

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou



Faculté De Génie Electrique Et D'informatique
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

**Mémoire de Fin d'Etude
de MASTER ACADEMIQUE**
Spécialité : **Automatique et systèmes**

Présenté par
CHARA Damya
ARICHE Karima

Mémoire dirigé et proposé par Mme **Z. YACINE**

Thème

**Synthèse d'observateurs impulsifs pour
les systèmes linéaires continus.**

Mémoire soutenu publiquement le 01 /07/ 2018 devant le jury composé de :

Mr M.A. TOUAT
MC-B, UMMTO, Président

Mr H. HAMICHE
MC-A, UMMTO, Examineur

Mr S. DJENNOUNE
Professeur, UMMTO, Examineur

Mme Z. YACINE
MC-B, UMMTO, Encadrante

Promotion : 2017/2018

Remerciements

Nous remercions Dieu de nous avoir donné la force et le courage pour réaliser ce travail.

Nous remercions nos chers parents respectifs, qui nous ont appris que la richesse la plus durable c'est le savoir.

Nous exprimons nos profonds remerciements à notre promotrice Madame Z.YACINE, Maître de conférence de classe B à l'UMMTO de nous avoir proposé le thème de ce mémoire et pour l'aide précieuse qu'elle nous a apporté malgré ses nombreuses charges. Ses compétences scientifiques et ses qualités humaines nous ont beaucoup apporté et appris...

Nous exprimons aussi nos sincères reconnaissances à tous les enseignants du Département d'Automatique pour leurs efforts fournis durant toute la période d'étude ainsi qu'à tous ceux qui ont contribué de loin ou de près à la réalisation de notre travail.

Nous tenons à remercier enfin les membres du jury qui ont accepté d'évaluer notre travail et de bien vouloir participer à notre soutenance. Merci à Monsieur S. DJENNOUNE, Professeur à l'UMMTO, qui nous a fait l'honneur de présider le jury de cette soutenance et à Monsieur H. HAMICHE maître de conférence de classe A à l'UMMTO et à Monsieur M.A TOUAT maître de conférence de classe B à l'UMMTO d'avoir accepté d'être les rapporteurs.

Un grand merci pour nos amis et nos camarades de Master pour leur soutien et leurs encouragements.

DEDICACES

*A mes chers parents,
A ma sœur et mes frères,
A toutes ma famille,
A mon mari et sa famille,
A mes amis,
A toutes les personnes qui m'ont encouragé,
Je dédie ce travail.*

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :
Mes très chers parents que j'aime énormément,
Mes chers frères et sœurs,
Mon mari et sa famille
A toutes ma famille,
Tous mes amis,
Tous ce qui m'ont soutenu et encouragé tout au long de ce
travail.

Karima

Table des matières

Introduction générale	6
1 Généralités sur les systèmes dynamiques impulsifs	9
1.1 Introduction	9
1.2 Description des systèmes dynamiques impulsifs (SDI)	10
1.2.1 Systèmes impulsifs avec temps d'impulsions fixe	11
1.2.2 Systèmes impulsifs avec temps d'impulsions variables	11
1.2.3 Systèmes impulsifs autonomes	12
1.2.4 Cas particulier : Système linéaire impulsif	12
1.3 Existence et unicité de solution	13
1.4 Stabilité des systèmes impulsifs	13
1.4.1 Approche par principe de comparaison	14
1.4.2 Approche par détermination d'une fonction de Lyapunov	15
1.5 Conclusion	16
2 Rappels sur la théorie de l'observateur et synthèse d'observateurs impulsifs pour les systèmes linéaires	17
2.1 Introduction	17
2.2 Notion sur la stabilité	18
2.2.1 La stabilité externe	18
2.2.2 Stabilité interne	19
2.2.3 Stabilité Entrée-État : (ISS : Input to State Stability)	25
2.2.4 Stabilité en temps fini	25
2.3 Rappels sur l'observabilité des systèmes linéaires continus	27
2.4 Stabilisation et principe de séparation	30
2.5 Synthèse d'un observateur impulsif	33
2.6 Conclusion	36
3 Synthèse de l'observateur impulsif et simulation	37
3.1 Introduction	37
3.2 Première application : Système masses-ressorts.	37

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	2
3.3 Deuxième application : Véhicule	45
3.4 Conclusion	49
Conclusion générale	50
Annexes	51
A. 1 Inégalités Matricielles Linéaires	51
A.1.1 Ensembles et fonctions convexes :	51
A.1.2 LMI : Linear Matrix Inequalities :	52
A.2 Placement de pôles :	54

Table des figures

2.1	Un système dynamique vu comme une relation entrée-sortie.	18
2.2	Illustration de la définition intuitive de la stabilité.	20
2.3	Illustration de la stabilité au sens de Lyapunov.	21
2.4	Illustration de la stabilité asymptotique.	21
2.5	Comportement de la solution en $x(\cdot)$ (stabilité en temps fini).	26
3.1	Système masses-ressorts.	38
3.2	Les états de système.	39
3.3	Estimation des états avec l'observateur impulsif.	41
3.4	Les erreurs d'estimation de l'observateur impulsif.	41
3.5	Les erreurs d'estimations en présence de bruit sur le système.	42
3.6	Les erreurs d'estimation en présence de bruit sur la sortie.	43
3.7	Comparaison des erreurs d'estimations avec l'observateur impulsif et Luen- berger	44
3.8	Les états et leurs estimées	45
3.9	Les erreurs d'estimation.	46
3.10	Les états et les estimés avec perturbation.	47
3.11	Les erreurs d'estimation avec perturbation.	47
3.12	Les états et les estimées en présence de perturbation.	48
3.13	Convergence de l'erreur d'estimation en présence de la perturbation $\Delta(t)$	49
3.14	Ensemble convexe.	51

Liste des symboles

Symbole	Désignation
A	Matrice d'état
B	Matrice d'entrée
C	Matrice de sortie
D	ensemble ouvert dans \mathbb{R}^n
$D(s)$	Dénominateur d'une fonction de transfert
D_k	Une suite de matrices constants
$h(t)$	Reponse impulsionnelle
$H(s)$	Fonction de transfert
I_k	Fonction continue sur Ω
I_n	Matrice d'identité de dimension $n \times n$ (appropriées)
K	matrice gain de retour d'état
K_k	Gain de l'observateur impulsif
L	Gain de l'observateur
$N(s)$	Numérateur d'une fonction de transfert
n	Nombre de variables d'état du système
\mathbb{N}	ensemble des nombres naturels
p	Nombre d'entrées du système
P	Matrice symétrique de dimension $n \times n$
q	Nombre de sorties du système
\mathbb{R}^+	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls
\mathbb{R}^n	Espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels
\mathbb{R}^q	Espace vectoriel de dimension q construit sur le corps des réels
$\mathbb{R}^{n \times q}$	Ensemble des matrices réelles de dimension $n \times q$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Ensemble des matrices réelles de dimension $n \times m$
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Ensemble des matrices réelles de dimension $n \times n$
t	Variable temporelle
t_k	Les instants d'impulsion à l'instant k
T_k	Ensemble des condition de réinitialisation
$T(x)$	Fonction temps d'établissement
δ	Constante qui fixe le temps

$u(\cdot)$	Vecteur de commande (entrées)
V	Fonction de Lyapunov
$x(\cdot)$	vecteurs d'état
$x(t_k)$	L'état de système a l'instant t_k
$\hat{x}(\cdot)$	estimateur du vecteur d'état $x(\cdot)$
x_e	Le point d'équilibre
$y(\cdot)$	Vecteur de sortie
Ω	Ensemble ouverte
$\ \cdot\ $	la norme euclidienne

Introduction générale

La plupart des systèmes réels sont des systèmes hybrides, composés d'une partie discrète et d'une partie continue qui agissent l'une sur l'autre. Une classe particulière des systèmes hybrides est celle des systèmes impulsifs [1], qui présentent une combinaison d'un processus continue décrit par une équation différentielle ordinaire et des sauts instantanés d'états ou d'impulsions.

Ces systèmes sont de plus en plus importants dans certains processus réels et phénomènes étudiés en physique. Pour cela, les chercheurs sont motivés par le fait que même si les capteurs donnent des mesures en temps continu, la transmission de ces dernières est généralement faite de façon discrète. En effet, ce concept existe dans les processus industriels et de nombreux champs d'application potentiels tel que ceux rencontrés dans les transports (aéronautique, automobile, ferroviaire et maritime,...), la productique.

Le thème abordé dans ce mémoire est l'observation. Il trouve sa justification dans le problème du contrôle. En effet, le contrôle d'un système nécessite souvent la connaissance de son état complet, alors qu'en pratique la mesure de l'ensemble des variables est difficile. En d'autres termes, et la connaissance entière ou partielle de l'état d'un système est importante qui intervient notamment dans les domaines de la commande, du diagnostique et de la surveillance des systèmes. Cette exigence s'avère difficile à satisfaire directement dans la plupart des cas, ceci est dû d'une part au fait que leurs mesures directes soient impossibles à réaliser. D'autre part, lorsqu'une variable d'état est inexistante physiquement, sa mesure peut être délicate d'un point de vue technique (capteur nécessaire indisponible ou de précision insuffisantes,...). De plus d'un point de vue économique, il est souvent souhaitable d'installer un minimum de capteurs afin de réduire les coûts d'instrumentation et de maintenance. Par conséquent, dès qu'une stratégie de commande, de diagnostique ou de surveillance demande l'utilisation de variables d'états non mesurées, il est indispensable de reconstruire entièrement ou partiellement le vecteur d'état du système.

Le problème peut être résolu en utilisant un système dynamique auxiliaire appelé observateur d'état, dont le rôle est de fournir en temps réel et avec précision une estimation du vecteur d'état du système étudié en fonctions des entrées connues, des sorties et du

modèle dynamique de celui-ci. L'observateur est synthétisé de telle sorte que la différence entre l'état du système et l'état estimé tende vers zéro, quand t tend vers l'infini. Plus précisément, il faut que la dynamique de l'erreur d'estimation soit plus rapide que celle du système lui-même.

La théorie de l'observateur d'état a tout d'abord été introduite par 'Kalman et Bucy' pour un système linéaire dans un environnement stochastique (filtre de Kalman-Bucy) [22]. Le filtre de Kalman est une méthode visant à estimer des paramètres d'un système évoluant dans le temps à partir de mesures bruitées. Pour appliquer un filtre de Kalman, il faut avant tout modéliser le système pour le quel on veut estimer les paramètres. Une simple erreur dans la modélisation des systèmes entraîne inévitablement une erreur au niveau de l'estimation. Ce filtre n'est pas forcément l'outil à appliquer dans tous les cas. En effet le développeur a besoin de modéliser le système assez précisément afin de désigner un filtre efficace. Le problème est que certains systèmes sont difficilement modifiables. Dans le cas où la modélisation est trop approximative, le filtre n'est pas assez performant et l'erreur d'estimation ne converge pas assez rapidement vers zéro. Le filtre de Kalman est donc une méthode d'estimation intéressante, mais qui n'est utilisable que lorsque l'on peut décrire assez précisément notre système.

Luenberger a ensuite proposé une théorie générale des observateurs pour les systèmes linéaires déterministes [14]. Le calcul du gain pour filtre de Kalman et l'observateur de Luenberger se fait à partir du modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement. Malheureusement, la plupart des systèmes sont non linéaires, ce qui a mené à la construction d'observateurs pour des systèmes non linéaires tel que l'observateur à grand gain[18]. Ce type d'observateurs, est utilisé en général pour les systèmes lipschitziens, où le gain de l'observateur est choisi suffisamment grand pour compenser la non-linéarité du système,....

Ces observateurs coutent cher du point de vue informatique, car ils nécessitent une grande quantité (infinie) de mémoire due au stockage (grand gain). Dans ce mémoire, nous allons présenter un nouvel observateur avec un temps de convergence finie pour les systèmes linéaires à temps continu [16], qui réduit la mise en œuvre des problèmes. La convergence en temps fini de l'observateur est simplement réalisée en mettant à jour l'état de l'observateur (réinitialisation) en fonction de la différence entre la sortie mesurée et la sortie estimée à des instants discrets.

A fin de mener à bien les objectifs visés, nous avons organisé le mémoire comme suit :

Le premier chapitre consiste en une étude générale des systèmes impulsifs. Dans la première partie, un rappel des définitions sur les systèmes dynamiques impulsifs et diffé-

rent types de systèmes impulsifs sont présentés. Dans la deuxième partie du chapitre, les outils fondamentaux servant à l'étude de la stabilité sont présentés.

Dans le deuxième chapitre, nous abordons les notions de base de l'automatique et outils nécessaires à l'analyse de la stabilité seront présenté, de façon générale, tel que l'observabilité, la stabilisation par retour d'état pour les systèmes dynamiques continus. Puis nous synthétisons un observateur impulsif pour ces systèmes. L'analyse de la convergence de l'erreur d'estimation est effectuée au moyen des fonctions de Lyapunov formalisées moyennement l'outil des inégalités linéaires matricielles (LMIs).

Le troisième chapitre, est dédié aux résultats de simulations obtenus avec MATLAB. Il consiste en la synthèse d'observateurs impulsifs pour le système masses-ressorts et le système véhicule.

Enfin, nous terminons par une conclusion générale et des perspectives.

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes dynamiques impulsifs

1.1 Introduction

En automatique, les systèmes physiques sont souvent représentés par un modèle dynamique continu ou par un modèle à événements discrets. La nature de chaque modèle est définie selon les variables utilisées pour décrire l'état du système et la variable caractérisant le temps. Il est important dans de nombreux cas d'utiliser l'une de ces catégories de modèles. Cependant, la plupart des systèmes réels sont complexes. Ils sont présentés par une combinaison d'un processus continu et d'un processus discret. Ce type de systèmes ne peut être classé ni dans la catégorie « systèmes continus » ni dans la catégorie « systèmes discrets ». Il est alors nécessaire d'utiliser des modèles hybrides permettant la prise en compte à la fois des variables continues et des variables discrètes ainsi que les interactions entre elles. Une classe particulière de ces systèmes hybrides est celle des systèmes impulsifs.

Les systèmes dynamiques impulsifs ont été formulés par Milman et Myshkis [4]. La théorie fondamentale des équations différentielles impulsionnelles a été développée par de nombreux auteurs : Haddad, Lakshmiktham, Samoilenko et Bainov, [2, 1, 5, 26]. Cependant, l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques impulsifs reste un sujet ouvert.

Ce chapitre est consacré à des généralités sur les systèmes dynamiques impulsifs et est organisé comme suit : Dans la première partie, on rappelle quelques définitions sur les systèmes dynamiques impulsifs. Différents types de systèmes différentiels sont alors présentés. Dans la deuxième partie, nous rappelons quelques résultats établis concernant l'existence et l'unicité des solutions pour les équations différentielles impulsionnelles. Dans la troisième partie nous présentons les principaux travaux entrepris sur la stabilité des systèmes dynamiques impulsionnels.

1.2 Description des systèmes dynamiques impulsifs (SDI)

Les systèmes dynamiques impulsifs combinent une évolution continue modélisée par des équations différentielles ordinaires avec des sauts instantanés ou réinitialisations (impulsions). Ces systèmes subissent des changements brusques de l'état à des instants dans l'intervalle de leurs évolutions continues. La durée de ces changements est souvent négligeable par rapport à celui de toute l'évolution du processus et donc les changements brusques peuvent être rapprochés en termes de changements d'états instantanés, à savoir des impulsions.

Un système impulsif est décrit par [1] :

i) Une équation différentielle : Elle représente la dynamique continue qui est l'évolution du système avant l'arrivée d'impulsion.

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \quad (1.1)$$

$x(t) \in \mathbb{R}$ est le vecteur d'état.

$f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \Rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert.

\mathbb{R}^n : l'espace Euclidien de dimension n .

\mathbb{R}^+ : l'ensemble des réels positifs.

ii) Un ensemble des instants et des états impulsions " T_k " appelé ensemble des conditions de réinitialisation . $T_k \subseteq \mathbb{R}^+ \times \Omega$.

iii) Une équation aux différences : Elle représente la dynamique discontinue qui traduit le changement du comportement des systèmes à l'arrivée des impulsions, c'est-à-dire $(x(t), t) \in T_k$.

$$\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)) \quad (1.2)$$

$I_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$: est une fonction supposée continue sur Ω . On note aussi :

$$\Delta x(t_k) \triangleq x(t_k^+) - x(t_k^-) \quad (1.3)$$

Un système d'équation différentielles impulsives est alors défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x) & \text{si } (x(t), t) \notin T_k \\ \Delta x(t_k) \triangleq I_k(x) & \text{si } (x(t), t) \in T_k \\ x(t_0^+) = x_0 & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.4)$$

$x(t_0^+) = x_0$ est la condition initiale.

Autre écriture :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x) & \text{si } (x(t), t) \notin T_k \\ x(t_k^+) = x(t_k^-) + I_k(x(t), t) & \text{si } (x(t), t) \in T_k \\ x(t_0^+) = x_0 & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.5)$$

tel que :

$x(t_k^+)$: est l'état du système juste après l'impulsion.

$x(t_k^-)$: est l'état du système juste avant l'impulsion.

avec :

$$\begin{cases} x(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k + h) \\ x(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k - h) = x(t_k) \end{cases} \quad (1.6)$$

Nous avons présenté le cas général des systèmes impulsifs. Nous allons citer ci dessous plusieurs types particuliers de systèmes impulsifs [1].

1.2.1 Systèmes impulsifs avec temps d'impulsions fixe

Pour ce type de systèmes les impulsions apparaissent à des instants invariables (fixes). Ce système peut être modélisé par le système (1.4) tel que l'ensemble des conditions de réinitialisation est défini comme suit :

$T_k = \{t_1, t_2, t_3, \dots\} \times \Omega$, T_k : est une suite strictement croissante tendant vers l'infini, d'instant d'impulsion.

Les systèmes (1.1) et (1.2) peuvent alors être réécrits sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x) & \text{si } t \neq t_k \\ \Delta x(t) = I_k(x) & \text{si } t = t_k \\ x(t_0^+) = x_0 & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.7)$$

Dans la suite de ce chapitre on s'intéressera en fait à l'étude de ce type de systèmes impulsifs dans le cas linéaire.

Remarque 1.1 [3] : Les impulsions dans ce type de systèmes sont dues à des variables externes comme par exemple les commandes. C'est pour cela que ce type de système est considéré comme un système impulsif contrôlé.

1.2.2 Systèmes impulsifs avec temps d'impulsions variables

Ces systèmes constituent une généralisation des systèmes à instants d'impulsions fixés. Pour ce type de systèmes impulsifs, on se donne une infinité dénombrable de fonctions

$\zeta_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que : $\zeta_k(x) < \zeta_{k+1}(x)$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \zeta_k(x) = +\infty$, pour tout x . Ces systèmes sont décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) & \text{si } t \neq \zeta_k(x) \\ \Delta x(t) = I_k(x) & \text{si } t = \zeta_k(x) \quad k = 1, 2 \dots \end{cases} \quad (1.8)$$

Ce type de système présente plus de difficultés que les systèmes à temps d'impulsion fixes.

1.2.3 Systèmes impulsifs autonomes

Lorsque l'état atteint certaines zones prédéfinies de l'espace d'état, il effectue un saut (ou impulsion) de sa valeur courante à une autre. L'ensemble de conditions de réinitialisation est alors défini par une région dans l'espace d'état qui est indépendante du temps. Dans ce cas, l'ensemble T_k est défini en fonction d'un nombre dénombrable de fonctions $\tau_k : D \rightarrow [0, \infty[$, il est donné par la formule suivante :

$$T_k : \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{\tau_k(x), x : x \in D\} \quad (1.9)$$

Le système impulsif autonome peut s'écrire alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) & \text{si } t \neq \tau_k \\ \Delta x(t) = I_k(x) & \text{si } t = \tau_k \end{cases} \quad (1.10)$$

1.2.4 Cas particulier : Système linéaire impulsif

Considérons le système linéaire impulsif suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) & \text{si } t \neq t_k \\ \Delta x(t_k^+) = R_k x(t_k) & \text{si } t = t_k \\ x(t_0^+) = x_0 & \text{si } t_0 \geq 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

avec $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice continue par morceaux, et $(R_k)_k \geq 1$ une suite de matrices constantes dans $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Si $A(t) = A$ et $\forall k \geq 1, R_k = R$, alors, la solution du système (1.11) avec les conditions initiales x_0 est donnée par :

$$x(t, x_0) = e^{A(t-t_k)} \left(\prod_{j=k}^{j=1} (I + R) e^{A(t_j - t_{j-1})} \right) \quad (1.12)$$

Pour plus de détails sur le calcul de cette solution consulter [1].

1.3 Existence et unicité de solution

L'étude est restreinte au cas des systèmes avec temps d'impulsions fixes.

Définition 1.3.1 [1] : Une fonction $x : [t_0, t_0 + a) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \geq 0$ est dite solution du système (1.1) si :

- i) $x(t_0^+) = x_0$ et $(t, x(t)) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$, $\forall t \in [t_0, t_0 + a)$.
- ii) $x(t)$ est continument différentiable sur $[t_0, t_0 + a) \setminus \{t_1, t_2, \dots\}$ est vérifie l'équation suivante $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$; $\forall t \in [t_0, t_0 + a]$ et $\forall t \neq t_k$.
- iii) Pour tout $t_k \in [t_0, t_0 + a)$, $x(t_k^+) = x(t_k^-) + I_k(x(t_k))$
- iv) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x(t)$ est continue à gauche aux instants $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

1.4 Stabilité des systèmes impulsifs

Tout comme les équations différentielles ordinaires, nous disposons de plusieurs outils théoriques pour étudier la stabilité des solutions des systèmes impulsifs. Nous présentons dans cette partie les principaux travaux connus sur la stabilité des systèmes impulsifs, le problème de la stabilité de ces systèmes a été étudié dans la littérature, (voir par exemple, Bainov et al [26], Haddad et al [2] et Samoilenko et al [5])., dont deux principales approches seront présentées : l'approche par principe de comparaison, développée par Lakshmikantham et al [1], elle repose sur les inégalités différentielles impulsives et le principe de comparaison en utilisant des fonctions de Lyapunov localement Lipschitziennes avec des discontinuités aux instants d'impulsion. L'autre approche donnée par Haddad et al [2] utilise les fonctions de Lyapunov.

Considérons de nouveau le système dynamique impulsif à temps fixe suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) & \text{si } t \neq t_k \\ x(t_k^+) = x(t_k^-) + I_k(x(t_k)) & \text{si } t = t_k \\ x(t_0^+) = x_0 & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.13)$$

Hypothèse 1.4.1 :

1. $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue localement lipschitzienne, $I_k : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue
2. $\forall i \in \mathbb{N} \quad t_i < t_{i+1}$ avec $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k \rightarrow +\infty$

Cette hypothèse assure qu'une solution existe de manière unique sur l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + a]$; $a > 0$ pour le système (1.13) .

Définition 1.4.1 [26] : Nous définissons les deux dérivées généralisées de Lyapunov comme suit :

$$D^+V(t, x) = \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{V(t+\delta, x+\delta f(t, x)) - V(t, x)}{\delta}$$

$$D^-V(t, x) = \liminf_{\delta \rightarrow 0^-} \frac{V(t+\delta, x+\delta f(t, x)) - V(t, x)}{\delta}$$

Si de plus, V est supposée continûment différentiable sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ c'est à dire $V \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$

Alors :

$$D^+V(t, x) = D^-V(t, x) = \dot{V}(t, x)$$

1.4.1 Approche par principe de comparaison

Cette approche consiste à trouver un système de comparaison dynamique pour en déduire la stabilité de système initial. Cependant il n'y pas de méthodes directes pour trouver des systèmes de comparaison simples associées au système (1.13).

Dans [1], l'auteur développe en détail sur cette approche.

Définition 1.4.2 [1] : soit $V \in V_0$ est supposons que : $D^+V(t, x) \leq g(t, V(t, x))$, $t \neq t_k$

$$V(k, x(t_k^-) + I_k(x(t_k^-)) \leq \Psi_k(V(t_k, x(t_k))); t = t_k$$

avec $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_q \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue de $(t_{k-1}, t_k) \times \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$. On a $\lim(t, y) \rightarrow g(t, y) = g(t_k^+, x)$ existe

$\Psi_k : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ est une fonction non décroissante. Alors le système ci dessous est dit système de comparaison pour le système (1.13)

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = g(t, w) & t \in [t_{k-1}, t_k] \\ w(t_k^+) = \Psi_k(w(t_k)) \\ w(t_0^+) = w_0 \geq 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Théorème 1.4.1 [1] : Sous les hypothèses que :

1. $f(t, 0) = 0$, $g(t, 0) = 0$ et $I(0) = 0 \forall k > 1$
2. $V : \mathbb{R}^+ \times \beta_\rho \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\rho > 0$ et $V \in V_0$ tel que $D^+V(t, x) \leq g(t, V(t, x(t)))$, $t \neq t_k$
3. Il existe un réel $\rho_0 > 0$ tel que (si $x \in \beta_{\rho_0}$ alors $x + I(x) \in \beta_\rho$ pour tout k et $V(t, x + I(x)) \leq \Psi_k(V(t, x))$; $t = t_k$ et $x \in \beta_{\rho_0}$).
4. $\beta(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha(\|x\|)$, $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \beta_\rho$, ou $\alpha(\cdot), \beta(\cdot) \in k$.

Alors les propriétés de stabilité de la solution du système (1.13) impliquent les propriétés de stabilité de la solution (1.14).

1.4.2 Approche par détermination d'une fonction de Lyapunov

Des résultats de stabilité basés sur la recherche d'une fonction de Lyapunov pour les systèmes dynamiques impulsifs ont été présentés dans [2]. Dans ce qui suit, nous rappelons les résultats les plus importants concernant cette approche pour les SDI.

Pour expliquer et exécuter cette approche nous citons les théorèmes ci-dessous :

Théorème 1.4.2 [2] : Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) & \text{si } t \neq t_k \\ x(t_k^+) = \varrho x(t_k) & \text{si } t = t_k \\ x(t_{0+}) = x_0 & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.15)$$

Supposons qu'il existe une fonction continuellement différentiable $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie positive et vérifiant pour tout $x \neq 0$

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0 \quad t \neq t_k \quad (1.16)$$

$$V(\varrho(x)) - V(x) \leq 0 \quad t = t_k \quad (1.17)$$

Alors :

Le système (1.15) est stable au sens de Lyapunov :

- Si l'inégalité (1.16) est stricte pour tout $x \neq 0$, alors le système (1.15) est asymptotiquement stable.
- Si de plus $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) \rightarrow +\infty$ alors la stabilité asymptotique est globale.

Corolaire 1.4.1 [2] : Soit le système linéaire impulsif suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) & \text{si } t \neq t_k \\ x(t_k^+) = R x(t_k) & \text{si } t = t_k \end{cases} \quad (1.18)$$

Où A et R sont des matrices constantes et de dimension appropriés.

On considère la fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T P x$, avec P une matrice symétrique définie positive, de dimension appropriée, tel que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$x^T (A^T P + P A) x \leq 0 \quad \text{si } t \neq t_k \quad (1.19)$$

$$x^T (R^T P R - P) x < 0 \quad \text{si } t = t_k \quad (1.20)$$

Alors :

- Le système (1.18) est stable en sens de Lyapunov.
- La stabilité est asymptotique si l'une des inégalité (1.19) ou (1.20) est stricte.

Théorème 1.4.3 [2] : On suppose qu'il existe une fonction continuellement différentiable $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie positive et vérifiant pour $x \neq 0, \exists \alpha, \beta > 0$ tel que $\forall \varepsilon > 0$ plus petit et $p \geq 1$. On écrit :

$$\begin{aligned} \alpha \|x\|^p &\leq V(x) \leq \beta \|x\|^p \\ \dot{V}(x) f(x) &\leq -\varepsilon V(x), \quad t \neq t_k \\ V(\varrho(x)) - V(x) &\leq 0, \quad t = t_k \end{aligned}$$

Alors :

Le système (1.18) est exponentiellement stable.

Si, de plus : $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) \rightarrow +\infty \implies$ la stabilité est exponentielle est globale.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, des concepts de base sur les systèmes dynamiques impulsifs ont été introduits. On a rappelé les définitions et les différents types de systèmes impulsifs. On a ensuite cité quelques résultats connus concernant l'existence et l'unicité des solutions pour les équations différentielles impulsives. Les principaux travaux connus sur la stabilité des systèmes dynamiques impulsifs sont finalement présentés. Ces concepts de base seront utilisés dans le chapitre suivant, afin de proposer un observateur impulsif.

Chapitre 2

Rappels sur la théorie de l'observateur et synthèse d'observateurs impulsifs pour les systèmes linéaires

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude et à la synthèse d'observateurs impulsifs pour les systèmes linéaires continus. Cependant, avant d'aborder cela, nous rappelons succinctement la théorie de l'observateur dans le contexte linéaire.

2.1 Introduction

Afin de concevoir des méthodes par retour d'état reconstruit, il est essentiel d'avoir des informations sur le système à étudier. Il arrive souvent que certaines variables de l'espace d'état ne soient pas mesurables pour différentes raisons techniques et économiques (capteurs inexistant technologiquement, mesures peut fiables et bruitées, coût financier,...). Cependant, pour être en mesure d'appliquer un bouclage sur l'état il est innéiste de disposer de la mesure complète de l'état. Ainsi, lorsque ces informations ne sont pas complètement accessibles à la mesure, il devient primordial de pouvoir en donner une estimation complète. Ceci peut être réalisé par la construction d'un autre système dynamique appelé observateur. Un observateur est un système dynamique qui permet d'estimer les variables d'états supposées inaccessibles à la mesure à partir des informations disponibles (entrées sorties mesuré, modèle d'état). Il est considéré comme capteur logiciel c'est-à-dire des algorithmes fondés sur un modèle du système. Ces captures logiciels délivrent à chaque instant t une estimation en ligne des variables d'état non mesurées.

Dans ce chapitre on présente un nouvel observateur [16] qui estime l'état exacte de système en un temps fini pour les système linéaire continu avant de synthétisé cette observateurs un rappel des outils d'analyse de la stabilité et l'observabilité dans le contexte

linéaire seront représentés.

2.2 Notion sur la stabilité

La notion de la stabilité joue un rôle primordial dans l'étude du comportement des systèmes dynamiques et dans la synthèse de lois de commande. Ainsi, le problème de la stabilité a fait l'objet de beaucoup de travaux des automaticiens et ingénieurs. Dans la littérature, il existe plusieurs notions de stabilité liées aux natures des systèmes étudiées, à ses événements, à ses spécifications et aux performances désirées. Cependant selon le problème traité, on définit plusieurs types de stabilité : la stabilité externe, la stabilité interne, la stabilité en temps fini et la stabilité entrée-état.

2.2.1 La stabilité externe

La stabilité externe, couramment appelée stabilité entrée-sortie est une forme de stabilité pour les systèmes dynamiques, où le système est considéré telle une boîte noire représenté par H liant un signal de sortie y à un signal d'entrée u (2.1). Cette notion de stabilité est liée au signal de sortie en réponse au signal d'entrée appliqué. Sommairement, on dit que un système est stable si, à une entrée bornée, correspond une sortie bornée, notée BIBO (Bounded Input Bounded Output). De ce fait, il nécessaire de se munir d'outils mathématiques appropriés afin de mesurer la norme d'une fonction, Nous définissons alors la norme fonctionnelle L_2 sur les signaux.

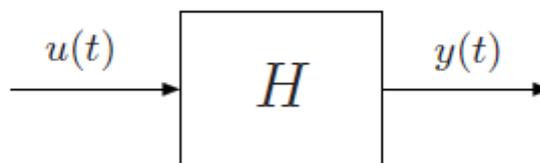


FIGURE 2.1 – Un système dynamique vu comme une relation entrée-sortie.

Définition 2.2.1 : Pour un signal $f(t)$ à valeur dans \mathbb{R}^n , la norme L_2 est définie par :

$$\|f(\tau)\|_{L_2} = \left(\int_0^{\infty} \|f(\tau)\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

L'espace fonctionnel L_2 représente l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\|f(\tau)\|_{L_2}$ existe et soit finie. Les signaux $u(t)$ et $y(t)$ sont respectivement l'entrée et la

sortie sont supposés appartenir aux espaces L_2 définies par la norme du même nom tel que :

$$\|u(t)\|_{L_2} = \left(\int_0^{\infty} \|u(\tau)\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

$$\|y(t)\|_{L_2} = \left(\int_0^{\infty} \|y(\tau)\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

$\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. Quand l'opérateur H est linéaire, l'analyse de la stabilité entrée-sortie se fait au moyen de la réponse impulsionnelle $h(t)$. On a les résultats suivants :

Théorème 2.2.1 [10] : Un système linéaire à temps invariant est B.I.B.O stable si et seulement si la réponse impulsionnelle est intégralement bornée si $(\int_0^{\infty} h(\tau)d\tau) \leq \gamma < \infty$

Dans le domaine de Laplace, l'analyse de la stabilité entrée/sortie revient à analyser les pôles de $H(s)$, la fonction de transfert définie par $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, degré de $N \leq$ degré de D ; Où D et N sont respectivement le dénominateur et le numérateur de la fonction de transfert $H(s)$.

Théorème 2.2.2 [8] : Un système est stable lorsque les pôles de sa fonction de transfert sont tous réels négatifs ou complexe à parties réelles négatives.

Néanmoins, la définition de la stabilité précédente de la stabilité n'est pas totalement satisfaisante pour un système en boucle fermée. En effet, non seulement la stabilité externe doit être assurée, mais aussi la stabilité interne doit être également bornée, c'est-à-dire les signaux internes de la boucle fermée doivent être également bornés. Nous allons présenter dans ce qui suit un autre type de la stabilité : la stabilité interne.

2.2.2 Stabilité interne

La stabilité interne consiste à analyser les solutions de l'équation d'état dues aux conditions initiales. Cette notion de stabilité est plus complète comparée à la stabilité externe. Différentes théories ont été proposées pour l'analyse de cette notion de stabilité, une des plus utilisées est la théorie de Lyapunov.

Stabilité au sens de Lyapunov [19] : La stabilité asymptotique et exponentielle des équations différentielles ordinaires est bien maîtrisée. Au 19^{ème} siècle le célèbre Alexander Mikhailovitch Lyapunov a été le premier à avoir formulé mathématiquement cette idée. L'analyse de la stabilité, au sens de Lyapunov consiste en l'étude des trajectoires du

système quand l'état initial est proche d'un état équilibre, c'est-à-dire que les trajectoires restent toutes dans un voisinage de l'origine.

Ici, nous aborderons la stabilité aux sens de Lyapunov pour les systèmes autonomes à temps invariant comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Une notion primordiale dans l'étude de la stabilité est la notion de point d'équilibre. Pour cela, nous définissons ce qu'est un point d'équilibre.

Définition 2.2.2 [10] : L'état x_e est dit état ou point d'équilibre pour le système (2.4) si $x(t_1) = x_e$ implique $x(t) = x_e$ pour tout $t \geq 0$ ou tout simplement l'état x_e vérifie l'équation $f(x_e) = 0$.

Définition 2.2.3 [10] : Le point d'équilibre x_e est dit stable si $\forall \varepsilon$, il existe $\rho(\varepsilon) > 0$ tel que $\|x_0 - x_e\| \leq \rho \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon \forall t \geq 0$.

Définition 2.2.4 [10] : Si le système dynamique, légèrement perturbé de son point d'équilibre, reste proche de ce point d'équilibre, on dira alors que ce point est stable.

Cette définition de la stabilité traduit la capacité d'un système dynamique, pour des conditions initiales données à rester très proche d'un point d'équilibre suite à une perturbation. Considérons comme exemple illustratif une bille sur une surface sphérique comme montré sur la figure (2.2). Dans le schéma de gauche de la figure, suite à une légère perturbation de la position d'équilibre, la bille reste proche de sa position d'équilibre qui est alors stable, alors que dans le schéma de droite, la bille ne reste pas proche de sa position d'équilibre qui est alors instable.



FIGURE 2.2 – Illustration de la définition intuitive de la stabilité.

La traduction mathématique de cette définition est donnée par la définition suivante :

Le point d'équilibre x_e est dit stable si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon \forall t \geq t_0$

Cela signifie que, quelque soit le rayon ε d'une boule centrée sur l'équilibre, il est possible de trouver une sous-boule de rayon $\delta(\varepsilon)$, tel que la trajectoire issue de n'importe quelle condition visible dans cette sous-boule de rayon δ ne quittera jamais la boule de rayon ε .

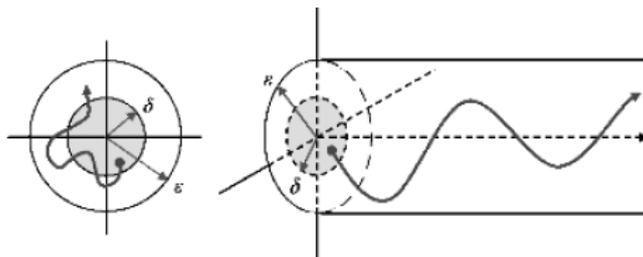


FIGURE 2.3 – Illustration de la stabilité au sens de Lyapunov.

Définition 2.2.6 [10] : Le point d'équilibre x_e est dit attractif s'il existe $\delta > 0$ tel que $\|x_0 - x_e\| \leq \delta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$

L'attractivité signifie que, si l'état est initialisé dans un certain voisinage de l'état d'équilibre, alors la trajectoire issue de cet état initial convergera vers l'état d'équilibre au bout d'un temps suffisant.

Définition 2.2.7 [10] : Le point d'équilibre x_e est asymptotiquement stable s'il est attractif.

La stabilité asymptotique exige l'existence d'un voisinage, l'état $x(t)$ converge vers x_e le temps tend vers l'infinie.

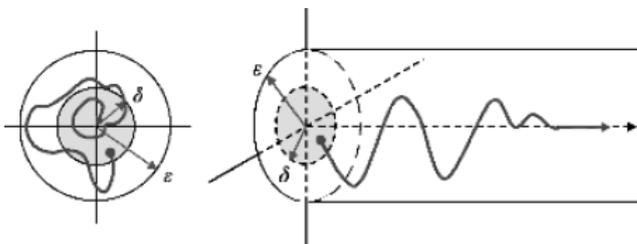


FIGURE 2.4 – Illustration de la stabilité asymptotique.

La définition de la stabilité asymptotique ne donne pas une idée sur la rapidité exponentielle ce qui nous mène à la définition de la stabilité exponentielle.

Définition 2.2.8 [10] : Le point d'équilibre x_e est exponentiellement stable s'il existe un $\alpha > 0$ et si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$ tel que $\forall t \leq t_0, \|x_0 - x_e\| < \delta$ alors :

$$\|x(t) - x_e\| < \varepsilon \implies \|x_e - x_0\| e^{(-\alpha(t-t_0))}$$

Cette définition traduit le fait que toute trajectoire issue d'une condition initiale appartenant à la boucle ouverte de rayon δ converge vers le point d'équilibre x_e plus rapidement qu'une fonction exponentielle, α est appelé dans ce cas le taux de convergence. On note que la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique ainsi la stabilité au sens de Lyapunov.

Dans chacune des définitions précédentes, la stabilité est définie localement puisque les conditions initiales sont prises dans un voisinage $\nu(x_e)$ autour de l'équilibre x_e .

Si $\nu(x_e) = \mathbb{R}^n$, le point d'équilibre est dit globalement asymptotiquement (exponentiellement) stable.

Considérant comme point d'équilibre l'origine x_e de l'espace d'état \mathbb{R}^n .

Les différents théorèmes de stabilité seront énoncés comme suit :

Théorème 2.2.3 [10] : Soit $x_e = 0$ un point d'équilibre pour le système(2.4) et $\nu \subset \mathbb{R}^n$ un système de ce point d'équilibre. S'il existe une fonction de Lyapunov V définie sur ν vérifiant $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \nu - \{0\}$.

Alors le point d'équilibre est stable au sens de Lyapunov.

Théorème 2.2.4 [10] : Soit $x_e = 0$ un point d'équilibre pour système(2.4) et $\nu \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de ce point d'équilibre, s'il existe une fonction de Lyapunov V définie sur ν vérifiant en plus $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in \nu - \{0\}$, alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Théorème 2.2.5 [10] : Soit $x_e = 0$ un point d'équilibre pour système(2.4) et soit la fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que :

- $V(0) = 0$
- $V(x) > 0$
- $\|x\| \rightarrow +\infty \implies V(x) \rightarrow \infty$.
- $\dot{V}(x) < 0$ dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Alors le point d'équilibre x_e est globalement asymptotiquement stable.

L'analyse de la stabilité au sens de Lyapunov peut s'effectuer soit par la méthode indirecte soit par la méthode direct.

La méthode indirecte permet d'analyser la stabilité d'un point d'équilibre du système non linéaire à partir du modèle linéarisé autour du point stationnaire x_e donc sont approximation linéaire :

$$\delta\dot{x} = Ax \tag{2.5}$$

avec $\delta x = x - x_e$

Où A est la matrice Jacobienne ou la matrice d'état :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial f_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

L'étude de la propriété de la stabilité s'effectue par l'analyse des valeurs propres de la matrice d'état A .

L'utilisation du modèle linéarisé n'est pas d'une grande utilité si la condition initiale (point de départ du mouvement) ne se trouve pas dans un voisinage de l'état d'équilibre.

La méthode direct aussi appelée la seconde méthode de Lyapunov est une extension de l'idée de l'énergie mécanique de Lagrange. Elle permet d'étudier la stabilité des systèmes non linéaires sans avoir recours à la résolution des équations différentielles et sans l'utilisation du modèle linéarisé. La procédure de base sur laquelle repose la méthode de Lyapunov consiste à trouver une fonction scalaire $V(x(t))$ définie positive qui doit vérifier certaines propriétés et d'analyser la variation de cette fonction.

Avant de présenter les différents théorèmes qui constitue la seconde méthodes de Lyapunov, nous allons présenter quelques définitions nécessaires qui seront utilisées par la suite.

Définition 2.2.9 [11] : Une fonction scalaire continue $V(x)$ est dite localement définie positive, si $V(0) = 0$ et s'il existe localement une région $\Omega \in \mathbb{R}^n$ contenant l'origine tel que :

$$x \neq 0 \Rightarrow V(x) > 0 \quad (2.7)$$

Si $V(0) = 0$ et que le système (2.7) est vérifiée pour tout l'espace d'état $\forall x \in \mathbb{R}^n$ alors $V(x)$ est dite globalement définie positive.

De la même manière :

- $V(x)$ est dite définie négative si $-V(x)$ est définie positive.
- $V(x)$ est dite semi-définie positive si $V(0) = 0$ et $V(x) \geq 0$ pour $x \neq 0$.
- $V(x)$ est dite semi-définie négative si $-V(x)$ est semi-définie positive.

Supposons que $V(x)$ dérivable, sa dérivée par rapport au temps est donnée : $\dot{V} = \frac{dV(x)}{dt}$

Définition 2.2.10 [11] : Si dans une région $\Omega \in \mathbb{R}^n$ contenant l'origine de la fonction $V(x)$ est définie positive et admet des dérivé partielles continues, et si sa dérivée par rapport au temps le long de n'importe quelle trajectoire Ω vérifie $\dot{V}(x)$ alors $\dot{V} \leq 0$ est appelée une fonction de Lyapunov pour ce système.

Définition 2.2.11 [9] : La fonction quadratique $V(x) = x^T P x$, ou $P_{n \times n}$ est une matrice réelle symétrique, est dite définie positive, si toutes les valeurs propres de la matrice $P_{n \times n}$ sont strictement positives.

Stabilité dans le cas des systèmes linéaires invariants : Soit le système linéaire à temps invariant suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

avec $x(0) = 0$ est le point d'équilibre.

Théorème 2.2.6 [10] : Le point d'équilibre x_e est stable au sens de Lyapunov si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice d'état A ont des parties réelles négatives.

Si toutes les valeurs propres de A ont des parties réelles strictement négatives, alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

S'il existe une valeur propre de A à partie réelle strictement positive, alors le point d'équilibre est instable.

Pour étudier la stabilité d'un système LTI en utilisant la seconde méthode de Lyapunov, une fonction quadratique est choisie, comme suit :

$$V(x) = x^T x(t) P x(t) \quad (2.9)$$

Où P est une matrice symétrique de dimension $n \times n$.

$V(x)$ est positive (semi) définie si P est positive (semi) définie.

P étant symétrique, toutes ses valeurs propres sont réelles. La dérivée de $V(x)$ par rapport au temps est :

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T P \dot{x}(t) \quad (2.10)$$

En remplaçant $\dot{x}(t)$ par son expression, on obtient :

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T(t) (A^T P + P A) x(t) \quad (2.11)$$

Le système (2.8) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice Q positive définie, tel que l'équation suivante possède une solution unique positive :

$$A^T P + P A = -Q \quad (2.12)$$

L'équation (2.12) est appelée équation de Lyapunov. Pour analyser la stabilité d'un système tel qu'en (2.8), il suffit de résoudre l'équation de Lyapunov correspondante, pour

une matrice Q positive définie choisi, généralement la matrice identité.

2.2.3 Stabilité Entrée-État : (ISS : Input to State Stability)

La stabilité entrée-état est une forme de stabilité interne qui étudie la relation entre l'entrée du système et son état. Elle impose une contrainte plus forte que la stabilité asymptotique, puisque à une entrée bornée doit correspondre un état borné [20],[21].

La stabilité au sens de Lyapunov ou asymptotique n'en dit pas plus sur les systèmes non autonomes soumis à une entrée ou une perturbation. Dans ce cas, il faut connaître l'effet de la perturbation sur l'évolution du système.

En pratique, un système dynamique est souvent soumis à des perturbations, ce qui ne peut être étudié d'un point de vue asymptotique, car un système asymptotiquement stable n'implique pas la convergence des trajectoires des solutions du système forcé.

Autrement dit, l'état ne converge plus vers l'origine mais vers un volume dit ensemble invariant. Cela est formalisé à l'aide des fonctions de classe K , K_L , K_∞ .

Considérons le système suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (2.13)$$

Définition : Le système (2.13) est localement stable au sens entrée-état s'il existe une fonction ϕ de classe K_L , une fonction de classe K ainsi que deux constantes $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\|x(t)\| \leq \phi(\|x_0\|, t) + \gamma(\|u_T(\cdot)\|) \quad \forall t \geq 0, 0 \leq T \leq t \quad (2.14)$$

$$\forall x_0 \in D \text{ et } u \in D_u \text{ satisfait } \|x_0\| < k_1 \text{ et } \sup_{t>0} \|u_T\|_{L^\infty} < k_2$$

Le système est dit ISS ou globalement ISS si $D = \mathbb{R}^n$ et $D_u = \mathbb{R}^n$ et (2.14) est satisfaite $\forall x_0$ et $\forall u$

2.2.4 Stabilité en temps fini

La notion de stabilité en temps fini est un cas particulier de la stabilité asymptotique. Cette notion est assez intuitive, particulièrement intéressante dans le contexte des observateurs et contrôleurs. En effet, le besoin de précision des observateurs et de la convergence des estimations mènent à considérer la stabilité en temps fini. L'idée de cette notion consiste à certifier que le système, au bout d'un temps bien déterminé atteint le point d'équilibre et y reste par la suite. La connaissance de l'instant où la trajectoire réelle rejoindra celle désirée est un aspect important dans les applications pratiques qui cherchent à garantir une bonne performance.

Dans ce que suit, nous allons présenter plusieurs outils et conditions pour l'obtenir :

Définition 2.2.3.1 [15] : L'origine du système (2.4) est dit stable en temps fini s'il existe un voisinage v de l'origine et une fonction $T : v - \{0\} \rightarrow [0, +\infty[$ appelée fonction temps d'établissement, telles que :

i) l'origine est stable au sens de Lyapunov.

ii) les solutions convergent en temps fini : $\lim_{t \rightarrow T(x)} x(t, t_0, x_0)$ Si de plus, $v = \mathbb{R}^n$ alors l'origine est globalement stable en temps fini.

Cette définition est illustrée sur la figure (2.5)

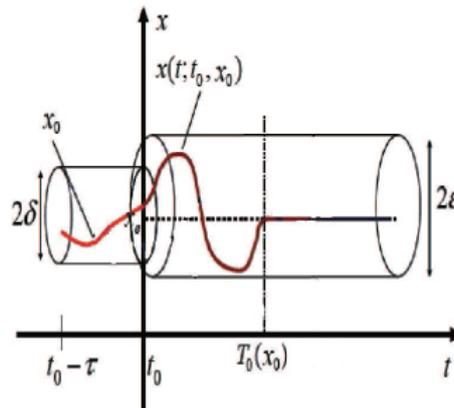


FIGURE 2.5 – Comportement de la solution en $x(\cdot)$ (stabilité en temps fini).

Rappelons un résultat élémentaire donné par Haimo [13] sur la stabilité en temps fini des systèmes autonomes scalaires de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x), x \in \mathbb{R} \quad (2.15)$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dans ce cas particulier, il existe une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité en temps fini.

Théorème 2.2.3.1 [15] : Supposons que l'origine soit un point d'équilibre du système (2.15) où f est continue. Alors, l'origine est stable en temps fini pour le système (2.15) si et seulement si s'il existe un voisinage de l'origine tel que pour tout $x \in \Omega - \{0\}$,

1. $xf(x) < 0$ et
2. $\int_x^0 \frac{dz}{f(z)} < +\infty$

Théorème 2.2.3.2 [15] : S'il existe une fonction de Lyapunov $V(x) : v \times \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

i) V est définie positive.

ii) il existe un voisinage de l'origine $v \subset \Omega$ tel que $\dot{V} + c(V(x)) \leq 0$, $x \in v - \{0\}$ avec $c > 0$ et $\beta \in]0, 1[$.

Alors l'origine du système (2.4) est stable en temps fini et la fonction temps d'établissement $T(x)$ est continue satisfait l'inégalité suivante :

$$T(x) \leq \frac{V(x(0))^{1-\beta}}{c(1-\beta)} \quad (2.16)$$

De plus, si $\Omega = \mathbb{R}^n$ et \dot{V} est définie négative sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$, alors l'origine du système (2.4) est globalement stable en temps fini.

Théorème 2.2.3.3 [15] : Supposons que l'origine du système (2.4) est stable en temps fini et la fonction du temps d'établissement T est continue en 0. Soit v un voisinage de 0 et $\beta \in]0, 1[$. Alors il existe une fonction $V(x) : v \rightarrow \mathbb{R}$ continue qui vérifie :

- i) V est définie positive.
- ii) \dot{V} est continue sur v et il existe $c > 0$ tel que $\dot{V} + c(V(x))^\beta \leq 0 \quad x \in v$

2.3 Rappels sur l'observabilité des systèmes linéaires continus

L'observabilité fait partie des notions essentielles dans la théorie du contrôle. Pour reconstruire l'état d'un système il faut savoir si les variables d'état sont observables ou non. Nous allons rappeler dans ce qui suit la définition de la notion d'observabilité et les critères dans le cas des systèmes linéaires continus qui vont nous servir lors de la synthèse d'observateurs impulsifs.

Considérons le système linéaire dont le comportement est décrit par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.17)$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ et $y(t) \in \mathbb{R}^q$ sont respectivement le vecteur d'état, de commande et de sortie, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ sont des matrices constantes, de dimension appropriées.

Définition 2.3.1 [6] : Le système dynamique (2.17) est complètement observable si, quelque soit l'instant t_1 , l'état initial x_1 à t_1 , et l'instant final t_2 différent de t_1 , la connaissance du signal d'entrée $u(t)$ et du signal de sortie $y(t)$ sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$

permet de calculer l'état du système à l'instant t_1 (l'état initial x_1).

Définition 2.3. 2 [6] : Le système dynamique (2.17) est complètement observable si est seulement si en régime autonome ($u \equiv 0$), l'observation d'une sortie $y(t)$ uniformément nulle pour $t_1 \leq t \leq t_2$ n'est possible que pour un état initial x_1 .

Pour mieux définir cette notion d'observabilité, il convient d'abord définir la notion d'indiscernabilité.

Définition 2.3.3 [6] : Deux états initiaux x_0^1 et x_0^2 distincts sont dits indiscernables si pour toute fonction d'entrée $u(t)$ et pour tout $t \geq t_0 \geq 0$, les sorties $y(t, x_0^1, t_0)$ et $y(t, x_0^2, t_0)$ qui en résultent sont égales.

C'est-à-dire qu'à partir de deux conditions initiales différentes, la sortie du système est la même dans les deux cas, et ceci pour une même commande appliquée. Ainsi :

Définition 2.3.4 : Le système est observable s'il ne possède pas de couple d'état initiaux distincts indiscernables.

Considérons le systèmes dynamique (2.17) parfaitement connu, puisque $u(\cdot)$ est connue, la matrice B n'intervient pas dans le critère d'observabilité. On peut donc ramener l'étude de l'observabilité à l'étude de la paire (A, C) .

D'après la définition 2.3.1, on peut définir plusieurs critères d'observabilité.

Théorème 2.3.1. [6] : Soit la matrice d'observabilité définie par :

$$O_{(A,C)}^C = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est son rang est définie par : $rang(O_{(A,C)}^C) = k_o$

La paire (A, C) est observable est équivalente à chacune des propriétés suivantes :

— Le critère de Kalman est maximal

$$rang(O_{(A,C)}^C) = n$$

— Critère de Hautus :le système est observable si pour tout valeur propre de A la matrice $\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}$ de rang n .

Lorsque le système n'est pas complètement observable il n'est pas possible de reconstruire un observateur. Cependant, si le système est détectable il sera possible de dimensionner un observateur, ce que constitue l'objectif de ce que suit :

En effet, lorsque la paire (A, C) n'est pas complètement observable, il faut étudier la détectabilité de cette même paire (A, C) .

Définition 2.2.5 [6] : La paire (A, C) est détectable si et seulement si tous ces modes non observables sont asymptotiquement stables.

Théorème 2.3.2 [6] : La paire (A, C) est détectable s'il existe une matrice constante $M(n \times m)$ tel que $(A + MC)$ soit asymptotiquement stable.

La synthèse d'un observateur se résume à déterminer son gain de manière à ce que l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers zéro.

Afin d'expliquer la procédure générale d'un observateur, nous allons appuyer sur la construction d'un observateur Luenberger [14] ; qui permet de reconstruire entièrement le vecteur d'état $x(t)$. On note par $z(t)$ la grandeur observée qui correspond à la sortie du système dynamique qui constitue l'observateur. Ainsi on a $z(t) = \hat{x}(t)$ où $\hat{x}(t)$ est l'estimée de $x(t)$, l'observateur de Luenberger associé est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.18)$$

Le terme correctif $L(y(t) - \hat{y}(t))$ fait apparaître le gain de correction L également appelé gain de l'observation où L est une matrice constante de dimension appropriée.

On peut aussi écrire l'observateur sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)x(t) + Bu(t) + Ly(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.19)$$

L'erreur dynamique d'estimation définie par $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, est donnée par :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \quad (2.20)$$

A partir de la condition initiale $e(0) = x(0) - \hat{x}(0)$, l'évolution de cette erreur d'estimation est régie par la dynamique linéaire suivante :

$$e(t) = e^{(A-LC)t} e_0 \quad (2.21)$$

Afin que l'observateur soit asymptotique, il faut que l'erreur tende vers 0 lorsque t tende vers ∞ . Afin de garantir une convergence asymptotique de l'erreur d'estimation ($\hat{x}(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow +\infty$),

On a les résultats suivants :

Théorème 2.3.3 [14] : Les valeurs propres de $(A - LC)$ peuvent être fixées arbitrairement si et seulement si (A, C) est observable.

Placement de pôle en utilisant des LMIs : Il faut déterminer L de manière à ce que l'erreur d'estimation $e(t)$ soit asymptotiquement stable :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

En utilisant une fonction de Lyapunov quadratique $V(e(t)) = e^T(t) P e(t)$. La stabilité asymptotique est assurée si $\dot{V}(e(t)) < 0$

$$\dot{V}(e(t)) = e^T(t) (A^T P + P A - C^T L^T P - P L C) e(t) \quad (2.22)$$

$$\dot{V}(e(t)) < 0 \Rightarrow (A^T P + P A - C^T L^T P - P L C) < 0.$$

Pour obtenir une LMI à résoudre avec les outils dédiés, on pose $M = P L$.

Delà, on aboutit à :

$$A^T P + P A - C^T M^T - M C < 0 \quad (2.23)$$

Après résolution de la LMI (2.23), on obtient P et M . Le gain de l'observateur est alors donné par :

$$L = P^{-1} M$$

Les inégalités matricielles linéaires LMIs sont de plus en plus utilisées en automatique. Parmi les raisons de leurs succès, on peut citer : L'existence de méthodes de résolution numériques efficaces (cout polynomial), ainsi que la possibilité de reformuler de nombreux problèmes d'analyse (stabilité, certaines performances, etc.) en termes de LMI, et la capacité de traiter des problèmes à données incertaines en commande robuste, qui en est pour beaucoup dans l'essor de cette approche ces dernières années.

2.4 Stabilisation et principe de séparation

Principe de séparation [12] : Soit le système linéaire en temps invariant (2.17).

On considère un bouclage sur l'état de ce système de la forme suivante :

$$u(t) = F x(t) \quad (2.24)$$

On remplace $u(t)$ avec son expression dans (2.17), on trouve le système en boucle fermée suivant :

$$\dot{x}(t) = (A + B F) x(t) \quad (2.25)$$

Les valeurs propre de la matrice $(A + BF)$ sont alors les pôles en boucle fermée étant donnée que l'état du systèmes (2.17) n'est pas mesurable. Pour cela, on remplace l'état x avec son estimée \hat{x} dans l'expression (2.24) c'est à dire :

$$u(t) = F x(t) + F e(t) \quad (2.26)$$

Le système (2.17) est bouclé par (2.26) s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + BF e(t) \quad (2.27)$$

En réunissant les équations dynamiques suivantes :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (A - KC)e(t) \\ \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + BF e(t) \end{cases} \quad (2.28)$$

Et on considérant l'état augmenté $\begin{bmatrix} x(t) & e(t) \end{bmatrix}^T$, on obtient le modèle d'état suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A - KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

La matrice d'état de ce système est triangulaire supérieure par bloc, ses valeurs propres sont égales à celles des matrices $(A + BF)$ et $(A - KC)$. Le fait fondamental que la dynamique du système (2.17) en boucle fermée et celle de l'observateur ne soient pas couplées est connu sous le nom de principe de séparation et l'une des conséquences de ce principe qui est possible de synthétiser de façon « séparée » un bouclage et un observateur.

Synthèse d'un retour d'état : Soit le système (2.17) instable. Pour le stabiliser, on détermine un retour d'état $u(t) = -Kx(t)$.

Il faut d'abord que le système soit commandable. La matrice de commandabilité est définie par :

$$C_{(A,B)}^C = \begin{bmatrix} B \\ AB \\ A^2 B \\ \vdots \\ A^{n-1} B \end{bmatrix}^T \quad (2.30)$$

Théorème 2.4.1 [6] Le paire (A, B) est commandable si et seulement si le $\text{rang}(C_{(A,B)}^C) = n$.

Un des objectifs de la théorie du contrôle est de déterminer des commandes qui stabilisent le système. Rappelons que le retour d'état pour les système linéaire (ou bouclage

linéaire) est donné par une loi de commande de type :

$$u(t) = -K x(t) \quad (2.31)$$

où K dite matrice de gain.

Définition 2.4.1 [6] : Une telle loi est dite stabilisante si l'origine du système en boucle fermée $\dot{x}(t) = (A - B K)$ est asymptotiquement stable.

Théorème 2.4.2 [6] : Si la paire (A, B) est commandable on peut choisir la matrice de gain K pour placer arbitrairement les valeurs propres de la matrice $(A - B K)$.

Alors on peut toujours trouver un gain K qui permet d'assigner les valeurs propres de $(A - B K)$ à des positions désirées choisie au préalable. Le problème de construction de la commande est alors un problème de placement de pôles. On peut choisir la matrice K de telle sorte que la matrice $(A - B K)$ soit de Hurwitz et ainsi l'origine du système soit asymptotiquement stable. Donc, tout système linéaire commandable est stabilisable.

Théorème 2.4.3 [6] : Considérons un système linéaire commandable et observable. Soient K et L des matrices de gains telles que les matrices $(A - B K)$ et $(A - B L)$ soit Hurwitz.

Stabilisation par retour d'état en utilisant les LMIs : Nous cherchons à synthétiser une loi de commande $u(t) = -K x(t)$ qui assure la stabilité de système (2.17) comme le problème de la construction de la commande revient à un problème de placement de pôles, ce dernier est amélioré dans une région LMI en utilisant des fonction de Lyapunov quadratiques.

Il est à noter que le système est stable s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x(t))$ tel que $\dot{V}(x(t)) < 0$:

$$\dot{V} < 0 \Leftrightarrow A^T P + P A - K^T B^T - P B K < 0 \quad (2.32)$$

On multiplie à gauche et à droite par P^{-1} on aura :

$$X A^T + A X - M^T B^T - B M < 0 \quad (2.33)$$

Avec $X = P^{-1}$

Pour obtenir une LMI ,on note $M = K X$

$$X A^T + A X - M^T B^T - B M < 0 \quad (2.34)$$

On résout la LMI pour les inconnues : X et M .

Après résolution on retrouve le gain du retour d'état $K = M P$.

2.5 Synthèse d'un observateur impulsif

Dans cette section nous allons présenter un nouveau type d'observateur avec un temps de convergence prédéterminé pour les systèmes linéaires continus.

Considérons le système linéaire à temps continu (2.17), l'observateur proposé est donné comme suit [16] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A \hat{x} + B u(t) + L (y(t) - C \hat{x}(t)) & t \neq t_k \\ \hat{x}(t_k^+) = \hat{x}(t_k) + K_k (y(t_k) - C \hat{x}(t_k)) & t = t_k \\ \hat{x}(t_0^+) = \hat{x}_0 & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.35)$$

Où : $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur estimé, \hat{x}_0 est la condition initiale de l'observateur, $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ et $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$ sont les matrices d'observateur. t_k est une séquence temporelle satisfaisant $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$, on $\delta_k = t_k - t_{k-1} = cst$, et $\delta > 0$.

avec :

$$\begin{cases} \hat{x}(t_k) = \hat{x}(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0} \hat{x}(t_k - h) \\ y(t_k) = y(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0} y(t_k - h) \quad (h > 0) \end{cases} \quad (2.36)$$

Cet observateur impulsif diffère d'un observateur classique Luenberger par la deuxième équation supplémentaire $x(t_k^+)$ en raison des mise à jour ou réinitialisations de l'état de l'observateur. La dynamique de l'observateur présente alors un comportement dynamique impulsif.

Le théorème suivant indique comment choisir les paramètres de l'observateur qui sont L , K et δ de telle manière à ce que l'observateur (2.35) converge en temps fini.

Théorème 2.5.1 [16] : Soit les matrices L , P et la constante δ qui fixe le temps choisies tel que la matrice $Q = A - LC$ soit Hurwitz et que $R = e^{(Q\delta)} - PC e^{(Q\delta)}$ ait toutes ses valeurs propres égales à zéros. Soit l'observateur (2.35) avec les gains d'observabilité L et $K_k = P$, si $1 \leq k \leq n$, $K_k = 0$, si $k > n$ estime l'état du système (2.17) en un temps fini prédéterminé $\tau = t_n - t_0 = n\delta$, c'est-à-dire $\hat{x}(t) = x(t) \quad \forall t > t_n$.

Preuve : L'étude de la convergence de cet observateur revient à l'étude de l'erreur d'estimation $e(t)$. Le système dynamique générant l'erreur d'estimation est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (A - LC) e(t) & t \neq t_k \\ e(t_k^+) = (I - K_k C) e(t_k) & t = t_k \\ e(t_0^+) = e_0 & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.37)$$

L'erreur $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ nous permet d'étudier le comportement de convergence de l'observateur impulsif. À partir de (2.37) l'erreur d'estimation peut être exprimée comme suit :

$$\begin{cases} e(t) = e^{Q(t-t_k)} e(t_k^+) & \text{pour } t \in (t_k, t_{k+1}] \\ e(t_k^+) = (I - K_k C) e^{(Q\delta)} e(t_{k-1}^+) & \text{pour } t = t_k \end{cases} \quad (2.38)$$

Par conséquent, il résulte de (2.38) que la solution du système dynamique d'erreur (2.37) avec la condition initiale e_0 est donné par :

$$\begin{cases} e(t) = e^{Q(t-t_k)} \prod_{i=1}^k (I - K_i C) e^{(Q\delta)} e_0 & \text{pour } t \in (t_k, t_{k+1}] \\ e(t_n^+) = (I - P C) e^{(Q\delta)^n} e_0 = R^n e_0 & \text{pour } t = t_k \end{cases} \quad (2.39)$$

Car on a $K_k = P$ pour $1 \leq k \leq n$ et $\lambda_i(R) = 0$ $i = 1, \dots, n$. R c'est une matrice nilpotent.

À partir de (2.39), on remarque que l'erreur d'estimation $e(t) = 0$ lorsque $t > t_n$. Cela nous confirme que l'observateur impulsif estime l'état exacte du système en temps finie $\tau = t_n - t_0 = n\delta$.

Remarque 2.5.1 : L'observateur converge en un temps fini τ si la matrice R a toutes ses valeurs propres égales à zéro. Les valeurs propres de R peuvent être placées à l'origine si le système impulsif (à temps discret) est observable.

Dans la partie précédente, nous avons rappelé quelques conditions d'observabilités qui assurent la conception et la convergence d'un observateur d'état pour les systèmes linéaires continus. Nous allons maintenant rappeler la condition d'observabilité pour les systèmes linéaires impulsifs, considérons le système impulsif suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) \\ y(t_k) = C x(t_k) \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.40)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur d'état et la sortie mesurée en temps discret. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$ sont des matrices constantes, de dimension appropriées.

La solution de l'équation d'état de système (2.40) avec la condition initial est donnée par :

$$\begin{cases} x(k+1) = e^{(Q\delta)} x(t_k) \\ y(k) = c e^{(Q\delta)} x(t_k) \end{cases} \quad (2.41)$$

Ce qui conduit à calculer les mesures à partir de la condition initiale du système comme suit :

$$\begin{cases} y(t_0) = C e^{(Q\delta)} x(t_0) \\ y(t_1) = C e^{(Q\delta)^2} x(t_0) \\ y(t_2) = C e^{(Q\delta)^3} x(t_0) \\ y(t_n) = C e^{(Q\delta)^n} x(t_0) \end{cases} \quad (2.42)$$

qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$y(t_k) = \begin{bmatrix} y(t_0) \\ y(t_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ y(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C e^{(Q\delta)} \\ C e^{(Q\delta)^2} \\ \cdot \\ \cdot \\ C e^{(Q\delta)^n} \end{bmatrix} x(t_0) \quad (2.43)$$

Conformément au principe d'observabilité pour les systèmes impulsifs la matrice d'observabilité, pour ce type des systèmes est donnée par :

$$(\mathcal{O}_{(A,C)}^d) = \begin{bmatrix} C e^{(Q\delta)} \\ C e^{(Q\delta)^2} \\ \cdot \\ \cdot \\ C e^{(Q\delta)^n} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Proposition [17] : Le système linéaire impulsif est observable si et seulement si la matrice d'observabilité vérifie la condition suivante :

$$\text{rang}(\mathcal{O}_{(A,C)}^d) = n$$

On peut aussi écrire cette condition sous la forme suivante :

$$\text{rang}(S e^{(Q\delta)}) = n$$

avec : $S = [C^T (C e^{(Q\delta)})^T]$

Cette condition d'observabilité est satisfaite si la matrice S à le rang complet :

$$\text{rang}(e^{(Q\delta)}) = n$$

pour toute matrice $Q\delta$, c'est-à-dire $\text{rang}(S e^{(Q\delta)}) = \text{rang}(S)$.

Remarque [23] : D'après la formule d'Ackerman. La matrice d'observateur P peut être calculée pour les systèmes (2.40) avec une seule sortie, soit $q = 1$

$$P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (e^{(Q\delta)})^T C^T \\ \cdot \\ \cdot \\ (e^{(Q\delta)})^T C^T \end{bmatrix}^{-1} (e^{(Q\delta)})^T \quad (2.45)$$

2.6 Conclusion

Ce chapitre constitue un rappel qui regroupe certaines notions de stabilité, d'observabilité et de synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires continus à temps invariants, qui nous servons lors de la construction d'observateurs impulsifs. Le troisième chapitre sera consacré à l'application de l'observateur impulsif proposé.

Chapitre 3

Synthèse de l'observateur impulsif et simulation

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons exploiter ce que nous avons exposé dans les chapitres précédents. Nous synthétisons un observateur à dynamique impulsive avec un temps de convergence fini, qui découle de la mise à jour de l'état de l'observateur à des instants de temps discrets. L'applicabilité de cet observateur proposé sera démontrée sur des exemples d'application. Cet observateur est proposé pour certaines propriétés théoriques tel que, par exemple la faible complexité de calcul, ainsi que la majorité des systèmes linéaires se fait à partir du modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement.

Deux applications seront considérées. La première est le système masses-ressorts, influencé par le bruit et la seconde est le système véhicule, influencé par une perturbation.

3.2 Première application : Système masses-ressorts.

Soit un système masses-ressorts illustré par la figure (3.1). Le système est composé de deux masses m_1 et m_2 , repérées par leurs positions mesurable x_1 , x_2 . Les deux masses sont reliées par deux ressorts dont les coefficients de raideur sont respectivement k_1 et k_2 . Le système est excité par une force F qui correspond à l'entrée $u(t) = \sin(t)$. Le système est modélisé par une représentation d'état, à quatre états, donnée en (3.1) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Les matrices du systèmes sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

où : $x(t)$ et $y(t)$ sont respectivement le vecteur d'état et la sortie du système.

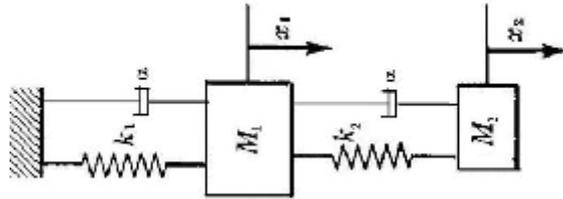


FIGURE 3.1 – Système masses-ressorts.

Test de la stabilité : Calcul des valeurs propres de la matrice d'état A :

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{3.2}$$

Les valeurs propres du système sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0.1689 + 1.345 i \\ \lambda_2 = -0.1689 - 1.345 i \\ \lambda_3 = -1.3311 + 1.2202 i \\ \lambda_4 = -1.3311 - 1.2202 i \end{cases} \tag{3.3}$$

Le système est stable car toutes les valeurs propres de la matrice d'état A sont à parties réelles négatives.

Les états de système sont représentés en figure (3.2).

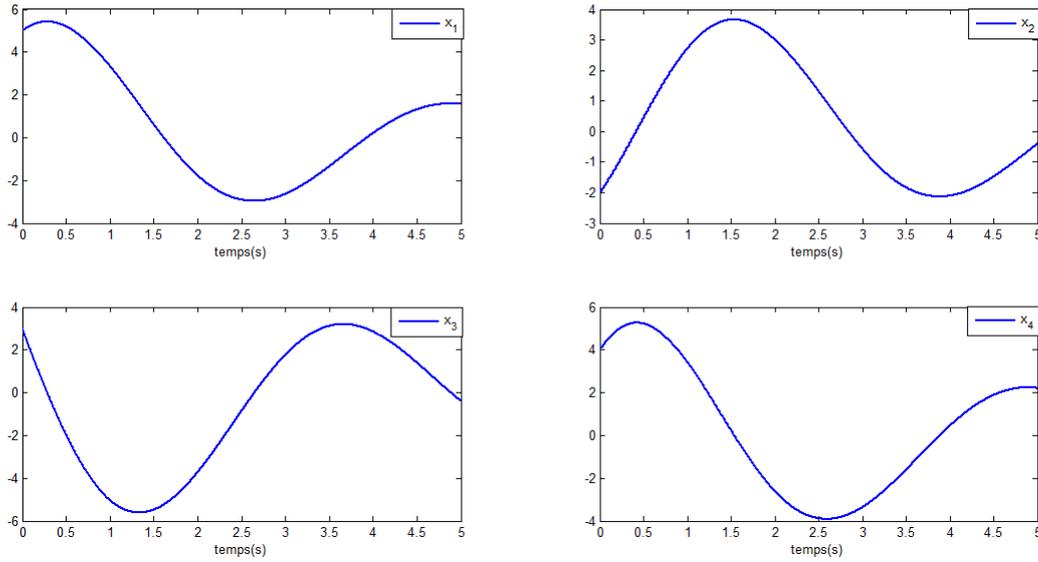


FIGURE 3.2 – Les états de système.

Avant de synthétiser l'observateur, nous testons l'observabilité de ce système. Pour ce faire, on calcule la matrice d'observabilité $O_{(A,C)}^c$:

$$O_{(A,C)}^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

le système est observable car le $\text{rang}(O_{(A,C)}^c) = 4$

L'observateur correspondant est sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A \hat{x}(t) + B u(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) & t \neq t_k \\ \hat{x}(t_k^+) = \hat{x}(t_k) + K_k (y(t_k) - C \hat{x}(t_k)) & t = t_k \\ \hat{x}(t_k^+) = \hat{x}_0 & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.5)$$

L'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est donnée par le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = Q e(t) & \text{si } t \neq t_k \\ e(t_k) = (I_n - K_k C) e(t_k) & \text{si } t = t_k \end{cases} \quad (3.6)$$

avec : $Q = A - LC$, dont la solution est :

$$\begin{cases} e(t) = \exp(Q(t - t_k)) e(t_k^+) & \text{pour } t \in (t_k, t_{k+1}] \\ e(t_k^+) = (I - K_k C) \exp(Q \delta) e(t_{k-1}^+) & \text{pour } t = t_k \end{cases} \quad (3.7)$$

Delà, la solution du système de la dynamique de l'erreur (3.6) avec la condition initial e_0 est donné par :

$$\begin{cases} e(t) = e^{(Q(t-t_k))} \prod_{i=1}^k (I - K_i C) e^{(Q\delta)} e_0 & \text{pour } t \in (t_k, t_{k+1}] \\ e(t_n^+) = (I - PC) e^{(Q\delta)^n} e_0 = R^n e_0 & \text{pour } t = t_k \end{cases} \quad (3.8)$$

L'observateur impulsif assure une convergence en temps fini de l'erreur d'estimation. Le but est de trouver L , K et δ de manière à ce que l'erreur d'estimation $e(t)$ soit nulle en temps fini. Le temps de convergence est choisi étant $\tau = 1$ s. Ainsi, on doit concevoir les paramètres L , K et δ de telle manière à ce que les conditions du théorème (2.5.1) soient satisfaites.

La constante qui fixe le temps est donnée par $\delta = \tau/4 = 0,25$.

Calcul des gains L et K :

L est calculé de telle manière que les valeurs propres (les pôles de l'observateur) Q soient à parties réelles négatives (stables) et avec une rapidité désirées. Les valeurs propres désirées sont :

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_1 = -8.1063 + 4.9993 i \\ \bar{\lambda}_2 = -8.1063 - 4.9993 i \\ \bar{\lambda}_3 = -0.3937 + 0.6117 i \\ \bar{\lambda}_4 = -0.3937 - 0.6117 i \end{cases} \quad (3.9)$$

Par la technique de placement de pôles on calcul le gain L . Après calcul on obtient :

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 111.3 \\ 17.3 \\ 150.3 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$K_k = P$ pour $1 \leq k \leq 4$

$K_k = 0$ pour $k > 4$

En utilisant la formule d'Ackerman, on obtient :

$$P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (e^{(Q\delta)})^T C^T \\ \vdots \\ (e^{(Q\delta)})^T C^T \end{bmatrix}^{-1} (e^{(Q\delta)})^T \quad (3.11)$$

$$P = \begin{pmatrix} 14 \\ 94 \\ 56 \\ -90 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Les résultats de simulation avec les conditions initiales $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ et $\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$ sont tracés en figures (3.3) et (3.4) :

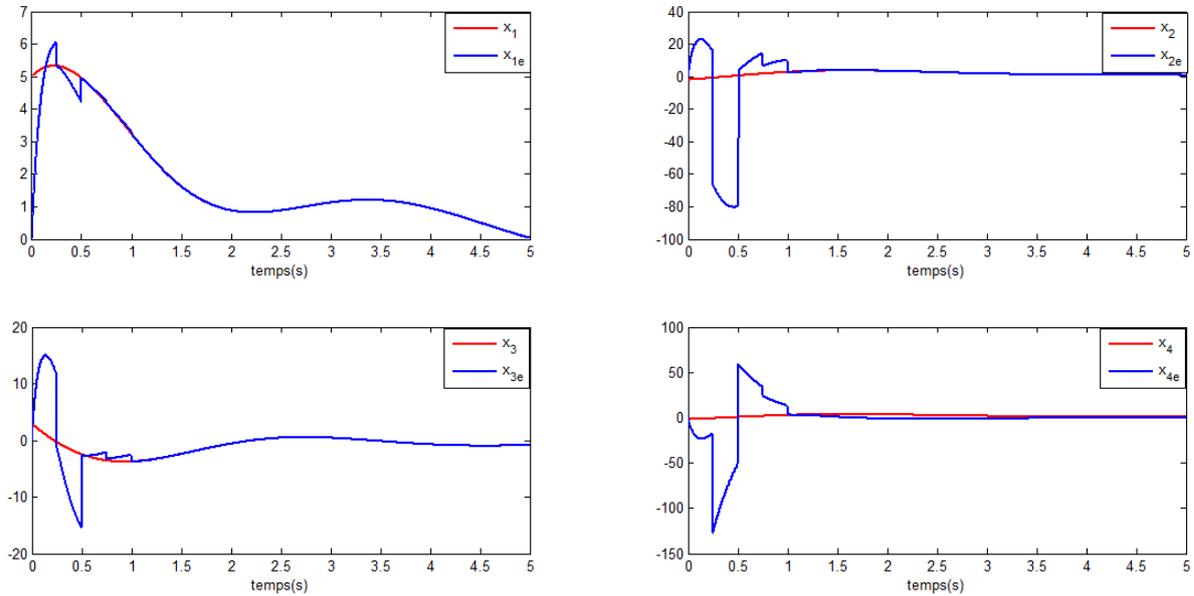


FIGURE 3.3 – Estimation des états avec l'observateur impulsif.

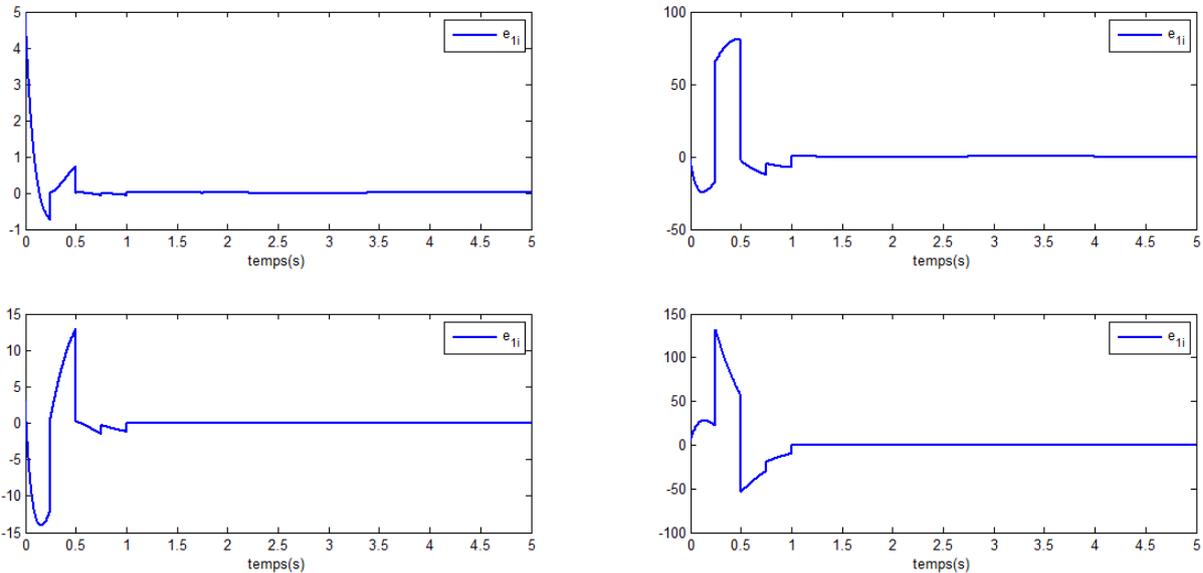


FIGURE 3.4 – Les erreurs d'estimation de l'observateur impulsif.

La dynamique de l'observateur présente un comportement dynamique impulsif. Les erreurs d'estimation $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ et $e_4(t)$ résultent de la comparaison des états du système masses-ressorts et ses estimées. Les résultats de simulations montrent bien que l'observateur proposé reconstruit l'état exact du système à temps continu en un temps fini prédéterminé $\tau = 1$ s. Cet observateur force à avoir l'erreur d'estimation nulle en un

temps fini . Ce dernier est réalisé en mettant à jour l'état de l'observateur en fonction de la différence entre la sortie et la sortie estimée à des instants de temps discret.

Le système masses-ressorts avec bruit :

On considère le bruit $\omega(t)$ sur le système qui est généré par "rand " de Matlab. Les résultats de simulation sont donnés en figure (3.5).

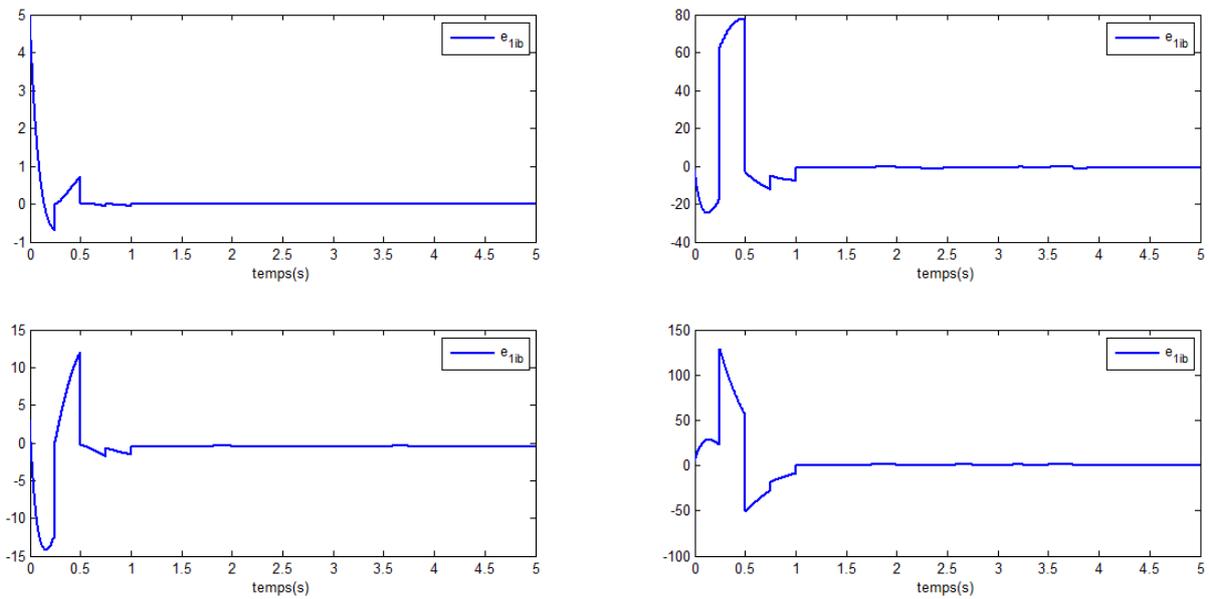


FIGURE 3.5 – Les erreurs d'estimations en présence de bruit sur le système.

Dans ce cas, l'observateur impulsif force la convergence de l'erreur d'estimation en temps fini malgré une certaine imprécision. On note que cet observateur rejette le bruit. Cella dépend des caractéristiques du système qui peut agir comme un filtre, à cause des réinitialisations de l'observateur impulsif (les mises à jour) .

Maintenant, si on considère le bruit sur la sortie. Les résultats de simulation sont donnés en figure (3.6) :

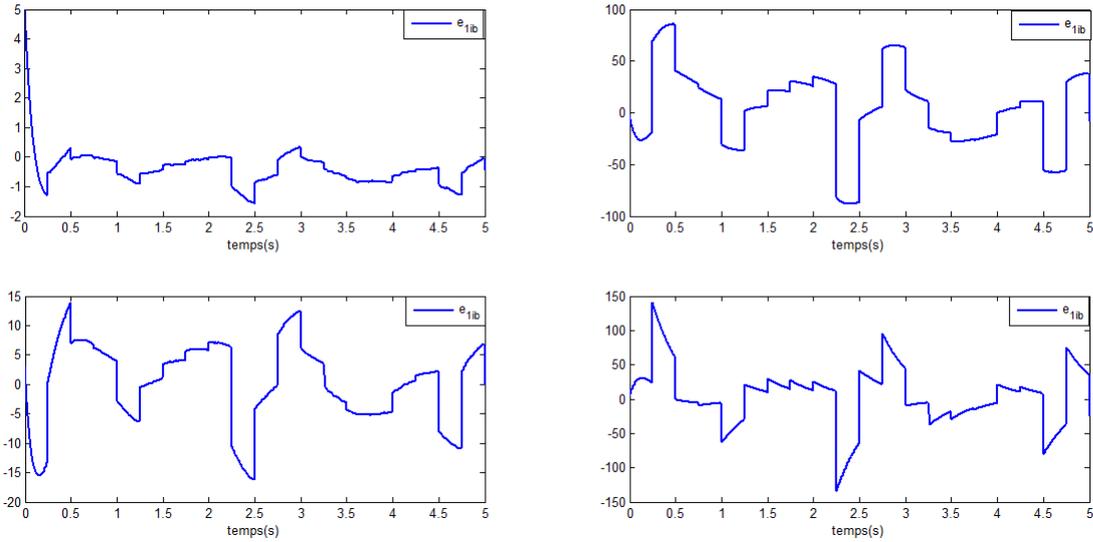


FIGURE 3.6 – Les erreurs d'estimation en présence de bruit sur la sortie.

Comme le système impulsif à une bande spectrale assez large, le bruit est amplifié, ce qui explique les résultats obtenus. Pour éliminer ce bruit il faut un filtre de Kalman.

Comparaison avec l'observateur Luenberger

L'observateur correspondant est sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A \hat{x}(t) + B u(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.13)$$

L'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{e}(t) = Q e(t) \quad (3.14)$$

L'observateur de Luenberger assure une convergence asymptotique de l'erreur d'estimation. Le but est de trouver L de manière à ce que l'erreur d'estimation $e(t)$ soit asymptotiquement stable :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (3.15)$$

C'est à dire que l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers zéros quand le temps tend vers l'infini.

Pour démontrer cela, on utilise une fonction de Lyapunov quadratique $V(e(t)) = e^T(t) P e(t)$. La stabilité asymptotique est assurée si $\dot{V}(e(t)) < 0$:

$$\dot{V}(e(t)) = e^T(t) (A^T P + P A - C^T L^T P - P L C) e(t) \quad (3.16)$$

$$\dot{V}(e(t)) < 0 \Rightarrow (A^T P + P A - C^T L^T P - P L C) < 0.$$

Pour obtenir une LMI à résoudre avec les outils dédiés, on pose $M = PL$.

Delà, on aboutit à :

$$A^T P + P A - C^T M^T - M C < 0 \quad (3.17)$$

Après résolution de la LMI (3.17), on obtient P et M . Le gain de l'observateur est alors donné par :

$$L = P^{-1} M \quad (3.18)$$

$$L = \begin{pmatrix} 0.4168 \\ 0.1504 \\ -0.4327 \\ 1.2070 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Les résultats de simulation sont donnés en figure (3.7).

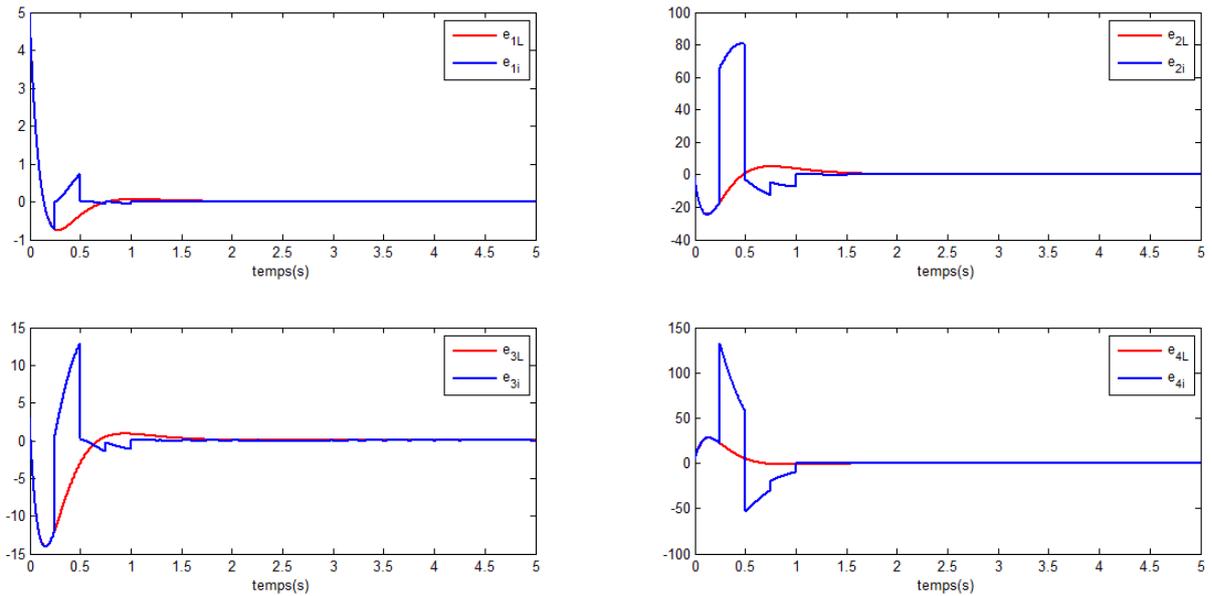


FIGURE 3.7 – Comparaison des erreurs d'estimations avec l'observateur impulsif et Luenberger .

L'observateur impulsif diffère d'un observateur classique Luenberger par les mises à jour ou réinitialisations de l'état de l'observateur. La dynamique de cet observateur présente alors un comportement dynamique impulsif où l'erreur d'estimation s'annule en un temps fini prédéterminé $\tau = 1 s$, assurant la convergence en temps fini. L'observateur de Luenberger assure la convergence asymptotique, c'est-à-dire que l'erreur d'estimation tend vers zéros quant $t \rightarrow \infty$. On remarque bien que les estimations données par l'observateur impulsif sont plus précises comparées à celles de l'observateur Luenberger.

3.3 Deuxième application : Véhicule

Le véhicule reste l'une des causes de mortalités les plus alarmantes. Les accidents de la route infligent des pertes humaines et économiques considérables malgré les efforts de prévention, d'informations et mêmes de répression des politiques et des gouvernements ainsi que les constructeurs automobiles qui ne cessent d'améliorer les dispositifs de sécurité (systèmes d'alerte, systèmes de détection et systèmes de prévention,...) à bord du véhicule. Afin d'assurer une bonne précision pour ces systèmes il faut estimer les variables exactes. Dans ce qui suit nous synthétisons un observateur impulsif pour le système véhicule (3.20) afin de reconstruire ses états de manière précise.

Le modèle du véhicule est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.20)$$

Où les matrices A, B et C sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} -4.2244 & -0.9106 \\ 10.7073 & -4.0548 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1.9803 \\ 16.9464 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T$$

$x(t)$ et $y(t)$ sont respectivement le vecteur d'état et la sortie du système.

Nous appliquons l'observateur proposé en (3.5). Les résultats de la simulation avec $u(t) = \sin(t)$, et conditions initiales $x_0 = [2 \ 4]^T$ et $\hat{x}_0 = [0 \ 0]^T$ sont données par les figures (3.8) et (3.9).

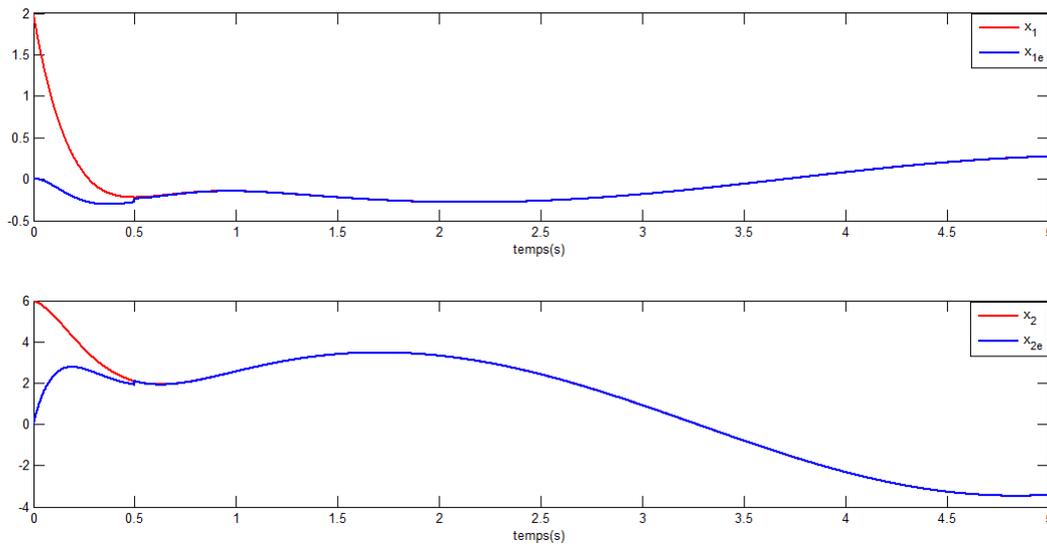


FIGURE 3.8 – Les états et leurs estimées .

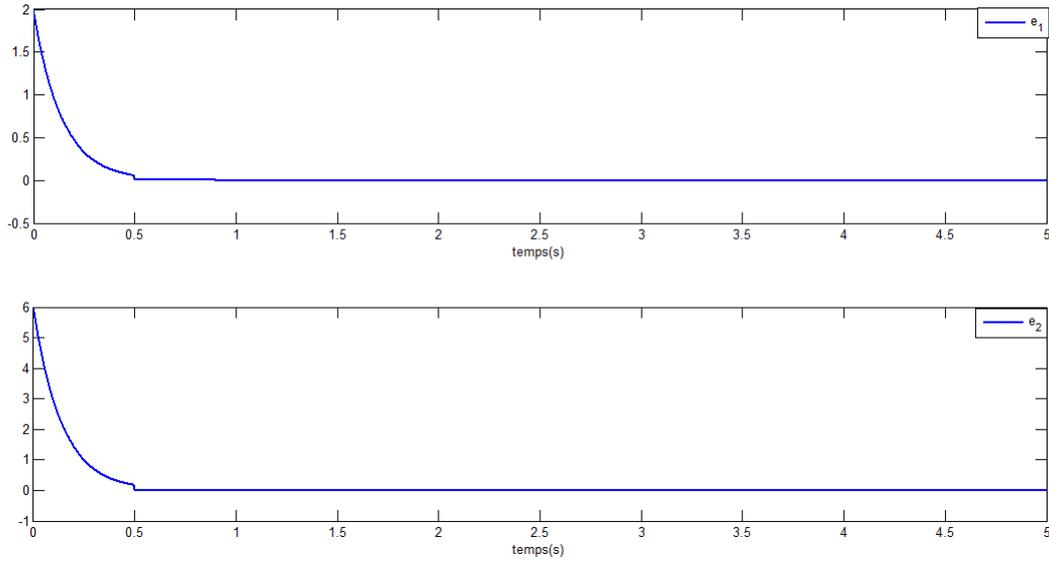


FIGURE 3.9 – Les erreurs d'estimation.

$$\tau = 1. s$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.0681 \\ 6.7208 \end{bmatrix}$$

$$K_k = P = \begin{bmatrix} 0.2557 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ pour } 1 \leq k \leq 2$$

$$K_k = 0 \text{ pour } k > 2$$

Les erreurs d'estimation $e_1(t)$ et $e_2(t)$ s'annulent en un temps fini $\tau = 1$ s pour n'importe quel valeurs initiales, ce qui prouve la précision de l'observateur.

Le système véhicule avec perturbation $\Delta(t)$

Considérons une perturbation fini $\Delta(t)$. Le système véhicule est alors donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \Delta(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\Delta(t) = 0.5 \sin(0.01t)$$

L'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = Qe(t) + \Delta(t) & \text{si } t \neq t_k \\ e(t_k) = (I_n - K_k C)e(t_k) & \text{si } t = t_k \end{cases} \quad (3.22)$$

Les résultats de simulation en présence de la perturbation $\Delta(t)$ obtenus avec l'observateur impulsif sont donnés en figure (3.10) et (3.11).

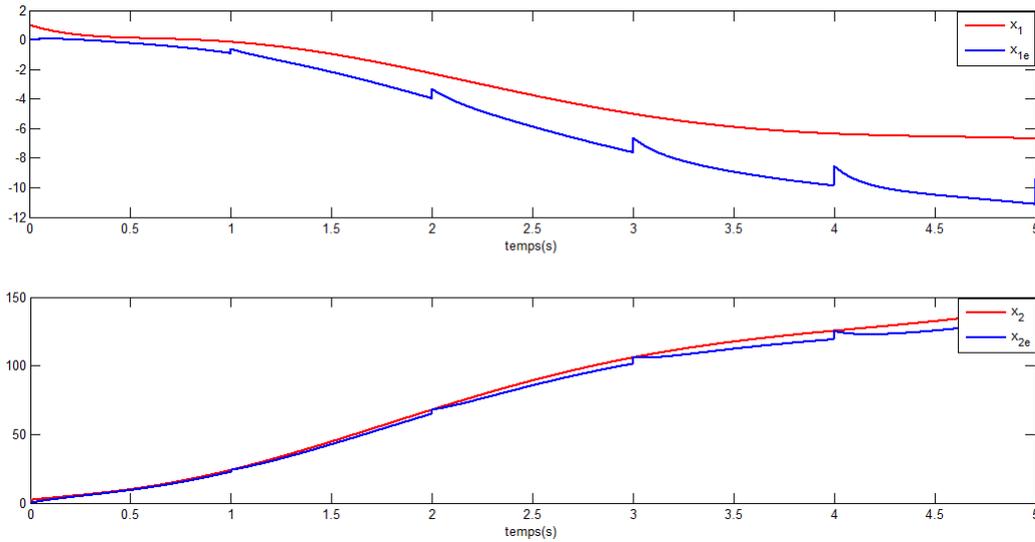


FIGURE 3.10 – Les états et les estimés avec perturbation.

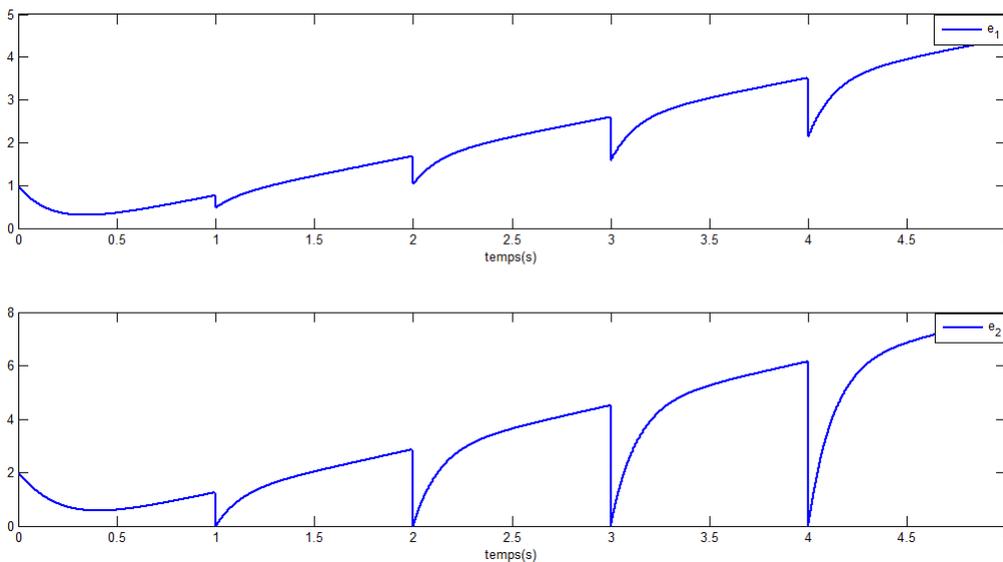


FIGURE 3.11 – Les erreurs d'estimation avec perturbation.

L'objectif est maintenant de déterminer la matrice de gain L en minimisant l'effet de la perturbation $\Delta(t)$ avant l'instant de convergence de l'erreur d'estimation vers zéros. Cela revient à minimiser le transfert entre la perturbation et l'erreur d'estimation.

Lorsque $t \neq t_k$ et afin de déterminer le gain L tel que la matrice $Q = A - LC$ soit Hurwitz on utilise les LMIs (3.24) qui permettent de déterminer le gain de l'observateur tout en minimisant l'effet de la perturbation $\Delta(t)$ sur $e(t)$.

$$\min_{P, L, \gamma, \alpha} \gamma \tag{3.23}$$

$$\begin{pmatrix} A^T P + P A - C^T M^T - M C + \alpha P & P \\ P & -\gamma I \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$c - \alpha \gamma \leq 0 \quad (3.25)$$

$$P \geq I \quad (3.26)$$

L'erreur d'estimation est alors ISS par rapport à $\Delta(t)$. De cette manière elle satisfait l'inégalité suivante :

$$\|e(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} (e^{\frac{\alpha}{2} t} \|e(0)\| + \gamma \|\Delta(t)\|_{\infty}) \quad (3.27)$$

et

$$L = P^{-1} M \quad (3.28)$$

Après simulation, on a les résultats en figure (3.13), les gain et le taux d'atténuation sont

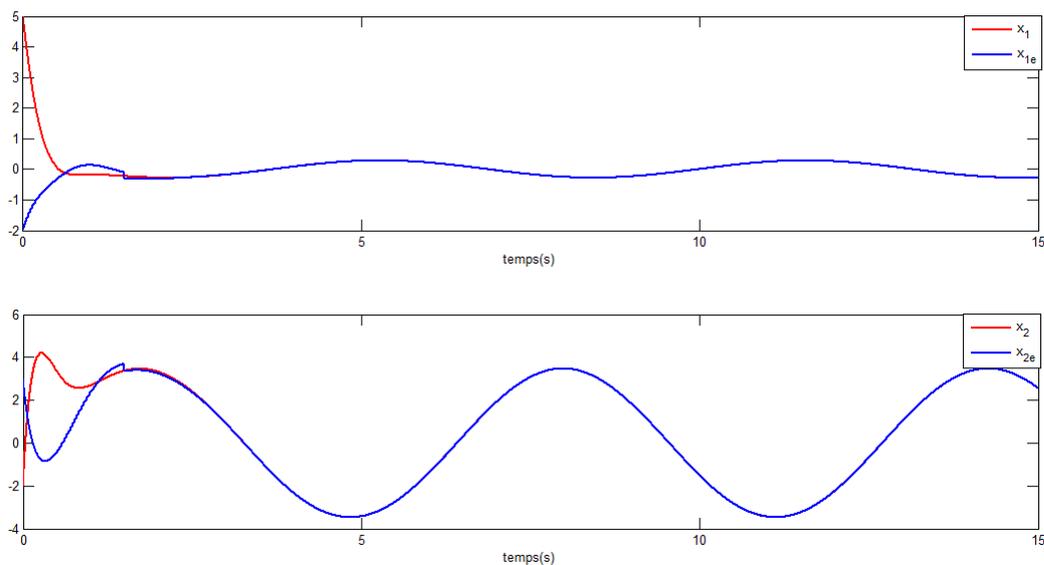
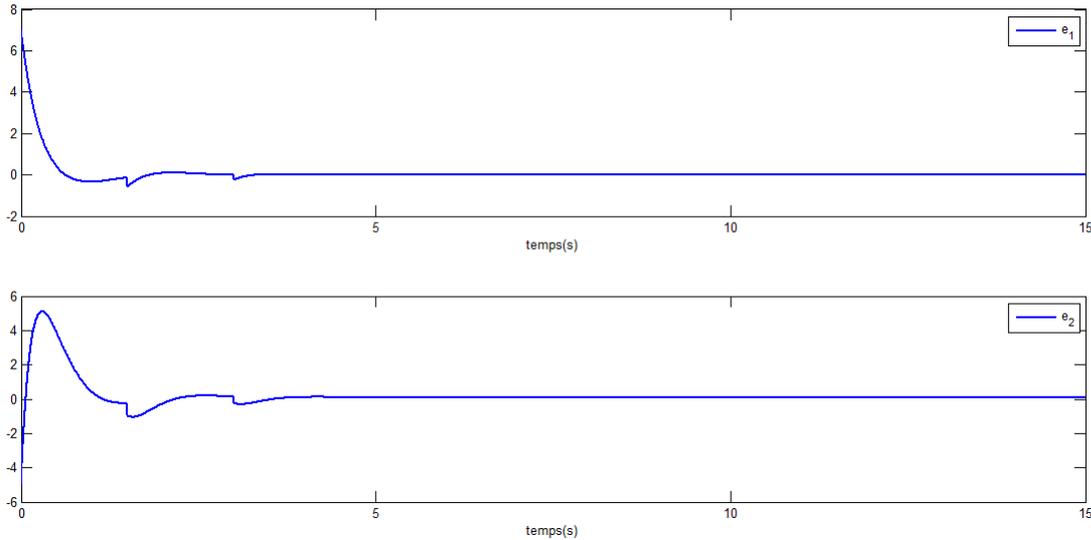


FIGURE 3.12 – Les états et les estimées en présence de perturbation.


 FIGURE 3.13 – Convergence de l'erreur d'estimation en présence de la perturbation $\Delta(t)$.

$$\begin{aligned} \tau &= 1.5 \text{ s} \\ L &= \begin{bmatrix} 0.5841 \\ -7.5336 \end{bmatrix} \\ K_k &= P = \begin{bmatrix} 0.6192 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ pour } 1 \leq k \leq 2 \\ K_k &= 0 \text{ pour } k > 2 \\ \gamma &= 1.1117 \end{aligned}$$

Dans le premier cas, on a considéré le système sans perturbation. L'observateur proposé assure une bonne convergence des états en temps fini, figure (3.9). Dans le deuxième cas, on a appliqué une stabilité ISS au niveau de l'erreur d'estimation. Cela, nous permet d'atténuer l'effet de la perturbation $\Delta(t)$ sur l'erreur d'estimation et assurer une convergence en temps fini. Le fait de tenir compte des perturbations permet d'améliorer la précision des estimations. La stabilité ISS assure le rejet des perturbations qui affectent les estimations, figure (3.13). Les résultats de simulations montrent que l'observateur impulsif assure une convergence en temps fini même en présence de perturbation.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, l'observateur impulsif est étudié pour les systèmes linéaires continus. L'objectif principal est la convergence des estimées en temps fini. Dans un premier temps, des testes de simulation sont effectués pour valider l'exemple masses-ressorts, puis sur le système véhicule pour montrer la justesse de l'observateur.

Les résultats des simulations que nous avons obtenues sont satisfaisants.

Conclusion générale

L'objectif visé par nos travaux dans ce mémoire est de proposer un nouvel observateur impulsif, pour les systèmes dynamiques continus, pour l'estimation exacte des variables non disponibles à la mesure en temps fini.

Dans un premier temps, nous avons mis l'accent sur les principales notions et résultats classiques de la théorie des systèmes dynamiques impulsifs.

Dans un deuxième temps, on regroupe certaines notions de stabilité, d'observabilité pour les systèmes linéaires continus et la synthèse d'observateurs pour ces systèmes.

Dans la troisième partie, nous avons exploité les différentes notions théoriques présentées dans les chapitres précédents, dans le but de vérifier ces dernières. Cela s'est effectué via plusieurs simulations où nous avons obtenu des résultats qui prouvent l'exactitude de ces notions théoriques.

L'observateur synthétisé assure différents types de stabilité, concernant la convergence du système générant l'erreur d'estimation à savoir :

- Stabilité en temps fini
- La stabilité Entrée-Sortie

Tout les résultats théoriques proposés dans ce mémoire on été renforcés par des résultats de simulation.

Ce travail ouvre la voie à d'autres développements théoriques et pratiques, parmi ceux-ci nous pouvons citer la preuve de convergence des observateurs proposés dans le cas des systèmes non linéaires.

Enfin, il est naturel d'envisager une validation expérimentale des résultats théoriques.

Annexes : Notion Générale

A. 1 Inégalités Matricielles Linéaires : LMIs

Une large catégorie de problèmes de la théorie de contrôle peut être formulée par des problèmes d'optimisation convexes (ou quasi-convexes) décrits par des LMIs [24]. Ainsi, le choix d'utiliser les LMIs pour exprimer le problème de synthèse d'un observateur, d'un système de contrôle . . . , offre un avantage de taille notamment pour l'étude de la stabilité, la formulation des contraintes qui agissent sur le système, l'analyse et détermination des ensembles invariants minimal et maximal, aussi bien que pour la synthèse d'observateurs et de contrôleurs sous formes de problèmes d'optimisation convexes.

A.1.1 Ensembles et fonctions convexes :

Définition A.1 (Ensemble convexe) Un ensemble A est dit convexe si la condition suivante est vérifiée pour tous ses points :

$$\gamma x + (1-\gamma)y \in A \quad \gamma \in [0, 1] \quad (3.29)$$

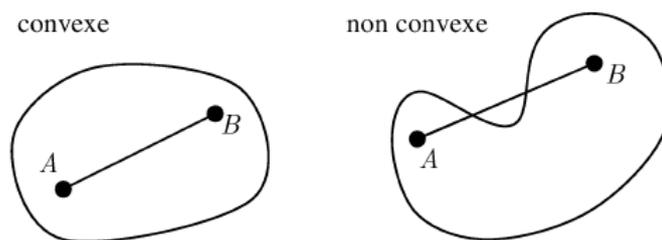


FIGURE 3.14 – Ensemble convexe.

Ce qui signifie que chaque segment de droite réunissant deux points de l'ensemble A , appartient à cet ensemble, figure (3.14). De plus, l'intersection de deux ensembles convexes est aussi un ensemble convexe.

Définition 2 (Fonction convexe) Une fonction (réelle d'une variable réelle) définie sur un ensemble convexe I est dite convexe si pour tous points x et y définis dans I et

pour tout $\gamma \in [0, 1]$ on a :

$$f(\gamma x + (1 - \gamma)y) \leq \gamma f(x) + (1 - \gamma)f(y) \quad (3.30)$$

Cela signifie que quels que soient deux points c_1 et c_2 du graphe de la fonction f , le segment de droite $[c_1c_2]$ est entièrement situé au-dessus du graphe ou encore la courbe représentative de f est au-dessus de toutes ses tangentes.

Propriété A.1 Si C_1 et C_2 sont deux ensembles convexes de \mathbb{R}^n et λ_1 et λ_2 deux réels, alors $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ est un convexe de \mathbb{R}^n .

Définition A.3 (Problème d'optimisation convexe) Soit le problème d'optimisation suivant :

$$\text{minimiser } h(x) \quad (3.31)$$

sous contraintes :

$$\begin{cases} f^i(x) \leq 0 & i = 1, \dots, m \\ g^j(x) \leq 0 & j = 1, \dots, q \end{cases} \quad (3.32)$$

L'objectif est de chercher l'argument x ($x \in \mathbb{R}^n$ est la variable d'optimisation) qui minimise $h(x)$ et qui satisfait les contraintes (3.32).

Si toutes les fonctions h , f et g sont convexes (pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, q$), le problème d'optimisation (3.31) et (3.32) est alors un problème d'optimisation convexe.

L'ensemble des contraintes défini par :

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f^i(x) \leq 0 \ i = 1, \dots, m / g^j(x) \leq 0 \ j = 1, \dots, q\} \quad (3.33)$$

est convexe. Nous minimisons alors une fonction convexe sur un ensemble convexe. Résoudre un problème d'optimisation convexe suppose que l'intersection de toutes les contraintes exprimées en (3.32) soit non vide. Un problème de faisabilité est défini par la recherche d'un point satisfaisant ces contraintes (3.32).

Une des propriétés connues aux problèmes d'optimisation convexes est qu'ils ne possèdent pas de minimum local pouvant entraver la recherche du minimum global sur l'ensemble des contraintes. Chaque optimum local d'un problème d'optimisation convexe est aussi global.

A.1.2 LMI : Linear Matrix Inequalities

Une LMI a la forme suivante [31] :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m F_i x_i > 0 \quad (3.34)$$

Où $x_i \in \mathbb{R}^m$ est la variable et les matrices symétriques $F_i = F_i^T \in \times \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$, sont données. L'inégalité (3.34) est positive définie. C'est une LMI stricte. Une LMI non stricte est définie par :

$$F(x) \geq 0 \quad (3.35)$$

Une contrainte LMI est convexe en x , c'est 'a dire l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^n : F(x) > 0\} \quad (3.36)$$

est un ensemble convexe.

Un ensemble de LMIs peut s'écrire en une seule LMI, formée par une matrice contenant les LMIs sur la diagonale et des éléments nuls ailleurs :

$$\begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & F_d(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.37)$$

De cette manière, les variables de décision des contraintes LMIs peuvent ainsi être formulées sous forme matricielle.

Les problèmes formulés sous forme de LMIs ont une faible complexité de calculs et des algorithmes performants sont élaborés pour les résoudre. Toutefois, les problèmes de contrôle ne peuvent pas toujours être décrits par des LMIs. Une façon plus générale est alors utilisée pour les représenter sous forme de BMIs (Inégalités Matricielles Bi-linéaires).

Ce type d'inégalités est plus difficile à résoudre, car l'ensemble de solution n'est plus convexe. Des procédures existent pour transformer des BMIs en LMIs. Le cas couramment rencontré est celui avec une variable (de décision) qui est multipliée par une autre. Ce cas a souvent été rencontré dans mes travaux de thèse. Cependant, puisque la première variable inconnue est un scalaire, par exemple α , un $\alpha_{optimal}$ peut être trouvé en exécutant une boucle récursive. Par ailleurs, des outils dédiés à la résolution des BMI ont été développés. Un changement de variables est également opéré pour transformer une BMI en une LMI. Pour cela, considérons l'exemple suivant.

Soit un système décrit par sa représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu \quad (3.38)$$

Considérons le problème de recherche d'une loi de commande par retour d'état linéaire

$u = Kx$, tel que le système bouclé soit $\dot{x} = (A + BK)x$. En utilisant une fonction de Lyapunov $V(x) = x^T P x$, et après développement, une LMI peut être trouvée en posant le changement de variable $W = P^{-1}x$ qui mène à :

$$\begin{cases} P^{-1} & > 0 \\ AP^{-1} + P^{-1}A^T + P^{-1}K^T B^T + BK P^{-1} & < 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

où P et K sont les variables de décision matricielles. Ces inégalités matricielles ne sont pas linéaires, du fait de la présence du produit KP . Elle peut cependant être transformée en une LMI avec le changement de variable suivant : $Q = P^{-1}$ et $Y = KP^{-1}$, avec les dimensions appropriées. Le problème de recherche d'une loi de commande par retour d'état est alors exprimé à l'aide d'une condition LMI :

$$\begin{cases} Q & > 0 \\ AQ + QA^T + Y^T B^T + BY & < 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

Une fois Q et Y déterminés, il est aisé de calculer K .

La linéarisation des BMIs n'étant pas toujours possible, des méthodes spécifiques y sont développées. Dans [24], les auteurs présentent une panoplie d'outils dédiés à la transformation et réduction des inégalités matricielles non-linéaires en inégalités matricielles linéaires.

Dans cette mémoire, toutes les LMIs aux quelles ont abouti les problèmes de synthèse d'observateurs proposés ont été résolues avec le solveur Sedumi-Yalmip sous Matlab.

A. 2. Placement de pôles

Les performances d'un système linéaire (réponse temporelle) sont liées à la position des pôles dans le plan complexe. Ces pôles influencent la vitesse de convergence des modes associées (temps d'établissement, caractère dominant des modes) à travers leurs parties réelles. Quant à la partie imaginaire, elle influence la présence d'oscillations sur la réponse temporelle, se répercutant sur la rapidité de celle-ci.

Afin de garantir de bonnes performances pour les contrôleurs et observateurs (convergence, rapidité, présence d'oscillations, . . .), il est intéressant de placer les pôles du système bouclé dans une région spécifique du plan complexe ayant des propriétés intéressantes, appelée région LMIs.

Définition A.4 Un sous ensemble D d'un plan complexe est appelé une région LMI s'il existe une matrice $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tel que :

$$\{D = z \in \mathbb{C} : f_D = R + Bz + B^T z < 0\} \quad (3.41)$$

où $f_D(z)$ est la fonction caractéristique de la région LMI D définie.

D'une autre manière, considérons le système autonome suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (3.42)$$

Ce système est stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice d'état A sont dans le demi plan gauche ouvert complexe. Néanmoins, il est parfois utile de considérer des domaines particuliers de stabilité en rapport avec les exigences établies pour le système. La manière dont les pôles sont placés dans une région LMI quelconque peut être formulée par des LMIs. Une définition générale est donnée dans le théorème suivant :

Théorème A.1 (Région LMI de stabilité) [25] Soient $P = P^T$, Q et A des matrices réelles. Alors, toutes les valeurs propres de A sont situées dans la région LMI de stabilité

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid p + Qz + Q^T \bar{z} < 0\} \quad (3.43)$$

si et seulement si il existe une matrice symétrique $X = X^T > 0$ tel que :

$$\begin{pmatrix} p_{11}X + q_{11}AX + q_{11}(AX)^T & \dots & p_{1n}X + q_{1n}AX + q_{1n}(AX)^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}X + q_{n1}AX + q_{n1}(AX)^T & \dots & p_{nn}X + q_{nn}AX + q_{nn}(AX)^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.44)$$

où p_{ij} et q_{ij} sont les éléments (i, j) des matrices P et Q respectivement.

Plusieurs régions LMI intéressantes peuvent alors être définies. Nous citons quelques unes :

— **Demi-Plan gauche ouvert** : $Re(z) < 0 \Leftrightarrow z + \bar{z} < 0$

Il suffit de poser $p = 0$ et $Q = 0$

— **α -stabilité** : $Re(z) < -\alpha \Leftrightarrow 2\alpha + z + \bar{z} < 0$

Il suffit de poser $P = 2\alpha$ et $Q = 1$

— **Bande vertical** : $\alpha_1 < Re(z) < \alpha_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2\alpha_2 + z + \bar{z} & 0 \\ 0 & 2\alpha_1 + z + \bar{z} \end{pmatrix} < 0$

Il suffit de poser $P = \begin{pmatrix} -2\alpha_2 & 0 \\ 0 & 2\alpha_1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

— **Disque de rayon r et de centre $(-q, 0)$** : $|z - q| < r \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -r & z - q \\ \bar{z} - q & -r \end{pmatrix} < 0$

Il suffit de poser $P = \begin{pmatrix} -r & -q \\ -q & -r \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bibliographie

- [1] Lakshmikantham, D.D Bainov, and P.S Simeonov. Theory of Impulsive Differential Equations. World Scientific Publishing, 1989..
- [2] W. M. Haddad, V. Chellaboina, S. G. Nersesov. Impulsive and Hybrid Dynamical Systems. Stability, Dissipativity and Control. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.
- [3] Yassine Khaled.P.M.M'Saad.Contribution a la commande et l'observation des systemes dynamiques continus sous mesures clairsemees
- [4] V. D. Milman, and A. D. Myshkis. Random impulses in linear dynamical systems. Approximante Methods for Solving Differential Equations, 1963.
- [5] A. S. Samoilenko and N. A. Perestyuk. Impulsive differential equations. Series on Nonlinear Science, World Scientific, 1995.
- [6] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. Richard, F. Rotella and I. Zambettakis. Modélisation et identification des processus. Tome1, Editions Technip, 1992.
- [7] H. Khalil. Nonlinear systems. Prentice-Hall. New-York, 1996.
- [8] F. Brauer and J.A. Nohel. Qualitative theory of ordinary differential equations. Dover Publications, 1969.
- [9] J.Pierre.Corriou.Commande des Procédés. Lavoisier, Paris, 2003.
- [10] H. Khalil. Nonlinear systems. Prentice-Hal, New-York, 2002.
- [11] René Husson et Als.Automatique.De cahier des charges à la realisation des systèmes.Dunod,Paris,2007.
- [12] M.Junders et Y.Chitour. Commande des processus,présentation d'état.Note cours. Université Paris-SudVI.
- [13] V. T. Haimo, "Finite Time Controllers," SIAM, J. Control Optim, 1986.
- [14] D. Luenberger. An introduction to observers. Automatic Control, IEEE Transactions on, 16(6) :596-602., 1971.
- [15] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Finite Time Stability of Continuous Autonomous Systems," SIAM J. Control Optim, vol.38, 2000.

- [16] Tobias Raff and Frank Allgower. An Observer that Converges in Finite Time Due to Measurement-based State Updates .SEOUL, KOREA, JULY 6-11, 2008.
- [17] F. Ding, L. Qiu and T. Che. Reconstruction of continuous-time systems for their non-uniformly sampled discrete-time systems. *Automatica*, 45(2), 324-332, 2009.
- [18] I. Haskara, U. Ozguner, and V. Utkin. On Variable Structure Observers. In Proceedings of the IEEE International Workshop on Variable Structure Systems, 1996.
- [19] A. M. Lyapunov. The general problem of the stability of motion. PhD thesis, St. Petersburg University, 1892.
- [20] E.D. Sontag. Further facts about input to state stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(4) : 473-476, April 1990.
- [21] E.D. Sontag. On the input-to-state stability property. *Systems and Control Letters*, 24 : 351-359, 1995.
- [22] R.E. Kalman, Y.C. Ho, and K.S. Narendra. Controllability of Linear Dynamical Systems. *Contributions to Differential Equations*, 1963.
- [23] Dorf and R.H. Bishop. *Modern Control Systems*. Prentice Hall, 2007.
- [24] S.Boyd, L. Feron, and V . Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM ed, 1994.
- [25] E. Magarotto. Approche LMI pour la synthèse de correcteurs et d'observateurs : Application aux systèmes spatiaux et bilinéaires. PhD thesis, Université de Caen, 1999.
- [26] D. D. Bainov and P. S. Simeonov. *System with Impulse Effect : Stability, Theory and Applications*. Ellis Horwood (Chichester England and New York), 1989.