

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**  
**Université Mouloud MAMMERRI, Tizi-Ouzou**



**Faculté de Génie Electrique et d'Informatique**  
**Département d'Automatique**

**Mémoire de Fin d'Etudes**

En vue de l'obtention du diplôme

*D'Ingénieur d'Etat en Automatique*

***Thème***

*Modélisation floue des systèmes  
dynamiques non linéaires.*

Proposé par : R. HADDOUCHE

Présenté par :

Mr. HAMDAD Hacene

Mr. IKERROUIENE Mohamed

Dirigé par : A. MAIDI

Soutenu le : 12/07/2010

*Promotion 2010*

# *Remerciements*

## Remerciements

A l'issu de ce travail, nous tenons à exprimer toute notre gratitude à l'ensemble des personnes qui ont contribué chacune à leur manière, à l'accomplissement de cette thèse.

Nous voudrions tout d'abord exprimer toute notre reconnaissance à Monsieur A. MAIDI pour l'honneur qu'il nous a fait en acceptant de nous encadrer, et de nous orienter tout au long de ce mémoire. Ses conseils, ses critiques et sa rigueur scientifique, nous ont permis de mener ce mémoire à terme qu'il trouve ici l'expression de notre reconnaissance et plus vif remerciement.

Nous remercieront également aux membres du jury qui nous feront l'honneur d'évaluer ce travail.

Nous tenons à remercier aussi le personnel de la bibliothèque et tous les enseignants qui ont contribué à notre formation dans notre cursus.

# *Dédicaces*



## *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail*

- *A la mémoire de mon défunt père et je prie Dieu de lui accueillir dans Son vaste paradis <<inshallah>>.*
- *A ma très chère mère qui a veillé toujours sur moi.*
- *A mes sœurs Zohra, Fatma et Ourdia.*
- *A mes frères Boudjema et Hidouche.*
- *A tous mes proches.*
- *A tous mes amis et surtout Salah-Batista et Hacene.*

*Mohamed.*



## *Dédicaces*

*Je dédie cet humble travail*

- *A mes très chers parents, en témoignage de ma profonde gratitude et mon incontestable reconnaissance.*
- *A mes chers frères et sœurs.*
- *A toute la famille HAMDAO et ces proches.*
- *A tous mes amis.*
- *A tous ce qui m'ont soutenu et encouragé tout au long de mon cursus.*

*Hacene.*

# *Sommaire*

# *Sommaire*

## **Sommaire**

<b>Introduction Générale.....</b>	<b>1</b>
-----------------------------------	----------

## **Chapitre I : Généralités sur les systèmes non linéaires**

<b>I.1 Introduction.....</b>	<b>3</b>
<b>I.2 Définition des systèmes non linéaires.....</b>	<b>3</b>
<b>I.3 Principales caractéristiques non linéaires.....</b>	<b>4</b>
<b>I.4 Représentation des systèmes non linéaires.....</b>	<b>7</b>
<b>I.5 Linéarisation des systèmes non linéaires .....</b>	<b>8</b>
<b>I.5.1 Approche graphique.....</b>	<b>8</b>
➤ <b>Remarque I.1.....</b>	<b>10</b>
<b>I.5.2 Les séries de Taylor appliquées aux vecteurs.....</b>	<b>10</b>
❖ <b>Exemple I.1.....</b>	<b>11</b>
<b>I.5.3 Linéarisation d'équations différentielles non linéaires (approche analytique).....</b>	<b>12</b>
➤ <b>Remarque I.2.....</b>	<b>15</b>
➤ <b>Remarque I.3.....</b>	<b>16</b>
<b>I.6 Exemple de simulation d'une équation d'état non linéaire.....</b>	<b>16</b>
<b>I.6.1 Condition de simulation.....</b>	<b>17</b>
<b>I.6.2 Interprétation des résultats.....</b>	<b>17</b>

I.7 Les limites de la méthode.....	18
I.8 Conclusion.....	18

## Chapitre II : Généralités sur la logique floue

II.1 Introduction.....	20
II.2 Variables linguistiques.....	20
II.3 Ensembles flous (Sous ensembles flous).....	21
II.4 Fuzzification.....	22
II.4.1 Les fonctions d'appartenances dans un univers de discours.....	22
II.5 L'inférence.....	25
II.6 Opérateurs flous.....	26
II.6.1 Opérateur « <i>ET</i> ».....	27
II.6.2 Opérateur « <i>OU</i> ».....	28
II.6.3 Opérateur « <i>Non</i> ».....	29
II.6.4 Opérateurs « <i>ET</i> » et « <i>OU</i> » réalisés par les opérations arithmétiques.....	31
II.7 Méthode d'inférence par les opérateurs flous .....	35
II.7.1 Application de la méthode « <i>somme-prod</i> » dans le modèle TS flou.....	36
II.7.2 Application de la méthode « <i>somme-min</i> » dans le modèle TS flou.....	37
II.8 Défuzzification.....	39
➤ Remarque II.1.....	41
II.9 Conclusion.....	42

## **Chapitre III : Modélisation floue des systèmes dynamiques**

<b>III.1 Introduction.....</b>	<b>44</b>
<b>III.2 Structure générale des modèles flous.....</b>	<b>44</b>
<b>III.3 Différents types des modèles flous.....</b>	<b>46</b>
<b>III.3.1 Modèle flou de Mamdani (linguistique).....</b>	<b>46</b>
<b>III.3.2 Modèle flou de Takagi-Sugeno (modèle TS flou).....</b>	<b>48</b>
<b>III.3.2.1 Inférence et régression non linéaire dans le modèle TS flou.....</b>	<b>49</b>
<b>III.4 Approximation des fonctions non linéaires par le modèle TS flou.....</b>	<b>50</b>
<b>III.4.1 Condition de simulation.....</b>	<b>54</b>
<b>III.4.2 Interprétation des résultats.....</b>	<b>55</b>
<b>➤ Remarque III.1.....</b>	<b>55</b>
<b>III.5 Modélisation des systèmes dynamiques par le modèle TS.....</b>	<b>56</b>
<b>III.5.1 Construction du modèle TS flou des systèmes dynamiques.....</b>	<b>58</b>
<b>III.5.1.1 Approximation locale et approximation globale dans le modèle TS flou.....</b>	<b>58</b>
<b>III.5.2 Application de la modélisation TS floue à un système dynamique non linéaire.....</b>	<b>62</b>
<b>III.5.2.1 Conditions de simulation.....</b>	<b>66</b>
<b>III.5.2.2 Interprétation des résultats.....</b>	<b>68</b>
<b>III.6 Conclusion.....</b>	<b>68</b>

## **Chapitre IV : Modélisation floue des systèmes chaotiques**

<b>IV.1 Introduction.....</b>	<b>69</b>
<b>IV.2 Systèmes chaotiques.....</b>	<b>69</b>
<b>IV.2.1 Comportement asymptotique et attracteurs.....</b>	<b>69</b>
<b>IV.2.1.1 Point fixe.....</b>	<b>70</b>
<b>IV.2.1.2 Cycle limite.....</b>	<b>70</b>
<b>IV.2.1.3 Le tore.....</b>	<b>70</b>
<b>IV.2.2 Notion de chaos.....</b>	<b>70</b>
<b>IV.2.2.1 Simulation.....</b>	<b>71</b>
<b>IV.2.2.2 Interprétation des résultats.....</b>	<b>73</b>
<b>IV.2.3 Caractéristique essentielle de chaos.....</b>	<b>73</b>
<b>IV.3 Exemple de modélisation floue d'un système chaotique.....</b>	<b>74</b>
<b>IV.3.1 Simulation.....</b>	<b>77</b>
<b>IV.3.2 Interprétation des résultats.....</b>	<b>80</b>
<b>IV.4 Conclusion.....</b>	<b>81</b>
<b>Conclusion Générale.....</b>	<b>82</b>

### **Bibliographie**

# *Nomenclature*

## Nomenclature

$a$	:	constante
$b$	:	constante
$c$	:	constante
$u(t)$	:	vecteur d'entrée.
$y(t)$	:	vecteur de sortie.
$x(t)$	:	vecteur d'état.
$r$	:	dimension de vecteur d'entrée.
$n$	:	dimension de vecteur d'état.
$g(x)$	:	fonction vectorielle.
$f(x)$	:	fonction vectorielle.
$h(x)$	:	fonction vectorielle.
$m$	:	dimension de la fonction vectorielle $f(x)$ .
$p$	:	dimension de la fonction vectorielle $h(x)$ .
$\frac{d^k f}{du^k}$	:	la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la fonction vectorielle $f$ par rapport à l'entrée $u$ .
$d$	:	indice de la dérivée total.
$\partial$	:	indice de la dérivée partielle.
$!$	:	indice factoriel.
$\Delta u$	:	variation de l'entrée.
$\Delta y$	:	variation de sortie.
$\Delta x$	:	variation de l'état.
$(x_e, u_e)$	:	point de fonctionnement.
$A$	:	matrice d'état (d'évolution).
$B$	:	matrice de commande (d'entrée).
$C$	:	matrice d'observation (de sortie).
$D$	:	matrice de transmission directe.
$x$	:	variable linguistique d'entrée.
$v$	:	variable vitesse.
$E_x$	:	univers de discours.
$E_y$	:	univers de discours.

$F$	:	ensemble de référence.
$E$	:	ensemble flou.
$\mu_E(x)$	:	fonction d'appartenance.
$A_i^l$	:	sous ensemble flou (antécédent) de la $l^{\text{ème}}$ règle.
$B_i^l$	:	sous ensemble flou (conséquent) de la $l^{\text{ème}}$ règle.
$\mu_{A_i}(x)$	:	fonction d'appartenance.
$R^l$	:	$l^{\text{ème}}$ règle d'inférence.
$w_l$	:	fonction d'appartenance partielle (degré d'activation) de la $l^{\text{ème}}$ règle.
$v_l$	:	poids d'appartenance (degré normalisé d'accomplissement) de la $l^{\text{ème}}$ règle.
$y_l$	:	sortie de chaque règle ( $l^{\text{ème}}$ sortie).
$y_0$	:	valeur maximum.
$D_F$	:	opérateur de fuzzification.
$\bar{y}_l$	:	centre de gravité (moyenne) de la $l^{\text{ème}}$ règle.
$i, j, l$	:	indices.
$k$	:	nombre des règles d'inférences.
$p$	:	nombre des sous ensemble flous.
$a^{lT}$	:	vecteur transposé des paramètres de la $l^{\text{ème}}$ règle.
$b^l$	:	scalaire d'offset de la $l^{\text{ème}}$ règle.
$\sigma$	:	variance de la moyenne.
$V_j(t)$	:	variable des fonctions non linéaires.
$M_{li}$	:	ensemble flou.
$A_l$	:	matrice d'état.
$B_l$	:	matrice de commande.
$z_i(t)$	:	termes non linéaires.
$M(z_i(t))$	:	fonction d'appartenance.
$N(z_i(t))$	:	fonction d'appartenance.

*Introduction*  
*Générale.*

### Introduction Générale

L'industrie, de nos jours fait face aux problèmes de modélisation des systèmes non linéaires de plus en plus complexes. Ces modèles mathématiques généralement sont difficiles à exploiter. Cependant des développements importants sur le plan pratique et théorique ont été réalisés dans le domaine de la modélisation des systèmes non linéaires.

Les méthodes traditionnelles utilisées pour la modélisation (modèle linéaire) sont parfois sans utilités en raison de la nécessité de posséder un modèle mathématique précis du procédé ; d'une autre part les modèles non linéaires garantissent une représentation exacte du comportement dynamique des systèmes non linéaires.

Les recours aux modèles non linéaires suscitent actuellement des intérêts primordiaux dans la représentation exacte, et l'analyse de la dynamique des systèmes non linéaires.

Dans le cas de la modélisation floue, sa propriété d'approximation parcimonieuse ainsi que sa nature de découpage en ont fait des outils très puissants pour la modélisation des procédés non linéaires complexes. De même, dans le cas des systèmes d'inférences, leurs propriétés d'approximation universelle et surtout la possibilité de s'appuyer sur des connaissances des experts sur les processus à piloter pour concevoir un modèle précis, ont permis de les utiliser avec succès dans des nombreuses applications. Ces connaissances se traduisent sous forme de règles de la forme *SI telle condition ALORS telle conclusion*.

Parfois la connaissance d'un expert ne peut être entièrement verbalisée. Cette limitation inhérente au système d'inférence floue a conduit à la conception des nouvelles stratégies de modélisation à base de modèle mathématique « *basée modèle* » intégrant les avantages d'approximation local pour aboutir à une représentation plus complète des connaissances du système.

Le but de ce travail est l'étude de la modélisation floue des systèmes dynamiques non linéaires. Les aspects théoriques et pratiques de ce travail sont répartis sur quatre chapitres. Le chapitre I présente les généralités sur les systèmes non linéaires, et leur linéarisation autour du point de fonctionnement.

Le chapitre II présente les bases générales de la logique floue et ses applications.

Le chapitre III est dédié à l'approximation et la modélisation des systèmes dynamiques non linéaires par le modèle flou de Takagi-Sugeno (modèle TS flou).

Le chapitre IV illustre les résultats de simulation de la modélisation floue appliquée à un système chaotique non linéaire.

Le mémoire se termine par une conclusion générale sur le travail réalisé.

# Chapitre I

*Généralités sur les  
systèmes non linéaires.*

**I.1 Introduction**

Dans l'analyse et la synthèse des systèmes, des difficultés sont souvent posées en ce plaçant dans l'hypothèse de linéarité. En raison de la complexité de modèle mathématique non linéaire régissant plus fidèlement leur comportement dynamique. En effet, par définition même, sous la dénomination système non linéaire, se regroupent des systèmes de nature très variés, qui nécessitent des approches de linéarisation.

Dans ce chapitre nous allons commencer par la définition des systèmes non linéaires, puis on va présenter un exemple pratique et simple de ses derniers, ensuite on va présenter l'approche de linéarisation autour d'un point de fonctionnement pour un exemple d'un système non linéaire.

La fin du chapitre est consacrée à la simulation d'un modèle d'un système non linéaire et son modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement.

**I.2 Définition des systèmes non linéaires [7, 11]**

Un système est dit linéaire s'il est régi par des équations différentielles linéaires à coefficients constants, pour lequel la plupart des outils utilisés en automatique linéaire s'appliquent, est généralement annexée à cette définition de la linéarité cela implique la validité à tout instant l'hypothèse de linéarité équivaut au principe de superposition qui peut s'énoncer comme suit :

**a)** si  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  sont les réponses respectivement aux entrées  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$ , la réponse à l'entrée  $u_1(t) + u_2(t)$  est  $y_1(t) + y_2(t)$ . Cette caractéristique constitue la propriété d'additivité.

**b)** si la réponse d'un système linéaire mono variable à une entrée  $u(t)$  est  $y(t)$ , sa réponse à l'entrée  $k u(t)$  ( $k$  étant constante) est  $k y(t)$ . Cette caractéristique représente la propriété de la proportionnalité des effets aux causes à l'homogénéité.

Les systèmes non linéaires, ne pouvant pas être représentés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants, c'est-à-dire pour lesquels le théorème de superposition ne s'applique pas.

### I.3 Principales caractéristiques non linéaires [1]

A partir du comportement dynamique qui est défini par le comportement des variables de sorties du système au cours du temps relativement à l'évolution des variables d'entrées. Celui-ci est à distinguer du comportement statique où les variables de sorties reproduisent, à un gain près, il est représenté par des courbes caractéristiques (caractéristique statique).

Ainsi plusieurs types de courbes caractéristiques sont définis suivant les non linéarités rencontrées. Ces courbes sont illustrées par les figures I.2 à I.10.

Pour un système linéaire, la courbe caractéristique est rectiligne ce qui exprime la propriété d'homogénéité, dont l'équation en régime statique est donnée par l'équation :

$$y(t) = k u(t) \quad (\text{I.1})$$

Où  $k$  est le gain statique de l'organe. Sa courbe caractéristique est représentée par (Figure I.1)

La caractéristique d'amplitude d'un organe réel n'est jamais parfaitement rectiligne mais, il y a une courbure plus au moins marquée (Figure I.2).

En outre, tout système physique même réputé linéaire, possède un seuil de sensibilité ou zone morte (Figure I.3) et une saturation (Figure I.4).

D'autre part, des phénomènes héréditaires à type d'hystérésis peuvent donner naissance à une caractéristique en forme de boucle (Figure I.5).

En fin, les organes travaillant par **plus au moins** ou **tout ou rien** possèdent une caractéristique représentée sur la (Figure I.6) et défini par l'équation :

$$y(t) = M \operatorname{sign} u(t) \quad (\text{I.2})$$

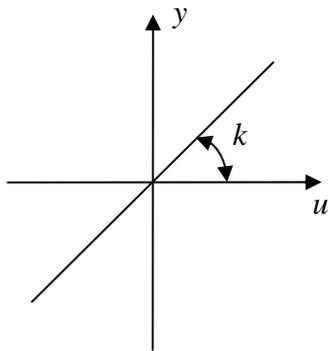
Où la fonction  $y$  est égale à +1 pour  $u$  positif et à -1 pour  $u$  négatif (idéalisations d'un relais à deux positions).

Les cinq types de non linéarité représentés dans les figures I.2, I.3, I.4, I.5 et I.6 peuvent s'associer d'une façon diverse en donnant les combinaisons possibles, notamment :

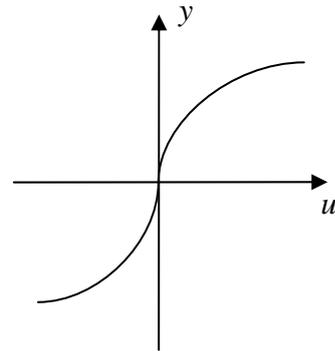
**a)** Seuil et saturation, définissant le domaine de linéarité du système (Figure I.7).

- b) Courbure de caractéristique et hystérésis (Figure I.8).
- c) Tout ou rien et seuil : idéalisation d'un relais à trois positions (Figure I.9).
- e) Tout ou rien, seuil et hystérésis (Figure I.10).

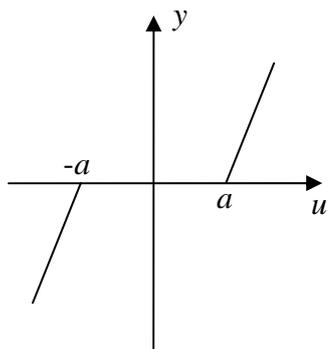
Ces combinaisons permettant de représenter à peu près tous les non linéarités présentent dans le système asservi.



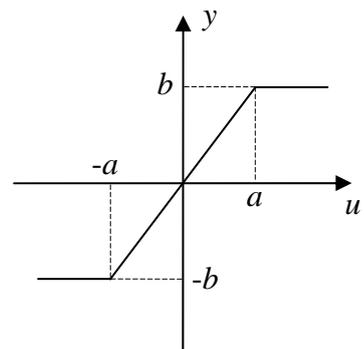
**Figure I.1 :** Linéaire idéal.



**Figure I.2 :** Courbure.



**Figure I.3 :** Seuil.



**Figure I.4 :** Saturation.

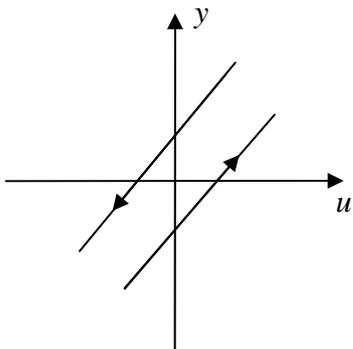


Figure I.5 : Hystérésis.

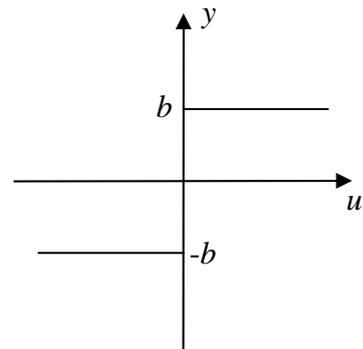


Figure I.6 : Plus-ou-moins.

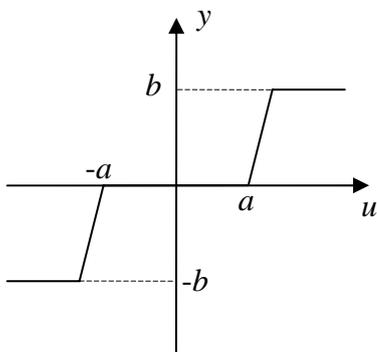


Figure I.7 : Seuil et saturation.

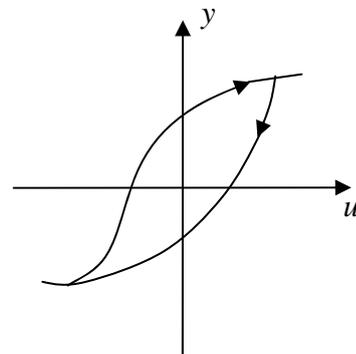


Figure I.8 : Courbure et hystérésis.

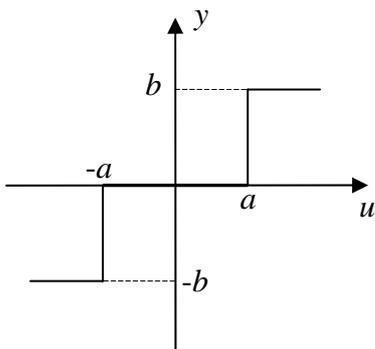


Figure I.9 : Plus-ou-moins  
avec zone morte

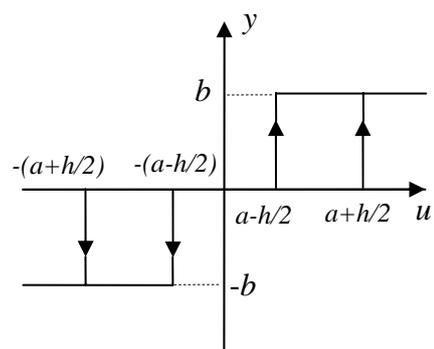


Figure I.10 : Plus-ou-moins avec  
zone morte et hystérésis

## I.4 Représentation des systèmes non linéaires [15]

L'analyse des systèmes est basée en général sur deux types de modèles :

- Un modèle de connaissance où apparaissent les équations de fonctionnement du système ainsi que des variables internes.
- Un modèle de comportement qui établit des relations entre les entrées et les sorties du système à partir des expériences et du comportement observé du système en réponse à des entrées fixées ou tout au moins connues.

Alors que l'obtention du premier type de modèle relève plutôt de la modélisation, l'obtention du deuxième type fait appel à l'identification.

Les systèmes non linéaires sont représentés par un modèle de connaissance, réalisé avec l'utilisation des lois de la physique qui régissent ou décrivent leur comportement. Ainsi la représentation des systèmes non linéaires est formulée par un ensemble d'équations différentielles non linéaires du premier ordre de type :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \text{ équation d'état} \quad (\text{I.3})$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), t), \text{ équation de sortie} \quad (\text{I.4})$$

Où  $\dot{x}(t)$ ,  $u(t)$  et  $y(t)$  sont respectivement, vecteur d'état, vecteur d'entrée et vecteur de sortie à l'instant  $t$ .  $f$ ,  $h$  sont des fonctions vectorielles de dimension  $m$ ,  $p$  respectivement.

Dans le cas des systèmes possédant la propriété d'affinité par rapport à l'entrée, leur représentation d'état se réduit à la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x) u \quad (\text{I.5})$$

$$y = h(x) \quad (\text{I.6})$$

Sont appelées les systèmes non linéaires analytiques.

**I.5 Linéarisation des systèmes non linéaires**

Les systèmes non linéaires se regroupent des systèmes de natures très différentes. Actuellement un ensemble de méthodes très différentes les unes des autres peut se présenter. La méthode la plus simple consiste à linéariser le système non linéaire, et en particulier à réaliser cette linéarisation autour d'un point de fonctionnement.

La linéarisation des équations du modèle autour d'un point de fonctionnement a été longtemps la voie suivie par les automaticiens confrontés à un problème non linéaire. C'est la quasi-linéarisation bien connue de tous les ingénieurs et qui se prête bien à des problèmes de régulations, avec des excursions plus au moins grandes autour du point d'équilibre. Les limitations de cette approche sont locales.

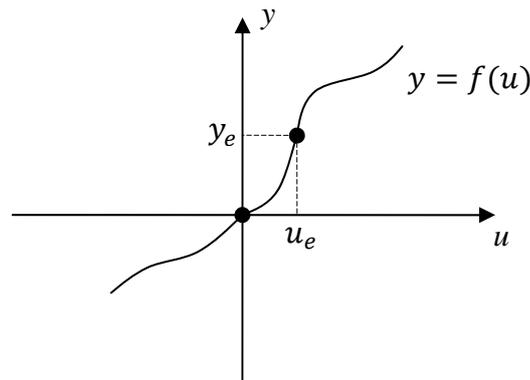
Les systèmes physiques non linéaires peuvent être représenté par des modèles linéaires qui approximent leurs comportements dynamiques au voisinage d'un point de fonctionnement appelée point d'opération ou encore un point d'équilibre.

**I.5.1 Approche graphique [1]**

Si le modèle d'un système non-linéaire est donné sous forme graphique comme il est représenté sur la figure I.11, un choix possible de modèle linéaire consiste à approximer la courbe en un point par la droite tangente en ce point.

La courbe de la figure I.11 représente l'évolution de la grandeur de sortie  $y$  d'un système non linéaire en fonction de la grandeur d'entrée  $u$ . La représentation mathématique de cette évolution est souvent traduite par  $y = f(u)$ , dont la linéarisation de cette équation est faite autour d'un point d'équilibre dit un point de fonctionnement ou d'opération.

En choisissant comme point de fonctionnement les coordonnées  $(u_e, y_e)$  dans le plan, c'est-à-dire  $y_e = f(u_e)$  tel que représenté par la figure I.11.



**Figure I.11** : Principe de linéarisation autour d'un point de fonctionnement.

La décomposition en série de Taylor de l'équation non linéaire  $y = f(u)$  est donnée par la série suivante :

$$y = f(u) \cong f(u)|_{u=u_e} + \left. \frac{df}{du} \right|_{u=u_e} (u - u_e) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2f}{du^2} \right|_{u=u_e} (u - u_e)^2 + \dots \quad (\text{I.7})$$

$$y = f(u) \cong \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u - u_e)^k}{k!} \left. \frac{d^k f}{du^k} \right|_{u=u_e} \quad (\text{I.8})$$

où  $\left. \frac{d^k f}{du^k} \right|_{u=u_e}$  est la  $k^{\text{ème}}$  dérivée de  $f$  par rapport à  $u$  calculée en  $u = u_e$ .

et  $(u - u_e)^k$  est la  $k^{\text{ème}}$  variable d'écart.

Pour  $k > 1$ , tous les termes sont négligeables devant les deux premiers termes, on écrit alors :

$$y = f(u) \cong f(u_e) + \left. \frac{df}{du} \right|_{u=u_e} (u - u_e) \quad (\text{I.9})$$

En notant  $\Delta y$  et  $\Delta u$  les variations de  $y$  et  $u$  autour du point de fonctionnement, c'est-à-dire :

$$\Delta y \cong y - y_e \quad (\text{I.10})$$

et

$$\Delta u \cong u - u_e \tag{I.11}$$

En tenant compte de la relation (I.9), on obtient :

$$\Delta y = \Delta f \cong \left. \frac{df}{du} \right|_{u=u_e} \Delta u \tag{I.12}$$

avec :

$$\left. \frac{df}{du} \right|_{u=u_e} = c = cste \tag{I.13}$$

on aura :

$$\Delta f = \Delta y = c \Delta u \tag{I.14}$$

On a recours à cette approche, lorsque la relation analytique entre les grandeurs d'entrées et les grandeurs de sorties est difficile à obtenir.

Notant que cette approche peut se généralisée à des systèmes multi variables.

➤ **Remarque I.1**

Si  $u = u(t)$  et  $y = y(t)$  sont des fonctions de temps, c'est-à-dire l'entrée et la sortie du système non linéaire dépendent du paramètre temps, alors  $t$  pourra être considéré comme un paramètre fixe, quand on effectuera les calculs de la linéarisation.

**I.5.2 Les séries de Taylor appliquées aux vecteurs [1]**

Les équations (I.8) à (I.14) sont facilement généralisables pour des vecteurs de  $n$  variables et de  $m$  fonctions non linéaires.

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$m$  et  $n$  quelconques.

dans ce cas :

$$\Delta x \cong x - x_e \tag{I.15}$$

$$\Delta f \cong f(x) - f(x_e) \tag{I.16}$$

et l'équation (I.12) devient :

$$\Delta f \cong \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_e} \Delta x \tag{I.17}$$

où  $\frac{df}{dx}$  est la matrice telle que :

$$\frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

❖ **Exemple I.1:**

Pour  $m = 1$  et  $n = 3$ , la matrice précédente est réduite à :

$$\frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

et l'équation (I.17), s'écrit alors :

$$\Delta f \cong \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \Delta x_3 \tag{I.18}$$

Cette équation représente le cas d'une fonction scalaire  $f$  linéarisée à trois variables  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ .

## I.5.3 Linéarisation d'équations différentielles non linéaires (approche analytique) [1]

Si un modèle d'un système non linéaire est connu sous forme analytique, une deuxième approche pourra être utilisée, dite approche analytique, qu'on peut montrer son principe, en considérant le cas d'un système non linéaire à plusieurs grandeurs d'entrées et plusieurs grandeurs de sorties, dont le modèle non linéaire est donné par la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

En supposant qu'on veut linéariser le système autour du point de fonctionnement  $(x_e, u_e)$  tel que  $f(x_e, u_e) = 0$ , et en notant par  $\Delta x$  et  $\Delta u$  les variations des grandeurs des états et des entrées respectivement, autour du point de fonctionnement  $(x_e, u_e)$ .

En suivant la même procédure pour linéariser les équations différentielles d'un système non linéaire autour d'un point de fonctionnement que celle présentée pour la fonction  $f(x)$ .

En considérant les variations  $\Delta x$  et  $\Delta u$  autour de point de fonctionnement  $(x = x_e(t), u = u_e(t))$ , les expressions linéarisées des équations du système (I.19) seront développées comme suit :

$$x(t) \cong x_e(t) + \Delta x(t) \quad (\text{I.20})$$

$$u(t) \cong u_e(t) + \Delta u(t) \quad (\text{I.21})$$

$$y(t) \cong y_e(t) + \Delta y(t) \quad (\text{I.22})$$

Comme le temps  $t$  est considéré comme un paramètre constant dans le calcul de la linéarisation, il sera plus pratique de le négliger pour alléger l'écriture, et on a donc :

$$x \cong x_e + \Delta x \quad (\text{I.23})$$

$$y \cong y_e + \Delta y \quad (\text{I.24})$$

$$u \cong u_e + \Delta u \quad (\text{I.25})$$

La substitution de  $x_e + \Delta x$  et  $u_e + \Delta u$  dans l'équation d'état du système (I.19) nous donne :

$$\frac{dx}{dt} \cong \frac{dx_e}{dt} + \frac{d(\Delta x)}{dt} \cong f(x_e + \Delta x, u_e + \Delta u) \quad (\text{I.26})$$

En développant cette équation comme une série de Taylor en  $(x_e, u_e)$ , et en conservant que les termes du premier ordre, on obtient :

$$\frac{dx_e}{dt} + \frac{d(\Delta x)}{dt} \cong f(x_e, u_e) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta u \quad (\text{I.27})$$

et comme

$$\frac{dx_e}{dt} = f(x_e, u_e) \quad (\text{I.28})$$

l'équation d'état linéarisé du système (I.19) s'obtient immédiatement en soustrayant les termes correspondants à chaque côté de l'équation (I.27).

d'où :

$$\Delta \dot{x} \cong \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta u \quad (\text{I.29})$$

De la même façon pour l'équation de sortie du système (I.19) :

$$y \cong y_e + \Delta y \quad (\text{I.30})$$

et

$$u \cong u_e + \Delta u \quad (\text{I.31})$$

on a :

$$y \cong y_e + \Delta y = h(x_e + \Delta x, u_e + \Delta u) \quad (\text{I.32})$$

Le développement en série de Taylor nous donne :

$$y_e + \Delta y \cong h(x_e, u_e) + \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta x + \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta u \quad (\text{I.33})$$

et comme :

$$y_e = h(x_e, u_e) \quad (\text{I.34})$$

on aura :

$$\Delta y \cong \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta x + \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta u \quad (\text{I.35})$$

En fin, les expressions générales, linéarisées des équations d'état et de sortie du système (I.19) sont données par le système suivant :

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} \cong \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta u \\ \Delta y \cong \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta x + \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta u \end{cases} \quad (\text{I.36})$$

Ce système, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} \cong A \Delta x + B \Delta u \\ \Delta y \cong C \Delta x + D \Delta u \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

avec  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des matrices linéaires en  $\Delta x$  et  $\Delta u$ , calculées en point de fonctionnement  $(x_e, u_e)$ , et elles sont définies comme suit :

$$A_{(m \times n)} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{I.38})$$

$$B_{(m \times r)} = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial u_r} \end{bmatrix} \quad (\text{I.39})$$

$$C_{(p \times n)} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{I.40})$$

$$D_{(p \times r)} = \frac{\partial h}{\partial u} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial u_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_p}{\partial u_r} \end{bmatrix} \quad (\text{I.41})$$

➤ **Remarque I.2**

Dans le cas où la matrice  $D = 0$  ( $\frac{\partial h}{\partial u} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = 0$ ), le système d'équations (I.36) peut se ramener à la forme suivante :

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} \cong \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta u \\ \Delta y \cong \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=x_e} \Delta x \end{cases} \quad (\text{I.42})$$

on aura donc :

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} \cong A \Delta x + B \Delta u \\ \Delta y \cong C \Delta x \end{cases} \quad (\text{I.43})$$

➤ **Remarque I.3**

Dans le cas où le système est mono variable (une seule entrée ( $r = 1$ ) et une seule sortie ( $p = 1$ )), les deux matrices  $B$  et  $C$  seront réduites comme suit :

$$B_{(m \times 1)} = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u} \end{bmatrix} \quad (\text{I.44})$$

$$C_{(1 \times n)} = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \left[ \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} \right] \quad (\text{I.45})$$

Le système d'équations (I.43) est interprété de la façon suivante :

Si l'entrée est perturbée ou déviée légèrement de son point de fonctionnement  $u_e(t)$  d'un écart  $\Delta u(t)$  engendrant des écarts de leur point de fonctionnement suffisamment petits,  $\Delta x$  pour l'état et  $\Delta y$  pour la sortie, alors les équations linéaires de ce système sont souvent appelées petites équations de perturbation du système non linéaire.

Les équations du système (I.43) sont de plus invariantes dans le temps si :

$$u_e = u_e(t) = cste.$$

$$x_e = x_e(t) = cste.$$

**I.6 Exemple de simulation d'une équation d'état non linéaire**

Soit l'équation d'état non linéaire décrite par :

$$\dot{x}(t) = -x^2(t) + u(t) \quad (\text{I.46})$$

posant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) = f(x, u) \quad (\text{I.47})$$

$t$  est considéré comme un paramètre constant dans le calcul de la linéarisation.

### I.6.1 Conditions de simulation

On prend comme consigne  $u = 4.2$ .

On choisie  $u_e = 4$ , et on calcule  $x_e$  en remplaçant  $u_e$  dans l'équation (I.46) comme suit:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = -x_e^2 + u_e = 0 \quad (\text{I.48})$$

Le point de fonctionnement est alors  $(x_e, u_e) = (2, 4)$ , et la condition initiale de l'état est  $(x_0 = 2)$ .

L'équation d'état linéarisée est calculée à partir de la relation (I.29), et on aura :

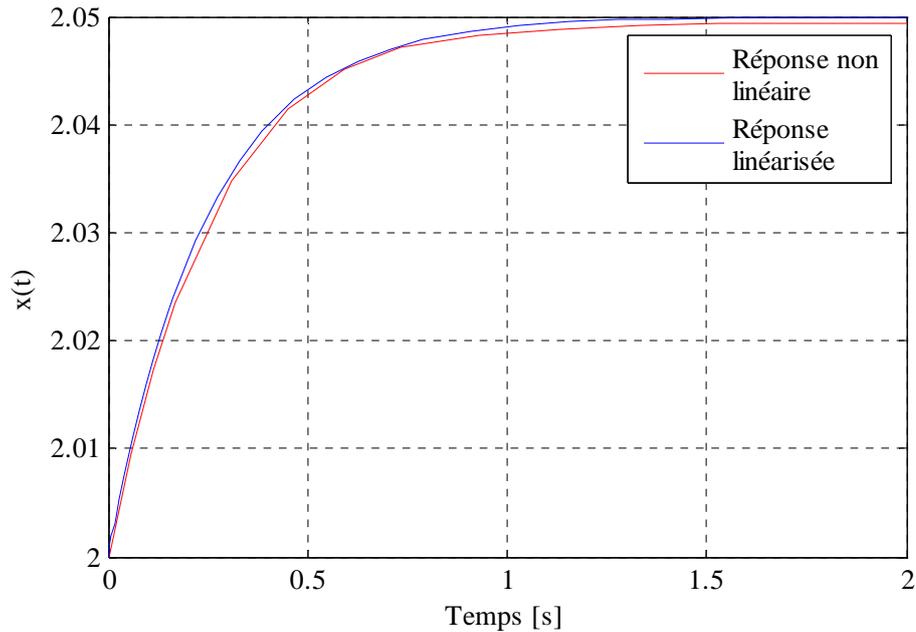
$$\Delta \dot{x} = -4 \Delta x + \Delta u \quad (\text{I.49})$$

Après la simulation, on a obtenu les courbes caractéristiques des deux équations d'états non linéaire et linéaire qui sont représentées sur la figure I.12.

### I.6.2 Interprétation des résultats

La figure I.12 montre clairement que les deux équations d'états (non linéaire et linéaire) représentées dans (I.46) et (I.49) répondent d'une manière équivalente à l'entrée de référence  $u$ . En comparant leur courbe (courbe de l'équation non linéaire et celle de l'équation linéaire), on constate qu'il y a une superposition entre les deux courbes. On dit que l'équation non linéaire est parfaitement linéarisée, grâce au bon choix des conditions initiales.

Donc le principal intérêt de la méthode réside dans le fait qu'elle s'appuie sur un théorème d'existence d'un point, dont lequel on peut obtenir une représentation mathématique linéaire équivalente au système physique, en utilisant des calculs simples et faciles.



**Figure I.12 :** Courbe de l'équation non linéaire et celle de l'équation linéarisée.

### I.7 Les limites de la méthode [1]

Comme la méthode présente des avantages cités ci-dessus, elle est limitée par :

- La lourdeur des calculs auxquels elle conduit, dès qu'on désire dépasser les premiers termes du développement ou, lorsqu'il s'agit de systèmes complexes.
- Le fait que la convergence n'est assurée que pour  $x$  petit (hypothèse de quasi-linéarité), ce qui exclut les systèmes possédant une non linéarité forte.

### I.8 Conclusion

Le comportement statique et dynamique d'un système physique peut être défini par un modèle mathématique. Mais dans de nombreux cas on aboutit, alors à un modèle non linéaire généralement très difficile à traiter, d'où la nécessité des approches de linéarisation.

Dans ce chapitre, des notions de base sur les systèmes non linéaires ont été présentées.

Puis on a vu une approche de linéarisation autour d'un point de fonctionnement et qui sert à ramener le système d'un état non linéaire à un autre dit «linéarisé».

Cependant, les résultats doivent être interprétés avec prudence, car le modèle linéarisé obtenu est une approximation, qui n'est valide que pour des perturbations suffisamment petites autour d'un point de fonctionnement.

La linéarisation autour d'un point de fonctionnement reste une approche parmi d'autres méthodes utiles pour la linéarisation des systèmes non linéaires. Parmi ces méthodes, on retrouve l'approximation par un modèle flou qui consiste à représenter un système non linéaire par un ensemble de systèmes linéaires liés par des règles.

Dans le chapitre suivant, on va s'intéresser aux notions de base sur la logique floue pour aborder par la suite la modélisation floue.

# Chapitre II

*Généralités sur la  
logique floue.*

**II.1 Introduction**

La logique floue suscite actuellement un intérêt général de la part des chercheurs, des ingénieurs et des industriels, mais plus généralement de la part de tous ceux qui éprouvent le besoin de formaliser des méthodes empiriques, de généraliser des modes de raisonnement naturels, d'automatiser la prise de décision dans leur domaine, de construire des systèmes artificiels effectuant des applications dans la plupart des domaines. Citons par exemple l'économie, la médecine, la reconnaissance des formes, la classification, les systèmes experts, les bases de données, la conception industrielle.

Un domaine d'application de la logique floue qui devient de plus en plus important est celui de la modélisation et de la commande des systèmes dynamiques. En effet, une telle logique possède des bases de calcul précises permettant de combiner plusieurs fonctions d'appartenances, et de tirer des conclusions pondérées. Le principe des systèmes flous est de remplacer les fonctions mathématiques par une série de règles linguistiques de la forme «**si** antécédent **alors** conséquent». Ainsi, on obtient un algorithme heuristique permettant de construire par apprentissage une très large classe de modèle.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les notions relatives à la logique floue, utilisées dans le domaine d'automatique.

**II.2 Variables linguistiques [3, 9, 17]**

Historiquement, L.A Zadeh a introduit la théorie des possibilités à propos de la caractérisation des variables par des descriptions linguistiques imprécises, représentées par des sous-ensembles flous. La fonction d'appartenance de ceux-ci, conduit à la définition d'une possibilité qui permet de traiter les incertitudes engendrées au cours d'un raisonnement fondés, sur les caractérisations flous des variables.

En physique, une variable  $V$ , telle que la température, prend ces valeurs dans un ensemble des nombres réels. En logique floue, une variable linguistique sert à modéliser les connaissances imprécises sur une variable, dont la valeur précise est inconnue.

La variable linguistique est représentée par un triplet  $(x, F, E_x)$ , dans lequel  $x$  est une variable (force, température, vitesse, pression, ...) défini sur un ensemble de référence  $F$  (l'ensemble des nombres entiers, des réels, ...). Sa valeur pouvant être n'importe quel élément de  $F$ , sous un univers de discours représenté par un ensemble  $E_x = \{A_1, A_2, \dots\}$  fini ou infini, de sous-ensemble flous de  $E_x$  dans  $F$ , qui sont utilisés pour caractériser la variable  $x$  définissant des prédicats des valeurs qui prend  $x$  dans  $F$ , décrit un certain nombre de termes : par exemple la température, «chaud», «froid», «tiède», ou bien (très chaud, assez chaud, tiède, assez froid) selon les valeurs possibles que la variable température  $x$  peut prendre. Les termes donnés aux sous ensembles flous  $A_i$  sont donc choisis pour effectuer des descriptions de la variable  $x$ , et pour chacun est associée à un sous-ensemble flou de  $E_x$  dans  $F$  et une fonction d'appartenance  $\mu_{A_i}(x)$ , défini sur  $F$  et à valeur dans  $[0, 1]$ .

### II.3 Ensembles flous (Sous ensembles flous) [3, 17]

La notion des sous-ensembles flous a pour but de permettre des gradations dans l'appartenance d'un élément à une classe, c'est-à-dire d'autoriser une variable à appartenir plus ou moins fortement à cette classe. Cette notion permet de résoudre les problèmes des limites mal définies, et les situations intermédiaires (entre le tout ou rien), comme le passage progressif d'une classe à une autre. Ces caractéristiques d'approximations évitent l'utilisation arbitraire des limites rigides à des classes.

Pour pouvoir décrire facilement un sous ensemble flou, et dans quelle mesure il diffère d'un sous ensemble classique, un sous-ensemble classique  $E$  de l'ensemble de référence  $F$  est défini par une fonction caractéristique  $F_E$ , qui prend la valeur 0 pour les éléments de  $F$  n'appartient pas à  $E$  et la valeur 1 pour ceux qui appartiennent à  $E$  :

$$F_E: x \rightarrow \{0,1\} \quad (\text{II.1})$$

Un sous-ensemble flou  $E$  de  $F$  est défini par une fonction d'appartenance qui associe à chaque élément  $x$  de  $F$  (ensemble de référence), le degré  $\mu_E(x)$ , compris entre 0 et 1 avec lequel  $x$  appartient à  $E$ .

$$\mu_E: x \rightarrow [0 \ 1] \quad (\text{II.2})$$

Le sous ensemble flou  $E$  est un sous ensemble classique de  $F$ , dans le cas particulier où  $\mu_E(x)$  ne prend que des valeurs égales à 0 ou 1.

Un sous-ensemble classique est donc un cas particulier de sous-ensemble flou. Notons dans ce qu'il suit qu'on parle souvent d'ensemble flou et non pas de sous-ensemble flou.

#### II.4 Fuzzification [9, 10, 16]

Dans le but de traitement numérique des variables linguistiques, dans ce contexte une attribution à chaque valeur de la variable linguistique une fonction d'appartenance  $\mu$ , dont la valeur varie entre 0 et 1 avec une classification en un certain nombre d'ensembles flous.

En toute généralité, la fonction d'appartenance est désignée par  $\mu_E(x)$ . Où l'argument  $x$  se rapporte à la variable linguistique, tandis que l'indice  $E$  indique l'ensemble concerné. Avec une valeur précise pour la fonction d'appartenance liée à une valeur déterminée de la variable  $x$  sera désignée par «facteur d'appartenance, degré d'appartenance, ou coefficient d'appartenance» de telle sorte que :

$$\sum \mu_E(x) = 1 \quad (\text{II.3})$$

##### II.4.1 Les fonctions d'appartenances dans un univers de discours [9, 10, 16, 17]

Les fonctions d'appartenances servent à la modélisation et la quantification de la crédibilité attribuée à des faits dans un univers dit univers de discours, formée par l'ensemble des fonctions d'appartenances, tel que, un fait certain aura un coefficient d'appartenance égale à 1 pour le point de fonctionnement considéré. Un fait incertain aura un coefficient d'appartenance inférieur ou égal à 1 comme la montre les figures II.1.b et II.1.c.

Lorsque le fait est certain, il correspond à l'énoncé de la valeur d'une variable  $x = x_0$ , avec  $\mu_{x_0}(x) = 1$  et  $\mu_{x_0}(x) = 0$  pour  $x \neq x_0$  : on a alors un singleton, comme le montre la figure II.1.a. Ces divers prédicats sont représentés par des fonctions d'appartenances de différentes formes (triangulaire, trapézoïdale, gaussienne), selon le modèle flou conçu. La figure II.2 montre l'univers de discours d'une variable (exemple : vitesse), qui couvrira l'ensemble des prédicats (très grande vitesse, grande vitesse, moyenne vitesse, petite vitesse, faible vitesse) prises par cette variable.

L'intersection entre deux prédicats consécutifs est non nulle, de façon à pouvoir exercer une pondération sur la variable linguistique à modéliser. Il en résulte un chevauchement des variables qui doit être suffisant pour permettre une description continue des variables (figures II.2 et II.3), mais pas trop important pour limiter l'imprécision figure II.4.

- Il est notamment préférable d'éviter que les fonctions d'appartenances de deux prédicats voisins soient simultanément égales à 1.
- La fonction d'appartenance peut être choisit par rapport aux faits de la variable (figure II.1).
- Plusieurs formes de fonction d'appartenance peut représenter les prédicats, (triangulaire, trapézoïdale, gaussienne,...) (figure II.2 à figure II.5), telle que la forme triangulaire est représentée sur la figure II.2 et la forme trapézoïdale est représentée sur la figure II.4, ou les deux formes (triangulaire et trapézoïdale) au même univers de discours, comme il est représenté sur la figure II.3. Il existe d'autre formes à choisir dans certain cas, comme la fonction gaussienne illustrée sur la figure II.5, telle que :

$$\mu(v) = e^{-(v-\bar{v})^2/2\sigma^2} \quad (\text{II.4})$$

Avec,  $\bar{v}$  est la moyenne, et  $\sigma$  est la variance de la moyenne, notamment  $\bar{v}$  est généralement choisit, et  $\sigma$  est une constant à sélectionner.

- Le calcul de degré d'appartenance de la variable vitesse  $v_R$  à l'ensemble flou (grande vitesse, moyenne vitesse, faible vitesse) est réalisé par la projection sur l'axe des ordonnées ( $\mu_E(v_R)$ ) du point d'intersection entre la valeur de la variable à modéliser et la fonction d'appartenance de la variable vitesse  $v_R$  au même ensemble flou. La figure II.3 représente l'estimation de degré d'appartenance.

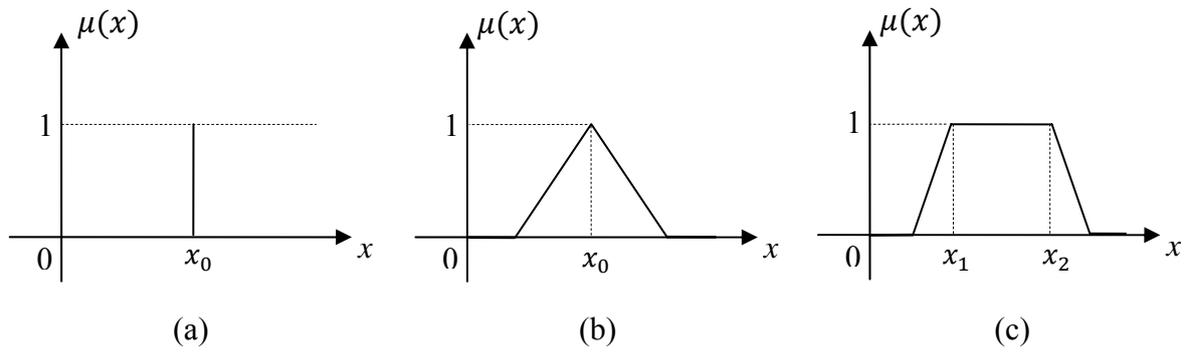


Figure II.1 : Fonctions d'appartenances pour un fait certain et un fait incertain.

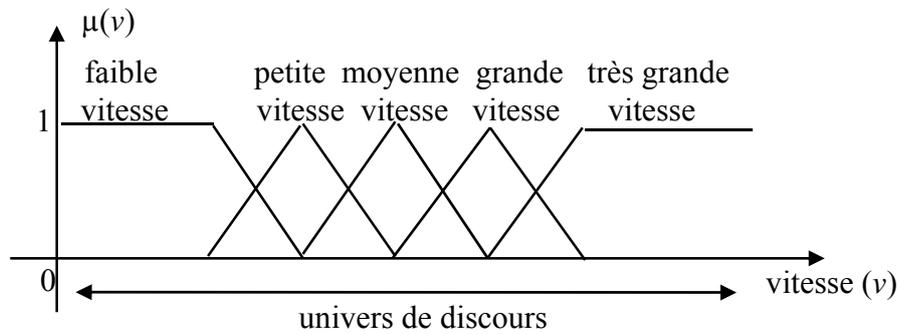


Figure II.2 : Bonne répartition avec une forme triangulaire des fonctions d'appartenances.

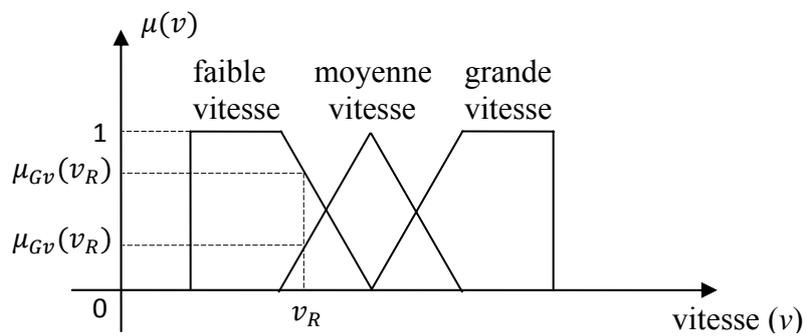


Figure II.3 : Chevauchements suffisants.

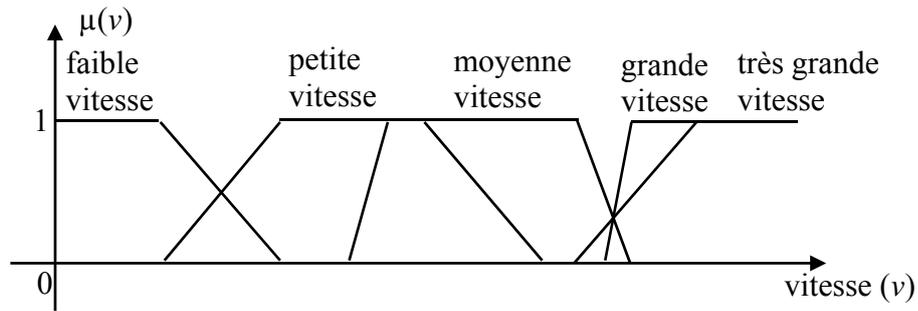


Figure II.4 : Chevauchements excessifs.

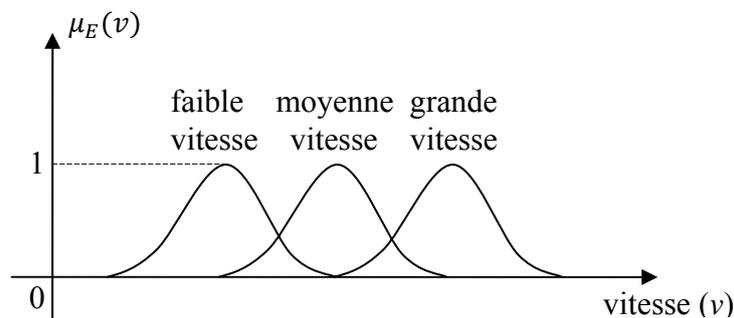


Figure II.5 : Fonction d'appartenance avec une forme gaussienne.

## II.5 L'inférence [9, 10, 17]

La stratégie de la logique floue dépend essentiellement des inférences adoptées. Elles lient les grandeurs physiques, aux variables linguistiques, telle que l'inférence est décrite d'une manière explicite par la description linguistique à l'aide d'un certain nombre de règles. Chaque règle possède une condition, précédée du symbole «**si**» et une conclusion, action ou opération, précédée du symbole «**alors**» selon le type du procédé physique étudié et du modèle flou adopté (Takagi-Sugeno, Mamdani). L'inférence, à titre d'exemple, peut être comme suit :

**Si** ( $x_1$  est négatif grand et  $x_2$  est environ zéro),

**Alors** ( $y$  égal positif grand), ou

**Si** ( $x_1$  est négatif grand et  $x_2$  est positif moyen),

**Alors** ( $y$  égal positif moyen), ou

**Si** ( $x_1$  est négatif moyen et  $x_2$  est environ zéro),

**Alors** ( $y$  égal négatif moyen), ou...

L'inférence peut être composée de plusieurs règles suivant le nombre de variables et des sous ensembles flous qui forment l'univers de discours.

La description linguistique des inférences est généralement assez lourde, dont une certaine simplification de l'écriture par la description symbolique ; telle que les ensembles sont alors désignés d'une manière abrégée par leur symbole. Pour l'exemple précédent on a :

**Si** ( $x_1$  est NG et  $x_2$  est EZ), **alors** ( $y$  est PG), ou

**Si** ( $x_1$  est NG et  $x_2$  est PM), **alors** ( $y$  est PM), ou

**Si** ( $x_1$  est NM et  $x_2$  est EZ), **alors** ( $y$  est NM), ou ...

Avec  $x_1$ ,  $x_2$  et  $y$  sont des variables physiques, et (grand positif, environ zéro, positif moyen, négatif moyen, négatif grand) symboliser respectivement par (GP, EZ, PM, NM, NG) sont les ensembles flous (prédicats).

## II.6 Opérateurs flous [9]

Comme on l'a vu à la section précédente, les variables linguistiques sont liées entre elles au niveau des inférences par des opérateurs «*ET*» et «*OU*». Il s'agit d'opérateurs de la logique floue qui interviennent sur les fonctions d'appartenance représentant les variables linguistiques. De plus, il existe un opérateur Non (complément à un, négatif, inverse). Les règles de calcul pour ces opérateurs sont bien connues dans le cas de logique classique.

Cette section présente les règles de calcul pour la logique floue. Le plus souvent, les opérateurs «*ET*» et «*OU*» sont réalisés respectivement par les règles «*min*» et «*max*». Il y a alors une certaine affinité avec les règles de la logique classique. Cependant, il existe un grand nombre de règles pour la réalisation des opérateurs «*ET*» et «*OU*» qui tiennent compte du caractère particulier de la logique floue. Quelques unes de ces règles seront présentées à la fin de la section.

## II.6.1 Opérateur «ET» [9]

L'opérateur «ET» correspond à l'intersection de deux ensembles  $a$  et  $b$ , et on écrit :

$$c = a \cap b = a \text{ ET } b \quad (\text{II.5})$$

Dans le cas de la logique floue, l'opérateur «ET» est réalisé dans la plupart des cas par la formation de minimum ; appliqué aux fonctions d'appartenances  $\mu_a(x)$  et  $\mu_b(x)$ , des deux ensembles  $a$  et  $b$ , à savoir :

$$\mu_{a \text{ et } b}(x) = \mu_c(x) = \min[\mu_a(x), \mu_b(x)] \quad (\text{II.6})$$

On parle alors, d'opérateur minimum. L'opération «ET» est représentée sur la figure II.6.

La règle (II.6) reste valable même si les deux variables  $x$  et  $y$  appartiennent à des ensembles  $a$  et  $b$  différentes. Elle s'exprime alors de manière explicite.

$$\mu_c(x, y) = \min[\mu_a(x), \mu_b(y)] \quad (\text{II.7})$$

On peut facilement vérifier que l'opérateur minimum est commutatif, c'est-à-dire qu'il est possible d'intervenir  $\mu_a$  et  $\mu_b$  différemment, sans que le résultat change.

$$\mu_c = \min[\mu_a, \mu_b] = \min[\mu_b, \mu_a] \quad (\text{II.8})$$

Cet opérateur peut être appliqué à plus de deux ensembles. Dans ce cas, s'applique alors le théorème d'associativité (II.9).

$$\begin{aligned} \mu_d &= \min[\mu_a, \mu_b, \mu_c] = \min\{\min[\mu_a, \mu_b], \mu_c\} \\ &= \min\{\mu_a, \min[\mu_b, \mu_c]\} \\ &= \min\{\min[\mu_a, \mu_c], \mu_b\} \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

## II.6.2 Opérateur «OU» [9]

L'opérateur «OU» correspond à l'union de deux ensembles  $a$  et  $b$ . On a alors :

$$c = a \cup b = a \text{ OU } b \quad (\text{II.10})$$

La réalisation de l'opérateur «OU» au niveau de la logique floue se fait en général par la formation du maximum, appliqué aux fonctions d'appartenance  $\mu_a(x)$  et  $\mu_b(x)$  des deux ensembles  $a$  et  $b$ . On a donc l'opérateur maximum :

$$\mu_c = \max[\mu_a(x), \mu_b(x)] \quad (\text{II.11})$$

La figure II.7 montre cette opération.

A noter qu'il est possible que la fonction d'appartenance résultante  $\mu_c(x)$  atteigne deux fois la valeur 1 typique, d'une forme concave.

Dans ce cas aussi, les deux variables  $x$  et  $y$  peuvent appartenir à des ensembles  $a$  et  $b$  différentes. On a alors :

$$\mu_c(x, y) = \max[\mu_a(x), \mu_b(y)] \quad (\text{II.12})$$

Evidemment, l'opérateur maximum est aussi commutatif.

$$\mu_c = \max[\mu_a, \mu_b] = \max[\mu_b, \mu_a] \quad (\text{II.13})$$

L'associativité est applicable dans le cas de plusieurs ensembles, selon :

$$\begin{aligned} \mu_d &= \max[\mu_a, \mu_b, \mu_c] = \max\{\max[\mu_a, \mu_b], \mu_c\} \\ &= \max\{\mu_a, \max[\mu_b, \mu_c]\} \\ &= \max\{\max[\mu_a, \mu_c], \mu_b\} \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

II.6.3 Opérateur «Non» [9]

$$\text{Non}(a) = \bar{a} = c \tag{II.15}$$

Non( $a$ ) représente les éléments de  $x$  qui n'appartiennent pas à l'ensemble  $a$ . dans la logique floue, cette définition est exprimée par les fonctions d'appartenances de la manière suivante :

$$\mu_c(x) = 1 - \mu_a(x) \tag{II.16}$$

Cet opérateur est représenté sur la figure II.8.

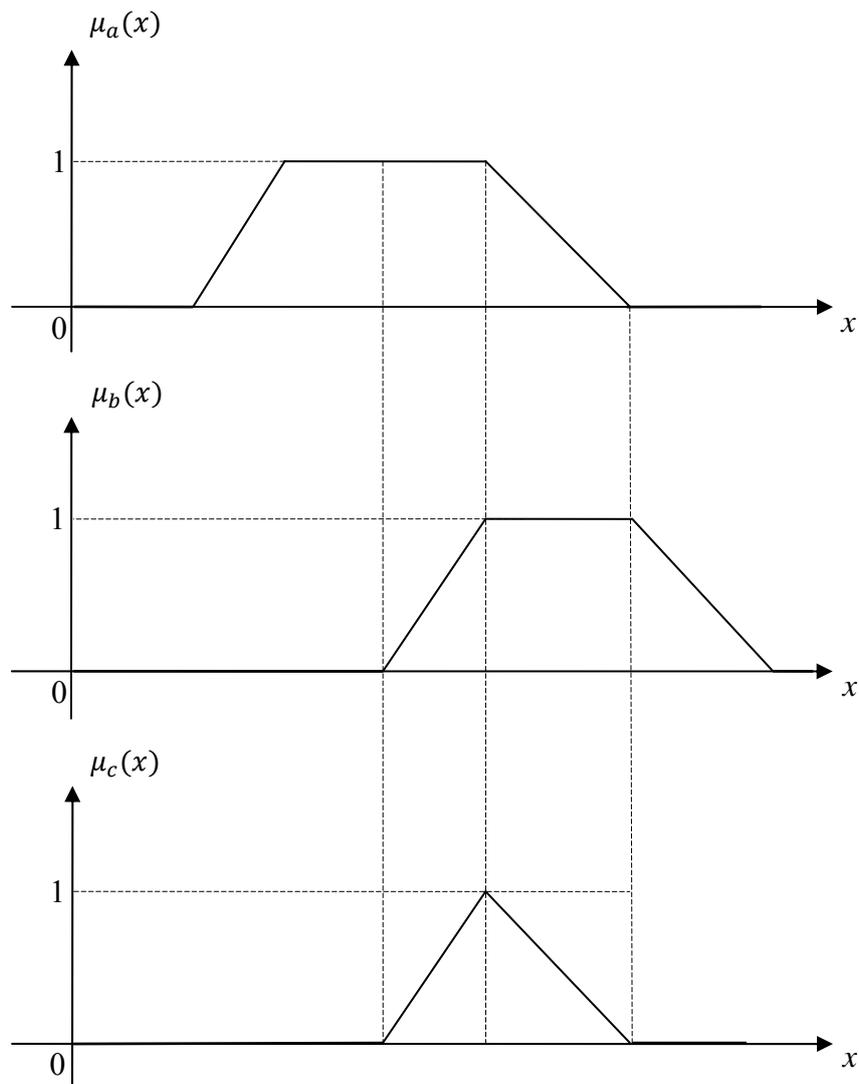


Figure II.6 : Opérateur ET réalisé par la fonction minimum (min).

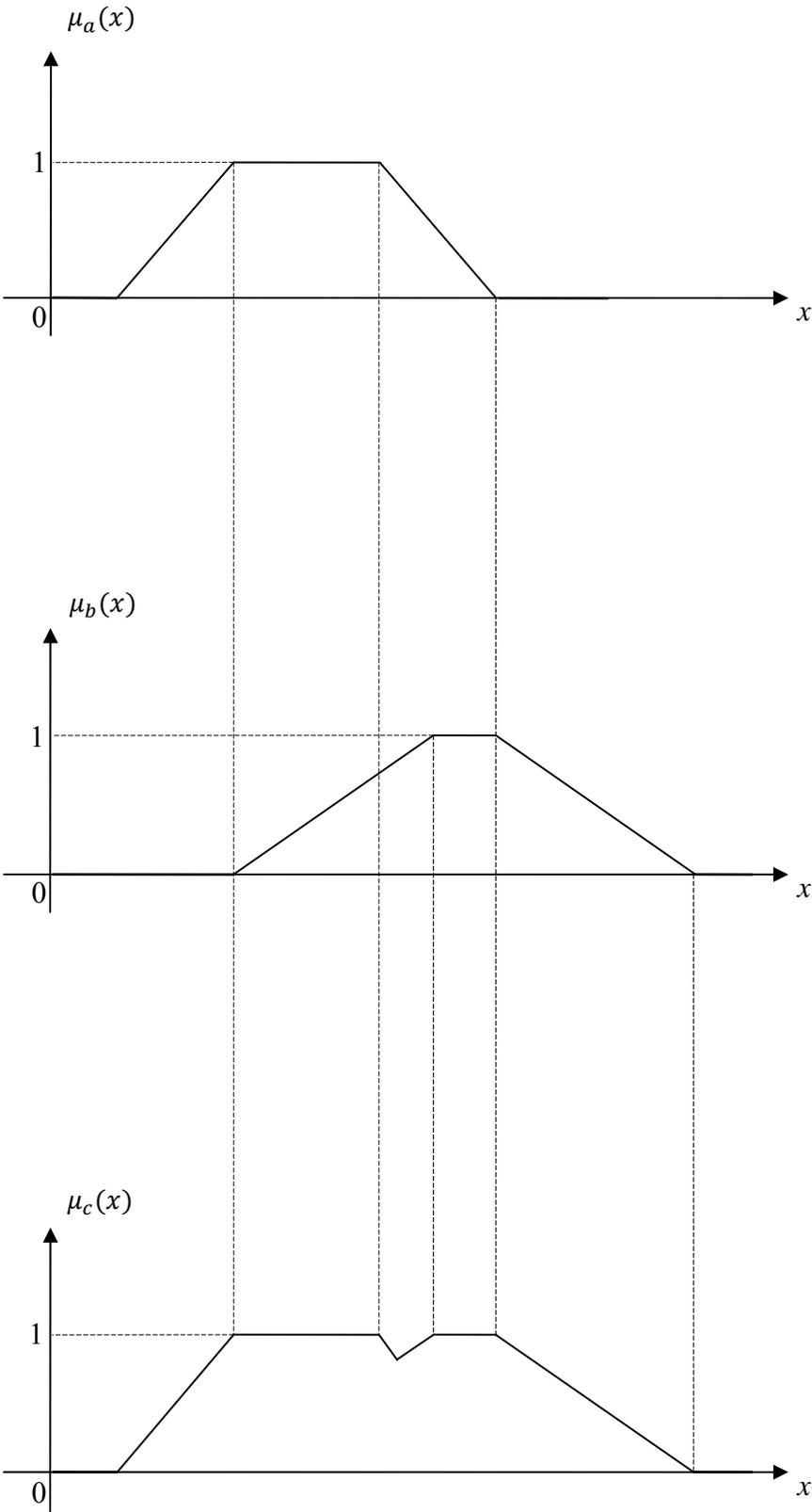
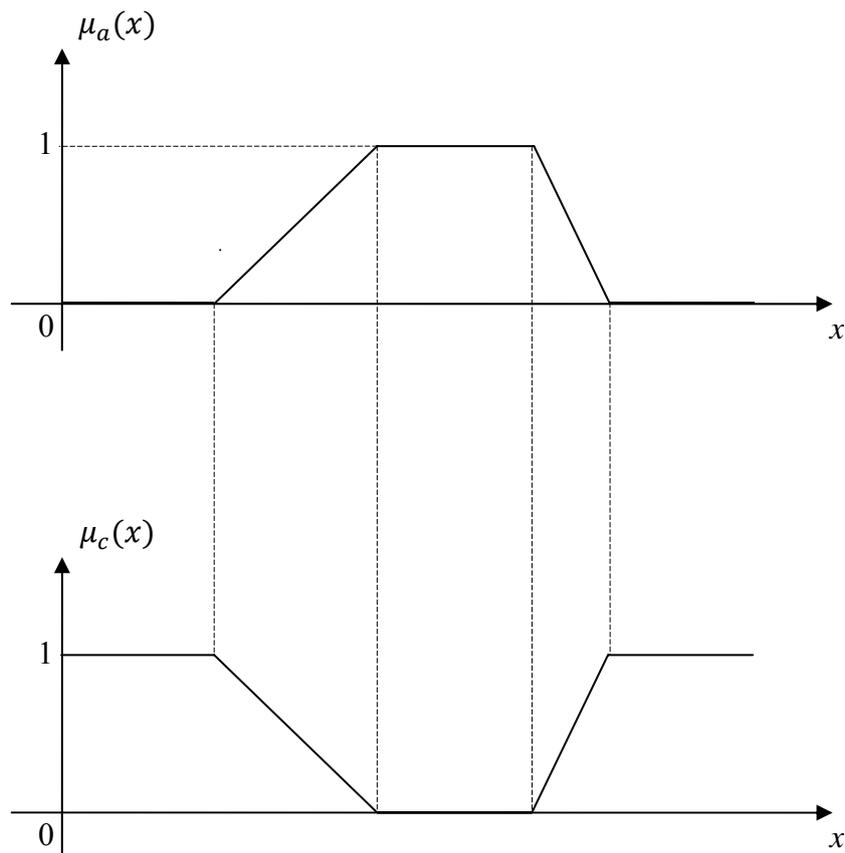


Figure II.7 : Opérateur OU réalisé par la fonction maximum (max).



**Figure II.8 :** Représentation de l'opérateur flou «Non».

#### II.6.4 Opérateurs «ET» et «OU» réalisés par les opérations arithmétiques [9]

Dans II.6.1 et II.6.2, on a introduit la formation du minimum et du maximum pour réaliser respectivement les opérateurs «ET» et «OU». Dans la plupart des cas, ces opérateurs donnent des résultats convenables, surtout dans le modèle flou de Mamdani. Cependant, dans certaines circonstances, il peut être judicieux d'utiliser d'autres réalisations. Comme la formation des opérateurs arithmétiques (somme, produit), introduite dans le modèle flou de Takagi-Sugeno. Cela dépend du système physique à étudier et du modèle flou utilisé, et de la méthode d'inférence introduite.

Souvent, l'opérateur «ET» est réalisé par la formation du produit appliqué aux fonctions d'appartenances, selon la relation :

$$\mu_c(x) = \mu_a(x) \mu_b(x) \quad (\text{II.17})$$

Il s'agit d'opérateur produit.

Le résultat de cette opération est représenté sur la figure II.9. La fonction d'appartenance résultante est toujours inférieure ou égale à 1. Elle reste donc à l'intérieur de l'intervalle définie par :  $0 \leq \mu \leq 1$ . La règle de calcul (II.17) peut être étendue à plus de deux termes dans le produit lorsqu'il faut combiner trois ou plusieurs ensembles.

Par analogie, on peut réaliser l'opérateur «OU» par la formation de la somme des fonctions d'appartenances ou plus précisément, par la valeur moyenne, à savoir :

$$\mu_c(x) = \frac{\mu_a(x) + \mu_b(x)}{2} \quad (\text{II.18})$$

On parle alors de l'opérateur somme.

La figure II.10, montre l'effet de cet opérateur. La somme est divisée par 2. En effet, il est fort possible que la somme  $\mu_a(x) + \mu_b(x)$  dépasse le domaine admissible ( $0 \leq \mu \leq 1$ ). Afin que cette somme reste dans le domaine défini, on peut la normaliser. Lors de la normalisation, on multiplie la somme par un facteur inférieur à 1, de sorte que la fonction d'appartenance atteigne la valeur maximale 1. Une autre possibilité plus systématique consiste à diviser la somme par 2.

Les opérateurs produit et somme sont souvent appliqués dans les modèles flous, surtout dans le modèle flou de Takagi-Sugeno (modèle TS flou).

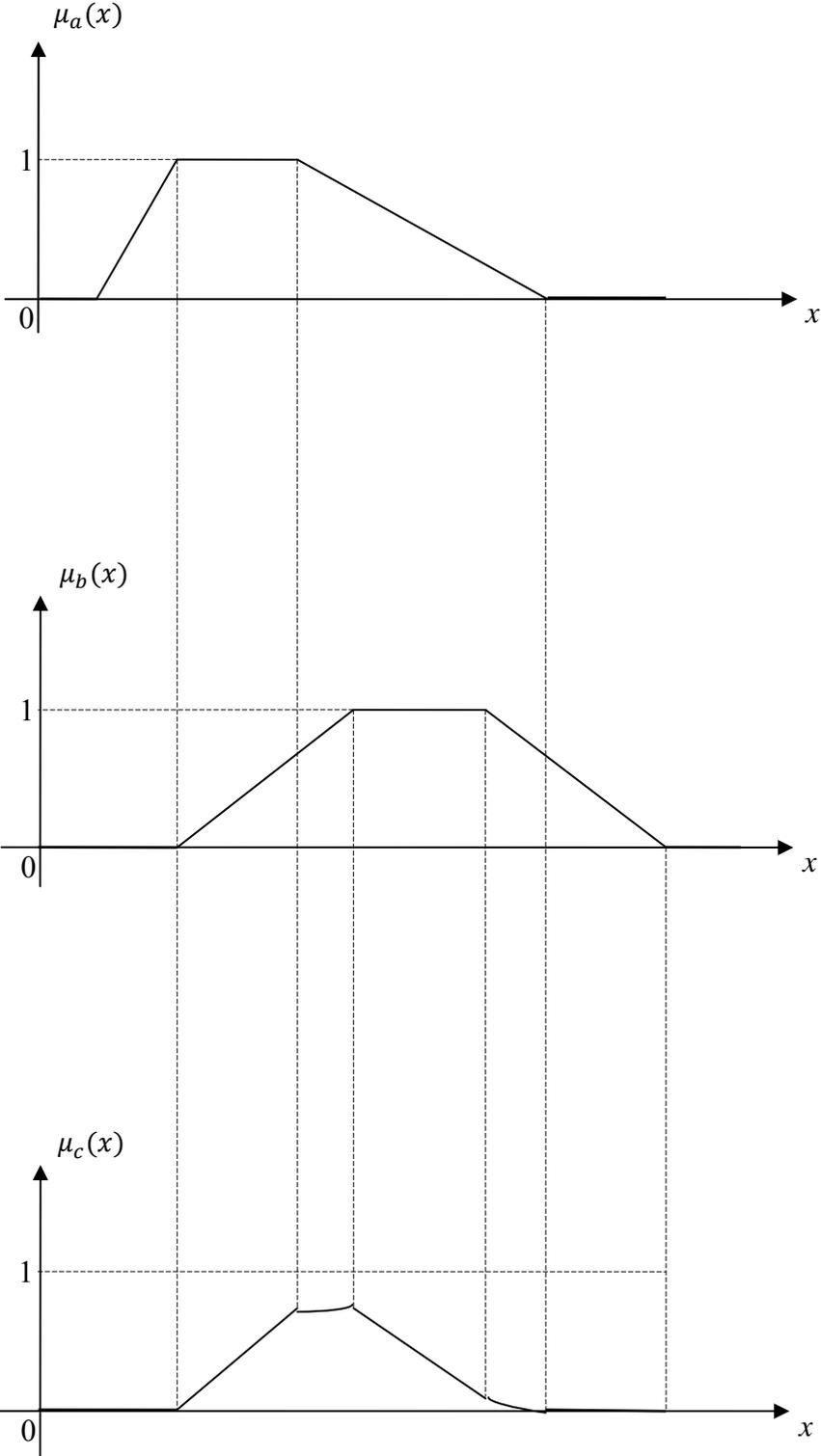


Figure II.9 : Opérateur «ET» réalisé par la formation du produit.

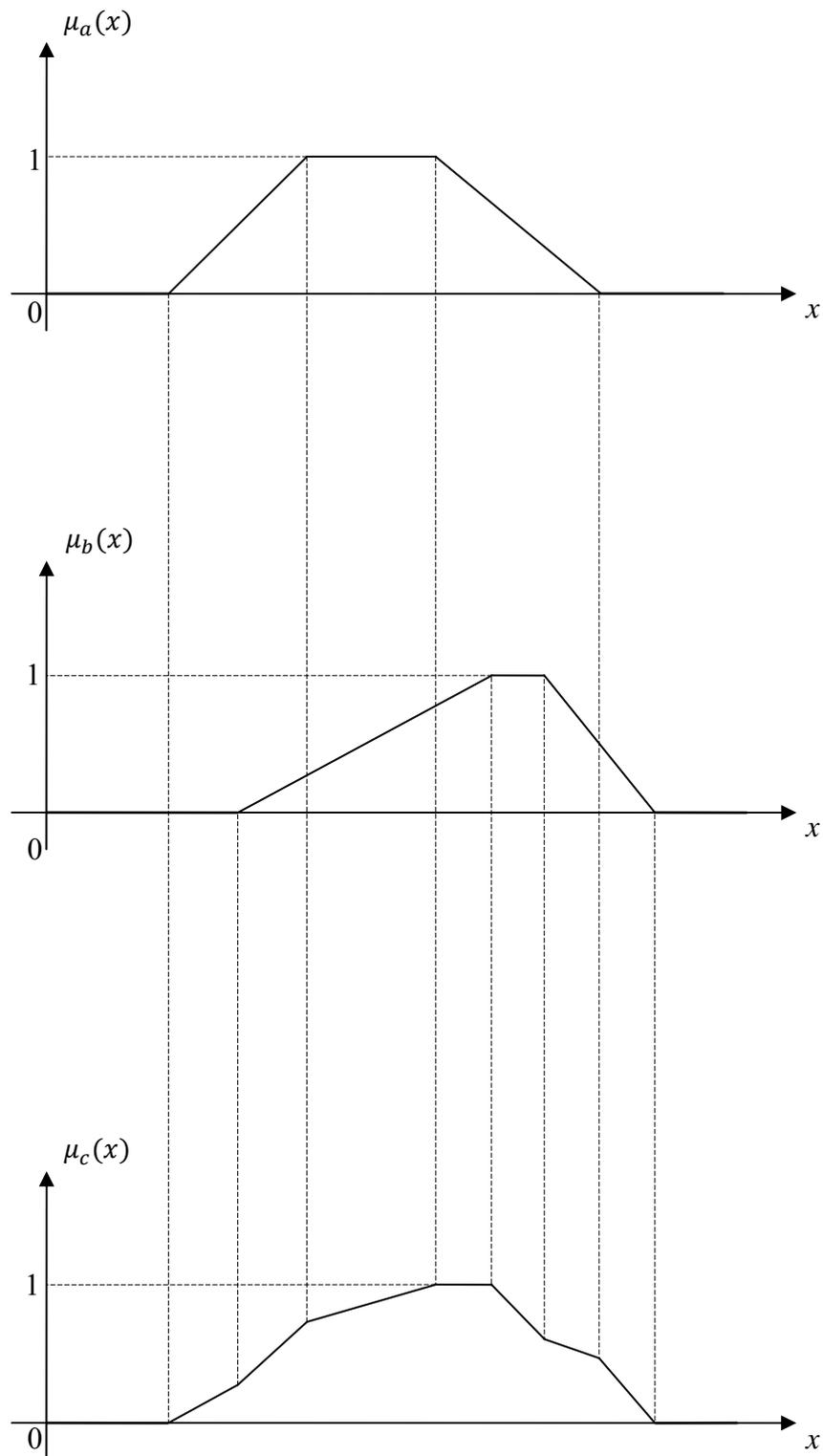


Figure II.10 : Opérateur «OU» réalisé par la formation de la somme (valeur moyenne).

### II.7 Méthode d'inférence par les opérateurs flous [4, 9, 10]

Dans les inférences, comme citées précédemment, interviennent les opérateurs «*ET*» et «*OU*». L'opérateur «*ET*» s'applique aux variables à l'intérieur d'une règle, tandis que l'opérateur «*OU*» lie les différentes règles. A cause de l'empiètement des fonctions d'appartenances, en général deux ou plusieurs règles sont activées en même temps. Se fait doit être prise en considération lors de la réalisation de l'opérateur «*OU*». Une règle d'inférence est activée lorsque le facteur d'appartenance lié à la condition de cette règle est non nul.

Pour ces réalisations, il existe plusieurs possibilités pour combiner ces opérateurs qui s'appliquent aux fonctions d'appartenances. La notion de «*méthode d'inférence*» est introduite. Elle détermine la réalisation des différents opérateurs dans une inférence, permettant ainsi un traitement numérique de cette dernière. A cet effet, plusieurs méthodes d'inférences sont introduites. Citons à titre d'exemple :

- Méthode d'inférence min-max, pour le modèle de Mamdani.
- Méthode d'inférence somme-produit et min-produit, pour le modèle de Takagi-Sugeno.

Comme on trouve la méthode d'inférence max-prod, et d'autres méthodes d'inférences générées par les experts à partir du raisonnement flou utilisé.

Afin de mettre en évidence l'application des méthodes d'inférences, on fera appel à un exemple dont on décrira les deux méthodes utilisées pour le modèle flou de Takagi-Sugeno (somme-min, somme-prod), avec deux variables d'entrées  $x_1$  et  $x_2$  et deux variables de sorties  $y_1$  et  $y_2$ , chacune est décomposée en trois ensembles (négatif grand, environ zéro, positif grand), symbolisées respectivement (NG, EZ, PG), et définie par des fonctions d'appartenances, comme le montre la figure II.11, avec l'inférence est composée de deux règles :

**Si** ( $x_1$  est *PG* et  $x_2$  est *EZ*) **alors**  $y_1 = EZ$ , ou

**Si** ( $x_1$  est *EZ* et  $x_2$  est *NG*) **alors**  $y_2 = NG$

La deuxième règle admet donc l'opérateur «*OU*» à l'intérieur de la condition.

### II.7.1 Application de la méthode «somme-produit» dans le modèle TS flou [4, 9, 10]

Cette méthode d'inférence est particulièrement utilisée dans le modèle flou de Takagi-Sugeno. Dans l'inférence somme-produit est réalisée en général, au niveau de la condition, en remplaçant l'opérateur «OU» par la formation du somme et l'opérateur «ET» par la formation du produit. Par contre, la conclusion dans chaque règle introduite par «**alors**», qui lie le facteur d'appartenance de la variable de la condition avec la fonction d'appartenance de la variable de sortie est réalisée par l'opérateur de produit. D'où la désignation de cette méthode d'inférence par somme-produit. L'application de cette méthode est représentée sur la figure II.12 pour l'exemple précédent avec deux variables  $x_1, x_2$  et deux règles d'inférences.

La méthode d'inférence somme-produit peut être décrite en toute généralité de la manière suivante : à la condition de chaque règle  $R^l$  (avec  $l = 1, 2$ , pour l'exemple de la figure II.12) est attribué un facteur d'appartenance  $\mu_{A_i}(x_j)$ , avec  $A_i = \{A_1, A_2, A_3\}$  représente les prédicats (ensembles flous) respectivement  $\{PG, EZ, NG\}$ . Il dépend évidemment de la condition elle-même et des valeurs déterminées pour les variables  $x_j = \{x_1, x_2\}$ . Si la condition n'est pas du tout vérifiée, on a évidemment  $\mu_{A_i}(x_j) = 0$ , à noter que l'opérateur «ET» et «OU» sont réalisés respectivement par la formation du produit et de la somme pour chaque règle. On obtient les degrés d'activations (fonctions d'appartenances partielles) par la relation :

$$R^l: w_l = \mu_{A_i}(x_1) \mu_{A_i}(x_2) \quad (\text{II.19})$$

A partir des degrés d'activations, les poids d'appartenances (degrés normalisés d'accomplissements) seront calculer par :

$$v_l = \frac{w_l}{\sum_{l=1}^k w_l} \quad (\text{II.20})$$

$k$  étant le nombre de règles.

La formation du produit pour la conclusion «**alors**», permet de calculer le résultat de chaque règle, par la multiplication du poids d'appartenance par la sortie  $y_l$  de celle-ci. On a alors :

$$R^l: v_l \ y_l \tag{II.21}$$

Le résultat de l'information est réalisé par la formation somme pour l'opérateur «OU» de toutes les conséquences des règles. On a donc :

$$y = \sum_{l=1}^k v_l \ y_l \tag{II.22}$$

**II.7.2 Application de la méthode «somme-min» dans le modèle TS flou [4, 9, 10]**

Par opposition aux méthodes d'inférences précédentes, la méthode d'inférence somme-min est réalisée, au niveau de la condition, en remplaçant l'opérateur «ET» par la formation de minimum ( $\Lambda$ ), et l'opérateur «OU» par la formation de la somme.

Le modèle flou de Takagi-Sugeno utilise cette méthode d'inférence généralement, lorsque l'antécédent contient une seule valeur d'entrée. Si on fait appel à l'exemple précédent où on rapproche la variable d'entrée à une seule valeur  $x$ , et avec trois règles données par :

- Si** ( $x$  est  $PG$  et  $x$  est  $NG$ ), **alors**  $y_1 = EZ$ , ou
- Si** ( $x$  est  $EZ$  et  $x$  est  $PG$ ), **alors**  $y_2 = NG$ , ou
- Si** ( $x$  est  $NG$  et  $x$  est  $EZ$ ), **alors**  $y_3 = PG$

L'interprétation de ces règles par la méthode d'inférence somme-min dans le modèle de Takagi-Sugeno est illustrée sur la figure II.13.

La formalisation des règles d'inférences est réalisée dans le cas général comme suit :

En premier lieu, on calcule les fonctions d'appartenance partielles  $w_l(x)$  pour chaque règle, par la formation du minimum ( $\Lambda$ ), pour l'opérateur «ET», et on a donc :

$$R^l: w_l(x) = \min [\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_p}(x)] = \mu_{A_1}(x) \ \Lambda \ \mu_{A_2}(x) \ \Lambda \ \dots \ \Lambda \ \mu_{A_p}(x) \tag{II.23}$$

En suite, on calcul le poids d'appartenance de chaque règle par la formule suivante :

$$R^l: v_l = \frac{w_l(x)}{\sum_{l=1}^k w_l(x)} \tag{II.24}$$

Puis on calcul la conséquence, représentée par «**alors**» pour chaque règle, en introduisant la formation du produit pour la sortie de chacune. Et on a alors :

$$R^l: v_l y_l \tag{II.25}$$

Avec  $y_l$  étant la sortie de chaque règle d'inférence, et  $v_l$  est le poids d'appartenance calculé précédemment, pour chaque règle.

En fin, la sortie résultante  $y$  de cette méthode d'inférence sera calculée par la formation de la somme, pour l'opérateur «**OU**» qui lie les règles par la formule :

$$y = \sum_{l=1}^k v_l y_l \tag{II.26}$$

Les méthodes d'inférences fournissent des résultats qui peuvent être numériques, utilisés directement comme une valeur déterminée. Mais dans d'autre cas les résultats portent des informations floues. En effet, ces résultats peuvent être une fonction d'appartenance ou une combinaison des sous-ensembles flous, dont ils nécessitent une transformation de ces informations floues à des autres qui sont déterminées. Cette transformation est appelée : «**Défuzzification**».

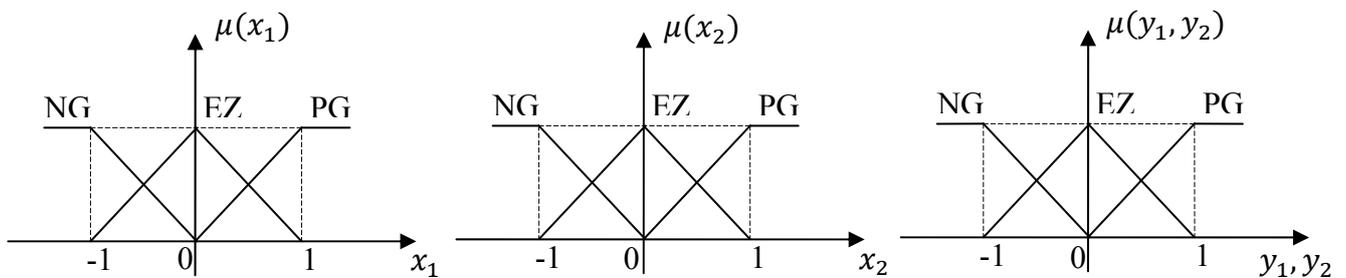


Figure II.11 : Fonctions d'appartenances.

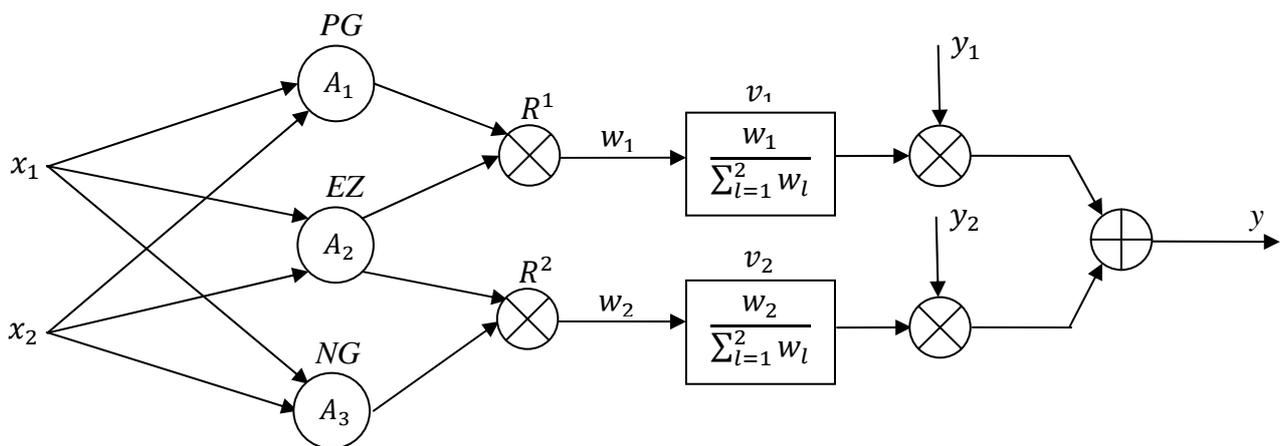


Figure II.12 : Méthode d'inférence somme-prod dans le modèle de Takagi-Sugeno.

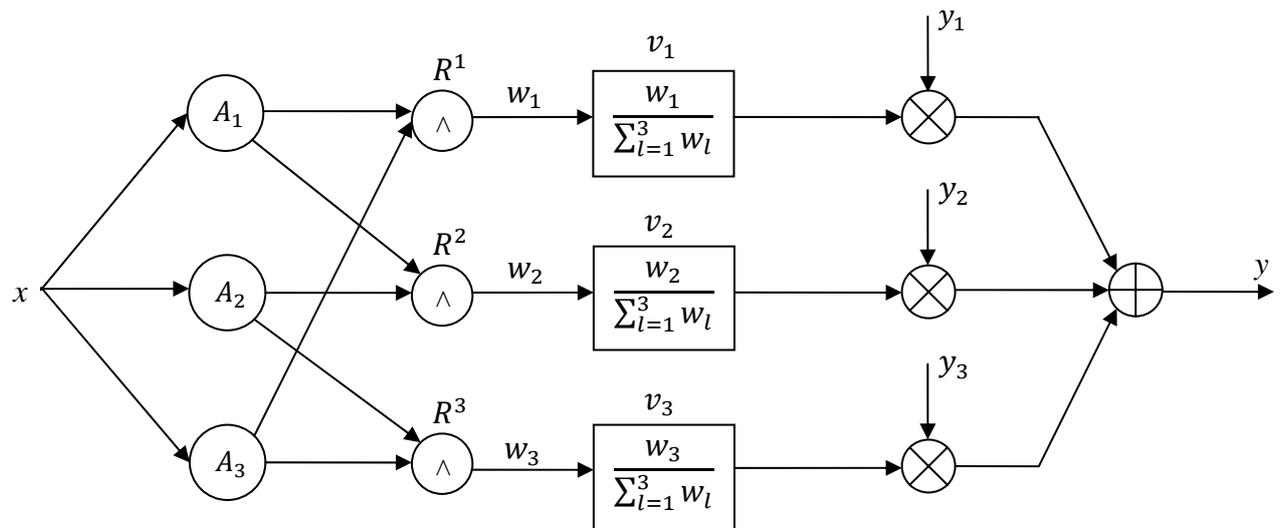


Figure II.13 : Méthode d'inférence somme-min dans le modèle de Takagi-Sugeno.

### II.8 Défuzzification [9, 10, 16]

La défuzzification est une interface linguistique-numérique qui transforme la partie floue, issue de raisonnement flou, en une valeur numérique directement exploitable par le processus.

En effet, le sous-ensemble flou de l'univers de discours ayant été calculé par le mécanisme d'inférence, sera transformé en une valeur non floue par l'opérateur de défuzzification permettant ainsi une valeur effective intégrée au processus.

Plusieurs méthodes de défuzzification sont envisagées. On peut citer : la méthode de principe du maximum et la méthode du centre de gravité.

Afin de présenter ces deux méthodes, qui sont les plus utilisées. Considérons le sous-ensemble flou «A» du l'univers de discours qui est représenté sur la figure II.14. La fonction d'appartenance de ce sous-ensemble flou, représente la pertinence de chaque action  $y$  envisageable.

La première méthode correspond à l'utilisation du principe de maximum. Celui-ci consiste à choisir comme sortie effective  $y_0$  de l'interface de défuzzification, une des valeurs possédant la plus grande appartenance au sous-ensemble flou «A». Par cette méthode, on applique une des actions les plus pertinentes :

$$D_F : E_y \rightarrow E_y$$

$$A = \{y \in E_y, \mu_A(y)\} \rightarrow D_F(y) = y_0 \tag{II.27}$$

avec :

$$\mu_A(y_0) = \sup_y \{\mu_A(y)\} \tag{II.28}$$

$D_F$  : défuzzification floue.

$E_y$  : univers de discours.

Ainsi pour le sous-ensemble flou «A» de la figure II.14, la figure II.15 présente la sortie  $y_0$  obtenue par cette méthode.

Il se peut dans la figure II.14, que la fonction d'appartenance du sous-ensemble flou «A» possède plusieurs maximums identiques. Dans ce cas, et afin d'éviter un choix arbitraire de la valeur  $y_0$ , on choisit comme opérateur de défuzzification une transformation qui effectue

la moyenne de ces maximums, c'est-à-dire, la moyenne des actions les plus pertinentes. On a donc :

$$D_F : E_y \rightarrow E_y ,$$

$$A = \{y \in E_y, \mu_A(y)\} \rightarrow D_F(y) = y_0 = \frac{\int_s y dy}{\int_s dy} \quad (\text{II.29})$$

avec :

$$s = \left\{ y \in E_y, \mu_A(y_0) = \sup_y \{\mu_A(y)\} \right\} \quad (\text{II.30})$$

La figure II.16 donne, pour cette méthode, la sortie « $y_0$ » pour le sous-ensemble flou « $A$ » de la figure II.14.

Pour prendre en compte l'inférence de l'ensemble des valeurs « $y$ » proposées par la solution floue  $y$  (c'est-à-dire possédant une appartenance non-nulle à ces sous ensembles), on utilise la deuxième méthode de défuzzification dit : «centre de gravité». On a alors :

$$D_F : E_y \rightarrow E_y,$$

$$A = \{y \in E_y, \mu_A(y)\} \rightarrow D_F(y) = \bar{y} = \frac{\int_{E_y} y \mu_A(y) dy}{\int_{E_y} \mu_A(y) dy} \quad (\text{II.31})$$

Cette méthode est très utilisée, car elle effectue la moyenne des actions « $y$ » pondérées par leurs appartenances  $\mu_A(y)$ , ce qui implique que la valeur effective résultante est plus précise. La figure II.17 présente l'application de cette méthode au sous-ensemble flou « $A$ » de la figure II.14.

➤ **Remarque II.1**

Ces configurations et les méthodes de défuzzification, sont généralement utilisées dans le modèle flou de Mamdani, l'un des premiers à appliquer la logique floue. Cependant, dans une approche, introduite par Sugeno, la fuzzification seule est réalisée explicitement, tant que les parties inférences et défuzzification sont confondues.

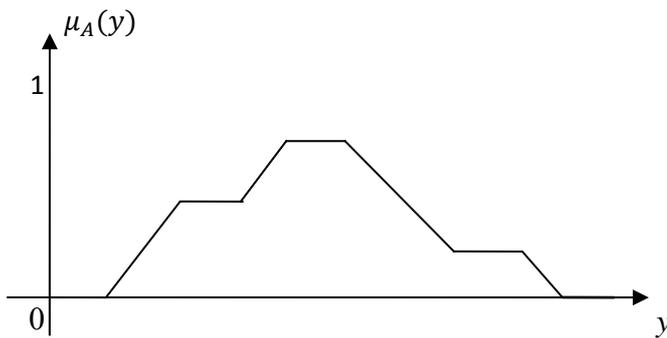


Figure II.14 : La sortie des inférences comme une fonction d'appartenance au sous-ensemble

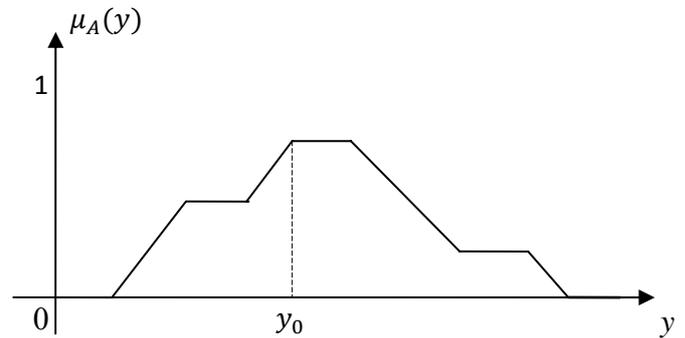


Figure II.15 : Sortie numérique pour une défuzzification par le principe de maximum.

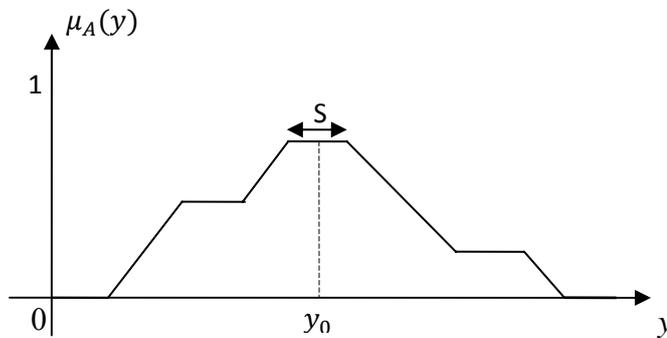


Figure II.16 : Défuzzification par le principe de la moyenne de maximum.

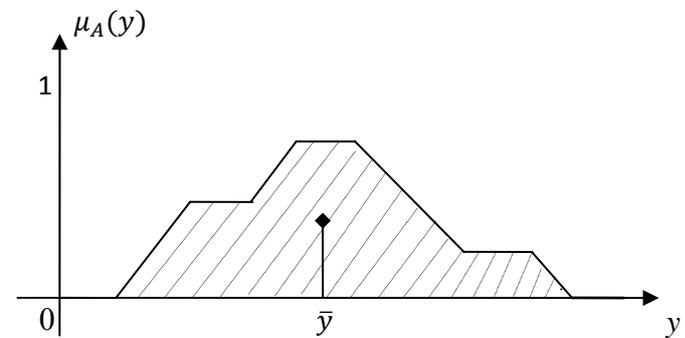


Figure II.17 : Calcul de sortie par la méthode de défuzzification centre de gravité.

### II.9 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté quelques notions de base sur la logique floue qui se résument dans les variables floues, les opérateurs flous, les fonctions d'appartenances, les règles et les méthodes d'inférences.

L'étude d'un système physique par le raisonnement flou, dans le domaine d'automatique, présente un intérêt primordial, vue la facilité d'introduire des variables linguistiques qui servent à définir des fonctions mathématiques appelées fonctions

d'appartenances qui sont ensuite utilisées pour fixer les règles d'inférences convenables quant à la modélisation du système physique.

Il y a plusieurs modèles flous proposés pour la modélisation floue des systèmes dynamiques et parmi eux on trouve le modèle de Takagi-Sugeno (modèle TS flou), le plus utilisé, qu'on va étudier, en détail, dans le chapitre suivant.

# Chapitre III

*Modélisation floue des  
systèmes dynamiques.*

**III.1 Introduction**

Depuis plusieurs années, des travaux concernant la modélisation des systèmes non linéaires, comprenant des approches basées sur les méthodes qualitatives, analytiques ou graphiques, ont été élaborés. Ils utilisent, principalement, l'espace d'état et permettent d'obtenir des modèles sous formes linéaires exploitables.

Une méthode extrêmement féconde a également vu le jour concernant des modèles flous de type Takagi-Sugeno (modèles TS flous). Ces modèles sont constitués des règles, dont la partie conclusion est mise sous la forme d'une représentation d'état linéaire. Ce type de modèle permet de représenter une large classe des systèmes non linéaires. Notamment, il utilise des critères locaux ou globaux permettant ainsi l'obtention des modèles localement linéaires avec des incertitudes de modélisation.

Ce chapitre est consacré à la modélisation floue des systèmes dynamiques. Après les notions de base relatives à la modélisation floue, on s'intéresse à l'approximation des fonctions mathématiques, puis on aborde la modélisation floue des systèmes dynamiques.

**III.2 Structure générale des modèles flous [6, 8, 12, 18]**

Comme on a cité dans le chapitre précédent, les règles sont matérialisées par des implications logiques de la forme **Si** «*antécédent*» **Alors** «*conséquent*», chaque implication est appelée règle, d'où la nomination règle «**Si - Alors**» :

$$R^l: \mathbf{Si} \ x \text{ est } A_i^l, \mathbf{Alors} \ y \text{ est } B_i^l \quad (\text{III.1})$$

$i = 1, 2, \dots, p, l = 1, 2, \dots, k.$

$x$  dénote la variable linguistique d'entrée (antécédent).

$A_i^l$  sont des ensembles flous antécédents (prémises).

$y$  est la variable linguistique de sortie (conséquent).

$B_i^l$  sont des ensembles flous conséquents.

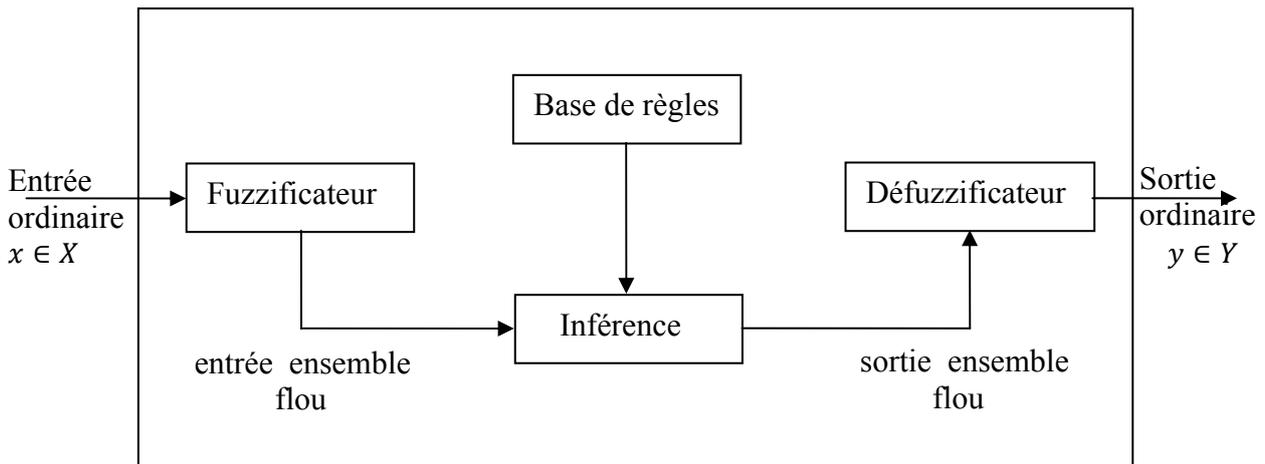
Les variables  $x$  et  $y$  appartiennent respectivement aux ensembles flous  $A_i^l$  et  $B_i^l$  sont définis sur leurs domaines respectifs :

$$x \in X \subset R^p \quad \text{et} \quad y \in Y \subset R^q.$$

Les fonctions d'appartenances des ensembles flous, antécédents et conséquents, sont des applications :

$$\mu(x): x \rightarrow [0 \ 1] \quad \text{et} \quad \mu(y): y \rightarrow [0 \ 1], \text{ respectivement.}$$

Les termes linguistiques  $A_i^l$  et  $B_i^l$  sont généralement sélectionnés d'un ensemble des termes prédéfinis, tel que petit, moyen, grand, etc. Notant par  $A$  et  $B$  ces ensembles, on a alors  $A_i^l \in A$  et  $B_i^l \in B$ . La figure III.1 représente la structure générale des modèles flous.



**Figure III.1 :** Représentation de la structure générale des modèles flous.

En modélisation floue des systèmes, la sélection de la structure implique habituellement les choix suivants :

- Variables d'entrées et de sorties : Dans les systèmes dynamiques il n'est pas toujours facile à déterminer. Pour cela plusieurs sources d'informations permettent de faciliter ce choix, tel que la connaissance préalable de comportement dynamique du système. Parfois des méthodes de sélection automatique de structure (l'ordre du système)

basées sur des données, peuvent être utilisées pour comparer les différents choix en termes de critère de performance.

- Structure des règles : Ce choix dépend du type de modèle flou utilisé (linguistique, singleton, Takagi-Sugeno) et la forme de l'antécédent (fonction d'appartenance multi variable ou dans la forme composée).
- Nombre et type de fonction d'appartenance pour chaque variable : Ce choix détermine le niveau de détail (granularité) du modèle. De nouveau, le but de la modélisation ainsi que la connaissance disponible vont influencer cette sélection.

Des méthodes automatiques basées sur des données peuvent être utilisées pour ajouter ou supprimer des fonctions d'appartenances dans le modèle.

Une fois que la structure est fixée, la performance de la méthode de modélisation peut être réglée avec précision en ajoutant les paramètres des fonctions d'appartenances de l'antécédent et du conséquent.

### **III.3 Différents types des modèles flous [6, 8, 16]**

En fonction de la forme  $B_i^l$  de la conséquence d'une règle, trois types de modèles flous peuvent être distingués :

- Modèle flou de Mamdani : où l'antécédent et la conséquence sont des propositions floues. Il est appelé aussi modèle flou linguistique.
- Modèle flou relationnel : qui peut être considéré comme une généralisation du modèle linguistique, où un seul terme antécédent peut être associé à plusieurs termes de la conséquence par une relation floue.
- Modèle flou de type Takagi-Sugeno (modèle TS flou) : où la conséquence est une fonction ordinaire des variables d'entrée (antécédent).

#### **III.3.1 Modèle flou de Mamdani (modèle linguistique) [6, 8, 16]**

Dans les modèles linguistiques, les quantités floues sont décrites par des termes linguistiques, et le modèle flou constitue une description du système dans une langue

naturelle. Ce type est caractérisé par des règles floues ayant des prémisses et des conclusions floues. Elles permettent une description linguistique du système par une base de règles floues de la forme :

$$R^l: \text{Si } x \text{ est } A_i^l, \text{ Alors } y \text{ est } B_i^l \quad (\text{III.2})$$

où  $x \in X \subset R^n$  est la variable antécédent représentant la variable d'entrée du système flou.

$y \in Y \subset R^q$  est la variable conséquence représentant la sortie du système flou.

$A_i^l$  et  $B_i^l$  sont des termes linguistiques définis par des ensembles :

$$\mu_{A_i^l}(x): x \rightarrow [0 \ 1] \quad \text{et} \quad \mu_{B_i^l}(y): y \rightarrow [0 \ 1], \text{ respectivement.}$$

L'algorithme suivant, résume l'inférence par la méthode **min-max** dans le modèle de Mamdani.

Etape 1 : on va calculer pour chaque règle, la fonction d'appartenance partielle ou le degré d'activation  $w^l$  de l'antécédent :

$$w_l = \mu_{A_1^l}(x_1) \wedge \mu_{A_2^l}(x_2) \wedge \mu_{A_3^l}(x_3) \wedge \dots \wedge \mu_{A_p^l}(x_n) \quad (\text{III.3})$$

Etape 2 : on calcul l'ensemble flou total de sortie  $B^l$  (résultant), en prenant le maximum des conclusions individuelles  $B_i^l$  de chaque règle :

$$\mu_{B^l}(y) = \text{Max}(\mu_{B_i^l}(y)) \quad (\text{III.4})$$

$l = 1, 2, \dots, k.$

Etape 3 : la défuzzification de l'ensemble de sortie  $B^l$  sera représentée par une seule valeur numérique effective.

Il existe plusieurs méthodes de défuzzification. En citant à titre d'exemple, la forme la plus courante et la plus simple à utiliser dite la moyenne floue pondérée (Fuzzy Weighted Mean) donnée par :

$$y_s = \frac{\sum_{l=1}^k w_l \bar{y}_l}{\sum_{l=1}^k w_l} \quad (\text{III.5})$$

où  $w_l$  est le degré d'activation de la  $l^{\text{ème}}$  règle.

Pour l'inférence de produit,  $w_l$  prend la forme suivante :

$$w_l = \prod_{i=1}^p \mu_{A_i^l}(x_j) \quad (\text{III.6})$$

$j = 1, 2, \dots, n.$

les  $\bar{y}_l$  sont les moyennes (les centres de gravités) des ensembles flous de sortie  $B^l$  donné par :

$$\bar{y}_l = \frac{\int y \mu_{B^l}(y) dy}{\int \mu_{B^l}(y) dy} \quad (\text{III.7})$$

Ce modèle présente l'avantage d'être facile interprétable, et bien adapté à l'utilisation des entrées floues. En revanche, il a une capacité de présentation limitée.

### III.3.2 Modèle flou de Takagi-Sugeno (Modèle TS flou) [6, 8, 17]

Un autre type de modèle flou qui est souvent utilisé est celui de Takagi-Sugeno (modèle TS flou). Ce type de modèle est comme celui de Mamdani, construit à partir d'une base de règle «**Si ... Alors ...**», dont laquelle, si la prémisse est toujours exprimée linguistiquement, le conséquent utilise des variables numérique plutôt que des variables linguistiques. Le conséquent peut être exprimer, par exemple, sous la forme d'une constante, d'un polynôme ou de manière générale avec une fonction ou une équation différentielle dépendant des variables associées à l'antécédent. La collection générale des règles  $R^l$  de ce type du modèle sont représentées comme suit :

$$R^l: \text{Si } x \text{ est } A_i^l \text{ Alors } y_l = f_l(x), l = 1, 2, \dots, k \quad (\text{III.8})$$

où  $R^l$  dénote la  $l^{\text{ème}}$  règle du modèle et  $k$  le nombre de règles qui contiennent la base de règles.

$x \in R^n$  est la variable d'entrée (antécédent) et  $y \in R^q$  est la variable de sortie (conséquent).

$A_i^l$  est le sous ensemble de l'antécédent de la  $l^{\text{ème}}$  règle, définie par une fonction d'appartenance de la forme :

$$\mu_{A_i^l}(x): R^n \rightarrow [0 \ 1] \quad (\text{III.9})$$

Les fonctions conséquences  $f_l$  sont choisies sous la forme paramétrique, où leurs structures doivent être égales pour toutes les règles, et seulement leurs paramètres qui changent.

Parmi les formes paramétriques pratiques, on trouve la forme linéaire affine :

$$y_l = a^{lT} x + b^l \quad (\text{III.10})$$

où  $a^{lT}$  est le vecteur transposé des paramètres et  $b^l$  est un scalaire d'offset.

On appelle ce type de modèle «modèle TS affine» ou «modèle TS linéaire».

Lorsque le vecteur des paramètres  $a^l = 0$ , pour  $l = 1, 2, \dots, k$ , les conséquences du modèle deviennent des constantes, on obtient alors le modèle singleton.

Puisque une constante peut être considérée comme un ensemble flou singleton, on aura :

$$R^l: \text{Si } x \text{ est } A_i^l \text{ Alors } y_l = b^l \quad (\text{III.11})$$

### III.3.2.1 Inférence et régression non linéaire dans le modèle TS flou [6, 8, 17]

L'inférence débute par le calcul de degré d'activation  $w_l(x)$  de l'antécédent. Ce degré est simplement égal à une combinaison des fonctions d'appartenances des propositions individuelles en utilisant les opérateurs de la logique floue (produit, somme, minimum et maximum).

Selon l'expression pour l'exemple du produit, on a :

$$w_l(x) = \prod_{i=1}^k \mu_{A_i^l}(x) \quad (\text{III.12})$$

Le choix des opérateurs dépend du système étudié et de ses données.

L'obtention de la sortie du modèle est réalisée à partir d'une combinaison des opérations d'inférences et de défuzzification. La sortie finale est calculée par la moyenne pondérée des sorties  $y_l$  correspondantes aux règles  $R^l$ , pondérées par le degré d'accomplissement normalisé, selon l'expression suivante :

$$y = \frac{\sum_{l=1}^k w_l(x) y_l}{\sum_{l=1}^k w_l(x)} \quad (\text{III.13})$$

En notant que  $v_l$  est le degré d'accomplissement normalisé conformément à l'expression :

$$v_l = \frac{w_l(x)}{\sum_{l=1}^k w_l(x)} \quad (\text{III.14})$$

et par l'analogie avec (III.10) et (III.13) la forme de défuzzification sera alors :

$$y = \frac{\sum_{l=1}^k w_l(x) (a^{lT} x + b^l)}{\sum_{l=1}^k w_l(x)} \quad (\text{III.15})$$

Nous abordant par la suite ce type du modèle dans le cas de la modélisation et la linéarisation des systèmes dynamiques non linéaires.

#### **III.4 Approximation des fonctions non linéaires par le modèle TS flou [5, 17]**

Dans le contexte de l'approximation des fonctions non linéaires, le modèle TS flou prouve une approximation performante.

Dans ce qu'il suit, on va réaliser une simple approximation d'une fonction non linéaire ( $f(x) = x^3$ ), représentée sur la figure III.2, à l'aide du modèle TS flou sur l'intervalle  $x \in [-2 \ 2]$ , en utilisant des fonctions d'appartenances de types gaussiennes.

L'approximation de cette fonction peut être réalisée par trois fonctions linéaires mais elles restent toujours rudimentaires d'une part, et d'autre part, l'extension à cinq fonctions linéaires améliore cette approximation. A cet effet, cinq valeurs seront choisies comme des points de linéarisation, données par :  $\bar{x}_i = [-1.75, -1.1, 0, 1.1, 1.75]$ .

Les droites tangentes à la fonction non linéaire ( $f(x) = x^3$ ) en ces points, réalisent une linéarisation de cette fonction autour de ces points.

Les droites de linéarisation sont données comme suit :

Pour  $\bar{x}_1 = -1.75$  :

$$y_1 = 11.87 + 10.05 x$$

Pour  $\bar{x}_2 = -1.1$  :

$$y_2 = 2.07 + 3.738 x$$

Pour  $\bar{x}_3 = 0$  :

$$y_3 = 0.9739 x$$

Pour  $\bar{x}_4 = 1.1$  :

$$y_4 = -2.07 + 3.738 x$$

Pour  $\bar{x}_5 = 1.75$  :

$$y_5 = -11.87 + 10.05 x$$

Sur cette univers de discours, on va choisir les prédicats caractérisant les fonctions d'appartenances par les termes linguistiques suivants :

Grand Négatif, pour ( $\bar{x}_1 = -1.75$ ), Petit Négatif, pour ( $\bar{x}_2 = -1.1$ ), Zéros pour, ( $\bar{x}_3 = 0$ ), Petit Positif, pour ( $\bar{x}_4 = 1.1$ ), Grand Positif, pour ( $\bar{x}_5 = 1.75$ ), symbolisés respectivement par (GN, PN, Z, PP, GP) =  $A_i$ .

Pour cette illustration les fonctions d'appartenances Gaussiennes sont mieux à choisir, et on a :

$$\mu(x) = e^{(x-\bar{x}_i)^2/2\sigma^2} \quad (\text{III.16})$$

avec  $\bar{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  est la moyenne et  $\sigma$  est la variance de la moyenne.

$\bar{x}_i$  sont choisis pour caractériser les prédicats et  $\sigma$  est une constante à sélectionner avec une erreur éstimer à 0.424, le choix de ces constantes donne les fonctions d'appartenances représentées sur la figure III.3, noté comme suit :

$$\mu_{GN}(x) = e^{(x-\bar{x}_1)^2/2\sigma^2} \quad (\text{III.17})$$

$$\mu_{PN}(x) = e^{(x-\bar{x}_2)^2/2\sigma^2} \quad (\text{III.18})$$

$$\mu_Z(x) = e^{(x-\bar{x}_3)^2/2\sigma^2} \quad (\text{III.19})$$

$$\mu_{PP}(x) = e^{(x-\bar{x}_4)^2/2\sigma^2} \quad (\text{III.20})$$

$$\mu_{GP}(x) = e^{(x-\bar{x}_5)^2/2\sigma^2} \quad (\text{III.21})$$

L'ensemble des règles construites du modèle TS flou de cette approximation sera décritent :

**Si**  $x$  est GN, **Alors**  $f(x)$  est  $y_1$

**Si**  $x$  est PN, **Alors**  $f(x)$  est  $y_2$

**Si**  $x$  est Z, **Alors**  $f(x)$  est  $y_3$

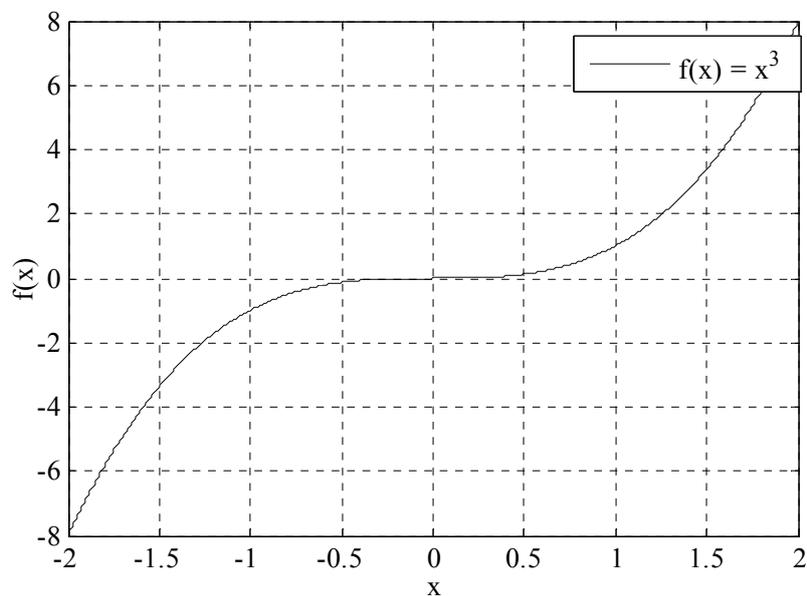
**Si**  $x$  est PP, **Alors**  $f(x)$  est  $y_4$

**Si**  $x$  est GP, **Alors**  $f(x)$  est  $y_5$

L'ensemble de ces inférences est réalisé par une entrée commune  $x$ , alors que les sorties sont différentes ce qui implique une défuzzification globale réalisée par la moyenne pondérée, donnée par la formule :

$$y = \frac{\sum_{i=1}^5 \mu_{A_i}(x) y_i}{\sum_{i=1}^5 \mu_{A_i}(x)} \quad (\text{III.22})$$

avec  $\mu_{A_i}(x)$  dénote le degré d'appartenance de l'antécédent à l'ensemble flou  $A_i$  et les  $y_i$  sont des conséquents de chaque règle.



**Figure III.2 :** Représentation de la fonction  $f(x) = x^3$ .

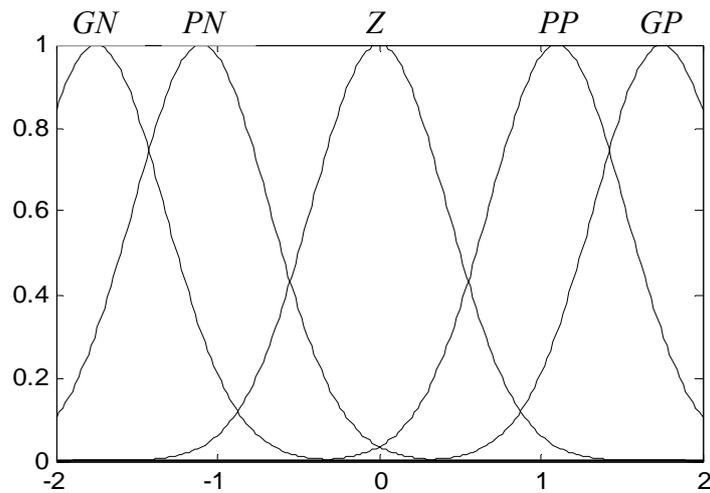


Figure III.3 : Fonction d'appartenances gaussiennes.

#### III.4.1 Conditions de simulation

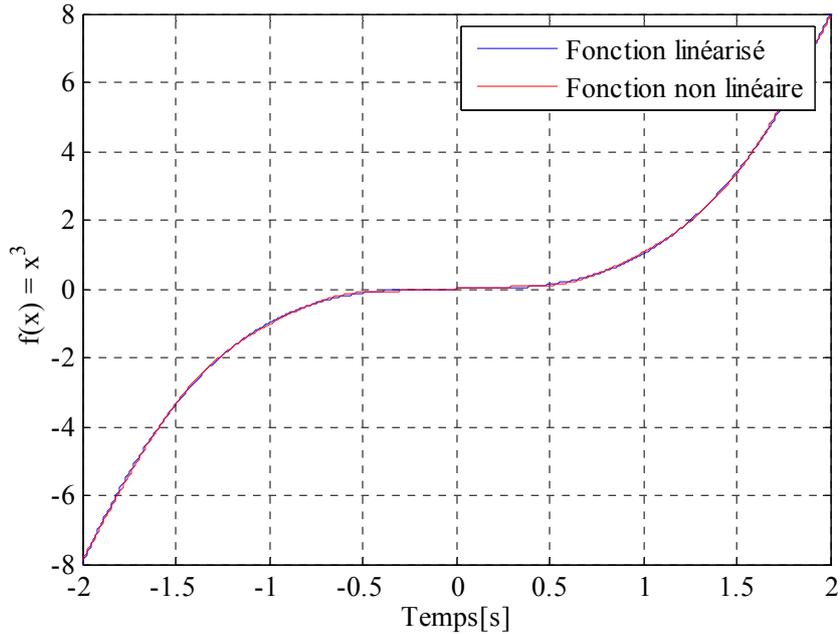
On prend :

$x \in [-2 \ 2]$  avec un pas de 0.01.

$\bar{x}_i = [-1.75, -1.1, 0, 1.1, 1.75]$  qui sont les cinq points de linéarisation.

$\sigma = 0.424$  qui est une erreur estimée.

Après la simulation, on a obtenu les deux courbes caractéristiques de la fonction  $f(x) = x^3$  (courbe de la fonction non linéaire et celle approximée par le modèle TS flou) qui sont représentées sur la figure III.4.



**Figure III.4 :** Courbes de la fonction non linéaire et la fonction approximée par le modèle TS flou.

### III.4.2 Interprétation des résultats

Le résultat apparu sur la figure III.4 présente une excellente approximation, dont on voit clairement la superposition des deux courbes (courbe non linéaire et courbe non linéaire approximée par le modèle TS flou) ce que explique l'approximation de la fonction  $f(x) = x^3$  à des droites tangentes en toutes régions, caractérisées par les cinq fonctions d'appartenances citées ci-dessus. Ces droites sont pondérées par le degré d'appartenance de l'antécédent à ces régions.

#### ➤ Remarque III.1

Dans le cas où l'antécédent contient plusieurs entrées  $x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T$ , le calcul de la fonction d'appartenance de chaque antécédent sera exprimé par les opérateurs flous. Généralement, on utilise le produit donné par :

$$\mu_{A_i}(x) = \mu_{A_i}(x_1) \times \mu_{A_i}(x_2) \times \dots \times \mu_{A_i}(x_n) \quad (\text{III.23})$$

Ou bien, le minimum ( $\Lambda$ ) :

$$\mu_{A_i}(x) = \mu_{A_i}(x_1) \Lambda \mu_{A_i}(x_2) \Lambda \dots \Lambda \mu_{A_i}(x_n) \quad (\text{III.24})$$

**III.5 Modélisation des systèmes dynamiques par le modèle TS flou [12, 13, 18]**

Le modèle TS flou est considéré comme un outil de modélisation des systèmes non linéaires. Cette modélisation consiste à approximer les systèmes non linéaires en multiples modèles linéaires, établissent dans des domaines continus correspondants à chaque modèle linéaire. Ces domaines sont spécifiés par une descritisation flou, décrivent par des ensembles flous.

Une collection des modèles linéaires est assurée par les règles d'inférences «Si antécédent Alors conséquent» reparties sur les modèles linéaires. Ainsi, une approximation linéaires élaborée aux systèmes dynamiques non linéaires, par la modélisation floue de Takagi-Sugeno est considérée universelle.

Les systèmes dynamique non linéaires dits modélisés par le modèle TS flou, si ils sont décrites par les règles suivantes :

Règle  $l$  :

**Si**  $V_1(t)$  est  $M_{l1}$  et, ..., et  $V_p(t)$  est  $M_{lp}$ , **Alors**  $\dot{x}(t) = A_l x(t) + B_l u(t)$

avec :

$$x(0) = 0.$$

dont  $M_{li}$ , avec, ( $l = 1, \dots, k$ ) et ( $i = 1, \dots, p$ ) sont des ensembles flous, s'ils sont caractérisés par une fonction d'appartenance.

$x(t) \in R^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in R^r$  est le vecteur d'entrée.

Les matrices  $A_l$  et  $B_l$  ont des dimentions appropriées au système.

$V_1(t), \dots, V_p(t)$ , sont des termes non linéaires caractérisant les variables d'états du système.

$p$  est le nombre des fonctions d'appartenances de chaque prédicat dans l'univers de discours, et le nombre des termes non linéaires.

La paire  $(x(t), u(t))$  donne le système flou déduit comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{l=1}^k v_l(V(t)) [A_l x(t) + B_l u(t)] \quad (\text{III.25})$$

Avec  $v_l(V(t))$  est le degré normalisé d'accomplissement formulé :

$$v_l(V(t)) = \frac{w_l(V(t))}{\sum_{l=1}^k w_l(V(t))} \quad (\text{III.26})$$

$w_l(V(t))$  est le degré d'activation calculé comme suit :

$$w_l(V(t)) = \prod_{i=1}^p \mu_{M_{li}}(V_i(t)) \quad (\text{III.27})$$

et  $\mu_{M_{li}}(V_i(t))$  est la fonction d'appartenance de  $V_i(t)$  dans l'ensemble flou  $M_{li}$ .

Il est supposé pour tout  $t$  :

$$w_l(V(t)) \geq 0 \quad (\text{III.28})$$

et

$$\sum_{l=1}^k w_l(V(t)) > 0 \quad (\text{III.29})$$

avec,  $l = 1, \dots, k$ .

et comme on a :

$$\mu_{M_{li}}(V_i(t)) \geq 0 \quad (\text{III.30})$$

et

$$\sum_{l=1}^k \mu_{M_{li}}(V_i(t)) = 1 \quad (\text{III.31})$$

La formule (III.25) peut être simplifiée par le diagramme de la figure III.5 pour montrer la structure générale de la modélisation TS floue.

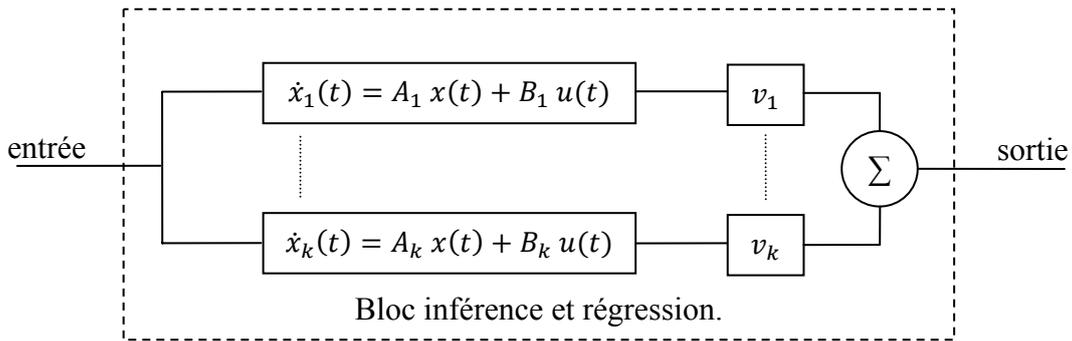


Figure III.5 : Modélisation TS floue des systèmes dynamiques.

### III.5.1 Constuction du modèle TS flou des systèmes dynamiques

Deux méthodes majeures peut être utiliser dans la modélisation TS floue.

La première méthode consiste à élaborer le modèle TS flou, à partir de l'identification du système, en utilisant les données entrées / sorties.

La deuxième méthode consiste à réaliser le modèle TS flou, par l'idée «approximation locale» et «approximation globale» des systèmes dynamiques non linéaires.

Dans ce qu'il suit, on focalisera sur la deuxième méthode pour la construction des modèles TS flous à partir des systèmes non linéaires.

#### III.5.1.1 Approximation locale et approximation globale dans le modèle TS flou [12, 14]

L'aproximation locale et l'approximation globale des fonctions non linéaires joue un rôle primordial dans la construction des modèles flous.

Pour illustrer cette approche, considérant les deux cas des figures III.6 et III.7. La figure III.6 représente la fonction non linéaire :

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t)) \tag{III.32}$$

avec  $f_1(0) = 0$ .

Les droites  $a_1 x_1(t)$  et  $a_2 x_1(t)$  réalisent l'approximation globale pour le cas du système (III.32), en choisissant  $a_1$  et  $a_2$  comme pentes des droites tangentes aux optimums globaux, comme le montre la figure III.6.

Parfois, il est difficile de distinguer les optimums globaux des systèmes non linéaires. D'où la nécessité de faire appel à l'approximation locale, pour faciliter l'approche pour ces systèmes. La figure III.7, montre la réalisation d'une approximation locale au système non linéaire :

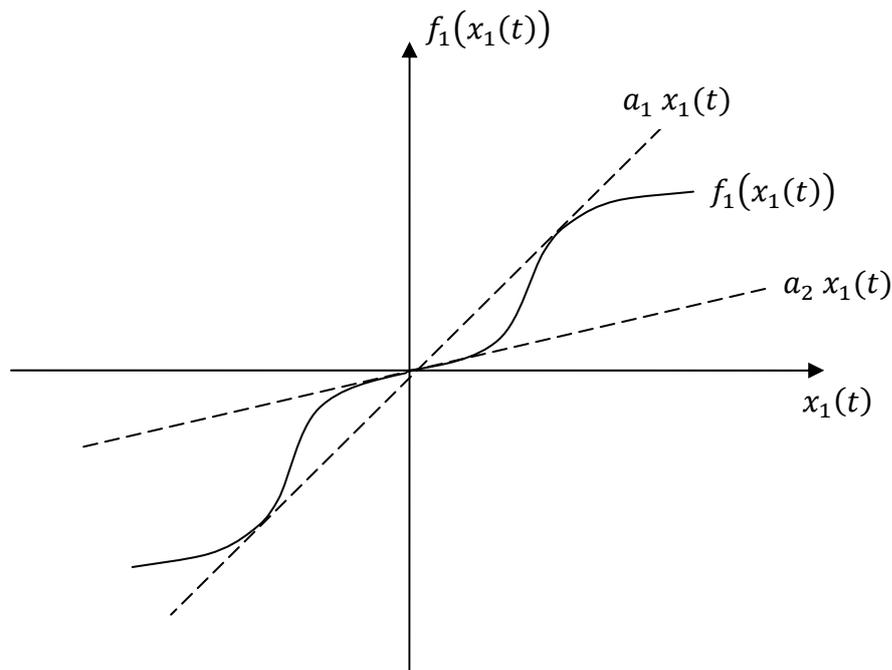
$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_2(t)) \tag{III.33}$$

avec  $f_2(0) = 0$ .

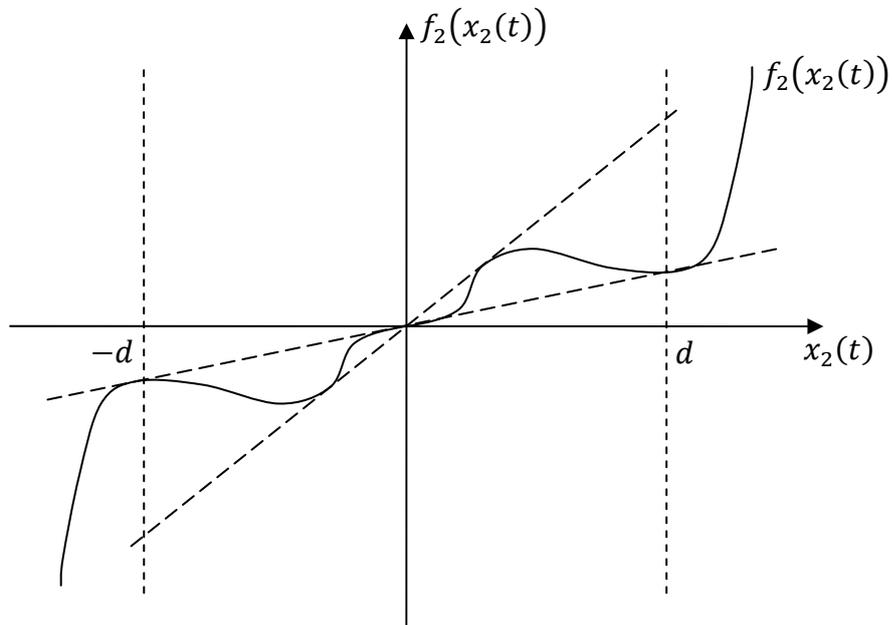
Dans cette approche, la partie non linéaire du système est approximer sur une région, appelée «région locale», limitée par les abscisses des optimums locaux, dont :

$$-d < x_2(t) < d \tag{III.34}$$

Sur cet intervalle, la dynamique du système est considéré non linéaire, à cet effet une approximation locale sera réalisée.



**Figure III.6 :** Approximation globale.



**Figure III.7 :** Approximation locale.

Ces approches garantissent une approximation exacte du modèle flou. Car le modèle TS flou lui-même procède à la subdivision du domaine de définition des systèmes non linéaires, en sous domaines, dont la partie non linéaire dans chaque sous domaines soit approximer par un modèle linéaire, en utilisant l'approximation locale et l'approximation globale.

Cette procédure est représentée dans le cas général suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^n f_{ij}(x(t)) x_j(t) + \sum_{k=1}^r g_{ik}(x(t)) u_k(t) \quad (\text{III.35})$$

avec  $n$  et  $r$  sont respectivement, le nombre de vecteur d'état  $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$  et de vecteur d'entrée  $u(t) = [u_1(t), \dots, u_r(t)]$ .

$f_{ij}(x(t))$  et  $g_{ik}(x(t))$  sont des fonctions non linéaires de la variable d'état  $x(t)$  (dynamique non linéaire du système).

Afin de construire le modèle TS flou, on procède en premier lieu à la recherche des minimums et des maximums des fonctions  $f_{ij}(x(t))$  et  $g_{ik}(x(t))$  dans le but d'approximer ces fonctions non linéaires dans leurs domaines de définition, on aura alors :

$$\begin{cases} a_{ij_1} = \max_{x(t)} \{f_{ij}(x(t))\} \\ a_{ij_2} = \min_{x(t)} \{f_{ij}(x(t))\} \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

$$\begin{cases} b_{ik_1} = \max_{x(t)} \{g_{ik}(x(t))\} \\ b_{ik_2} = \min_{x(t)} \{g_{ik}(x(t))\} \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

Les fonctions d'appartenances approximent les fonctions non linéaires, limitées par le minimum et le maximum, dans leurs domaines de définition, à des droites qui sont sous forme des équations suivantes :

$$\begin{cases} M_{ij_1}(x(t)) = \frac{f_{ij}(x(t)) - a_{ij_2}}{a_{ij_1} - a_{ij_2}} \\ M_{ij_2}(x(t)) = \frac{a_{ij_1} - f_{ij}(x(t))}{a_{ij_1} - a_{ij_2}} \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

$$\begin{cases} N_{ik_1}(x(t)) = \frac{g_{ik}(x(t)) - b_{ik_2}}{b_{ik_1} - b_{ik_2}} \\ N_{ik_2}(x(t)) = \frac{b_{ik_1} - g_{ik}(x(t))}{b_{ik_1} - b_{ik_2}} \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

Les conditions imposées sur les degrés d'appartenances sont vérifiées sur un ensemble fini  $[0 \ 1]$ , par conséquent les fonctions non linéaires du système peut être représenter sous forme d'un ensemble fini des fonctions linéaires comme suit :

$$f_{ij}(x(t)) = \sum_{l=1}^2 M_{ij_l}(x(t)) a_{ij_l} \quad (\text{III.40})$$

et

$$g_{ik}(x(t)) = \sum_{l=1}^2 N_{ik_l}(x(t)) b_{ik_l} \quad (\text{III.41})$$

En fin, le système global sera représenté par un ensemble du modèle linéaire sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^2 M_{ij_l}(x(t)) a_{ij_l} x_j(t) + \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^2 N_{ik_l}(x(t)) b_{ik_l} u_k(t) \quad (\text{III.42})$$

Dans plusieurs cas pratiques de la modélisation floue des systèmes dynamiques non linéaires, le modèle TS flou est construit à base de l'approximation locale et globale. Cette réalisation donne des résultats intéressants, car une réduction au nombre des règles, peut être effectuée au modèle flou résultant.

### III.5.2 Application de la modélisation TS floue à un système dynamique non linéaire [12]

Considérons le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_1(t) x_2^3(t) \\ -x_2(t) + (3 + x_2(t)) x_1^3(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III.43})$$

Pour simplifier, on définit les états des systèmes  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sur les intervalles suivants :

$$\begin{cases} x_1(t) \in [-1 \ 1] \\ x_2(t) \in [-1 \ 1] \end{cases} \quad (\text{III.44})$$

Le système d'équations (III.43) peut être écrire sous la forme d'un vecteur :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & x_1(t) x_2^2(t) \\ (3 + x_2(t)) & -1 \end{bmatrix} x(t) \quad (\text{III.45})$$

avec  $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$ , est le vecteur d'état, transposé du système et  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$  denote les termes non linéaires qui sont définis comme suit :

$$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) x_2^2(t) \\ z_2(t) = (3 + x_2(t)) x_1^2(t) \end{cases} \quad (\text{III.46})$$

donc le système (III.45) sera :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & z_1(t) \\ z_2(t) & -1 \end{bmatrix} x(t) \quad (\text{III.47})$$

Par ailleurs, on calcul le minimum et le maximum des termes non linéaires  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  sous la condition (III.44), et on obtient :

$$\begin{aligned} \max_{x_1(t), x_2(t)} z_1(t) &= 1, & \min_{x_1(t), x_2(t)} z_1(t) &= -1 \\ \max_{x_1(t), x_2(t)} z_2(t) &= 4, & \min_{x_1(t), x_2(t)} z_2(t) &= 2 \end{aligned}$$

A base des résultats du maximum et du minimum, on peut vérifier les résultats ci-dessous :

$$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) x_2^2(t) = M_1(z_1(t)) (1) + M_2(z_1(t)) (-1) \\ z_2(t) = (3 + x_2(t)) x_1^2(t) = N_1(z_2(t)) (4) + N_2(z_2(t)) (2) \end{cases} \quad (\text{III.48})$$

avec  $M_1(z_1(t))$ ,  $M_2(z_1(t))$ ,  $N_1(z_2(t))$  et  $N_2(z_2(t))$  sont des fonctions d'appartenances des termes non linéaires  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$ .

et :

$$\begin{cases} M_1(z_1(t)) + M_2(z_1(t)) = 1 \\ N_1(z_2(t)) + N_2(z_2(t)) = 1 \end{cases} \quad (\text{III.49})$$

de la formule (III.48), on peut tirer les fonctions d'appartenances des termes non linéaires  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  dans leurs intervalles, respectivement  $[-1 \ 1]$  et  $[2 \ 4]$  comme suit :

$$M_1(z_1(t)) = \frac{z_1(t) + 1}{2} \quad (\text{III.50})$$

$$M_2(z_1(t)) = \frac{1 - z_1(t)}{2} \quad (\text{III.51})$$

$$N_1(z_2(t)) = \frac{z_2(t) - 2}{2} \quad (\text{III.52})$$

$$N_2(z_2(t)) = \frac{4 - z_2(t)}{2} \quad (\text{III.53})$$

Ces fonctions d'appartenances sont représentées sur les figures III.8 et III.9.

A ce stade on peut définir l'univers de discours pour les termes non linéaires, suivant les quatre prédicats, (positif, négatif, grand et petit) qui représentent les fonctions d'appartenances précédentes sur les intervalles des ensembles flous, respectivement  $z_1 \in [0 \ 1]$ ,  $z_1 \in [-1 \ 0]$ ,  $z_2 \in [3 \ 4]$  et  $z_2 \in [2 \ 3]$ .

Les règles d'inférences du modèle flou seront formées en quatre règles données comme suit :

Règle 1 :

**Si**  $z_1(t)$  est positif et  $z_2(t)$  est grand,

**Alors**  $\dot{x}(t) = A_1 x(t)$ .

Règle 2 :

**Si**  $z_1(t)$  est positif et  $z_2(t)$  est petit,

**Alors**  $\dot{x}(t) = A_2 x(t)$ .

Règle 3 :

**Si**  $z_1(t)$  est négatif et  $z_2(t)$  est grand,

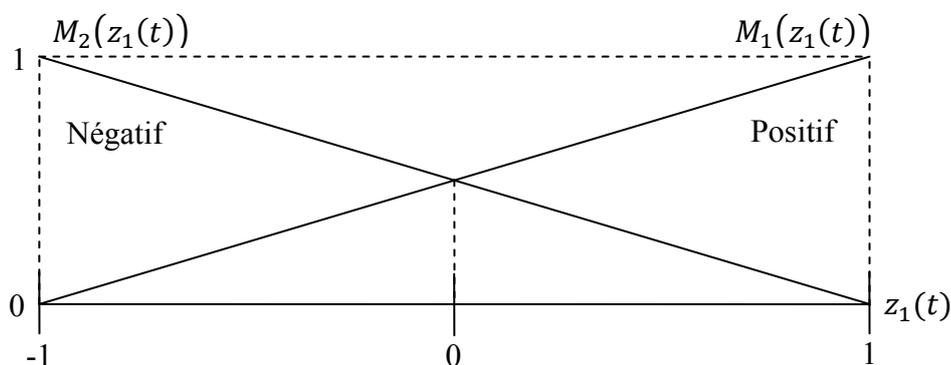
**Alors**  $\dot{x}(t) = A_3 x(t)$ .

Règle 4 :

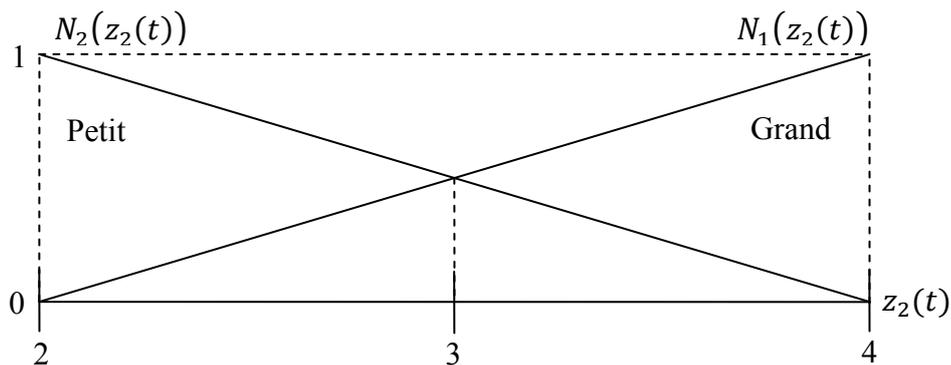
Si  $z_1(t)$  est négatif et  $z_2(t)$  est petit,

Alors  $\dot{x}(t) = A_4 x(t)$ .

Avec les conséquents  $A_i$  sont tirés de la matrice d'état du système (III.47), et en remplaçant pour chaque règle  $i$ , les valeurs de  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  par le maximum ou le minimum en vérifiant les conditions indiquées sur les antécédents  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  dans chaque règle.



**Figure III.8 :** Fonctions d'appartenances  $M_1(z_1(t))$  et  $M_2(z_1(t))$ .



**Figure III.9 :** Fonctions d'appartenances  $N_1(z_2(t))$  et  $N_2(z_2(t))$ .

La sortie de défuzzification est donnée par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 w_i(z(t)) A_i x(t) \quad (\text{III.54})$$

où :

$$w_1(z(t)) = M_1(z_1(t)) \times N_1(z_2(t)) \quad (\text{III.55})$$

$$w_2(z(t)) = M_1(z_1(t)) \times N_2(z_2(t)) \quad (\text{III.56})$$

$$w_3(z(t)) = M_2(z_1(t)) \times N_1(z_2(t)) \quad (\text{III.57})$$

$$w_4(z(t)) = M_2(z_1(t)) \times N_2(z_2(t)) \quad (\text{III.58})$$

avec  $w_i$  est le degré d'activation.

### III.5.2.1 Conditions de simulation

Condition initiale des états  $(x_{10}, x_{20}) = (-0.5, -0.5)$ .

Le temps de simulation  $t = [0 \ 10]$  avec un pas de 0.01.

Après la simulation, on a obtenu les deux figures III.10 et III.11 qui représentent les courbes caractéristiques des deux fonctions non linéaires  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  et celle linéarisé par le modèle flou.

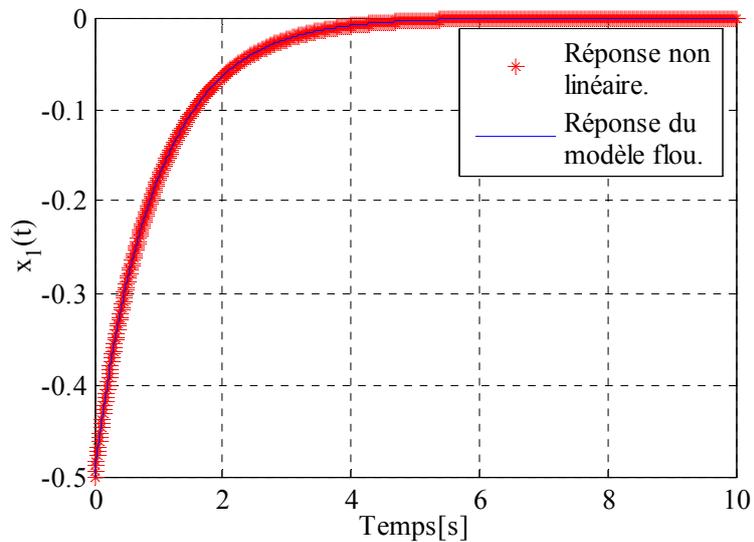


Figure III.10 : Courbe de l'équation dynamique non linéaire  $\dot{x}_1(t)$  et celle du modèle flou.

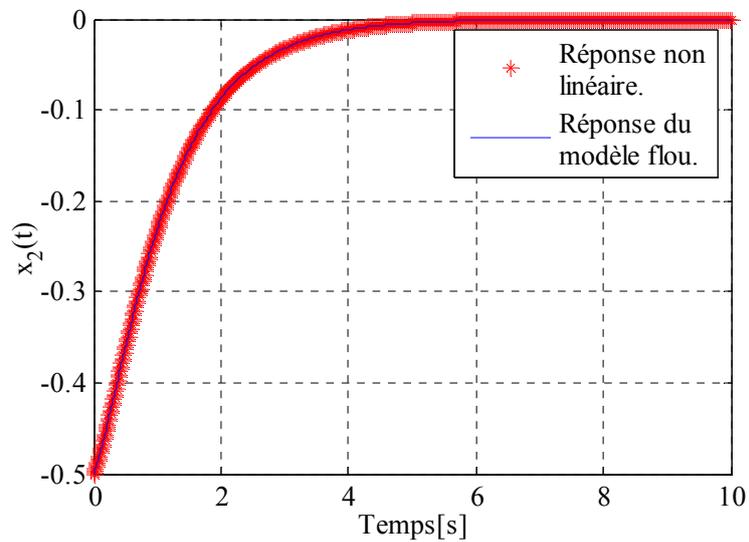


Figure III.11 : Courbe de l'équation dynamique non linéaire  $\dot{x}_2(t)$  et celle du modèle flou.

**III.5.2.2 Interprétation des résultats**

En comparant les résultats de simulation pour les deux états  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  avec leurs modèles flous résultant par la modélisation floue, on remarque qu'aucune différence pourra apparaître, car les courbes des fonctions non linéaires sont superposées avec celles obtenues par la modélisation floue, ce que explique la représentation exacte de la dynamique du système non linéaire par un modèle flou de type TS.

**III.6 Conclusion**

Ce chapitre a présenté d'une manière détaillée la modélisation floue et illustrée par deux applications concernant l'approximation d'une fonction non linéaire et d'un système dynamique non linéaire.

L'avantage principale de cette modélisation par rapport aux autres types de modélisation est la possibilité d'incorporer des connaissances symboliques d'une manière naturelle et flexible. Ainsi, les règles symboliques «**Si - Alors**» remplacent les équations différentielles, et le raisonnement exact, rigide, laisse la place à un raisonnement approximatif flexible.

Dans le prochain chapitre, on s'intéressera à la modélisation floue d'un système chaotique qui est très sensible à la condition initiale.

# Chapitre IV

*Modélisation floue et  
simulation des  
systèmes chaotiques.*

### **IV.1 Introduction**

Après avoir présenté dans le chapitre précédent l'approche de développement d'un modèle floue pour les systèmes dynamiques non linéaires. L'objectif de ce dernier chapitre consiste à mettre en évidence les potentiels offerts par les modèles flous pour la modélisation du comportement dynamique des systèmes non linéaires plus compliqués. Ainsi, on va s'intéresser à la modélisation floue d'un système chaotique. Ce type de système est très sensible aux conditions initiales.

En premier lieu, on donne un aperçu sur ce type de systèmes, ensuite on va aborder la modélisation floue d'un modèle chaotique de Lorenz, puis on termine par des tests de simulation pour démontrer l'efficacité du modèle flou dans l'approximation du comportement dynamique du système chaotique.

### **IV.2 Systèmes chaotiques [2]**

L'automatique ces dernières années s'intéresse à une classe très importante et particulière des systèmes dynamiques. Elle s'agit de la classe des systèmes chaotiques.

La dynamique chaotique est une conséquence directe de la sensibilité aux conditions initiales. Cette sensibilité confère un comportement erratique et imprévisible, est rigoureusement non déterministe ou stochastique. Il peut être produit, en fait, à partir d'un petit nombre d'équations non linéaires à plus de deux variables.

#### **IV.2.1 Comportement asymptotique et attracteurs [2]**

L'évolution spontanée d'un système réel peut présenter plusieurs types de comportement asymptotique. En partant d'une condition initiale donnée, le système évoluera d'une et une seule manière vers une solution unique. Lorsque le temps tend vers l'infini, les orbites du système convergent vers une limite qui est l'attracteur.

## **Chapitre IV Modélisation floue et simulation des systèmes chaotiques**

Il existe plusieurs types d'attracteurs décrivent en fait une situation de régime permanent telle qu'elle peut apparaître après disparition des phénomènes transitoires.

On distingue alors quatre types d'attracteurs :

### **IV.2.1.1 Point fixe [2]**

Une trajectoire d'un système démarrant au point d'équilibre restera indéfiniment en ce point, ainsi le point fixe correspondant à un état stationnaire du système (pas d'évolution). Traditionnellement, on distingue plusieurs types d'état stationnaires par la manière dont le système tend vers le point fixe.

### **IV.2.1.2 Cycle limite [2]**

L'orbite périodique d'un système, encore appelée cycle limite, est une généralisation du point fixe. Le cycle limite associé à un comportement périodique du système, ce dernier présente des oscillations permanentes.

### **IV.2.1.3 Tore [2]**

C'est un cas particulier du cycle limite. Le système présente au moins deux périodes simultanées dont le rapport est irrationnel.

## **IV.2.2 Notion de chaos**

Afin d'illustrer le comportement chaotique d'un système non linéaire, considérons le modèle d'un système chaotique très simple, est celui bien connu, du météorologue Lorenz. Celui-ci a établi un modèle simple de climat et explora ses conséquences. Le système d'équation pouvait être plus simple, comprenant en effet en tout et pour tous les trois équations d'états par rapport à chaque variable d'état. Elles sont données comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} = -a x_1 + a x_2 \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} = c x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \frac{\partial x_3}{\partial t} = -b x_3 + x_1 x_2 \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

#### IV.2.2.1 Simulation

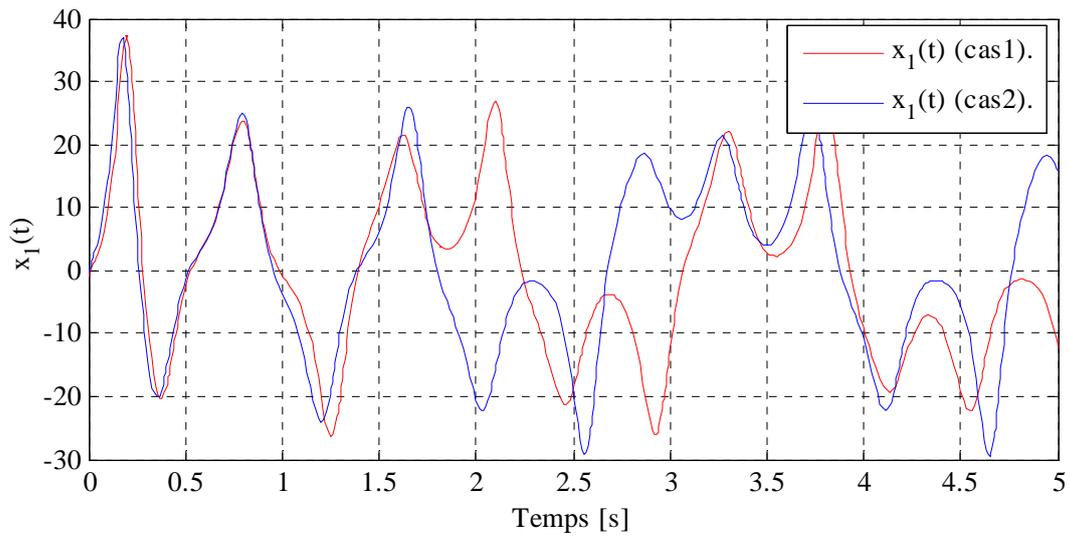
Dans la présente étude les valeurs considérées pour les paramètres sont:  
 $a = 10, b = 8/3, c = 28.$

Pour montrer le comportement erratique d'un système chaotique, on considère deux cas pour les conditions initiales.

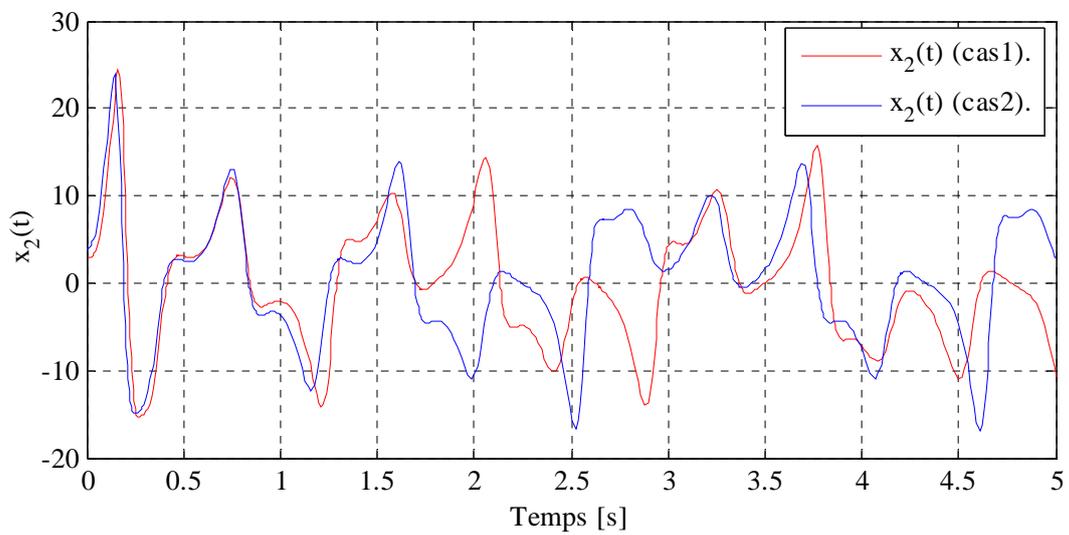
Cas 1 :  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-1, 3, 5),$

Cas 2 :  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-0.5, 4, 5.5),$

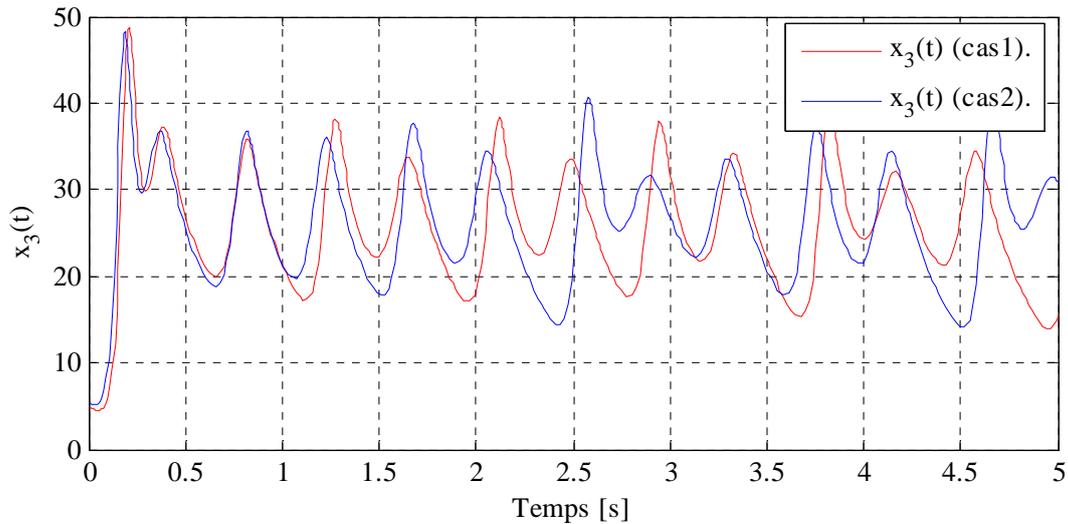
Les résultats de simulation obtenus sont donnés par les figures IV.1, IV.2 et IV.3. On constate effectivement que la variation des conditions initiales influe sur l'évolution des variables d'états, c'est-à-dire sur le comportement dynamique du système. Cette caractéristique est propre aux systèmes chaotiques.



**Figure IV.1** : Evolution dynamique de  $x_1(t)$  du système non linéaire chaotique, dans les deux cas des conditions initiales.



**Figure IV.2** : Evolution dynamique de  $x_2(t)$  du système non linéaire chaotique, dans les deux cas des conditions initiales.



**Figure IV.3 :** Evolution dynamique de  $x_3(t)$  du système non linéaire chaotique, dans les deux cas des conditions initiales.

#### IV.2.2.2 Interprétation des résultats

On constate que le système décrit une trajectoire chaotique, et une sensibilité aux conditions initiales, fait que deux trajectoires partant presque du même point, finissent par diverger. Comme aucun point de départ ne peut être expérimentalement déterminé avec une précision infinie, il s'ensuit qu'un phénomène physique simple déterminé par ces équations déterministes est imprévisible.

#### IV.2.3 Caractéristique essentielle de chaos [2]

Bien qu'il n'existe pas de définition générale et universelle de chaos, on peut s'entendre sur certaines caractéristiques d'un système révélant son caractère chaotique.

En automatique, une dynamique chaotique peut être identifiée, en première analyse, par la reconnaissance de propriétés caractéristiques :

- aspect aléatoire.
- sensibilité aux conditions initiales.
- dynamiques imprévisible.
- désordonnées et apériodiques.

**IV.3 Modélisation floue du système chaotique**

L’objectif de cet exemple, est d’illustrer les performances de la modélisation floue de Takagi-Sugeno, sur un type du système non linéaire d’une dynamique imprévisible qui est le système chaotique. A cet effet, le modèle de système non linéaire de météorologue de Lorenz sera modélisé par un modèle flou. Rappelons que le modèle est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a x_1(t) + a x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = c x_1(t) - x_2(t) - x_1(t) x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -b x_3(t) + x_1(t) x_2(t) \end{cases} \quad (IV.2)$$

Qu’on peut mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & -x_1(t) \\ 0 & x_1(t) & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (IV.3)$$

$x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  et  $x_3(t)$  sont les états du système et  $u(t)$  est son entrée. On suppose que l’état  $x_1(t) \in [-d \quad d] / d > 0$ .

Les termes non linéaires du système (IV.2) sont alors :

$$z_1(t) = -x_1(t) x_3(t) \quad (IV.4)$$

$$z_2(t) = x_1(t) x_2(t) \quad (IV.5)$$

## Chapitre IV Modélisation floue et simulation des systèmes chaotiques

Ces deux équations peuvent être considérées dans les prémisses suivantes, en approximant cette dynamique non linéaire dans l'univers de discours  $[-d \ d]$ , on aura donc :

$$z_1(t) = -x_1(t) x_3(t) = -h_1(x_1(t)) [-d x_3(t)] - h_2(x_1(t)) [d x_3(t)] \quad (\text{IV.6})$$

$$z_2(t) = x_1(t) x_2(t) = h_1(x_1(t)) [-d x_2(t)] + h_2(x_1(t)) [d x_2(t)] \quad (\text{IV.7})$$

avec  $h_1(x_1(t))$  et  $h_2(x_1(t))$  sont des fonctions d'appartenances données comme suit :

$$h_1(x_1(t)) = \frac{-x_1(t) + d}{2d} \quad (\text{IV.8})$$

$$h_2(x_1(t)) = \frac{x_1(t) + d}{2d} \quad (\text{IV.9})$$

Il sont représentées sur la figure IV.4.

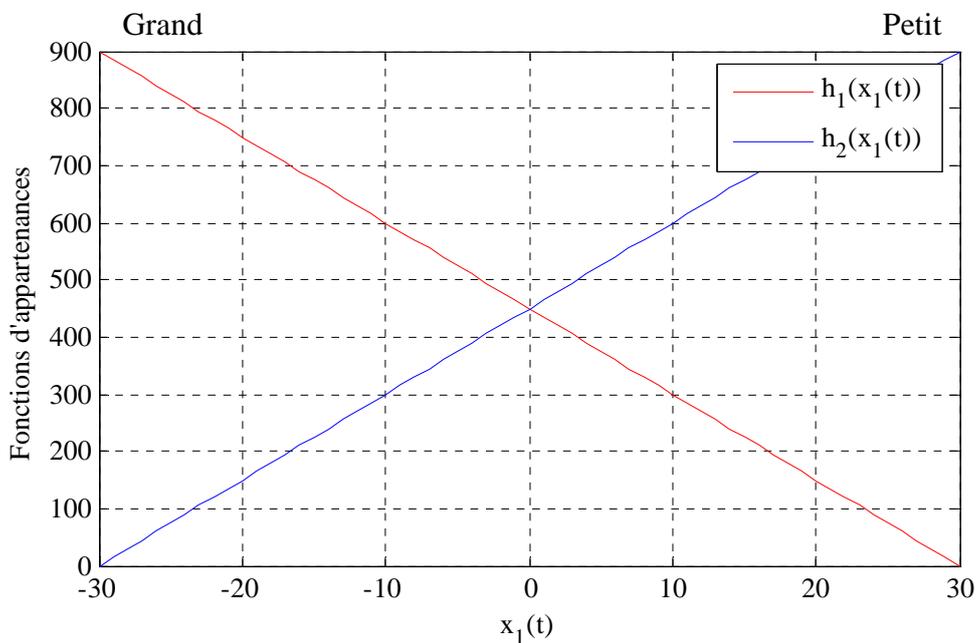


Figure IV.4 : Fonctions d'appartenances.

## Chapitre IV Modélisation floue et simulation des systèmes chaotiques

Maintenant on s'intéresse à la construction des règles de modèle flou du système (IV.2), en considérant les deux prédicats Grand, Petit représentés par les ensembles flous caractérisés par les fonctions d'appartenances (IV.8) et (IV.9) définies l'univers de discours  $x_1(t) \in [-d \ d]$ .

Le formalisme des règles est réalisé en symbolisant les prédicats (Grand, Petit) respectivement par ( $G, P$ ), on aura :

Règle 1 :

**Si**  $x_1(t)$  est  $G$ ,

**Alors**  $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$ .

Règle 2 :

**Si**  $x_1(t)$  est  $P$ ,

**Alors**  $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$ .

La conséquence de chaque règle est déduite depuis le modèle mathématique du système, en remplaçant la condition exigée sur l'antécédent pour former le sous modèle qui représente localement le système, on aura donc :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & -d \\ 0 & d & -b \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & d \\ 0 & -d & -b \end{bmatrix} \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En défuzzifiant les règles d'inférences formées, pour construire le modèle global, avec l'application d'une pondération à chaque sous modèle local, on obtient :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t)) A_i x(t) + \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t)) B_i u(t) \quad (\text{IV.10})$$

Ce modèle flou à deux règles, représente exactement le modèle du système non linéaire (IV.2) pour  $x_1(t) \in [-d \ d]$ .

### IV.3.1 Simulation

Pour simuler le comportement de ce modèle, on considère les conditions suivantes :

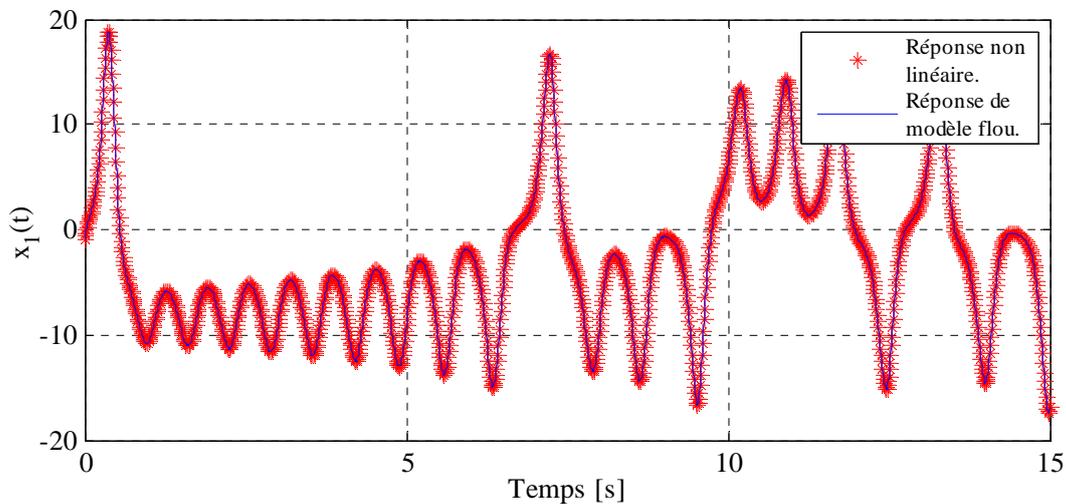
Entrée de commande :  $u = 1$ .

Première condition initiale :  $(x_{01}, x_{02}, x_{03}) = (-1, 3, 5)$ .

Deuxième condition initiale :  $(x_{01}, x_{02}, x_{03}) = (-0.5, 4, 5.5)$ .

Les résultats de simulation donnés par les figures IV.5, IV.6, IV.7, IV.8, IV.9 et IV.10 montrent clairement que le modèle TS flou développé traduit fidèlement le comportement dynamique du système malgré la variation des conditions initiales.

Pour la première condition initiale, on a obtenu les figures IV.5, IV.6 et IV.7 et pour la deuxième condition initiale, on a obtenu les figures IV.8, IV.9 et IV.10.



**Figure (IV.5) :** Evolution de comportement dynamique de l'état  $x_1(t)$  du système non linéaire chaotique.

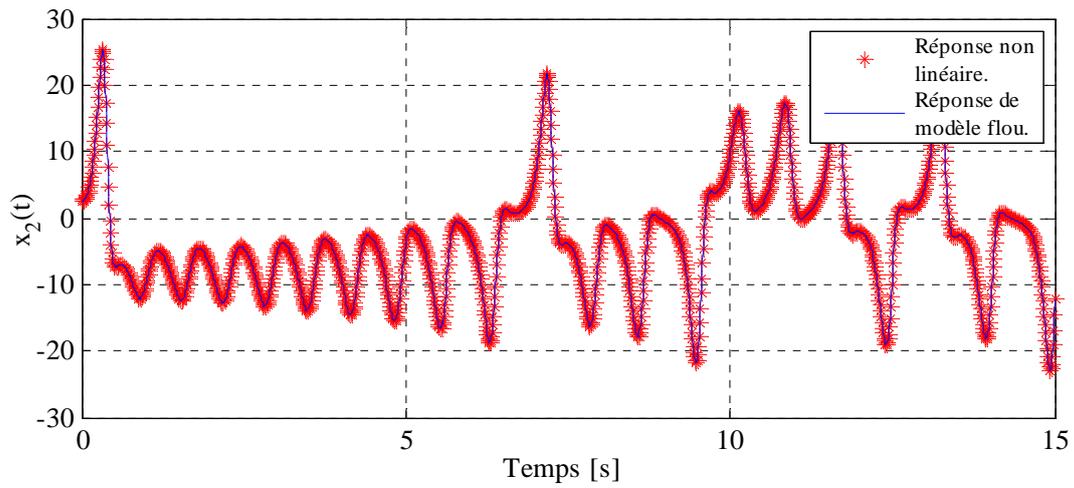


Figure (IV.6) : Evolution de comportement dynamique de l'état  $x_2(t)$  du système non linéaire chaotique.

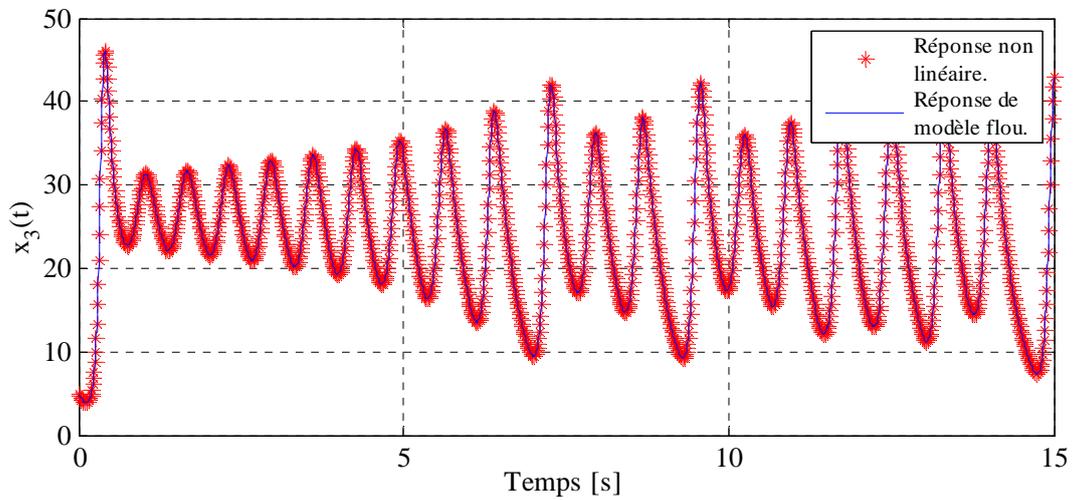
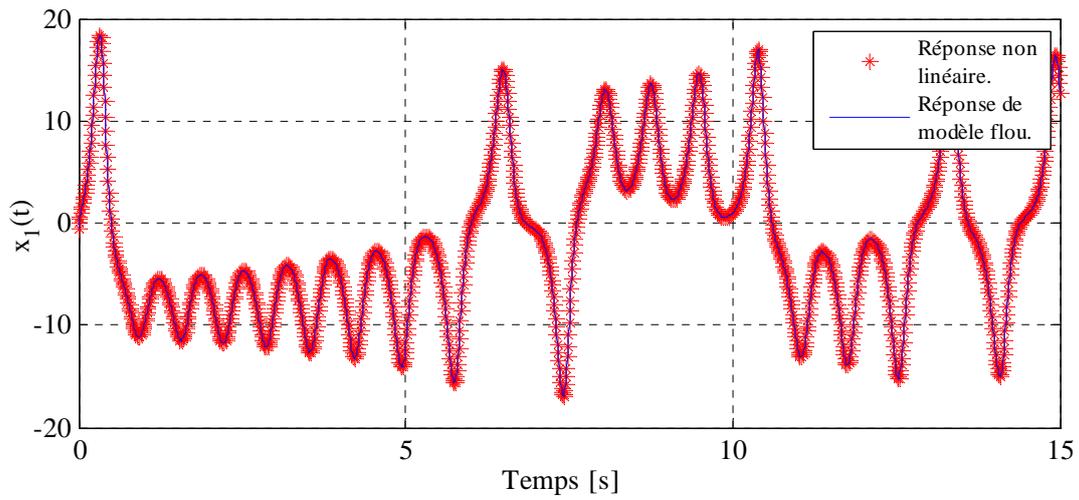
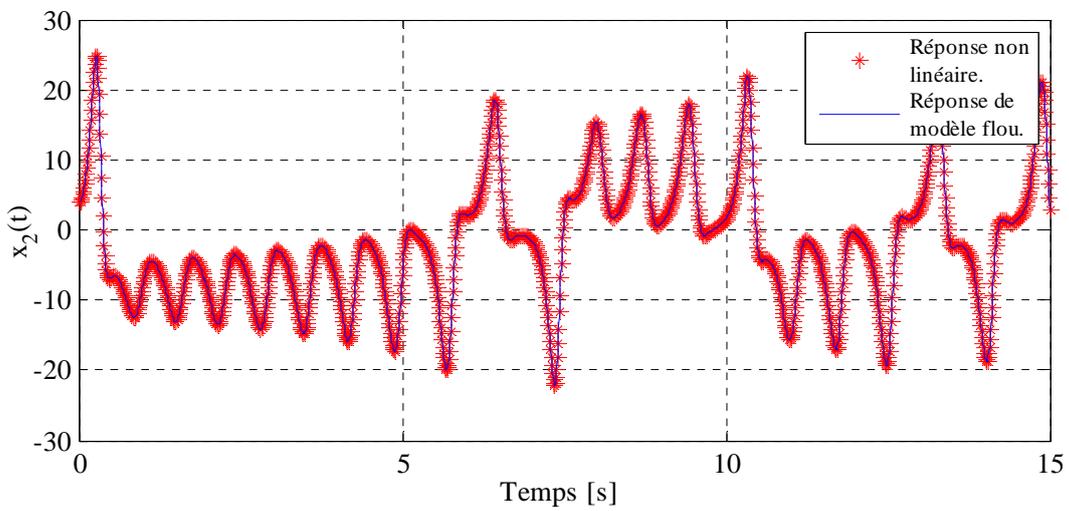


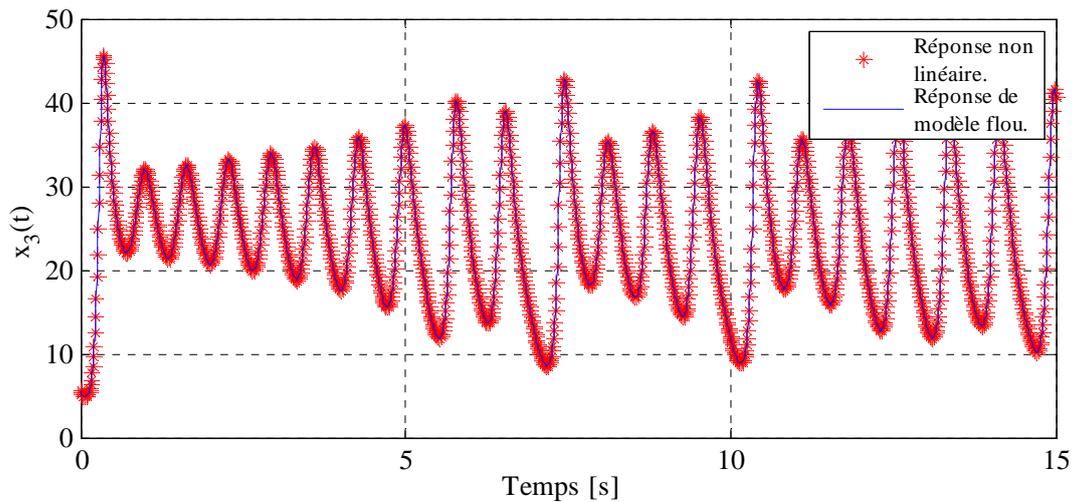
Figure (IV.7) : Evolution de comportement dynamique de l'état  $x_3(t)$  du système non linéaire chaotique.



**Figure (IV.8)** : Evolution de comportement dynamique de l'état  $x_1(t)$  du système non linéaire chaotique.



**Figure (IV.9)** : Evolution de comportement dynamique de l'état  $x_2(t)$  du système non linéaire chaotique.



**Figure (IV.10) :** Evolution de comportement dynamique de l'état  $x_3(t)$  du système non linéaire chaotique.

### IV.3.2 Interprétation des résultats

Considérons à présent les valeurs des conditions initiales  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-1, 3, 5)$ , on constate que l'évolution des états du système converge vers un cycle limite d'un nombre de période infinie (voir les figures IV.5, IV.6 et IV.7). Ces évolutions sont anarchiques et aléatoires. Malgré cette complexité portée par ce système chaotique, le modèle flou élaboré produit exactement le même comportement dynamique puisque l'évolution du système non linéaire et celle du modèle flou sont superposées.

Mêmes remarques et conclusions sont faites pour le cas des conditions initiales  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-0.5, 4, 5.5)$  (voir les figures IV.8, IV.9 et IV.10).

### **IV.4 Conclusion**

Rappelons que l'objectif de ce chapitre, était d'introduire les notions de base de la théorie du chaos, puisque en souhaitant de mener une modélisation TS floue pour un cas d'un système non linéaire chaotique.

En résumé, il faut retenir que les phénomènes chaotiques peuvent être obtenus à partir des systèmes, relativement simples, régis par un petit nombre de variables. Le système est déterministe bien que son comportement soit imprévisible. Le comportement d'un système chaotique est complexe, aperiodique, irrégulier, erratique et d'appartenance aléatoire. Celui-ci est étroitement lié à l'extrême sensibilité aux conditions initiales. Une autre propriété fondamentale, est que le système est caractérisé dans l'espace d'état par un attracteur étrange.

Toutes ces propriétés dynamiques portées par les systèmes chaotiques peuvent être représentées par des modèles TS flous en extrême précision. L'obtention de ce modèle peut se faire d'une façon directe, à partir d'un modèle non linéaire, en reportant les non linéarités dans la partie des prémisses comme a été montré dans ce chapitre.

*Conclusion*

*Générale.*

### Conclusion Générale

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur la modélisation floue des systèmes dynamiques non linéaires. L'objectif consiste à établir un modèle globale non linéaire constitué par des modèles localement linéaires liées par des règles d'inférences. Le principe est basé sur la logique floue.

Deux importants types de modèle flou existent. Le premier est le modèle flou de Mamdani, dont la partie linguistique caractérise tout le modèle qui est lié à une approche heuristique. Le second type de modèle qui a donné des développements très riches, a été proposé par Takagi-Sugeno. Elle repose aussi sur une représentation à base de règles. Toutefois, à la différence des modèles de type Mamdani, la partie conclusion des règles s'exprime d'une manière numérique sous la forme d'une constante, d'un polynôme ou, de manière plus générale, par une fonction ou une équation différentielle dépendant des variables associées aux prémisses des règles. Ce type de modèle a été abordé dans ce travail pour la modélisation des systèmes non linéaire.

Ainsi, nous avons présenté une approche pour l'approximation des fonctions non linéaires basées sur les modèles flous. Cette approche combine la propriété d'approximation par les modèles locaux linéaires. Pour les systèmes dynamiques, dans le modèle flou du type Takagi-Sugeno, qui préserve le caractère non linéaire du système, les conclusions sont des sous-modèles localement linéaires. Ce modèle de Takagi-Sugeno représente d'une manière assez complète le système non linéaire.

Les exemples étudiés montrent clairement la puissance des modèles floue à traduire fidèlement la dynamique d'un système non linéaire.

Dans ce mémoire on a intéressé à la modélisation floue par le modèle de Takagi-Sugeno des systèmes non linéaires mono variables. Aussi, d'autres méthodes plus intéressantes peuvent être abordées dans les travaux prochains comportant des méthodes fondées sur une modélisation analytique, qui devient une nécessité dès lors que l'on cherche à prendre en compte une expertise humaine. Par exemple en utilisant une modélisation hybride *neuro-flou*. De plus, il est intéressant de généraliser cette modélisation à des systèmes non linéaires multi variables.

# *Bibliographie*

### Bibliographie

- [1] **ADDAR Aziz, HABAREK Mustapha**, «*Commande non linéaire d'un réacteur biologique*». Thèse d'ingénieur en électronique, option contrôle, UMMTO, promotion 2009.
- [2] **ALMANSBA Farida**, «*Identification des chaos et commande des systèmes non linéaires chaotiques*». Thèse magister en automatique, option automatique des systèmes continus et productique, UMMTO, promotion 2007.
- [3] **B. BOUCHON, MEUNIER**, «*La logique floue*». Edition actualisée : le point des connaissances actuelles, France, novembre 1999.
- [4] **B. BOUCHON, MEUNIER**, «*La logique floue et ses applications*». Edition Addison-Wesley, France, octobre 1994.
- [5] **B. ROFFEL and Ben BETLEM**, «*Process Dynamics and Control: Modeling for Control and Prediction*». Edition John Wiley & Sons Ltd, 2006.
- [6] **CHAFAA Kheirddine**, «*Structures d'identification et de commande des systèmes non linéaires basées sur les techniques floues*». Thèse doctorat en électronique, option contrôle, Université de Batna, 2006.
- [7] **D. VIAULT, P. BOUCHER**, «*Systèmes non linéaires : Méthode du premier harmonique* ». © Techniques de l'ingénieur, traiter informatique industrielle.
- [8] **GRISALES V. H.**, «*Modélisation et commande floue de type Takagi-Sugeno appliquées à un bioprocédé de traitement des eaux usées*». Thèse doctorat en systèmes automatiques, Université Paul Sabatier, Toulouse III et l'Université de Los Andes, Colombie, 2007.
- [9] **H. BÜHLER**, «*Réglage par logique floue*». Edition presses polytechnique et universitaires romandes, Lausanne, 1994.
- [10] **J. GEDJEVAC**, «*Idées nettes sur la logique floue*». Edition presses polytechnique et universitaires romandes, Lausanne, 1999.

- [11] **J. P. COURRIOU**, «*Commande des procédés*», © Technique et Documentation, 1996.
- [12] **K. TANAKA, Hua O. WANG**, «*Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*». Edition John Wiley & Sons Ltd, 2001.
- [13] **L. FOULLOY, S. GALICHET, A. TITLI**, «*Commande floue : Tome1*». Edition Lavoisier, France, février 2003.
- [14] **L. FOULLOY, S. GALICHET, A. TITLI**, «*Commande floue : Tome2*». Edition Lavoisier, France, février 2003.
- [15] **N. CHABANE KHIAR, OULED ABDESLAM Djaffar**, «*Etude et réalisation d'un logiciel des commandes des systèmes non linéaires affines par rapport à l'entrée*». Thèse d'ingénieur en électronique, promotion 2000.
- [16] **P. BORNE, J-Y. DIEULOT, L. DUBOIS**, «*Introduction à la commande floue*». Edition Tichnip, Paris, 1998.
- [17] **P. TATJEWSKI**, «*Advanced Control of Industrial Processes: Structures and Algorithms*», Spinga, 2007.
- [18] **W. ASSAWINCHAICHOTE, S. K. NGUANG, P. SHI**. «*Fuzzy Control and Filter Design for Uncertain Fuzzy Systems*», Springer, 2006.