

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

*Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou*  
*Faculté du Génie de la Construction*  
*Département de Génie Mécanique*



# Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme

Master académique en génie mécanique

Option : *énergétique*

*Thème :*

**Etude par voie numérique du problème  
des écoulements de fluide barotrope  
dans un tube à choc**

Proposé et dirigé par :

M<sup>r</sup> : BOUSSAFFEUR Kaci

Préparé par:

M<sup>r</sup> : AMAROUCHENE Nadjib

*Promotion 2011-2012*

## REMERCIEMENT

*Je tiens à remercier sincèrement mon promoteur Mr **BOUSSAFER Kaci** d'avoir proposé ce thème, d'accepter de m'encadrer et à lui exprimer toute ma gratitude pour son assistance, sa disponibilité et ses conseils qui m'ont beaucoup aidé à réaliser ce travail.*

*Je suis sensible à l'honneur des membres de jury d'avoir accepté d'examiner ce modeste travail.*

*Je remercie tous mes enseignants depuis le primaire.*

## *DEDICACES*

*Je tiens à dédier ce travail à :*

*A Ma grand-mère et mon grand père*

*A mes très chers parents, à qui je dois tout et ne rendrais jamais assez.*

*A mon frère et mes chères sœurs.*

*A mon oncle, sa femme et ses enfants.*

*A toute ma famille.*

*Je dédie aussi ce travail à tous mes amis et collègues.*

# Table des matières

Remerciement.....	i
Dédicace.....	ii
Table des matières.....	iii
Liste des figures.....	vii
Nomenclatures.....	vi
<b>Introduction.....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre I : Rappels de la mécanique des Fluides et Gazodynamiques.....</b>	<b>3</b>
I.1 Introduction.....	3
I.2 Rappels sur la mécanique des fluides.....	3
I.2.1 Définition du fluide.....	3
I.2.3 Equation de continuité.....	4
I.2.4 Equation de la quantité de mouvement.....	6
I.2.5 Equations de Navier-Stokes.....	7
I.2.6 Equation de conservation de l'énergie.....	7
I.2.7 Equation d'état.....	8
I.3 Rappel de Gazodynamique.....	8
I.3.1 Equation de conservation de l'énergie pour les GAZ.....	8
I.3.2 Vitesse de son (sonique).....	9
I.3.3 Nombre de Mach.....	10
I.3.4 Grandeurs génératrice réduites pour un écoulement isentropique.....	10
I.3.4 Relation d'Hugoniot dans une tuyère.....	11
I.3.5 Différents régimes d'écoulements dans une tuyère convergente divergent.....	12

<b>Chapitre II : Ondes de choc</b> .....	15
II.1 Onde de choc droite (normale).....	15
II.1.1 Définition.....	15
II.1.2 Equation de bilan.....	16
II.1.3 Relations d'ondes de choc droites.....	16
II.1.3.1 Rapport des grandeurs caractéristiques en fonction du nombre de Mach en amont $M_1$ .....	18
II.1.3.2 Relation de Rankine-Hugoniot, ligne de Rayleigh.....	19
II.1.4 Variation d'entropie à travers un choc droit.....	21
II.1.5 Rendement isentropique de l'onde de choc.....	22
II.2 Onde de choc oblique.....	23
II.2.1 Définition.....	23
II.2.2 Equation de bilan.....	25
II.2.3 Relation d'ondes de choc obliques.....	25
II.3 Quelques exemples d'écoulements en présence d'ondes de choc.....	29
II.4 Phénomènes de choc et de détente.....	30
 <b>Chapitre III : Théories générale de l'écoulement dans un tube à choc</b> .....	32
III.1 Introduction.....	32
III.2 Fonctionnement de tube à choc.....	32
III.3 Propriétés d'onde de choc normal en mouvement (instationnaire).....	34
III.3.1 Représentation des ondes de choc dans le plan (u, p).....	36
III.4 Quelques propriétés physiques de l'écoulement dans un tube à choc.....	38
III.5 Calcul de l'emplacement de la maquette et du temps de rafale respectivement X et $\tau$ .....	39

III.6 Tube à choc à double compression.....	40
III.7 Tube à choc à surface de contact adaptée.....	41
III.8 Dimensionnement du tube de travail.....	42
<b>Chapitre IV : Simulation numérique et interprétation des résultats.....</b>	<b>43</b>
IV.1 Introduction.....	43
IV.2 Présentation des logiciels GAMBIT- FLUENT.....	43
IV.2.1 Maillage sous GAMBIT.....	43
IV.2.1.1 Définition.....	43
IV.2.1.2 La fenêtre de commande.....	44
IV.2.1.3 Choix de Solver.....	45
IV.2.1.4 Import de la géométrie et nettoyage de la CAO.....	46
IV.2.1.5 Construction de la géométrie.....	46
IV.2.1.6 Maillage.....	47
IV.2.1.6.1 Techniques de génération du maillage.....	47
IV.2.1.6.2 Type de maillage.....	48
IV.2.1.7 Conditions aux limites.....	49
IV.2.1.8 Sauvegarder et exportation du maillage de Gambit.....	50
IV.2.2 Principales étapes de simulation sous FLUENT.....	51
IV.2.2.1 Définition.....	51
IV.2.2.2 Importation de la géométrie(*.MSH).....	51
IV.2.2.3 Vérification du maillage importé.....	52
IV.2.2.4 Lissage du maillage (SMOOTH AND SWAP THE GRID)....	52
IV.2.2.5 Vérification de l'échelle.....	52
IV.2.2.6 Affichage de la Grille.....	52
IV.2.2.7 Choix du solveur.....	54

IV.2.2.8 Choix du modele de turbulence.....	55
IV.2.2.9 Equation d'énergie.....	55
IV.2.2.10 Définition les Propriétés des Matériaux.....	55
IV.2.2.11 Définition Conditions de fonctionnement.....	56
IV.2.2.12 Conditions aux limites.....	57
IV.2.2.13 Critères de Convergence.....	57
IV.2.2.14 Sauvegarde de travail sous fichier *.CAS.....	57
IV.2.2.15 Itération jusqu'à la Convergence (lancement de la simulation) .....	57
IV.2.2.16 Sauvegarde la solution de données file.....	57
IV.3 Description de la géométrie de la conduite étudiée.....	58
IV.3.1 Tube à choc pour un gaz parfait.....	58
IV.5 Modélisation et mise en œuvre du calcul sous FLUENT.....	59
IV.5.1 Maillage utilisé.....	59
IV.5.2 Conditions aux limites.....	59
IV.6 Résultats numériques de la simulation.....	60
IV.6.1 Résultats dans le cas où la membrane n'est pas rompue.....	60
IV.6.1.1 Convergence.....	60
IV.6.1.2 : Répartition de différentes grandeurs thermodynamique le long de la conduite.....	61
IV.6.2 Résultats dans le cas où la membrane est rompue.....	65
IV.6.2.1 Convergence.....	65
IV.6.2.2 Répartition de différentes grandeurs thermodynamique le long de la conduite.....	66
IV.7 Interprétation des résultats numériques.....	76
IV.7.1 Dans le cas où la membrane n'est pas rompue.....	76
IV.7.2 Dans le cas où la membrane est rompue.....	77
<b>Conclusion</b> .....	78
<b>Références bibliographiques</b> .....	79

# Liste des figures

Figure	Page
I.1 : Bilan de masse.....	6
I.2 : Différents régimes d'écoulements dans une tuyère convergente divergente.....	14
II.1 : Onde de choc droite.....	15
II.2 : Représentation graphique le lien entre les nombres de Mach et le choc droit...	18
II.3 : Représentation de l'équation de Rankine-Hugoniot, de l'évolution isentropique et d'une droite de Rayleigh.....	21
II.4 : Rendement isentropique en fonction du nombre de Mach amont.....	23
II.5 : onde de choc oblique.....	23
II.6 : Choix d'un volume de contrôle pour l'étude d'un choc oblique.....	24
II.7 : l'angle de choc en fonction de l'angle de déflexion.....	28
II.8 : structure d'ondes de choc.....	29
II.9 : Formation de faisceaux de détente et de compression dans un écoulement supersonique sur une marche descendante.....	30
II.10 : Visualisation d'ondes de choc.....	31
III.1 : Conditions initiales dans un tube à choc.....	33
III.2 : Conséquences de la mise en mouvement d'un piston de masse m séparant deux gaz aux repos.....	33
III.3 : Résultat de la mise en mouvement d'un piston de masse nulle séparant Séparant deux gaz aux repos.....	34
III.4 : Onde de choc dans différents repères.....	35
III.5 : Collision l'interface avec le choc réfléchi.....	40



<b>III.6 : Tube à choc à surface de contact non adapté.....</b>	<b>41</b>
<b>III.7 : Tube à choc à surface de contact adapté.....</b>	<b>42</b>
<b>IV.1 : Les trois fonctions de Gambit.....</b>	<b>44</b>
<b>IV.2 : panels généraux du logiciel Gambit.....</b>	<b>44</b>
<b>IV.3 : Différents groupements des commandes.....</b>	<b>45</b>
<b>IV.4 : Barre de menu principale.....</b>	<b>45</b>
<b>IV.5 : Importation de la géométrie.....</b>	<b>46</b>
<b>IV.6 : Menu Création des différents éléments de la géométrie.....</b>	<b>47</b>
<b>IV.7 : Maillage structuré et non structuré.....</b>	<b>49</b>
<b>IV.8 : Conditions aux limites.....</b>	<b>50</b>
<b>IV.9 : Importation de la géométrie.....</b>	<b>51</b>
<b>IV.10 : Vérification de maillage sous Fluent.....</b>	<b>52</b>
<b>IV.11 : Affichage du maillage.....</b>	<b>53</b>
<b>IV.12 : Affichage les parties spécifiques du maillage.....</b>	<b>53</b>
<b>IV.13 : La fenêtre graphique.....</b>	<b>54</b>
<b>IV.14 Choix du solver sous Fluent.....</b>	<b>54</b>
<b>IV.15 : Choix du modèle de turbulence.....</b>	<b>55</b>
<b>IV.16 : Définition les caractéristiques du fluide.....</b>	<b>56</b>
<b>IV.17: Choix de la pression de référence.....</b>	<b>56</b>
<b>IV.18: Critère de convergence.....</b>	<b>57</b>
<b>IV.19: Géométrie de la conduite (domaine d'étude).....</b>	<b>58</b>
<b>IV.20: Géométrie maillé.....</b>	<b>59</b>
<b>IV.21 : Géométrie avec les conditions aux limites.....</b>	<b>60</b>

<b>IV.22 : Évolution des résidus.....</b>	<b>60</b>
<b>IV.23 : Contour de pression (Pa).....</b>	<b>61</b>
<b>IV.24 : Contour de vitesse (m/s).....</b>	<b>61</b>
<b>IV.25 : Contour de température (k).....</b>	<b>62</b>
<b>IV.26 : Contour de densité (kg/m<sup>3</sup>).....</b>	<b>62</b>
<b>IV.27 : Contour de nombre de Mach.....</b>	<b>63</b>
<b>IV.28 : Evaluation de la pression statique le long de la conduite.....</b>	<b>63</b>
<b>IV.29 : Evaluation de la vitesse le long de la conduite.....</b>	<b>64</b>
<b>IV.30 : Evaluation de la température le long de la conduite.....</b>	<b>64</b>
<b>IV.31 : Evaluation de la densité le long de la conduite.....</b>	<b>65</b>
<b>IV.32 : Evaluation de nombre de Mach le long de la conduite.....</b>	<b>65</b>
<b>IV.33 : Évolution des résidus.....</b>	<b>66</b>
<b>IV.34 : Contour de pression (Pa).....</b>	<b>66</b>
<b>IV.35 : Contour de vitesse (m/s).....</b>	<b>67</b>
<b>IV.36 : Contour de température (k).....</b>	<b>67</b>
<b>IV.37 : Contour de nombre de Mach.....</b>	<b>68</b>
<b>IV.38 : Contour de densité (kg/m<sup>3</sup>).....</b>	<b>68</b>
<b>IV.39 : Evaluation de la pression statique dans la partie basse pression de la conduite.....</b>	<b>69</b>
<b>IV.40 : Evaluation de la vitesse dans la partie basse pression de la conduite.....</b>	<b>69</b>
<b>IV.41 : Evaluation de la température statique dans la partie basse pression de la conduite.....</b>	<b>70</b>
<b>IV.42 : Evaluation de nombre de Mach dans la partie basse pression de la conduite.....</b>	<b>70</b>
<b>IV.43 : Evaluation de la densité dans la partie basse pression de la conduite.....</b>	<b>71</b>
<b>IV.44 : Evaluation de la pression statique dans la partie haute pression de la conduite.....</b>	<b>71</b>
<b>IV.45 : Evaluation de la vitesse dans la partie haute pression de la conduite.....</b>	<b>72</b>
<b>IV.46 : Evaluation de la température statique dans la partie haute pression de la conduite.....</b>	<b>72</b>

<b>IV.47 :</b> Evaluation de nombre de Mach dans la partie haute pression de la conduite.....	73
<b>IV.48:</b> Evaluation de la densité dans la partie haute pression de la conduite.....	73
<b>IV.49 :</b> Evaluation de la pression statique le long de la conduite.....	74
<b>IV.50 :</b> Evaluation de la vitesse le long de la conduite.....	74
<b>IV.51 :</b> Evaluation de la température statique le long de la conduite.....	75
<b>IV.52 :</b> Evaluation de nombre de Mach le long de la conduite.....	75
<b>IV.53 :</b> Evaluation de la densité le long de la conduite.....	76

# Nomenclatures

Symbole	Unité	Désignation
<b>Lettres latines</b>		
$C_v$	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	Chaleur spécifique à volume constant
$C_p$	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	Chaleur spécifique à pression constante
$c$	$m.s^{-1}$	Vitesse du son
$E_p$	$J.kg^{-1}$	Energie potentiel massique
$E_c$	$J.kg^{-1}$	Energie cinétique massique
$e$	$J.kg^{-1}$	Energie interne massique
$h$	$J.kg^{-1}$	Enthalpie massique
$L$	$m$	Longueurs
$M$		Nombre de Mach
$P$	$Pa$	Pression
$P_0$	$Pa$	Pression génératrice
$R$	$J.mol^{-1}.K^{-1}$	Constante universelle des gaz
$R_g=R/M_w$	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	Constante du gaz de masse atomique $M_w$
$S$	$m^2$	Surface
$s$	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	Entropie
$T$	$K$	Température
$T_0$	$k$	Température génératrice
$t$	$s$	Temps
$u, v, w$	$m.s^{-1}$	Vitesse absolues
$X$	$m$	Longueurs
<b>Lettres grecques</b>		
$\gamma$		Coefficients poly tropiques
$\lambda, \lambda', \lambda''$	$m.s^{-1}$	Vitesse relatives
$\rho$	$kg.m^{-3}$	Masse volumique
$\rho_0$	$kg.m^{-3}$	Masse volumique génératrice

$\tau, \tau', \tau''$	s	Durées de rafales
$\omega, \omega', \omega''$	m.s <sup>-1</sup>	Vitesse de propagation d'ondes de choc

### Indices

$\Delta$  : Déterminant

0 : Etat générateur

c : Col

1, 2, 3, 4 : Domaines d'écoulements

H : Gaz à haute pression

B : Gaz à basse pression

D : Etat Droite

G : Etat Gauche

### Abréviations

CFD

Computational Fluid Dynamics

# Introduction

---

## Introduction

L'aéronautique est un terme générique englobant l'ensemble des sciences et technique de la navigation aérienne et de la construction des aéronefs (ballons, hélicoptères, avions). La navigation concerne les aéroports et leurs tours de contrôle, ainsi que tous les matériels, règlements et procédures de vol sans visibilité.

La construction d'un engin volant est un travail de très longue haleine. Il faut compter dix ans environ entre les premiers schémas sur la table à dessin et le vol du prototype. Après sa conception, il faut procéder aux essais au sol avant de lui délivrer le certificat de navigation. Pour ce faire, il faut simuler les conditions de vol, la soufflerie apparaît comme l'instrument le plus adéquat dans ce cas. Le tube à choc peut être utilisé comme une soufflerie à température génératrice élevée.

Notre travail, consiste à faire de la simulation numérique de l'écoulement dans un tube. Le logiciel CFD (Fluent) est utilisé pour résoudre les équations de Navier Stokes et les équations qui régissent les écoulements compressibles. Nous déterminerons, tout d'abord, les caractéristiques des deux gaz en présence dans les deux zones en premier lieu. Dans un second temps, nous passons sur FLUENT où nous simulerons ce choc. Enfin, nous regarderons l'évolution des deux gaz lorsque le diaphragme est rompu.

Le présent mémoire comporte quatre chapitres. Dans le premier, on présente un rappel de la mécanique des Fluides et de la Gazodynamique.

Le second chapitre comporte une étude sur les ondes de choc droites et obliques et sur le phénomène de chocs et de détente.

Dans le troisième chapitre on a présenté les théories générales de l'écoulement dans un tube à choc et le principe de son fonctionnement.

Le quatrième, dernier chapitre est consacré à la simulation numérique d'un écoulement compressible dans un tube à choc. On s'intéresse à l'évolution des

## Introduction

---

grandeurs thermodynamiques pression, vitesse, température et de la densité avant et après la rupture de diaphragme.

## **I.1.Introduction :**

La Mécanique des fluides est une branche de la physique qui s'intéresse à l'étude des mouvements et des déformations des systèmes matériels, mettant en jeu des écoulements de fluides [1]. Elle a de nombreuses applications dans divers domaines comme l'ingénierie navale, l'aéronautique, l'étude de l'écoulement du sang (hémodynamique), aussi la météorologie, la climatologie.

Ce chapitre sera consacré aux généralités et à la présentation des différentes équations qui régissent l'écoulement d'un fluide.

## **I.2 Rappels sur la mécanique des fluides :**

### **I.2.1 Définition du fluide :**

Un fluide est un milieu continu composé d'un nombre considérable de particules matérielles infiniment petites, qui sont libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. Le fluide est déformable, sans rigidité et il est un milieu susceptible de subir de grandes variations de forme sous l'action de forces. On traite généralement des écoulements des fluides du point de vue macroscopique par les lois de la mécanique de NEWTON, ce qui justifie l'appellation des fluides Newtoniens comme l'air et l'eau. Les plus importantes propriétés aérodynamiques des fluides Newtoniens sont la mobilité, la viscosité et la compressibilité [2]. Les fluides isotropes sont des propriétés mécaniques identiques dans toutes les directions de l'espace. Une résistance appelé viscosité accompagne la déformation du fluide, ainsi on aura un fluide réel ou visqueux. Si la viscosité est considérée comme nulle, on se réfère au concept du fluide parfait. Quand à la notion de compressibilité, elle permet de distinguer les liquides, qui occupent un volume déterminé.

❖ **Fluide incompressible :** Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure ou de la température. La masse volumique  $\rho = \rho_0$  est constante (eau, huile, etc.).



❖ **Fluide compressible:** Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. La masse volumique  $\rho$  est variable. Les gaz sont des fluides compressibles.

❖ **Fluide parfait :** Dans un fluide parfait, les forces de contacts sont perpendiculaires aux éléments de surfaces sur lesquelles elles s'exercent.

❖ **Fluide réel :** Dans un fluide réel, il existe des forces (tangentiels) élémentaires qui s'opposent au mouvement. C'est ce que l'on appelle la force de viscosité.

-Un fluide réel au repos, peut être considéré comme parfait.

❖ **Fluide barotrope :**

- Un fluide barotrope est définie comme l'état d'un fluide pour lequel  $\rho$  est une fonction de la pression uniquement.
- Lorsqu'un fluide subit des évolutions très rapides (écoulement en tuyère, ondes acoustiques, explosions sous-marines, etc.) les phénomènes diffusifs (frottements visqueux, conduction de la chaleur) n'ont pas le temps d'influencer l'état du milieu, la transformation est isentropique. Dès lors, l'équation de la transformation :

$$s(\rho, T) = s_0 \quad (\text{I - 1})$$

Où  $s$  est l'entropie, permet d'éliminer la température  $T$  ; mais  $T$  n'est pas constante. On a donc :

$$\rho = \rho(p) \quad (\text{I - 2})$$

### I.2.3 Équation de continuité :

L'équation de continuité traduit le principe de conservation de la masse.

En considérant la figure (1.1), le flux net total est :

$$\left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Où :  $\rho$  est la masse volumique du fluide.

$u$ ,  $v$  et  $w$  sont les composantes de la vitesse de l'écoulement suivant les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  respectivement.

La masse totale de l'élément de volume est :

$$\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

L'augmentation de la masse dans l'élément de volume avec le temps est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

D'après le principe de la conservation de la masse :

$$\left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) = 0$$

Donc: 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{I - 3})$$

Si l'écoulement est permanent, on peut écrire :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (\text{I - 4})$$

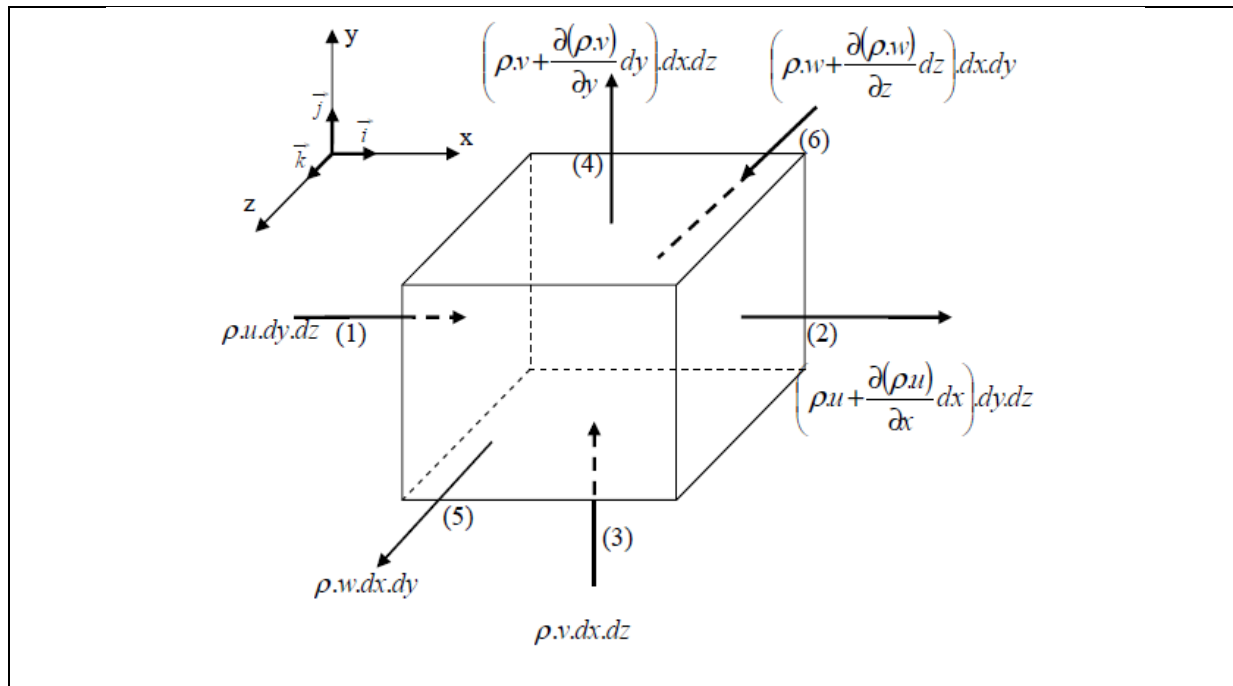


Figure I.1 : Bilan de masse.

#### I.2.4 Equation de la quantité de mouvement :

Le principe de la conservation de la quantité de mouvement est basé sur la deuxième loi de Newton et se traduit par :

$$\vec{F} = m\vec{\Gamma} \quad (\text{I - 5})$$

$\vec{F}$  est la résultante des différentes forces appliquées sur le système considéré (Forces de volume et forces de surface).

La loi fondamentale de la dynamique appliquée à un domaine matériel que l'on suit dans son mouvement exprime que :

*La dérivée particulière du torseur de quantité de mouvement est égale au torseur des forces extérieures appliquées au domaine.*

L'équation de la résultante du bilan des quantités de mouvement s'écrit [3] :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 + (\vec{\nabla} \vec{V}) \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \nu \left[ \Delta \vec{V} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right] \quad (\text{I - 6})$$

### I.2.5 Equations de Navier –Stokes :

La forme générale de ces équations après quelques transformations s'écrit :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \left( \frac{\mu + \eta}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (\text{I - 7})$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \left( \frac{\mu + \eta}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (\text{I - 8})$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \left( \frac{\mu + \eta}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (\text{I - 9})$$

Avec :  $p$ ,  $\mu, \eta$ ,  $\Omega$  et  $(u, v, w)$  sont respectivement, la pression, la viscosité dynamique, la viscosité de dilatation, le potentiel d'où dérivent les forces de volume et les composantes de la vitesse absolue du fluide.

Pour un écoulement d'un fluide parfait, unidimensionnel et instationnaire, en négligeant les forces de volume, ces équation se réduisent à :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{I - 10})$$

### I.2.6. Equation de conservation de l'énergie (1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique) :

Ce principe traduit la conservation de l'énergie totale. Il s'énonce : *La dérivée totale de l'énergie interne et de l'énergie cinétique, d'un milieu continu dans un domaine D, est égale à la somme des puissances des actions extérieures (mécaniques et thermiques).*

Sa forme locale est :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = -k\Delta T - P\varnothing + \Phi \quad (\text{I - 11})$$

Où :  $\varnothing$ : divergence du vecteur vitesse.

$\Phi$ : fonction de dissipation visqueuse.

### I.2.7 Equation d'état :

Le fluide est caractérisé par son équation d'état, qui s'écrit sous la forme générale :

$$f(\rho, p, T) = 0 \quad (\text{I - 12})$$

L'équation d'état d'un gaz parfait (gaz idéal) est de la forme :

$$p = \rho r T \quad (\text{I - 13})$$

T, r sont respectivement, la température et la constante des Gaz parfait.

## I.3 Rappel de Gazodynamique :

### I.3.1 Equation de conservation de l'énergie pour les GAZ :

Le 1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique, appliqué à l'unité de masse d'un fluide pour un système ouvert, celui-ci s'exprime par :

$$\Delta H + \Delta E_p + \Delta E_c = Q + w \quad (\text{I - 14})$$

w : le travail technique.

Q : représente la chaleur échangée avec le milieu extérieur, par l'unité de masse de fluide.

$\Delta H, \Delta E_p, \Delta E_c$  : désigne respectivement, les variations de l'enthalpie, de l'énergie

potentielle et de l'énergie cinétique du système.

Si, on néglige les forces de pesanteur, la variation de l'énergie potentielle devient négligeable.

Pour un écoulement adiabatique ( $Q = 0$ ).

On suppose ici que le fluide n'échange pas de travail technique l'équation (I.14) pour un système ouvert devient :

$$H + \frac{v^2}{2} = C^{ste} \quad (\text{I - 15})$$

### I.3.2 vitesse du son (sonique) :

La vitesse du son ou vitesse sonique est la vitesse de propagation de l'onde de pression infinitésimale dans un fluide compressible. La perturbation considérée est isentropique, l'expression générale de cette vitesse est définie par la racine carrée de la dérivée de la pression par rapport à la masse volumique :

$$C = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \quad (\text{I - 16})$$

Pour un écoulement isentropique du gaz parfait, on a la relation de Laplace :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C^{te} \quad (\text{I - 17})$$

qui permet d'exprimer  $p$  en fonction de  $\rho$ . Pour les gaz parfaits, la vitesse de son peut s'exprimer en fonction de  $p$  et  $\rho$  puis en fonction de  $T$  par l'intermédiaire de l'équation d'état (I - 13) :

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma r T} \quad (\text{I - 18})$$

$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  : est le rapport des chaleurs spécifiques, à pression et à volume constants du gaz parfait.

La relation (I - 18) montre que la vitesse de son, pour un corps donné, ne dépend que de sa température.

### I.3.3 Nombre de Mach :

Le nombre de Mach est une grandeur physique adimensionnelle importante dans l'analyse des écoulements compressibles, définie comme le rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse du son au point considéré.

$$M = \frac{v}{c} \quad (\text{I - 19})$$

❖ Si dans une région de l'écoulement le nombre de Mach est inférieur à 1 alors le fluide se déplace moins vite que les perturbations de pression. On parle alors d'écoulement compressible en régime subsonique. Dans le cas contraire, le fluide se déplace plus vite que les ondes de compression/détente. On est alors en présence d'un écoulement supersonique, transsonique et hypersonique.

On a donc :

- $M < 1$  : l'écoulement est subsonique.
- $M = 1$  : l'écoulement est sonique.
- $M > 1$  : l'écoulement est supersonique.
- $0.8 < M < 1.2$  : l'écoulement est transsoniques.
- Si,  $M > 5$  l'écoulement est hypersonique.

### I.3.4 Grandeurs génératrice réduites, pour un écoulement isentropique :

Soit  $T_0, P_0, \rho_0$  : les paramètres de l'état générateur, la combinaison de la loi d'isotropie avec la relation de Zenner conduit à :

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (\text{I - 20})$$

$$\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{I - 21})$$

$$\frac{T_0}{T} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) \quad (\text{I - 22})$$

On peut également exprimer le rapport de section par la relation :

$$\frac{S}{S_c} = \frac{1}{M} \left[ \frac{(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)}{\frac{\gamma+1}{2}} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (\text{I - 23})$$

$S_c$  : la section au col.

### I.3.4 Relation d'Hugoniot dans une tuyère :

On considère un fluide parfait compressible, en écoulement unidimensionnel isentropique, dont le régime est permanent.

Compte tenu des hypothèses déjà posées, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\rho S v = C^{ste} \quad (\text{I - 24})$$

La forme différentielle de cette équation est :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} = 0 \quad (\text{I - 25})$$

L'équation d'EULER, pour un fluide parfait, en absence de choc s'écrit :

$$v dv + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (\text{I - 26})$$

Pour un écoulement isentropique (I.16) s'écrit :

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (\text{I - 27})$$

A partir des équations (I-25), (I-26), (I-27), on obtient des équations dite « D'HUGONIOT » :

- relation entre  $dS$  et  $dv$  :



$$\frac{dS}{S} = \frac{dv}{v} (M^2 - 1) \quad (\text{I - 28})$$

- relation entre  $dv$  et  $dp$  :

$$\frac{dv}{v} = - \frac{1}{M^2 \gamma} \frac{dp}{p} \quad (\text{I - 29})$$

D'après la relation (I-28), on distingue trois cas :

1<sup>er</sup> Cas :

$M < 1$  : (vitesse subsonique), la vitesse varie en sens inverse de la section.

$$dv > 0 \text{ si } dS < 0$$

2<sup>eme</sup> Cas :

$M > 1$  : (vitesse supersonique), la vitesse varie dans le même sens que la section.

$$dv > 0 \text{ si } dS > 0$$

3<sup>eme</sup> Cas :

$M = 1$  : (vitesse sonique), elle ne peut avoir lieu, que dans une section dont l'aire est minimale.

Pour la relation (I - 29), montre que la pression et la vitesse varient en sens contraires.

### I.3.5 Différents régimes d'écoulements, dans une tuyère convergente divergente :

Si on varie le rapport  $\frac{P_a}{P_0}$ , entre l'amont et l'aval d'une tuyère convergente-divergente, on obtient plusieurs régimes d'écoulements. Ils sont représentés sur la figure (I.2)

❖ Si  $P_a = P_0$  : l'écoulement n'aura pas lieu dans la tuyère.

❖ Si  $\frac{P_{a1}}{P_0} < \frac{P_a}{P_0} < 1$  : Ecoulement subsonique dans toute la tuyère. (courbe 1)

❖ Si  $\frac{P_a}{P_0} = \frac{P_{a1}}{P_0}$  L'écoulement est subsonique partout, sonique au col (courbe 2)

❖ Si  $\frac{P_{a1}}{P_0} < \frac{P_a}{P_0} < \frac{P_{a2}}{P_0}$  Ecoulement à onde de choc stationnaire dans le divergent.

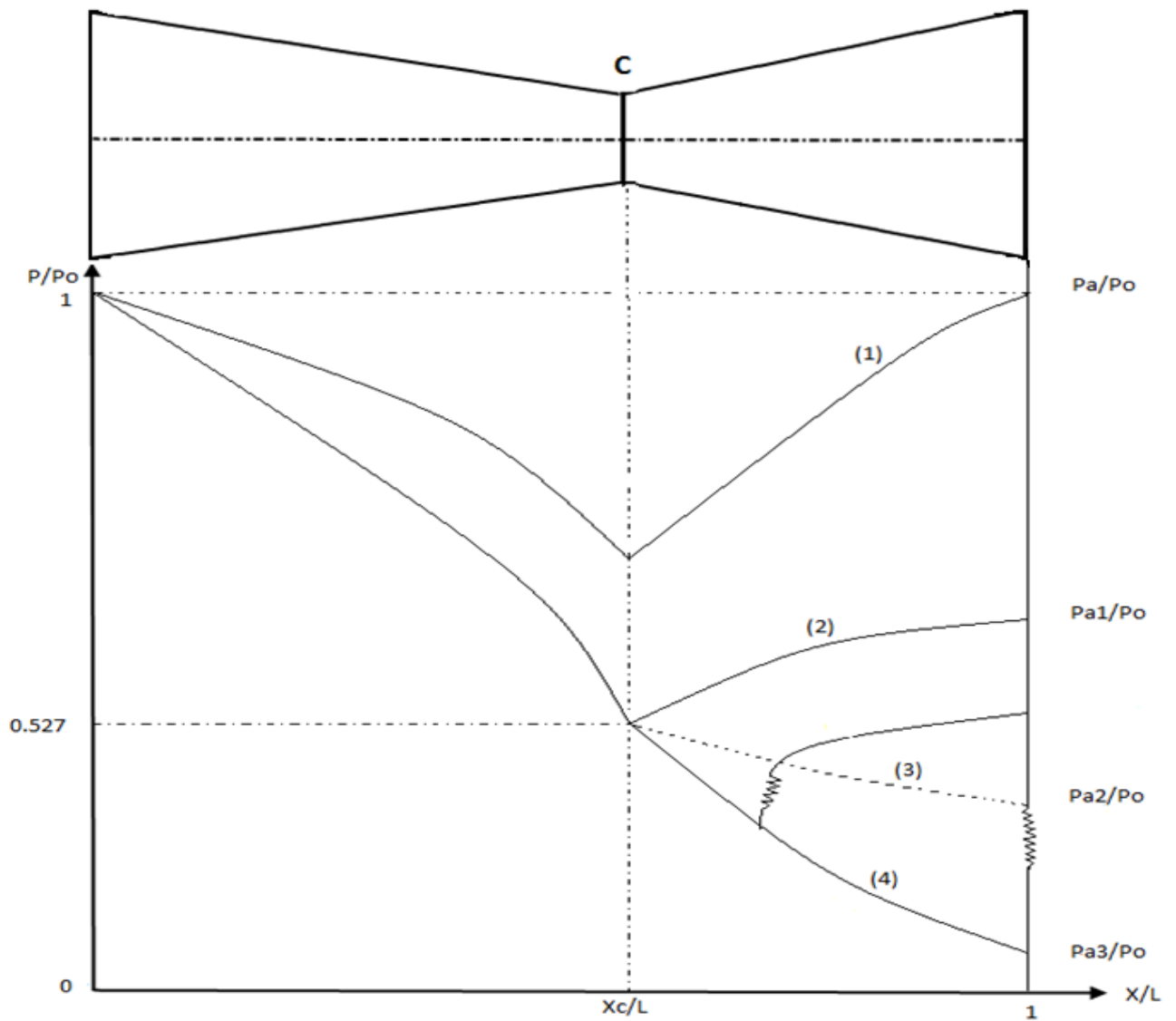
L'écoulement est sonique au col, subsonique au convergent, supersonique entre le col et l'onde de choc, subsonique ensuite.

❖ Si  $\frac{P_a}{P_0} = \frac{P_{a2}}{P_0}$  L'onde de choc se produit à la sortie de la tuyère.

❖ Si  $\frac{P_{a3}}{P_0} < \frac{P_a}{P_0} < \frac{P_{a2}}{P_0}$  Le rapport  $\frac{P_a}{P_0}$  est insuffisant pour que l'onde de choc remonte dans la tuyère. L'expression montre que le plus souvent, ce régime est instable et qu'il se forme, des décollements dans le divergent.

❖ Si  $\frac{P_a}{P_0} = \frac{P_{a3}}{P_0}$  L'écoulement est subsonique dans le convergent, sonique au col, et supersonique dans le divergent. La tuyère est en régime adapté. C'est le cas limite, où la pression à la sortie est égale la pression d'enceinte.

❖ Si  $0 < \frac{P_a}{P_0} < \frac{P_{a3}}{P_0}$  L'écoulement est le même que dans le cas précédent, sauf qu'ici, il se forme des ondes de détente irréversibles à la sortie de la tuyère.



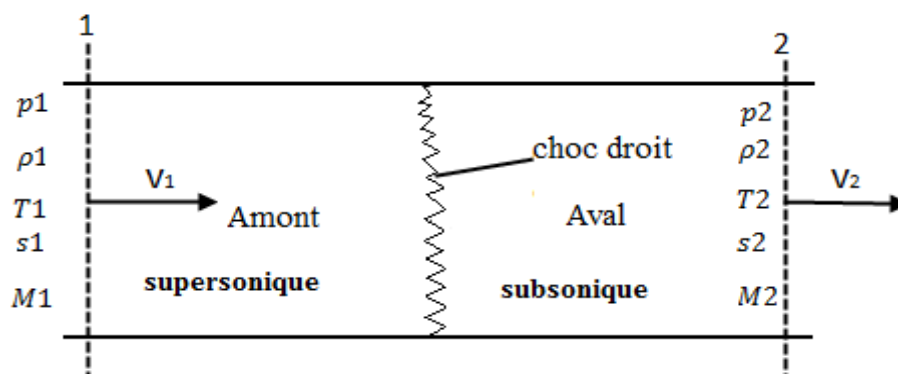
**Figure I.2 :** Différents régimes d'écoulements dans une tuyère convergente divergente

## II.1 Onde de choc droite (normale) :

### II.1.1 Définition :

Une onde de choc droite, est une surface de discontinuité plane non-isentropique, perpendiculaire à l'écoulement où le vecteur vitesse de l'écoulement est normal au front du choc [4].

Le processus de transition d'un côté à un autre du choc, lié à très forts gradients de vitesse, de température et de pression, conduisant à un état hors équilibre.



**Figure II.1 :** *Onde de choc droite.*

- L'indice (1) désigne la région en amont du choc
- L'indice (2) désigne la région en aval du choc

**La théorie qui sera développée est basée sur les hypothèses suivantes:**

- l'onde de choc est stationnaire et par conséquent  $\omega$  est nul,  $\omega$  est la vitesse de propagation de l'onde de choc.
- Pas de forces de frottement, ni de forces de volume.
- Toutes les lignes de courant sont parallèles entre elles et perpendiculaires à la surface de choc.
- Il n'y a pas de réaction chimique ni d'apport de chaleur extérieur, et le fluide reste en équilibre thermodynamique.

**II.1.2 Equations de bilan :**

On se propose d'établir les formules fondamentales nécessaires pour décrire quantitativement le phénomène d'onde de choc.

Les équations de conservation rappelées dans le chapitre I s'écrivent :

$$\rho_1 \times v_1 = \rho_2 \times v_2 \quad (\text{II - 1})$$

$$P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_2 + \rho_2 v_2^2 \quad (\text{II - 2})$$

$$H_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = H_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \quad (\text{II - 3})$$

**II.1.3 Relations d'ondes de choc droites :**

On va chercher à faire apparaître le nombre de Mach amont et aval pour obtenir des rapports simples.

d'où pour l'équation (II - 3) permet d'écrire :

$$C_p T_1 + \frac{v_1^2}{2} = C_p T_1 \left( 1 + \frac{v_1^2}{2 C_p T_1} \right)$$

$$C_p T_1 + \frac{v_1^2}{2} = C_p T_1 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)$$

d'après l'équation (I - 18) et  $C_p = \frac{(\gamma r)}{(\gamma-1)}$ , on aboutit au rapport de température suivant :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \quad (\text{II - 4})$$

On peut également exprimer le rapport de pression utilisons la relation (II - 2) :

$$P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_1 \left( 1 + \frac{\rho_1 v_1^2}{P_1} \right)$$

$$P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_1 (1 + \gamma M_1^2)$$

On a:  $C^2 = \frac{\gamma P}{\rho}$

On aura:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \quad (\text{II - 5})$$

Relie les nombres de Mach amont et aval. On utilise la relation (II - 1) :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{M_1 C_1}{M_2 C_2} \quad (\text{II - 6})$$

L'équation (II - 6) donne :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{M_1}{M_2} \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{1/2} \quad (\text{II - 7})$$

On portant les équations (II - 4) et (II - 5) dans (II - 7), on obtient donc la relation de nombre de Mach amont et aval :

$$\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} = \frac{M_1}{M_2} \left( \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2} \right)^{1/2}$$

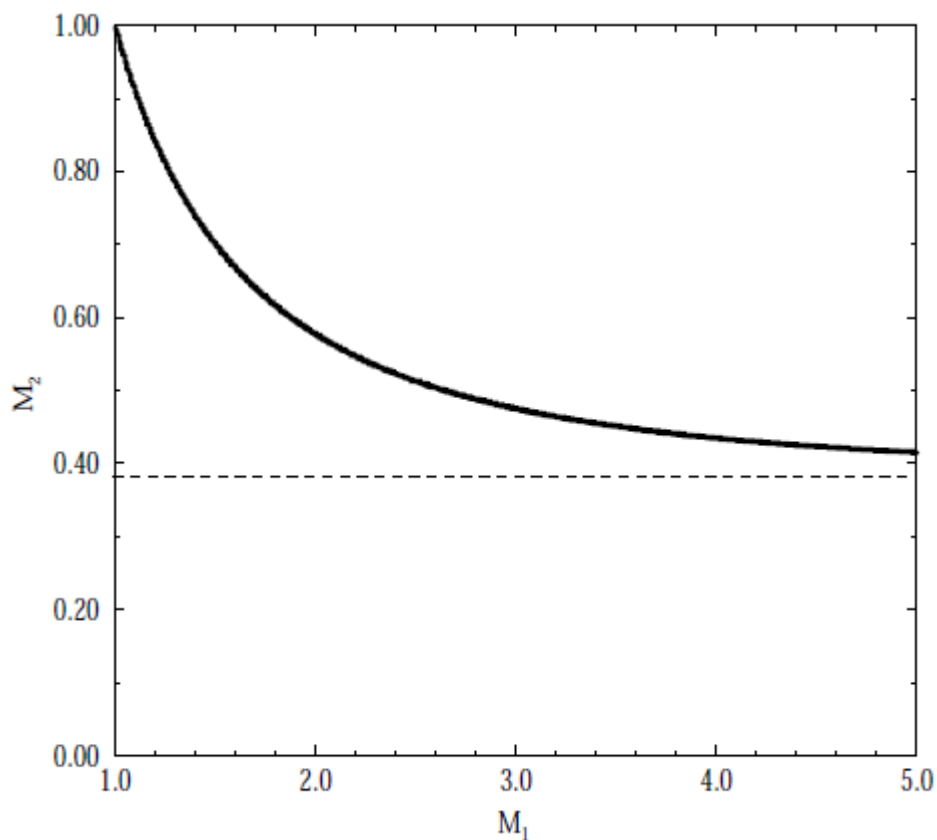
Où encore :

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2\gamma M_1^2 + (1 - \gamma)} \quad (\text{II - 8})$$

Le nombre de Mach  $M_2$  on aval du choc est représenté en fonction de  $M_1$  sur la figure II.2.

➤ Le nombre de Mach amont doit nécessairement être supérieur à 1 ( $M_1 > 1$ ) pour qu'il puisse y avoir une onde de choc.

- Les ondes de choc ne peuvent en aucun cas se former dans un écoulement subsonique.
- Le nombre de Mach en aval de l'onde de choc droite est toujours inférieur à 1 ( $M_2 < 1$ ).
- Un choc droit s'accompagne toujours d'une transition « supersonique → Subsonique ».
- $M_2$  diminue de façon  $M_1$  augmente, et tend vers une valeur asymptotique.



**Figure II.2 :** Représentation graphique entre l'évolution de nombre de Mach et le choc droit.

### II.1.3.1 Rapport des grandeurs caractéristiques en fonction du nombre de Mach en amont $M_1$ :

La relation (II – 8), combinée aux formules (II - 4) et (II - 5) permet de donner la valeur de ces rapports en fonction du nombre de Mach amont.

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2} \right) \quad (\text{II - 9})$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (\text{II - 10})$$

Compte tenu de la relation (I - 13) le rapport de densité s'écrit :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{T_1}{T_2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \quad (\text{II - 11})$$

En reprenant la relation (II - 1) de même que (II - 11), nous obtenons :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \quad (\text{II - 12})$$

Considérant toutes ces relations, on distingue que si  $M_1 \rightarrow \infty$  on a :  $T_2 \rightarrow \infty$

et  $P_2 \rightarrow \infty$ . Par contre les rapports de densités et des vitesses ont une limite finie :

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{v_1}{v_2} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

### II.1.3.2 Relation de Rankine-Hugoniot, ligne de Rayleigh :

❖ L'équation de Rankine-Hugoniot permet de relier les rapports de pression et de densité à travers une onde de choc. Pour l'obtenir on utilise les relations (II - 10) et (II - 11).

Alors cette équation s'écrit :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad (\text{II - 13})$$



Cette relation montre qu'un choc n'est pas isentropique, permet de relier l'état thermodynamique en amont de choc  $(P_1, \rho_1)$  à l'état en aval  $(P_2, \rho_2)$ . L'évolution correspondant est représentée sur la figure (II - 3).

On a porté sur cette figure la courbe isentropique correspondant à  $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma$ .

On remarque que les deux courbes correspondantes sont tangentes au niveau du point (1,1), correspondant à une onde de choc infiniment faible. Ainsi, les chocs faibles peuvent en première approximation être considérés comme isentropiques.

• Comme on peut introduisant l'expression de l'équation d'Hugoniot dans le cas plus général des gaz réels à partir des équations de bilan :

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(P_2 - P_1) \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (\text{II - 14})$$

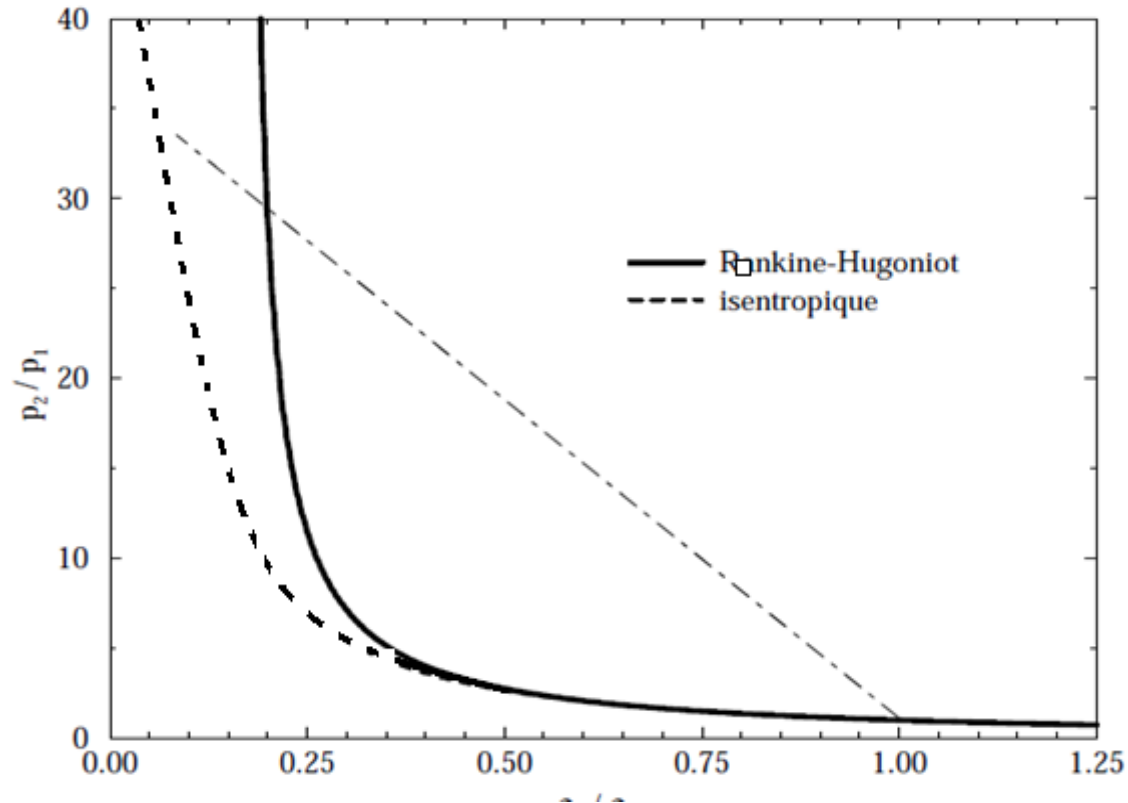
- ❖ La ligne de Rayleigh correspond à une deuxième méthode pour relier l'évolution de la densité et de la pression, en prenant compte le nombre de Mach amont.

De l'équation (II - 1) et (II - 2) on obtient la formule de la ligne de Rayleigh :

$$\frac{P_2}{P_1} - 1 = \gamma M_1^2 \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \quad (\text{II - 15})$$

Il s'agit de l'équation d'une droite dans le plan  $(P_2/P_1, \rho_1/\rho_2)$ .

L'intersection de la droite de Rayleigh avec la ligne d'Hugoniot donne les conditions de choc correspondant au nombre de Mach  $M_1$  figure (II - 3).



**Figure II.3 :** Représentation de l'équation de Rankine-Hugoniot, de l'évolution isentropique et d'une droite de Rayleigh[5].

#### II.1.4 variation d'entropie à travers un choc droit :

L'entropie  $s$  augmente à travers un choc, d'après la relation de Gibbs :

$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{dP}{\rho} \quad (\text{II} - 16)$$

D'où la variation d'entropie que subit le fluide entre l'état (1) et l'état (2) est donnée par :

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \left[ \frac{P_2}{P_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right] \quad (\text{II} - 17)$$

Avec les résultats déjà obtenus l'équation (II – 17) s'écrit aussi :

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \left[ \left( \frac{1}{\gamma + 1} \right)^{\gamma + 1} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) \left( \frac{2}{M_1^2} + \gamma - 1 \right)^\gamma \right] \quad (\text{II} - 18)$$

-cette variation ne dépend que de nombre de Mach en amont.

❖ Si  $M = 1$  on aura  $S_2 - S_1 = 0$  : onde de choc infiniment faible.

❖ Si  $M > 1$  on aura  $S_2 - S_1 > 0$  : donc il y'a génération de l'entropie ce qui est en totale à l'équation avec le 2<sup>ème</sup> principe de la thermodynamique.

Donc cette équation nous montre clairement que le seule cas où l'onde de choc aura ce produit et le cas où on a l'écoulement supersonique en amont de l'onde de choc.

❖ Si  $M < 1$  on aura  $S_2 - S_1 < 0$  : (il n'y a pas de choc) : il y'a diminution de l'entropie ce qui est contraire au 2<sup>ème</sup> principe de la thermodynamique, cette hypothèse physiquement inacceptable.

### II.1.5 Rendement isentropique de l'onde choc :

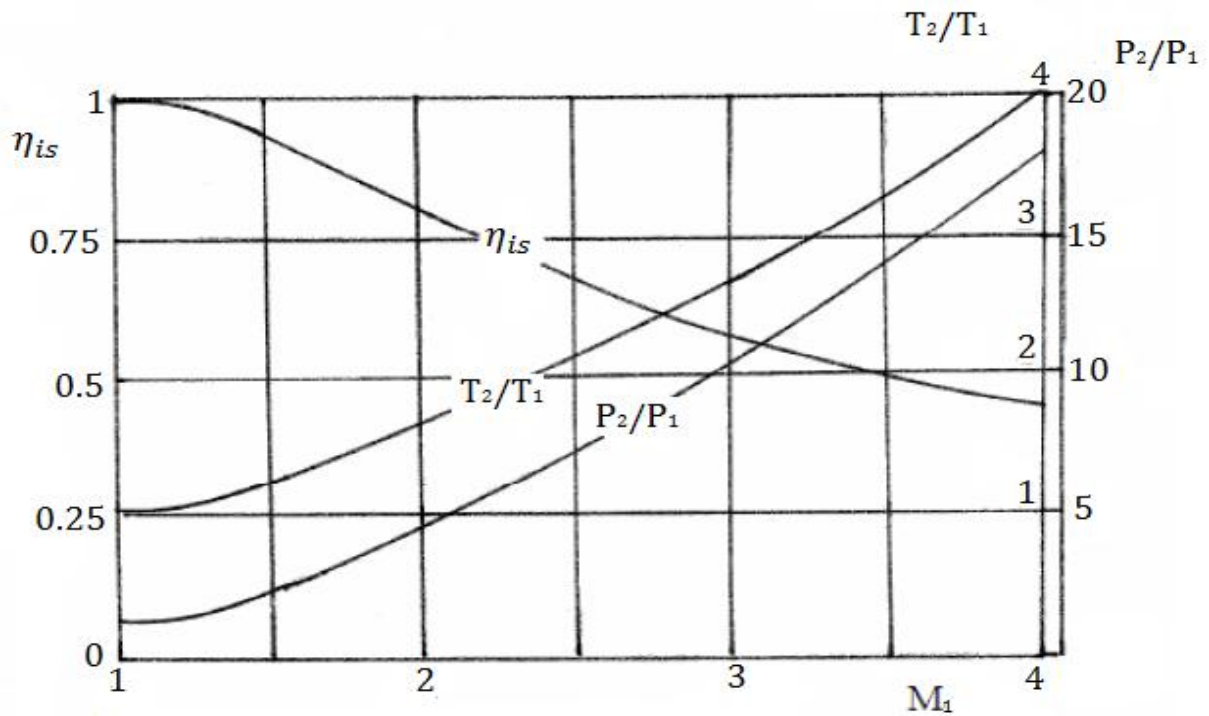
Le rendement isentropique, qui compare la transformation réelle à une transformation isentropique, est défini, comme pour les machines irréversibles, par :

$$\eta_{is} = \frac{h_2^{is} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{T_2^{is} - T_1}{T_2 - T_1} \quad (\text{II} - 19)$$

$$\frac{T_2^{is}}{T_1} = \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (\text{II} - 20)$$

\* Si  $P_2/P_1 \leq 2.7$ ,  $M_1 = 1.5$  et  $\eta_{is} = 0.9$ . De même, si  $P_2/P_1 \leq 4.5$ ,  $M_1 = 2$  et  $\eta_{is} = 0.8$ .

Au-delà le rendement isentropique devient très faible. L'onde de choc droite est donc très dissipative au-delà de  $M_1 = 2$  (Figure II.4). Il est alors préférable de recourir à des ondes de choc obliques.

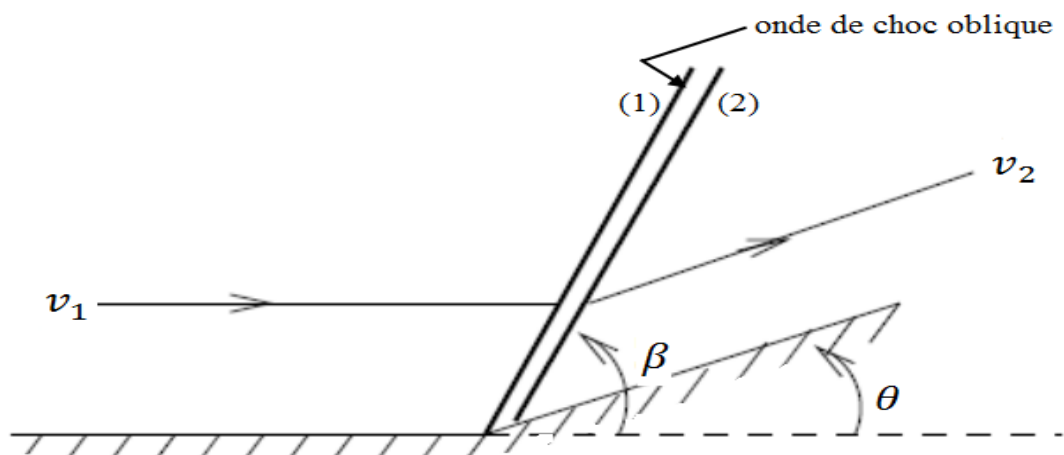


**Figure II.4 :** Rendement isentropique en fonction du nombre de Mach amont [5].

## II.2 Onde de choc oblique :

### II.2.1 Définition :

Une onde de choc oblique est créée lorsqu'un écoulement est défléchi (par un obstacle), par exemple suite à une inflexion de la paroi.



**Figure II.5 :** onde de choc oblique.

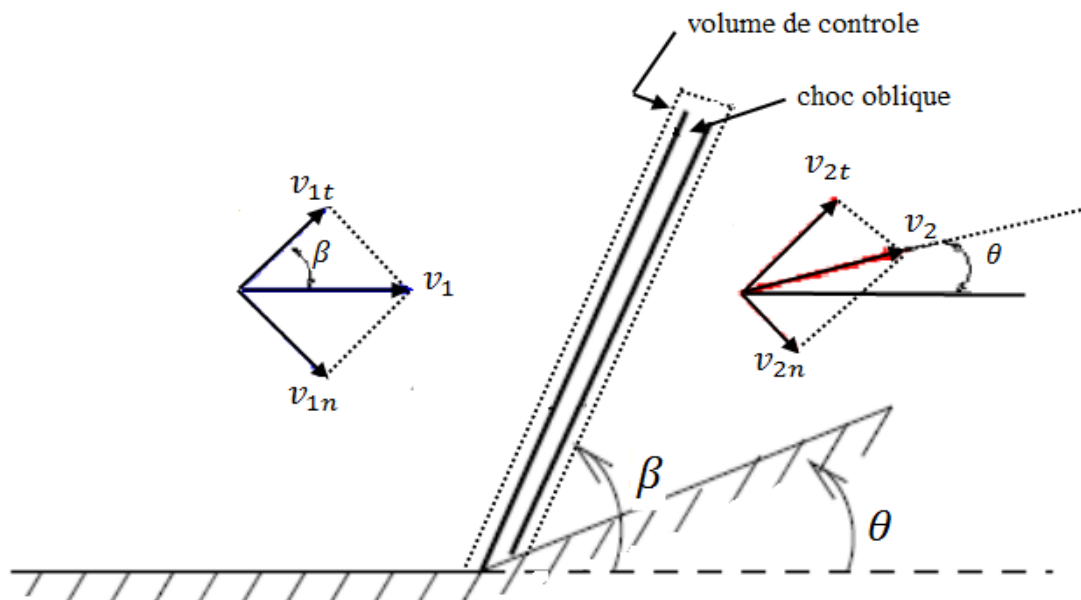
- Un écoulement supersonique de vitesse  $v_1$  est défléchi (changement de la direction) par une rampe d'un angle  $\theta$ .
- Un choc oblique d'un angle  $\beta$  apparaît pour permettre à l'écoulement d'avoir une vitesse  $v_2$  parallèle à la rampe.
- L'onde de choc oblique se produit juste au niveau de l'arrêt, correspondant au début de la déflexion de la rampe.
- La nature de l'écoulement après l'onde de choc oblique peut être subsonique ou supersonique.

❖ En décomposant la vitesse  $v$  comme suite :

-la composante normale  $v_n$  dans la direction normale au choc.

-la composante tangentielle  $v_t$  dans la direction tangentielle au choc.

**Même théorie que les ondes de choc droites considérées précédemment, qui sera développé.**



**Figure II.6 :** Choix d'un volume de contrôle pour l'étude d'un choc oblique.

**II.2.2 Equations de bilan :**

On choisi le volume de contrôle entourant le choc, d'une épaisseur très fine, les équations de conservation sur ce volume (figure II .6) s'écrivent :

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n} \quad (\text{II} - 21)$$

-Suivant la normale :

$$\rho_1 v_{1n}^2 + P_1 = \rho_2 v_{2n}^2 + P_2 \quad (\text{II} - 22)$$

-Suivant la tangentielle :

$$v_{1t} = v_{2t} \quad (\text{II} - 23)$$

$$H_1 + \frac{1}{2} v_{1n}^2 = H_2 + \frac{1}{2} v_{2n}^2 \quad (\text{II} - 24)$$

On constate à travers ces équations que le système d'équations de l'onde de choc oblique est identique à celui de l'onde de choc droite. En remplaçant simplement dans les équations, les vitesses  $v_1$  et  $v_2$  par les composantes normales  $v_{1n}$  et  $v_{2n}$  respectivement.

**II.2.3 Relations d'ondes de choc obliques :**

On a :

$$\beta = \frac{v_{1n}}{v_1} \text{ et } \sin(\beta - \theta) = \frac{v_{2n}}{v_2}$$

Alors :

$$v_{1n} = v_1 \sin \beta \quad (\text{II} - 25)$$

et

$$v_{2n} = v_2 \sin(\beta - \theta) \quad (\text{II} - 26)$$

La vitesse du son dépend uniquement de la température ( $a = a_n$ ) on a donc :

$$M_{1n} = M_1 \sin \beta \quad (\text{II} - 27)$$

$$\mathbf{M}_{2n} = \mathbf{M}_2 \sin(\beta - \theta) \quad (\text{II} - 28)$$

De ce fait, l'ensemble des résultats obtenus pour les ondes de choc droites restent valable pour les ondes de choc obliques.

On obtient alors :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1) M_1^2 \sin^2 \beta} \right) \quad (\text{II} - 29)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (\text{II} - 30)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1) M_1^2 \sin^2 \beta}{2 + (\gamma-1) M_1^2 \sin^2 \beta} \quad (\text{II} - 31)$$

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \left[ \left( \frac{1}{\gamma+1} \right)^{\gamma+1} (2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - \gamma + 1) \left( \frac{2}{M_1^2 \sin^2 \beta} + \gamma - 1 \right)^\gamma \right] \quad (\text{II} - 32)$$

➤ D'où on conclue à travers ces équations que la variation des paramètres thermodynamiques à travers de choc oblique dépend de deux variations à savoir le nombre Mach en amont de l'onde de choc  $M_1$  et l'angle de choc  $\beta$ .

➤ On remarque clairement que les ondes de choc normales sont un cas particulier d'onde choc oblique correspondantes à la valeur de  $\beta = \frac{\pi}{2}$ .

➤ L'équation (II – 28) montre que le nombre de mach en aval  $M_2$  peut être connu que si l'angle de déflexion  $\theta$  est connu cependant cet angle est aussi en fonction de  $\beta$  et  $M_1$ .

On a:

$$\tan \beta = \frac{v_{1n}}{v_{1t}}$$

Et

$$\tan(\beta - \theta) = \frac{v_{2n}}{v_{2t}}$$

D'après l'équation (II – 23) on aura :

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{v_{2n}}{v_{1n}} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

D'où :

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta} \quad (\text{II - 33})$$

On procède avec quelques transformations trigonométriques ce qui donne :

$$\tan \theta = 2 \coth \beta \left[ \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right] \quad (\text{II - 34})$$

Cette relation est primordiale pour l'analyse des ondes de choc oblique, les résultats obtenus sont représentés sur la figure II.7, pour  $\gamma = 1.4$ . c'est une courbe qui nous donne la variation de l'angle de choc en fonction de l'angle de déflexion pour des différentes valeurs de nombre de Mach amont  $M_1$ .

➤ Pour un nombre de Mach  $M_1$  donné, il existe un angle de déflexion maximal ( $\theta_{max}$ ). Si  $\theta > \theta_{max}$ , alors il n'y a pas d'onde de choc oblique, par contre le choc peut être courbé et détacher.

➤ Pour n'importe quelle valeur de  $\theta < \theta_{max}$ , on constate qu'il existe deux valeurs de  $\beta$  pour  $M_1$  donné. Les changements à travers l'onde de choc oblique sont plus importants pour des valeurs de  $\beta$  plus élevées (Eq. (II - 29), (II - 30)).

➤ Les chocs produits pour des valeurs élevées de  $\beta$  est appelé choc fort et le choc produit pour les valeurs faibles de  $\beta$  est appelé choc faible. Dans la pratique, l'apparition des chocs faibles est beaucoup plus probable, la nature du choc fort ou faible est conditionnée par la pression aval, si cette pression est augmentée considérablement par un mécanisme indépendant, dans ce cas le choc fort, représenté

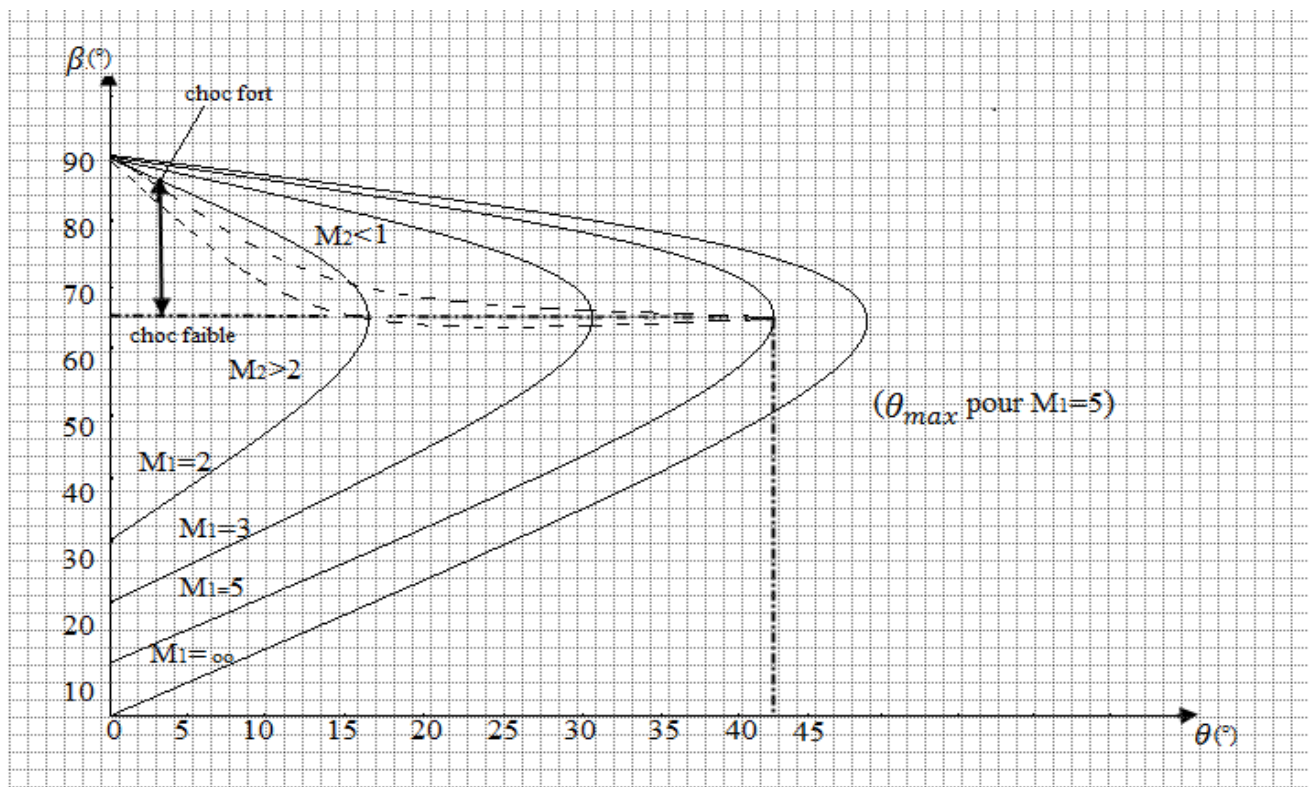


en ligne discontinu (figure II.7), lors de la production d'un choc fort, le nombre de Mach aval  $M_2$  est subsonique, contrairement aux choc faibles où  $M_2$  est supersonique, excité au les valeurs de  $\theta_{max}$ .

➤ Si  $\theta = 0$  : donc  $\beta = \frac{\pi}{2}$  (correspondant à une onde de choc normale) où  $\beta = \delta$  (correspondant à l'angle de Mach) ou  $\sin \delta = \frac{1}{M}$ .

➤ Pour une valeur fixe de l'angle de déflexion  $\theta$ , on constate que lorsque le nombre de Mach amont diminue, en allant un écoulement fortement supersonique vers un écoulement faiblement supersonique, l'angle de choc  $\beta$  augmente pour le cas du choc faible. Les variations des paramètres thermodynamiques à travers une onde de choc oblique sont très importantes.

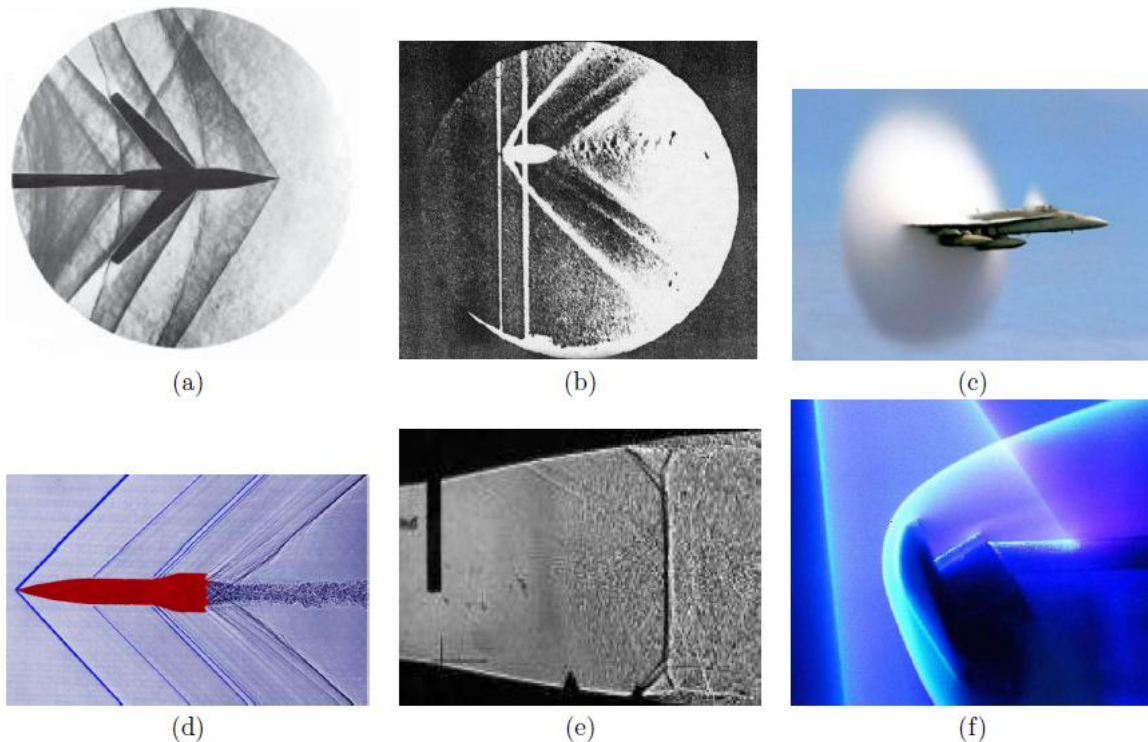
➤ On constate que pour un nombre du Mach donné et lorsque  $\theta$  augmente :  $\beta, P_2, T_2, \rho_2$  augmente et  $M_2$  diminue.



**Figure II.7 :** l'angle de choc en fonction de l'angle de déflexion.

### II.3 Quelques exemples d'écoulements en présence d'ondes de choc :

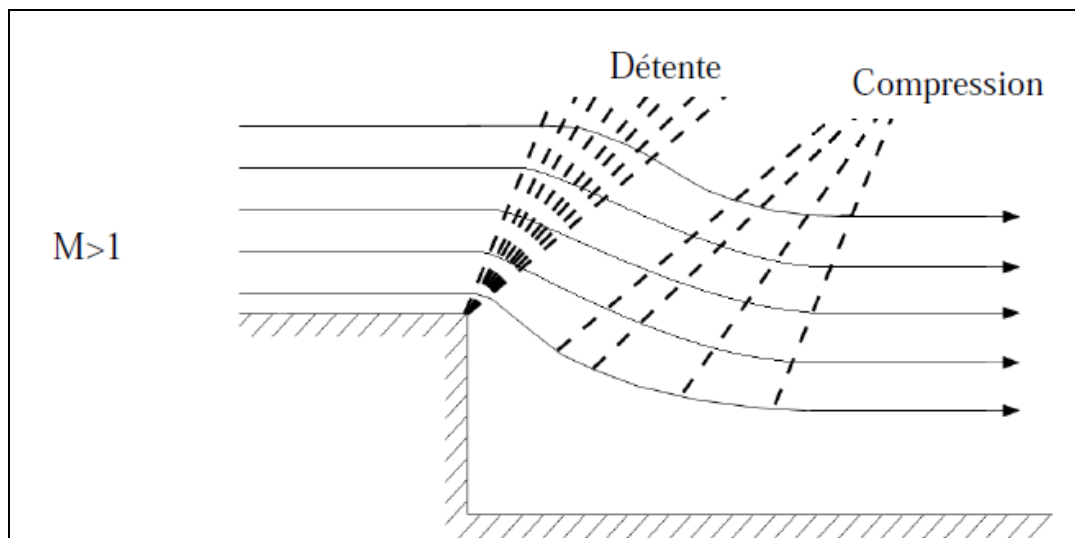
De nombreuses expériences (Figure II.8) montrent que les écoulements compressibles à grande vitesse peuvent subir des variations très rapides [5] de leurs caractéristiques sur des distances très faibles. On peut citer notamment les ondes de détonation accompagnant les explosions ou le bang produit par un avion en vol supersonique.



**Figure II.8 :** *structure d'ondes de choc : (a) Photo Schlieren d'une onde de choc attachée sur un corps supersonique  $M = 1.2$  (NASA, 1995) ; (b) Ombrographe d'une onde de choc détachée en amont d'une balle animée d'une vitesse supersonique (E. Mach, 1887) ; (c) Ondes de choc coniques sur un Jet fighter rendues visibles à cause de la condensation (Source : American Forces Information Service) ; (d) Ondes de choc obliques autour d'une maquette de fusée ; (e) Visualisation d'un choc droit à la sortie d'une tuyère de Laval ; (f) Simulation en soufflerie de l'entrée dans l'atmosphère martienne du futur orbiteur de la mission "retour d'échantillons martien" (ONERA).*

## II.4 Phénomènes de chocs et de détente :

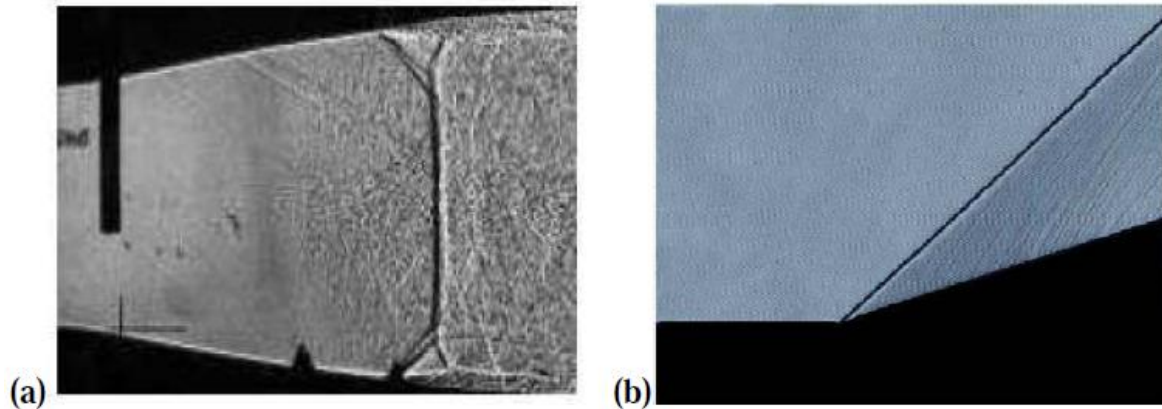
Dans un écoulement compressible où la vitesse n'est pas uniforme, les ondes de Mach produites vont diverger (l'écoulement est progressivement accéléré et détendu) ou converger (l'écoulement est progressivement ralenti et comprimé). L'écoulement supersonique typique sur une marche descendante est représenté sur la Figure II.9 et fait apparaître les faisceaux de détente et de compression.



**Figure II.9 :** Formation de faisceaux de détente et de compression dans un écoulement supersonique sur une marche descendante.

En particulier, pour un écoulement supersonique ( $M > 1$ ), la structure de l'écoulement peut être totalement modifiée par l'apparition de zones de compression et de détente. En effet, pour de tels écoulements compressibles à grande vitesse (vitesse comparable à la vitesse sonique locale), il existe des singularités (zones localisées) où les caractéristiques de l'écoulement varient très fortement et très rapidement afin de s'adapter aux contraintes : les ondes de chocs. Une telle onde de choc peut être normale à la direction de l'écoulement (on parle alors de choc droit), ou inclinée par rapport à la direction de l'écoulement (on parle alors de choc oblique) (figure II.9). Expérimentalement, les visualisations optiques mettent en évidence des variations de l'indice de réfraction du milieu qui est relié à la masse volumique locale.

La figure II.9 témoigne d'une variation brutale de la masse volumique sur une longueur très courte et met en évidence l'existence d'une discontinuité au sein de l'écoulement : l'onde de choc. Au travers d'une onde de choc, les grandeurs de l'écoulement (la vitesse, la pression, la masse volumique, l'entropie,...) varient donc de manière discontinue.



**Figure II.10 :** *Visualisation d'ondes de choc : (a) choc droit à la sortie d'une tuyère de Laval ; (b) choc oblique sur une rampe de compression [5].*

### III.1 Introduction :

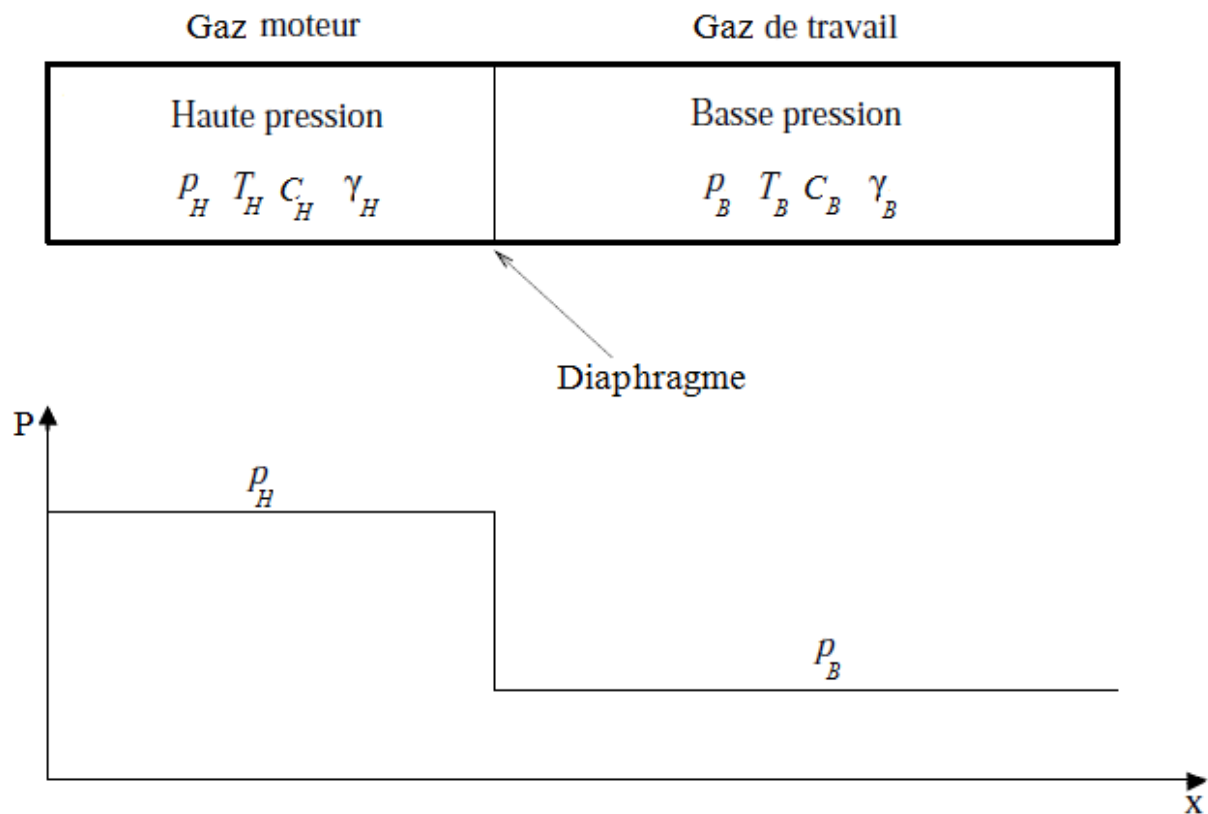
Le tube à choc est un dispositif expérimental permettant de générer des ondes de choc de forte intensité. Les tubes à choc servent à simuler les phénomènes dans les domaines de la physique, de la chimie et de la dynamique des gaz à haute température. Ils permettent par exemple d'étudier les phénomènes avec combustion en régime hypersonique ( $M > 5$ ), ou encore la rentrée dans l'atmosphère d'engins spatiaux.

Il est appelé aussi « tube de travail » comporte deux compartiments, l'une à haute pression qui contient le gaz moteur et l'autre à basse pression qui contient le gaz de travail. Ces deux compartiment, habituellement cylindrique, sont séparés par un diaphragme. On diminue la pression dans le tube de basse pression jusqu'à l'obtention de la pression initial voulue puis on augmente la pression dans le tube de haute pression jusqu'à éclatement de la membrane, ce qui génère l'onde de choc, on doit donc choisir l'épaisseur ainsi que le matériel composant la membrane de façon à ce que sa rupture se produise à la différence de pression désirée.

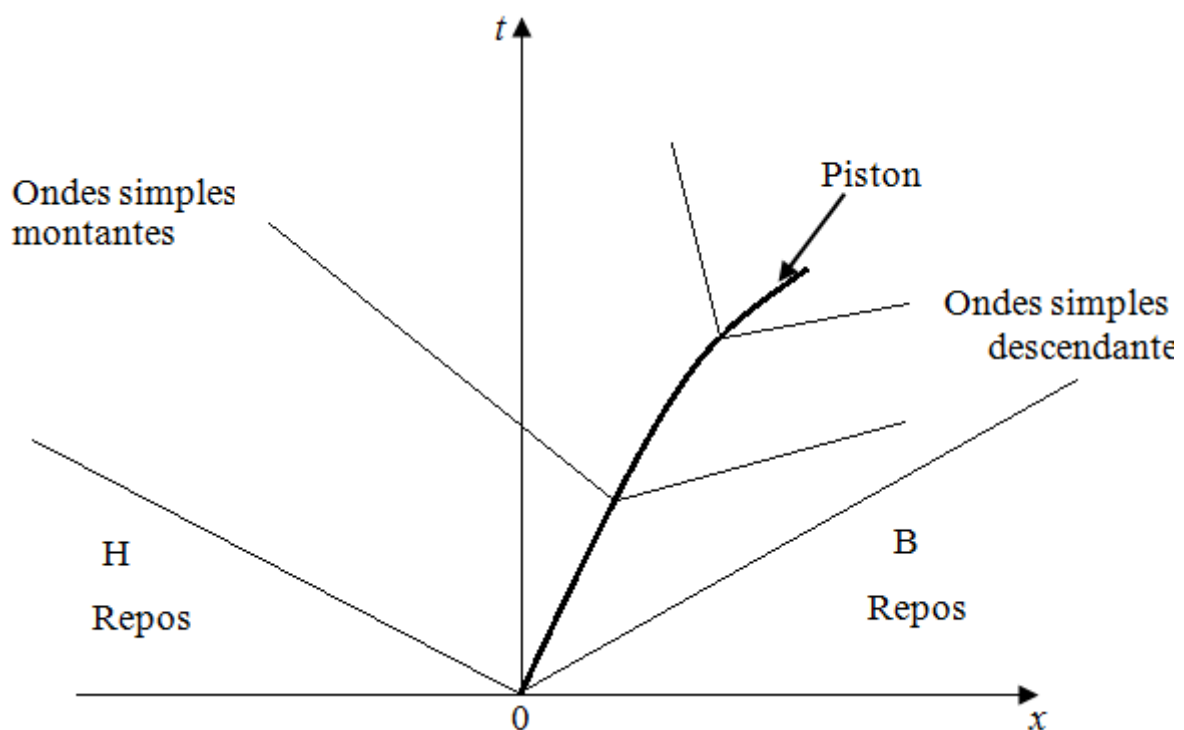
### III.2 Fonctionnement de tube à choc :

Pour qu'on puisse comprendre le fonctionnement d'un tube à choc, Nous allons nous restreindre à un modèle simplifié, en se basant sur les hypothèses suivante :

- Le tube est suffisamment long afin d'éviter la réflexion des ondes;
- le choc est droit;
- l'écoulement est non visqueux (il n'y a pas de couche limite);
- l'écoulement est uniforme monodimensionnel ;
- Considérons un tube contenant un piston de masse  $m$  maintenant immobile en  $x=0$ . Ce piston sépare deux gaz supposés parfaits au repos, rapports de chaleurs spécifiques, de pression et de vitesse du son  $\gamma_H, p_H, c_H$  à gauche ( $x < 0$ ) et  $\gamma_B, p_B, c_B$  à droite ( $x > 0$ ) ; on suppose que  $p_H > p_B$  (Figure III.1). A l'instant  $t=0$ , on libère le piston qui va se mettre en mouvement vers la droite en comprimant le gaz B et en détendant le gaz H (Figure III.2) : à droite de piston on aura des ondes simple descendantes de compression et à gauche, des ondes simples montantes de détente.

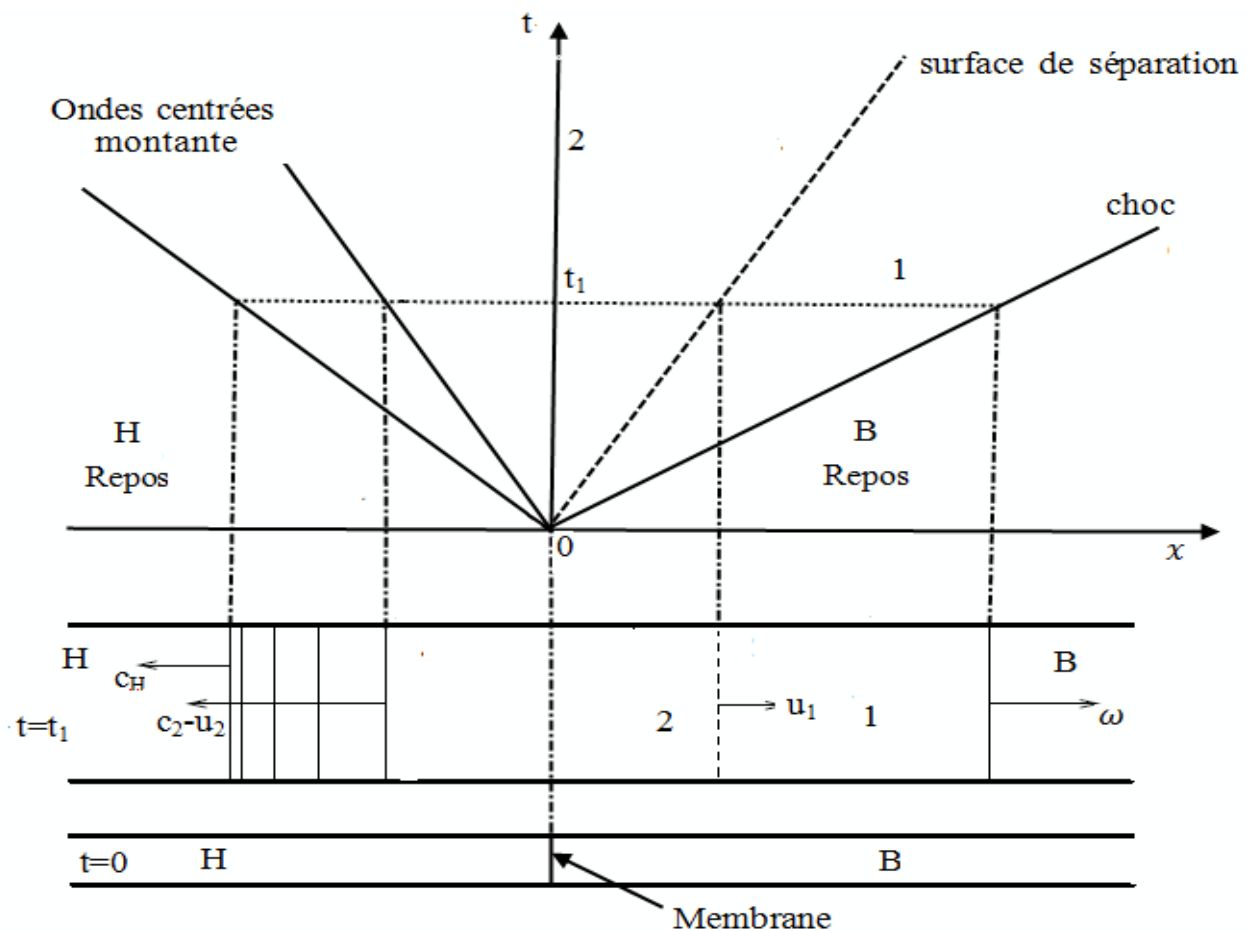


**Figure III.1 :** Conditions initiales dans un tube à choc.



**Figure III.2 :** Conséquences de la mise en mouvement d'un piston de masse  $m$  séparant deux gaz aux repos

Lorsqu'on fait tendre  $m$  vers 0, le calcul que nous venons de tracer montre que le choc se produit dès l'instant initial, que la détente devient une détente centrée et que le piston a à l'instant initial, une accélération infinie. On obtient donc, à la limite, l'écoulement consécutif à une mise en vitesse instantanée d'un piston de masse nulle, c'est-à-dire d'une surface de contact, c'est donc l'écoulement qu'on va observer après la rupture instantanée d'un diaphragme séparant les deux gaz. Un tel écoulement est représenté sur la Figure III.3 (écoulement dans un tube à choc) [6].

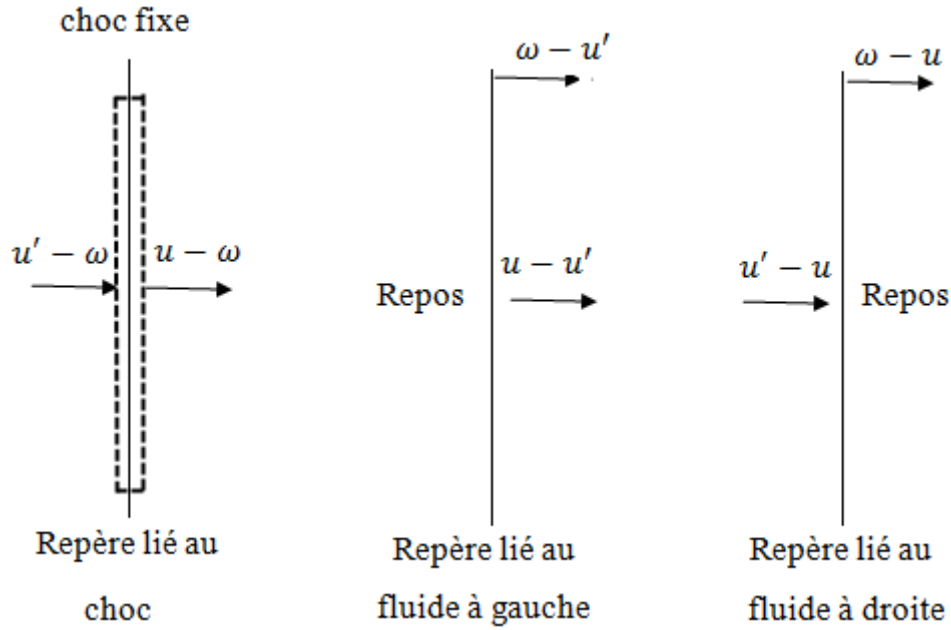


**Figure III.3 :** Résultat de la mise en mouvement d'un piston de masse nulle séparant deux gaz aux repos.

### III.3 Propriétés d'onde de choc normal en mouvement (instationnaire) :

Pour déterminer les propriétés physiques de l'écoulement dans un tube à choc, on doit étudier les propriétés des ondes de choc en mouvement à une dimension (Figure III.4).





**Figure III.4 :** *Onde de choc dans différents repères.*

$\omega$ : la vitesse de propagation de l'onde de choc.

$$\text{Posons : } \lambda' = \omega - u', \quad \lambda = \omega - u. \quad (\text{III} - 1)$$

$\lambda'$  et  $\lambda$  sont les vitesses de propagation de l'onde de choc respectivement par rapports au fluide situé à gauche et à droite du choc.

Appliquant les équations de conservation déjà introduit dans le chapitre I au domaine aplati sur le choc s'écrivent :

$$\lambda \rho = \lambda' \rho' \quad (\text{III} - 2)$$

$$p' - p = \lambda \rho (\lambda - \lambda') \quad (\text{III} - 3)$$

$$\lambda \rho \left[ \left( e' + \frac{\lambda'^2}{2} \right) - \left( e + \frac{\lambda^2}{2} \right) \right] = \lambda p - \lambda' p' \quad (\text{III} - 4)$$

Les symboles accentués se rapportent au fluide à gauche.

$e$  : l'énergie interne massique.

En tenant compte (III - 1), l'équation (III - 3) devient :

$$p' - p = \lambda \rho (u' - u) \quad (\text{III} - 5)$$



A partir de la relation (III - 2) et (III - 5), (III - 4) s'écrit :

$$\lambda \rho \left[ \left( \mathbf{e}' + \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \right) - \left( \mathbf{e} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \right] = \mathbf{u}' \mathbf{p}' - \mathbf{u} \mathbf{p} \quad (\text{III} - 6)$$

Pour  $\lambda' = \lambda = 0$  : de l'équation (III - 1),  $u = u'$ , d'après (III - 2),  $p' = p$  et l'équation (III - 4) est vérifiée. Dans ce cas, la discontinuité représentée par cette solution est appelée « interface » ou « surface de contact » elle se déplace avec la vitesse du fluide et sépare deux gaz à la même  $p$  mais à  $T$  et  $\rho$  différentes.

### III.3.1 Représentation des ondes de choc dans le plan ( $u, p$ ) :

La représentation des ondes de choc dans le plan ( $u, p$ ) est utile pour l'étude des écoulements où apparaissent des ondes de choc.

A partir des relations (III - 1), (III - 2), et (III - 3), on tire :

$$\frac{p' - p}{p} = \frac{\gamma \lambda}{c^2} (u' - u) \quad (\text{III} - 7)$$

La loi d'Hugoniot, qui remplace dans une discontinuité la loi de la Place, permet en éliminant  $\lambda$  et  $\lambda'$  entre (III - 2), (III - 3) et (III - 4), qui donnent :

$$\frac{p'}{p} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho'}{\rho} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho'}{\rho}} \quad (\text{III} - 8)$$

A l'aide de (III - 2) on a :

$$\frac{p'}{p} \left( \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\lambda'}{\lambda} - 1 \right) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\lambda'}{\lambda} \quad (\text{III} - 9)$$

En éliminant  $\frac{p'}{p}$  entre (III - 7) et (III - 9) on aura :

$$\frac{\lambda - \lambda'}{c} = \frac{u' - u}{c} = \frac{2}{\gamma+2} \left( \frac{\lambda}{c} - \frac{c}{\lambda} \right) \quad (\text{III} - 10)$$

L'élimination de  $\lambda'$  donne :

$$\frac{p'-p}{p} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left( \frac{\lambda^2}{c^2} - 1 \right) \quad (\text{III - 11})$$

La relation symétrique de (III - 11) s'écrit :

$$\frac{p-p'}{p'} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left( \frac{\lambda'^2}{c'^2} - 1 \right) \quad (\text{III - 12})$$

Les relations (III - 10) et (III - 11) donnent :

$$\frac{\lambda}{c} = \pm \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{p'-p}{p} + 1}, \quad \frac{\lambda'}{c'} = \pm \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{p-p'}{p'} + 1} \quad (\text{III - 13})$$

Le signe (+) correspond aux chocs descendants et le signe (-) correspond aux chocs montants, une relation entre  $u'$  et  $p'$  s'obtient, en éliminant  $\frac{\lambda}{c}$  entre (III - 7) et la première relation (III - 13), d'où pour choc descendants [8] :

$$\frac{u'-u}{c} = \frac{\frac{p'}{p}-1}{\gamma \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \left( \frac{p'}{p}-1 \right) + 1}} \quad (\text{III - 14})$$

La formule (III - 14) définit une courbe représentant tous les états possible en aval du choc descendant. On prend en considération seulement la partie correspondant à :

$$\frac{p'}{p} \geq 1, \quad \frac{u'-u}{c} > 0$$

La symétrie de (III - 7) s'écrit :

$$\frac{p-p'}{p'} = \gamma \frac{\lambda'}{c'^2} (u - u') \quad (\text{III - 15})$$

D'après (III - 15) et la seconde formule (III - 13) prise avec signe (-), pour des chocs montants [8] on écrit :

$$\frac{u-u'}{c'} = - \frac{\frac{p}{p'}-1}{\gamma \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \left( \frac{p}{p'}-1 \right) + 1}} \quad (\text{III - 16})$$

### III.4 Quelques propriétés physiques de l'écoulement dans un tube à choc :

On va exprimer les propriétés du gaz comprimé par le choc (indice 1) et celle du gaz détendu par le passage des ondes centrées (indices 2) en fonction des propriétés de ces de ces même gaz à l'état initial (indice H et B).

Les conditions sur la surface de contact sont :

$$u_2 = u_1, p_2 = p_1 \quad (\text{III} - 17)$$

D'après les équations (III - 11) et (III - 14) on obtient :

$$\frac{\omega}{c_B} = \sqrt{\frac{\gamma_B + 1}{2\gamma_B} \left( \frac{p_1}{p_B} - 1 \right)} + 1 \quad (\text{III} - 18)$$

$$\frac{u_1}{c_B} = \frac{\frac{p_1}{p_B} - 1}{\gamma_B \sqrt{\frac{\gamma_B + 1}{2\gamma_B} \left( \frac{p_1}{p_B} - 1 \right)} + 1} \quad (\text{III} - 19)$$

Dans la détente centrée montante, on a d'après (I - 17) et () :

$$u_2 = \frac{2}{\gamma_H - 1} (c_H - c_2) = \frac{2c_H}{\gamma_H - 1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_H} \right)^{\frac{\gamma_H - 1}{2\gamma_H}} \right] \quad (\text{III} - 20)$$

On élimine  $u_1$  et  $u_2$  entre (III - 19) et (III - 20) en tenant compte de (III - 17), on obtient :

$$\frac{p_H}{p_B} = \frac{p_1}{p_B} \left[ 1 - \frac{(\gamma_H - 1) \frac{c_B}{c_H} \left( \frac{p_1}{p_B} - 1 \right)}{2\gamma_B \sqrt{\frac{\gamma_B + 1}{2\gamma_B} \left( \frac{p_1}{p_B} - 1 \right)} + 1} \right]^{\frac{2\gamma_H}{\gamma_H - 1}} \quad (\text{III} - 21)$$

Cette relation fournit l'intensité du choc  $\frac{p_1}{p_B}$  en fonction des données.

Les températures génératrices  $T_{01}$  et  $T_{02}$  dans les domaines d'écoulement uniforme 1 et 2 sont données par :

$$\frac{T_{01}}{T_1} = 1 + \frac{\gamma_B - 1}{2} M_1^2, \frac{T_{02}}{T_2} = 1 + \frac{\gamma_H - 1}{2} M_2^2 \quad (\text{III - 22})$$

Où  $T_{01}$  et  $T_{02}$  sont les températures génératrices fictives du domaine 1 et 2.

### III.5 Calcul de l'emplacement de la maquette et du temps de rafale respectivement $X$ et $\tau$ :

On place la maquette dans la chambre de droite, on va choisir son abscisse de manière à avoir, autour de la maquette, un écoulement d'aire uniforme de nombre de Mach  $M_1$ , pendant la durée la plus grande « durée de rafale », elle est limitée par l'arrivée sur la maquette de la surface de contact où du choc réfléchi sur le fond du tube (Figure III.5).

A l'aide des propriétés de l'état du gaz 3 (dans le gaz au repos et au contact de fond), on peut calculer de  $X$  et la durée de rafale  $\tau$ .

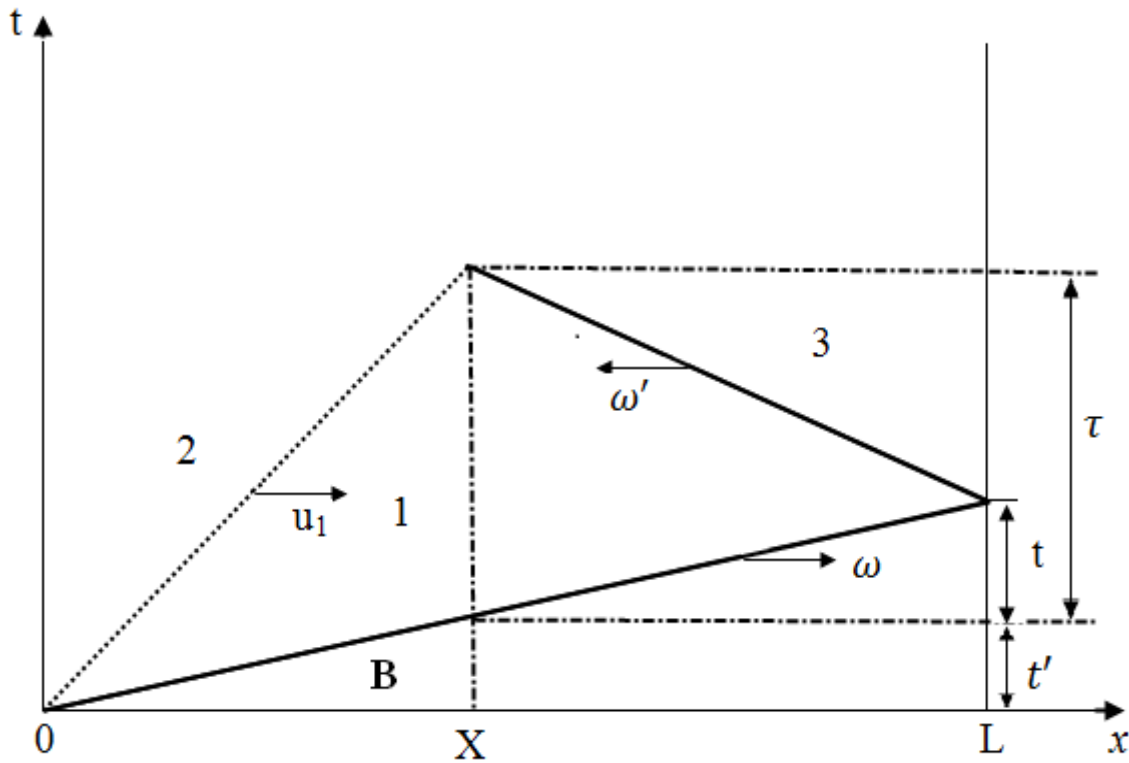
On a :  $L - X = -\omega'(\tau - t)$

$$X = u_1(\tau - t')$$

$$L = \omega(t + t')$$

$$\frac{X}{L} = \frac{\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}}{\frac{1}{u_1} - \frac{1}{\omega'}} \quad (\text{III - 23})$$

$\omega'$  : La vitesse de propagation du choc réfléchi.



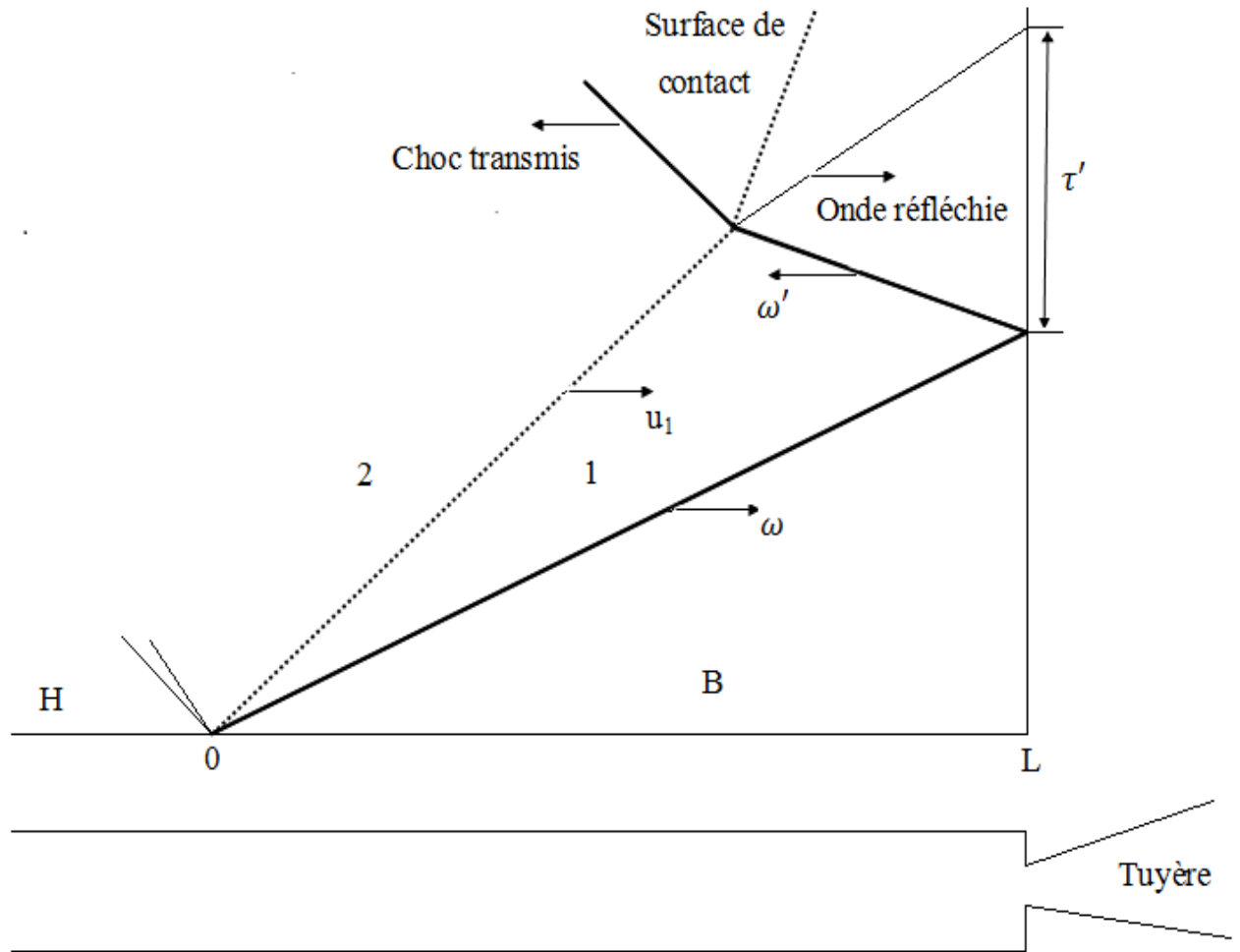
**Figure III.5 :** Collision l'interface avec le choc réfléchi.

### III.6 Tube à choc à double compression :

Le gaz 3, traversé par deux chocs, est porté à une pression et à une température élevée, donc il est avantageux de se servir des conditions 3 comme conditions génératrices. Cela conduit à remplacer le fond rigide du tube par un diaphragme suivi d'un col et d'une tuyère supersonique où l'on a fait préalablement le vide (Figure III.6).

Dans cette installation, le gaz 3 n'est plus au repos, mais la vitesse  $u_3$  dans ce qui constitue la chambre de tranquillisation de la tuyère est petite, de sorte que les calculs faits avec  $u_3=0$  restent valables.

A la phase d'amorçage près, la durée de rafale dans la tuyère est égale à la durée  $\tau'$  pendant laquelle on a les conditions 3 au fond du tube. Cette durée est donc limitée par l'arrivée au fond du tube de l'onde réfléchiée sur la surface de contact à la suite de l'interaction de cette surface avec le choc montant 1-3



**Figure III.6 :** Tube à choc à surface de contact non adaptée.

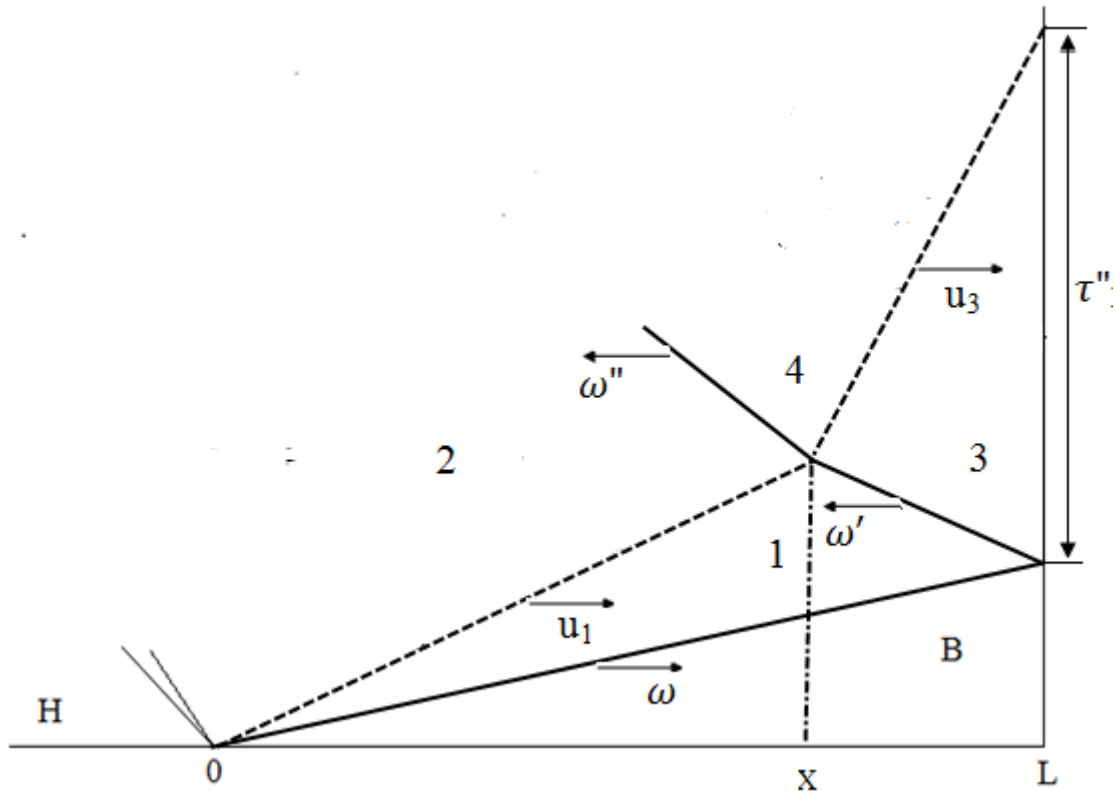
### III.7 Tube à choc à surface de contact adaptée :

Un moyen d'allonger la durée de rafale consiste à supprimer la réflexion sur la surface de contact : on dit dans ce cas qu'on a un tube à choc à surface de contact adaptée (Figure III.7).

Les conditions sur la surface de contact  $u_4=u_3$ ,  $p_4=p_3$ , et les relations de choc 2-4 permettent d'établir la condition à satisfaire entre  $\frac{P_1}{P_B}$ ,  $\frac{c_H}{c_B}$ ,  $\gamma_H$ ,  $\gamma_B$ . En éliminant  $\frac{P_1}{P_B}$  la condition à satisfaire entre cette condition et (III - 5), on obtient la condition à laquelle doivent satisfaire les données  $\gamma_B$ ,  $\gamma_H$ ,  $\frac{P_H}{P_B}$  pour que la surface de contact soit adaptée.

On remarque que la durée de rafale  $\tau'$  est égale à :

$$\tau'' = (L - X) \left[ \frac{1}{u_3} - \frac{1}{\omega'} \right] \quad (\text{III} - 24)$$



**Figure III.7 :** Tube à choc à surface de contact adaptée.

### III.8 Dimensionnement du tube de travail:

Le dimensionnement du tube de travail se fait à partir du choix adéquat du type d de membrane à utiliser de sorte que sa rupture se produit à la différence de pression voulue.

La différence de pression à la rupture correspond à :

$$\Delta P = 4\sigma_t \frac{t}{d}, [7]$$

- $\Delta P$  : La différence de pression.
- $\sigma_t$  : La contrainte de tension de matériel.
- $t$  : L'épaisseur de la membrane.
- $d$  : le diamètre de la membrane.

## **IV.1 Introduction :**

Dans ce chapitre, en utilisant deux logiciels commerciaux ANYS Inc., GAMBIT et FLUENT pour la modélisation et la simulation de nos travaux, nous allons présenter les résultats d'un écoulement compressible obtenus dans un tube à choc pour les différents grandeurs, pression, température, vitesse, nombre de Mach et de la densité avec et sans existence d'un diaphragme au cours de temps.

A la fin nous allons interpréter les résultats de simulation numérique.

## **IV.2 Présentation des logiciels GAMBIT- FLUENT**

### **IV.2.1 Maillage sous GAMBIT :**

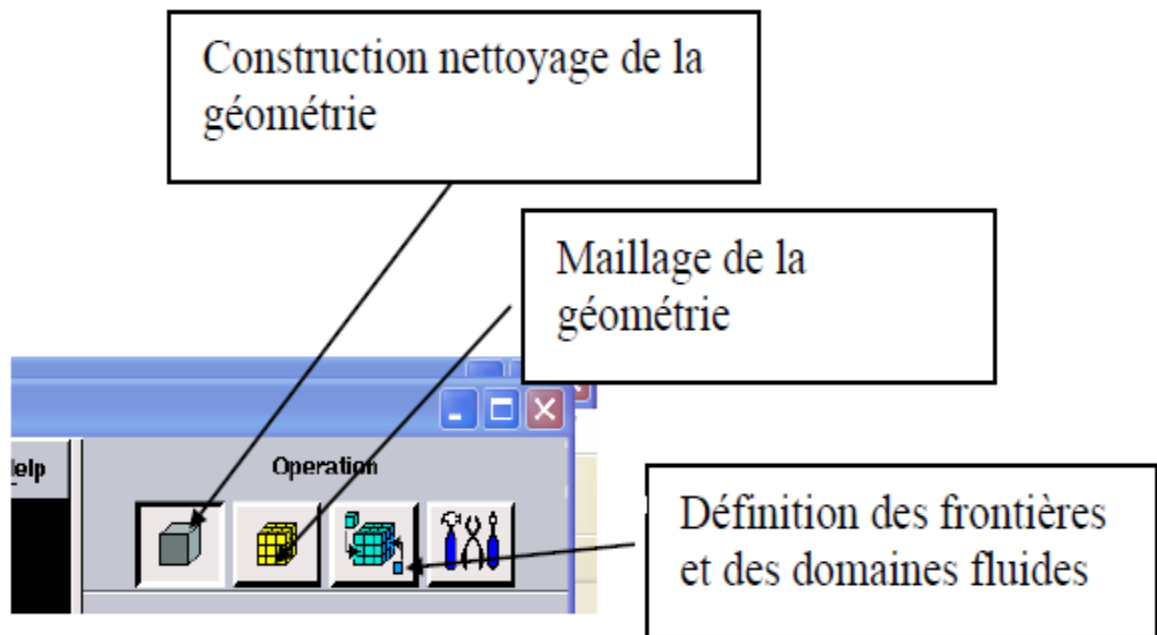
#### **IV.2.1.1 Définition:**

Le logiciel Gambit est un mailleur 2D/3D, préprocesseur qui permet de mailler des domaines de géométrie d'un problème de CFD (Computational Fluide Dynamic). Il génère des fichiers \*.msh pour Fluent.

Gambit regroupe trois fonctions (Figure IV.1) :

- Définition de la géométrie des problèmes (construction si la géométrie est simple ou bien import de la géométrie CAO).
- Le maillage et sa vérification.
- La définition des frontières de calcul.

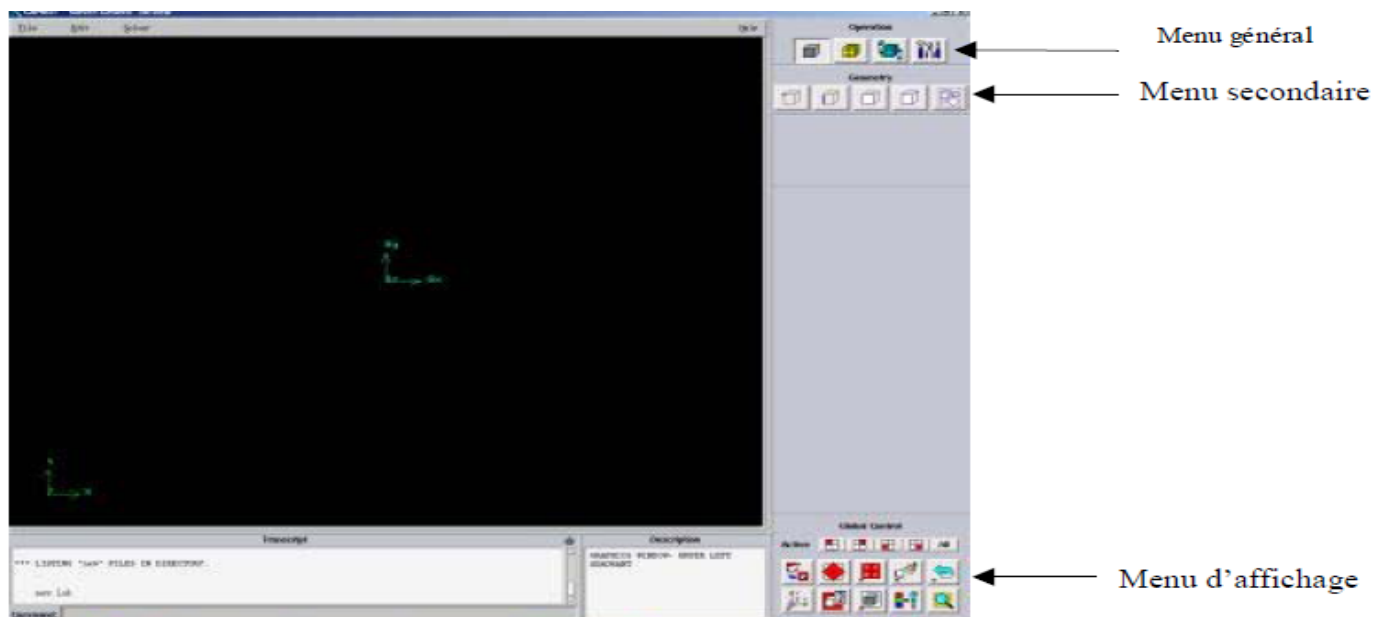




**Figure IV.1 :** *Les trois fonctions de Gambit.*

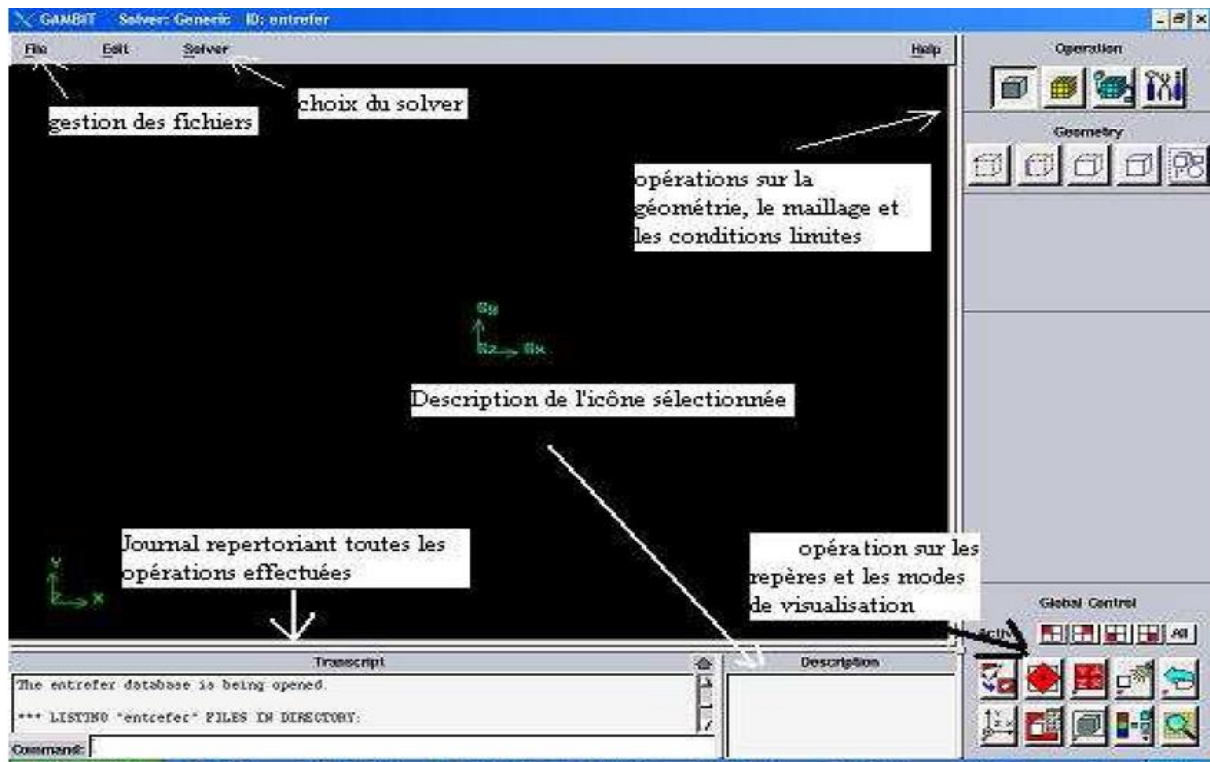
#### IV.2.1.2 La fenêtre de commande :

Après avoir lancé le logiciel, l'interface d'utilisation apparaît :



**Figure IV.2 :** *panels généraux du logiciel Gambit.*

Qui repère les différents groupements des commandes :



**Figure IV.3 :** *Différents groupements des commandes.*

#### IV.2.1.3 Choix de Solver :



**Figure IV.4 :** *Barre de menu principale*

Le solver permet de choisir le type de code de calcul utilisé avec le maillage créé, il est nécessaire pour choisir les conditions aux limites à appliquer dans syntaxe reconnue par Fluent.

Exemple :

**Main Menu > Solver > FLUENT 5/6**

Vérifions que ceci a été fait en regardant dans la fenêtre de transcription où nous devrions voir :

```
Command> solver select "FLUENT 5/6"
```

#### IV.2.1.4 Import de la géométrie et nettoyage de la CAO :

La géométrie est conçue par des logiciels de la CAO (SolidWorks, CATIA...). Dans le cas des turbomachines, elle peut, aussi, réalisée par des logiciels de dimensionnement comme BladeGen+ et Turbo Gen.

Il est conseillé d'importer des fichiers sous format ACIS (\*.sat).

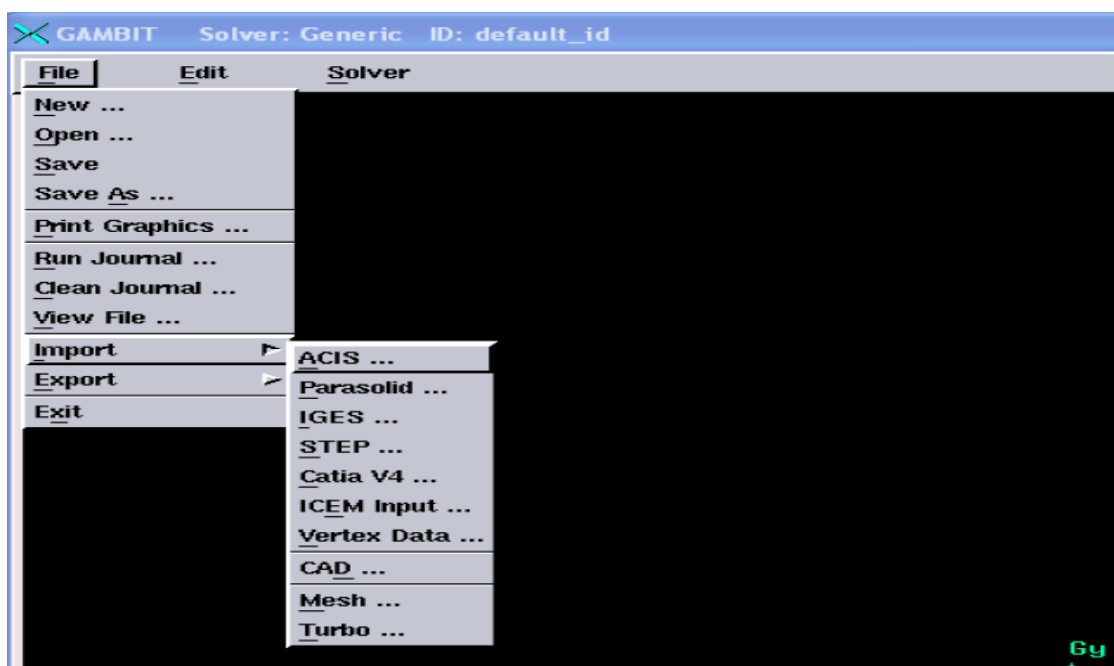
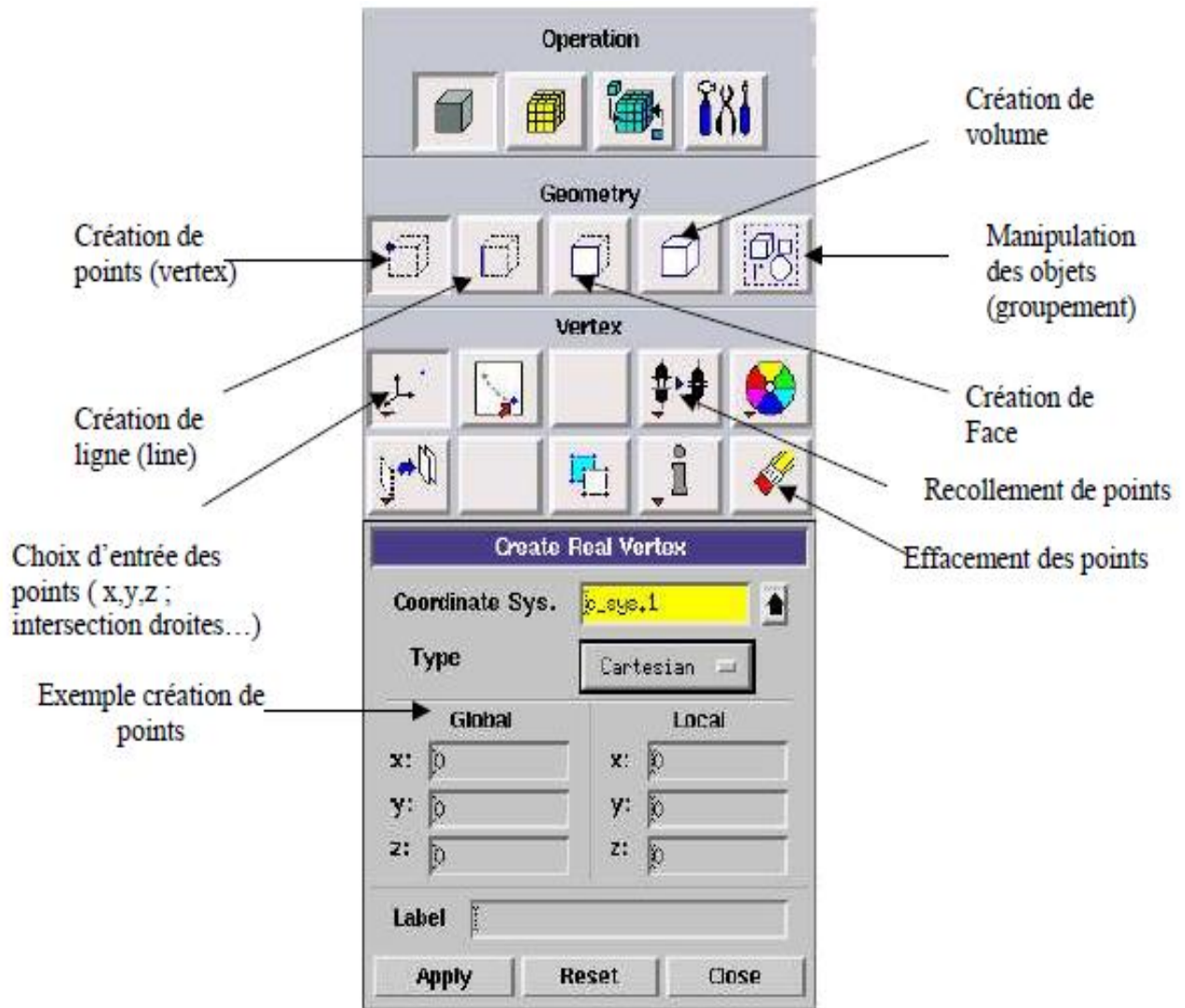


Figure IV.5 : Importation de la géométrie.

#### IV.2.1.5 Construction de la géométrie :

La finalité de la construction de la géométrie est de définir les domaines de calcul qui seront des faces dans un problème 2D et des volumes dans un problème 3D. Pour créer la géométrie à étudier il y a deux possibilités :

- Créer point par point (extrémités) le système, ligne, face, volume (conseillé pour des géométries complexes)
- Créer des surfaces simples existantes (cube, cylindre, sphère...) puis extruder pour obtenir les volumes ou les surfaces voulus.



**Figure IV.6 :** Menu Création des différents éléments de la géométrie.

#### IV.2.1.6 Maillage :

La génération du maillage (2D ou 3D) est une phase très importante dans une analyse CFD, vu l'influence de ces paramètres sur la solution recherchée.

##### IV.2.1.6.1 Techniques de génération du maillage :

Pratiquement, il n'existe pas de règle précise pour la création d'un maillage valable [8], cependant il existe différentes approches qui permettent d'obtenir une grille acceptable :

- Maintenir une bonne qualité des éléments.
- Assurer une bonne résolution dans les régions à fort gradient.

- Assurer un bon lissage dans les zones de transition entre les parties maillage fin et les parties maillage grossier.
- Minimiser le nombre total des éléments (temps de calcul raisonnable).

#### **IV.2.1.6.2 Type de maillage :**

##### **a) Maillage structuré (quadra /hexa) :**

Il est beaucoup plus facile de le générer en utilisant une géométrie à multi bloc, il présente les avantages suivants :

- Economique en nombre d'éléments, présente un nombre inférieur de maille par rapport à un maillage non structuré équivalent.
- Réduit les risques d'erreurs numériques car l'écoulement est aligné avec le maillage.

Ses inconvénients :

- Difficile à le générer dans le cas d'une géométrie complexe.
- Difficile d'obtenir une bonne qualité de maillage pour certaines géométries complexes.

##### **b) Maillage non structuré (tri /tétra) :**

Les éléments de ce type de maillage sont générés arbitrairement sans aucune contrainte.

Ses avantages :

Peut être généré sur une géométrie complexe tout en gardant une bonne qualité des éléments.

- Les algorithmes de génération de ce type de maillage (tri/tétra) sont très automatisés.

Ses inconvénients :

- Très gourmand en nombre de mailles comparativement au maillage structuré.

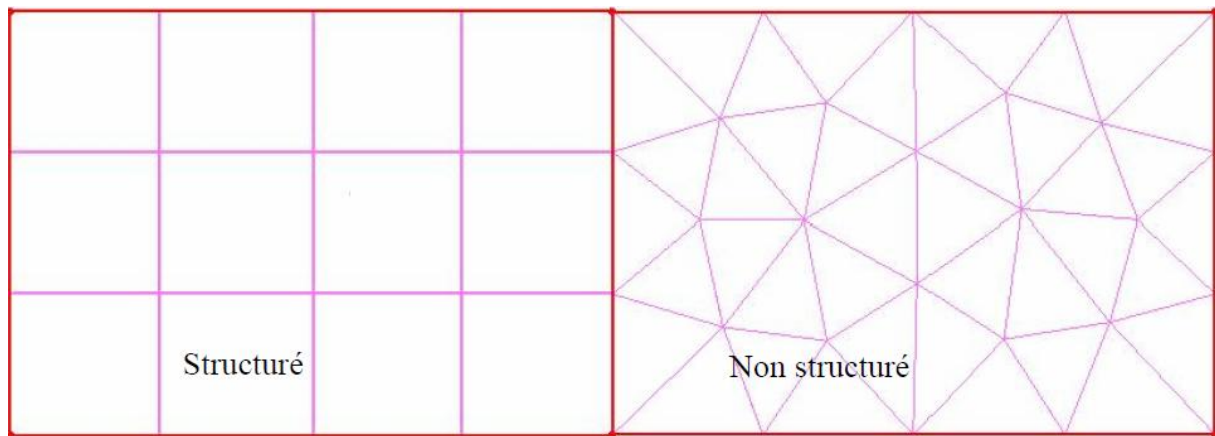
- Engendre des erreurs numériques (fausse diffusion) qui peuvent être plus important si l'on compare avec le maillage structuré.

**b) Maillage hybride :**

- Maillage généré par un mélange d'éléments de différents types, triangulaire ou quadrilatéraux en 2D, tétraédriques, prismatiques, ou pyramidaux en 3D.

Ses avantages :

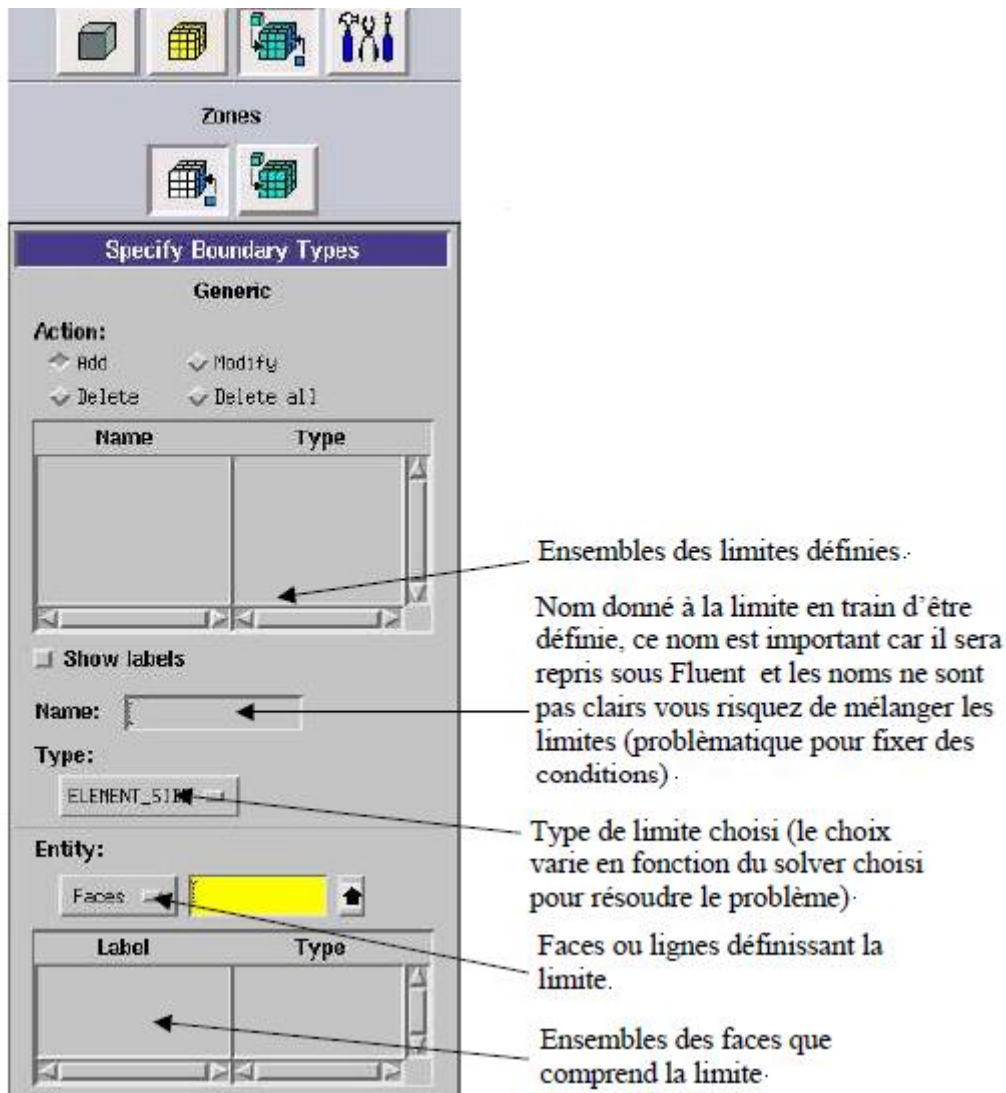
- Combine entre les avantages du maillage structuré et ceux du maillage non structuré.



**Figure IV.7 :** *Maillage structuré et non structuré.*

**IV.2.1.7 Conditions aux limites :**

Il s'agit ici de définir le type des différentes frontières du système ainsi que la nature du (des) domaine(s) décrit(s) globalement.



**Figure IV.8 :** Conditions aux limites.

#### IV.2.1.8 Sauvegarde et exportation du maillage sous Gambit :

Une fois que la géométrie aura lieu, que les conditions aux limites définies, il faut exporter le maillage, en point .msh (mesh = maillage en anglais) pour que Fluent soit capable de le lire et de l'utiliser.

**Main Menu > File > Save**

**Main Menu > File > Export > Mesh**



## IV.2.2 Principales étapes de simulation sous FLUENT :

### IV.2.2.1 Définition :

Fluent est un logiciel de modélisation en mécanique des fluides. Ce logiciel est juste le solveur (un solveur des équations de Navier-Stokes). Il est même depuis peu intégré dans la fameuse suite de logiciel de simulation ANSYS. Sa force vient du très grand nombre de modèles disponibles, pouvant faire face à de très nombreux aspects de la mécanique des fluides :

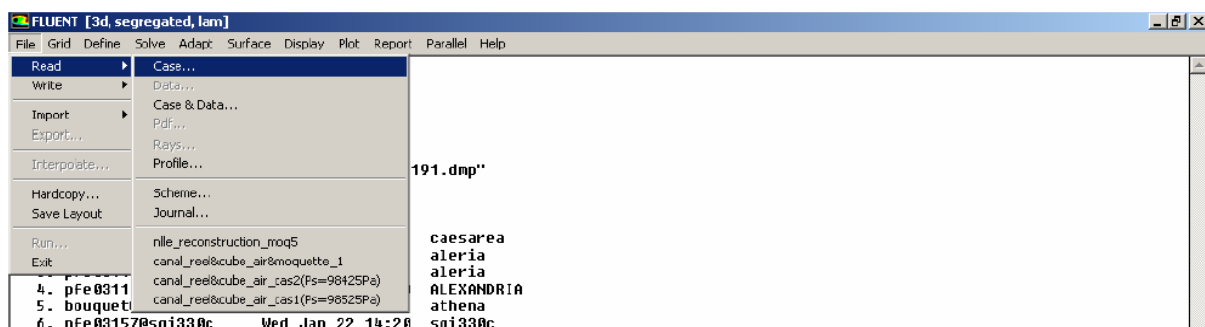
- Écoulement diphasique (miscible, non miscible, cavitation, solidification).
- Turbulence.
- Combustion (pré mélangé et non pré mélangé).
- Transport de particules.
- Écoulement en milieux poreux.
- Maillages mobiles et dynamiques avec reconstruction du maillage.

Le logiciel Fluent est basé sur la méthode des volumes finis, qui permet la résolution des équations qui régissent les écoulements (équation de conservation de la masse, équation de quantité de mouvement, équation de l'énergie).

### IV.2.2.2 Importation de la géométrie(\*.MSH) :

Pour commencer la simulation il faut importer le fichier (\*.msh) généré sous Gambit.

**Main Menu > File > Read > Case**



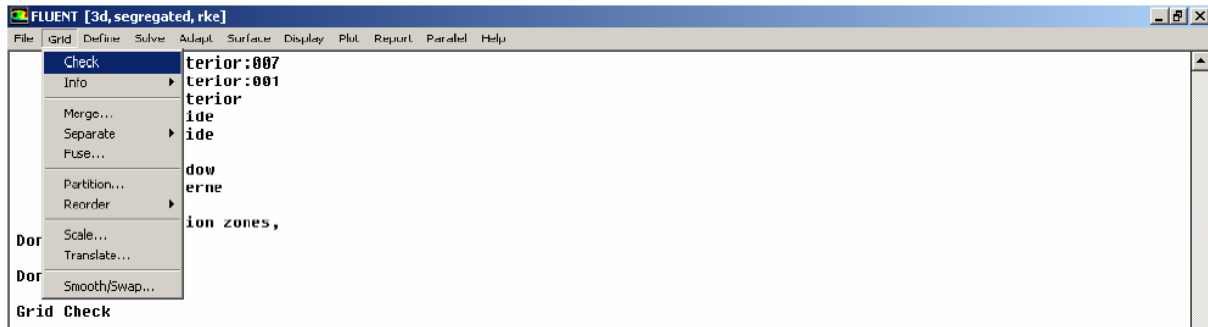
**Figure IV.9 :** *Importation de la géométrie.*



### IV.2.2.3 Vérification du maillage importé :

Ceci permet de vérifier si le maillage importé ne contient pas d'erreurs ou de volumes négatifs.

**Main Menu > Grid > Check**



**Figure IV.10 :** *Vérification de maillage sous Fluent.*

### IV.2.2.4 Lissage du maillage (SMOOTH AND SWAP THE GRID) :

Pour s'assurer de la qualité du maillage, il est pratique de laisser le maillage en cliquant sur le bouton Smooth puis sur le bouton Swap, jusqu'à ce que Fluent affiche que zéro faces sont swapped.

**Main Menu > Grid > Smooth/Swap**

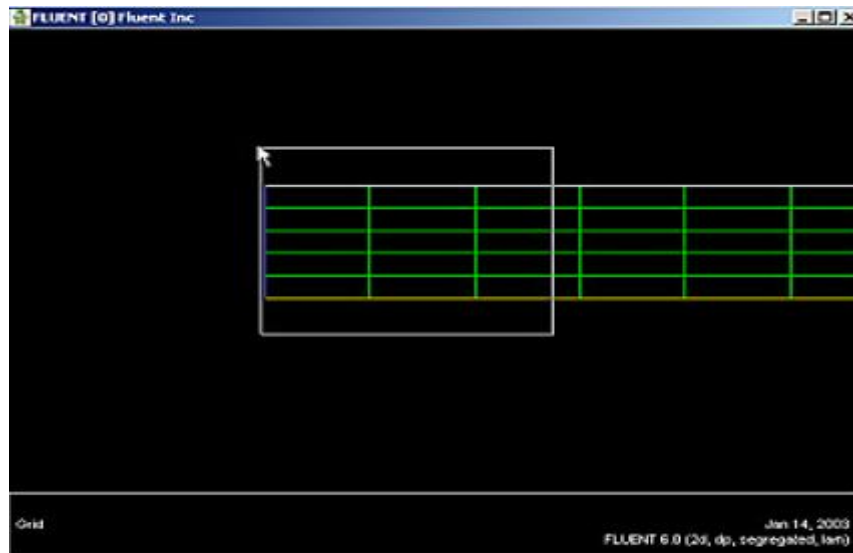
### IV.2.2.5 Vérification de l'échelle :

Il faut toujours vérifier que les dimensions affichées correspondent aux dimensions physiques du problème.

**Main Menu > Grid > Scale**

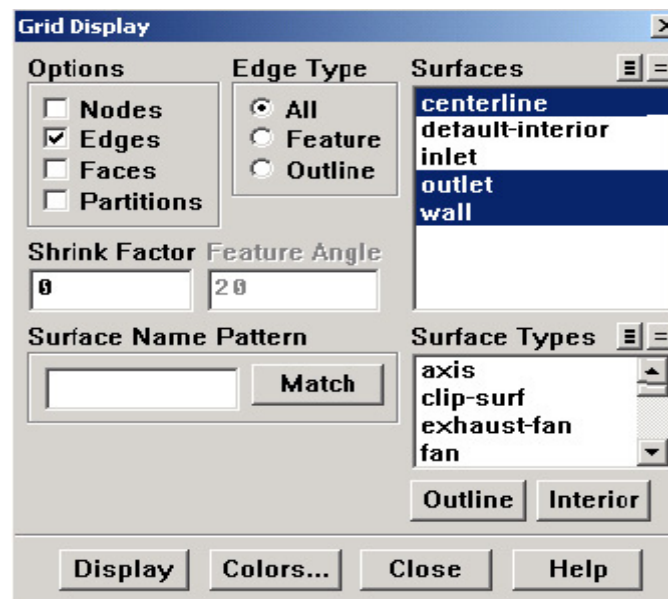
### IV.2.2.6 Affichage de la Grille :

**Main Menu > Display > Grid**



**Figure IV.11 :** *Affichage du maillage.*

Nous pouvons aussi regarder les parties spécifiques du maillage en choisissant les frontières que nous voulons voir sur Surfaces. Par exemple dans ce cas, wall, outlet et des frontières de centerline, ont été choisis dans la vue suivante :



**Figure IV.12 :** *Affichage les parties spécifiques du maillage.*



Figure IV.13 : La fenêtre graphique.

#### IV.2.2.7 Choix du solveur :

- **Ségrégates Solver** : Est le plus approprié pour les écoulements incompressibles (ventilateur, pompes...ect).
- **Coupled Solvers** : Les solveurs « coupled implicit » et « coupled explicit », sont plutôt réservés aux écoulements compressibles à grande vitesse.

On peut choisir aussi ici le régime d'écoulement : permanent ou instationnaire.

**Main Menu > Define > Models > Solver**

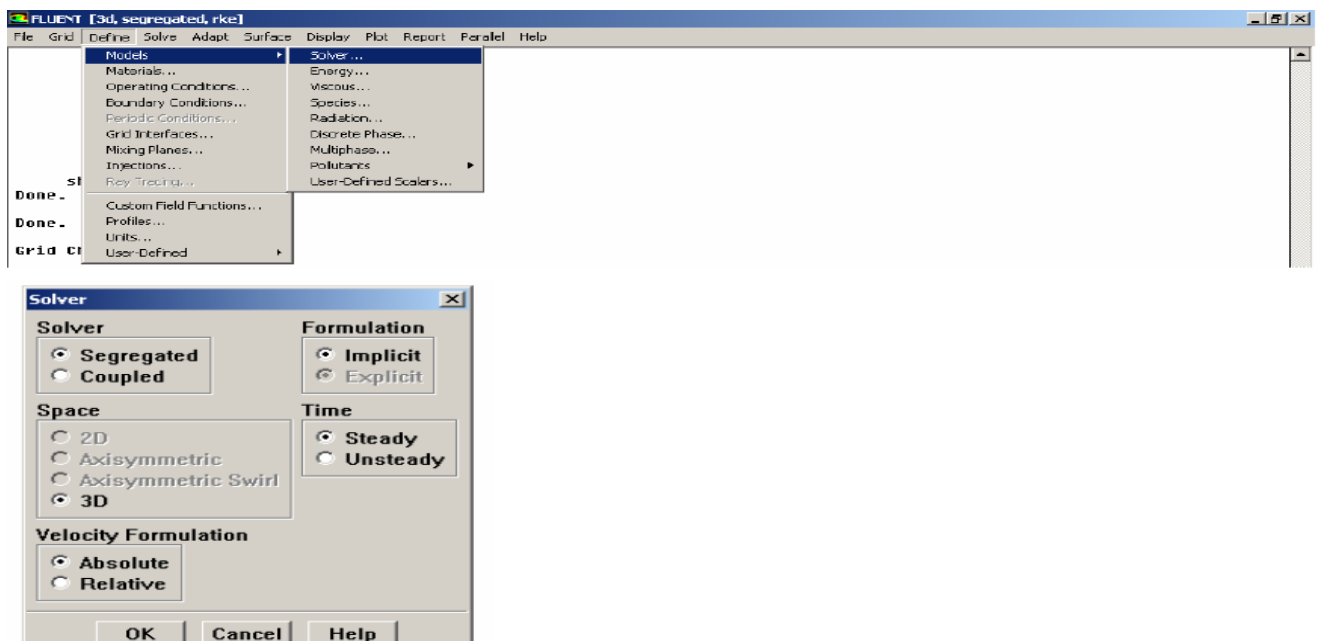
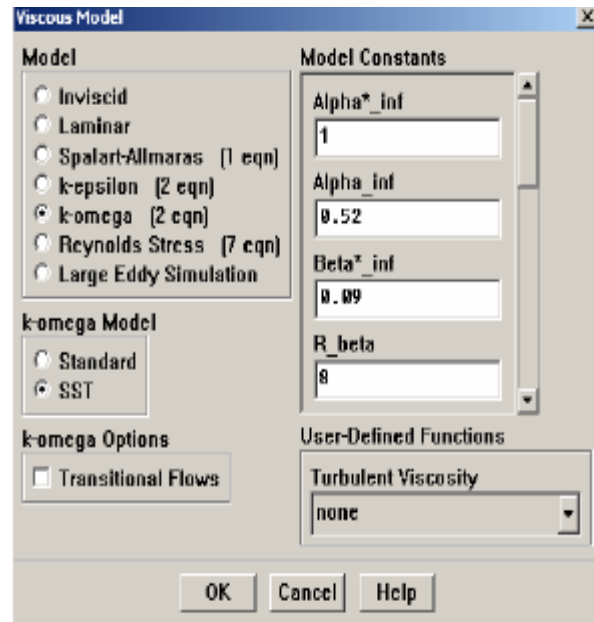


Figure IV.14 Choix du solveur sous Fluent.

#### IV.2.2.8 Choix du modèle de turbulence :

Fluent propose différentes modélisations de l'écoulement turbulent. Parmi lesquelles les écoulements non visqueux, laminaire, turbulents...ect.

**Main Menu > Define > Models > Viscous**



**Figure IV.15 :** *Choix du modèle de turbulence.*

#### IV.2.2.9 Equation d'énergie :

Nous devons résoudre l'équation d'énergie seulement si nous sommes intéressés par la détermination de la distribution de température.

**Main Menu > Define > Models > Energy**

#### IV.2.2.10 Définition les Propriétés des Matériaux :

Les caractéristiques du fluide sont chargées à partir de bibliothèque de données de Fluent.

**Main Menu > Define > Materials**

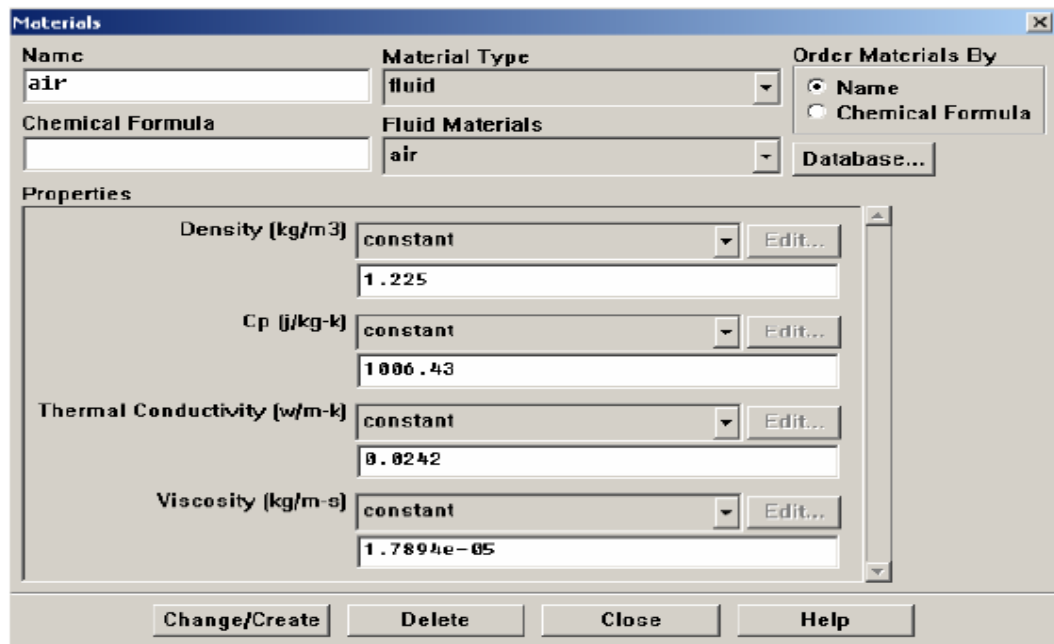


Figure IV.16 : Définition des caractéristiques du fluide.

#### IV.2.2.11 Définition Conditions de fonctionnement :

Pour tous les flux, FLUENT utilise la pression de jauge intérieurement. La pression absolue est nécessaire, c'est produit en ajoutant la pression d'exploitation à la pression de jauge. La relation liant la pression absolue à la <<gauge pressure>> est donnée par :

$$P_{\text{abs}} = P_{\text{op}} + P_{\text{gauge}}$$

#### Main Menu > Define > Operating Conditions

Par défaut Fluent s'affiche 1 atm (101,325 Pa) comme Operating Pressure.

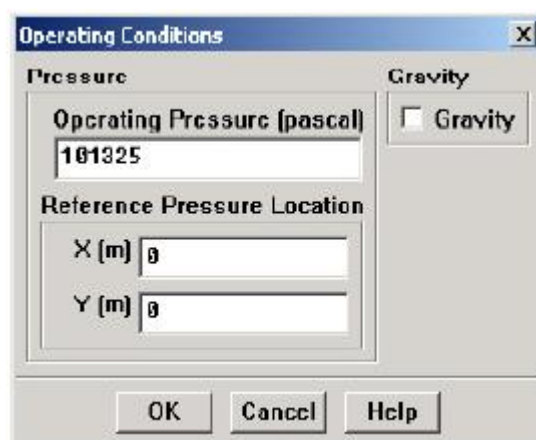


Figure IV.17: Choix de la pression de référence.

**IV.2.2.12 Conditions aux limites:**

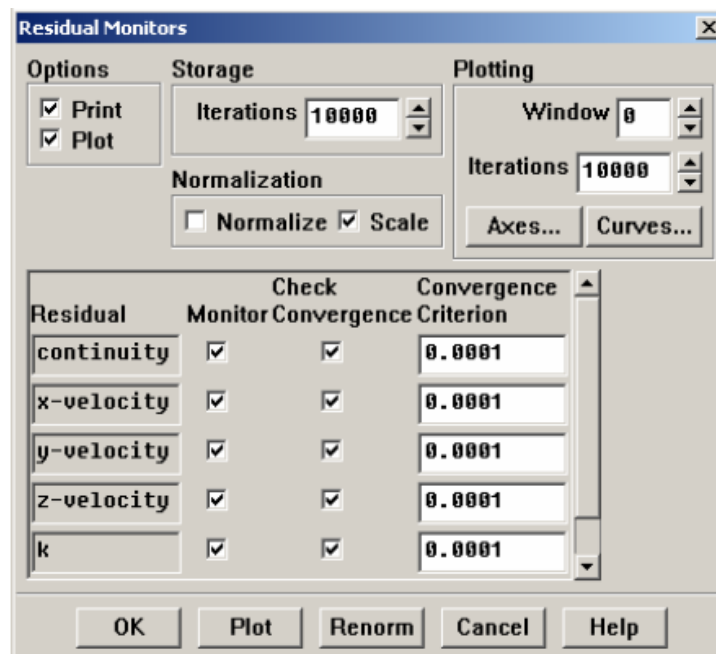
Il faut fixer les valeurs des conditions aux limites.

**Main Menu > Define > Boundary Conditions**

**IV.2.2.13 Critères de Convergence :**

Il s'agit de choisir les critères qui doivent être vérifiés pour que les calculs de la simulation s'arrêtent.

**Main Menu > Solve > Monitors > Residual**



**Figure IV.18:** Critère de convergence.

**IV.2.2.14 Sauvegarde de travail sous fichier \*.CAS :**

**Main Menu > File > Write > Case**

**IV.2.2.15 Itération jusqu'à la Convergence (lancement de la simulation) :**

Dans cette étape on doit choisir le nombre d'itérations que Fluent devra réaliser.

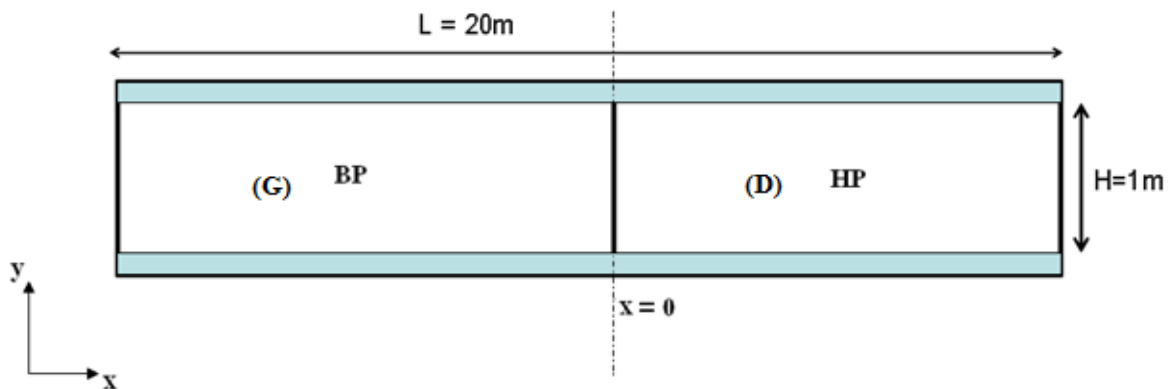
**Main Menu > Solve > Iterate**

**IV.2.2.16 Sauvegarde la solution de données file :**

**Main Menu > File > Write > Data**

### IV.3 Description de la géométrie de la conduite étudiée :

On considère l'air gaz idéal (gaz parfait) est contenu dans un tube, formant une enceinte adiabatique, dans deux états thermodynamiques différents, La partie gauche de la conduite est remplie d'un gaz dans l'état  $(\rho_G, u_G, p_G)$  et la partie droite du même gaz dans l'état  $(\rho_D, u_D, p_D)$ . Les deux parties sont séparées par une membrane (Figure IV.19). Le tube est pris suffisamment long pour éviter les effets de bords (pour éviter la réflexion des ondes sur les parois verticales à gauche et à droite). En fait, la configuration d'écoulement étudiée dans notre cas est quasi unidimensionnelle. Le tube a une longueur de 20 m et un diamètre de 1 m, la membrane est située en  $x=0$  m. L'écoulement dans un tube à choc est purement convectif (les effets visqueux sont négligeables). On cherche à évaluer numériquement l'évolution de ce système au cours du temps. Au temps  $t = 0$ , on enlève la membrane de séparation entre les 2 régions gauche et droite.



**Figure IV.19:** Géométrie de la conduite (domaine d'étude).

#### IV.3.1 Tube à choc pour un gaz parfait :

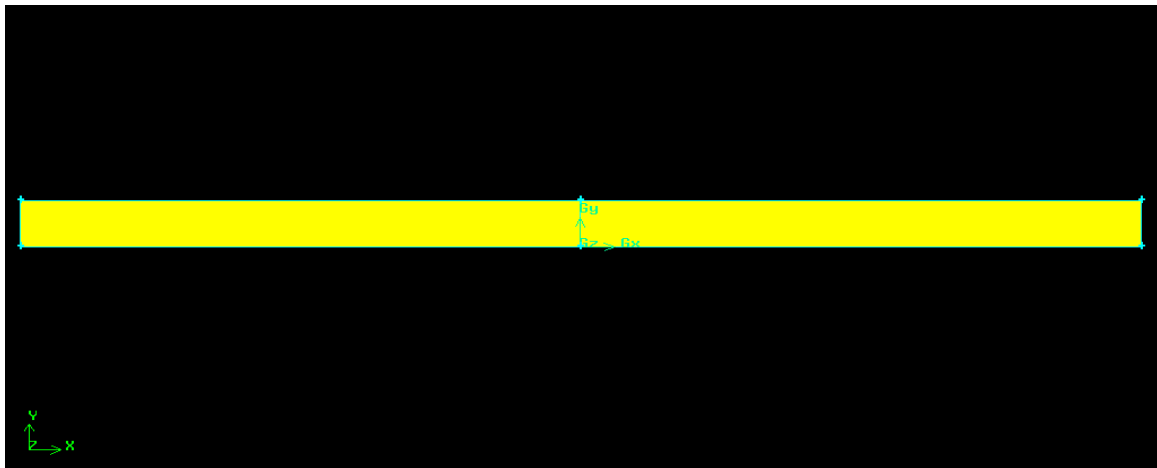
Dans cette section, les propriétés du fluide sont représentées par la loi d'état des gaz parfait i.e. avec des chaleurs spécifiques  $C_p$ ,  $C_v$  supposées constantes, la masse volumique et les autres grandeurs thermodynamiques sont déterminées à l'aide de la loi d'état des gaz parfait (la constante du gaz vaut  $r_g = R/M_w = 297 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  et le rapport des capacités calorifiques  $\gamma = 1,4$ ). Les états initiaux choisis pour la configuration étudiée sont donnés comme suite :

	Etat initial à gauche :	Etat initial à droite:
- La pression(Pa)	$P_G = 100000$	$P_D = 816666.66$
- La densité (loi d'état) ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	$\rho_G = 1$	$\rho_D = 3.53$
- La vitesse ( $\text{ms}^{-1}$ )	$u_G = 1000$	$u_D = 283.33$

## IV.5 Modélisation et mise en œuvre du calcul sous FLUENT

### IV.5.1 Maillage utilisé :

Nous avons utilisé un maillage structuré (les mailles au sein du domaine ont la même forme, le même nombre de mailles voisines). Il présente l'avantage de faciliter la discrétisation spatiale des équations et particulièrement au niveau du lien unidirectionnel entre deux nœuds voisins. Avec 100 éléments dans la longueur et 10 mailles dans la hauteur, la géométrie est réalisée à l'aide de logiciel Gambit est donnée sur la figure IV.20.



**Figure IV.20:** *Géométrie maillée.*

### IV.5.2 Conditions aux limites :

Nous pouvons vérifier que le nombre de Mach supérieur à 0.3, ce qui donne l'écoulement compressible [6].

Cette étape est primordiale car c'est elle qui permet de donner un sens physique à la simulation, ces conditions aux limites doivent être précieusement vérifiées. Fluent récupère ici les parts définies dans Gambit et les types qui y ont été associés.



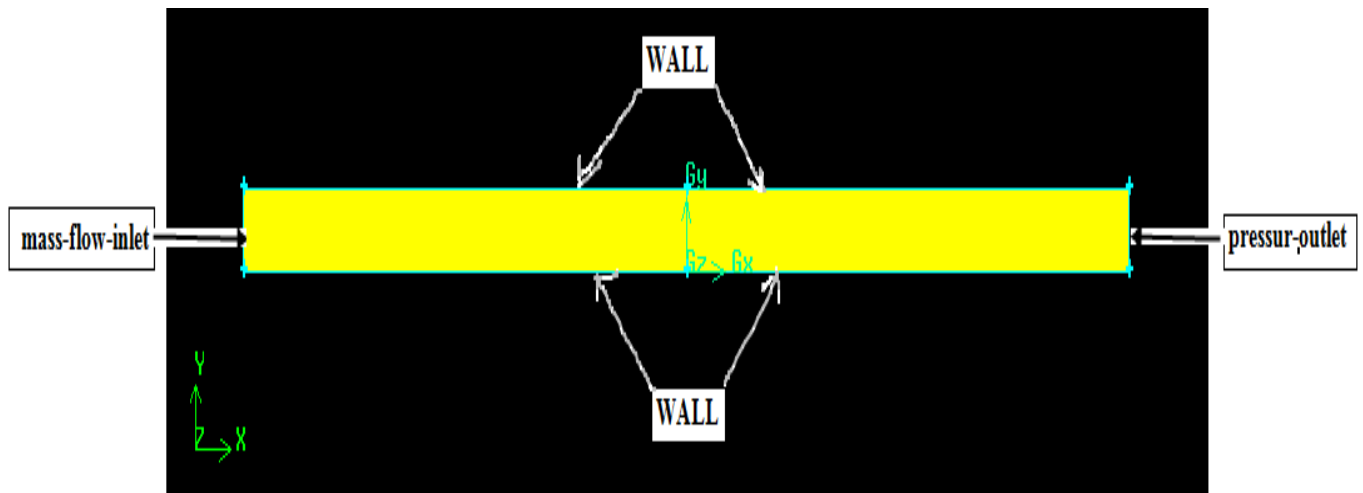


Figure IV.21 : Géométrie avec les conditions aux limites.

## IV.6 Résultats numériques de la simulation :

### IV.6.1 Résultats dans le cas où la membrane n'est pas rompue :

#### IV.6.1.1 Convergence :

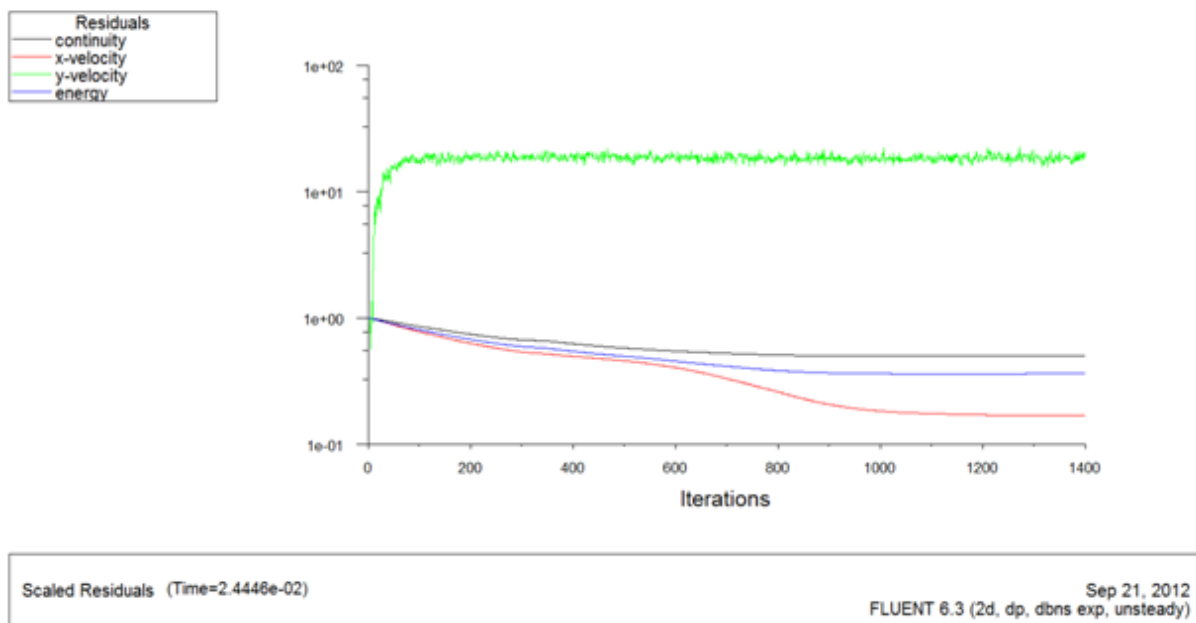
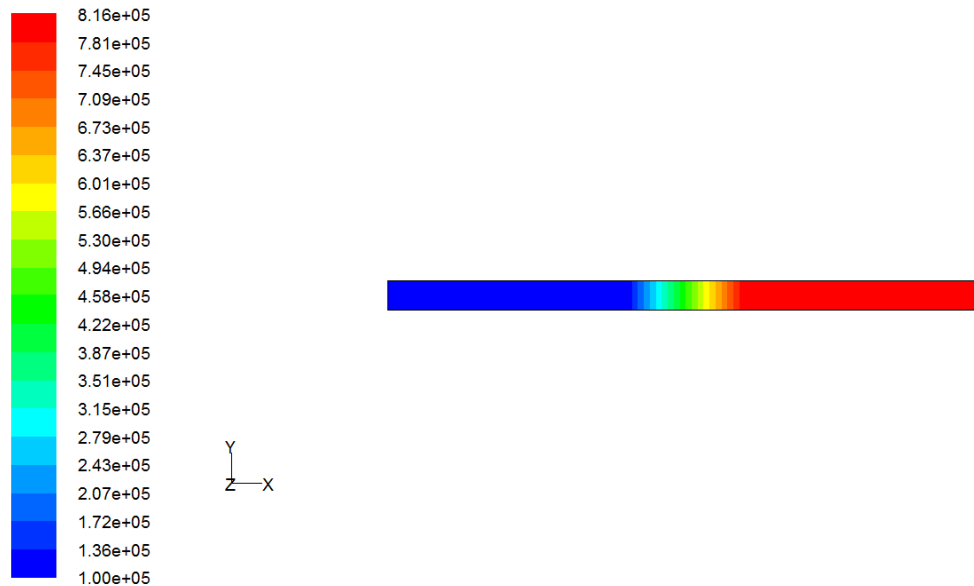
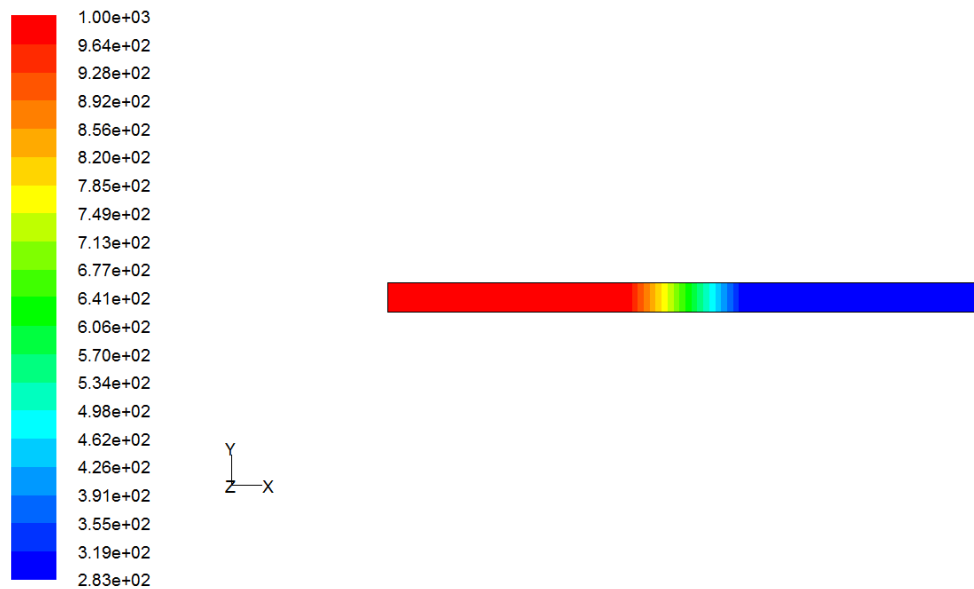


Figure IV.22 : Évolution des résidus.

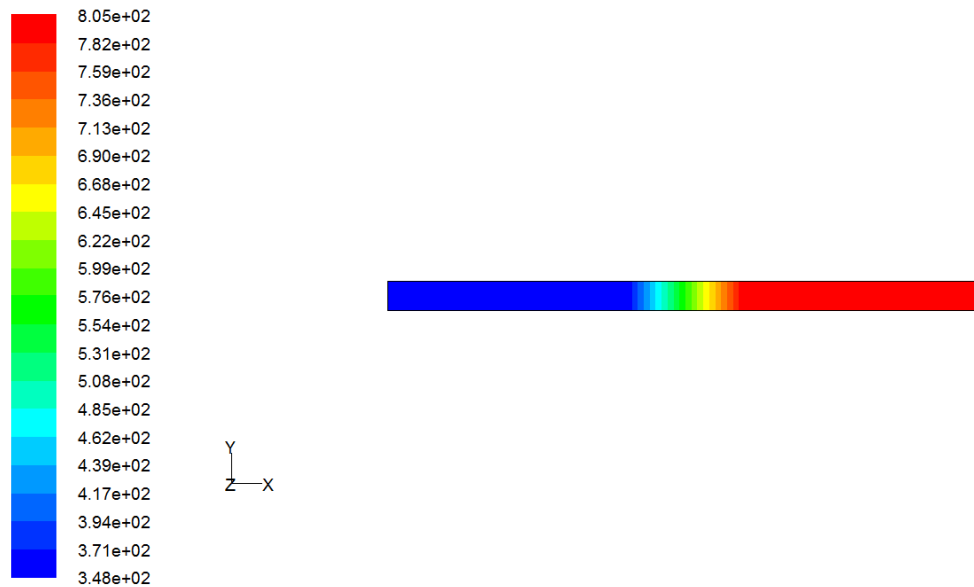
### IV.6.1.2 : Répartition de différentes grandeurs thermodynamique le long de la conduite :



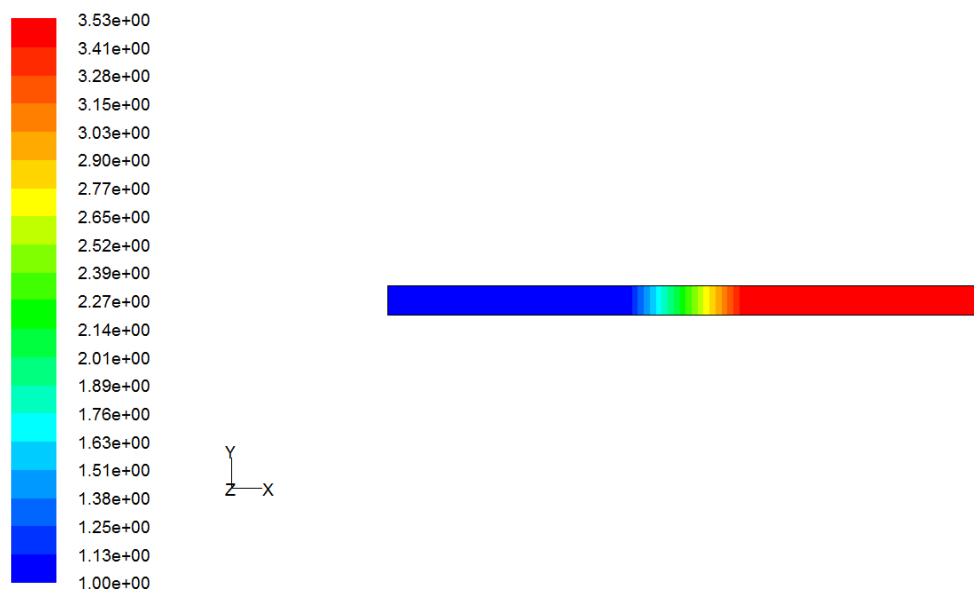
**Figure IV.23 :** *Contour de pression (Pa).*



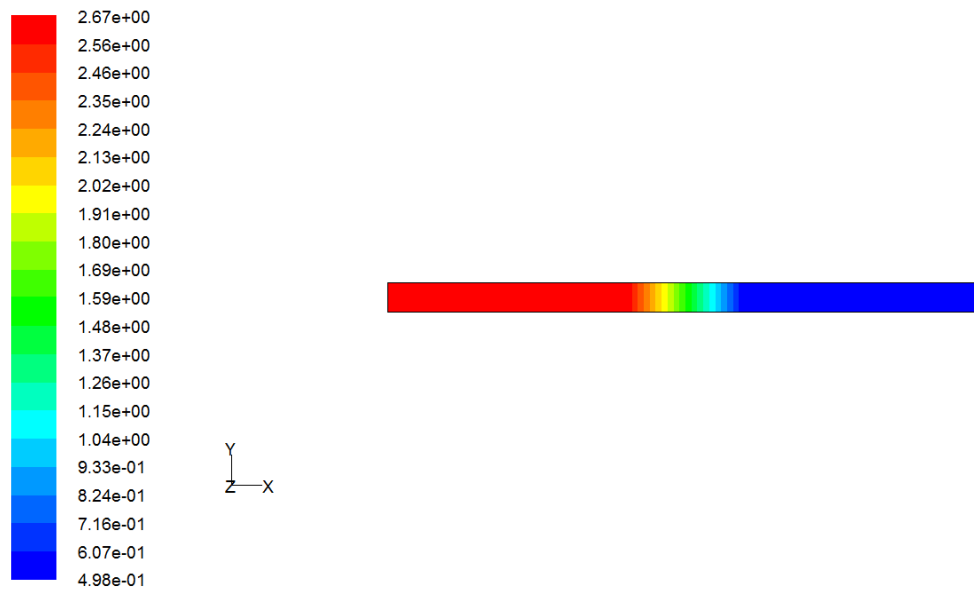
**Figure IV.24 :** *Contour de vitesse (m/s).*



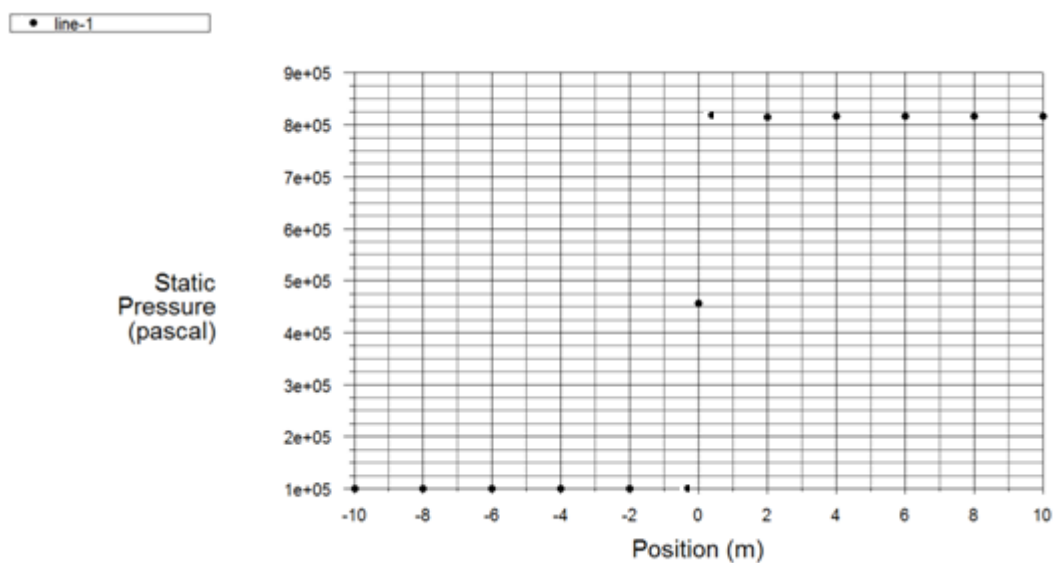
**Figure IV.25 :** *Contour de température ( $k$ )*



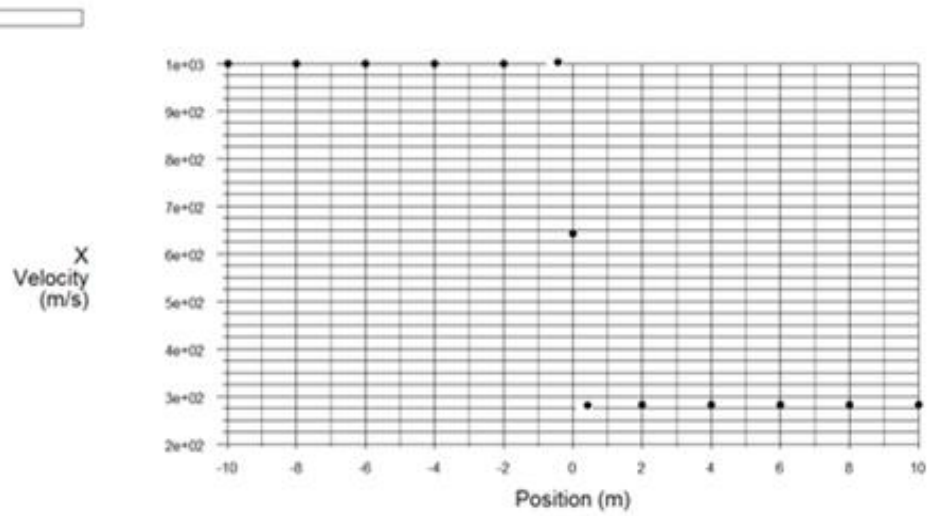
**Figure IV.26 :** *Contour de densité ( $\text{kg/m}^3$ ).*



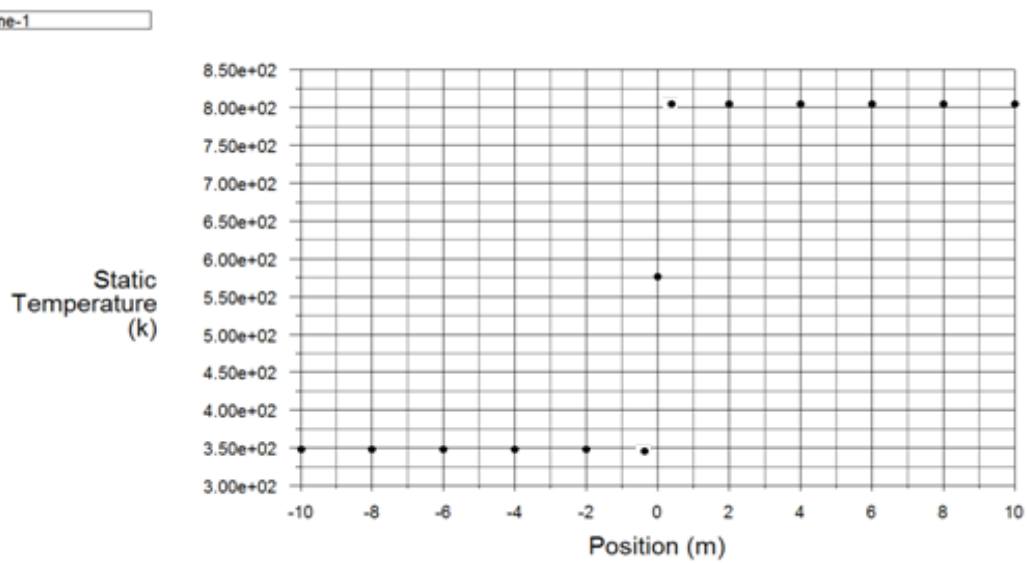
**Figure IV.27 :** *Contour de nombre de Mach.*



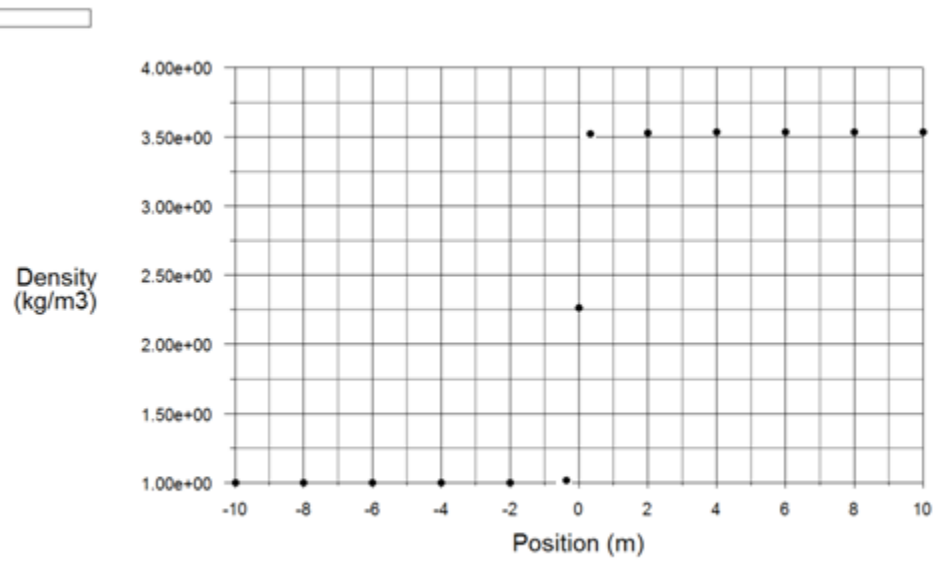
**Figure IV.28 :** *Evaluation de la pression statique le long de la conduite.*



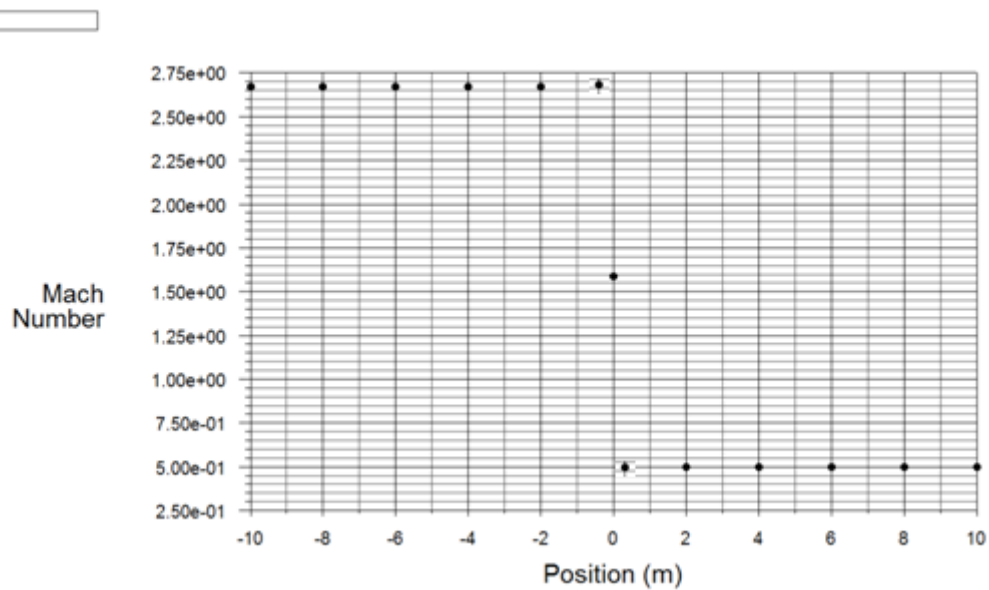
**Figure IV.29 :** *Evaluation de la vitesse le long de la conduite.*



**Figure IV.30 :** *Evaluation de la température le long de la conduite.*



**Figure IV.31 :** *Evaluation de la densité le long de la conduite.*



**Figure IV.32 :** *Evaluation de nombre de Mach le long de la conduite.*

## IV.6.2 Résultats dans le cas où la membrane est rompue :

### IV.6.2.1 Convergence :

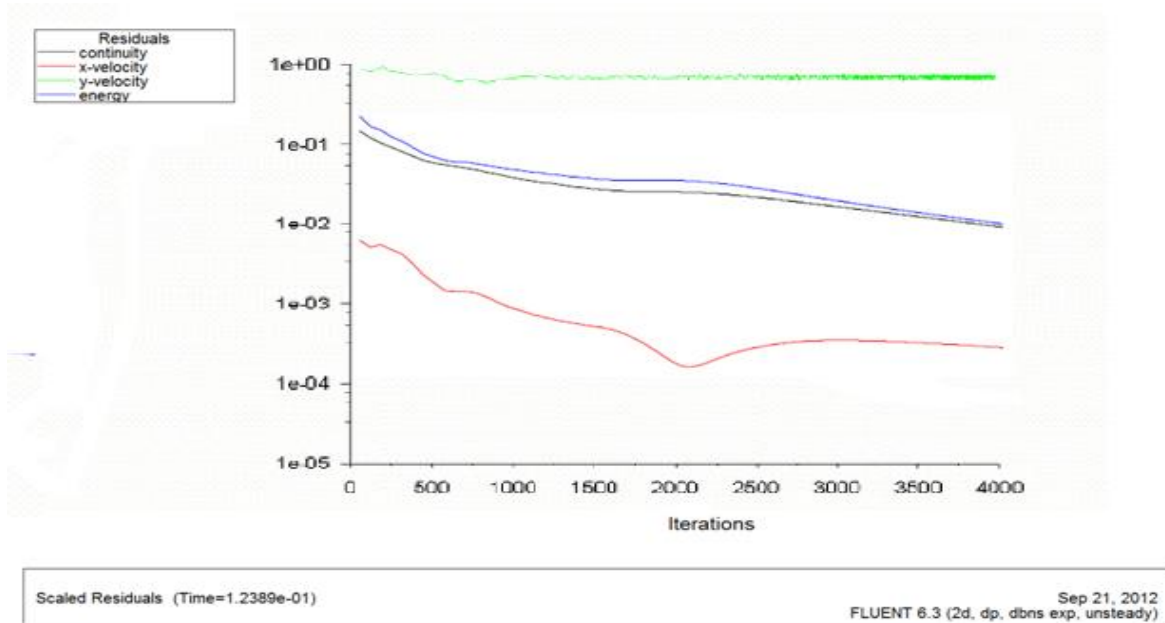


Figure IV.33 : Évolution des résidus.

### IV.6.2.2 Répartition de différentes grandeurs thermodynamique le long de la conduite :

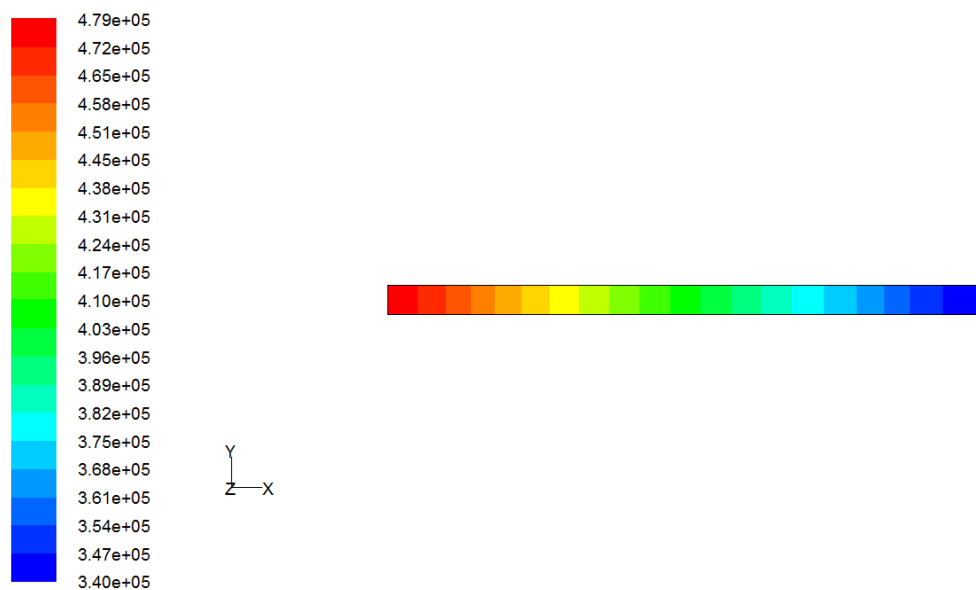
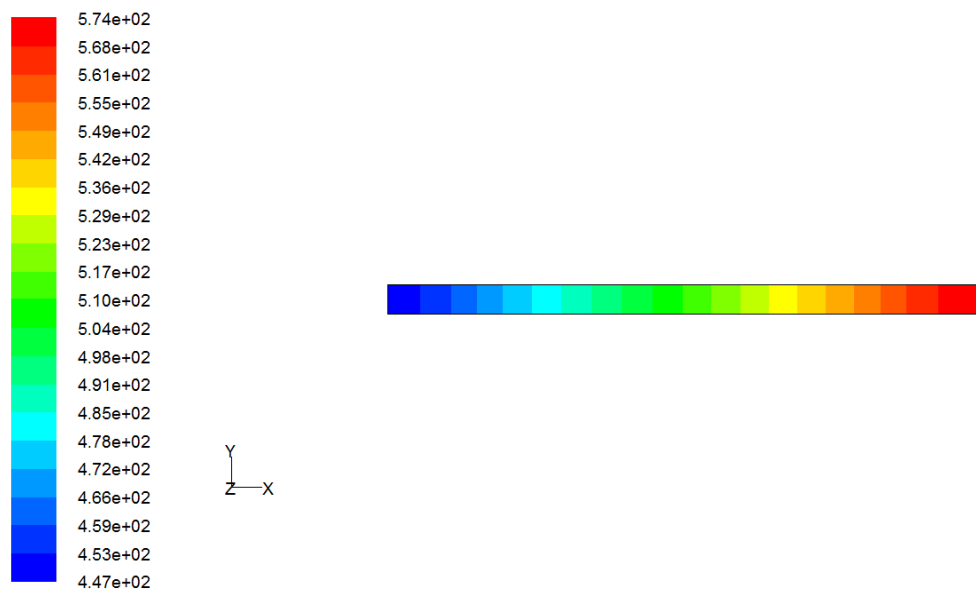
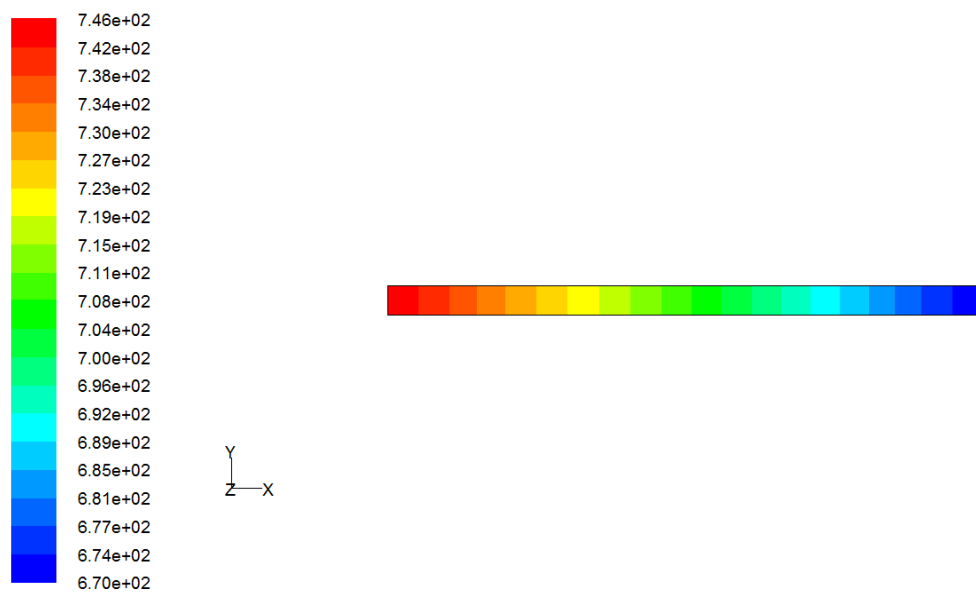


Figure IV.34 : Contour de pression (Pa).

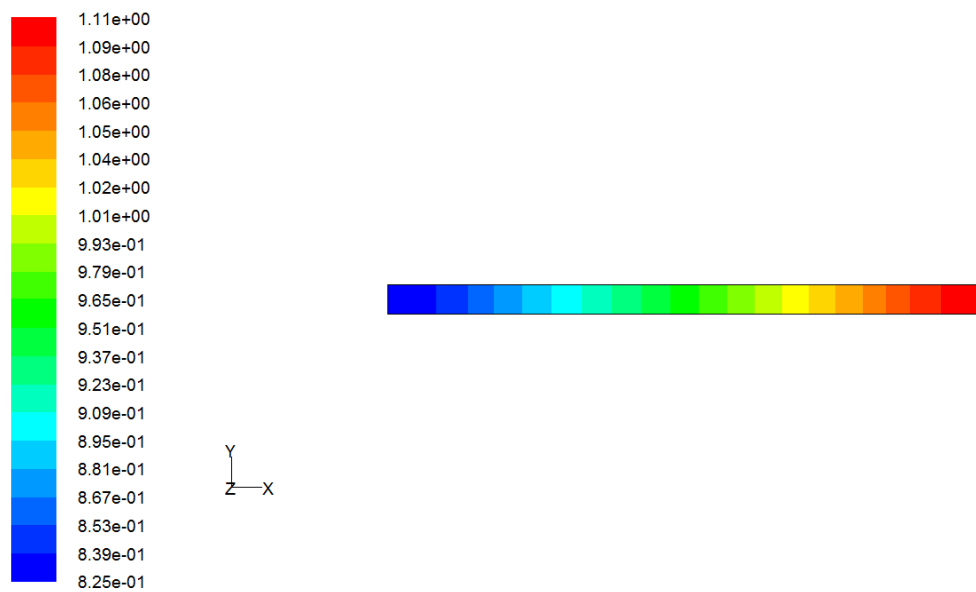


**Figure IV.35 :** *Contour de vitesse (m/s).*

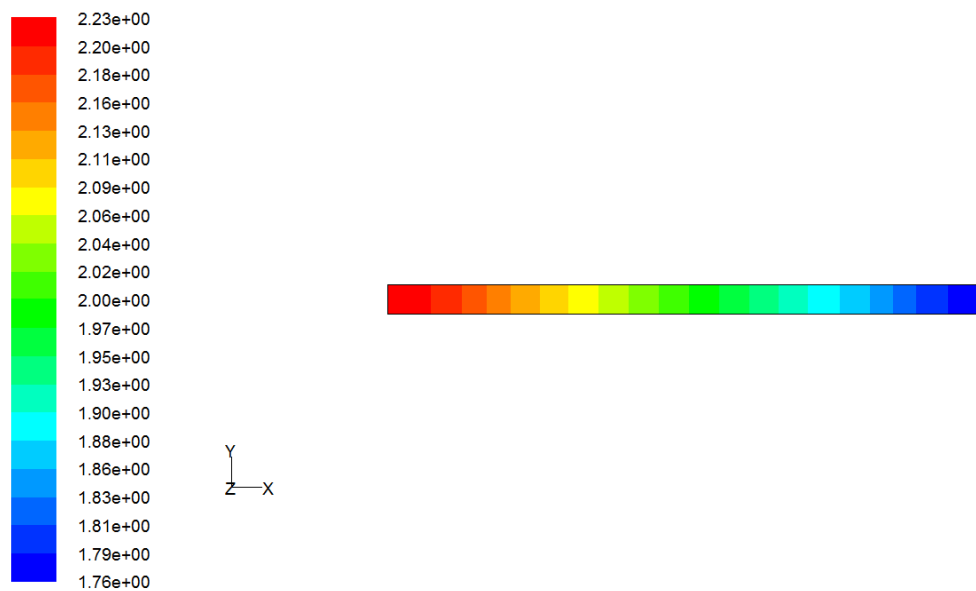


**Figure IV.36 :** *Contour de température (K).*

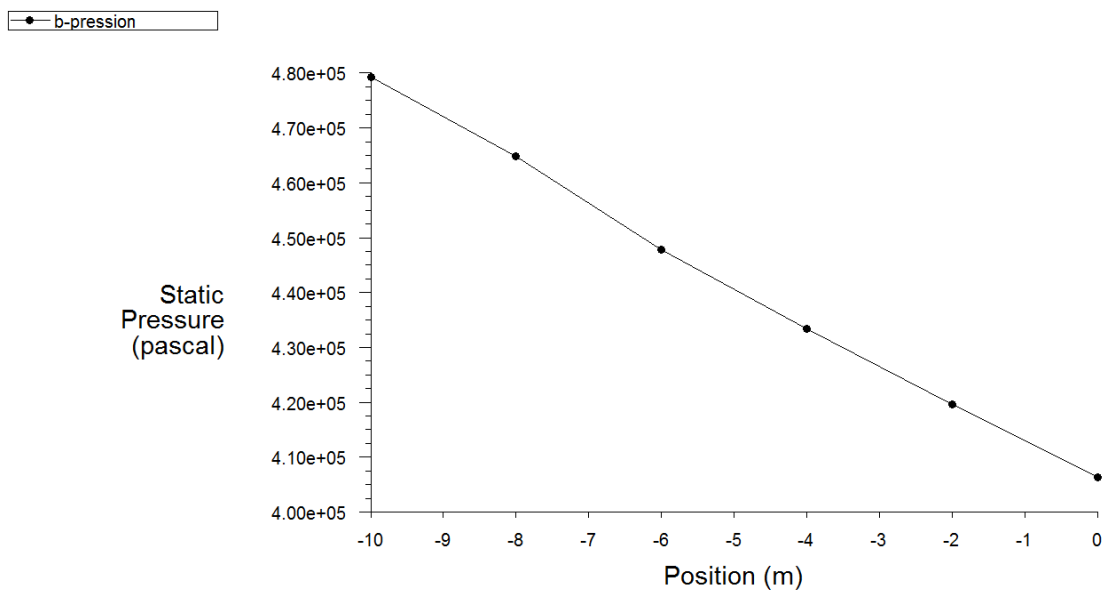




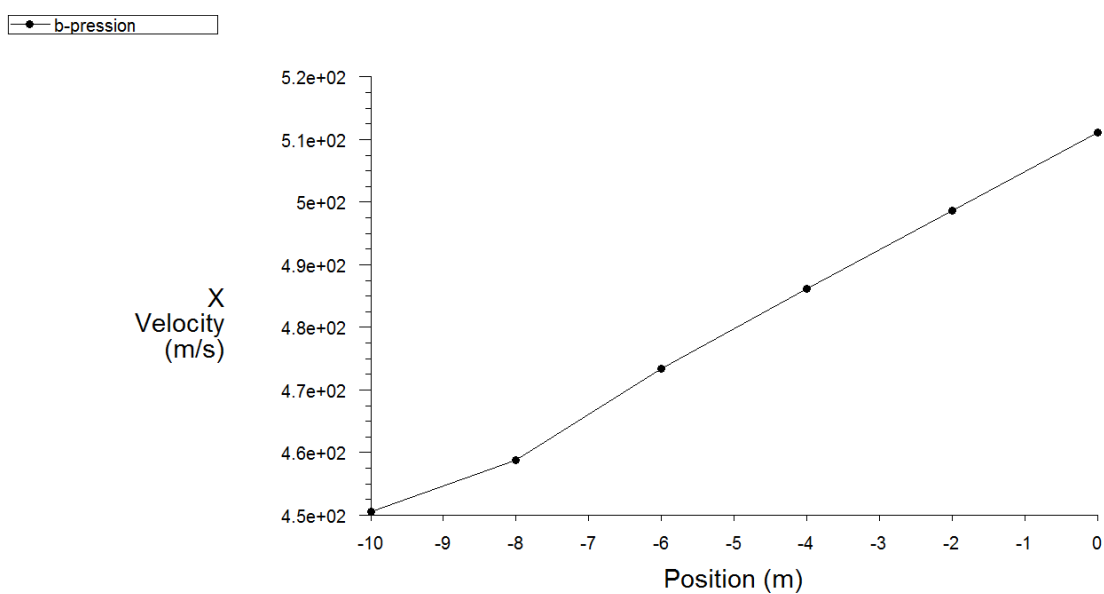
**Figure IV.37 :** *Contour de nombre de Mach.*



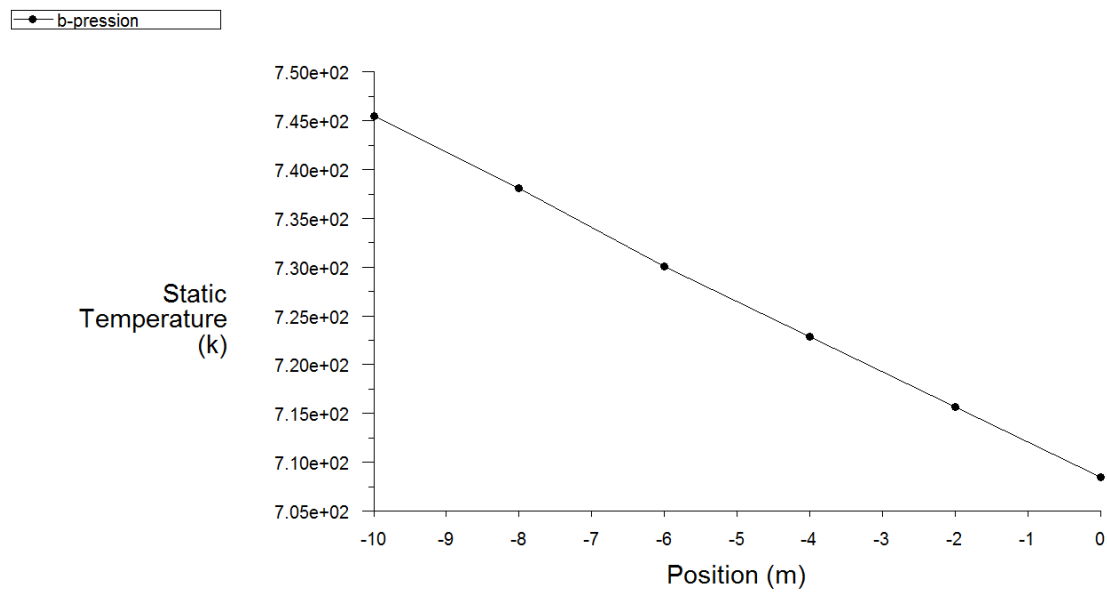
**Figure IV.38 :** *Contour de densité ( $\text{kg/m}^3$ ).*



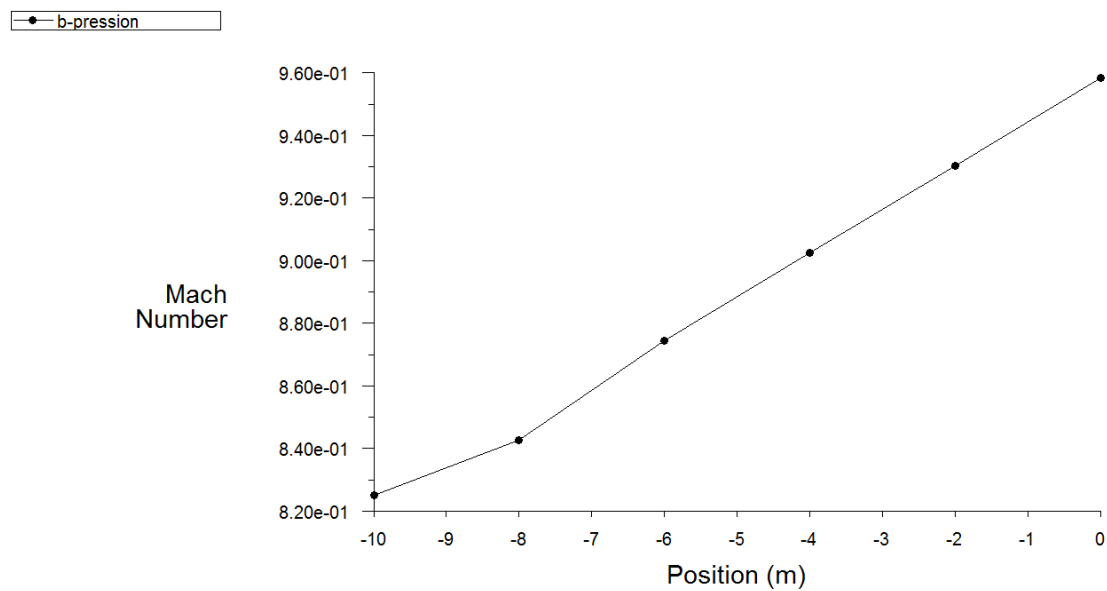
**Figure IV.39 :** *Evaluation de la pression statique dans la partie basse pression de la conduite.*



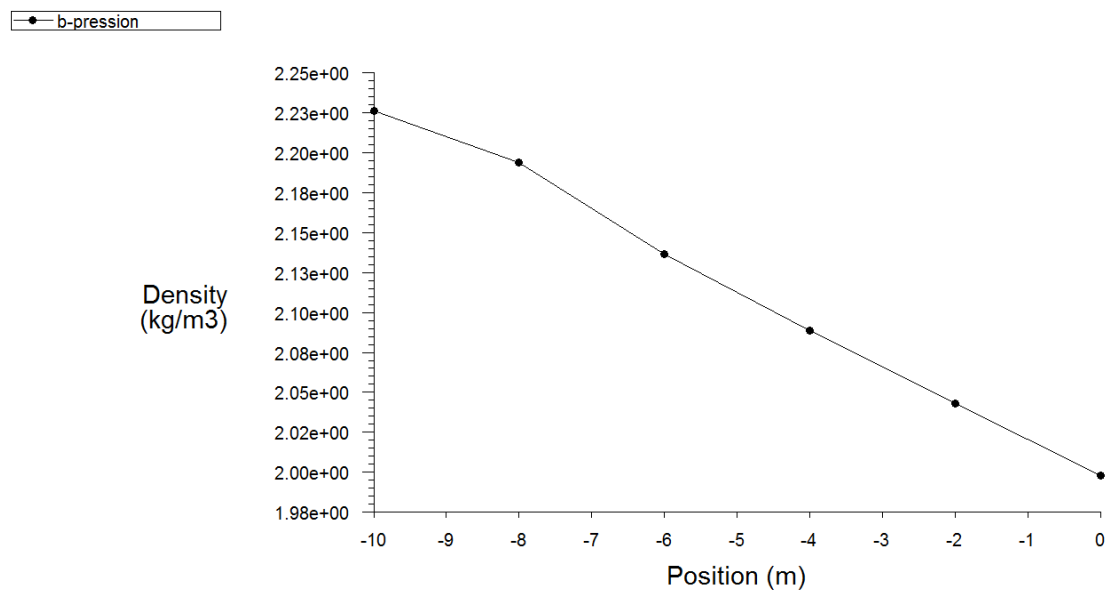
**Figure IV.40 :** *Evaluation de la vitesse dans la partie basse pression de la conduite.*



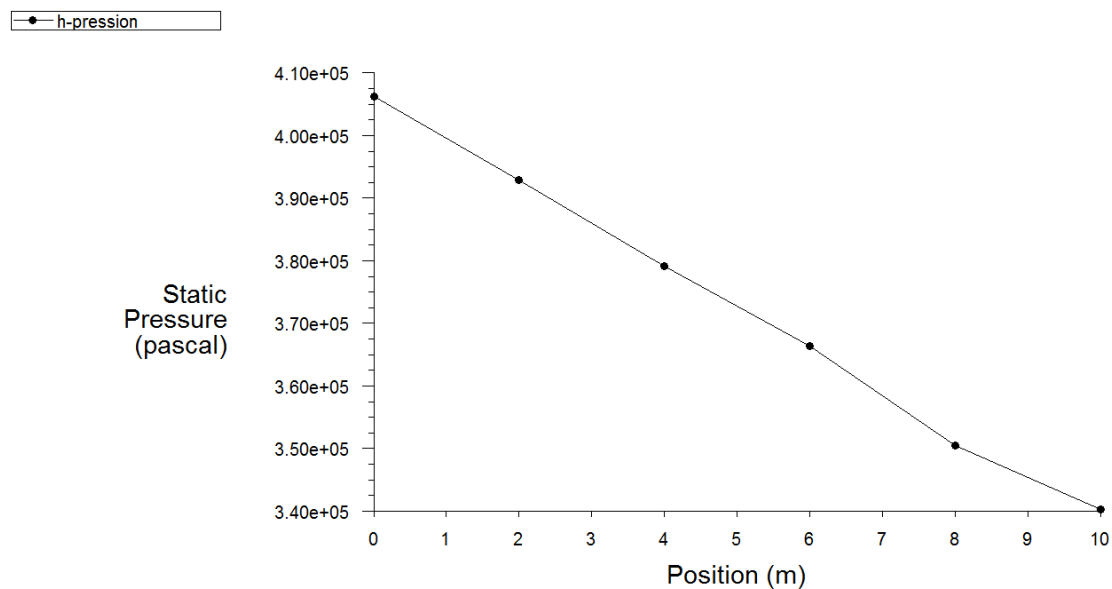
**Figure IV.41 :** *Evaluation de la température statique dans la partie basse pression de la conduite.*



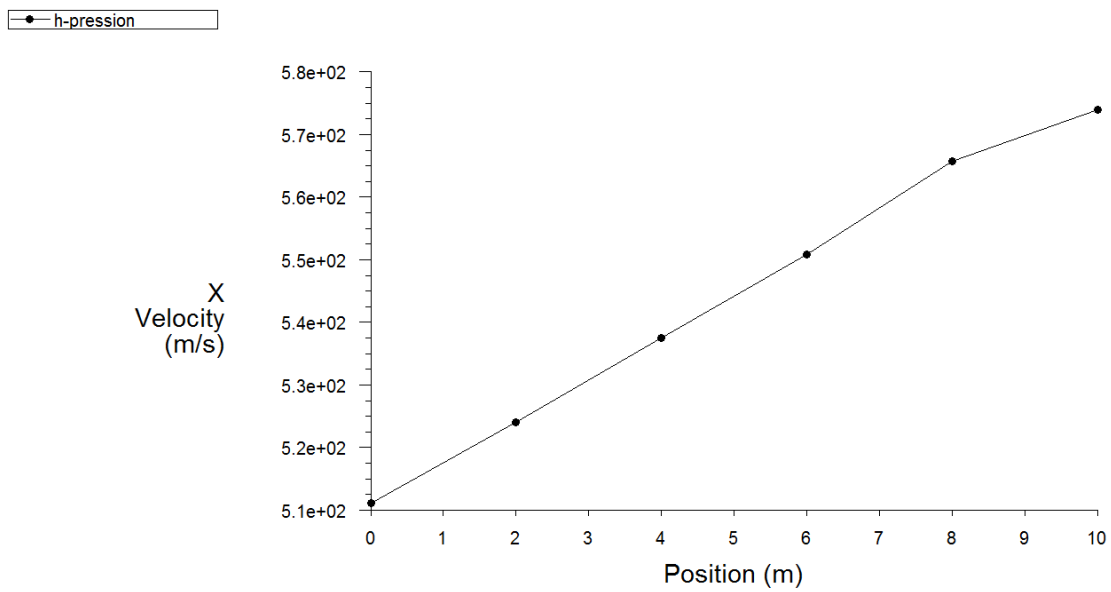
**Figure IV.42 :** *Evaluation de nombre de Mach dans la partie basse pression de la conduite.*



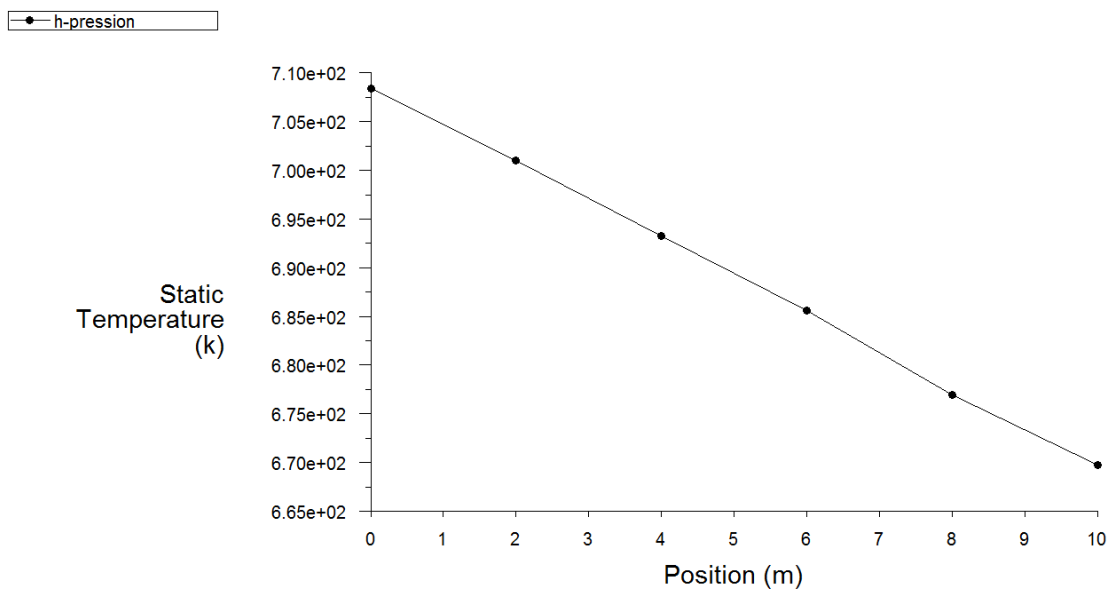
**Figure IV.43 :** *Evaluation de la densité dans la partie basse pression de la conduite.*



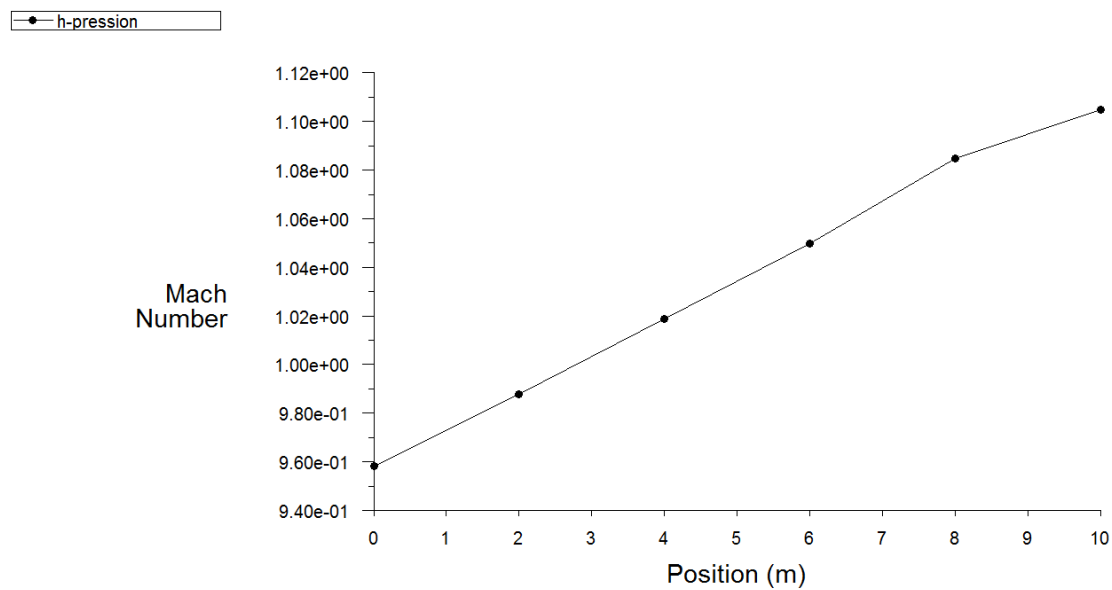
**Figure IV.44 :** *Evaluation de la pression statique dans la partie haute pression de la conduite.*



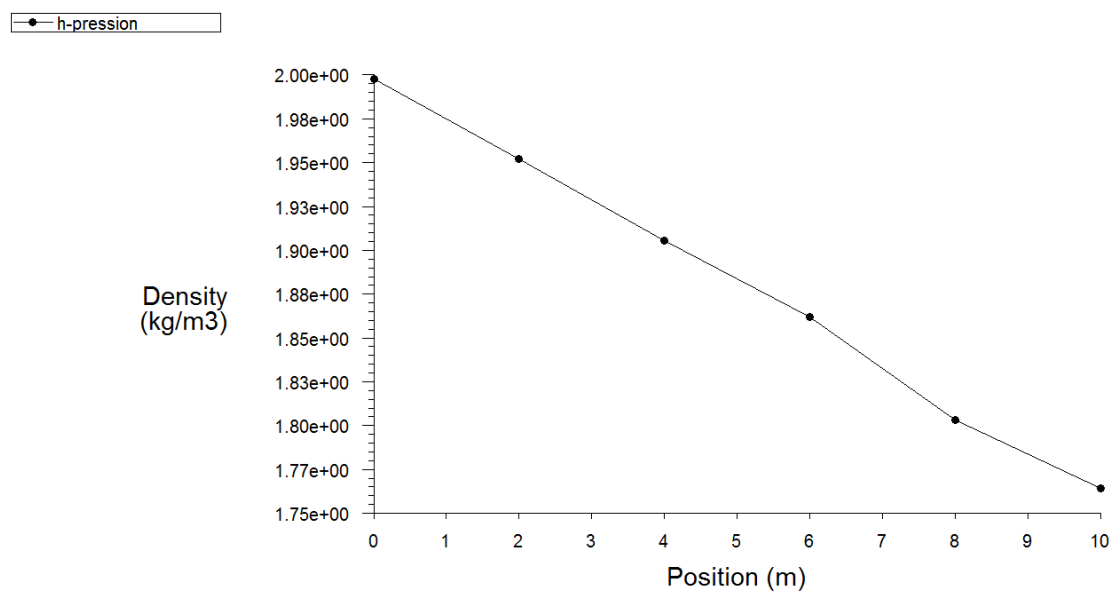
**Figure IV.45 :** *Evaluation de la vitesse dans la partie haute pression de la conduite.*



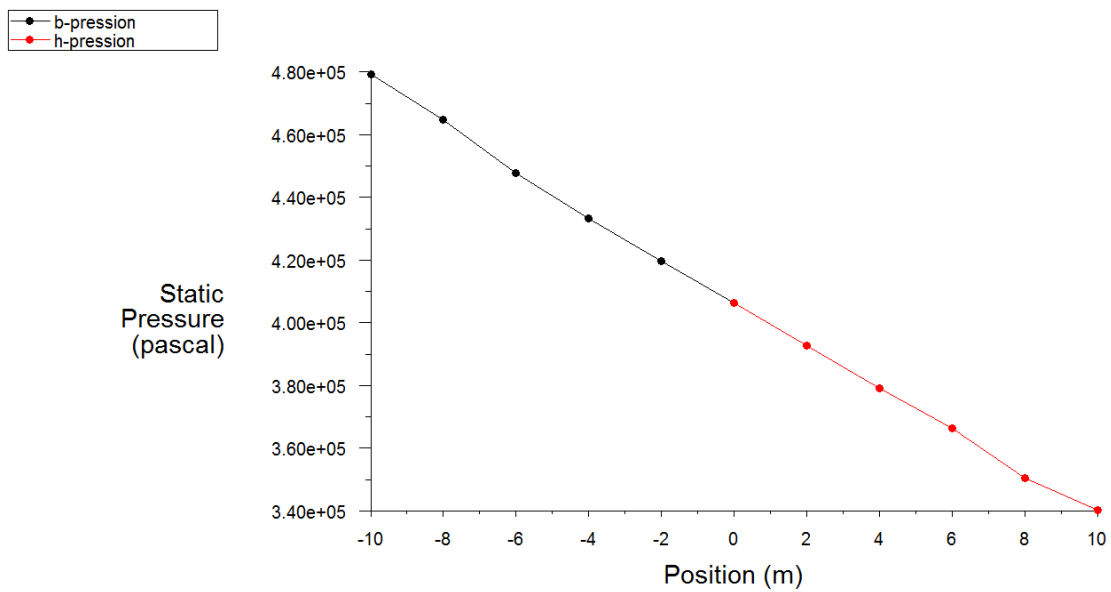
**Figure IV.46 :** *Evaluation de la température statique dans la partie haute pression de la conduite.*



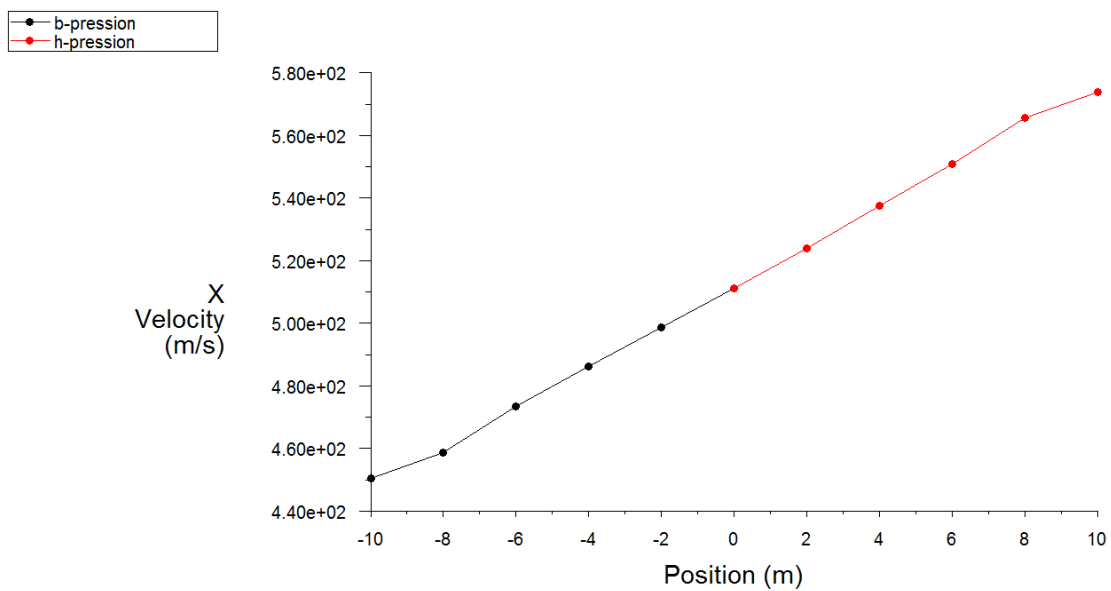
**Figure IV.47 :** *Evaluation de nombre de Mach dans la partie haute pression de la conduite.*



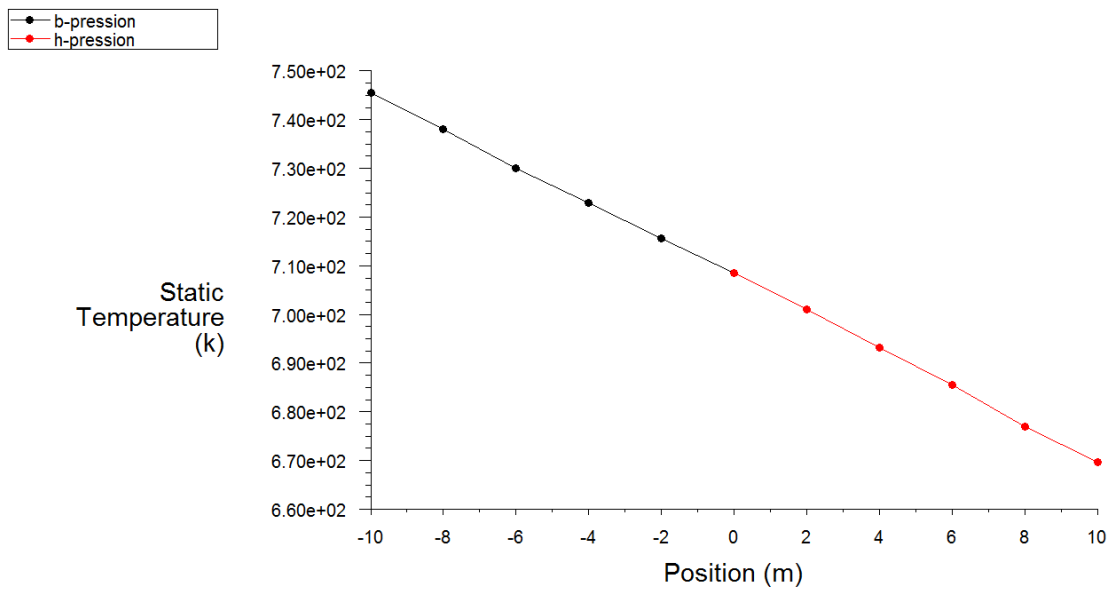
**Figure IV.48:** *Evaluation de la densité dans la partie haute pression de la conduite.*



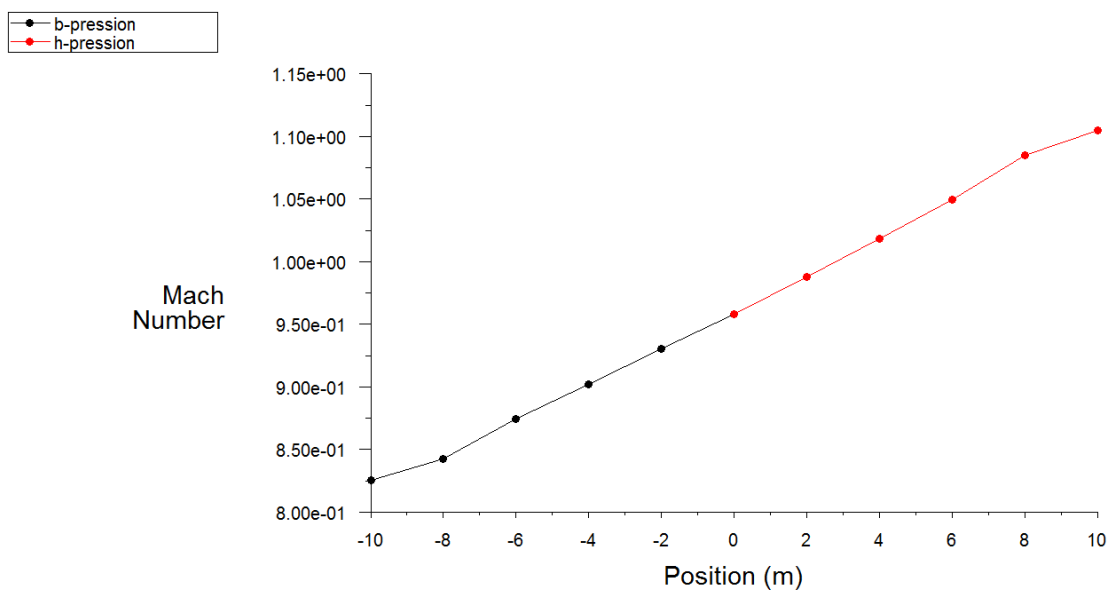
**Figure IV.49 :** *Evaluation de la pression statique le long de la conduite.*



**Figure IV.50 :** *Evaluation de la vitesse le long de la conduite.*

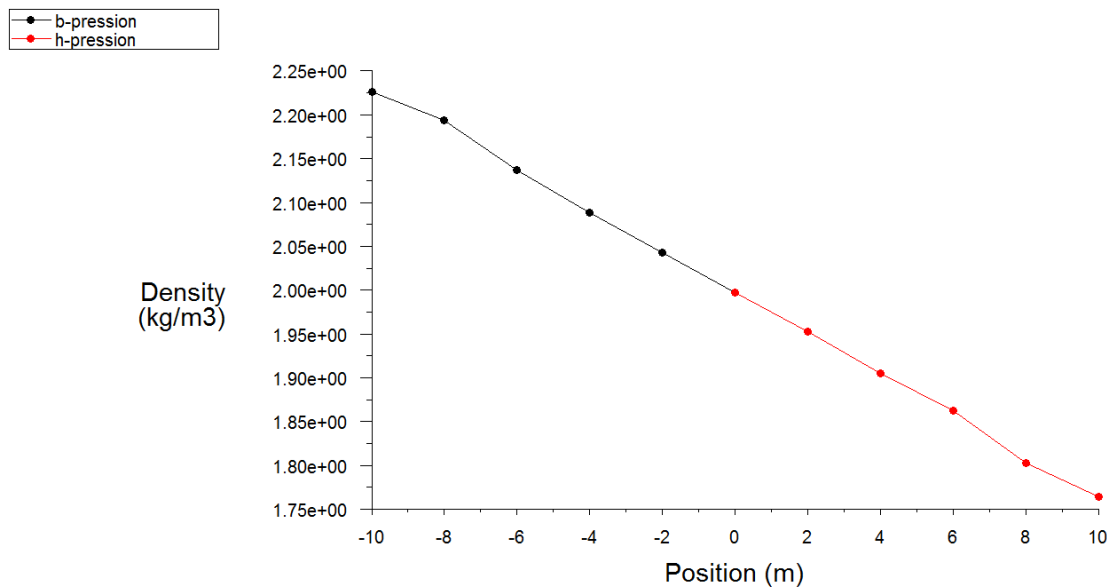


**Figure IV.51 :** *Evaluation de la température statique le long de la conduite.*



**Figure IV.52 :** *Evaluation de nombre de Mach le long de la conduite.*





**Figure IV.53 :** *Evaluation de la densité le long de la conduite.*

## IV.7 Interprétation des résultats numériques :

### IV.7.1 Dans le cas où la membrane n'est pas rompue :

La Figure (IV.22) nous présente l'évolution des résidus au cours des itérations, la convergence est atteinte au bout de 1400 itérations.

On distingue que l'équation de la continuité, la résolution de la vitesse et l'équation d'énergie le long de tube à choc ont un résidu inférieur à  $10^{-1}$  qui se stabilise, la convergence donc est obtenue.

Les figures (IV.23), (IV.24), (IV.25), (IV.26) et (IV.27) montrent que la répartition de la pression, la vitesse, la température et la densité restent les mêmes au cours de temps ( $t=0.024$  s), donc ce sont semblable à l'état initiale.

Les résultats de la simulation nous permettent de bien visualiser que dans le cas où le choc est stationnaire les valeurs de la pression, la vitesse, la température et la densité restent invariable dans les deux parties de tube à choc, basse pression à gauche et haute pression à droite qui sont séparés par un diaphragme respectivement (1 et 8.16 bar), ( $1 \times 10^3$  et  $2.83 \times 10^2$  m/s), ( $3.48 \times 10^2$  et  $8.05 \times 10^2$  K) et (1 et  $3.53$  kg/m<sup>3</sup>), présentées sur les courbes du graphique des figures (IV.28), (IV.29), (IV.30), (IV.31).

**IV.7.2 Dans le cas où la membrane est rompue :**

La même configuration de tube à choc à été étudiée dans les mêmes conditions thermodynamique.

Dans ce cas, suivant la figure (IV.32) on a une allure décroissante des courbes représentées, signe de la convergence.

À l'éclatement de la membrane, au bout 0.12 s les grandeurs suivantes : les pressions, les vitesses, les températures, nombre de Mach et les densités ne sont plus uniformes dans les deux zones de tube à choc, basse pression et haute pression Figures (IV.34), (IV.35), (IV.36), (IV.37) et (IV.38)) en présence d'onde choc instationnaire. Pour les pressions nous avons 4.79 et 3.40 bars aux extrémités Figure (IV.34) (8.16 et 1 bar pour un choc stationnaire). Les vitesses, nous avons une plage de 570 à 447 m/s présentés sur la figure (IV.35) (entre 1000 et 283 m/s lors d'un choc stationnaire).

L'augmentation de la pression dans la basse pression du tube à choc Figure (IV.39) (à gauche de diaphragme Figure (IV.19)) due à une onde de choc crée qui se déplace vers la gauche long du tube, au même temps, on remarque une diminution de la vitesse Figure (IV.40), le nombre de Mach Figure (IV.42) et une augmentation de la température Figure (IV.41) causés par le fait de la compression de gaz de travail.

La détente du gaz dans la chambre à haute pression fait chuter la pression, tel qu'illustré sur la figure (IV.44), ce qui est un rapport direct avec la vitesse et la température où en voit bien que la température diminue Figures (IV.46) et aussi une augmentation de la vitesse, ainsi le nombre de Mach respectivement Figures ((IV.45) et (IV.47)).

### Conclusion

Le présent travail a porté sur la simulation numérique sur les écoulements compressible dans un tube à choc, pour réaliser cette étude la maîtrise de logiciel de simulation Fluent ainsi les techniques de maillage sous Gambit sont essentiel.

Des simulations numériques ont été menées grâce à un modèle d'écoulement monophasique compressible utilisant les différentes lois d'état. On a visé dans notre cas à résoudre le problème du tube à choc qui permet d'étudier l'évolution des grandeurs physique à savoir la pression, la température, la vitesse, la densité ainsi que le nombre de Mach dans le cas d'un choc stationnaire et instationnaire.

Par ailleurs le présent travail nous a permis à connaître la technique de maillage sous Gambit, ainsi que l'apprentissage du code de calcul Fluent.

**Références bibliographiques:**

- [1]- A. Bonnet, Aérodynamique : Théorie de la dynamique des fluides, Editions Cepadues. E.N.S.A.E.Toulouse 1989.
- [2] – S. Candel  
Mécanique des fluides  
Edition DUNOD, Paris.1995
- [3] – J.Gosse  
Mécanique des fluides, Techniques d'ingénieur, 1995
- [4] – R. OUZIAUX/ J. Perrier  
Mécanique des fluides appliqués, Ed DUNOD, 1996
- [5] – Dominique Thévenin  
Etude et analyse des écoulements compressibles, Octobre 2004
- [6] – H. Semai/R. Lekhal  
Résolution par voie théorique du problème des écoulements de fluide barotrope dans un tube à choc, mémoire d'ingénieur, U.M.M.T.O, 2004
- [7] – Alexis Lussier Desbiens  
Conception d'un tube à choc de petit diamètre  
Université de SHEBROOKE, édition Analog Devices, (Québec) Canada, 2002