffisamment faible le liquide coloré forme un filet droit parfaitement net qui ne se mélange pas aux autres filets. Ce régime tranquille est appelé **Régime Laminaire**, dans ce cas les filets liquides sont tous droit et parallèles entre eux.

Puis si on augmente encore la vitesse la vitesse d'écoulement le filet coloré devient sinueux et instable ; c'est le **Régime Transitoire**.

Et si on augmente encore plus la vitesse d'écoulement, le filet se rompt et se mélange avec l'écoulement ; c'est le **Régime Turbulent**.

Pour différencier les régimes d'écoulement entre eux, Reynolds a développé un nombre adimensionnel qui est le **Nombre de Reynolds** qui est noté  $R_e$ .

$$R_e = \frac{U.L}{\nu} = \frac{\rho.U.L}{\mu}$$

Avec  $U$  : La vitesse moyenne de l'écoulement [ $\text{m.s}^{-1}$ ].

$L$  : La longueur caractéristique de l'écoulement [m].

### 5. Hypothèse d'un milieu continu.

Un milieu « continu » est un milieu dont le comportement macroscopique peut être schématiser en supposant la matière répartie sur tout le domaine qu'il occupe, et non, comme la « réalité », concentrée dans une partie de volume très petite.

Les quantités introduites lors de la schématisation et associées à la matière (par exemple : masse volumique, vitesse, température,...) sont elles aussi considérées comme réparties sur tout le domaine occupé par le milieu. On les représente alors par des fonctions continues. [03]

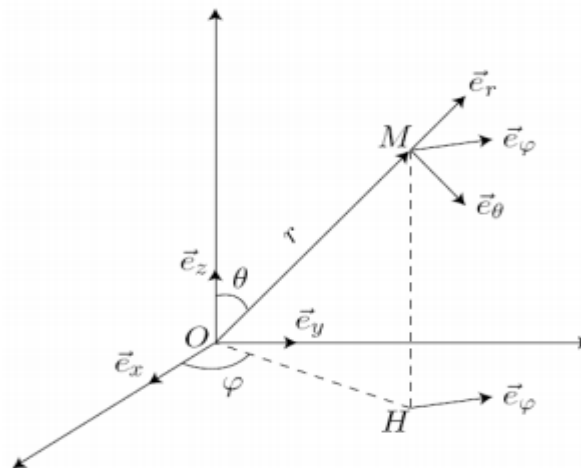
**6. Repère et référentiel.**

L'étude d'un domaine matériel impose que l'on procède à sa description et à son repérage tout au long de son évolution au cours du temps. La notion de référentiel doit être développée pour préciser les évolutions.

Le référentiel est lié à l'observateur. Il représente l'ensemble des points animés du mouvement de corps rigide de l'observateur. Pour effectuer les repérages spatiaux des points matériels dans un référentiel  $\mathcal{R}$  on utilise une base vectorielle associée à un point origine  $O$ . On obtient ainsi un repère  $R$ . Ce repère, animé du mouvement de corps rigide du référentiel  $\mathcal{R}$  permet de matérialiser ce référentiel.

Exemple : Si on veut repérer la position d'une étoile  $M$  (figure ci-dessous)

- Référentiel choisi : la Terre
- Repère choisi : un repère orthonormé dont l'origine est confondue avec le centre  $O$  de la Terre et le plan formé par les axes  $x$  et  $y$  est confondu avec le plan équatorial terrestre et l'axe  $x$  intercepte la surface terrestre au méridien de longitude  $0^\circ$
- Système de coordonnées choisi : système de coordonnées sphériques caractérisé par une longueur ( $r$ ) et deux angles ( $\theta$  et  $\varphi$ ).



*Figure.I.3 : Repérage de la position d'une étoile à partir de la terre.*

**7. Système matériel.**

Un système matériel est un ensemble de particule macroscopique, dont la position sera assimilée à un point géométrique dans la schématisation du milieu continu.

### 8. Domaine matériel.

Un domaine matériel est une partie d'un système matériel qui peut se déplacer, mais qui contient toujours exactement les mêmes particules matérielles. A travers la frontière d'un domaine matériel, aucune matière ne rentre et aucune matière ne sort au cours du mouvement. Par conséquent, un domaine matériel est défini par une frontière fermée qui « suit » les particules lors de leur déplacement à tout instant [03].

### 9. Le temps.

La mécanique est la science du mouvement (et des équilibres). Pour parler de mouvement, il faut introduire la notion de temps. Ce concept fait partie de ceux sur lequel l'esprit humain s'est beaucoup exercé et s'exerce encore. Dans le domaine de la mécanique classique qui est le nôtre (vitesses faibles devant celle de la lumière, dimension ni « infiniment » grandes, ni « infiniment » petites), le temps, dit absolu, est défini comme un ensemble muni d'une structure de droite orientée dont les éléments sont appelés instants. Chaque instant est ainsi représenté par une variable réelle  $t$ , une fois choisi un instant origine et une unité de mesure de durée [03].

Ajouter le temps à la géométrie, c'est entrer dans le monde de la cinématique. On peut écrire de façon schématique :

$$\text{GEOMETRIE} + \text{TEMPS} = \text{CINEMATIQUE}$$

### 10. Description du mouvement.

Il existe principalement deux descriptions classiques du mouvement d'un milieu continu : la description lagrangienne et la description eulérienne.

#### 10.1. Description lagrangienne.

La description lagrangienne consiste à décrire d'une manière analogue à celle utilisée en Mécanique du solide c'est-à-dire : isoler (par la pensée ou en trouvant un moyen de visualisation, coloration par exemple) une partie restreinte du fluide appelée particule associée à un point  $M$  et la " suivre " au cours du temps c'est à dire connaître à chaque instant sa position. Cette position est définie :

$$\vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}_0, t_0, t) \quad (\text{I.1})$$

C'est-à-dire :

$$x = f(\vec{x}_0, t_0, t), \quad y = g(\vec{x}_0, t_0, t), \quad z = h(\vec{x}_0, t_0, t) \quad (\text{I.2})$$

Soit à l'instant  $t_0$ , un domaine  $\mathcal{D}_0$  de fluide. Considérons une particule quelconque  $M_0$  de  $\mathcal{D}_0$  et sa trajectoire. A l'instant  $t$  cette particule occupe la position  $M(t)$  et l'ensemble de toutes les particules de  $\mathcal{D}_0$  occupent le volume  $\mathcal{D}$  (Fig. I.4).

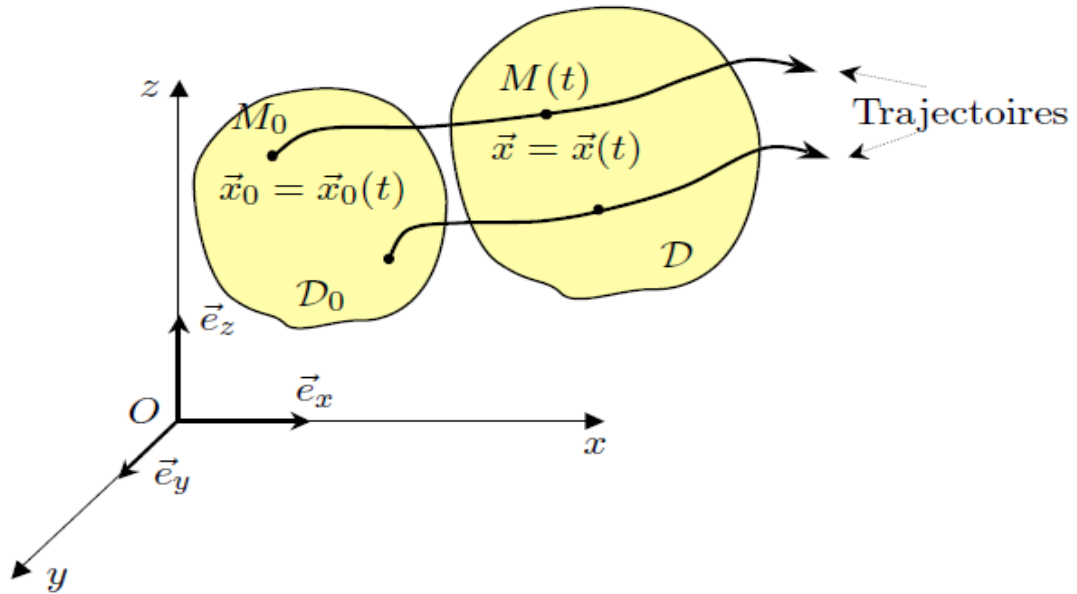


Figure.I.4 : Description lagrangienne du mouvement [04].

On peut dire que la connaissance de toutes les trajectoires (y compris les lois horaires qui donnent la manière dont elles sont décrites au cours du temps) donne une description complète du mouvement.

Remarquons que la détermination des trajectoires revient, en pratique, à déterminer la fonction  $\vec{f}$  introduite dans la relation (I.1). La connaissance de  $\vec{f}(\vec{x}_0, t_0, t)$  pour  $\vec{x}_0, t_0$  et  $t$  donnés donne une description complète du mouvement.

### 10.2. Description eulérienne.

Euler contrairement à Lagrange, il ne s'intéresse ni à la position initiale de la particule fluide ni à sa trajectoire, car dans les cas pratiques il est difficile d'identifier, et donc de suivre, une particule fluide en mouvement.

Il apparaît donc judicieux d'introduire une description alternative pour un écoulement. La connaissance de la vitesse de la particule fluide qui, à un instant  $t$ , occupe la position  $\vec{x}$  est une donnée pertinente pour décrire le mouvement d'un fluide. Considérons la vitesse :

$$\vec{U} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}(\vec{x}_0, t_0, t)$$

En utilisant l'expression de  $\vec{x}_0$  en fonction de  $\vec{x}$  on obtient :

$$\vec{U} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}(\vec{f}^{-1}(\vec{x}, t_0, t), t_0, t) = \text{fonction de } (\vec{x}, t_0, t)$$

On voit que  $\vec{U}$  est une fonction de  $\vec{x}, t_0$  et  $t$  :  $\vec{U} = \vec{U}(\vec{x}, t_0, t)$ . La position initiale  $\vec{x}_0$  ne figure plus. C'est la position  $\vec{x}$  occupé par la particule à l'instant  $t$  qui figure dans la vitesse.

**1. Introduction.**

Les équations de Navier-Stokes sont censées décrire les écoulements des fluides. Elles modélisent un fluide comme un milieu continu, c'est-à-dire caractérisé par des grandeurs physiques définies en tout point de l'espace et à tout instant. Afin d'établir ces équations on considère un volume élémentaire ( $dv$ ) du fluide «volume de contrôle», et on cherche à déterminer les forces agissant sur le fluide qu'il contient.

**2. Rappel sur la dérivée particulaire.**

La dérivée particulaire traduit mathématiquement la variation d'un paramètre attaché à un volume de contrôle durant son mouvement, cette variation est liée à la fois au point sur lequel elle est considérée (variation par rapport à l'espace), et aussi qu'en un point elle peut évoluer (variation par rapport au temps), on la note :  $\frac{d}{dt}$ , elle s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \tag{II.1}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \tag{II.2}$$

Avec :  $(u, v, w)$  les composantes de la vitesse cartésienne  $\vec{V}$ .

Le terme  $\frac{\partial}{\partial t}$  : est la dérivée par rapport au temps, c'est une dérivée locale.

Le terme  $\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$  : est une dérivée par rapport à l'espace, c'est une dérivée convective.

**3. Rappel sur l'équation de la continuité.**

Elle traduit mathématiquement le fait que la masse contenue dans un volume de contrôle est conservée.

Pour un fluide d'un volume de contrôle  $dv$  mobile dans l'espace d'une masse élémentaire  $\delta m$  l'équation de la continuité peut être énoncée comme suit :

$$\frac{d(\delta m)}{dt} = \frac{d(\rho \cdot dv)}{dt} = 0 \tag{II.3}$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left[ \frac{1}{dv} \frac{d(dv)}{dt} \right] = 0 \tag{II.4}$$

Qui est égale à :

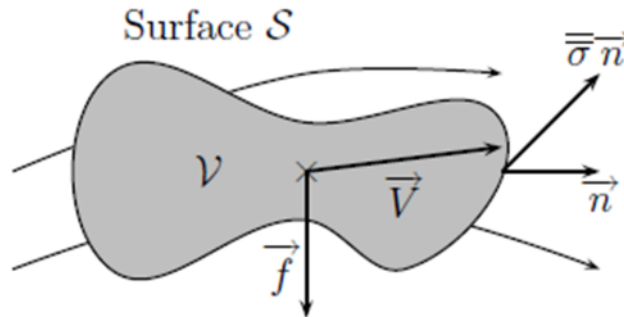
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \text{div} \vec{V} = 0 \tag{II.5}$$

On obtient finalement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho + \rho \cdot \text{div} \vec{V} = 0 \tag{II.6}$$

#### 4. Efforts s'exerçant sur un volume de contrôle.

Considérons un volume de contrôle animé d'un mouvement aligné avec l'écoulement, les forces qui agissent sur ce volume peuvent être schématisées dans la figure ci-dessous.



**Figure.II.1 :** Volume de contrôle en mouvement sur lequel s'appliquent des efforts volumiques et surfaciques [05].

$v$  : Volume du volume de contrôle.

$S$  : Surface extérieure du volume de contrôle.

$\vec{n}$  : Normale extérieure du volume de contrôle.

$\vec{V}$  : Vecteur vitesse de l'écoulement.

$\vec{f}$  : Efforts volumique par unité de masse.

$\bar{\sigma}$  : Tenseur de contraintes des efforts surfaciques.

Les efforts extérieurs qui s'exercent sur l'élément de fluide sont de deux types :

##### 4.1. Les efforts volumiques :

Ce sont des efforts extérieurs qui agissent à distance sur l'élément de fluide, ils sont dus aux champs de forces extérieures qui s'exercent sur le fluide telle que la force de pesanteur, ils sont proportionnels à l'élément de volume.

##### 4.2. Les efforts surfaciques :

Ce sont des efforts extérieurs agissant directement sur la surface extérieure à l'élément de fluide, ils sont dus aux forces de pression et de la viscosité du fluide.

Les efforts de pression agissent normalement à la surface tandis que les efforts de viscosité agissent tangentiellement (glissement).

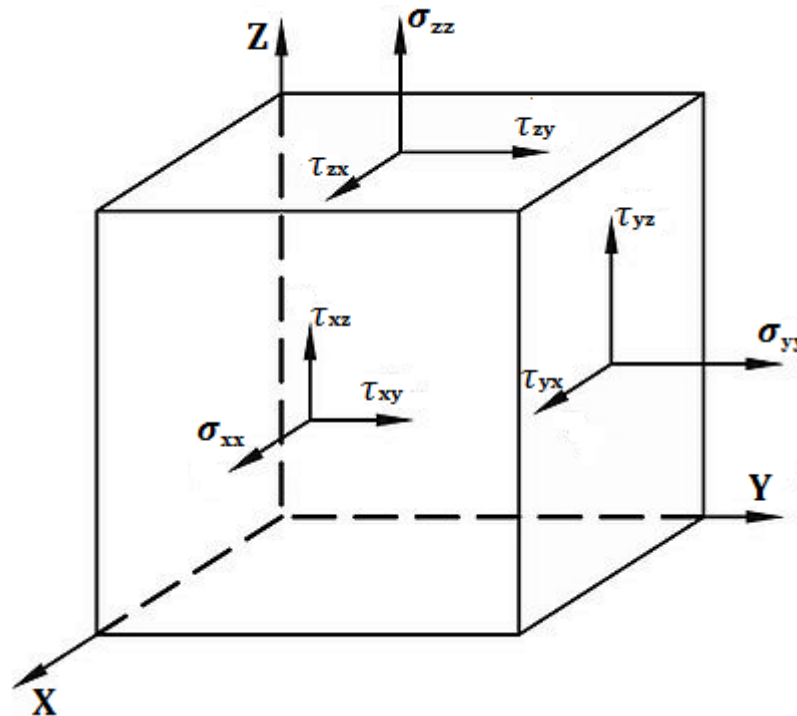
### 4.3. Tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ :

Le tenseur des contraintes  $\bar{\sigma}$  est composé d'une contribution liée à la pression et une seconde liée à la viscosité du fluide. Les efforts surfaciques sont évalués en chaque point de la surface par le produit  $\bar{\sigma} \cdot \vec{n}$  ( $\vec{n}$  étant la normale extérieure en ce point).

### 5. Application du principe fondamental de la dynamique sur un volume de contrôle.

Pour une illustration simplifiée des développements des équations qui régissent le mouvement des particules de fluide. On considère un élément d'un fluide réel d'un volume élémentaire  $dV$ , de forme cubique, en mouvement dans l'espace, sur lequel sont appliqués des efforts extérieurs, décrit dans le repère cartésien tridimensionnel  $(O, x, y, z)$ .

La schématisation peut être faite comme suit :



*Figure.II.2 : contraintes agissant sur un volume de contrôle cubique.*

$\sigma_{ii}$  : Contrainte normale.

$\tau_{ij}$  : Contrainte tangentielle.

- Le premier indice indique la direction de la normale à la surface sur laquelle agit la contrainte.
- le deuxième indice indique la direction de la contrainte

Pour un élément de fluide d'un volume  $dv = dx dy dz$ , d'une vitesse cartésienne  $\vec{V}$  de composantes  $(u,v,w)$ , selon les axes  $OX, OY$  et  $OZ$  respectivement et  $\rho$  étant sa masse volumique du fluide le principe fondamental de la dynamique peut être exprimé comme suit :

$$\sum \vec{F} ext = m \vec{V} \quad (II.7)$$

$$\sum \vec{F} ext = \rho dx dy dz \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (II.8)$$

La projection sur les trois axes de mouvement nous donne :

$$\begin{cases} \rho dx dy dz \frac{du}{dt} = \sum F_x \\ \rho dx dy dz \frac{dv}{dt} = \sum F_y \\ \rho dx dy dz \frac{dw}{dt} = \sum F_z \end{cases} \quad (II.9)$$

À la limite où le volume de contrôle se réduit à un point (infiniment petit), la différence entre l'état du fluide à l'entrée et à la sortie du volume de contrôle s'exprime :

1) Selon l'axe du mouvement  $OX$  :

$$\rho dx dy dz \frac{du}{dt} = \left[ (\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx) dy dz - \sigma_{xx} dy dz \right] + \left[ (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dx dz - \tau_{yx} dx dz \right] + \left[ (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dx dy - \tau_{zx} dx dy \right] + \rho dx dy dz f_x \quad (II.10)$$

Implique que :

$$\rho dx dy dz \frac{du}{dt} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz dx dy + \rho dx dy dz f_x$$

On divise par l'élément de volume  $dz dx dy$  on obtient :

$$\rho \frac{du}{dt} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \quad (II.11)$$

2) Selon l'axe du mouvement  $OY$  :

$$\rho dx dy dz \frac{dv}{dt} = \left[ (\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy) dx dz - \sigma_{yy} dx dz \right] + \left[ (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx) dy dz - \tau_{xy} dy dz \right] + \left[ (\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz) dx dy - \tau_{zy} dx dy \right] + \rho dx dy dz f_y \quad (II.12)$$

Implique que :

$$\rho dx dy dz \frac{dv}{dt} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz dx dy + \rho dx dy dz f_y$$

On divise l'équation par le volume  $dx dy dz$  on obtient :

$$\rho \frac{dv}{dt} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \quad (II.13)$$

3) Selon l'axe du mouvement  $OZ$  :

$$\rho dx dy dz \frac{dw}{dt} = \left[ (\sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz) dx dy - \sigma_{zz} dx dy \right] + \left[ (\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx) dy dz - \tau_{xz} dy dz \right] + \left[ (\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy) dx dz - \tau_{yz} dx dz \right] + \rho dx dy dz f_z \quad (\text{II.14})$$

Implique que :

$$\rho dx dy dz \frac{dw}{dt} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz dx dy + \rho dx dy dz f_z$$

On divise par le volume on obtient :

$$\rho \frac{dw}{dt} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (\text{II.15})$$

Dans les équations (II.11), (II.13) et (II.15) les contraintes visqueuses sont inconnues. Pour un fluide newtonien des relations entre les contraintes et les gradients de vitesse sont obtenues en supposant une forme linéaire avec des coefficients constants :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

Et

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

On substitue les expressions des contraintes dans les équations du mouvement obtenues précédemment.

Pour l'équation (II.11) on aura :

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -P - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \rho f_x \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \rho f_x \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

En faisant quelques arrangements on obtient :

$$\begin{aligned} &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{du}{dt} &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \Delta u \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

On suivra la même procédure pour les équations (II.13) et (II.15).

Pour l'équation (II.13) on aura :

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -P - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \rho f_y \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \rho f_y \\ &= \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \Delta v \quad (\text{II.22})$$

Pour l'équation (II.15) on aura :

$$\begin{aligned} \rho \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -P - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho f_z \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

$$\begin{aligned} &= \mu \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \mu \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \rho f_z \\ &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \Delta w \quad (\text{II.25})$$

On obtient finalement un système de trois équations.

$$\begin{cases} \rho \frac{du}{dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \Delta u \\ \rho \frac{dv}{dt} = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \Delta v \\ \rho \frac{dw}{dt} = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \Delta w \end{cases}$$

Qu'on peut écrire sous forme vectorielle pour le vecteur vitesse  $\vec{V}$  comme suit :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{f} - \overrightarrow{\operatorname{grad} p} + \frac{1}{3} \mu (\overrightarrow{\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{V}}) + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{II.26})$$

C'est l'équation de Navier stokes pour un fluide visqueux compressible, pour un fluide visqueux incompressible c'est-à-dire une masse volumique constante dans l'espace et le temps qui se traduit mathématiquement par  $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ .

L'équation de Navier stokes se réduit à :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{f} - \overrightarrow{\operatorname{grad} p} + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{II.27})$$

Qu'on peut écrire aussi sous la forme :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{grad} p + \nu \Delta \vec{V} \quad (\text{II.28})$$

Cette équation s'écrit sous forme développée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.29})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.30})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.31})$$

## 6. Conclusion.

Les équations de Navier-Stokes, constitue un système de trois équations différentielles non linéaires, aux dérivées partielles, pour quatre inconnues :  $u, v, w$  et  $p$ . À ce jour, la cohérence mathématique de ces équations n'a pas été prouvée, ce qui met leur résolution très complexe, le phénomène de la turbulence est l'un des obstacles. Pour traiter les écoulements turbulents, la modélisation statistique de ces équations est utilisée, elle est obtenue en appliquant l'opérateur de moyenne de Reynolds.



**1. Introduction.**

Les observations expérimentales des écoulements des fluides réels, ont montrées que les solutions proposées par la théorie des fluides parfaits (non visqueux), sont conformes aux données expérimentales uniquement quand on considère des zones éloignées des parois solides, mais ces solutions ne conviennent pas du tout dans la zone très proches des parois, dans le voisinage immédiat de celles-ci les forces de viscosité ont un rôle très important, cette zone de l'écoulement est appelée **couche limite**.

**2. Concept de la couche limite.**

On définit généralement la couche limite comme une région de faible épaisseur produite par l'écoulement d'un fluide visqueux en présence d'un obstacle. Une couche limite est qualifiée de laminaire, quand la valeur du nombre de Reynolds  $Re$  (ordre de grandeur du rapport des forces d'inertie sur les forces visqueuses) est inférieur à une valeur critique, dans le cas contraire elle est qualifiée de turbulente [06].

**3. Développement de la couche limite.**

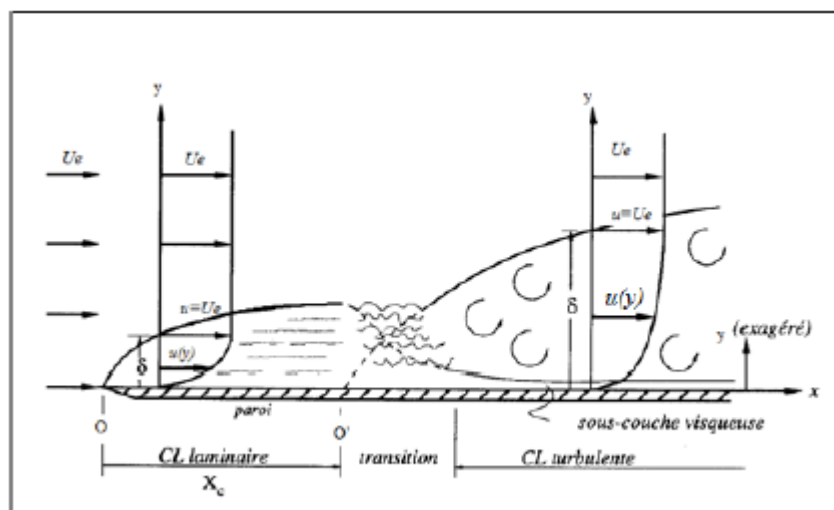
La couche limite se développe le long de l'obstacle, elle passe de l'état laminaire à l'état turbulent par l'intermédiaire d'une zone de transition. La position et le développement de cette zone dépendent de nombreux facteurs géométriques et dynamiques et son étude constitue l'un des problèmes majeurs de la mécanique des fluides.

La transition se fait à partir d'une certaine distance notée  $X_c$  qu'on peut déterminer à partir d'un nombre de Reynolds critique défini ainsi :

$$Re_{cr} = \frac{U_{\infty} X_c}{\nu} \tag{III.1}$$

✓ Pour une plaque plane on donne :

$$3.10^5 < Re_{cr} < 5.10^5$$



**Figure.III.1 :** Développement de la couche limite [07] le long d'une plaque plane

#### 4. Paramètres caractéristiques de la couche limite [08].

##### 4.1. Epaisseur de la couche limite.

L'épaisseur de la couche limite peut être définie comme étant la distance  $\delta$  au-delà de laquelle :

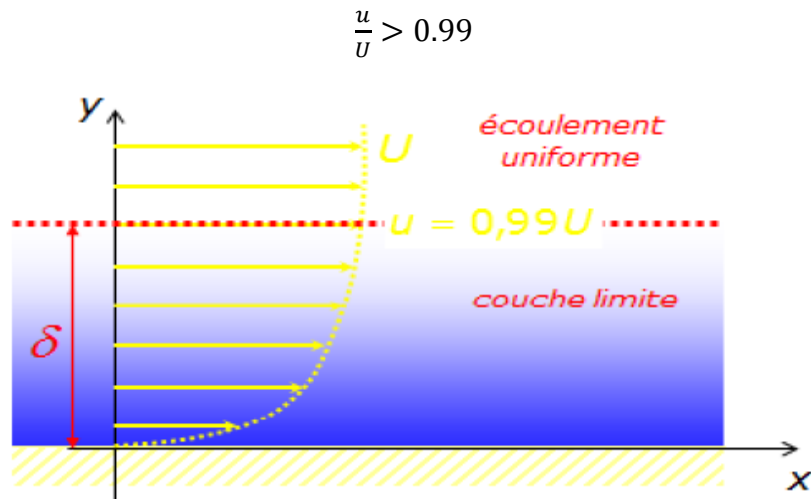


Figure.III.2 : Epaisseur de couche limite [08].

##### 4.2. Epaisseur de déplacement.

Elle caractérise le déficit de la quantité de mouvement du fluide réel par rapport à celui d'un fluide parfait dans la même configuration. Son expression est donnée par :

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \neq \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (\text{III.2})$$

##### 4.3. Epaisseur de quantité de mouvement.

On définit l'épaisseur de la quantité de mouvement comme l'épaisseur de la couche du fluide de vitesse  $U_{\infty}$  pour laquelle la variation de la quantité de mouvement est égale à celle qui est perdue, cette épaisseur est définie par la relation :

$$\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \neq \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (\text{III.3})$$

##### 4.4. Epaisseur d'énergie.

$$\delta_3 = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right) dy \neq \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right) dy \quad (\text{III.4})$$

**4.5. Facteur de forme.**

Le facteur de forme  $H$  est le rapport entre les épaisseurs de déplacement  $\delta_1$  et de quantité de mouvement  $\delta_2$ , il définit la forme générale du profil de vitesses de l'écoulement dans la couche limite.

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (\text{III.5})$$

Ainsi d'autres paramètres qui sont reliés à ces épaisseurs qui sont : [02]

**4.6. La contrainte tangentielle à la paroi.**

$$\tau_0 = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\text{III.6})$$

**4.6. Coefficient de frottement local.**

$$C_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (\text{III.7})$$

**4.7. Coefficient de frottement global sur une surface.**

$$C_F = \frac{1}{S} \int C_f dS \quad (\text{III.8})$$

**4.8. Flux d'énergie dissipée.**

$$D = \int_0^\infty \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy \quad (\text{III.9})$$

**5. Couche limite laminaire.****5.1. Equations pour la couche limite laminaire.**

Considérons un écoulement permanent bidimensionnel d'un fluide visqueux incompressible de vitesse uniforme à l'infini amont autour d'un obstacle fixe (*Figure III.3*). Les équations du mouvement sont celles de l'écoulement plan :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.10})$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.11})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.12})$$

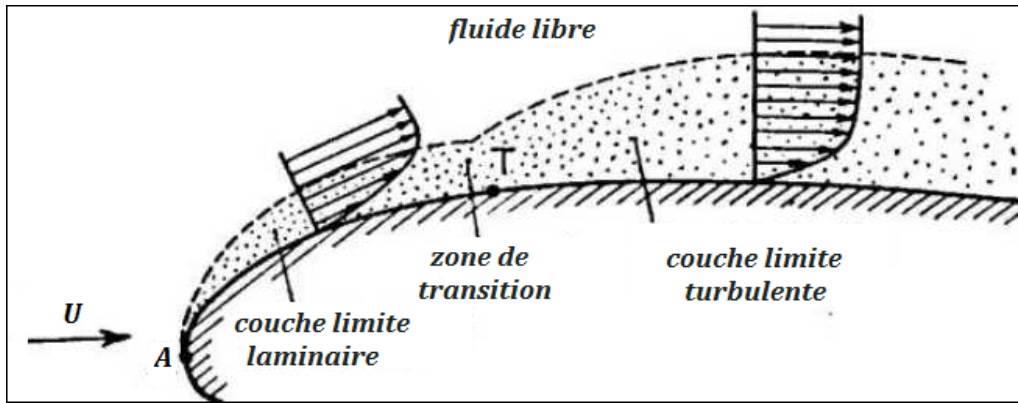


Figure.III.3 : développement d'une couche limite le long d'une paroi solide [02].

5.2. Equations sous forme adimensionnées.

Pour qu'on puisse apporter des simplifications aux équations du mouvement, on va exprimer ces dernières en variables réduites en prenant des grandeurs caractéristiques de référence. Soit le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x_+ = \frac{x}{L} ; & y_+ = \frac{y}{\delta} \\ u_+ = \frac{u}{U} ; & v_+ = \frac{v}{V} \\ p_+ = \frac{p}{\rho U^2} \end{cases} \quad \text{Avec :}$$

- $L$  : Longueur caractéristique de l'obstacle.
- $\delta$  : Épaisseur de la couche limite ( $\delta \ll L$ ).
- $U$  : Vitesse de référence dans la direction  $x$ .
- $V$  : vitesse de référence dans la direction  $y$ .
- $p$  : Pression motrice.

En adoptant le changement de variables ci-dessus les équations du mouvement adimensionnées peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a) & u_+ \frac{\partial u_+}{\partial x_+} + \frac{L.V}{\delta.U} v_+ \frac{\partial u_+}{\partial y_+} = -\frac{\partial p_+}{\partial x_+} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_+}{\partial x_+^2} + \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial^2 u_+}{\partial y_+^2} \right) \\ b) & u_+ \frac{\partial v_+}{\partial x_+} + \frac{L.V}{\delta.U} v_+ \frac{\partial v_+}{\partial y_+} = -\frac{L.U}{\delta.V} \frac{\partial p_+}{\partial y_+} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_+}{\partial x_+^2} + \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial^2 v_+}{\partial y_+^2} \right) \\ c) & \frac{\partial u_+}{\partial x_+} + \frac{L.V}{\delta.U} \frac{\partial v_+}{\partial y_+} = 0 \end{cases} \quad (III.13)$$

$$\text{Avec : } Re = \frac{U.L}{\nu}$$

En se basant sur le principe de moindre dégénérescence, on peut déterminer l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  et la vitesse caractéristique transversale  $V$ .

Considérons l'équation (III.13.c) les deux termes qui y figurent doivent être du même ordre c'est-à-dire le terme  $\frac{L.V}{\delta.U}$  est d'ordre 1 ce qui nous donne :

$$\frac{\delta}{L} = \frac{V}{U} \quad (\text{III.14})$$

En suivant un raisonnement similaire sur l'équation de quantité du mouvement, dont les termes d'inertie et de viscosité qui y figurent doivent être du même ordre, ce qui nous permet alors d'écrire :

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 = 1 \quad (\text{III.15})$$

A partir de ces deux relations obtenues, on peut écrire les relations pour les deux grandeurs caractéristiques  $\delta$  et  $V$  tel que :

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}} \quad (\text{III.16})$$

$$V = \frac{U}{\sqrt{Re}} \quad (\text{III.17})$$

En prenant compte des deux relations précédentes, le système (III.13) peut être réécrit sous la forme adimensionnée suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) u_+ \frac{\partial u_+}{\partial x_+} + v_+ \frac{\partial u_+}{\partial y_+} = -\frac{\partial p_+}{\partial x_+} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_+}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2 u_+}{\partial y_+^2} \\ b) \frac{1}{Re} \left( u_+ \frac{\partial v_+}{\partial x_+} + v_+ \frac{\partial v_+}{\partial y_+} \right) = -\frac{\partial p_+}{\partial y_+} + \frac{1}{Re^2} \left( \frac{\partial^2 v_+}{\partial x_+^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_+}{\partial y_+^2} \right) \\ c) \frac{\partial u_+}{\partial x_+} + \frac{\partial v_+}{\partial y_+} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.18})$$

Par hypothèse, le nombre de Reynolds tend vers l'infini pour donner lieu à une couche limite, dans ce cas la forme limite du système (III.18) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) u_+ \frac{\partial u_+}{\partial x_+} + v_+ \frac{\partial u_+}{\partial y_+} = -\frac{\partial p_+}{\partial x_+} + \frac{\partial^2 u_+}{\partial y_+^2} \\ b) \frac{\partial p_+}{\partial y_+} = 0 \\ c) \frac{\partial u_+}{\partial x_+} + \frac{\partial v_+}{\partial y_+} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.19})$$

Dans la zone du fluide libre, les termes de viscosité sont négligeables et la vitesse est celle du fluide libre  $U$ , l'équation (III.10) nous donne :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{III.20})$$

En éliminant le terme de pression entre les équations et en revenant en variables dimensionnées, on obtient les équations de la couche limite dynamique, dites aussi équations de Prandtl qu'on complètera avec les conditions aux limites telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ b) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.21})$$

Conditions aux limites :

- Pour  $y = 0$      $u = v = 0$
- Pour  $y \rightarrow \infty$      $u \rightarrow U(x)$

6. Couche limite laminaire de la plaque plane parallèle à l'écoulement.

Soit une plaque plane, mince, d'une longueur  $L$ , placée parallèlement dans un écoulement uniforme d'un fluide visqueux, dont la vitesse loin de la plaque est constante et égale à  $U$  (figure ci-dessous).

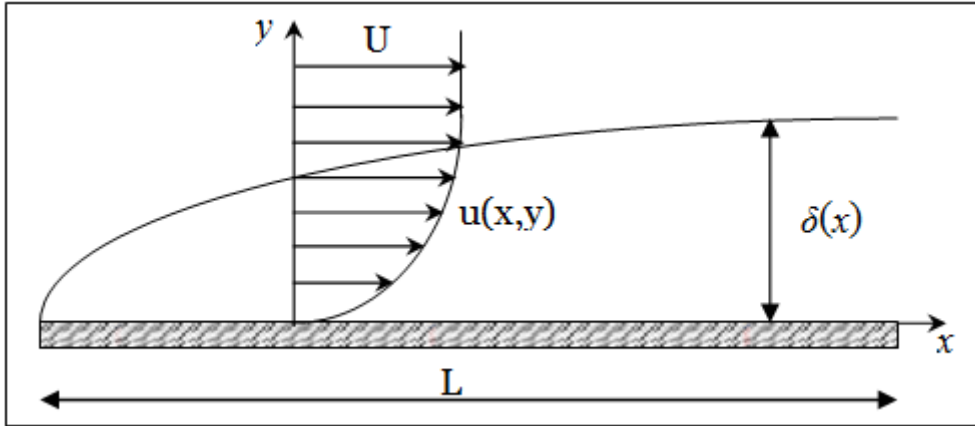


Figure.III.4 : couche limite sur une plaque plane [08].

L'étude se limitera pour le cas d'une couche limite avec un gradient de pression nul car :

à l'extérieur de la couche limite  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  implique que :  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  (théorème de Bernoulli) or dans la couche limite on avait vu précédemment que  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$  donc :  $p = Cte$  dans toute la couche limite.

Les équations à résoudre dans ce cas, sont les équations de la couche limite dynamique bidimensionnelle obtenues précédemment sans gradient de pression, on propose la simplification de ces dernières en réduisant le nombre de variables. Pour cela on introduit à la place des inconnues  $u$  et  $v$ , la fonction de courant  $\psi(x, y)$  telle que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{III.22}$$

Ainsi l'équation de continuité est satisfaite automatiquement et les équations (III.21) se ramènent à :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \tag{III.23}$$

Conditions aux limites étant :

- Pour  $y = 0$   $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$
- Pour  $y \rightarrow \infty$   $\frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow -U(x)$

On pose :  $\psi(x, y) = \sqrt{\nu U x} \cdot f(\eta) = \frac{Ux}{\sqrt{R_x}} f(\eta)$  (III.24)

Avec :  $\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = \frac{y}{x} \sqrt{R_x}$  (III.25)

D'où les composantes de la vitesse s'expriment :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{ce qui donne :} \quad u = U f'(\eta) \quad (\text{III.26})$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{ce qui donne :} \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U\nu}{x}} (\eta f'(\eta) - f(\eta)) \quad (\text{III.27})$$

De même :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{U}{x}\right)^{3/2} \frac{y}{\sqrt{\nu}} f''(\eta) \quad (\text{III.28})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''(\eta) \quad (\text{III.29})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U^2}{\nu x} f'''(\eta) \quad (\text{III.30})$$

En portant dans l'équation (III.21.a), on obtient l'équation en  $f$  dite équation de Blasius :

$$2f''' + ff'' = 0 \quad (\text{III.31})$$

Conditions aux limites :

- Pour  $\eta = 0$   $f = f' = 0$
- Pour  $\eta \rightarrow \infty$   $f' \rightarrow 1$

Le problème de la plaque plane a été étudié pour la première fois par Blasius en 1908. Blasius avait introduit la variable sans dimension  $\eta$ , son travail été préconisé par l'obtention de l'équation différentielle pour  $f$  dont la résolution est faite par voie numérique. Nous exposons dans le tableau ci-dessous quelques solutions pour différentes valeurs de  $\eta$ .

$\eta$	$f$	$f' = \frac{u}{U}$	$f''$
0	0	0	0.33206
0.2	0.00664	0.06641	0.33199
0.4	0.02656	0.13277	0.33147
0.6	0.05974	0.19894	0.33008
0.8	0.10611	0.26471	0.32739
1.0	0.16557	0.32979	0.32301
1.2	0.23795	0.39378	0.31659
1.4	0.32298	0.45627	0.30787
1.6	0.42032	0.51676	0.29667
1.8	0.52952	0.57477	0.28293
2.0	0.65003	0.62977	0.26675
2.2	0.78120	0.68132	0.24835
2.4	0.92230	0.72899	0.22809
2.6	1.07252	0.77246	0.20646
2.8	1.23099	0.81152	0.18401
3.0	1.39682	0.84605	0.16136
3.2	1.56911	0.87609	0.13913
3.4	1.74696	0.90177	0.11788
3.6	1.92954	0.92333	0.09809
3.8	2.11605	0.94112	0.08013
4.0	2.30576	0.95552	0.06424
4.2	2.49806	0.96696	0.05052
4.4	2.69238	0.97587	0.03897
4.6	2.88826	0.98269	0.02948
4.8	3.08534	0.98779	0.02187
5.0	3.28329	0.99155	0.01591
6.0	4.27964	0.99898	0.00240
7.0	5.27926	0.99992	0.00022
8.0	6.27923	1.00000	0.00001

**TAB.III.1-** solution numérique de l'équation de Blasius.[09]

## 7. Couche limite turbulente.

### 7.1. Décomposition de Reynolds des équations de Navier Stokes.

On utilise la décomposition de Reynolds pour traiter les écoulements turbulents. Elle repose sur l'idée que l'on décompose chaque valeur instantanée en une valeur moyenne que l'on note ( $\bar{\phantom{x}}$ ) ajoutée à une fluctuation notée ( $\Phi$ ) représentant l'écart à la moyenne. Par exemple la décomposition d'une grandeur instantanée  $\Phi(\vec{x},t)$  est tel que :

$$\Phi(\vec{x},t) = \bar{\Phi}(\vec{x},t) + \Phi'(\vec{x},t) \quad (\text{III.32})$$

Et on considère les fluctuations comme des variables aléatoires. Cette décomposition est obtenue en appliquant l'opérateur de moyenne de Reynolds aux valeurs instantanées de l'écoulement.

**7.2. Explication sur la moyenne de Reynolds.**

La moyenne de Reynolds peut-être expliquer comme étant une moyenne purement statistique, l'idée maitresse permettant de l'obtenir est fondée sur l'hypothèse que l'on peut réaliser une infinité de N expériences identiques et indépendantes portant sur le même écoulement. À chaque expérience, on va enregistrer la valeur de la quantité qui nous intéresse à la même position et au même temps, puis on calcule la moyenne pour l'ensemble.

**7.3. Opérateur de moyenne [10].**

On choisit comme opérateur de moyenne, l'opérateur de la moyenne d'ensemble car il a les bonnes propriétés. Il vérifie notamment les axiomes de Reynolds.

Pour une fonction  $f$  définie au point  $x$  et à l'instant  $t$ , l'expression de la fonction  $\bar{f}$  moyennée par cet opérateur au point  $x$  et au temps  $t$ , est telle que :

$$\overline{f(\vec{x}, t)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^{(i)}(\vec{x}, t) \tag{III.33}$$

La moyenne de Reynolds se ramène :

- à une moyenne temporelle lorsque l'écoulement est permanent.
- à une moyenne spatiale lorsque l'écoulement est homogène.

**7.3.1. Axiomes de Reynolds.**

L'opérateur de moyenne à appliquer doit vérifier certaines conditions nommées axiomes de Reynolds, pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  et pour tout réel  $\alpha$ , les axiomes de Reynolds sont les suivants :

- **Axiome 1** : Linéarité

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g} \quad \text{et} \quad \overline{\alpha f} = \alpha \bar{f} \tag{III.34}$$

- **Axiome 2** : Commutativité avec l'intégration et la dérivation

L'opérateur «moyenne» doit être commutatif avec la dérivation et l'intégration par rapport à l'espace ou le temps. Ainsi, pour toute fonction  $f$  et pour toute variable  $s$  ( $s$  étant  $x, y, z$  ou  $t$ ), on a :

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \overline{\int f dx} = \int \bar{f} dx \tag{III.35}$$

$$\overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = 0 \tag{III.36}$$

- **Axiome 3** : Idempotence généralisée

Pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  on a :

$$\overline{\bar{f} \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g} \tag{III.37}$$

Ce qui conduit en particulier à :

$$\overline{\overline{f}} = \overline{f} \text{ et } \overline{\overline{f}} = 0 \tag{III.38}$$

L'idempotence généralisée est fondamentale car elle implique notamment la propriété ci-dessous que l'on utilise beaucoup.

$$\overline{f \cdot g} = \overline{(\overline{f} + f') + (\overline{g} + g')} = \overline{f} \cdot \overline{g} + \overline{f' \cdot g'} \tag{III.39}$$

**7.4. Grandeurs moyennées de l'écoulement.**

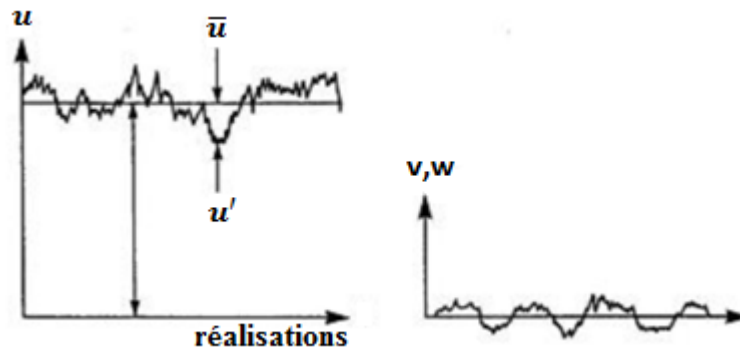
Afin de pouvoir prendre une moyenne des grandeurs instantanées de l'écoulement, celles-ci sont décomposées en deux valeurs (valeur moyenne et une valeur fluctuante).

Avec l'aide de cette définition, la décomposition de la vitesse instantanée peut être écrite mathématiquement comme suit :

$$u = \overline{u} + u' \ ; \ v = \overline{v} + v' \ ; \ w = \overline{w} + w'$$

- $\overline{u}$  : la valeur moyenne.
- $u'$  : la valeur fluctuante.

Ceci est illustré graphiquement dans la (Figure.III.3).



**Figure.III.5 :** Fluctuation de la vitesse en régime turbulent. [10]

D'une manière analogue pour la pression  $p$  et la masse volumique  $\rho$  .

$$p = \overline{p} + p' \text{ et } \rho = \overline{\rho} + \rho'$$

Avec la masse volumique  $\rho$  sera considéré constante dans ce qui suit.

Les valeurs moyennes des valeurs fluctuantes sont définies comme étant zéro.

$$\overline{u'} = 0 \ ; \ \overline{v'} = 0 \ ; \ \overline{w'} = 0 \ ; \ \overline{p'} = 0$$

7.5. Équations moyennées.

7.5.1 Rappel des équations instantanées.

On s'intéresse essentiellement aux écoulements incompressibles.

a) Équation de la continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{III.40})$$

On a la masse volumique  $\rho$  constante dans l'espace et le temps alors l'équation de continuité s'écrit :

$$\text{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.41})$$

b) Équations de Navier-Stokes :

Pour un fluide visqueux compressible en absence des forces volumiques on a :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}p} + \frac{1}{3}\mu(\overrightarrow{\text{grad} \text{div} \vec{V}}) + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{III.42})$$

Pour un fluide visqueux non compressible l'équation se réduit à :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}p} + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{III.43})$$

7.5.2. Application de l'opérateur moyenne à l'équation de la continuité.

L'équation de continuité est moyennée comme suit :

$$\text{On a: } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.44})$$

On injecte la décomposition de Reynolds de la vitesse.

$$\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}+v')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{w}+w')}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.45})$$

On obtient :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}'}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.46})$$

En prenant la moyenne d'ensemble on obtient :

$$\overline{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}'}{\partial z}} = 0 \quad (\text{III.47})$$

L'opérateur de moyenne est linéaire ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}'}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.48})$$

Par définition on a :

$$\bar{u}' = 0 ; \quad \bar{v}' = 0 ; \quad \bar{w}' = 0 \quad \text{et} \quad \bar{u} = \bar{u} ; \quad \bar{v} = \bar{v} ; \quad \bar{w} = \bar{w}$$

Finalement l'équation de continuité moyennée s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.49})$$

### 7.5.3. Application de l'opérateur de moyenne aux équations de Navier-stokes.

Les équations de Navier stokes sont moyennées comme suit :

(La moyenne sera illustrée pour la composante selon X)

Au préalable, une transformation du terme d'advection (terme de gauche) est effectuée.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (\text{III.50})$$

$$\text{Avec : } \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{équation de la continuité})$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \quad (\text{III.51})$$

Les expressions pour la décomposition des vitesses et de la pression seront substituées dans les équations de NS transformées, et une moyenne pour l'ensemble sera effectuée :

$$\overline{\rho \left[ \frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}+u')^2}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}+u')(\bar{v}+v')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}+u')(\bar{w}+w')}{\partial z} \right]} = \overline{-\frac{\partial(\bar{p}+p')}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{v}+v')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bar{w}+w')}{\partial z^2} \right]} \quad (\text{III.52})$$

L'application des règles de la moyenne de Reynolds nous donne :

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}w'}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) \quad (\text{III.53})$$

L'application répétée de la règle de produit et l'ajout de l'équation de continuité au terme d'advection, nous conduisent à écrire les équations de Navier Stokes moyennées pour les trois directions comme suit :

$$\rho \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \Delta \bar{u} - \rho \left[ \frac{\partial \bar{u}u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}w'}{\partial z} \right] \quad (\text{III.54})$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \Delta \bar{v} - \rho \left[ \frac{\partial \bar{u}v'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}w'}{\partial z} \right] \quad (\text{III.55})$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right] = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \Delta \bar{w} - \rho \left[ \frac{\partial \bar{w}'u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}'w'}{\partial z} \right] \quad (\text{III.56})$$

Sous forme indicielle :

$$\rho \frac{d\bar{u}_i}{dt} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \Delta \bar{u}_i - \rho \left[ \frac{\partial u_i'v_j'}{\partial x_j} \right] \quad (\text{III.57})$$

### 7.6. Contraintes visqueuses.

On peut identifier les contraintes visqueuses comme suit :

On ajoute au terme de transport du deuxième membre de l'équation (III.54) l'équation de continuité.

$$\begin{aligned} \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.58})$$

Qui est égale à :

$$2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \right) \quad (\text{III.59})$$

On identifie alors les tensions visqueuses :  $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  tel que :

$$\tau_{xx} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (\text{III.60})$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \quad (\text{III.61})$$

$$\tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \quad (\text{III.62})$$

Avec  $\tau_{xx}$  est différent de  $\sigma_{xx}$ , car  $\sigma_{xx}$  inclue toutes les forces de surface agissant sur un élément de fluide et en particulier la pression, tandis que  $\tau_{xx}$  réfère uniquement au frottement.

L'équation de mouvement suivant x peut être écrite :

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} - \rho \overline{u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} - \rho \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} - \rho \overline{u'w'}) \quad (\text{III.63})$$

On déduit alors les équations pour les directions x et y :

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{yx} - \rho \overline{v'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yy} - \rho \overline{v'^2}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{yz} - \rho \overline{v'w'}) \quad (\text{III.64})$$

$$\rho \frac{d\bar{w}}{dt} = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{zx} - \rho \overline{w'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{zy} - \rho \overline{w'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zz} - \rho \overline{w'^2}) \quad (\text{III.65})$$

Finalement les équations moyennées sont écrites sous la forme indicielle suivante :

$$\rho \frac{d\bar{u}_i}{dt} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} + R_{ij}) \quad (\text{III.66})$$

$\overline{\tau_{ij}}$  : représente le tenseur des tensions visqueuses, elles sont dues à l'écoulement moyen

$$\overline{\tau_{ij}} = \mu \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (\text{III.67})$$

$R_{ij}$  : représente le tenseur des tensions de Reynolds, ces tensions sont dues au champ fluctuant.

On peut les regrouper dans un tenseur symétrique comme suit :

$$R_{ij} = -\rho \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix} \quad (\text{III.68})$$

On peut donc étudier l'écoulement moyen à l'aide des équations de Navier-stockes sous une forme similaire au cas laminaire à condition d'ajouter aux tensions visqueuses les tensions de Reynolds dans les équations de mouvement.

### 7.7. Couche limite turbulente de la plaque plane parallèle à l'écoulement.

Soit une plaque plane, mince, semi-infinie, placée parallèlement dans un écoulement uniforme, permanent, d'un fluide visqueux, dont la vitesse loin de la plaque est constante et égale à  $U$ , dans ce cas les équations de mouvement s'écrivent :

$$\overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} \quad (\text{III.69})$$

$$\overline{u} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial y^2} \quad (\text{III.70})$$

$$\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} \quad (\text{III.71})$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.72})$$

- En supposant valable aussi pour l'écoulement moyen, l'analyse en ordre de grandeur avec les échelles de référence qu'on a défini pour le cas laminaire.
- En supposant que toutes dérivées des grandeurs moyennes par rapport à  $z$  sont nulles.
- En supposant que l'écoulement est isotrope en moyenne dans la direction  $oz$ , c'est-à-dire les moyennes ne dépendent pas du choix de l'orientation de l'axe  $oz$  donc :

$$\overline{uw} = \overline{vw} = \overline{uw} = \overline{vw} = 0 \quad (\text{puisque } \overline{w} = 0)$$

En l'absence de gradient de pression, l'équation du mouvement moyen pour la couche limite turbulente se réduit à :

$$\overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \quad (\text{III.73})$$

## 8. Profil de vitesse dans la couche limite turbulente. [11]

Des mesures effectuées dans la couche limite turbulente ont permis de distinguer différentes régions selon les effets de la turbulence, ces mesures ont montré aussi qu'à partir d'une certaine distance en aval de l'obstacle, il existe une similitude des profils de vitesses moyennes  $\bar{u}(y)$ , la répartition de cette dernière dans n'importe quel plan  $x = cste$  est exprimée par des lois universelles qui sont généralisées pour tous les écoulements pariétaux.

### 8.1. La sous-couche linéaire.

Considérons le frottement total défini par :

$$\tau_{tot} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \quad (\text{III.74})$$

Le frottement total est conservé dans une couche limite turbulente, dans la zone très près de la paroi le frottement turbulent est négligeable devant le frottement laminaire, la condition d'adhérence à la paroi donne :  $\bar{u}(y=0) = 0 = u = v$ , le frottement total s'écrit à la paroi :

$$\tau_{tot}(y=0) = \tau_p \approx \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}_{y=0} \quad (\text{III.75})$$

Comme le frottement total est constant, on peut écrire la vitesse moyenne sous la forme :

$$\bar{u}(y) = y \frac{\tau_p}{\mu} \quad (\text{III.76})$$

Le profil est donc linéaire en fonction de la distance à la paroi. Par analyse dimensionnelle, on peut définir la vitesse de frottement à partir du frottement pariétal  $\tau_p$  par :

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \quad (\text{III.77})$$

Ce qui permet d'introduire une vitesse et une distance adimensionnelle tel que :

$$\bar{u}_+ = \frac{\bar{u}}{u^*} \quad (\text{III.78})$$

$$y_+ = \frac{yu^*}{\nu} \quad (\text{III.79})$$

La loi linéaire s'écrit simplement :

$$\bar{u}_+ = y_+ \quad (\text{III.80})$$

Les expériences montrent que cette loi linéaire est valable pour  $y_+ \leq 5$ .

### 8.2. La zone tampon.

Dans cette zone les effets visqueux diminuent devant le frottement turbulent mais ne sont pas complètement négligeables. Cette zone correspond à :  $5 \leq y_+ \leq 30$ .

8.3. La zone logarithmique.

Au-delà de la zone tampon, le frottement est essentiellement turbulent, la contribution due à la viscosité moléculaire disparaît devant la contrainte de cisaillement turbulent, on a donc :

$$\tau_p \approx -\rho \overline{u'v'} \tag{III.81}$$

En utilisant la vitesse de frottement définie précédemment, on obtient pour la contrainte de Reynolds :

$$-\overline{u'v'} = u^{*2} \tag{III.82}$$

Cette vitesse de frottement apparaît donc comme une échelle caractéristique des fluctuations de vitesse. Comme la viscosité moléculaire n'intervient plus dans cette zone, il faut construire par analyse dimensionnelle, une expression pour  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$  avec les échelles déjà définies :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{u^*}{ky} \tag{III.83}$$

En intégrant on obtient :

$$\bar{u}_+ = \frac{1}{K} \log(y^+) + C \tag{III.84}$$

Où  $K = 0.41$  est la constante de Von Karman, et  $C \approx 5$ .

Le profil de vitesses dans une couche limite turbulente sur une plaque plane est illustré graphiquement dans la figure ci-dessous.

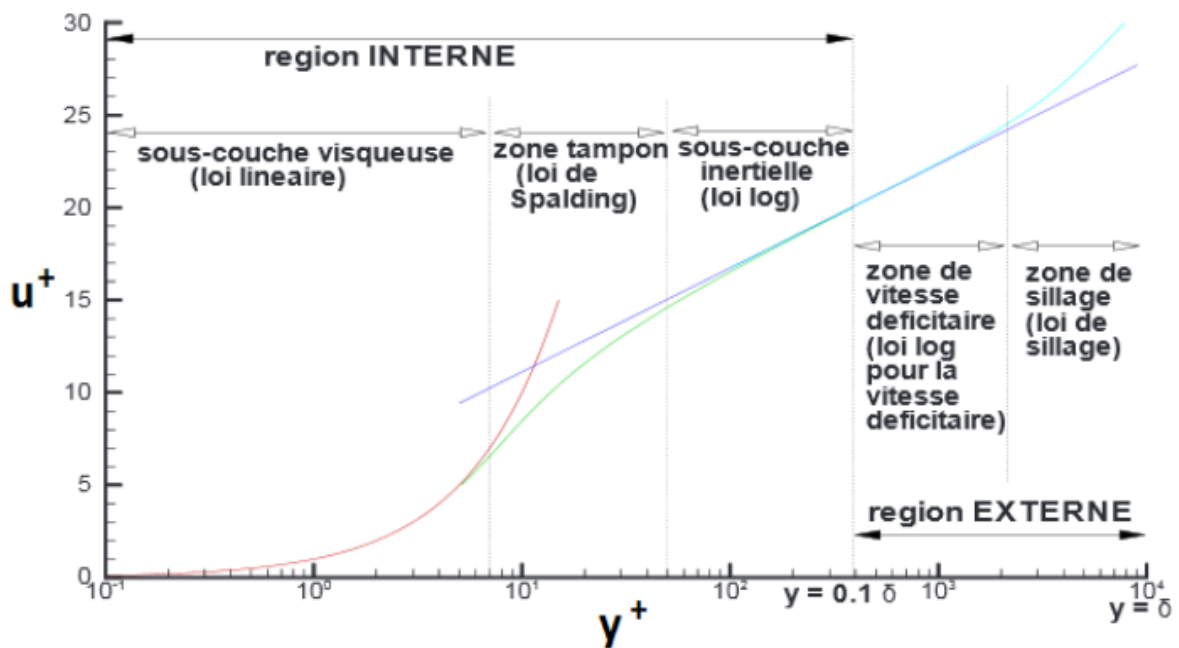


Figure.III.6. Profil de vitesse à travers la couche limite turbulente d'une plaque plane [12]

**1. Introduction.**

Le traitement statistique des inconnues des équations de Navier-stokes, a engendré des quantités inconnues supplémentaires, elles sont dues à la non linéarité des termes convectifs des équations de Navier-stokes. Ce qui nécessite une modélisation de ces inconnues afin d'obtenir des équations supplémentaires pour fermer le système d'équations qui régit le problème.

**2. La turbulence.**

On peut envisager la turbulence à l'échelle du milieu continu, comme étant un mouvement chaotique et désordonné dans toutes les directions d'un système dynamique. La turbulence peut désigner aussi, l'état d'un fluide liquide ou gaz dans lequel la vitesse présente en tout point et à tout instant un caractère tourbillonnaire : des tourbillons dont la taille, la localisation et l'orientation varient couramment. La turbulence apparaît lorsque la source d'énergie cinétique qui met le fluide en mouvement est relativement intense devant les forces de viscosité.

**2.1. Quelques caractéristiques générales de la turbulence.****2.1.1. Caractère aléatoire.**

Les variations en fonction de l'espace et du temps des grandeurs attachées au fluide tel que la vitesse sont irrégulières et imprévisibles, le recours aux méthodes statistiques est nécessaire pour accéder aux informations et obtenir des propriétés moyennes de l'écoulement.

**2.1.2. Caractère non linéaire.**

Une seconde caractéristique physique fondamentale de la turbulence, est la coexistence en son sein d'une gamme large et continue d'échelles de mouvements. Ceci est une conséquence directe de la non linéarité des équations de Navier-Stokes : même si l'énergie est concentrée au départ dans un domaine spectral restreint, cette non linéarité a pour effet une répartition sur toute l'étendue disponible en un temps fini. La non linéarité assure par ailleurs une interaction permanente entre toutes les échelles.

**2.1.3. Caractère diffusif.**

Parmi les caractéristiques les plus importantes de la turbulence, sa capacité de diffuser spatialement toutes les grandeurs attachées au fluide (quantité de mouvement, chaleur, masse ...). Cette propriété est particulièrement intéressante pour de nombreux procédés industriels (combustion, génie chimique...). Un point sur lequel il convient cependant d'insister est que la diffusivité turbulente, étant une caractéristique non pas du fluide mais de l'écoulement.

- ❖ Pour simplifier l'étude de la turbulence, deux hypothèses importantes sont introduites l'homogénéité et l'isotropie. [13]

## 2.2. Turbulence homogène.

La turbulence homogène veut dire que toutes les propriétés statistiques (moyennées) sont invariantes par translation. Par conséquent, toutes dérivée spatiale des quantités statistiques est nulle. De même qu'un écoulement turbulent stationnaire est invariant par translation temporelle.

## 2.3. Turbulence isotrope.

La turbulence isotrope veut dire que, toutes les propriétés statistiques d'ordre 2 ou plus sont invariantes par translation spatiale (homogénéité) et invariantes par rotation de repère et par toutes symétrie par rapport à un plan, par conséquent :

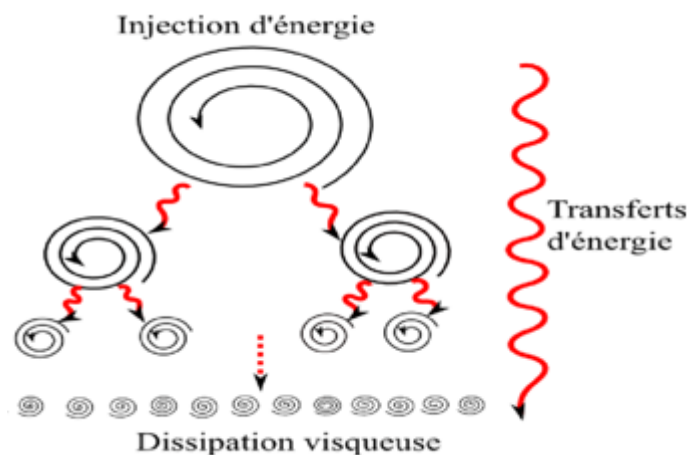
$$\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{u'v'} = \overline{u'w'} = \overline{v'w'} = 0$$

## 3. Cascade d'énergie de Richardson. [13,14]

Le concept de cascade d'énergie en turbulence a été introduit par le météorologiste britannique Lewis Fry Richardson (1881-1953). Ce concept stipule que la turbulence est composée de différentes tailles tourbillonnaires. Des tourbillons de taille  $\ell$  qui ont une vitesse caractéristique  $u_\ell$  et une durée de vie (temps caractéristique)  $\tau_\ell = \frac{\ell}{u_\ell}$ . Les tourbillons de plus grandes tailles sont caractérisés par une échelle de longueur  $L$  et une vitesse caractéristique  $U$ , le nombre de Reynolds associé à ces tourbillons,  $Re = \frac{UL}{\nu}$  est très grand, c'est-à-dire : les effets visqueux sont dominés par les effets inertiels ce qui rend ces tourbillons incapables de dissiper leurs énergie cinétique en chaleur.

Grâce à des interactions non linéaires, l'énergie cinétique des plus grosses structures tourbillonnaires est transférée vers les moins grosses. Le phénomène se répètent en cascade jusqu'au plus petites structures dissipatives de Kolmogorov. Ces dernières dissipent l'énergie reçue de façon irréversible en énergie interne de chaleur.

Le processus de cascade d'énergie peut être illustré dans la figure ci-dessous :



*Figure 1.IV.* cascade d'énergie en turbulence.

#### 4. Aperçu sur la théorie de Kolmogorov. [15, 16, 17]

Le mathématicien russe Andreï Kolmogorov (1903-1987) a publié en 1941 une série d'articles qui sont à la base de la compréhension actuelle de la turbulence.

La théorie de Kolmogorov se place dans un contexte de turbulence isotrope. Il est clair que tous les écoulements réels ne sont pas isotropes, au moins au niveau du forçage et des conditions aux limites. Cependant, une notion importante est que les échelles suffisamment petites devant la grande échelle caractéristique de l'écoulement  $L$ , deviennent statistiquement isotropes. En d'autre terme il existera toujours, pour de grands nombres de Reynolds, une échelle à partir de laquelle les mouvements sont isotropes et homogènes. On s'intéressera alors à des échelles  $\ell \ll L$  pour lesquelles les mouvements turbulents sont isotropes.

##### 4.1. Taux de dissipation d'énergie.

On note  $\varepsilon$  le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente dans le fluide (qui est égale aussi au taux d'injection d'énergie et au taux de cascade) ramené à l'unité de masse. La dimension de  $\varepsilon$  est :

$$[\varepsilon] = W/Kg = L^2T^{-3}$$

La turbulence que nous considérons est caractérisée par 3 paramètres : l'échelle de dissipation  $\ell$ , la vitesse caractéristique  $u_\ell$  et la viscosité du fluide  $\nu$ . Ces paramètres ont pour dimension :

$$[\ell] = L \quad ; \quad [u_\ell] = L T^{-1} \quad \text{et} \quad [\nu] = L^2T^{-1}$$

D'après la théorie de cascade d'énergie le taux de dissipation d'énergie est indépendant de la viscosité cinématique du fluide  $\nu$ . La seule combinaison de  $u_\ell$  et  $\ell$  ayant une bonne dimension est :  $\frac{u_\ell^3}{\ell}$ , on déduit alors :  $\varepsilon = \frac{u_\ell^3}{\ell}$

On peut aussi déduire le taux de dissipation pour l'échelle de Kolmogorov :

$$\varepsilon = \frac{u_\eta^3}{\eta} \tag{IV.1}$$

##### 4.2. Vitesse caractéristique des tourbillons.

La vitesse caractéristique  $u_\ell$  des tourbillons de taille  $\ell$  est obtenue en s'appuyant sur l'hypothèse de Kolmogorov qui stipule que pour les échelles de turbulence intermédiaire appartenant à la gamme d'échelles inertielles c'est-à-dire :  $\eta < \ell < L$ , la vitesse est indépendante de la viscosité et elle est en fonction uniquement de  $\varepsilon$  et de  $\ell$ .

L'analyse dimensionnelle donne :

$$u_\ell = (\varepsilon \ell)^{\frac{1}{3}} \tag{IV.2}$$

### 4.3. Echelle dissipative de Kolmogorov.

Le résultat de Kolmogorov concernant l'échelle dissipative de la turbulence, résulte de la première hypothèse de sa théorie qui stipule que pour un nombre de Reynolds suffisamment supérieur à un  $Re \gg 1$ , la statistique des mouvements turbulents est déterminée uniquement à partir de la viscosité cinématique du fluide  $\nu$  et du taux de dissipation d'énergie  $\varepsilon$ .

Nous pouvons alors calculer le nombre de Reynolds associé aux mouvements d'échelle  $\ell$  comme suit :

$$R_\ell = \frac{u_\ell \times \ell}{\nu} = \frac{\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{3}} \ell^{\frac{4}{3}}}}{\nu} \quad (\text{IV.3})$$

La dissipation visqueuse va se produire aux échelles où les effets visqueux égalent aux effets inertiels c'est-à-dire pour un nombre de Reynolds  $R_\eta = 1$  :

$$R_\eta = \frac{\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{3}} \eta^{\frac{4}{3}}}}{\nu} = 1 \quad (\text{IV.4})$$

On en déduit alors l'échelle dissipative de Kolmogorov  $\eta$ :

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (\text{IV.5})$$

Ainsi la vitesse caractéristique  $u_\eta$  :

$$u_\eta = (\nu \cdot \varepsilon)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{IV.6})$$

Et le temps caractéristique  $\tau_\eta$  :

$$\tau_\eta = \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \quad (\text{IV.7})$$

## 5. Modélisation de la turbulence.

### 5.1. Rôle d'un modèle de turbulence.

Le tenseur des contraintes de Reynolds issu lors du passage à la moyenne, introduit six inconnues supplémentaires, ce qui a engendré un problème de fermeture. Le rôle d'un modèle de turbulence sera donc de fournir des lois phénoménologiques (algébriques ou différentielles) pour fermer le problème.

### 5.2. Choix du modèle de turbulence.

La fiabilité des résultats de la simulation numérique des écoulements turbulents, est très dépendante au modèle utilisé. Le choix du modèle sera donc subordonné au type d'information que l'on veut obtenir à partir de la simulation. D'un point de vue industriel, les modèles du premier ordre à deux équations permettent généralement d'obtenir des résultats satisfaisant moyennant certaines adaptations du modèle suivant le cas considéré. Cependant des comportements pathologiques peuvent apparaître dans certains types

d'écoulement. L'utilisation de modèles plus sophistiqués comme les modèles au second ordre peut s'avérer nécessaire. On a résumé sur le tableau suivant, le type d'information que l'on peut obtenir suivant le modèle employé.

Modèle choisi	Type d'information obtenue
<p><b>Modèle 1<sup>er</sup> ordre avec 1 équation</b> Equations de Reynolds + hypothèses semi-empiriques</p>	<p>Champs moyens cas simples + Vitesse et Pression caractéristiques globales</p>
<p><b>Modèle 1<sup>er</sup> ordre avec 2 équations</b> Equations de Reynolds + 1 ou 2 équations de transport</p>	<p>Champs moyens cas plus complexes + grandeurs turbulentes caractéristiques (Vitesse et Pression caractéristiques globales, Energie cinétique turbulente, Dissipation turbulente).</p>
<p><b>Modèle 2<sup>ème</sup> ordre</b> Equations de Reynolds + équations des tensions de Reynolds + modèles de fermetures 2<sup>ème</sup> ordre</p>	<p>Champs moyens + champs fluctuants moyennés (moments)</p>

TAB.VI.1 – Résultats obtenus en fonction du modèle choisi.

**6. Classification des modèles de turbulence.**

Il existe des modèles de turbulence de différents niveaux. On peut classer les modèles les plus couramment utilisés (modèle en un point) en deux grandes catégories : les modèles de viscosité turbulente et les modèles de tensions de Reynolds.

**6.1. Modèles de viscosité turbulente.**

Ce sont des modèles basés sur l'hypothèse de Boussinesq, qui relie linéairement le tenseur des contraintes de Reynolds au tenseur des vitesses de déformation.

**6.1.2. Hypothèse de Boussinesq. [18]**

Par analogie à la loi de comportement reliant le tenseur des contraintes visqueuses au champ de vitesses, Boussinesq en 1877 a proposé de relier le tenseur de Reynolds au champ moyen comme suit :

$$R_{ij} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \tag{IV.8}$$

$\mu_t$  : viscosité dynamique turbulente.

La viscosité turbulente  $\mu_t$  est une grandeur scalaire qui dépend à priori de l'orientation  $\vec{x}$  et de du temps  $t$ . L'hypothèse  $\mu_t = \text{cte}$  n'est en général pas correcte, les transferts turbulents se font sur de multiples échelles et ne sont pas locaux.

L'objet de la modélisation de la turbulence dans le cadre de l'hypothèse de Boussinesq est d'obtenir une relation entre  $\mu_t(\vec{x}, t)$  et les autres inconnues du problème afin de fermer le système d'équations à résoudre.

### 6.1.3. Modèles du premier ordre.

Ces modèles limitent les études aux valeurs moyennes des fonctions de l'écoulement. On distingue les modèles :

#### 6.1.3.1. Modèle à zéro équation. [19]

C'est Prandtl en 1925 qui a proposé une relation reliant directement la viscosité turbulente au gradient de vitesse moyenne en introduisant une longueur  $l_m$  appelée longueur de mélange, pour des écoulements de type couche limite :

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (\text{IV.9})$$

Cette relation traduit un état d'équilibre entre le champ moyen et le champ fluctuant. La longueur de mélange  $l_m$  dépend en général des coordonnées et caractérise l'échelle de la turbulence en un point donné.

D'autres modèles ont également été développés notamment par Cebeci & Smith (1970), Albert (1971) ou plus récemment par Baldwin & Lomax (1978). L'avantage de ce type de modèle est avant tout sa simplicité de mise en œuvre. Mais les inconvénients sont multiples : manque d'universalité car son utilisation nécessite une certaine connaissance préalable de l'écoulement à étudier, trop empirique et manque d'effet d'histoire de la turbulence.

#### 6.1.3.2. Modèles à une équation.

Plusieurs modèles ont été développés. Ils résolvent les équations différentielles de transport des quantités turbulentes. Le plus simple consiste à ne résoudre qu'une seule équation de transport pour une échelle de vitesse caractéristique de la turbulence. L'échelle des vitesses le mieux adapté est  $k^{\frac{1}{2}}$  avec :

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u_j' u_l'}) : \text{Énergie cinétique turbulente.}$$

La viscosité cinématique turbulente  $\nu_t$  est donnée par analyse dimensionnelle (relation de Kolmogorov-Prandtl) comme suit :

$$\nu_t = C_{\mu l} k^{\frac{1}{2}} l \tag{IV.10}$$

$l$  : Échelle de longueur.

$C_{\mu l}$  : Constante.

L'échelle de longueur est donnée algébriquement : elle dépend donc de l'écoulement. Il est difficile de déterminer de façon empirique cette échelle pour des écoulements complexes avec décollement, effet de courbure ou rotation du repère.

Ces modèles ont pour avantages d'être assez simple et de prendre un peu en compte l'histoire de la turbulence mais le choix de l'échelle de longueur est empirique et l'extension au cas tridimensionnel est difficile ce qui les rendent peu employés.

### 6.1.3.3. Modèles à deux équations ( $k$ - $\Phi$ ).

Les modèles à deux équations consistent à résoudre deux équations de transport : une toujours basée sur une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente  $k$  et une autre pour la grandeur  $\Phi$ . On évalue ensuite la valeur de la viscosité dynamique turbulente  $\mu_t$  à partir de deux paramètres représentatifs du phénomène. Ils sont les modèles les plus répandus dans les codes RANS. Parmi ces modèles on cite :

#### a) Le modèle $k$ - $\epsilon$ . [19]

Le but recherché dans ce modèle est d'écrire une équation de transport pour le taux de dissipation d'énergie  $\epsilon$ . Le taux de dissipation d'énergie est relié par analyse dimensionnelle à l'échelle des vitesses  $u$  et à l'échelle de longueur  $l$  comme suit :

$$\epsilon \approx \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l} \tag{IV.11}$$

En procédant aussi par analyse dimensionnelle, une relation pour la viscosité turbulente est écrite :

$$\nu_t = C_{\mu} \frac{k^2}{\epsilon} \tag{IV.12}$$

Où  $C_{\mu}$  est une constante déterminée expérimentalement, elle est égale à 0,09.

#### ❖ Equation de transport pour $k$ .

L'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente est obtenue en multipliant l'équation de quantité de mouvement instantanée par les fluctuations de vitesse. En faisant la moyenne au sens de Reynolds on obtient :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \overbrace{-u_i u_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}^{\text{à modéliser}} - \overbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_i \bar{u}_j \bar{u}_j}{\partial x_j}}^{\text{à modéliser}} - \overbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{u}_j p'}{\partial x_j}}^{\text{à modéliser}} + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} - \epsilon \tag{IV.13}$$

La modélisation des termes mentionnés est nécessaire pour fermer les équations. La modélisation du premier terme s'obtient en utilisant directement l'hypothèse de Boussinesq en retranchant la trace du tenseur.

$$-\overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \left[ v_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (\text{IV.14})$$

Le deuxième terme peut être reformulé comme suit :

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{w_i w_i w_j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{k' w_j}}{\partial x_j} \quad \text{Avec } k' \neq \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$$

Dans cette notation, on a :  $k' \neq k$  ,  $k = \bar{k}' \neq 0$

On relie  $k'$  à sa valeur moyenne  $k$  en exprimant le terme de diffusion par un terme proportionnelle au gradient :

$$-\overline{k' w_j} = \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (\text{IV.15})$$

Enfin on constate que les effets du troisième terme sont similaires à ceux de deuxième ce qui incite à modéliser globalement leurs effets en posant :

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} + \frac{1}{\rho} \overline{u_j p} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (\text{IV.16})$$

Finalement l'équation de transport pour  $k$  s'écrit :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = v_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + v \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} - \varepsilon \quad (\text{IV.17})$$

$\sigma_k$  : Constante.

### ❖ Equation de transport pour $\varepsilon$ .

L'équation pour  $\varepsilon$  s'obtient en prenant le rotationnel des équations des fluctuations de vitesse, ensuite en faisant la moyenne d'ensemble, puis en applique la dérivée. Le résultat obtenu est comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = & \overbrace{-2v \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial w_i \partial w_j}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial w_k \partial w_i}{\partial x_j \partial x_i} \right)}^{\text{à modéliser}} - \overbrace{2v \cdot u_k \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k}}^{\text{à modéliser}} - \overbrace{2v \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \frac{\partial w_k}{\partial x_j}}^{\text{à modéliser}} - \\ & \underbrace{\frac{\partial \overline{w_k \varepsilon'}}{\partial x_k}}_{\text{à modéliser}} - \underbrace{2 \frac{v}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p' \partial w_i}{\partial x_j \partial x_j} \right)}_{\text{à modéliser}} + v \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k} - \underbrace{2v^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j \partial x_k}}_{\text{à modéliser}} \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

Où  $\varepsilon'$  est la fluctuation (non-centrée) de dissipation avec :

$$\varepsilon' = v \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \quad (\text{IV.19})$$

En procédant de la même façon que pour l'énergie cinétique turbulente  $k$ , on peut obtenir une équation exacte pour  $\varepsilon$  qui s'écrit :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} v_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (\text{IV.20})$$

Avec :  $C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, \sigma_\varepsilon$  sont des constantes.

**Remarque** : les constantes  $C_\mu, \sigma_k, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$  et  $\sigma_\varepsilon$  sont empiriques et déduites à partir de résultats expérimentaux obtenus dans des cas très simple d'écoulement turbulent.

$C_\mu$	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$
0.09	1.44	1.92	1	1.3

TAB.VI.2 - Coefficients du modèle  $k$ - $\varepsilon$ .

**b) Modèle RANG  $k$ - $\varepsilon$ . [11].**

Le modèle RANG  $k$ - $\varepsilon$  est une amélioration du modèle  $k$ - $\varepsilon$  standard, développé par des groupes de normalisation. Dans ce modèle les constantes sont évaluées par des calculs théoriques et non empiriquement, ce qui rend ce modèle plus performant dans l'étude des écoulements qui connaissent des zones où le taux de déformation de l'écoulement est élevé. Les calculs analytiques obtenus par cette approche donnent le modèle suivant de l'équation de transport pour  $\varepsilon$ .

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} C_\mu k \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} - R_\varepsilon \quad (\text{IV.21})$$

Le nouveau terme  $R_\varepsilon$  apparaissant dans l'équation de  $\varepsilon$  s'exprime par :

$$R_\varepsilon = \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta / \eta_0) \varepsilon^2}{(1 + \beta \eta^3) k} \quad (\text{IV.22})$$

$$\text{Avec : } \eta = S \frac{k}{\varepsilon} \text{ et } S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}$$

**Remarque** :  $\eta$  représente ici le taux de déformation de l'écoulement moyen pas l'échelle dissipative de Kolmogorov.

$S_{ij}$  : étant le tenseur des déformations moyennes. L'équation de transport pour  $\varepsilon$  peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} C_\mu k \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2}^* \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{IV.23})$$

$$\text{Avec : } C_{\varepsilon 2}^* = C_{\varepsilon 2} + \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta / \eta_0) \varepsilon^2}{(1 + \beta \eta^3) k} \quad (\text{IV.24})$$

Les coefficients du modèle sont donnés dans le tableau suivant :

$C_\mu$	$\sigma_K$	$\sigma_\varepsilon$	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$\eta_0$	$\beta$
0.085	0.719	0.719	1.420	1.680	4.380	0.012

TAB.VI.3 - coefficients du modèle RANG  $k-\varepsilon$

c) **Le modèle  $k-\omega$ .** [13]

Kolmogorov a introduit le premier en 1942 un modèle à deux équations, l'une toujours basée sur une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente  $k$ , la seconde basée sur une équation de transport pour une fréquence caractéristique de la turbulence ( c'est à dire l'inverse d'une échelle de temps) notée  $\omega$  , plus précisément l'inverse de  $\omega$  représente l'échelle de temps caractéristique de la dissipation de l'énergie cinétique  $k$ . On peut aussi voir  $\omega$  comme le rapport  $\frac{\varepsilon}{k}$  . Depuis de nombreuses améliorations de ce modèle ont conduit aux deux équations de transport suivantes :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} [(v + \sigma^* v_t) \frac{\partial k}{\partial x_j}] + v_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* k \omega \tag{IV.25}$$

Dans ce modèle la viscosité cinématique turbulente est exprimée en fonction de  $k$  et  $\omega$  par la relation suivante :

$$v_t = \frac{k}{\omega} \tag{IV.26}$$

On retrouve dans cette équation une forme analogue à l'équation de transport de  $k$  dans le modèle  $k-\varepsilon$ , avec au second membre un terme de diffusion moléculaire et turbulente suivi d'un terme de production et enfin d'un terme de dissipation de, il reste cependant deux nouvelles constantes à déterminer :  $\sigma^*$  et  $\beta^*$ . L'équation pour  $\omega$  est donnée par :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} [(v + \sigma v_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j}] + \alpha \frac{\omega}{k} v_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta \omega^2 \tag{IV.27}$$

Les différents coefficients et constantes apparaissant dans ce modèle sont les suivant :

$$\alpha = \frac{13}{25} ; \beta = \beta_0 f_\beta ; \beta^* = \beta_0^* f_{\beta^*} ; \sigma = \sigma^* = \frac{1}{2} ; \beta_0 = \frac{9}{125} ; \beta_0^* = \frac{9}{100}$$

$$f_\beta = \frac{1 + 70 \mathcal{X}_\omega}{1 + 80 \mathcal{X}_\omega} \qquad \mathcal{X}_\omega = \left| \frac{\Omega_{ij} \Omega_{ij} S_{ji}}{(\beta_0^* \omega)^3} \right|$$

$$f_{\beta^*} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{X}_k \geq 0 \\ \frac{1 + 680 \mathcal{X}_k^2}{1 + 400 \mathcal{X}_k^2} & \text{si } \mathcal{X}_k \leq 0 \end{cases} \qquad \mathcal{X}_k = \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$$

$$\text{Avec : } \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{et} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

### 6.2. Modèles au second ordre-RSM. [20]

Les modèles RSM (Reynolds Stress Model) reposent sur la résolution des équations de transport des tensions de Reynolds. Ces équations de transport sont obtenues en soustrayant de l'équation de  $u'_i u'_j$  l'équation de  $\bar{u}_i \bar{u}_j$ , puis en applique la moyenne de Reynolds au résultat. L'équation s'écrit alors sous forme compacte :

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = P_{ij} + D_{ij} - \varepsilon_{ij} + \Pi_{ij} + \Omega_{ij} \quad (\text{IV.28})$$

Les équations exactes de transport pour chaque composante du de Reynolds peuvent être écrites :

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\rho \overline{u'_i u'_j})}_{\text{Inertie}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{u}_i \overline{u'_i u'_j})}_{\text{Convection}} = & - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} [\rho \overline{u_i u_j u_i} + p (\delta_{jl} u_i + \delta_{il} u_j)]}_{\text{Diffusion Turbulente}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu_t \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_i} \right)}_{\text{Diffusion Moléculaire}} \\ & - \underbrace{\rho \overline{u'_i u'_l} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} + \bar{u}_i \overline{u'_l} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l}}_{\text{Production}} - \underbrace{2\mu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l \partial x_l}}_{\text{Dissipation}} + \underbrace{p \left( \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_i} \right)}_{\text{Corrélation de Pression/Déformation}} \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

Avec :

$$\Phi_{ij} = -C_3 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) - C_4 (P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \Pi)$$

$$\text{Où : } \Pi = \frac{1}{2} P_{ii}$$

$C_3$  et  $C_4$  sont des constantes empiriques dont les valeurs sont :  $C_3 = 1,8$  et  $C_4 = 0,6$

Le terme de dissipation est approché par le taux de dissipation isotropique  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \quad (\text{IV.30})$$

Le terme de diffusion turbulente est modélisé de la même manière que les corrélations doubles pour les modèles de viscosité turbulente. Elles sont calculées en fonction du gradient des corrélations doubles :

$$J_{ij}^T = \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \right) \quad (\text{IV.31})$$

$$\text{Et : } \mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Où  $C_\mu$  est une constante déterminée expérimentalement, elle est égale à 0,09.

**7. Fermeture des équations à résoudre par le modèle  $k-\varepsilon$ .**

Dans le système d'équations de Reynolds les six inconnues sont  $(\bar{u}_i, p, k, \varepsilon)$  et les six équations disponibles sont les suivantes :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{IV.32}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (v + v_t) \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right) \tag{IV.33}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = v_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + v \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} - \varepsilon \tag{IV.34}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} v_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \tag{IV.35}$$

Avec :  $v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$

**8. Conclusion.**

Les différences entre les modèles de turbulence résident dans leurs capacités à reproduire fidèlement le comportement des écoulements turbulents sur différentes configurations, dans les difficultés liées à leur implémentation et leur résolution dans des codes de calcul. Aucun modèle n'est satisfaisant pour tout type de configuration. Le choix du modèle de turbulence se fait donc en fonction des applications visées, ainsi que de la capacité des méthodes numériques à le supporter.

### 1. Introduction.

Dans cette partie de notre travail, nous avons fait en premier lieu une simulation numérique d'un écoulement uniforme, permanent d'un fluide visqueux qui est l'air, sur une plaque plane, lisse, d'incidence nulle et d'une épaisseur négligeable devant les autres dimensions pour les deux régimes d'écoulement laminaire et turbulent. Puis en deuxième lieu nous avons effectué une comparaison entre le profil de vitesses longitudinales donné par la simulation numérique et celui donné par la solution de Blasius pour le cas d'une couche limite laminaire et le profil des vitesses turbulentes donné par les lois universelles pour les écoulements pariétaux pour le cas turbulent.

### 2. Logiciels utilisés.

Au cours de nos travaux de modélisation et de simulation nous avons utilisé deux logiciels commerciaux : GAMBIT (générateur de géométrie et de maillage) et FLUENT (solveur et post traitement).

#### 2.1. Logiciel GAMBIT.

GAMBIT donne à l'utilisateur la possibilité de construire la géométrie du domaine de calcul, comme il effectue un maillage de ce dernier en le subdivisant en petits volumes de contrôle, ainsi il permet de définir les conditions aux limites associées aux frontières du domaine de calcul.

#### 2.2. Logiciel FLUENT.

Fluent est un code de calcul qui permet de simuler les écoulements des fluides avec ou sans transferts thermiques dans des géométries simples ou complexes. Il utilise une méthode de discrétisation des équations différentielles initiales de type volumes finis. Sur chaque volume élémentaire obtenu après maillage, les équations de conservation sont appliquées sous leur forme intégrale. Les variables inconnues du système d'équations (pression, vitesse, etc...) sont définies au centre de chaque cellule (volume élémentaire).

FLUENT offre une grande variété de possibilités pour la modélisation en mécanique des fluides qu'il s'agisse d'une simulation, 2D ou 3D, interne ou externe, stationnaire ou instationnaire, compressible ou incompressible. En ce qui concerne notre simulation nous avons utilisés le modèle de turbulence semi-empirique  $k-\varepsilon$ , pour traiter les équations de conservation de la masse et les équations de Reynolds.

### 3. Problème à modéliser.

Le problème à modéliser s'agit d'un écoulement le long d'une plaque plane, mince, d'une longueur finie :  $L = 0.5m$ , d'une épaisseur négligeable devant les autres dimensions, placée parallèlement à un courant d'air dont la vitesse est constante et égale à  $U$  loin de la plaque. et dont les propriétés physiques sont les suivantes :

$$\rho = 1.225 \text{ Kg } m^3$$

$$\nu = 1.789 \cdot 10^{-5} m^2 s$$

Pour le cas d'un écoulement sur une plaque plane on a  $5.10^5 < Re_{cr} < 3.10^6$ , dans notre écoulement on admette que la viscosité dynamique est constante et l'air est assimilé à un fluide incompressible, alors le nombre de Reynolds qui détermine le régime d'écoulement est en fonction uniquement de la vitesse  $U$ .

- Pour que le régime d'écoulement soit laminaire la vitesse  $U$  est fixée à  $0.5 \text{ m s}$ .
- Pour que le régime d'écoulement soit turbulent la vitesse  $U$  est fixée à  $150 \text{ m s}$ .

### 3.1. Géométrie du problème.

La géométrie du domaine de calcul qui correspond au problème cité ci-dessus s'agit d'un rectangle d'une longueur  $L=2 \times \text{la longueur de la plaque}$  suivant  $X$  et nous donnons pour la largeur  $l$  suivant  $Y$  une distance de  $10 \text{ cm}$  que nous estimons qu'elle nous permettra de visualiser les profils de vitesses suivant  $Y$  et elle contiendra tous les phénomènes liés à la couche limite notamment son épaisseur.

### 4. Création et maillage de la géométrie sur gambit.

Les étapes que nous avons suivies pour la création du domaine de calcul sont les suivantes :

#### 4.1. Création des points.

On positionne les points avec leurs coordonnées pour définir les frontières et les dimensions de la géométrie.

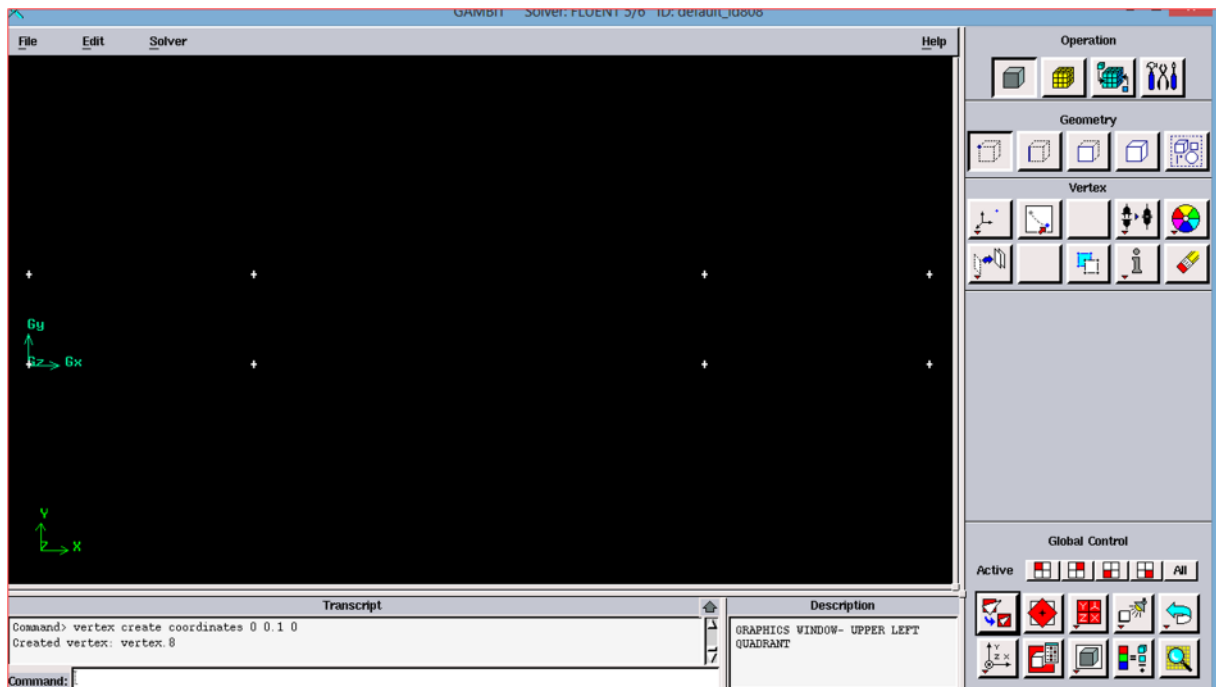


Figure V.1. Créations des points.

4.2. Création de la face.

Après que nous avons relié les points nous créons les faces.

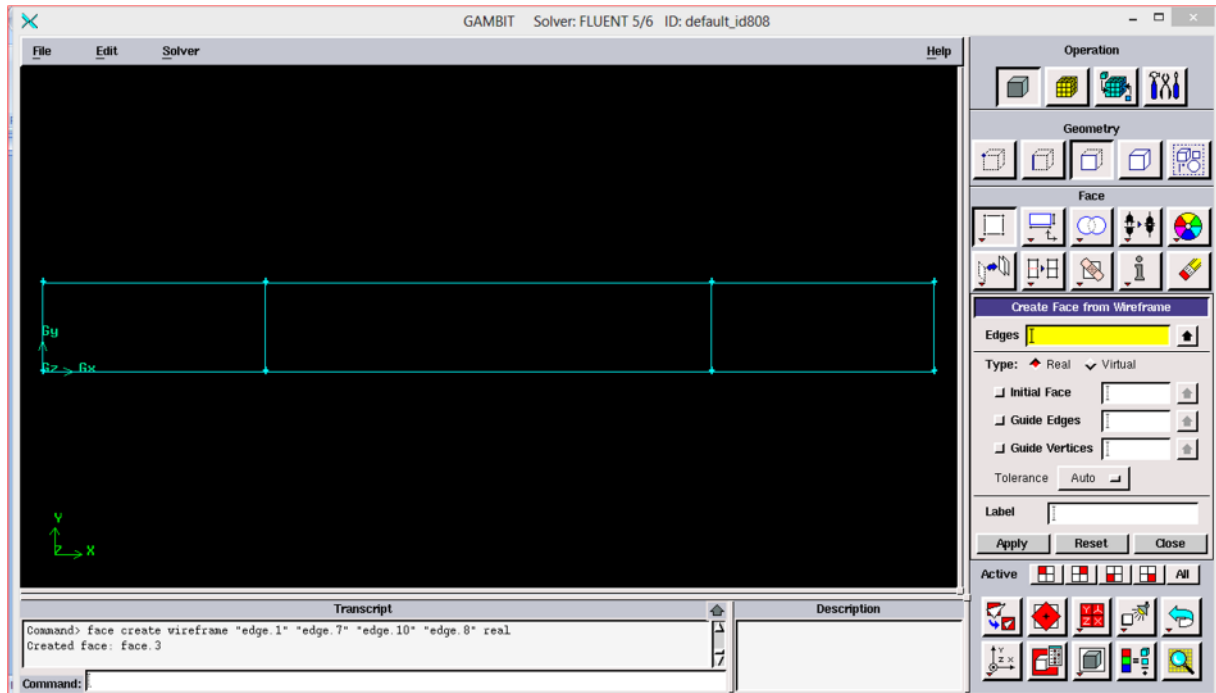


Figure V.2. Créations des faces.

4.3. Maillage des lignes.

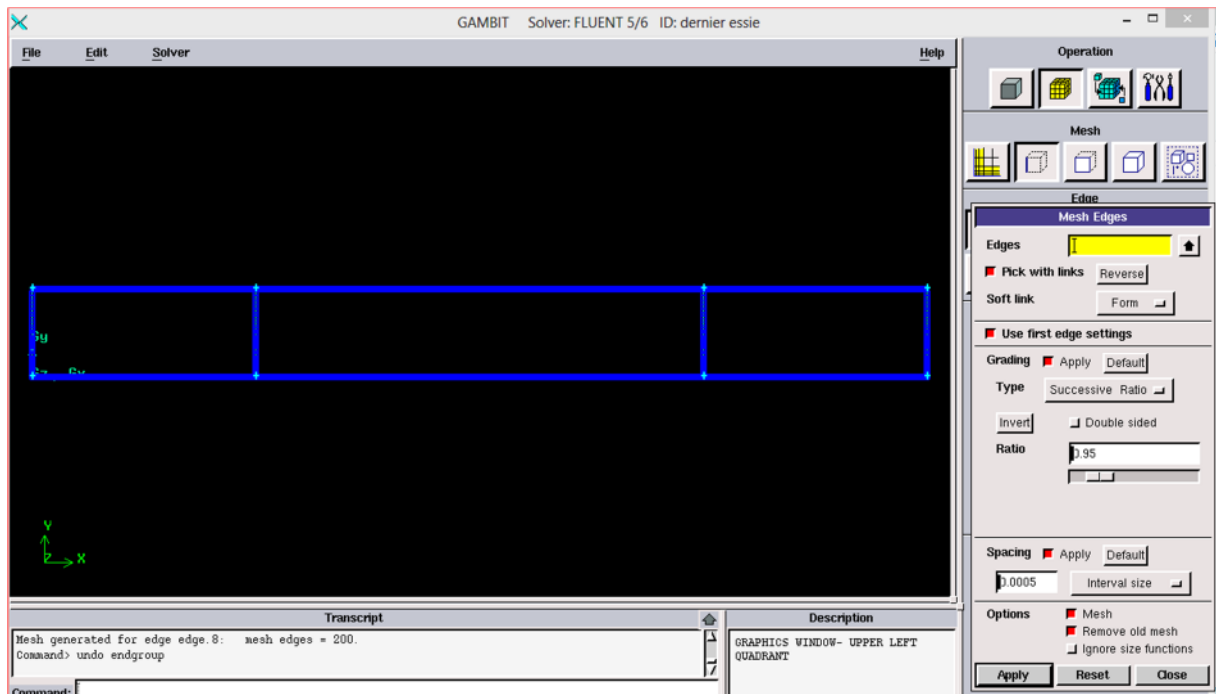


Figure V.3. Maillage des lignes.

#### 4.4. Maillage des faces.

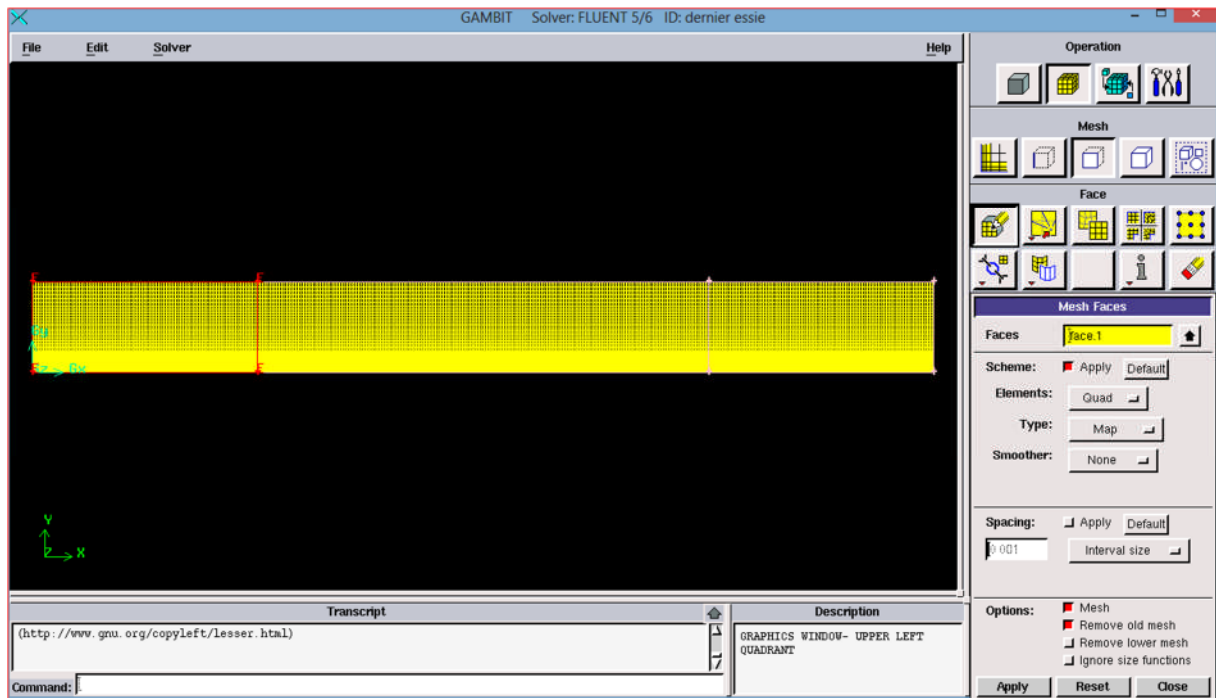


Figure V.4. Maillage des faces.

#### 4.5. Maillage utilisés.

Nous avons adopté un maillage structuré (cellules quadratiques) car la géométrie de notre domaine de calcul est très simple ne nécessitant pas un maillage non structuré. En ce qui concerne les pas de discrétisation nous avons utilisé un pas homogène de  $0.001 \text{ cm}$  suivant  $X$ , tandis que suivant la direction  $Y$ , nous avons utilisé un pas raffiné de telle sorte qu'il vérifie la valeur de l'unité de paroi  $y_+$  dans la cellule adjacente à la paroi pour bien modéliser la région de proche-paroi affectée par la viscosité afin d'avoir une meilleure résolution de la sous-couche visqueuse de la zone logarithmique.

#### 4.6. Conditions aux limites.

Après que nous avons maillé le domaine de calcul, nous définissons les conditions aux limites associées aux frontières du domaine. Les conditions aux limites imposées sont les suivantes :

**Velocity inlet** : imposée à l'entrée du domaine car notre écoulement est incompressible et la vitesse à l'entrée est une donnée du problème.

**Pressure Outlet** : imposée à la sortie du domaine aussi dans la partie supérieur de ce dernier car le gradient de pression est nul dans notre écoulement.

**Wall** : la plaque est une paroi solide.

**Symmetry** : imposée à la frontière supérieur du domaine car l'écoulement est symétrique.

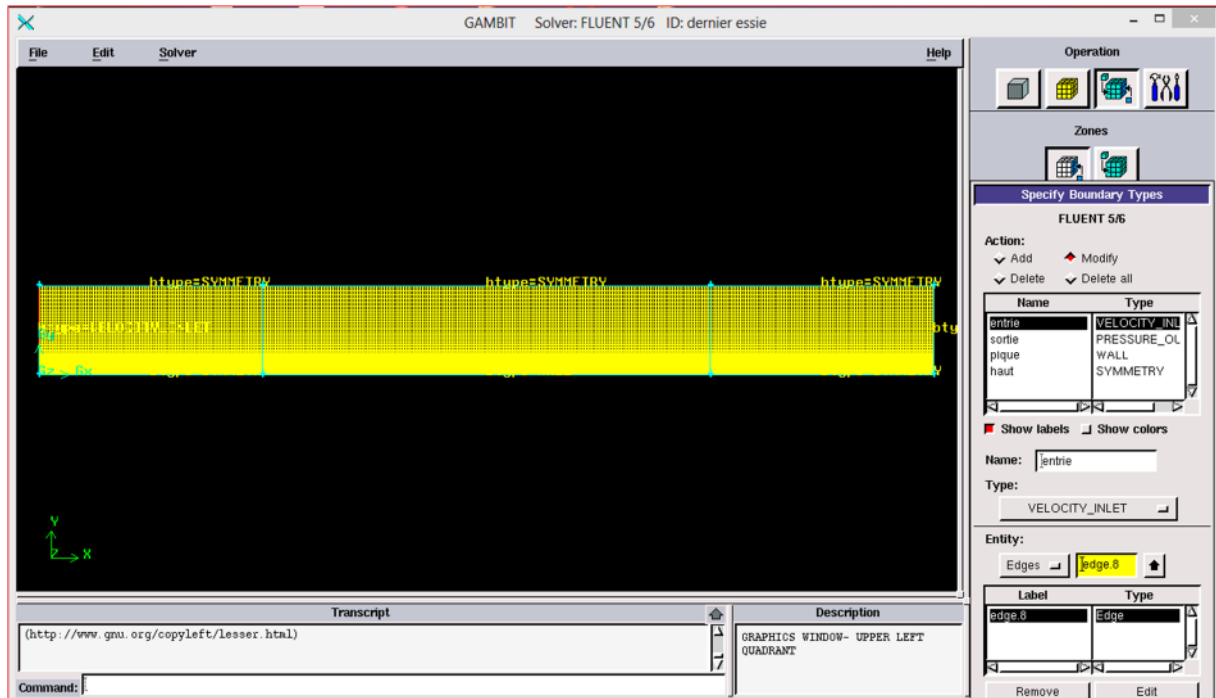


Figure V.5. Imposition des conditions aux limites.

#### 4.7. Enregistrement et exportation du fichier maillé.

Après que nous avons créé et maillé le domaine de calcul sur Gambit, nous le exportons en fichier msh (format lisible par fluent) et nous lui attribuons un nom pour l'enregistrement.

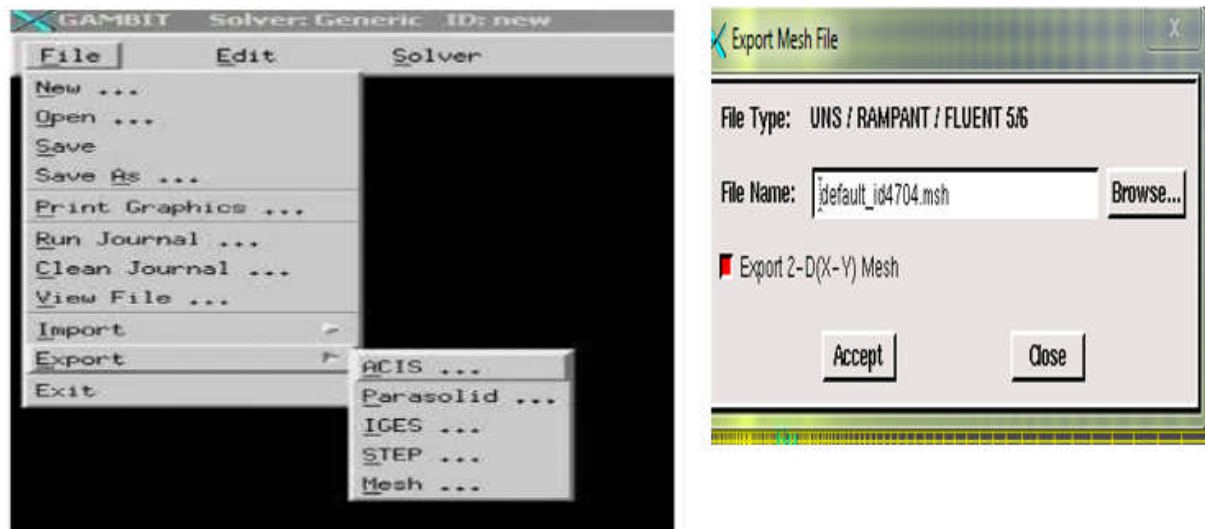


Figure V.6. Enregistrement et exportation du fichier créé sous Gambit.

5. Étapes de la simulation sous Fluent.

5.1. Importation de la géométrie.

Avant de commencer la simulation sur fluent. Il faut d'abord importer la géométrie générée, par Gambit sous format «msh».

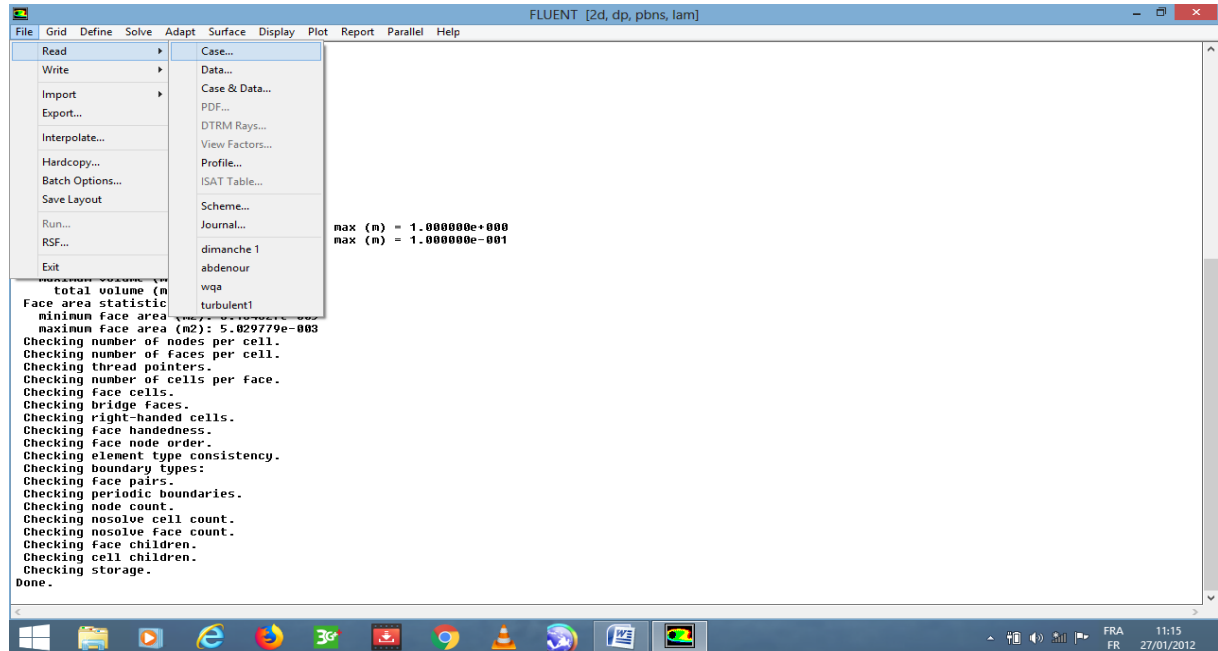


Figure V.7. Importation de la géométrie.

5.2. Vérification du maillage.

Après l'importation de la géométrie, on doit vérifier le maillage de cette dernière s'il ne contient pas d'erreurs.

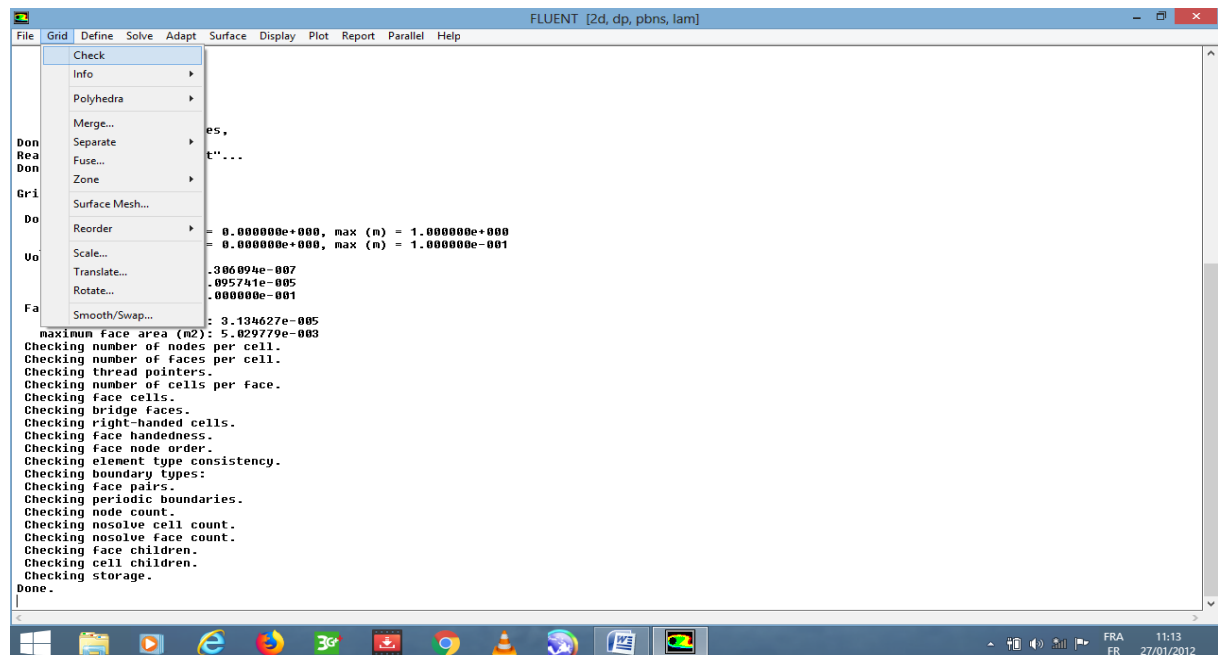


Figure V.8. Vérification du maillage sous Fluent.

5.3. Lissage du maillage.

Le maillage du domaine de calcul doit être suffisamment lisse pour une assurer une bonne qualité du maillage.

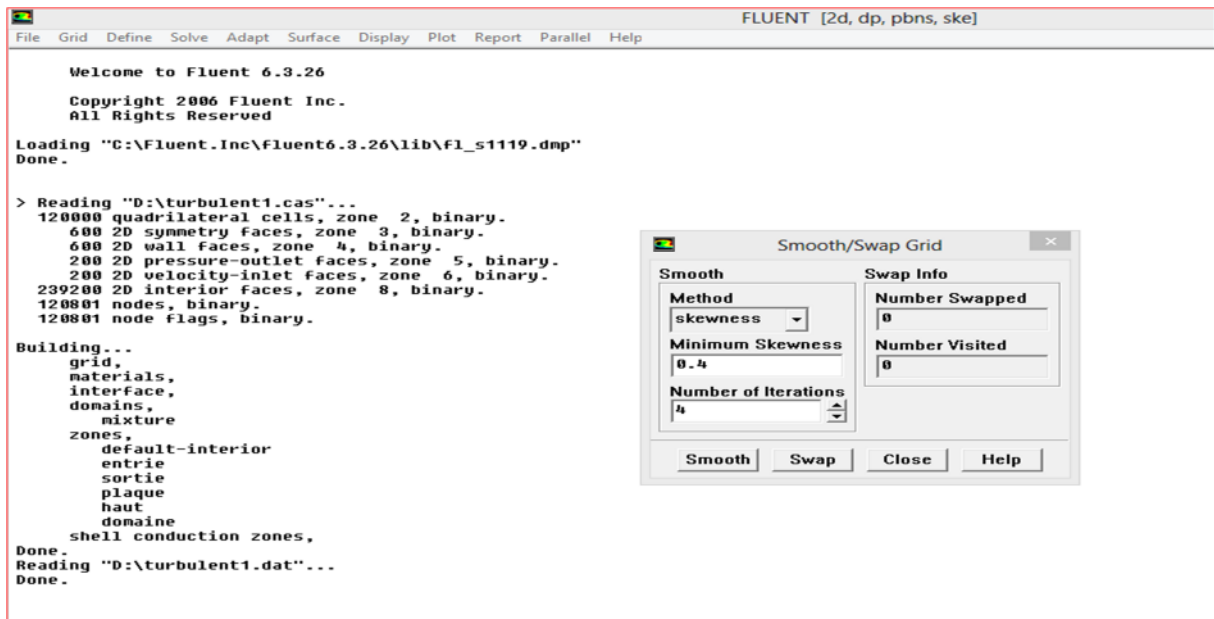


Figure V.9. Lissage du maillage.

5.4. Vérification des dimensions et des unités.

Il faut s'assurer que les dimensions et les unités du domaine de calcul sont conformes à celles appliquées dans le maillage.

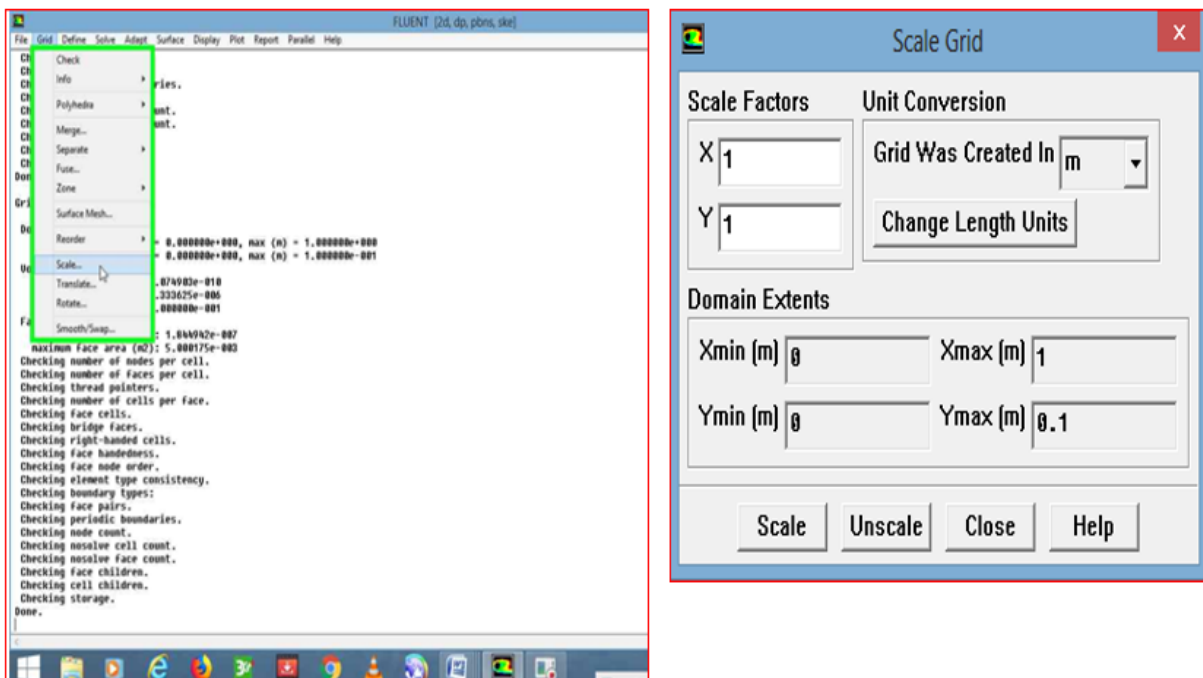


Figure V.10. Vérification des dimensions et des unités.

5.5. Choix du solveur et du type d'écoulement.

Dans cette étape nous précisons les caractéristiques de notre écoulement.

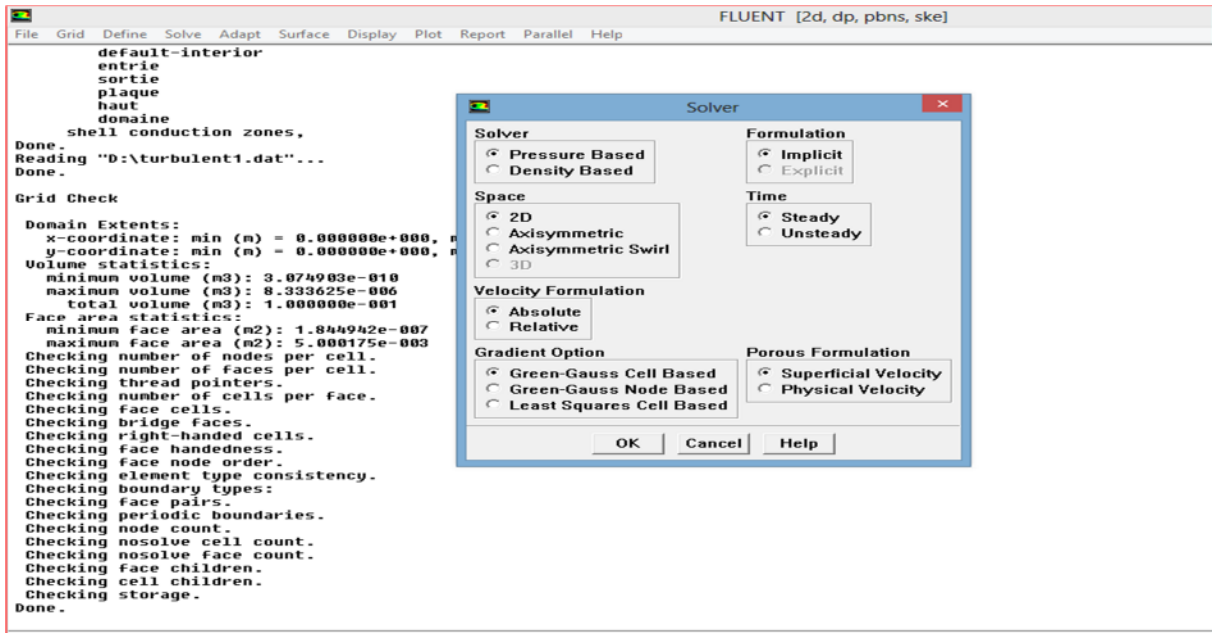


Figure V.11. Choix du solveur et du type d'écoulement.

5.6. Choix du régime d'écoulement.

a) Cas laminaire.

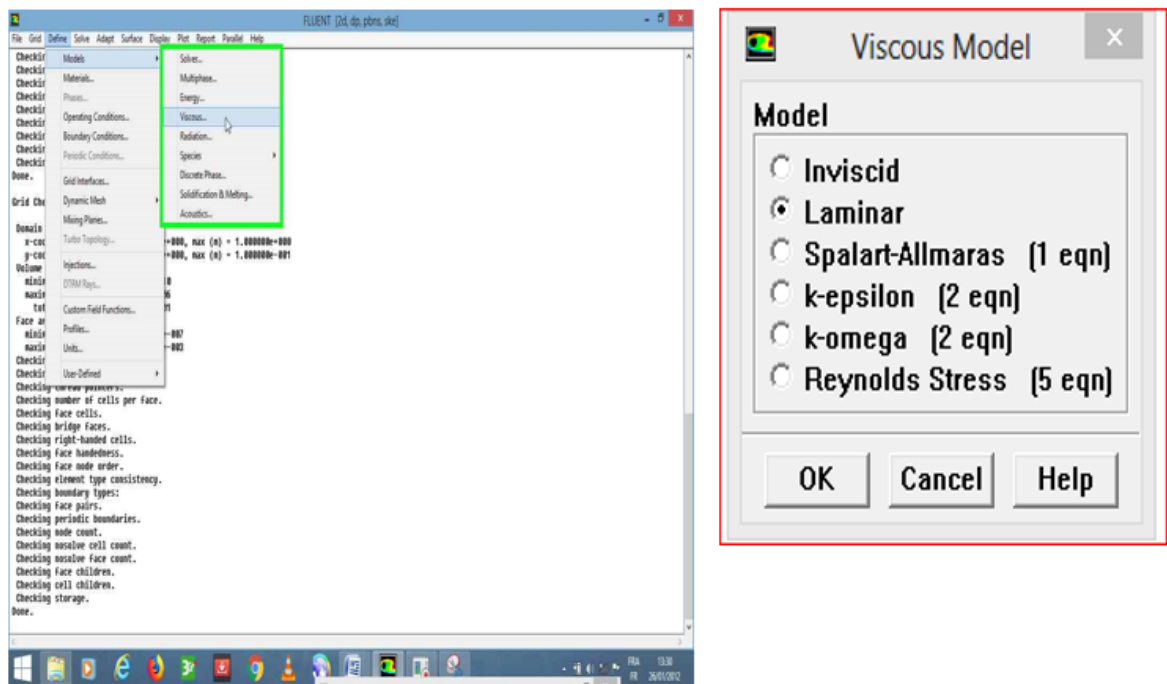


Figure V.12. Choix du régime laminaire.

b) Cas turbulent modèle  $k-\epsilon$ .

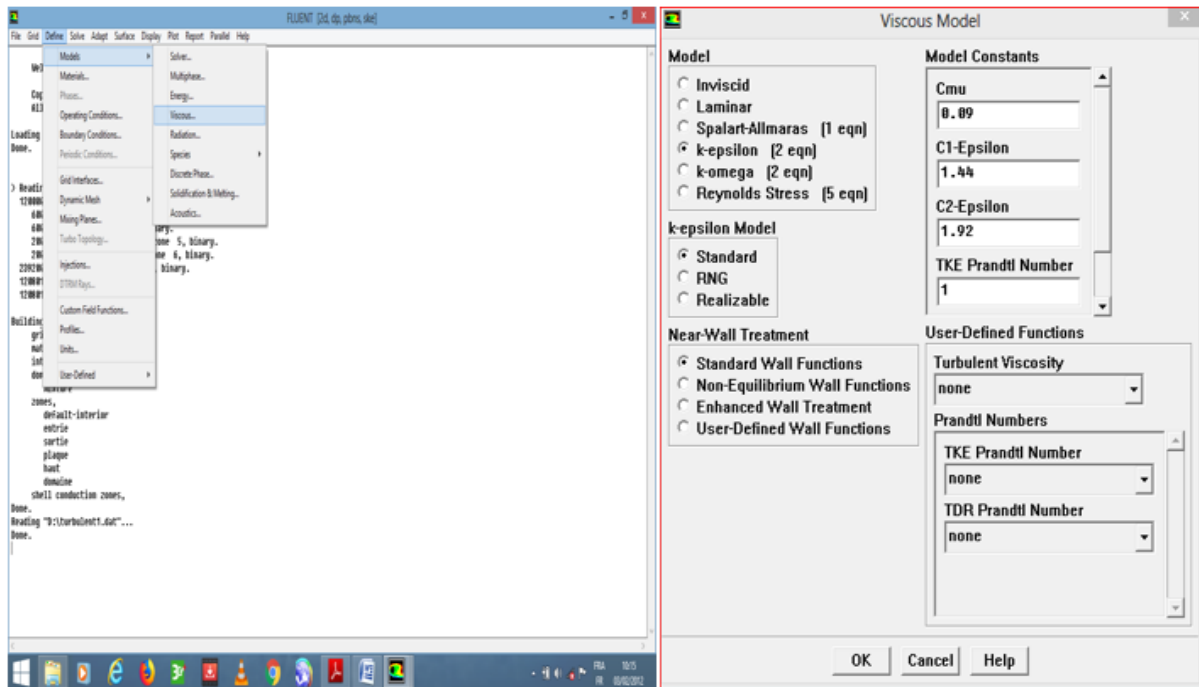


Figure V.13. Choix du régime turbulent.

5.7. Définition du fluide.

On choisit l'air comme fluide d'écoulement.

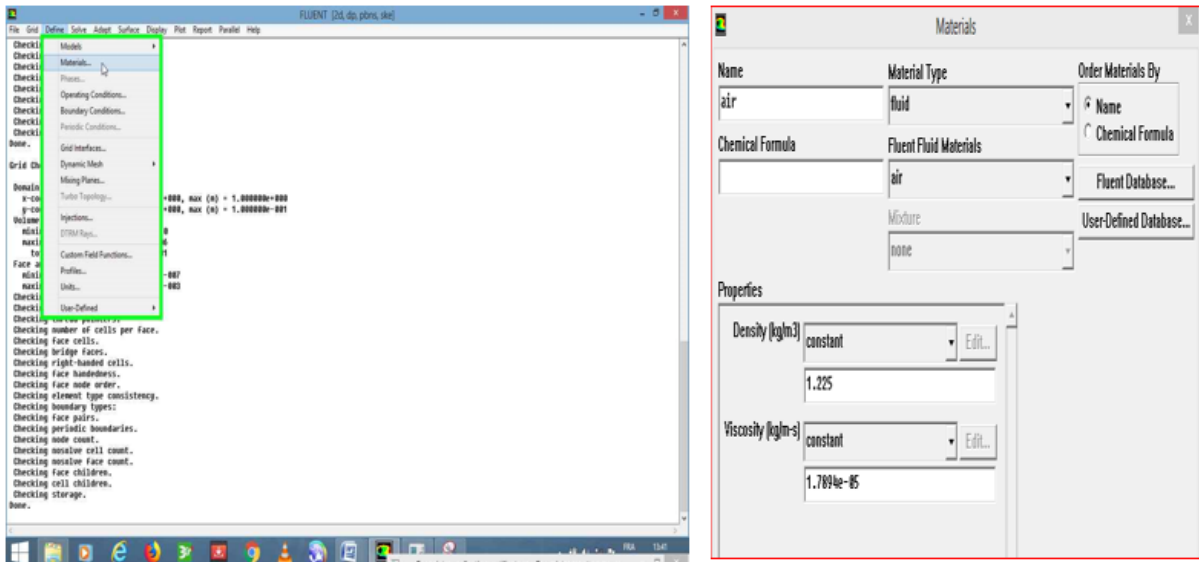


Figure V.14. Choix du fluide d'écoulement.

5.8. Application des Conditions aux limites.

Dans cette étape nous introduisons les valeurs des conditions aux limites.

a) Cas laminaire : pour le cas laminaire la vitesse d'entrée est fixée à  $U = 0.5 \text{ m/s}$ .

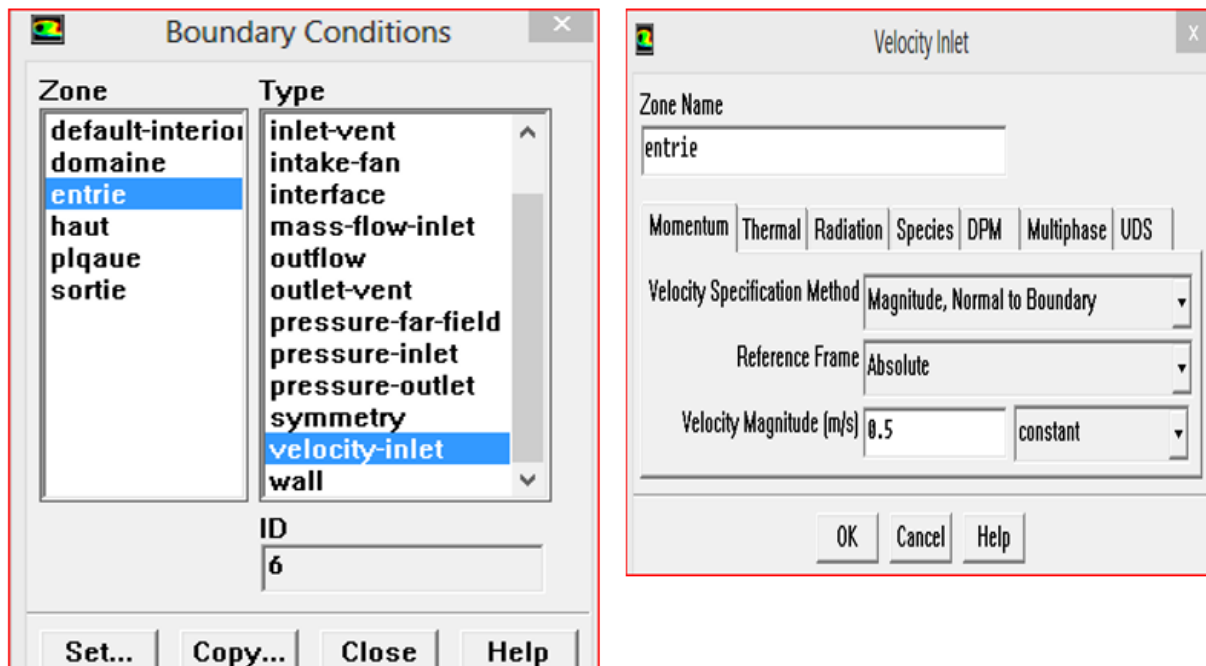


Figure V.15. Conditions aux limites du cas laminaire (vitesse d'entrée).

b) Cas turbulent : pour le cas turbulent la vitesse d'entrée est fixée à  $U = 150 \text{ m/s}$ .

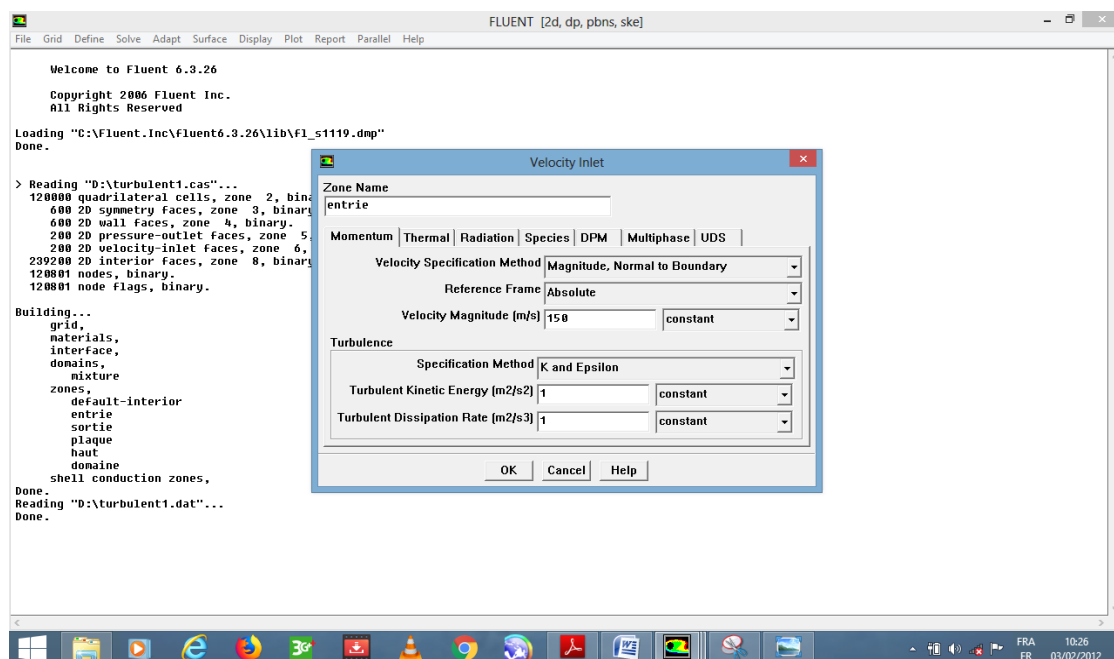


Figure V.16. Conditions aux limites du cas turbulent (vitesse d'entrée).

### 5.9. Choix d'ordre des équations et d'algorithme de calcul.

Dans cette étape nous précisons l'ordre de degré des équations à résoudre, ainsi que l'algorithme de calcul.

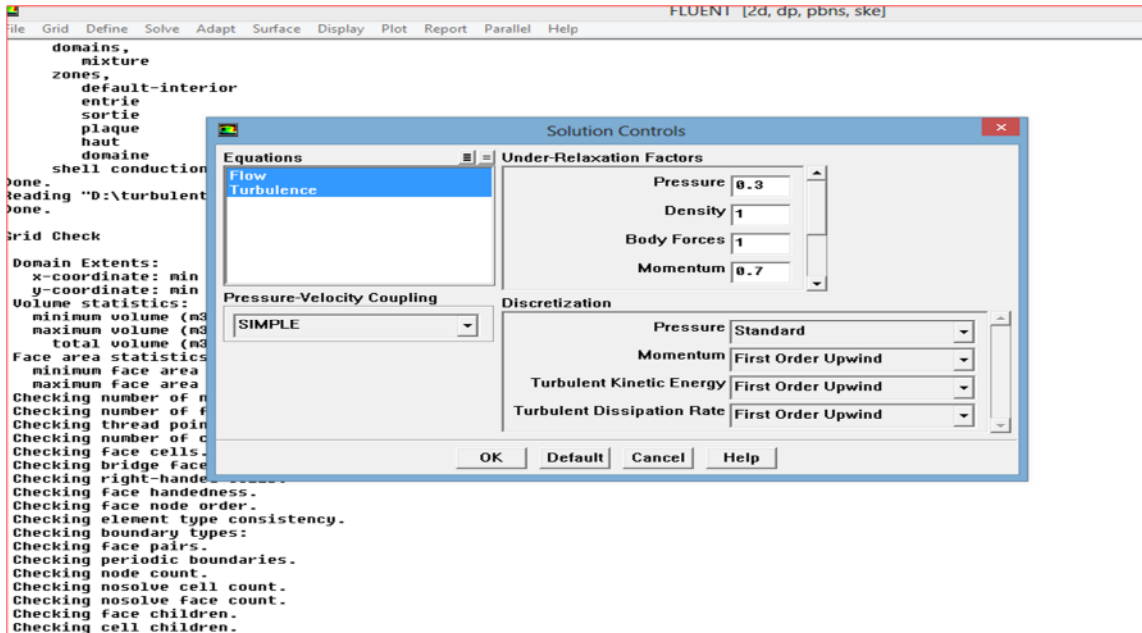


Figure V.17. Choix d'ordre des équations et de l'algorithme.

5.10. Choix du critère de convergence.

Dans cette étape nous choisissons les critères de convergence et nous fixons l'ordre de précision désiré.

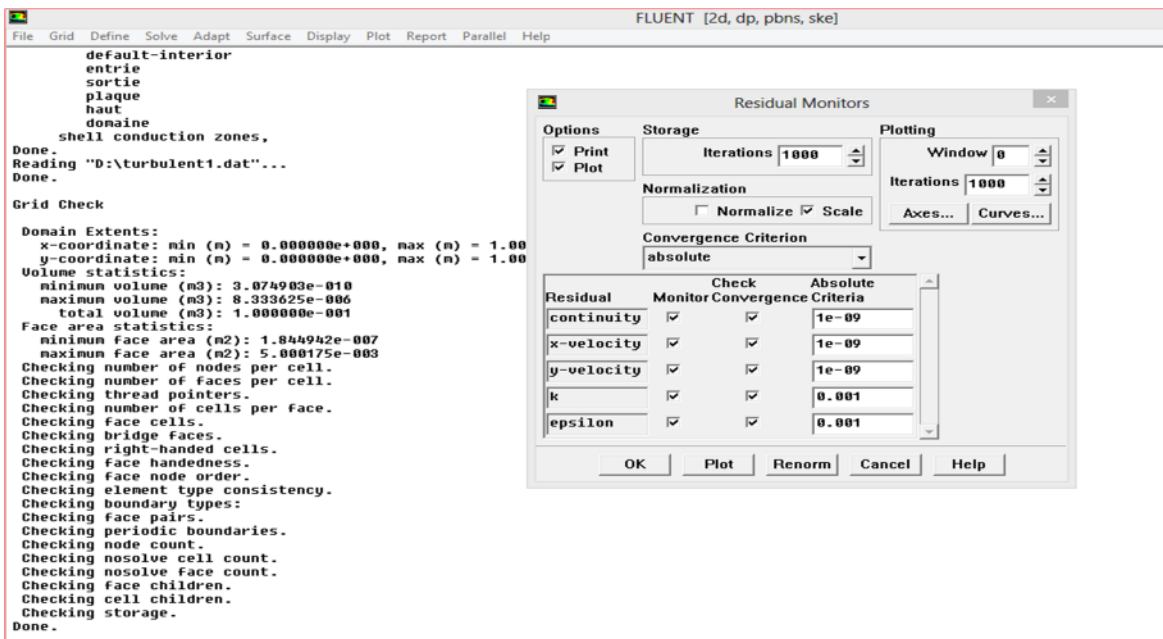


Figure V.18. Choix des critères de convergence.

5.11. Initialisation du calcul.

Avant d'entamer les calculs il faut donner les valeurs initiales des grandeurs de l'écoulement.

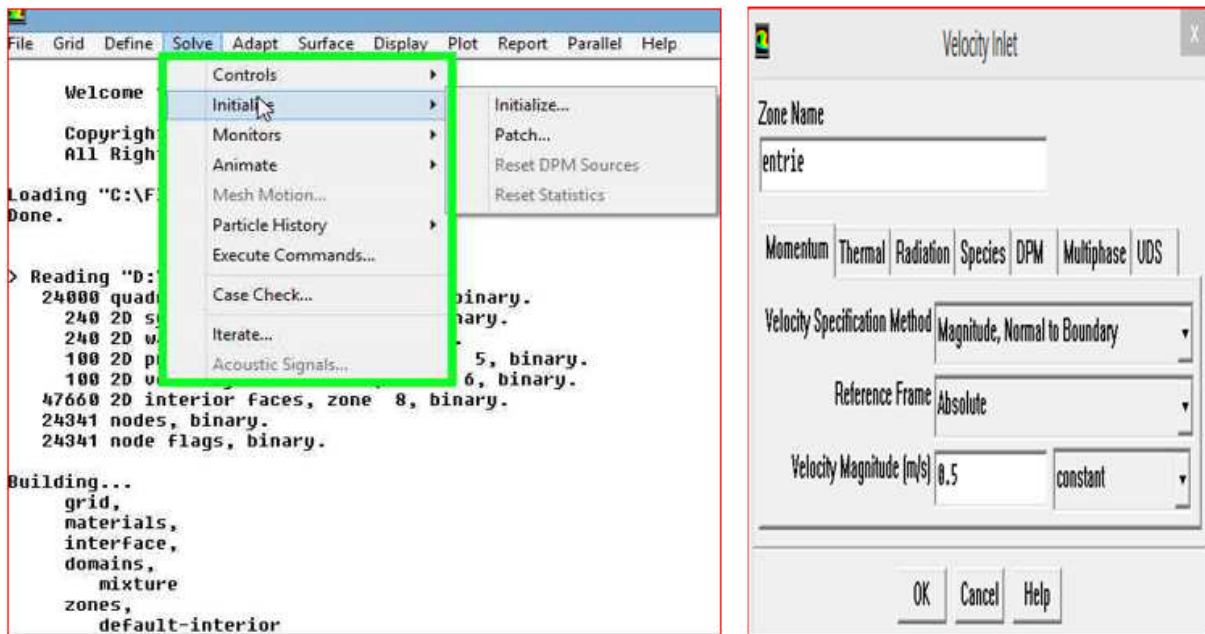


Figure V.19. Initialisation des calculs.

5.12. Paramétrage de la visualisation graphique.

Fluent, permet à l'utilisateur de visualiser les résultats de la simulation, ainsi de visualiser l'évolution de la solution en fonction des itérations, comme il donne la possibilité de suivre l'évolution des courbes des résidus.

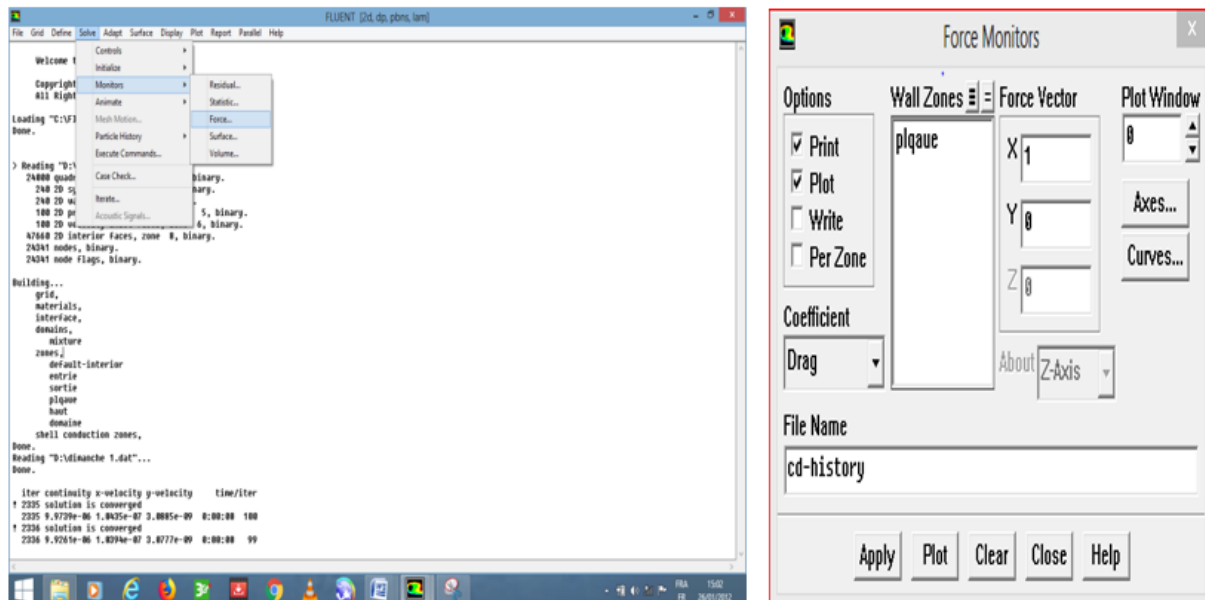


Figure V.20. Paramétrage de la visualisation graphique.

**5.13. Lancement du calcul numérique.**

Une fois le paramétrage terminé, nous sauvegardons la simulation et nous lançons le calcul en fixant le nombre des itérations.

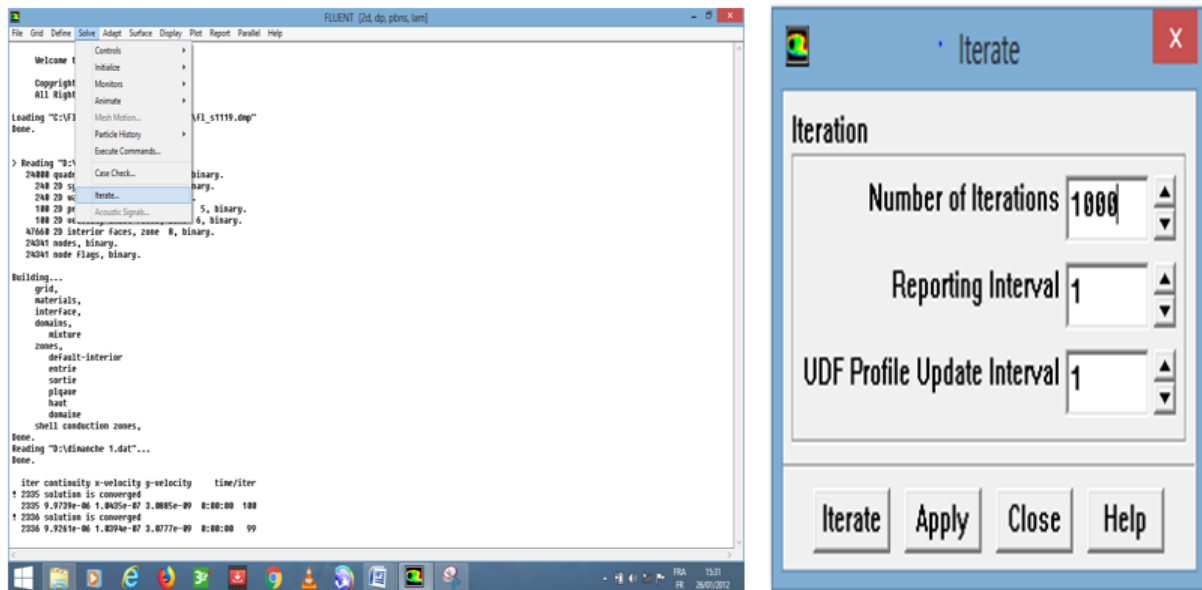


Figure V.21. Lancement du calcul.

**5.14. Convergence des résidus.**

Les courbes des résidus indiquent que les itérations ne produisent plus de changements considérables et les résidus sont passés en deçà de la valeur fixée précédemment, ce qui signifie que la solution a convergé, donc les calculs sont arrêtés.

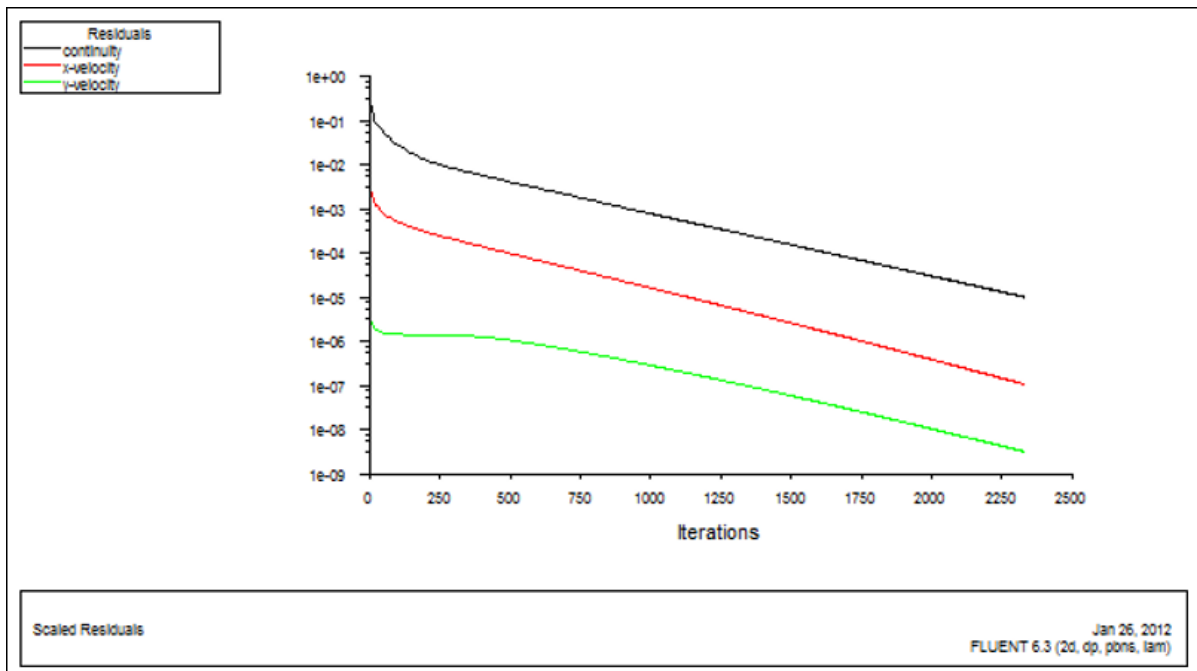


Figure V.22. Convergence des résidus pour le cas laminaire.

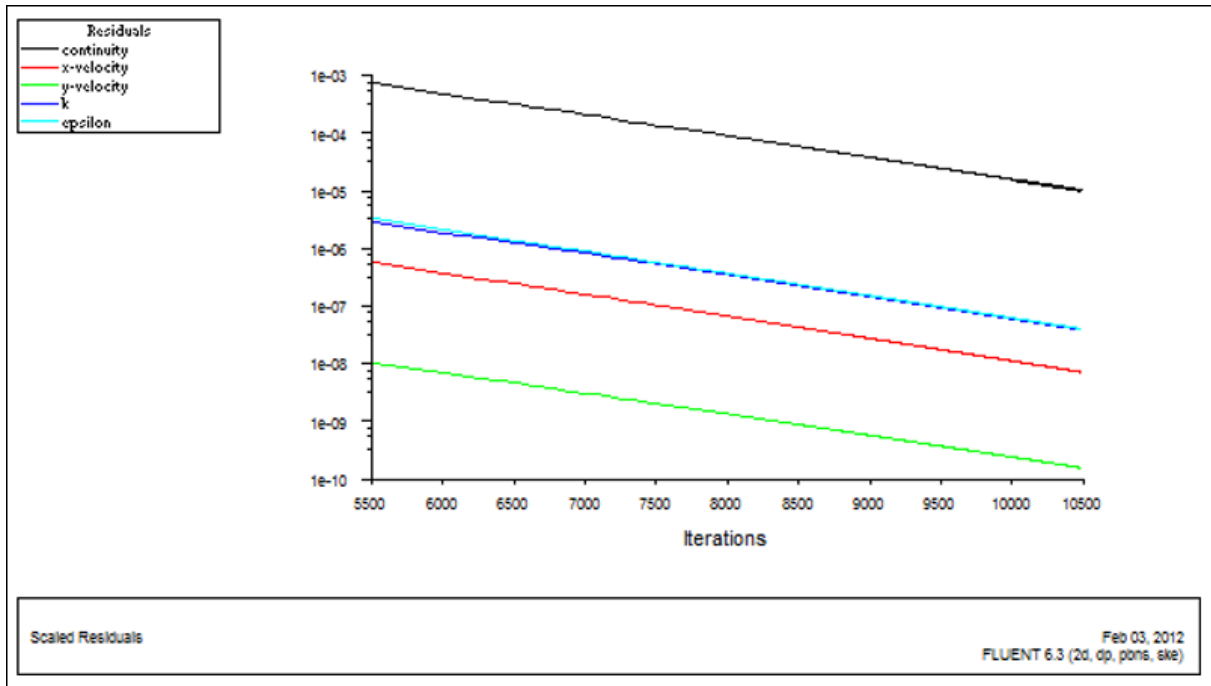


Figure V.23. Convergence des résidus pour le modèle  $k-\epsilon$ .

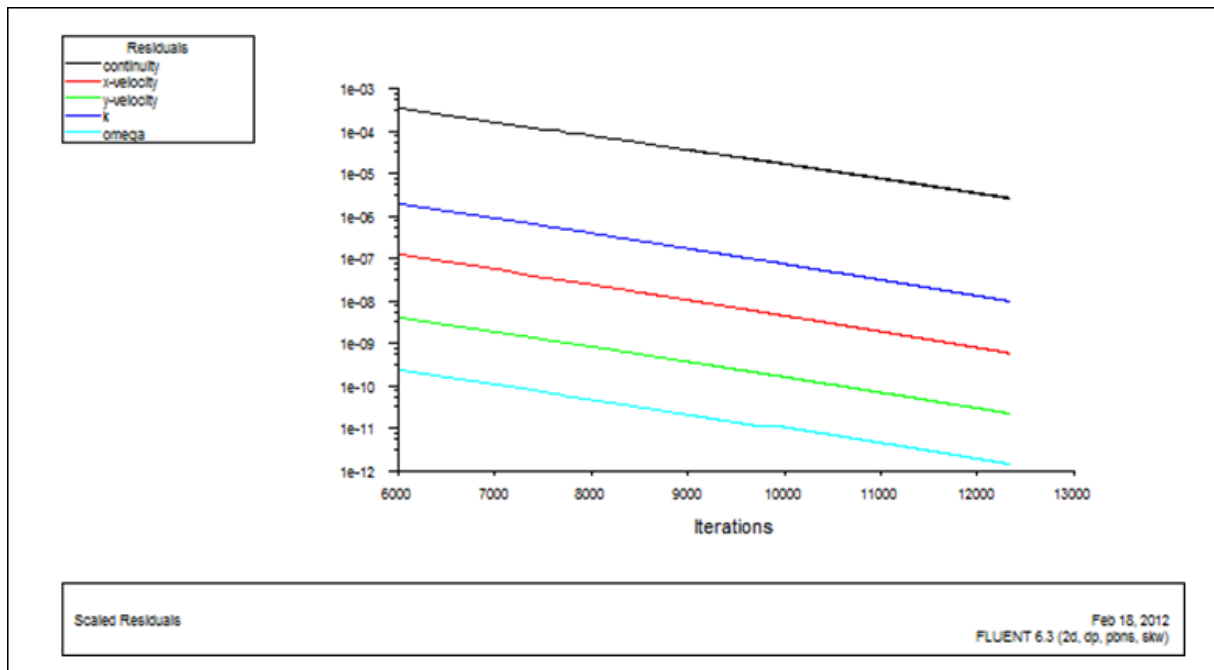


Figure V.24. Convergence des résidus pour le modèle  $k-\omega$ .

## 6. Comparaison des profils de vitesses longitudinales.

Les profils de vitesses donnés par la simulation numérique via le code de calcul Fluent sont comparés aux profils de vitesses donnés par la littérature.

### 6.1. Cas d'une couche limite laminaire.

Pour le cas d'une couche limite laminaire sur une plaque plane, le profil de vitesses de référence est celui donné par la solution exacte de Blasius. Notre comparaison est faite dans trois plans transversaux respectivement : pour  $x = 0.05m$ ,  $x = 0.25m$  et  $x = 0.5m$ .

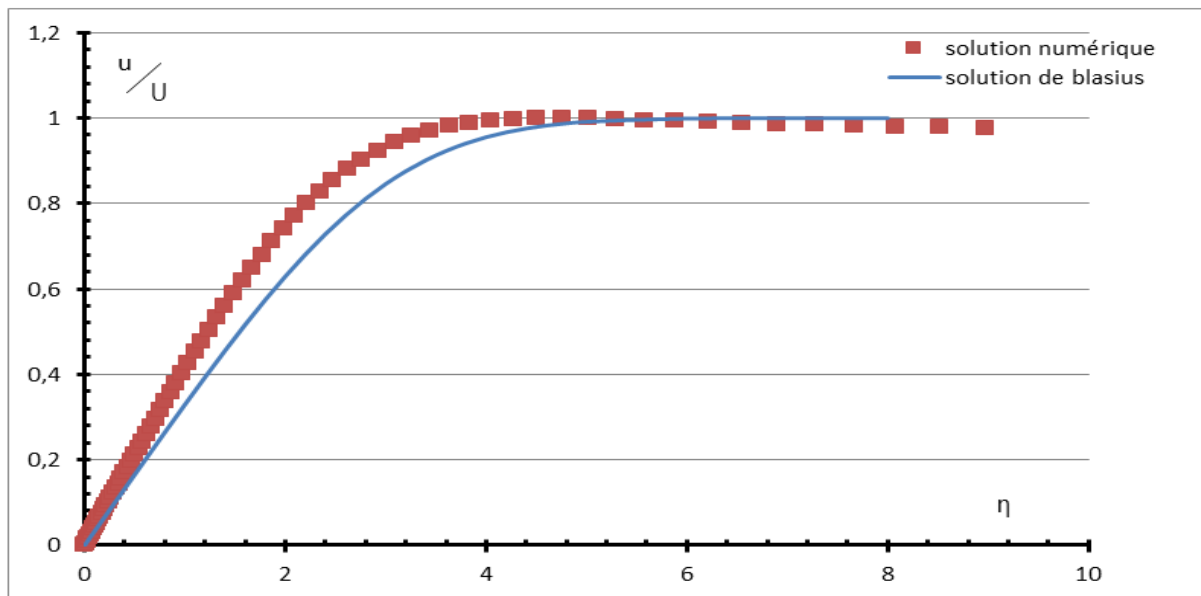


Figure V.25. Profil de vitesses laminaires longitudinales pour  $x = 0.05 m$ .

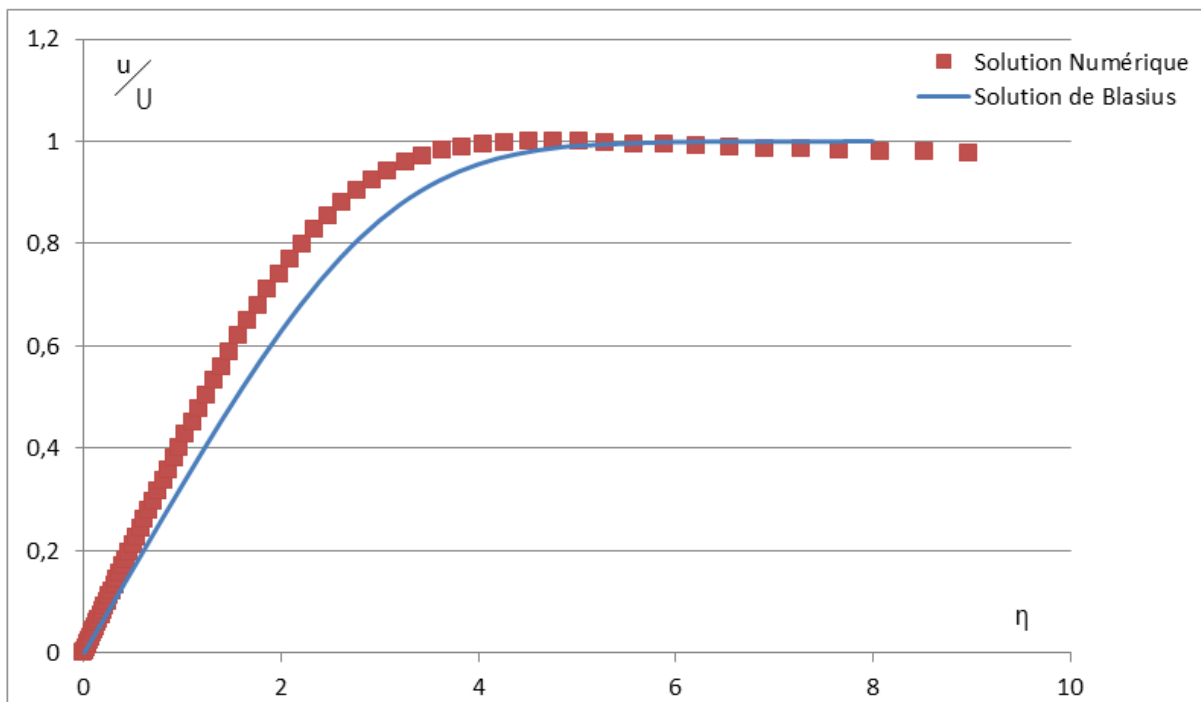


Figure V.26. Profil de vitesses laminaires longitudinales pour  $x = 0.25 m$ .

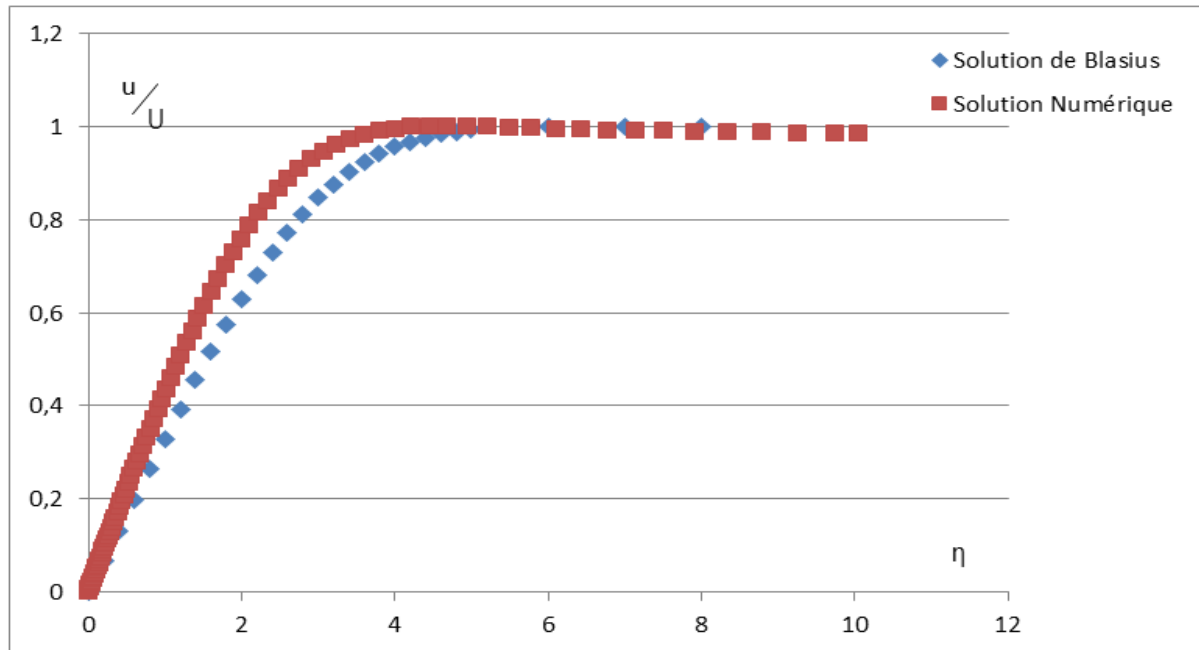


Figure V.27. Profil de vitesses laminaires longitudinales pour  $x = 0.5 m$ .

### 6.1.1. Interprétation des résultats.

Les figures (V.24, V25, V.26) illustrant les profils de vitesses longitudinales dans la couche limite laminaire, respectivement : en amont de la plaque (en  $x = 0.05 m$ ), au milieu (en  $x = 0.25 m$ ), et en aval (en  $x = L = 0.5 m$ ). Montrent que les profils de vitesses donné par la simulation numérique en ces plans se concordent parfaitement avec celui donné par la solution exacte de Blasius, ainsi les valeurs des vitesses issues de la simulation sont très proches de celles données par la solution de Blasius.

### 6.2. Cas d'une couche limite turbulente.

Pour le cas de la couche limite turbulente sur la plaque, nous avons comparé les profils de vitesses donnés par le code de calcul Fluent en adoptant les modèles de turbulence  $k-\varepsilon$  et  $k-\omega$  au profil universelle de vitesses turbulentes donné par les lois universelles généralisées pour les écoulements pariétaux, dans les mêmes plans fixés pour le cas laminaire ( la comparaison est faite dans la région interne de la couche limite).

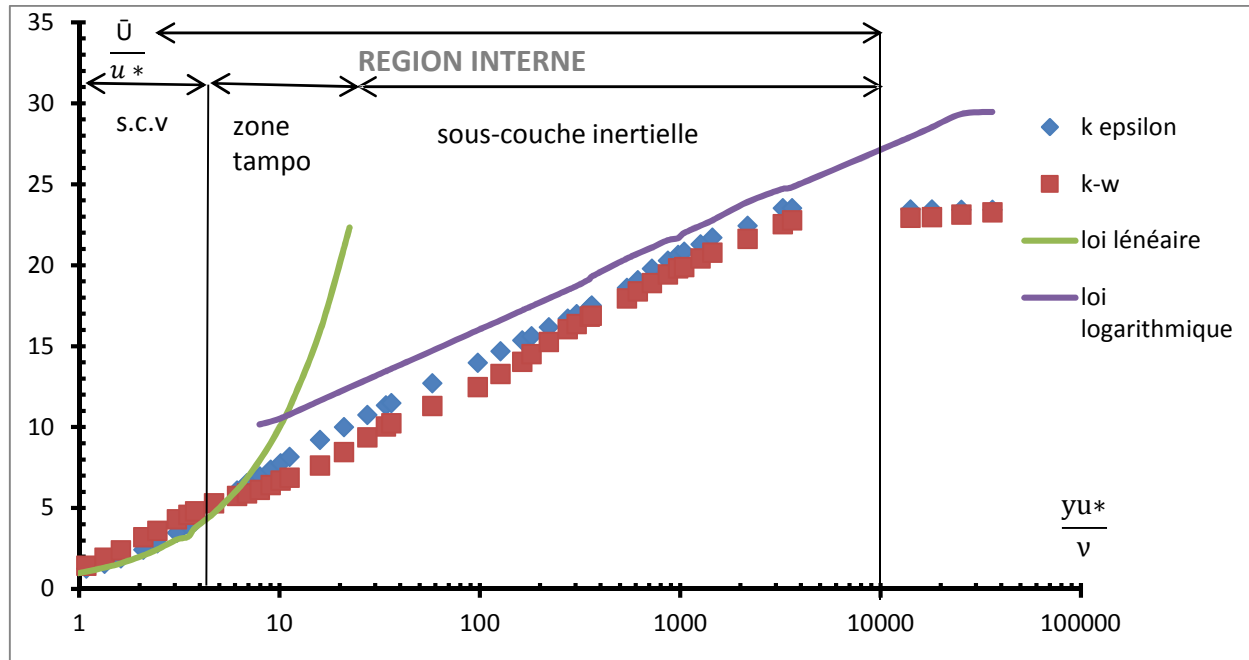


Figure V.28. Profil de vitesses turbulentes longitudinales pour  $x = 0.05 \text{ m}$ .

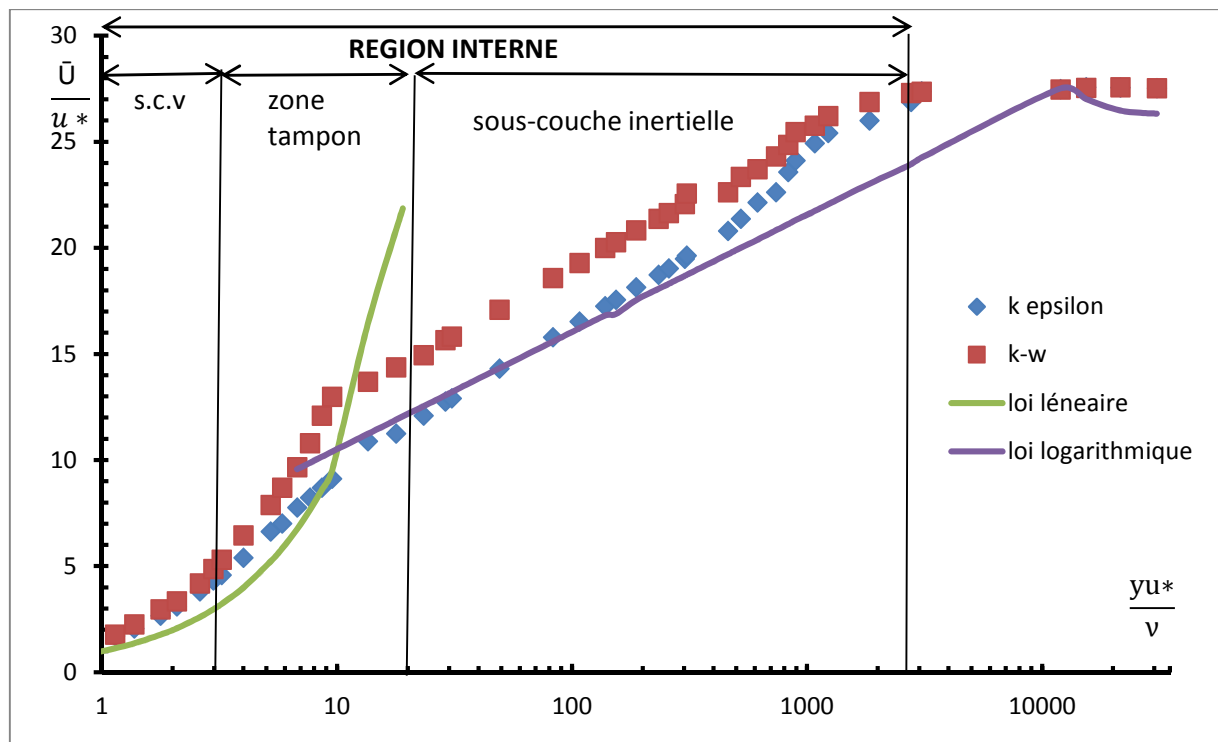


Figure V.29. Profil de vitesses turbulentes longitudinales pour  $x = 0.25 \text{ m}$ .

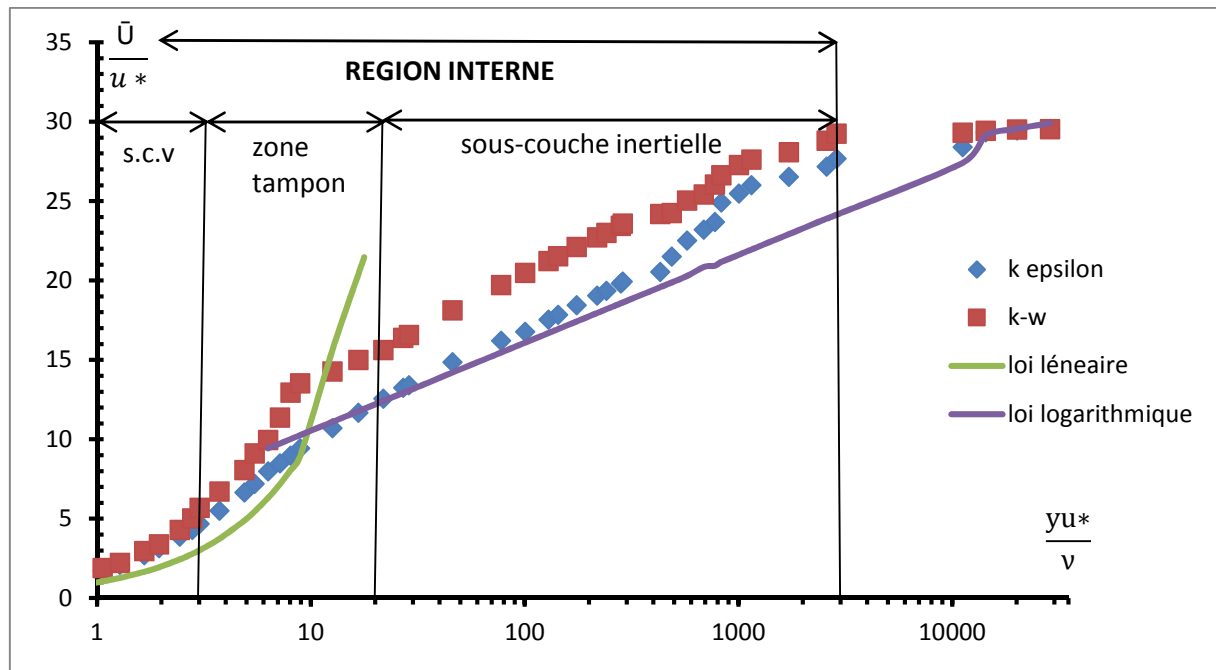


Figure V.30. Profil de vitesses turbulentes longitudinales pour  $x = 0.5$  m.

- La vitesse de frottement  $u_* = U \sqrt{\frac{c_f}{2}}$  est égale respectivement pour les trois plans définis ci-dessus :  $6.446 \text{ m s}^{-1}$  ;  $5.488 \text{ m s}^{-1}$  et  $5.120 \text{ m s}^{-1}$

### 6.2.1. Interprétation des résultats.

- Dans la sous couche-visqueuse :

La distribution des vitesses donnée par les modèles de turbulence  $k-\varepsilon$  et  $k-\omega$  semble être la même et les valeurs des vitesses sont assez proches de celles données par la loi linéaire.

- Dans la zone tampon :

Il faut noter que dans cette zone, il n'y a aucune loi donnant la distribution de vitesses, mais on admette que l'intervalle d'application de la loi linéaire s'étend jusque au point de raccordement et au-delà c'est la loi logarithmique qui est applicable. Dans cette zone l'écart entre la distribution de vitesses obtenue par la simulation en adoptant le modèle  $k-\omega$  et la courbe de vitesses théoriques est remarquable, tandis que les résultats obtenus en adoptant le modèle  $k-\varepsilon$  semblent être plus concordants.

- Dans la zone inertielle :

La distribution de vitesses donnée par la simulation numérique en cette zone en adoptant le modèle  $k-\omega$  est assez loin de celle donnée par la loi logarithmique car le modèle  $k-\omega$  est valide pour le cas d'un écoulement en rotation, c'est la distribution de vitesses donnée par la simulation numérique en adoptant le modèle  $k-\varepsilon$  qui semble être assez proche.

### 7. Conclusion.

On se basant sur la comparaison effectuée précédemment, on peut dire que la distribution de vitesses donnée par Fluent en adoptant le modèle de turbulence  $k-\varepsilon$  semble être assez proche de

celle donnée par les lois universelles généralisées pour les écoulements pariétaux. Que ce soit dans la sous couche-visqueuse, dans la zone inertielle ou encore dans la zone tampon où le point de raccordement est proche de la courbe de vitesses donnée par la simulation.

## Conclusion générale

Le présent travail a pour but de montrer le modèle de turbulence le plus adapté pour le cas d'un écoulement d'un fluide visqueux sur une plaque plane (écoulement sur une paroi lisse) sans gradient de pression.

Nous avons tout d'abord illustré les équations qui régissent les écoulements des fluides visqueux en établissant les équations de Navier-Stokes. Aussi nous avons mis en évidence les équations pour la couche limite des deux régimes d'écoulement et les principes de base et hypothèses simplificatrices permettant de les obtenir.

La comparaison des profils de vitesses longitudinales donnés par la simulation numérique à celui donné par la solution exacte de Blasius pour le cas d'une couche limite laminaire, nous a permis de voir l'exactitude et la fiabilité des résultats que donne le code de calcul fluent.

Ainsi, la comparaison des profils de vitesses longitudinales donnés par la simulation numérique en adoptant les modèles de turbulence  $k-\varepsilon$  et  $k-\omega$  au profil universel de vitesses turbulentes, nous a permis de valider le modèle de turbulence semi-empirique  $k-\varepsilon$  comme un modèle robuste et adéquat pour le cas d'écoulement turbulent d'un fluide incompressible, sans gradient de pression sur une plaque plane.

Dans l'avenir, il est intéressant de valider un modèle de turbulence pour le cas d'écoulement turbulent d'un fluide visqueux sur une paroi complexe en présence des gradients de pression, vu l'influence des gradients de pression sur le développement de la couche limite et sur la forme du profil de vitesses.

## Références bibliographiques

- [01] **Dr ELGUERRI Mohamed** « *Mécanique des fluides théories et applications* » cours 2<sup>ème</sup> année licence 2014/2015.
- [02] **R.COMOLET** « *Mécanique expérimentale des fluides : statique et dynamique des fluides non visqueux* » Tome1, 1979.
- [03] **Jean Coirier** « *Mécanique des milieux continus* » 2<sup>ème</sup> cycle. Ecoles d'ingénieur ; Dunod, Paris, 1997.
- [04] **CRISTOPH Ancey** « *Mécanique des fluides : introduction à l'hydraulique pour les ingénieurs civils* » 2018.
- [05] **Yann MARCHESSE** « *Modélisation de la turbulence* » cours ; Ecole Catholique d'Arts et Métiers –Lyon 2009/2010.
- [06] **Latifa SKANDAJI REZG** « *étude de la structure d'une couche limite turbulente soumise à des oscillations transversales de la paroi* » Thèse ; école centrale de Lyon ; 1997.
- [07] **H. WALTER GRAF, M. S. ALTINAKAR** « *hydrodynamique, une introduction* » presses Polytechniques et universitaires romandes ; 1998.
- [08] **P. CHASSAING** ; « *Mécanique des fluides, éléments d'un premier parcours* » ; CÉPADÈUS, Paris, 2000.
- [09] **Jean-Christophe ROBINET** ; « *Aérodynamique Fondamentale* » ; Arts et Métiers ParisTech, Paris ; année 2012 \ 2013.
- [10] **Merzak Damou** « *Mécanique des fluides* » office des publications universitaires 1 ; place centrale de Ben-Aknoun, Alger.
- [11] **J.L. Estivalezes** « *NOTES DE COURS* » ; École doctorale Mécanique, énergétique, génie civil et procédés (Toulouse) ; 22 novembre 2006.
- [12] **Christophe Corre** « *La couche limite en aérodynamique. In Aérodynamique Fondamentale* » ENSAM - SINUMEF, 2005.
- [13] **Pr Abbés AZZI** « *Initiation à la simulation des grandes échelles de la turbulence* » cours ; Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf ; 2005.
- [14] **L.F. Richardson** « *Weather prediction by Numerical Process* » Cambridge University Press 1922.
- [15] **A. N. Kolmogorov** « *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number* » C. R. Acad. Sci. U.S.S.R, 30:9–13, 1941.
- [16] **A. N. Kolmogorov** « *On degeneration decay of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid* » C. R. Acad. Sci. U.S.S.R, 31:538–540, 1941.
- [17] **A. N. Kolmogorov** « *Dissipation of energy in locally isotropic turbulence* » ; C. R. Acad. Sci. U.S.S.R, 32:16–18, 1941.
- [18] **Jean-Philippe BOINE** « *Turbulence* » cours 2<sup>ième</sup> année de l'ENSIB ; 2001/2002.

## ***Références bibliographiques***

[19] **Irman YUDIANA** « *Etude des modèles à bas nombre de Reynolds pour la simulation numérique des écoulements turbulents compressibles de proche paroi avec et sans interaction de choc* » Thèse ; ECOLE CENTRALE DE LYON ECOLE DOCTORALE : MECANIQUE.

[20] **Sodja, J.** « *Turbulence modelling for CFD, DCW Industries* »; Canada; 2007.

### ***SITES INTERNET.***

{1} : <https://www.ensh.dz/files/Cours/1011/Hydraulique/ChapitreIX- régime d'écoulement.pdf>

{2} : <http://remy.duperray.free.fr/files/statique des fluide.pdf>