

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI-OUZOU

Faculté du Génie de la Construction

Département de Génie Mécanique

MEMOIRE DE MAGISTER

En Génie Mécanique

OPTION : Sciences des matériaux

Présenté par: KHOUAS Aziz

THEME:

**Prédiction du comportement visqueux des matériaux
métalliques endommageables**

Devant les membres du jury :

Mr : AZEM Said	Professeur	U.M.M.T-O	President
Mr : OULD OUALI Mohand	Professeur	U.M.M.T-O	Directeur du mémoire
Mr : HALEM Nacer	Professeur	U.M.M.T-O	Examineur
Mr : ASMA Farid	Maître de conférences A	U.M.M.T-O	Examineur

Soutenu, le : 2015

Remerciements

Avant d'entamer mon travail, je tiens à remercier DIEU de m'avoir donné du courage et de la volonté.

*Je tiens à remercier tout d'abord et particulièrement Mr **OULD OUALI Mohand**, encadreur de mon mémoire, pour ses directives et son soutien moral tout au long de la durée de mon travail.*

*J'adresse mes sincères remerciements à toute l'équipe du laboratoire **LECMM** (Laboratoire Elaboration et Caractérisation des Matériaux et Modélisation), plus particulièrement : A Mme **BENCHABANE Nassima**.*

*Je remercie également tous les **membres du jury**, qui vont honorer par leur présence et leur jugement, la soutenance de ce Mémoire.*

*En fin, ma gratitude va à tous les **enseignants** qui ont contribué de près ou de loin à ma formation.*

Dédicaces

Je tiens à dédier ce travail à :

- **Ma chère mère**
- **Mon cher père**
- **Ma chère fiancée**
- **Mes frères, mes sœurs**
- **A tous les professeurs et enseignants qui ont collaboré à ma formation universitaire.**
- **A tous ceux qui m'ont aidé de loin ou de près durant mes études**
- **Tous mes amis et camarades de classe du primaire Au supérieur et exceptionnellement ma promotion.**
- **Tous mes amis.**

Sommaire

Sommaire

Résumé.....	i
Liste des figures	ii
Liste des tableaux	iv
Notations.....	v
Introduction générale.....	1

Chapitre I : Modélisation du comportement plastique endommageables des matériaux ductiles

I.1 Introduction.....	4
I.2 Elasticité, plasticité et viscoplasticité des métaux	5
I.2.1 Généralités sur la formulation des lois élastoplastiques	5
I.2.1.1 Principe de partition des déformations élastiques et plastiques ..	6
I.2.1.2 Définition d'une surface de charge	6
I.2.1.3 Introduction d'un paramètre d'écrouissage	8
a) Ecrouissage isotrope	8
b) Ecrouissage cinématique	9
I.2.1.4 Définition d'une loi d'écoulement.....	10
I.2.2 Lois viscoplastiques à potentiel	10
I.2.2.1 De la plasticité à la viscoplasticité.....	11
I.2.2.2 Partition des déformations élastiques et viscoplastiques.....	12
I.2.3 Les lois de comportement viscoplastiques	13
I.2.3.1 Principes généraux des lois de comportement.....	13
a) Principe de déterminisme.....	13
b) Principe d'objectivité matérielle.....	13
c) Principe d'action locale.....	13
I.2.3.2 Classification des lois de comportement visqueux.....	13
I.3 Approche micromécanique de l'endommagement ductile	15
I.3.1 Mécanismes physiques de l'endommagement ductile.....	16
I.3.2 Modèles mécanique pour l'endommagement ductile	20
I.3.2.1 Modélisation de la germination	20
I.3.2.2 Modélisation de la croissance	21
I.3.2.3 Modélisation de la coalescence.....	23
a) Critère de Rice et Tracey	25

b) Critère de Thomason.....	25
c) Critère de Perrin-Leblond	26
d) Modèle de Tvergaard-Needleman	26
e) Modèle de Benzerga.....	27
I.3.3 Le modèle couplé de Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN).....	28
I.3.3.1 Le critère de plasticité.....	28
I.3.3.2 Loi d'écoulement associée par la normalité	31
I.3.3.3 Loi d'évolution des variables internes	32
I.4 Conclusion	33

Chapitre II : Modélisation numérique

II.1 Introduction	36
II.2 Discrétisation spatiale. Principe des puissances virtuelles.....	36
II.2.1 Position du problème.....	36
II.2.2 Principe des puissances virtuelles P.P.V	38
II.2.3 Méthodes de résolution	40
II.2.3.1 Méthode Statique Implicite (SI).....	40
II.2.3.2 Méthode Dynamique Explicite (DE)	43
II.3 Discrétisation temporelle	44
II.3.1 Intégration implicite : θ -méthode, méthode asymptotique	45
II.3.1.1 θ -méthode.....	45
II.3.1.2 Méthode asymptotique	45
II.4 Implémentation numérique du modèle GTN	46
II.4.1 Algorithme locale d'Aravas	46
II.4.1.1 Prédicteur élastique	48
II.4.1.2 Correction plastique	49
II.4.2 Implémentation du modèle GTN	53
II.4.3 Implémentation du modèle GTN couplé à la viscoplasticité	58
II.5 Conclusion.....	59

Chapitre III : Résultats et discussions

III.1 Introduction.....	59
III.2 Les matériaux étudiés	59
III.2.1 Caractérisation de l'acier TU48C et de l'acier X100	59
III.2.2 Propriétés de l'acier TU48C et de l'acier X100	60
III.3 Les éprouvettes utilisées	61
III.3.1 Eprouvette axisymétrique entaillée (AE).....	61
III.3.2 Eprouvette cylindrique lisse.....	61
III.4 Simulation numérique.....	63

III.4.1	Le calibrage.....	63
III.4.2	Tests sur un élément de volume.....	63
III.4.2.1	Résultats des essais de simulation pour l'élément de volume	64
III.4.3	Etude de maillage.....	66
III.4.3.1	Etude de maillage de l'éprouvette axisymétrique entaillée	67
III.4.3.2	Etude de maillage de l'éprouvette cylindrique lisse	69
III.4.3.3	Discussion des résultats de l'étude de maillage.....	70
III.4.4	Etude de concentration de contraintes	71
III.4.4.1	Etude de la concentration de contraintes de l'éprouvette axisymétrique entaillée	71
III.4.4.2	Etude de concentration de contraintes de l'éprouvette cylindrique lisse.....	73
III.4.4.3	Discussion des résultats de l'étude de concentration de contraintes	74
III.4.5	Résultats et analyses des essais de simulation.....	75
III.4.5.1	Eprouvette axisymétrique entaillée.....	75
III.4.5.2	Eprouvette cylindrique lisse.....	77
III.4.5.3	Discussions des résultats.....	78
III.5	Comparaison des résultats numériques et expérimentaux et discussions.....	78
III.5.1	Résultats obtenus sur une éprouvette axisymétrique entaillée	78
III.5.2	résultats obtenus sur une éprouvette cylindrique lisse.....	79
III.6	Conclusion	80
	Conclusion générale	88
	Bibliographie	84
	Annexes	90

Résumé

L'objet de ce travail est consacré à l'incorporation des effets visqueux dans une loi de comportement élastoplastique avec écrouissage isotrope. Cette étude est développée dans le cadre de l'approche micromécanique de la rupture ductile de l'acier X100 et de l'acier TU48C. Dans un premier temps, nous avons proposée une formulation théorique du couplage plasticité-viscoplasticité afin de caractériser le comportement viscoplastique de ces matériaux aux chargements dynamiques à différentes vitesses. Nous avons alors élaboré une modélisation du comportement de ces matériaux en proposant une extension du modèle micromécanique GTN (Gurson, Tvergaard et Needleman), Nous avons aussi inclus l'effet de la viscosité à différentes vitesses. Ce modèle a été implémenté dans le code de calcul Abaqus en utilisant la subroutine utilisateur Vumat (Vectorized user material), pour ce faire nous avons proposé un algorithme d'Aravas pour la résolution incrémental des problèmes non-linéaire. Puis, nous avons réalisé des simulations numériques de validation pour faire une comparaison avec des résultats expérimentaux.

Mots-clés : Métaux. Implémentation numérique. Simulation. Effets visqueux.

Liste des figures

Chapitre I

Figure.I.1 Evolution de la surface de charge dans l'espace des contraintes principales pour un matériau présentant des propriétés d'écrouissage.....	7
Figure.I.2 Représentation de l'écrouissage isotrope en projection a) dans le plan déviatoire, b) dans le plan $\sigma_{axiale} - \varepsilon_{axiale}$ en traction-compression simple	8
Figure.I.3 Représentation de l'écrouissage cinématique en projection a) dans le plan déviatoire, b) dans le plan $\sigma_{axiale} - \varepsilon_{axiale}$ en traction-compression simple	9
Figure.I.4 Définition du domaine viscoplastique	11
Figure.I.5 Faciès de rupture ductile d'un aluminium	17
Figure.I.6 Formation de microcavités dans un aluminium 6061 renforcé par des particules de Al ₂ O ₃ . La charge est horizontale. (a) Décohésion; (b) rupture de la particule	17
Figure.I.7 Schématisation du mécanisme de germination des cavités	18
Figure.I.8 Croissance des cavités.....	18
Figure.I.9 Fin du stade de coalescence conduisant à la rupture totale de VER.....	19
Figure.I.10 : Cycle d'endommagement par rupture ductile durant un essai de traction	19
Figure.I.11 Différents modes de coalescence observés par Benzerga (2000)	24
Figure.I.12 Graphe de la fonction $f^*(f)$	27
Figure.I.13 Représentation du critère de Gurson pour diverses valeurs de la porosité f dans l'espace de contrainte normalisée $(\Sigma_m/\sigma_0, \Sigma_{eq}/\sigma_0)$	29

Chapitre II

Figure.II.1 Schématisation d'un problème mécanique.....	36
Figure.II.2 Interprétation Géométrique de l'algorithme en arrière d'Euler dans l'espace de contrainte	48

Figure.II.3 Le schéma d'intégration local d'Aravas.....	51
Figure.II.4 Organigramme de l'implémentation du modèle GTN	55

Chapitre III

Figure.III.1 Géométrie d'une éprouvette axisymétrique entaillée	61
Figure.III.2 Succession d'événements observée sur une éprouvette axisymétrique lisse en traction.....	62
Figure.III.3 Caractéristiques géométriques de l'éprouvette cylindrique lisse.....	62
Figure.III.4 Conditions de chargement d'un élément de volume.....	64
Figure.III.5 Un élément de volume sous chargement (X100).....	64
Figure.III.6 Courbe contrainte-déplacement pour l'élément de volume (X100)	65
Figure.III.7 Un élément de volume sous chargement (TU48C).....	65
Figure.III.8 Courbe contrainte-déplacement pour l'élément de volume (TU48C)	66
Figure.III.9 Éprouvettes axisymétrique entaillées : conditions aux limites et chargement utilisés dans la simulation	67
Figure.III.10 Différents maillage de l'éprouvette axisymétrique entaillée	68
Figure.III.11 Les courbes contrainte/déformation pour différents de nombre d'éléments de mailles.....	68
Figure.III.12 Éprouvettes cylindrique lisse : conditions aux limites et chargement utilisés dans la simulation.....	69
Figure.III.13 Différents maillage de l'éprouvette cylindrique lisse.....	70
Figure.III.14 Les courbe contrainte/déformation pour différents de nombre d'éléments de mailles.....	70
Figure.III.15 Différents coefficients de concentration de contraintes de l'éprouvette axisymétrique entaillée	72
Figure.III.16 Courbe contrainte/déformation pour différentes coefficients de concentration de contraintes	72
Figure.III.17 Différents coefficients de concentration de contraintes de l'éprouvette cylindrique lisse	73

Figure.III.18 Courbe contrainte/déformation pour différents coefficients de concentration de contraintes	74
Figure.III.19 ¼ d'éprouvette AE maillée a) avant chargement b) après chargement	75
Figure.III.20 Variations de la contrainte nominale $\sigma = \frac{F}{S}$ en fonction de la réduction nominale de rayon $\frac{\Delta R}{R_0}$ de l'éprouvette axisymétrique entaillée.....	76
Figure.III.21 Variations de la contrainte nominale $\sigma = \frac{F}{S}$ en fonction de la déformation nominale $\varepsilon = \frac{u}{l_0}$ de l'éprouvette axisymétrique entaillée.....	76
Figure.III.22 ¼ d'éprouvette lisse maillée a) avant chargement b) après chargement	77
Figure.III.23 Variations de la contrainte nominale $\sigma = \frac{F}{S}$ en fonction de la déformation nominale $\varepsilon = \frac{u}{l_0}$ de l'éprouvette cylindrique lisse.....	77
Figure.III.24 Courbe contrainte/déformation simulation et expérimentale de l'éprouvette axisymétrique entaillée.....	79
Figure.III.25 Courbe contrainte/déformation simulation et expérimentale de l'éprouvette cylindrique lisse.....	80

Liste des tableaux

Chapitre I

Tableau.I.1 Configurations rencontrées dans le cadre d'une modélisation élastoplastique.....	7
---	---

Chapitre III

Tableau.III.1 Composition en % massique de l'acier TU48C	60
Tableau.III.2 Composition en % Massique de l'acier X100.....	60

Notations

ε_{ij}	Le terme du tenseur de déformations totales
ε_{ij}^e	Le terme du tenseur de déformations élastiques
ε_{ij}^p	Le terme du tenseur de déformations plastiques
ε_{ij}^{vp}	Le terme du tenseur de déformations viscoplastiques.
$d\boldsymbol{\varepsilon}$	Vitesse de la déformation totale
$d\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Vitesse de la déformation élastique
$d\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Vitesse de la déformation plastique
$\boldsymbol{\sigma}$	Contrainte de cauchy
\mathbf{C}^e	La matrice des modules élastique
q	Contrainte équivalente
p	Contrainte l'hydrostatique
H^α	Ensemble de variables d'état
\mathbf{I}	Tenseur d'identité du second ordre
\mathbf{s}	Contrainte déviatorique
Φ	Fonction de rendement
Λ	Scalaire positive
g	Potentiel d'écoulement
G	Le module de cisaillement
K	Coefficient d'incompressibilité
δ_{ij}	Symbole de Kronecker.
σ^e	Prédicteur élastique
t	Temps au début de l'incrément
$t+\Delta t$	Temps à la fin de l'incrément
Σ_m	Contrainte hydrostatique
Σ_{eq}	Contrainte équivalente
f	Porosité
σ_0	Limite d'écoulement
$\bar{\sigma}$	Contrainte équivalente d'écoulement
f^*	Porosité effective
E	Module de Young
ν	Coefficient de Poisson
n	Coefficient d'écrouissage
f_0	Porosité initiale
q_1, q_2 et q_3	Paramètres de Tvergaard
ε_N, s_N et f_N	Paramètres de nucléation de nouvelles cavités pilotée par la déformation plastique équivalente dans la matrice

f_c	Porosité de début de coalescence
Σ	Tenseur des contraintes macroscopiques
$\bar{\varepsilon}^p$	La déformation plastique équivalente dans la matrice
f_f	Porosité de la rupture

Introduction générale

Introduction générale

De nos jours les besoins industriels dans des domaines très diversifiés tels que l'aéronautique, le nucléaire et l'automobile imposent des contraintes et des performances de plus en plus élevées afin de diminuer les coûts de fabrication et d'augmenter la fiabilité des pièces. La maîtrise de la prévision du comportement et de la rupture des structures mécaniques est devenue primordiale. Pour cette raison la modélisation numérique occupe une place prépondérante dans certains domaines de l'industrie.

Les pluparts des métaux présentent des porosités allant de 10% pour les métaux frittés à environ 0.01% pour les aciers. La rupture ductile est le mode prédominant de rupture de ces métaux à température ambiante et moyennement élevées. Les modèles employés pour modéliser un matériau non poreux, de type Von Mises, prévoient une résistance infinie pour un chargement purement hydrostatique, ce qui n'est pas réaliste. Les critères spécifiques applicables aux matériaux poreux sont venus combler cette lacune. Le critère le plus utilisé est celui proposé par Gurson (1977) qu'a prouvé sa pertinence dans plusieurs cas de chargements.

Le modèle de Gurson a subi plusieurs extensions, Tvergaard et Needleman ont pris en compte les interactions entre les cavités et introduit un modèle de coalescence, Gologanu, Leblond et Devaux ont incorporé l'effet de la forme des cavités. Pardoën et Hutchinson ont ajouté un paramètre de distance inter-cavités, permettant de prévoir le début de la coalescence. Ces modèles tiennent aussi compte de paramètres tels que l'écroutissage de la matrice, la nucléation des cavités et la coalescence, les effets d'interactions et de taille des cavités. Nous proposons dans ce travail de magister d'inclure dans le modèle GTN les effets visqueux afin de rendre compte de l'influence de la vitesse de chargement sur la réponse du matériau. Une fois le modèle formulé, il sera implémenté dans le code de calcul Abaqus en utilisant l'algorithme d'Aravas.

Ce travail s'articule essentiellement sur trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à une présentation d'un état de l'art de l'approche local de la rupture ductile en abordant les différents mécanismes physiques qui la gouvernent. Ces mécanismes sont présentés à l'échelle microscopique afin de mettre en évidence les phases d'amorçage, de croissance et de coalescence des cavités. Plusieurs modèles consacrés à la description de ces phases ont été abordés. Une description du modèle GTN ainsi que ces extensions ont été décrites. L'objectif de ce chapitre est de présenter les différentes lois de comportement viscoplastiques ainsi que ses aspects, une étude du principe de base de l'élastoplasticité a été présentée.

Le deuxième chapitre est dédié aux aspects numériques associés au modèle couplé. Dans un premier temps, on rappelle la formulation variationnelle basée sur le principe des puissances virtuelles (PPV) d'un problème mécanique ainsi que sa discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis (MEF). La résolution du système algébrique global se fait par deux schémas : le schéma Statique Implicite (SI) et le schéma Dynamique Explicite (DE). Nous décrivons ensuite la procédure suivie pour l'implémentation du modèle GTN dans le code de calcul Abaqus/explicit en utilisant le schéma d'intégration local proposé par Aravas. Ce chapitre est consacré à l'implémentation du modèle GTN couplé à la viscoplasticité.

Le troisième chapitre est consacré au regroupement des résultats expérimentaux et numériques. L'algorithme d'Aravas a été étendu pour prendre en compte les effets visqueux. Le modèle est validé sur des simulations numériques de l'éprouvette en traction. Deux types d'éprouvettes utilisées (éprouvette axisymétrique entaillée et cylindrique lisse). Afin de comparer entre les prédictions numériques avec les résultats expérimentaux.

Et en fin on termine notre travail par une conclusion générale.

Chapitre I

**Modélisation du comportement plastique
endommageables des matériaux ductiles**

I.1 Introduction

Avant qu'ils ne se rompent, les matériaux sont le siège d'endommagements, sources de dégradations continues de leurs propriétés mécaniques. Mieux maîtriser ces endommagements constitue pour les chercheurs et les industriels concernés un objectif essentiel. Généralement, la mécanique de la rupture des matériaux se subdivise en deux disciplines qui sont la mécanique de la rupture fragile et la mécanique de la rupture ductile. Ce qui différencie ces disciplines est le rôle que joue la plasticité au cours de ces deux modes de rupture. Pour les matériaux fragiles, la rupture est caractérisée par le clivage des liaisons interatomiques induisant une propagation brutale sans déformations plastiques appréciables au sein du matériau. Dans ce cas, le dommage passe brusquement de la valeur zéro à sa valeur critique de rupture finale d'une manière quasi instantanée. Quant aux matériaux ductiles, essentiellement les matériaux métalliques, ils sont le siège d'un endommagement progressif au cours d'importantes déformations plastiques avant la rupture. Le processus physique d'endommagement qui conduit à la rupture de matériaux ductiles peut être décomposé en trois phases élémentaires qui sont l'amorçage (ou nucléation/germination) de microcavités, puis la croissance et la coalescence de celles-ci au cours de la déformation plastique. Afin de modéliser les trois mécanismes physiques d'endommagement ductile, l'approche locale de la rupture ductile a été développée.

Cette méthodologie basée sur une approche micromécanique cherche à modéliser avec plus de précision les mécanismes de la rupture ductile. Elle est fondée sur des concepts mathématiques rigoureux d'homogénéisation permettant d'évaluer les variables mécaniques (contraintes, déformations, écrouissage . . .) et les indicateurs d'endommagement (porosité, variables d'endommagement scalaire ou tensorielles, facteurs de forme des cavités, leurs espacements . . .) en chaque point de la structure.

Dans la littérature, l'analyse de l'endommagement ductile est aussi abordée par l'approche des milieux continus endommageables, fondée sur les principes de la thermodynamique des processus irréversibles. Contrairement à l'approche micromécanique, l'approche des milieux continus endommageables est basée principalement sur des considérations "phénoménologiques". Toutefois, dans la

plupart des cas, ces deux démarches comprennent une surface d'écoulement plastique (critère de plasticité) et des lois d'évolution des variables internes (plasticité, endommagement). En plus des différences dans les fondements théoriques sur lesquels se basent les deux approches, il est à préciser que la variable d'endommagement qui caractérise l'approche micromécanique est la fraction volumique des vides (ou porosité), alors que pour l'approche phénoménologique la variable d'endommagement peut être la porosité ou toute une autre variable scalaire ou tensorielle caractérisant la dégradation des propriétés mécaniques du matériau (abaissement de son module de rigidité, de sa limite d'écoulement. . .) sous un chargement. À l'instar de ces deux théories, plusieurs modèles ont été formulés et qu'on peut classer en deux catégories que sont les modèles couplés pour lesquels l'écoulement plastique est couplé à l'endommagement par l'intermédiaire d'un critère, et les modèles non couplés pour lesquels les lois d'évolution de l'endommagement sont découplées de la loi de comportement du matériau.

I.2 Elasticité, plasticité et viscoplasticité des métaux

I.2.1 Généralités sur la formulation des lois élastoplastiques

En 1864, Tresca introduit pour la première fois la notion de plasticité avec le critère de contrainte maximale. Mais cette notion n'a été formulée numériquement que vers 1950 avec le développement de l'informatique ; elle a alors démontré tout son intérêt.

La non-linéarité du comportement des matériaux peut être introduite à partir de modèles élastoplastiques, qui sont basés sur les quatre notions fondamentales suivantes :

- la partition des déformations élastiques et plastiques,
- l'existence d'une surface de charge dans l'espace des contraintes,
- la loi d'écoulement,
- le type d'écrouissage.

I.2.1.1 Principe de partition des déformations élastiques et plastiques

Les déformations totales peuvent se décomposer en déformations élastiques réversibles et en déformations plastiques irréversibles. D'un point de vue microstructural, les déformations élastiques correspondent à une simple variation de distances inter-atomiques alors que les déformations plastiques induisent une modification structurale du milieu continu.

L'hypothèse, qui consiste à partager les déformations totales en une part élastique et une part plastique, simplifie considérablement l'identification expérimentale du comportement du matériau ainsi que la modélisation numérique qui s'en suit. Elle se traduit par l'équation suivante [2]:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (I. 1)$$

ε_{ij} Le terme du tenseur de déformations totales,

ε_{ij}^e Le terme du tenseur de déformations élastiques,

ε_{ij}^p Le terme du tenseur de déformations plastiques.

I.2.1.2 Définition d'une surface de charge

L'apparition des déformations irréversibles est conditionnée par le dépassement d'un certain niveau de contrainte. Dans ce contexte, une fonction limite F est définie, appelée surface de charge, associant au tenseur des contraintes de cauchy σ_{ij} un nombre réel. Dans le cadre d'une modélisation élastoplastique, seules les valeurs négatives ou nulles de la fonction F sont admises. Les configurations possibles sont présentées dans le tableau I.1, où $\dot{\varepsilon}^p$ et \dot{F} désignent respectivement le taux de déformation plastique et la dérivée temporelle de F .

Fonction de charge F	Dérivée temporelle \dot{F}	Configuration	Taux de déformation plastique $\dot{\varepsilon}^p$
$F(\sigma_{ij}) < 0$	-	Domaine élastique	$\dot{\varepsilon}^p = 0$
$F(\sigma_{ij}) = 0$	$\dot{F} < 0$	Décharge élastique	$\dot{\varepsilon}^p = 0$
$F(\sigma_{ij}) = 0$	$\dot{F} = 0$	Chargement neutre	$\dot{\varepsilon}^p = 0$
$F(\sigma_{ij}) = 0$	$\dot{F} > 0$	Chargement plastique	$\dot{\varepsilon}^p \neq 0$

Tableau. I.1 : configurations rencontrées dans le cadre d'une modélisation élastoplastique [1].

Lorsque le point représentatif de l'état de contrainte se situe sur la surface de charge, $F=0$, deux cas sont possibles :

- La surface de charge n'évolue pas, c'est le cas du modèle élastoplastique parfait,
- La surface évolue au cours du chargement, c'est le cas du modèle élastoplastique avec écrouissage ; la figure. I.1 illustre ce second cas.

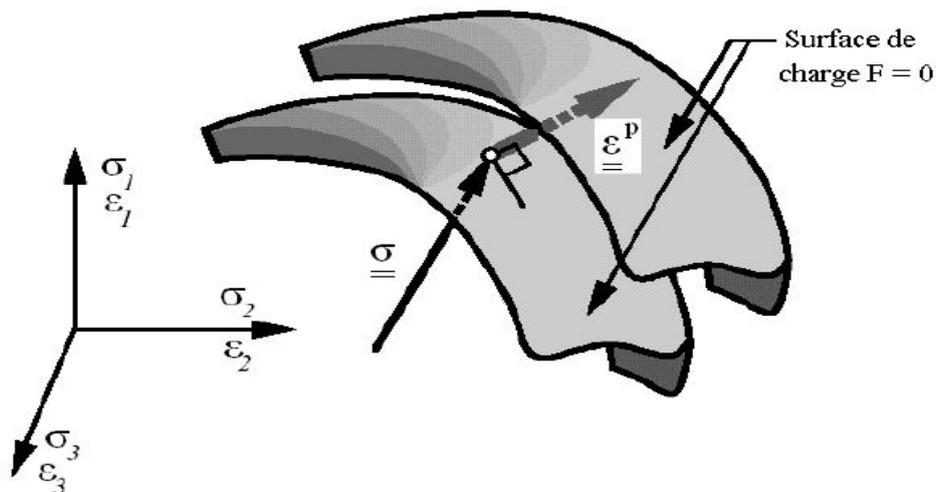


Figure. I.1 : Evolution de la surface de charge dans l'espace des contraintes principales pour un matériau présentant des propriétés d'écrouissage [2].

I.2.1.3 Introduction d'un paramètre d'écrouissage

Lors de l'écoulement du matériau sous sollicitations mécaniques, la surface de charge définie dans le repère des contraintes principales peut évoluer. Ainsi, le domaine d'élasticité actuel dépend de l'état d'écrouissage, c'est-à-dire de l'histoire du chargement du matériau. On peut observer un accroissement de la limite élastique lors de ce chargement. On parle alors d'écrouissage positif ou de durcissement. A l'opposé, l'écrouissage négatif correspond à une diminution de la limite élastique, ou en d'autres termes, à un radoucissement du matériau. L'écrouissage peut être soit isotrope soit cinématique. Pour le qualifier et le quantifier, il convient d'effectuer des essais de laboratoire de chargement et déchargement.

c) Ecrouissage isotrope

Le schéma de l'écrouissage isotrope est très souvent utilisé en pratique, à cause de sa simplicité et de sa bonne représentativité dans le cas où le vecteur de la sollicitation garde une direction constante dans l'espace des contraintes principales. La figure illustre l'évolution de la surface de charge, dans le cas de l'écrouissage positif isotrope.

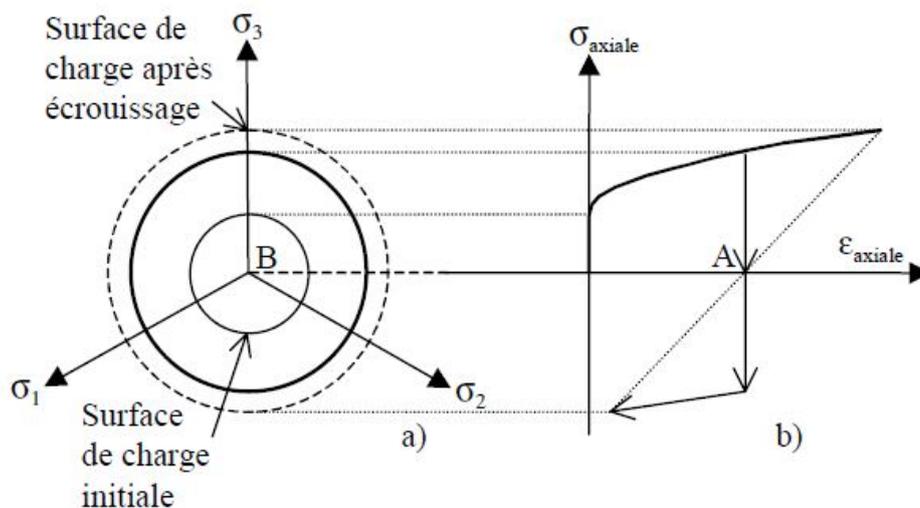


Figure.

I.2 : Représentation de l'écrouissage isotrope en projection a) dans le plan déviatoire, b) dans le plan $\sigma_{axiale} - \epsilon_{axiale}$ en traction-compression simple [1].

L'écrouissage est dit isotrope, quand l'évolution de la surface n'est gouvernée que par un seul paramètre scalaire, par exemple la déformation plastique cumulée. Ainsi, dans le plan $\sigma_{axiale} - \varepsilon_{axiale}$ en traction- compression simple, la courbe de traction succédant à celle de compression se déduit de cette dernière par une homothétie de rapport (-1) et de centre, le point de contrainte nulle (point A de Figure I.2). Dans le plan déviatoire (plan normale à la trisectrice de l'espace des contraintes principales, d'équation $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), la surface de charge croît de manière homothétique par rapport au point représentatif d'une contrainte déviatoire nulle (point B de la Figure I.2).

d) Ecrouissage cinématique

Bien souvent, l'écrouissage isotrope reste insuffisant pour décrire le comportement des géomatériaux qui diffère notamment suivant que la sollicitation soit en compression ou en traction. Une schématisation possible de l'écrouissage anisotrope est écrouissage cinématique linéaire, comme représenté sur la figure I.3.

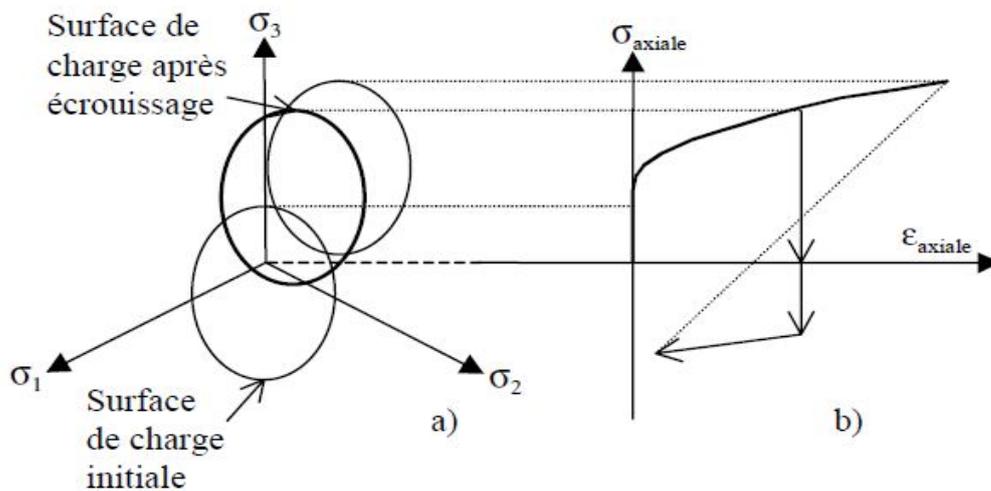


Figure.
I.3 :
Représentation

de l'écrouissage cinématique en projection a) dans le plan déviatoire, b) dans le plan $\sigma_{axiale} - \varepsilon_{axiale}$ en traction-compression simple [1].

Le domaine d'élasticité délimité par la surface de charge se déplace par translation dans l'espace des contraintes principales et sans distorsion de la surface de charge initiale. Ainsi, dans le plan $\sigma_{axiale} - \varepsilon_{axiale}$ en traction- compression simple, le chemin de contrainte n'est plus homothétique par rapport au point de contrainte nulle.

I.2.1.4 Définition d'une loi d'écoulement

Le cadre général de la thermodynamique - dans lequel s'inscrit la théorie de la plasticité - postule l'existence d'un potentiel de dissipation plastique, qui définit la loi d'évolution des déformations plastiques. Le potentiel plastique, usuellement noté g , définit une surface équipotentielle, dépendante du paramètre d'écrouissage, et dont la normale détermine la direction de l'écoulement plastique. La définition de ce potentiel plastique constitue la loi d'écoulement, donnée par l'équation suivante :

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (I. 2)$$

λ est le multiplicateur plastique (scalaire positif) défini par la condition de consistance ($\dot{F} = 0$).

Si le potentiel plastique est confondu avec la surface de charge ($g=F$) alors la loi d'écoulement est dite associée. Dans le cas contraire, elle est dite non-associée.

I.2.2 Lois viscoplastiques à potentiel

La base théorique support des lois viscoplastiques dites à potentiel, est étayée par les travaux de Olszak et Perzyna (1964), Perzyna (1966) [21]. Tous ont associé la théorie de la plasticité aux avancées de la rhéologie pour proposer le concept de la viscoplasticité.

Perzyna présente une théorie basée sur des recherches appliquées aux métaux. Lemaitre apportera des variantes à ces modèles qui sont aujourd'hui très utilisées, grâce aux moyens numériques.

I.2.2.1 De la plasticité à la viscoplasticité

La théorie de la plasticité, présente dans le paragraphe I.2.1, postule que la norme de l'écoulement plastique est déterminée par la condition de consistance, $dF=0$.

Bien que formellement similaire au cas élastoplastique décrit précédemment, le modèle élasto-viscoplastique s'en distingue fondamentalement en sens que l'accès au domaine extérieur à la surface de charge est ici autorisé, ce qui revient à considérer :

$F > 0$

Il en résulte alors l'impossibilité de déterminer la norme de l'écoulement viscoplastique par la condition de consistance et l'utilisation de l'algorithme du retour radial [22, 23].

Le comportement élastoplastique indépendant du temps doit être considéré comme un cas particulier du schéma plus général de l'élasto-viscoplasticité. Très schématiquement, les surfaces équipotentielles constituent une famille de surface, comprises entre la surface de charge plastique correspondant à une vitesse d'écoulement infiniment lente ($F=0$) et une autre caractéristique d'une vitesse d'écoulement infiniment rapide ($F=\infty$). Entre ces deux surfaces, se situe le domaine de la viscoplasticité, comme présenté sur la figure. I.4.

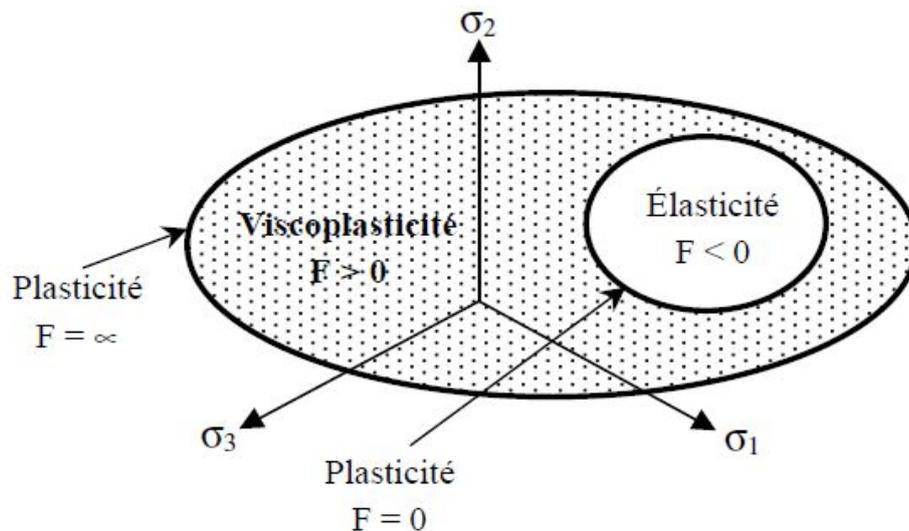


Figure. I.4 : Définition du domaine viscoplastique, d'après Perzyna (1966) [21].

I.2.2.2 Partition des déformations élastiques et viscoplastiques

Comme en plasticité, les déformations totales peuvent se décomposer en déformations élastiques réversibles et en déformation inélastiques dites viscoplastiques et supposées irréversibles. Cela implique l'hypothèse qu'aucun processus de recouvrance des déformations viscoplastiques n'est possible. Le principe de partition se traduit par l'équation suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{vp} \quad (I.3)$$

ε_{ij} Le terme du tenseur de déformations totales,

ε_{ij}^e Le terme du tenseur de déformations élastiques,

ε_{ij}^{vp} Le terme du tenseur de déformations viscoplastiques.

I.2.3 Les lois de comportement viscoplastiques

De manière générale, une loi de comportement non linéaire associe un critère de plasticité, une loi d'écrouissage et une loi d'écoulement qui permettent de décrire l'évolution des déformations du solide considéré. Les lois de comportement qui s'attachent à reproduire les phénomènes différés nécessitent une attention toute particulière sur la définition de la loi d'écoulement. Les formulations mathématiques de ces lois doivent obéir à certains principes généraux qui sont :

- Le principe de déterminisme,
- Le principe d'objectivité matérielle,
- Le principe d'action locale.

L'ensemble de ces concepts, résumés par Chambon (2000) [24], est développé dans le paragraphe suivant. Ils sont nécessaires pour valider l'approche théorique des lois de comportement Visqueux.

I.2.3.1 Principes généraux des lois de comportement

a) Principe de déterminisme

Une loi de comportement est une relation tensorielle qui relie à chaque instant t , le tenseur des contraintes à celui des déformations. Or, le principe de déterminisme fixe la forme de cette relation en stipulant que l'état de contrainte à chaque instant t , est entièrement déterminé par l'histoire des déformations depuis le début de chargement jusqu'à l'instant t .

Ce principe est un choix dont la réciproque n'est généralement pas vérifiée, car il n'existe pas de bijection entre le tenseur des contraintes et celui des déformations sauf en élasticité.

b) Principe d'objectivité matérielle

Le principe d'objectivité matérielle peut s'énoncer ainsi : « Toute loi tensorielle de comportement est indépendante de tout changement de référentiel dans lequel, elle est exprimée. », comme le rappelle Chambon (2000) [24].

Ce principe est relativement trivial et généralement toujours vérifié, notamment pour des lois de comportement faisant intervenir uniquement les tenseurs de contraintes et déformations ainsi que leurs invariants respectifs.

c) Principe d'action locale

Ce dernier principe est toujours vérifié pour les lois de comportement classiques, c'est-à-dire celles pour lesquelles, la localisation des déformations avant la rupture n'est pas considérée. Il stipule que la détermination du tenseur des contraintes en un point d'un milieu continu ne nécessite que les déformations locales en ce point.

I.2.3.2 Classification des lois de comportement visqueux

L'objectif de ce paragraphe est de mieux appréhender et de synthétiser l'ensemble des lois de comportement visqueux qui ont été développées depuis le début du XX^{ème} siècle, sous l'impulsion de viscoplastiques en fonction de leur formulation. Deux grandes familles peuvent être distinguées.

La première famille correspond aux lois explicites, fonction du temps, qui regroupent :

- Les modèles empiriques, définis à partir de chemins de sollicitations simples, à fonctions temporelles diverses ; ces modèles découlent directement de l'observation du comportement en laboratoire mais ne constituent pas des lois générales de comportement (exemple : loi de fluage en puissance (Singh et Mitchell, 1969), ou logarithmique (Lemaitre et Chaboche, 1984)) [23, 25].
- Les modèles analogiques, qui traduisent le comportement différé d'un solide viscoélastique ; ils sont souvent simples mais restent, en pratique, peu appliqués aux roches (exemples : modèles de Newton, Maxwell, Kelvin, Bingham).
- Les modèles isochrones, permettant d'élaborer des relations contraintes-déformations à un instant t (restrictions de lois élasto-viscoplastiques) [2].

La seconde famille regroupe les lois élasto-viscoplastiques, qui s'appuient sur les concepts théoriques et qui vérifient l'ensemble des principes généraux énoncés en I.2. Cette famille se subdivise en trois sous-familles qui sont :

- Les modèles à plasticité différée, pour lesquels la composante plastique se développe de manière différée mais indépendamment du chargement ; ce type de modèle n'est pas adapté lorsque les vitesses de déformations plastiques et le niveau de contrainte évoluent simultanément.
- Les lois incrémentales du premier ordre, qui expriment le champ des vitesses de déformations à chaque instant ; ce sont les lois les plus couramment intégrées dans les codes de calculs.
- Les lois incrémentales du second ordre, qui tiennent compte également du champ d'accélération des déformations à chaque instant ; elles sont très rarement utilisées.

En pratique, les modèles empiriques, analogiques et isochrones ne sont utilisés que pour décrire analytiquement un comportement observé sur des essais de laboratoire. Quant aux lois élasto-viscoplastiques incrémentales du premier ordre, elles sont très prisées pour la modélisation numérique car elles permettent de suivre tous les chemins de contraintes.

I.3 Approche micromécanique de l'endommagement ductile

De nombreux chercheurs ont proposé des modèles de rupture ductile fondés sur des concepts rigoureux de micromécanique. Leur objectif était de s'intéresser à l'endommagement des matériaux à des échelles très fines pour remonter ensuite à l'échelle macroscopique. La formulation des modèles dans le cadre de l'approche micromécanique utilise trois étapes de passage micro-macro que sont la représentation (définition de la microstructure ou, pour employer le langage d'homogénéisation, du volume élémentaire représentatif (VER)), la localisation (expression des données sur le VER en fonction des grandeurs macroscopiques) et enfin l'homogénéisation (définition des comportements moyens locaux sur le VER et détermination des grandeurs macroscopiques du VER en prenant des moyennes appropriées). Un des premiers travaux pionniers en la matière est dû à **McClintock (1968)** qui a proposé un

modèle micromécanique de croissance de cavité cylindrique dans une matrice infinie rigide parfaitement plastique obéissant au critère de Von Mises [10]. Par la suite, **Rice et Tracey (1969)** ont proposé un modèle fondé sur la croissance d'une cavité sphérique dans une matrice infinie rigide parfaitement plastique régie également par le critère de Von Mises. Le résultat majeur de cette étude a été de mettre en évidence l'importance déterminante, sur la croissance des vides, de la triaxialité des contraintes (rapport de la contrainte macroscopique moyenne Σ_m à la contrainte macroscopique équivalente de Von Mises Σ_{eq}). La particularité des critères de type **Rice et Tracey** est qu'ils sont des modèles non couplés pour lesquels l'écoulement plastique n'est pas couplé à l'endommagement par l'intermédiaire d'un critère. Par conséquent, ces modèles ne sont que des indicateurs d'endommagement qui n'influent pas sur la loi de comportement plastique du matériau global de Von Mises [11]. Une seconde contribution, d'importance fondamentale celle-là, est due à **Gurson (1975; 1977)**. Elle a consisté en une analyse limite approchée d'un VER représentatif du milieu poreux. Gurson a considéré un vide sphérique dans une matrice sphérique rigide parfaitement plastique, concentrique, de dimension finie, obéissant au critère de Von Mises et soumise à un chargement quelconque. L'avantage du VER considéré était que la porosité f pouvait alors prendre des valeurs arbitraires. Gurson obtient une surface d'écoulement macroscopique, qui dépend de la contrainte équivalente de Von Mises Σ_{eq} , de la contrainte hydrostatique Σ_m , de la limite d'écoulement de la matrice métallique σ_0 et de la fraction volumique des vides f . Dans ce critère, la variable d'endommagement f se trouve couplée à la contrainte Σ et à la variable d'écrouissage σ_0 . Par la suite, le modèle de Gurson a subi de nombreuses modifications, avec notamment le remplacement de la limite d'écoulement σ_0 par la contrainte équivalente $\bar{\sigma}$ d'une matrice écrouissable et également l'introduction d'une porosité critique associée au début de coalescence [18].

I.3.1 Mécanismes physiques de l'endommagement ductile

Donnons brièvement quelques indications sur les principaux mécanismes de rupture dans les métaux. Les différents défauts responsables de la rupture ductile sont les inclusions, les empilements de dislocation, les joints de grains, les particules

d'éléments d'addition dans les alliages, et les précipités de mise en solution par traitement thermiques. Au voisinage de ces défauts, les sollicitations extérieures engendrent des concentrations de contraintes qui créent de grandes déformations plastiques. La particule étant en général moins ductile que la matrice, par effet d'instabilité, il y a décohésion à l'interface ou rupture de la particule créant une microcavité comme le montre la figure(I.5) et la figure(I.6) qui représente le faciès d'une rupture ductile d'un aluminium [26].

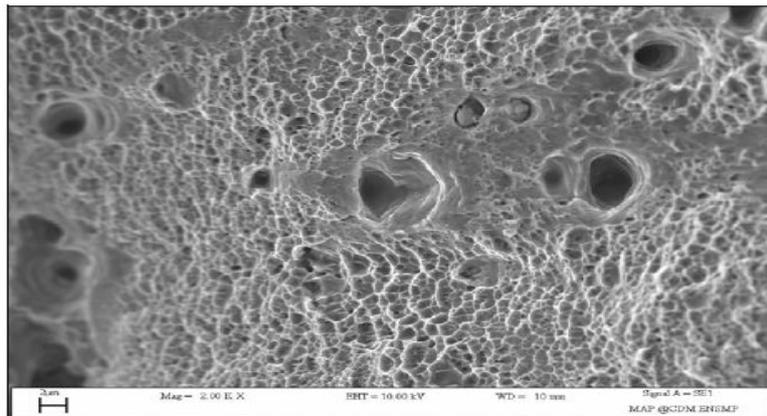


Figure. I.5 : Faciès de rupture ductile d'un aluminium [26].

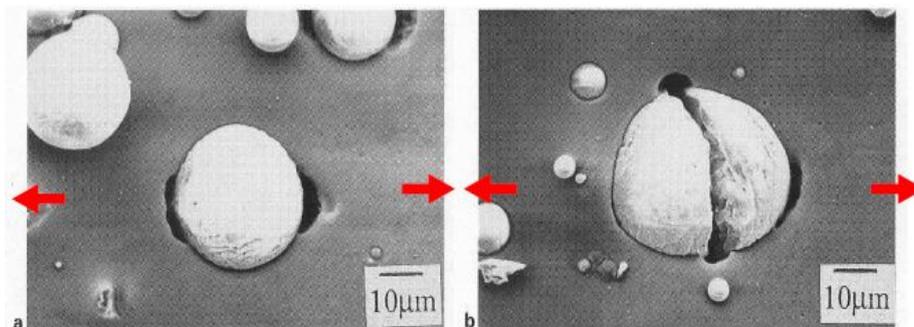


Figure. I.6 : Formation de microcavités dans un aluminium 6061 renforcé par des particules de Al_2O_3 . La charge est horizontale. (a) Décohésion; (b) rupture de la particule [42].

Ainsi, il est aujourd'hui communément admis que la rupture ductile d'un petit de Volume Élémentaire Représentatif (VER) se compose de trois stades :

- ❖ **Phase de nucléation des cavités** : dès le début de l'écoulement plastique, des micro-cavités se forment soit par décohésion inclusion-matrice, soit par rupture

fragile de l'inclusion même. Pendant ce stade, ces cavités naissantes ont une taille tellement faible qu'elles n'affectent en rien ni le comportement élastique (rigidité) ni l'écoulement plastique (écrouissage). Si cette situation est conservée, la courbe de traction suivrait le trajet ABF (Figure I.10) et le comportement sera qualifié de non endommageable.

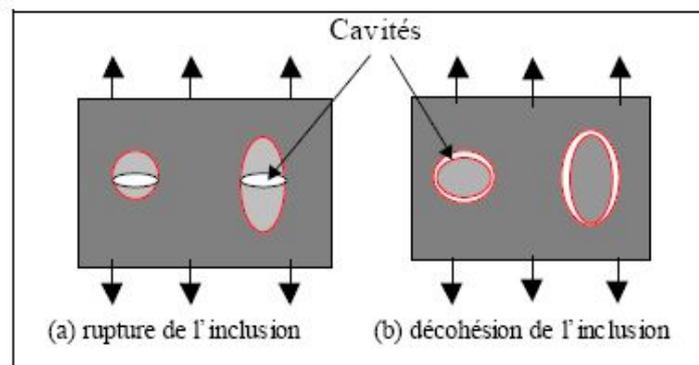


Figure. I.7: Schématisation du mécanisme de germination des cavités [46].

- ❖ **Phase de croissance** : à partir d'une certaine taille, les fortes concentrations de contraintes locales autour des micro-cavités provoquent un écoulement plastique intense très sensible à la contrainte hydrostatique. Les cavités croissent rapidement et leur effet sur la rigidité et sur l'écrouissage devient non négligeable. Ceci crée un adoucissement du matériau qui rentre en compétition avec l'écrouissage positif. La courbe de traction commence alors à s'écarter de la courbe idéale du fait de la baisse progressive du module d'écrouissage. On postule que cette phase se termine au point maximum de la courbe de traction (point C) avec une tangente nulle. C'est pendant cette phase qu'on observe la striction diffuse de l'éprouvette de traction.

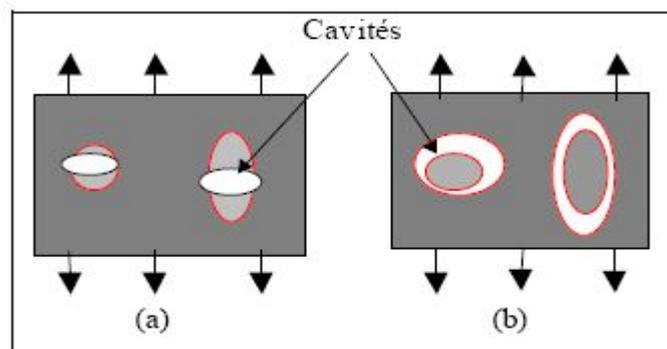
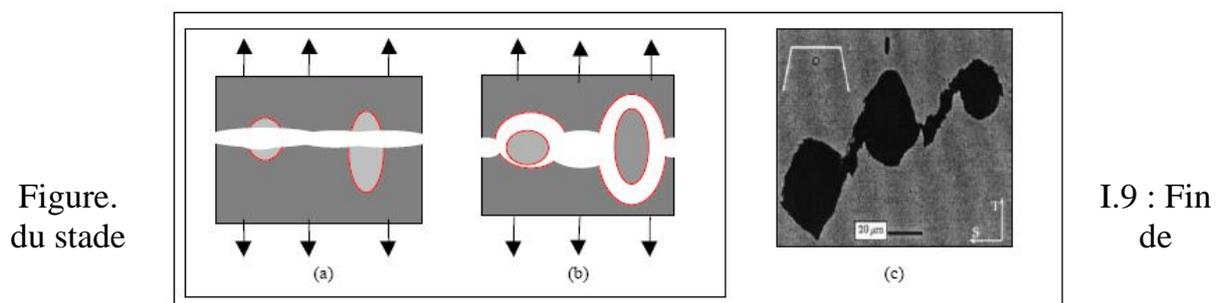


Figure. I.8 : Croissance des cavités [46].

- ❖ **Phase de coalescence** : à partir du point maximum de la courbe de traction, se produit la striction localisée, c'est-à-dire qu'il y a localisation de l'écoulement plastique dans deux bandes de cisaillement qui s'amorce. Dans le VER situé à l'intersection des deux bandes, la croissance des cavités a été telle que le ligament de matière entre les deux cavités cède par localisation plastique provoquant ainsi la striction entre les deux cavités. C'est le stade de coalescence qui aboutit à la formation d'une fissure macroscopique par rupture totale du VER au centre des deux bandes.



coalescence conduisant à la rupture totale de VER [42,46].

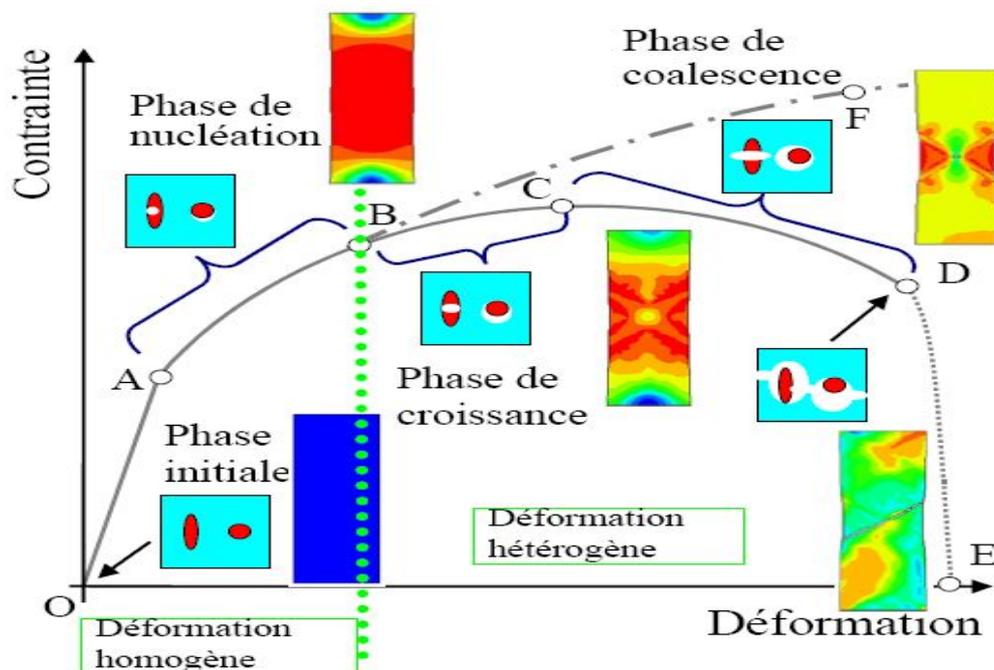


Figure. I.10 : Cycle d'endommagement par rupture ductile durant un essai de traction [26].

I.3.2 Modèles mécanique pour l'endommagement ductile

I.3.2.1 Modélisation de la germination

La phase de nucléation de cavités est modélisée au départ par des méthodes énergétiques. Un des premiers modèles de germination est dû à **Gurland et Plateau (1963)** qui ont proposé un critère énergétique de nucléation par rupture de particules de forme sphérique [3]. Dans le cas de la décohésion de l'interface matrice-inclusion, **Goods et Brown (1979)** proposent une méthode énergétique qui, en première approche, surestime la déformation plastique de nucléation [4]. En exploitant les résultats de **Gurland et Plateau (1963)**, une étude mésoscopique a été proposée par **Argon (1976)** et ensuite reprise dans une étude finalisée par **Needleman (1987)**. Le critère mésoscopique d'une cellule est étudié en grandes transformations. Cette étude permet d'établir un comportement en contrainte [5, 6]. D'autres modèles ont été obtenus en étudiant expérimentalement la nucléation dans certains matériaux (**Beremin, 1981**) [7].

Needleman et Rice(1978) ont développé un critère de nucléation phénoménologique piloté par la déformation plastique équivalente dans la matrice $\bar{\epsilon}^p$ et la contrainte moyenne Σ_m . Ces auteurs supposent que la première source de création de cavités tient à la décohésion aux interfaces d'inclusions de seconde phase et le terme de nucléation correspondant est donc piloté par la composante hydrostatique de la contrainte macroscopique. Quant à la seconde source de création de cavités tient à la matrice elle même : des cavités se forment lorsque la déformation dans la matrice atteint une déformation limite. Le terme de nucléation correspondant est donc piloté par la déformation plastique équivalente de la matrice. Le modèle regroupant les deux sources de nucléation est de la forme [8].

$$\dot{f}_{nucl\acute{e}ation} = A\dot{\bar{\epsilon}}^p + B\dot{\Sigma}_m \quad (I.4)$$

où $\dot{f}_{nucl\acute{e}ation}$ désigne l'évolution de la porosité due à l'amorçage de nouveaux vides au cours d'un écoulement plastique ; A et B sont définis comme suit :

- Les matériaux ductiles dont la germination est uniquement contrôlée par la déformation plastique peuvent être modélisés en prenant $A > 0$ et $B = 0$. **Chu et**

Needleman (1980) ont supposé que l'amorçage des vides suit une distribution normale avec une déformation moyenne ε_N et un écart type s_N [9] :

$$A = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_N}{s_N} \right)^2 \right], B = 0 \quad (\text{I. 5})$$

où f_N est la fraction volumique des vides dont l'amorçage est piloté en déformation.

- Dans le cas de matériaux pour lesquels l'amorçage est seulement piloté par la contrainte normale maximale, il faut prendre $A = 0$ et $B > 0$. **Needleman et Rice (1978)** ont proposé la somme $(\Sigma_m + \bar{\sigma})$, avec $\bar{\sigma}$ est la contrainte d'écoulement de la matrice, comme une mesure approchée de cette contrainte maximale. De manière analogue au cas précédent, on trouve [8]:

$$A = 0, B = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{(\Sigma_m + \bar{\sigma}) - \sigma_N}{s_N} \right)^2 \right] \quad (\text{I. 6})$$

où f_N est la fraction volumique des vides dont la germination est pilotée en contrainte, σ_N est la contrainte moyenne et s_N est l'écart type.

- Dans le cas d'une germination contrôlée par la déformation plastique équivalente et par la contrainte normale maximale, le coefficient A est donné par l'équation (I.5) et le coefficient B par l'équation (I.6).

Il est à remarquer que les valeurs non nulles de A et respectivement B sont utilisées si $\bar{\varepsilon}^p$ et respectivement $(\Sigma_m + \bar{\sigma})$ excèdent leurs valeurs maximales moyennes.

I.3.2.2 Modélisation de la croissance

McClintock (1968) a proposé une loi de croissance d'une cavité cylindrique de rayon moyen R isolée dans un milieu infinie. La matrice métallique a un comportement rigide parfaitement plastique obéissant au critère de plasticité de Von Mises. Le milieu est soumis à un chargement à l'infini composé d'une déformation \dot{E}_z selon l'axe de révolution de la cavité cylindrique et d'une contrainte principale radiale Σ_r . Avec ces considérations, la loi d'évolution du rayon R de la cavité est donnée par [10]

$$\frac{\dot{R}}{R\dot{E}_z} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh\left(\sqrt{3} \frac{\Sigma_r}{\Sigma_z - \Sigma_r}\right) - \frac{1}{2} \quad (\text{I. 7})$$

Rice et Tracey (1969) ont établi un modèle de croissance d'une cavité sphérique de rayon moyen R isolée dans un milieu infini. Le milieu est soumis à un chargement axisymétrique de traction à l'infini de contraintes principales radiale Σ_z et axiale Σ_r .

Dans le cas d'une matrice métallique rigide parfaitement plastique obéissant au critère de plasticité de Von Mises et de limite d'écoulement σ_0 , **Rice et Tracey (1969)** ont proposé le modèle suivant [11] :

$$\frac{\dot{R}}{R} = K \dot{E}_{eq}^p \exp\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) \quad (\text{I. 8})$$

où \dot{E}_{eq}^p est la déformation plastique équivalente macroscopique et $K = 0.283$ est une constante.

Dans le cas d'une matrice écrouissable la relation précédente se met sous la forme.

$$\frac{\dot{R}}{R} = K \dot{E}_{eq}^p \exp\left(\frac{3}{2} T\right) \quad (\text{I. 9})$$

où la triaxialité T qui règne dans le matériau est définie par le rapport de la contrainte moyenne sur la contrainte équivalente $T = \Sigma_m / \Sigma_{eq}$. Le taux de triaxialité des contraintes intervient sous forme exponentielle et tient donc une place importante sur la croissance des vides. Afin de vérifier la loi de **Rice et Tracey (I.8)-(I.9)** et mettre en évidence le rôle de la triaxialité sur la croissance des vides, les membres du groupe Beremin (**Beremin, 1980; 1981**) ont mené une étude expérimentale sur des éprouvettes axisymétriques entaillées de traction. Il en ressort que la forme de cette loi est bien applicable expérimentalement mais avec des valeurs de K différentes de celle de Rice et Tracey. D'autres formulations du modèle de Rice et Tracey sont ensuite établies (**Gilormini et al., 1988; Thomason, 1990; Huang, 1991**) [12, 13]. Par exemple, **Huang (1991)** montre que la valeur du coefficient K trouvée par **Rice et Tracey (1969)** est trop faible pour des taux de triaxialité modérés et élevés. **Huang (1991)** a calculé de façon plus précise la valeur de K et a proposé la formulation suivante [12] :

$$\begin{cases} \frac{\dot{R}}{R} = 0.427 \dot{E}_{eq}^p \exp\left(\frac{3}{2}T\right), & \text{pour } T \geq 1; \\ \frac{\dot{R}}{R} = 0.427 \dot{E}_{eq}^p T^{1/4} \exp\left(\frac{3}{2}T\right), & \text{pour } 1/3 \leq T \leq 1 \end{cases} \quad (\text{I. 10})$$

Il est à noter que les modèles de croissance des vides présentés précédemment sont considérés non couplés car il n'y a pas de couplage entre l'endommagement et le comportement du matériau. Leur inconvénient principal était de ne pas déboucher sur un modèle de comportement pour un matériau poreux quelconque, la considération d'un milieu infini entraînant automatiquement la nullité de la porosité f .

I.3.2.3 Modélisation de la coalescence

C'est la dernière phase du processus d'endommagement qui correspond à la localisation de la déformation entre les cavités pour créer des fissures macroscopiques conduisant à la rupture de l'élément de volume. La phase de coalescence des vides est très certainement la moins comprise du processus microscopique d'endommagement ductile. Les raisons sont dues aux difficultés expérimentales d'observation d'un tel phénomène instantané et localisé, la diversité de modes de coalescence et le nombre important de paramètres à prendre en compte, parmi lesquels la forme des cavités (**Koplik et Needleman, 1988**) [14], l'espacement entre les vides (**Benzerga et al., 1999**) [41] ainsi que la présence de nombreuses cavités très petites autour de cavités plus grandes (**Perrin et Leblond, 1990**) [13]. De nombreux auteurs (**Tvergaard, 1982; Koplik et Needleman, 1988; Gologanu et al., 1997**) [27, 14,19] ont eu recours à des calculs numériques par éléments finis dans le but de surmonter les complexités expérimentales et pour mieux comprendre le phénomène de coalescence. Sur ce sujet, **Koplik et Needleman (1988)** [14] ont apporté une contribution majeure en analysant les résultats de simulations numériques effectuées sur des cellules élémentaires (VER) de forme cylindriques soumises à une traction axisymétrique et constituées d'une matrice élastoplastique contenant un vide en son centre. La coalescence des cavités se caractérise par une soudaine localisation de la déformation plastique dans le ligament de matière entre les vides voisins situés perpendiculairement à l'axe de chargement, la matrice à l'extérieur de cette zone ligamentaire devenant rigide [14].

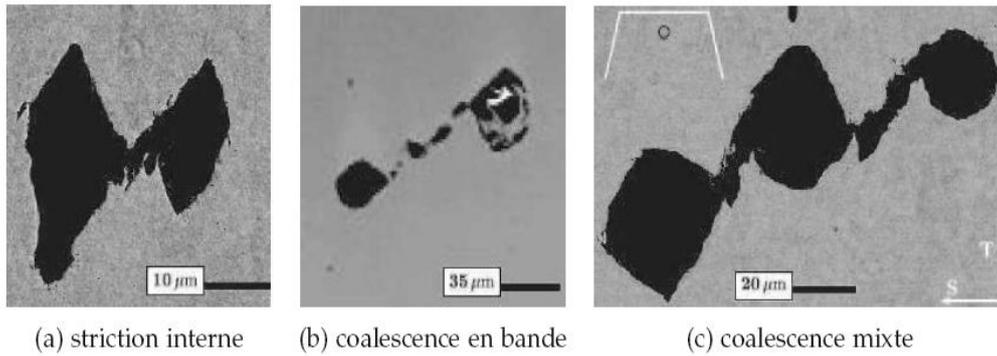


Figure. I.11. Différents modes de coalescence observés par Benzerga (2000) [15].

De nombreux paramètres influents sur la coalescence et un certain nombre de modes de coalescence ont été proposés dans la littérature. À des taux de triaxialité élevés (lorsque le chargement est principalement une traction et presque uniforme le long des trois directions principales), le premier mode correspond à une striction interne du ligament de matière entre les vides de première population après la phase de croissance (figure I.11-a). À des taux de triaxialité faibles (comportant le cisaillement pur) ou encore légèrement négative, le second mode de coalescence est la formation d'une bande de cisaillement très localisé entre des cavités de première population (figure I.11-b). La localisation de la déformation entre ces cavités peut être interprétée soit comme la cause, soit comme la conséquence de la nucléation et de la croissance des microvides de deuxième population. Enfin, de nombreux auteurs proposent de coupler ces deux modes principaux de coalescence (figure I.11-c) : à la striction entre les grosses cavités de première population succède une localisation de la déformation plastique, associée éventuellement à une croissance instable d'une deuxième population de vides, qui se termine par la rupture des micro-ligaments par cisaillement. La modélisation de la coalescence soulève deux problématiques. La première est la détermination d'un critère qui caractérise le début de ce phénomène. La seconde concerne l'élaboration d'un modèle capable de décrire le comportement du matériau du début de la coalescence jusqu'à la rupture finale.

a) Critère de Rice et Tracey : du modèle de croissance de Rice et Tracey (I.9) peut être construit un critère de coalescence des cavités fondé sur l'hypothèse suivante : pour un matériau et une direction de sollicitation donnés, la coalescence apparaît dès

que le rapport du rayon actuel moyen R sur le rayon initial moyen R_0 atteint une valeur critique $(R/R_0)_c$. Cette analyse conduit au critère de coalescence [11]

$$\ln\left(\frac{R}{R_0}\right)_c = \int_1^2 K \exp\left(\frac{3}{2}T\right) dE_{eq}^p \quad (\text{I. 11})$$

où l'état 1 correspond à la nucléation des cavités et l'état 2 à la rupture.

b) Critère de Thomason: Thomason (1968; 1985a;b; 1990) suppose que la coalescence se produit lorsque le ligament de matière entre les vides atteint sa charge limite plastique. Afin d'effectuer une analyse micromécanique du processus d'endommagement ductile, Thomason a considéré un VER prismatique carré contenant une cavité ellipsoïdale qui est censée bien représenter la forme des cavités d'après des observations métallographiques. Partant d'une analyse limite sur le VER, la condition critique de début de coalescence par striction interne de la matrice inter-cavités d'un matériau soumis à une traction uniaxiale peut s'écrire sous la forme suivante [16]

$$\left[\frac{0.1}{\left(\frac{R_2}{L-R_1}\right)^2} + \frac{1.2}{\left(\frac{R_1}{L}\right)^{1/2}} \right] \left[1 - \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} f_0\right)^{2/3} \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2 \exp(E_z) \right] = \frac{\Sigma_z}{\sigma_0} \quad (\text{I. 12})$$

où R_1 et R_2 sont les demi-axes de la cavité dans les directions radiale et axiale respectivement ; R_0 est le rayon initial du vide sphérique ; L et H sont respectivement la largeur et la hauteur du VER ; σ_0 et Σ_z sont respectivement la limite d'écoulement de la matrice et la contrainte macroscopique dans la direction axiale ; et f_0 est la porosité initiale du VER. Le critère de Thomason peut aussi être formulé différemment en introduisant les variables adimensionnelles $\chi=R_1/L$, $W = R_2/R_1$ et $\lambda = H/L$ qui représentent respectivement la taille du ligament, le paramètre de forme de la cavité et l'espacement entre cavités.

c) Critère de Perrin-Leblond : en exploitant les observations de **Koplik et Needleman (1988)** en ce qui concerne l'existence d'une couche fortement poreuse située entre deux couches rigides au début de coalescence, **Perrin (1992)** a proposé d'appliquer la théorie de localisation de la déformation de **Rudnicki et Rice (1975)**

(analyse revisitée par **Perrin et Leblond (1993)**) à une couche centrale poreuse. Cette couche dont le comportement obéit au modèle GTN (**Gurson, 1977; Tvergaard, 1981; Tvergaard et Needleman, 1984**) est située entre deux couches saines obéissant au critère de Von Mises introduisant ainsi la notion de VER multicouche. Le critère s'écrit sous la forme [13]

$$\left[\frac{\Sigma_{eq}^p}{\sigma_0} - q_1 q_2 f^{(p)} \sinh \left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m^{(p)}}{\sigma_0} \right) \right]^2 = \frac{3(1-\nu)\sigma_0}{E} q_1^2 q_2^2 (1 - f^{(p)}) f^{(p)} \sinh \left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m^{(p)}}{\sigma_0} \right) \left[\cosh \left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m^{(p)}}{\sigma_0} \right) - q_1 f^{(p)} \right] \quad (I.13)$$

où l'exposant (p) fait référence à une quantité exprimée dans la couche poreuse ; q_1 et q_2 sont les coefficients de **Tvergaard (1981)** ; et f est la porosité de la couche poreuse.

d) Modèle de Tvergaard-Needleman : initialement élaboré pour corriger le critère de **Gurson (1977)** qui prédit mal la rupture finale du matériau, **Tvergaard et Needleman (1984)** ont proposé un modèle coalescence qui prend en compte l'évolution rapide de la porosité au cours de cette dernière phase de la rupture ductile. Cependant, ce modèle de coalescence ne présente pas de restriction pour une utilisation avec un autre modèle de croissance. Ces auteurs remplacent la porosité f par une fonction effective f^* dont l'expression est donnée par [17]

$$f^*(f) = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + \delta(f - f_c) & \text{si } f > f_c \end{cases} \quad (I.14)$$

où $\delta = (f_u - f_c)/(f_f - f_c)$ a été introduit pour représenter l'augmentation rapide de la porosité après coalescence ; f_c et f_f désigne respectivement la porosité de début de coalescence et à la rupture ; et f_u est la valeur que prendrait f^* lorsque l'élément de volume ne peut plus supporter de contraintes ($\Sigma = \mathbf{0}$).

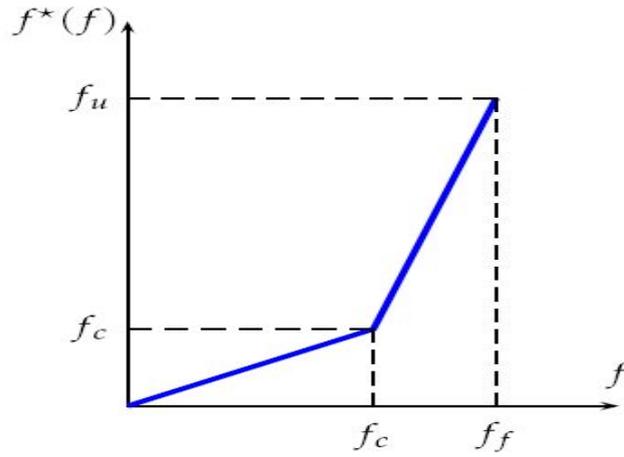


Figure. I.12. Graphe de la fonction $f^*(f)$ [17].

e) **Modèle de Benzerga** : en utilisant le critère de Thomason, **Benzerga (2002)** a élaboré un modèle complet de coalescence par striction. La possibilité du passage de la forme de la cavité au cours de la phase de coalescence d'un ellipsoïde à un cône a été prise en compte, d'une manière phénoménologique, en introduisant un facteur de forme γ variant de $\gamma_c = 1/2$ pour une cavité de forme ellipsoïdale à $\gamma_f = 1$ pour une cavité de forme conique. **Benzerga (2002)** propose alors l'expression suivante pour γ

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_c & \text{si } \chi \leq \chi_c \\ \gamma_c + \frac{\gamma_f - \gamma_c}{1 - \chi_c} (\chi - \chi_c) & \text{si } \chi > \chi_c \end{cases} \quad (\text{I. 15})$$

où χ_c est la taille du ligament au début de la coalescence. Benzerga et ses collaborateurs (**Benzerga et al., 1999; Benzerga, 2000; 2002**) proposent de remplacer la porosité f par la nouvelle variable interne χ , qui semble plus appropriée pour décrire la striction du ligament, et de réécrire le critère de Thomason sous une forme plus générale [15] :

$$\Phi^c(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \chi, W) = \frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}} + \frac{3|\Sigma_m|}{2\bar{\sigma}} - \frac{3}{2}(1 - \chi^2)C(\chi, W) \quad (\text{I. 16})$$

$$C(\chi, W) = 0.1 \left(\frac{\chi^{-1} - 1}{W^2 + 0.1\chi^{-1} + 0.02\chi^{-2}} \right)^2 + 1.3\sqrt{\chi^{-1}} \quad (\text{I. 17})$$

Benzerga a complété le modèle en proposant des lois d'évolution des différentes variables internes :

$$\dot{\chi} = \frac{3}{4} \frac{\lambda}{W} \left(\frac{3\gamma}{\chi^2} - 1 \right) \dot{E}_{eq}^p + \frac{\chi}{2\gamma} \dot{\gamma}, \dot{W} = \frac{9}{4} \frac{\lambda}{\chi} \left(1 - \frac{\gamma}{\chi^2} \right) \dot{E}_{eq}^p + \frac{W}{2\gamma} \dot{\gamma}, \dot{\lambda} = \frac{3}{2} \lambda \dot{E}_{eq}^p \quad (I.18)$$

qui représentent respectivement la loi d'évolution de la taille du ligament, du paramètre de forme de la cavité et de l'espacement entre cavités.

I.3.3 Le modèle couplé de Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN)

Dans ce qui suit, une présentation du modèle de **Gurson (1977)** ainsi que les différentes améliorations qui lui ont été apportées par **Tvergaard (1981; 1982)** et **Tvergaard et Needleman (1984)** est exposé. Ce modèle, basée sur une approche micromécanique, comprend trois éléments : un critère de plasticité macroscopique ; une loi d'écoulement plastique macroscopique associée par normalité au critère ; enfin une loi d'évolution des variables internes que sont la porosité et la déformation plastique équivalente dans la matrice.

I.3.3.1 Le critère de plasticité

À l'aide des techniques d'homogénéisation, **Gurson (1975; 1977)** a proposé une loi de comportement macroscopique pour modéliser la déformation plastique d'alliages métalliques contenant des vides de formes sphérique. Dans son analyse le matériau poreux est représenté par une sphère poreuse ou un cylindre creux, le matériau constitutif de la matrice étant rigide parfaitement plastique obéissant au critère de Von Mises avec une limite d'écoulement σ_0 . L'analyse limite de la sphère poreuse soumise à un chargement lointain axisymétrique conduit au critère macroscopique

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \sigma_0, f) = \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + 2f \cos \left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} \right) - 1 - f^2 = 0 \quad (I.19)$$

Il est important de noter que le critère (I.19) est une approximation par excès du critère macroscopique réel. Il faut remarquer également que ce critère dépend aussi bien de la contrainte hydrostatique Σ_m que la contrainte équivalente Σ_{eq} . Il ne dépend cependant pas du troisième invariant de contrainte $\det \Sigma$. La figure I.13 montre des coupes de ce critère pour diverses valeurs de la porosité f dans le plan des contraintes (Σ_m, Σ_{eq}) . On constate que plus la porosité est grande, plus le critère se rapproche de l'origine [18].

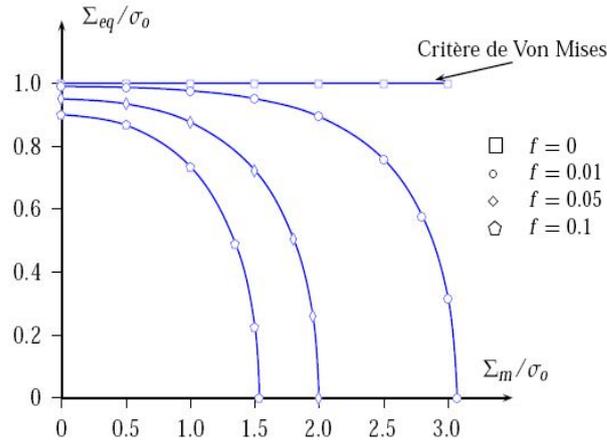


Figure. I.13.Représentation du critère de Gurson pour diverses valeurs de la porosité f dans l'espace de contrainte normalisée $(\Sigma_m/\sigma_0, \Sigma_{eq}/\sigma_0)$ [19].

Pour un matériau dense ($f = 0$), le critère de Gurson se réduit, comme attendu, au critère de von Mises

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 - 1 = 0 \quad (\text{I. 20})$$

Sous contrainte purement hydrostatique (traction ou compression) $\Sigma_{eq} \equiv 0$, la plastification selon le critère de Gurson se produit pour la valeur maximale de

$$\Sigma_m^{max} = \frac{2}{3}\sigma_0 \ln\left(\frac{1}{f}\right) \quad (\text{I. 21})$$

ce qui représente la solution analytique exacte du problème de la sphère creuse sous pression. Sous contrainte purement déviatorique ($\Sigma_m = 0$), le critère de Gurson donne une expression surestimée de Σ_{eq} , à savoir $\Sigma_{eq} = \sigma_0(1 - f)$. En effet, à partir d'une extension de la théorie d'Hashin-Shtrikman aux comportements non-linéaires, **Michel et Suquet (1992)** ont montré que cette expression viole la condition suivante

$$\left(1 + \frac{3}{2}f\right)\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + \frac{9}{4}f\left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right)^2 - (1 - f)^2 \leq 0 \quad (\text{I. 22})$$

pour les faibles triaxialités et pour un chargement purement déviatorique ($\Sigma_m = 0$) :

$$\Sigma_{eq} \leq \sigma_0(1 - f)\left(1 + \frac{2}{3}f\right)^{-1/2} \quad (\text{I. 23})$$

Ainsi le critère de Gurson donne des approximations satisfaisantes pour de forts taux de triaxialité des contraintes et surestime la déformation à rupture du matériau pour de faibles taux de triaxialité. Afin de remédier à cette lacune qui résulte pour partie de la non-prise en compte des interactions entre cavités, **Tvergaard (1981)**, à partir de simulation numérique, introduit trois coefficients q_1 , q_2 et q_3 dans le critère de Gurson et a étendu le critère au cas des matériaux ductile poreux élastoplastique écrouissable en remplaçant la limite d'écoulement σ_0 par la contrainte équivalente d'écoulement $\bar{\sigma}$ comme suggéré par **Gurson**. La surface de charge ainsi proposée par **Tvergaard (1981)** est de la forme [18, 27]

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \bar{\sigma}, f) = \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}}\right)^2 + 2q_1 f \cosh\left(\frac{3}{2}q_2 \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - q_3 f^2 = 0 \quad (I.24)$$

Tvergaard a obtenu un bon accord avec les valeurs $q_2 = 1$ et $q_3 = q_1^2$, qui sont généralement acceptées dans la littérature, tandis que le coefficient q_1 a fait l'objet de plusieurs propositions : **Tvergaard (1981)** ($q_1 = 1.5$), **Koplik et Needleman (1988)** ($q_1 = 1.25$), **Zhang et al. (1999)** ($q_1 = 1.1$) et **Perrin et Leblond (1990)** ($q_1 = 1.47$) [27, 14, 13].

Par ailleurs, le critère de Gurson ne peut pas prédire convenablement la rupture finale du matériau par coalescence des vides car il ne comporte pas de critère de rupture. En effet, lorsque le matériau perd toute sa rigidité, la nullité de la contrainte dans l'équation (I.24) conduit à $f = 1/q_1$ (≈ 0.66 pour $q_1 = 1.5$), ce qui est irréaliste. Pour la plupart des alliages métalliques, la coalescence se produit à des porosités relativement faible (< 0.1). Pour tenir compte de la perte rapide de rigidité du matériau, **Tvergaard et Needleman (1984)** ont introduit une porosité effective $f^*(f)$ dans le critère de Gurson pour simuler, de façon empirique, l'accélération rapide de la coalescence des vides à partir d'une valeur critique de la porosité f_c . La surface de charge du modèle de Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN) s'écrit alors [17]

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \bar{\sigma}, f) = \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}}\right)^2 + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{3}{2}q_2 \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - (q_1 f^*)^2 = 0 \quad (I.25)$$

avec :

$$f^*(f) = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + \delta(f - f_c) & \text{si } f > f_c \end{cases}, \delta = \frac{f_u - f_c}{f_f - f_c} \quad (\text{I. 26})$$

La porosité correspondant à la rupture finale du matériau est f_f pour laquelle $f^*(f_f) = f_u = 1/q_1$. Dès que la coalescence commence, d'un point de vue numérique, il est préférable de prendre en compte graduellement la dégradation du matériau plutôt que brusquement. Ce qui explique pourquoi Tvergaard et Needleman ont défini la porosité effective f^* par une fonction affine [17].

I.3.3.2 Loi d'écoulement associée par la normalité

D'après Gurson (1975; 1977), la règle de normalité de l'écoulement plastique de la matrice implique la normalité macroscopique pour le matériau poreux. Le tenseur des taux de déformation macroscopique plastique est alors donné par [18]

$$\dot{E}^p = \dot{\Lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma}; \dot{\Lambda} \geq 0 \quad (\text{I. 27})$$

soit pour le critère GTN :

$$\dot{E}^p = \left[\frac{3}{\bar{\sigma}^2} \Sigma' + \frac{f q_1 q_2}{\bar{\sigma}} \sinh \left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}} \right) \mathbf{1} \right] \quad (\text{I. 28})$$

dont la trace est donnée par

$$Tr \dot{E}^p = \dot{\Lambda} \frac{3f q_1 q_2}{\bar{\sigma}} \sinh \left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}} \right) \quad (\text{I. 29})$$

La relation (I.28) montre que la déformation plastique possède bien composante hydrostatique. Autrement dit, le taux de variation volumique ($Tr \dot{E}^p$) augmente (resp. diminue) lorsque le matériau est soumis localement à une contrainte de traction (resp. de compression) isotrope [18].

I.3.3.3 Loi d'évolution des variables internes

D'après l'expression (I.25) du critère GTN, la porosité f est couplée à la contrainte macroscopique Σ et à la variable d'écrouissage $\bar{\sigma}$. Afin d'obtenir la loi d'évolution de la déformation plastique équivalente dans la matrice $\bar{\epsilon}^p$, Gurson avait suggéré d'écrire

l'équivalence des dissipations plastiques microscopiques (au sein de la matrice) et macroscopique (matrice+vides), ce qui conduit à [19]

$$\Sigma : \dot{E}^p = (1 - f) \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (\text{I. 30})$$

et par conséquent

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \frac{\Sigma : \dot{E}^p}{(1 - f) \bar{\sigma}} \quad (\text{I. 31})$$

On note que la déformation plastique équivalente et la contrainte d'écoulement sont reliées par la relation incrémentale suivante :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \bar{h} \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (\text{I. 32})$$

L'évolution de la porosité est due, en partie à la croissance des cavités existantes et en partie à la nucléation de nouveaux vides :

$$\dot{f} = \dot{f}_{\text{croissance}} + \dot{f}_{\text{nucléation}} \quad (\text{I. 33})$$

La condition d'incompressibilité plastique de la matrice est satisfaite à l'échelle microscopique, mais elle ne l'est pas à l'échelle macroscopique à cause de la présence des cavités. L'évolution de la porosité, due à la croissance des vides, est donnée par (en négligeant l'élasticité)

$$\dot{f}_{\text{croissance}} = (1 - f) \text{Tr} \dot{E}^p \quad (\text{I. 34})$$

En ce qui concerne l'amorçage de nouveaux vides qui se produit principalement par fragmentation ou par décohésion à l'interface de la matrice et des particules de secondes phases, le modèle de nucléation suivant une distribution normale contrôlée par la déformation est largement utilisé. Pour le modèle GTN, la nucléation des vides est choisie être piloter en déformation comme proposé par **Chu et Needleman (1980)**, soit [9]

$$\dot{f}_{\text{nucléation}} = A \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (\text{I. 35})$$

I.4 Conclusion

Cette synthèse bibliographique des mécanismes physiques de l'endommagement ductile nous a permis de mettre en évidence le rôle important joué par les particules et inclusions lors des phases d'amorçage, croissance et coalescence.

Nous avons présenté dans ce chapitre une description des principaux phénomènes physiques qui gouvernent la rupture ductile des matériaux élastoplastiques endommageables. Des modèles élaborés pour décrire ces phases ont aussi été abordés. Nous nous sommes attardés sur la présentation du modèle GTN que nous avons choisi pour effectuer notre étude. Nous avons présenté les principaux de base de l'élastoplasticité et les lois viscoplastiques à potentiel. Nous avons également présenté les différentes lois de comportement viscoplastiques.

Chapitre II

Modélisation numérique

II.1 Introduction

Le développement de l'ingénierie simultanée propulsée par des exigences de réduction de coûts et de temps de fabrication ont poussé les industriels à s'intéresser de plus en plus à la modélisation numérique. La généralisation de l'utilisation des outils virtuels pour optimisation des pièces mécaniques a été possible grâce à l'apparition de logiciels performants et flexibles. Ce chapitre est consacré à la présentation des aspects numériques liés à l'implémentation du modèle GTN dans le code de calcul Abaqus. Ce dernier offre la possibilité d'introduire de nouvelles lois de comportement en utilisant des sous-routines utilisateurs qui dépend du schéma de résolution choisi. La sous-routine Umat est utilisée lors de la simulation avec le schéma Statique Implicite (S.I.), alors que la sous-routine Vumat est employée avec le schéma Dynamique Explicite (D.E.).

Une description de la discrétisation spatiale, par éléments finis employée dans le code de calcul Abaqus est d'abord donnée. Puis nous présentons les schémas de résolution Statique Implicite (Abaqus/Standard) et Dynamique Explicite (Abaqus/Explicit) dans le cas d'un problème mécanique. Nous rappelons ensuite les deux méthodes de discrétisation temporelles utilisées pour l'incrément des variables internes du modèle GTN. L'implémentation de celui-ci s'est faite suivant l'algorithme local d'intégration des lois de comportement proposé par Aravas.

II.2 Discrétisation spatiale. Principe des puissances virtuelles

II.2.1 Position du problème

Soit un solide formé d'un matériau ayant un comportement élastoplastique endommageable. Ce solide occupe un volume initial V_0 de frontière S_0 dans sa configuration initiale Ω_0 .

On suppose qu'après chargement le solide occupe un volume V de frontière S dans la configuration actuelle Ω .

Les efforts qui s'appliquent au solide sont (voir figure II.1) :

- forces volumiques \vec{f} dues à la masse de la structure ;
- forces surfaciques \vec{t} appliquées sur une portion surfacique S_t de S ;

- forces de contact \vec{t}_c sur une partie S_c de S ;
- déplacements imposés \vec{u}^* sur une partie S_u de S (le champ de déplacements étant cinématiquement admissible CA) ;

Avec $S = S_t \cup S_c \cup S_u$ et $S_t \cap S_c \cap S_u = \{\}$

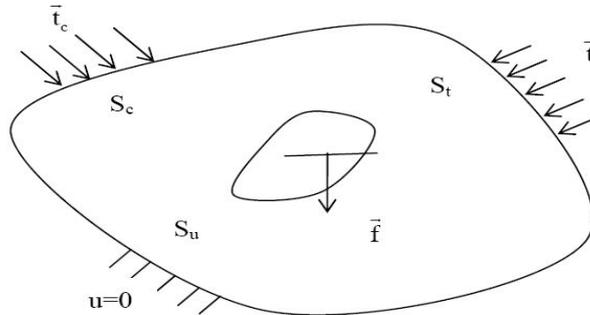


Figure II.1 : Schématisation d'un problème mécanique [32].

Dans cette étude on utilise une formulation lagrangienne réactualisée. Le problème à résoudre consiste à déterminer dans un intervalle de temps $[0, T]$, le vecteur déplacements \vec{u} , le tenseur de déformations $\underline{\epsilon}(x, t)$, le tenseur de contraintes $\underline{\sigma}(x, t)$ et l'ensemble des variables d'état décrites dans le chapitre précédent.

Les inconnues du problème doivent vérifier les équations suivantes :

- les équations d'équilibre :

$$\text{div} \underline{\sigma} + \vec{f} = \rho \ddot{\vec{u}} \quad (\text{II. 1})$$

- les équations de compatibilité

$$\underline{D} = \frac{1}{2} [\text{grad} \dot{\vec{u}} + (\text{grad} \dot{\vec{u}})^T] \quad (\text{II. 2})$$

- les conditions aux limites sur la frontière S :

$$[\underline{\sigma}] \{\vec{n}\} = \{\vec{t}\} \quad \text{sur} \quad S_t \quad (\text{II. 3})$$

$$[\underline{\sigma}] \{\vec{n}\} = \{\vec{t}_c\} \quad \text{sur} \quad S_c \quad (\text{II. 4})$$

$$\vec{u} = \vec{u}^* \quad \text{sur} \quad S_u \quad (\text{II. 5})$$

- les conditions initiales relatives à chaque champ mécanique.

Dans les expressions précédentes $\dot{\vec{u}}$ et $\ddot{\vec{u}}$ représentent les vecteurs vitesse et accélération en chaque point du solide.

II.2.2 Principe des puissances virtuelles P.P.V

En général, un solide en équilibre doit obéir au principe des puissances virtuelles qui s'écrit sous sa forme faible :

$$-\int_V \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{D}} dV + \int_V \vec{f} \cdot \delta \dot{\vec{u}} dV + \int_{S_t} \vec{t} \cdot \delta \dot{\vec{u}} dS + \int_{S_c} \vec{t}_c \cdot \delta \dot{\vec{u}} dS = \int_V \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \delta \dot{\vec{u}} dV \quad (\text{II. 6})$$

où $\delta \dot{\vec{u}}$ est l'accroissement de vecteur vitesses virtuelles cinématiquement admissible vérifiant l'équation $\delta \dot{\vec{u}} = \vec{0}$ sur S_u et $\delta \underline{\underline{D}}$ est l'accroissement virtuel des taux de déformations.

La fonctionnelle forte (II.6) est non linéaire à cause :

- du comportement donnant $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction des variables internes ;
- des grandes variations du volume V du domaine Ω sur lequel on intègre ;
- du contact-frottement par la force \vec{t}_c et par le fait que S_c varie.

En linéarisant la forme faible discrétisée associée à (II.6) par un développement limité approprié. Dans cette étude nous optons pour cette méthode qui consiste à discrétiser dans l'espace et dans le temps la fonctionnelle associée à (II.6) avant de la linéariser.

Le domaine considéré Ω est subdivisé en sous domaines Ω_e appelés éléments finis. Dans cette section on ne considère que les éléments isoparamétriques où les fonctions géométriques de l'élément sont confondues avec les fonctions d'interpolations [28, 29].

La méthode en déplacement est utilisée avec l'approximation des déplacements réels et virtuels par la méthode de Galerkin :

$$\{\mathbf{u}^e\} = [\mathbf{N}_n] \{\mathbf{u}_n^e\} \quad (\text{II. 7})$$

$$\{\delta \mathbf{u}^e\} = [\mathbf{N}_n] \{\delta \mathbf{u}_n^e\} \quad (\text{II. 8})$$

où $[N_n]$ sont les fonctions d'interpolation nodale sur l'élément (e). Ces fonctions dépendent des coordonnées spatiales et sont exprimées dans l'espace de référence. La quantité $\{u_n^e\}$ désigne le vecteur des déplacements en chaque noeud de l'élément.

Par dérivation, les vitesses réelles et virtuelles et l'accélération sont interpolées de la même manière :

$$\{\dot{u}^e\} = [N_n]\{\dot{u}_n^e\} \quad (\text{II. 9})$$

$$\{\delta\dot{u}^e\} = [N_n]\{\delta\dot{u}_n^e\} \quad (\text{II. 10})$$

$$\{\ddot{u}^e\} = [N_n]\{\ddot{u}_n^e\} \quad (\text{II. 11})$$

En utilisant les approximations précédentes ainsi que la forme faible associée à l'équation (II.6), on obtient une fonctionnelle élémentaire de la forme :

$$I_e = ([M]^e \{\ddot{u}^e\} + \{F_{\text{int}}^e\} - \{F_{\text{ext}}^e\})\{\delta\dot{u}^e\} \quad (\text{II. 12})$$

où $[M]^e$ est la matrice masse consistante de l'élément (e) définie par :

$$[M]^e = \int_{V_0} \rho [N_n]^T [N_n] dV_e \quad (\text{II. 13})$$

Le vecteur des efforts internes de l'élément (e) $\{F_{\text{int}}^e\}$:

$$\{F_{n|\text{int}}^e\} = \int_{V_e} [B_n]^T \{\sigma\} dV \quad (\text{II. 14})$$

La matrice déformations-déplacements $[B]$ de l'élément (e) s'exprime par :

$$[B_n^e] = \frac{\partial [N_n]}{\partial x_n} \quad (\text{II. 15})$$

Le vecteur de forces externes de l'élément e $\{F_{\text{ext}}^e\}$:

$$\{F_{\text{ext}}^e\} = \int_{V_e} [N_n]^T \{\vec{f}\} dV + \int_{S_{\xi}^e} [N_n]^T \{\vec{t}\} dS + \int_{S_c^e} [N_n]^T \{\vec{t}_c\} dS \quad (\text{II. 16})$$

Après assemblage l'équilibre global du solide s'exprime par la fonctionnelle suivante :

$$I = \sum_e I_e = \left[\sum_e ([M]^e \{\ddot{u}^e\} + \{F_{int}^e\} - \{F_{ext}^e\}) \right] \{\delta \dot{u}_n^e\} = 0 \quad (II.17)$$

Il s'agit là d'un système algébrique non-linéaire exprimant l'équilibre dynamique de la structure. Sa résolution incrémentale par une linéarisation sur chaque incrément de temps est maintenant discutée [29, 30].

II.2.3 Méthodes de résolution

La résolution numérique du système non linéaire (II-17) est envisagée de deux manières : par un schéma statique implicite ou par un schéma dynamique explicite.

II.2.3.1 Méthode Statique Implicite (SI)

Il s'agit d'utiliser la méthode classique de Newton-Raphson Sur un élément quelconque du domaine V.

Dans une analyse statique implicite, l'équation (II.17) se réduit à :

$$\{R\}_{n+1} = \{F_{int}\}_{n+1} - \{F_{ext}\}_{n+1} = 0 \quad (II.18)$$

$\{R\}_{n+1}$ est le résidu d'équilibre statique à l'instant t_{n+1} . La méthode itérative de Newton-Raphson est utilisée dans le cadre du code ABAQUS/Standard. Le résidu, équation (II.18), est alors linéarisé en utilisant le développement de Taylor d'ordre 1 :

$$\{R\}_{n+1}^{s+1} = \{R\}_{n+1}^s + \left[\frac{\partial \{R\}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \right]^s \{\delta \mathbf{U}_n\} + \dots = 0 \quad (II.19)$$

Avec $\{\delta \mathbf{U}\}_n = \{\mathbf{U}\}_n^{s+1} - \{\mathbf{U}\}_n^s$ est l'incrément de déplacement entre les itérations successives (s+1) et (s). Ce processus itératif continue jusqu'à ce que le résidu soit suffisamment faible ($|R_{n+1}| \leq \varepsilon$) (convergence du système itératif).

La matrice tangente de ce système à l'itéré (s) s'écrit :

$$[K_T^s(\mathbf{U}_n)] = - \left(\frac{\partial \{R\}}{\partial \mathbf{U}_n} \right)^s \quad (II.20)$$

$[K_T^s(\{U_n\})]$ joue un rôle central dans la vitesse de convergence de ce schéma itératif implicite.

La détermination de cet opérateur passe nécessairement par le calcul du résidu $\{R\}$.

Dans l'espace de référence, le résidu s'exprime par :

$$\{R\} = \int_{V_e^0} [B_n]^T \{\sigma\} J dV_e^0 - \int_{V_e^0} [N_n]^T \{\tilde{f}\} J dV_e^0 - \int_{S_t} [N_n]^T \{\tilde{t}\} J_s dS_t^0 - \int_{S_c} [N_n]^T \{\tilde{t}_c\} J_s dS_c^0 \quad (\text{II. 21})$$

où J et J_s sont les jacobiens de volume et de surface entre l'élément de référence et l'élément réel, respectivement. Notons qu'en grandes déformations les jacobiens ne sont pas constants et qu'ils dépendent des coordonnées de chaque noeud.

La variation de $\{R\}$ par rapport aux déplacements permet de calculer la matrice tangente en chaque élément :

$$[K_T^e(U_n)] = \frac{\partial}{\partial U_n} \left[\int_{V_e^0} [B_n]^T \{\sigma\} J dV_e^0 - \int_{V_e^0} [N_n]^T \{\tilde{f}\} J dV_e^0 - \int_{S_t} [N_n]^T \{\tilde{t}\} J_s dS_t^0 - \int_{S_c} [N_n]^T \{\tilde{t}_c\} J_s dS_c^0 \right] \quad (\text{II. 22})$$

La matrice tangente est donc la somme de quatre termes qui sont :

$$[K_T^e(U_n)]_1 = \int_{V_e^0} [B_n]^T \frac{\partial \{\sigma\}}{\partial U_n} J dV_e^0 + \int_{V_e^0} \frac{\partial [B_n]^T}{\partial U_n} \{\sigma\} J dV_e^0 + \int_{V_e^0} [B_n]^T \{\sigma\} \frac{\partial J}{\partial U_n} dV_e^0 \quad (\text{II. 23})$$

$$[K_T^e(U_n)]_2 = \int_{V_e^0} [N_n]^T \frac{\partial \{\tilde{f}\}}{\partial U_n} J dV_e^0 - \int_{V_e^0} [N_n]^T \{\tilde{f}\} \frac{\partial J}{\partial U_n} dV_e^0 \quad (\text{II. 24})$$

$$[K_T^e(U_n)]_3 = \int_{S_t} [N_n]^T \frac{\partial \{\tilde{t}\}}{\partial U_n} J_s dS_t^0 - \int_{S_t} [N_n]^T \{\tilde{t}\} \frac{\partial J_s}{\partial U_n} dS_t^0 \quad (\text{II. 25})$$

$$[K_T^e(U_n)]_4 = - \int_{S_t} [N_n]^T \frac{\partial \{\tilde{t}_c\}}{\partial U_n} J dV_e^0 - \int_{S_t} [N_n]^T \{\tilde{t}_c\} \frac{\partial J_s}{\partial U_n} dS_t^0 \quad (\text{II. 26})$$

Si la variation de la géométrie est faible au cours de l'incrément on peut négliger les quantités $[B_n]$, J et J_s d'où :

$$\frac{\partial [B_n]}{\partial U_n} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial U_n} = 0, \quad \frac{\partial J_s}{\partial U_n} = 0 \quad (\text{II. 27})$$

Par ailleurs les forces appliquées sont généralement des forces suiveuses et on a :

$$\frac{\partial \{\vec{f}\}}{\partial U_n} = 0 \text{ et } \frac{\partial \{\vec{t}\}}{\partial U_n} = 0$$

La matrice tangente ne contient plus que la contribution de $\underline{\sigma}$ et de t_c représentant le contact-frottement :

$$[K_T^e(U_n)] = \int_{V_e^0} [B_n]^T \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right\} [B_n] J dV_e^0 - \int_{S_c} [N_n]^T \frac{\partial \{\vec{t}_c\}}{\partial U_n} J_s dS_c^0 \quad (\text{II. 28})$$

Le terme $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$ dans l'équation précédente représente l'opérateur tangent. Notons que son calcul doit être cohérent avec le schéma d'intégration dans le but de garder la vitesse de convergence quadratique du schéma global de Newton-Raphson.

Le calcul de l'opérateur $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)_{n+1}$ à l'instant t_{n+1} nécessite l'intégration des équations de comportement de toutes les variables d'état nécessaires au calcul de la contrainte σ_{n+1} à chaque itération [31, 26, 20, 32].

II.2.3.2 Méthode Dynamique Explicite (DE)

La méthode explicite la plus utilisée pour résoudre l'équation d'équilibre ordinaire du second ordre est basée sur la technique de différences finies centrées. Si la réponse du système est fortement non-linéaire, cette méthode doit être employée avec un incrément variable de temps. Cette méthode est implémentée dans le logiciel ABAQUS/Explicit pour simuler les procédés de fabrication. Elle consiste à calculer une solution à l'instant $t+\Delta t$ en fonction des quantités connues à l'instant t .

La règle explicite d'intégration est tout à fait simple mais par elle-même ne fournit pas l'efficacité informatique liée au procédé explicite de dynamique [20, 26, 32].

Dans une analyse dynamique explicite, l'équation (II.17) s'écrit :

$$[M]\{\ddot{U}\} + \{R\} = 0 \quad (\text{II. 29})$$

L'algorithme explicite consiste à obtenir une solution de l'équation précédente à l'instant $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ en fonction des quantités connues aux instants précédents

$$\{\ddot{U}_n\} = [M_n]^{-1}\{R_n\} \quad (\text{II. 30})$$

$$\{\dot{U}_{n+1/2}\} = \{\dot{U}_{n-1/2}\} + \frac{\Delta t_{n+1} + \Delta t_n}{2} \{\ddot{U}_n\} \quad (\text{II. 31})$$

$$\{U_{n+1}\} = \{U_n\} + \Delta t_{n+1} \{\dot{U}_{n+1/2}\} \quad (\text{II. 32})$$

Notons que ce schéma explicite évite les itérations ainsi que le calcul de la matrice tangente. Il n'utilise que la matrice masse qui peut être avantageusement diagonalisée. Sa stabilité et sa précision dépendent fortement du pas de temps Δt .

La limite de stabilité pour une solution non amortie est :

$$\Delta t \leq \frac{2}{W_{\max}} \quad (\text{II. 33})$$

où w_{\max} est la plus grande valeur propre du système. Pour les oscillations à hautes fréquences, un coefficient de sécurité a été introduit :

$$\Delta t \leq \frac{2}{W_{\max}} \left[\sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right] \quad (\text{II. 34})$$

ξ est la valeur de l'amortissement, $\xi \leq 1$. Ce facteur permet de réduire la taille de l'incrément.

Une estimation licite de l'incrément de temps stable est donnée par la plus petite taille des éléments. Ainsi la limite de stabilité peut être réécrite de la manière suivante :

$$\Delta t = \min \left[\frac{L_e}{C_d} \right] \quad (\text{II. 35})$$

où L_e est la longueur caractéristique de l'élément et C_d est la vitesse d'une onde élastique traversant l'élément. Cette dernière est déterminée par le calcul des modules effectifs du matériau élastique par :

$$C_d = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{II. 36})$$

ρ est la densité du matériau, E est le module d'Young du matériau.

II.3 Discrétisation temporelle

Il existe une multitude de méthodes d'intégration des équations différentielles, les pionniers dans ce domaine ont été Marcal avec la méthode du retour radial tangent et Wilkins avec la méthode du prédictor élastique retour radial.

Plusieurs ouvrages d'analyse numérique ou de mécanique numérique donnent une présentation détaillée de ces méthodes. On se limite ici à la correction plastique par retour radial. Cette méthode largement utilisée dans littérature à été proposée par Wilkins [32, 33, 34, 35, 36, 26].

II.3.1 Intégration implicite : θ -méthode, méthode asymptotique

II.3.1.1 θ -méthode

La θ -méthode développée initialement par Hughes et Taylor, est une méthode implicite d'ordre $O(\Delta t^2)$ basée sur l'introduction d'un paramètre θ dans l'équation d'Euler.

Son expression sous la forme généralisée est :

$$Y_{n+\theta} = (1 - \theta)Y_n + \theta Y_{n+1} \quad (\text{II. 37})$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta t \cdot F(t_{n+\theta}, Y_{n+\theta}) \quad (\text{II. 38})$$

La forme de la méthode des trapèzes généralisés est :

$$Y_{n+1} = Y_n + [(1 - \theta)\dot{F}(t_n, Y_n) + \theta\dot{F}(t_{n+1}, Y_{n+1})]\Delta t \quad (\text{II. 39})$$

où θ est compris entre 0 et 1. Lorsque $\theta = 0$ on retrouve le schéma explicite ; pour $\theta = 1/2$, on retrouve le schéma semi implicite et si $\theta = 1$ le schéma est implicite.

II.3.1.2 Méthode asymptotique

La méthode d'intégration asymptotique a été initialement proposée par Freed et Walker. Le principe de cette méthode est d'exprimer les équations différentielles sous la forme suivante :

$$\dot{Y} = \varphi(Y)[A(Y) - Y] \quad (\text{II. 40})$$

Plusieurs discrétisations de l'équation précédente sont envisagées dont celle du point milieu :

$$Y_\theta = e^{-\theta\varphi(Y_\theta)\Delta t}Y_t + [1 - e^{-\theta\varphi(Y_\theta)\Delta t}]A(Y_\theta) \quad (\text{II. 41})$$

$$Y_{t+\Delta t} = e^{-\varphi(Y_{t+\Delta t})\Delta t}Y_t + [1 - e^{-\varphi(Y_{t+\Delta t})\Delta t}]A(Y_{t+\Delta t}) \quad (\text{II. 42})$$

II.4 Implémentation numérique du modèle GTN

Nous présentons dans cette section les principales étapes de l'implémentation du modèle GTN dans le code de calcul Abaqus. Pour cela nous commençons par décrire l'algorithme proposé par Aravas pour l'intégration des lois de comportement élastoplastique. Puis nous présentons l'application de cet algorithme à l'implémentation du modèle GTN.

II.4.1 Algorithme locale d'Aravas

Aravas a proposé un algorithme de résolution incrémental des problèmes non-linéaires. Ce schéma bien qu'élaboré pour des matériaux élastoplastiques dépendant de la contrainte moyenne ne présente pas de restrictions particulières quant à son utilisation pour l'intégration d'autres modèles élastoplastique. Le processus de résolution du problème se base sur la méthode de la (prédiction élastique-correction plastique) [37, 38, 39].

Nous supposons une décomposition de la vitesse de déformation

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (\text{II. 43})$$

où $d\boldsymbol{\varepsilon}$ est la vitesse de déformation total, $d\boldsymbol{\varepsilon}^e$ est la vitesse de déformation élastique et $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ est la vitesse de déformation plastique.

L'algorithme Aravas a été initialement proposé pour un matériau élastoplastique dont l'élasticité est linéaire isotrope, donc gouvernée par la loi de Hooke généralisée :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (\text{II. 44})$$

$$C_{ijkl}^e = G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (\text{II. 45})$$

où \mathbf{C}^e est la matrice des modules élastique, G et K sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient d'incompressibilité du matériau, δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Le critère de plasticité est donnée par.

$$\Phi(p, q, H^\alpha) = 0 \quad (\text{II. 46})$$

où p est la contrainte l'hydrostatique

$$p = -\frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I} \quad (\text{II. 47})$$

q est la contrainte équivalente

$$q = \left(\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} \right)^{1/2} \quad (\text{II. 48})$$

$H^\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, n$ est un ensemble de variables d'état scalaire, \mathbf{I} est le tenseur d'identité du second ordre et \mathbf{s} est la contrainte déviatorique. La fonction Φ est définie tels que $\Phi < 0$ la réponse est purement élastique.

La règle d'écoulement est écrite

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\Lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{II. 49})$$

où $d\Lambda$ est un scalaire positive et $g = g(p, q, H^\alpha)$ est le potentiel d'écoulement. En employant (II.47) et (II.48), la règle d'écoulement devient

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\Lambda \left(-\frac{1}{3} \frac{\partial g}{\partial p} \mathbf{I} + \frac{\partial g}{\partial q} \mathbf{n} \right) \quad (\text{II. 50})$$

où

$$\mathbf{n} = \frac{3}{2q} \mathbf{s} \quad (\text{II. 51})$$

Avec cette notation, le tenseur de contrainte peut être écrit comme suit

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{2}{3} q\mathbf{n} \quad (\text{II. 52})$$

Le modèle de plasticité est complété par description de l'évolution des variables d'état :

$$dH^\alpha = \dot{h}^\alpha(d\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\sigma}, H^\beta) \quad (\text{II. 53})$$

Dans cette section, nous nous plaçons dans le cadre de l'hypothèse de petites perturbations (HPP), l'extension aux transformations finies est présentée dans la section suivante. La procédure d'intégration consiste à calculer le tenseur des

contraintes correspondant à une solution élastique puis à apporter si nécessaire, une correction plastique.

II.4.1.1 Prédicteur élastique

L'analyse est faite incrémentalement et on suppose que la solution est connue au début de chaque incrément. Donné un incrément de déformation $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ on a besoin de calculer les contraintes et les variables d'état à la fin de l'incrément.

Puisque l'hypothèse des petites perturbations (HPP) est adoptée par Aravas il s'ensuit que l'additivité de la décomposition de la déformation totale est consacrée :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (\text{II. 54})$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est la déformation total, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ est la déformation élastique et $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ est la déformation plastique.

En suivant, nous supposons l'élasticité isotrope linéaire de sorte que

$$\mathbf{C}_{ijkl}^e = -\left(K - \frac{2}{3}G\right) \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{II. 55})$$

où \mathbf{C}^e est la matrice des modules élastique, G et K sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient d'incompressibilité du matériau, δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Nous revenons maintenant à l'intégration des équations élastoplastiques. Pendant les calculs constitutifs, où les contraintes et les variables d'état sont mis à jour, la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ est connue. Les équations d'élasticité donnent

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^e = \boldsymbol{\sigma}^e - \mathbf{C}^e : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (\text{II. 56})$$

où

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{C}^e : (\boldsymbol{\varepsilon}_t^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (\text{II. 57})$$

$\boldsymbol{\sigma}^e$ est le prédicteur élastique, t est le temps au début de l'incrément, et $t+\Delta t$ est le temps à la fin de l'incrément. Dans l'équation (II.57), $\boldsymbol{\varepsilon}_t^e$ est la déformation élastique tournée au début de l'incrément [39].

II.4.1.2 Correction plastique

Une fois le prédicteur élastique évalué, nous procédons à l'estimation du critère de plasticité. Dans le cas où celui-ci est négatif, alors la solution est élastique et le prédicteur élastique. Par conséquent, le tenseur des contraintes calculé est solution du problème. Dans le cas où le critère contraire, une correction plastique en résolvant le système (II.46)-(II.53) s'impose. Pour ce faire, Aravas commence par écrire la décomposition des tenseurs des contraintes et des incréments de déformations plastiques en leurs parties sphérique et déviatorique :

La fonction de rendement et la règle d'écoulement sont écrites par

$$\Phi(\mathbf{p}_{t+\Delta t}, \mathbf{q}_{t+\Delta t}, \mathbf{H}_{t+\Delta t}^\alpha) = 0 \quad (\text{II. 58})$$

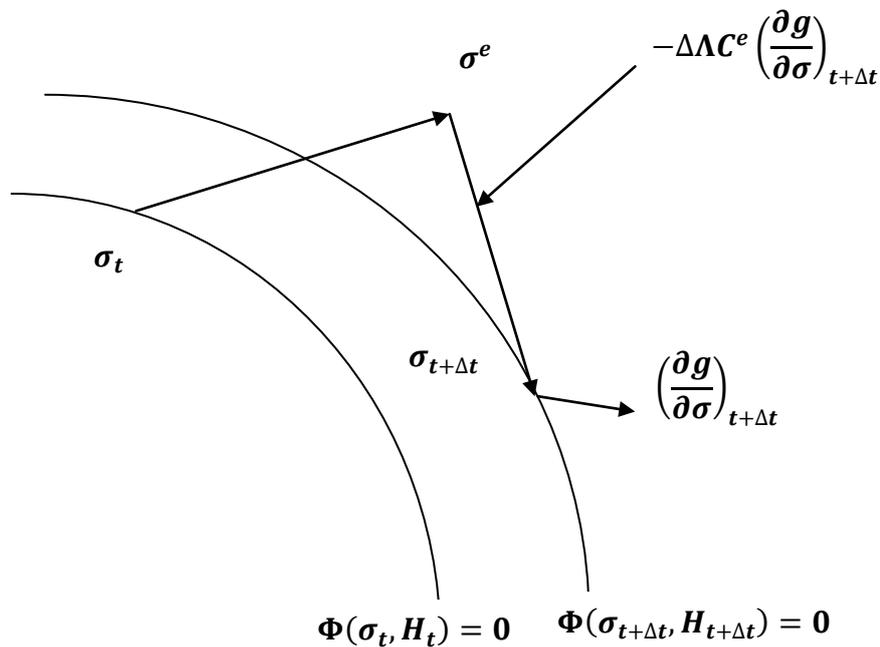


Figure. II.2. Interprétation Géométrique de l'algorithme en arrière d'Euler dans l'espace de contrainte.

et

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{1}{3} \Delta \varepsilon_p \mathbf{I} + \Delta \varepsilon_q \mathbf{n}_{t+\Delta t} \quad (\text{II. 59})$$

où

$$\Delta\varepsilon_p = -\Delta\Lambda \left(\frac{\partial g}{\partial p} \right)_{t+\Delta t} \quad \text{et} \quad \Delta\varepsilon_q = \Delta\Lambda \left(\frac{\partial g}{\partial q} \right)_{t+\Delta t} \quad \text{ont été obtenus par Aravas}$$

En projetant le tenseur des incréments de déformation sur \mathbf{I} et \mathbf{n} . En éliminant $\Delta\Lambda$ des deux équations précédentes, nous obtenus

$$\Delta\varepsilon_p \left(\frac{\partial g}{\partial q} \right)_{t+\Delta t} + \Delta\varepsilon_q \left(\frac{\partial g}{\partial p} \right)_{t+\Delta t} = 0$$

L'équation (II.52) est écrite par

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} = -P_{t+\Delta t} \mathbf{I} + \frac{2}{3} q_{t+\Delta t} \mathbf{n}_{t+\Delta t} \quad (\text{II. 60})$$

et l'évolution des variables d'état est donnée par

$$\Delta H^\alpha = \hbar^\alpha (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}, H_{t+\Delta t}^\beta) \quad (\text{II. 61})$$

Le schéma II.2 montre l'interprétation de géométrie de l'algorithme dans l'espace de contrainte. Employant l'équation (II.59), nous pouvons récrire l'équation (II.56) par

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}^e - K\Delta\varepsilon_p \mathbf{I} - 2G\Delta\varepsilon_q \mathbf{n}_{t+\Delta t}$$

$$\mathbf{n}_{t+\Delta t} = \frac{3}{2q^e} \mathbf{s}^e$$

Les indices désignant le début et la fin de l'incrément des quantités intervenant dans les équations (II.59) et (II.60) ainsi que ceux des expressions qui vont suivre dans cette section sont volontairement omis. Il s'ensuit que toutes les quantités non indicées sont exprimées en fin de pas, sauf indication contraire.

En projetant l'équation d'élasticité (II.56) sur \mathbf{I} et \mathbf{n} , et en employant l'équation (II.60), nous trouvons

$$p = p^e + K\Delta\varepsilon_p$$

$$q = q^e - 3G\Delta\varepsilon_q$$

L'équation (II.61) peut être écrite par

$$\Delta H^\alpha = \hbar^\alpha (\Delta\varepsilon_p, \Delta\varepsilon_q, p, q, H^\beta) \quad (\text{II. 62})$$

$$\Delta H^\alpha = \hbar^\alpha(\Delta \varepsilon_p, \Delta \varepsilon_q, p, q, H^\beta) = \hbar^\alpha\left(\frac{1}{3}\Delta \varepsilon_p \mathbf{I} + \Delta \varepsilon_q \mathbf{n}, -p\mathbf{I} + \frac{2}{3}q\mathbf{n}, H^\beta\right)$$

Récapitulation : le problème d'intégrer les équations élastoplastiques réduit à la solution de l'ensemble d'équations non linéaires suivant :

$$\Delta \varepsilon_p \frac{\partial g}{\partial q} + \Delta \varepsilon_q \frac{\partial g}{\partial p} = 0 \quad (\text{II.63})$$

$$\Phi(p, q, H^\alpha) = 0 \quad (\text{II.64})$$

$$p = p^e + K\Delta \varepsilon_p \quad (\text{II.65})$$

$$q = q^e - 3G\Delta \varepsilon_q \quad (\text{II.66})$$

et

$$\Delta H^\alpha = \hbar^\alpha(\Delta \varepsilon_p, \Delta \varepsilon_q, p, q, H^\beta) \quad (\text{II.67})$$

Pour $\Delta \varepsilon_p, \Delta \varepsilon_q, p, q$ et $\Delta H^\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, n$.

Ces équations sont résolues suivant la méthode de Newton. Nous choisissons $\Delta \varepsilon_p$ et $\Delta \varepsilon_q$ comme inconnus primaires, traitant les équations (II.63) et (II.64) comme équations de base dans lesquelles p, q et ΔH^α sont définis par l'équation (II.65) - (II.67). Employant c_p et c_q comme correction pour $\Delta \varepsilon_p$ et $\Delta \varepsilon_q$ les équations de Newton sont

$$A_{11}c_p + A_{12}c_q = b_1$$

$$A_{21}c_p + A_{22}c_q = b_2$$

où les constantes A_{ij} et b_i sont données dans l'annexe. Ces équations sont résolues pour c_p et c_q et les valeurs de $\Delta \varepsilon_p$ et $\Delta \varepsilon_q$ sont alors mis à jour :

$$\Delta \varepsilon_p \rightarrow \Delta \varepsilon_p + c_p$$

$$\Delta \varepsilon_q \rightarrow \Delta \varepsilon_q + c_q$$

Les valeurs de p et q sont mises à jour employant les équations (II.65) et (II.66). Finalement, les incréments des variables d'état sont mis à jour en résolvant les équations (II.67) pour ΔH^α . Cette boucle itérative est continuée jusqu'à ce que $\Delta \varepsilon_p$ et $\Delta \varepsilon_q$ convergent.

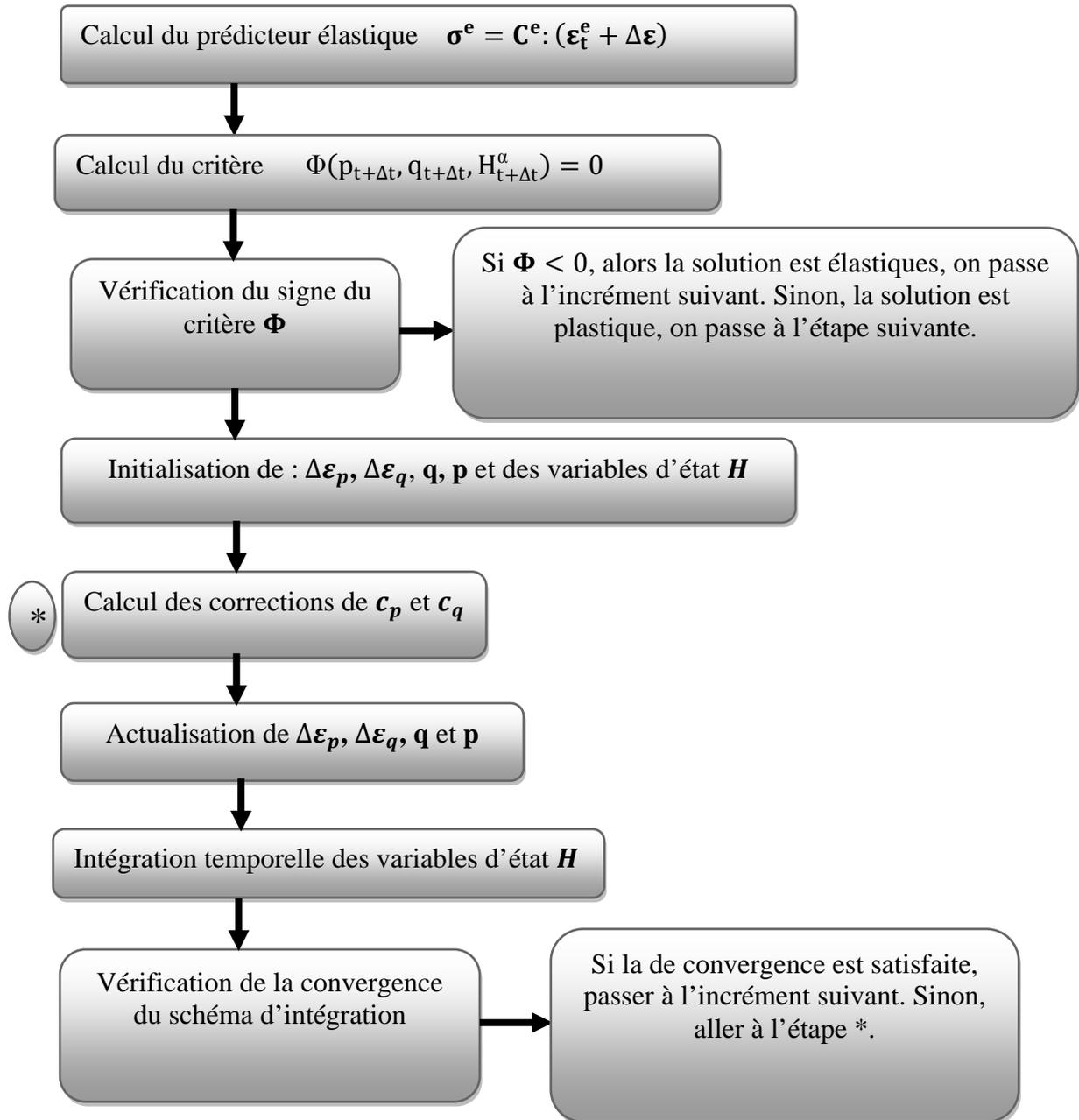


Figure. II.3 : Le schéma d'intégration local d'Aravas [20, 39].

II.4.2 Implémentation du modèle GTN

Nous présentons dans cette section les principales étapes de l'implémentation du modèle GTN dans le code de calcul Abaqus. L'utilisation de l'algorithme proposé par Aravas pour l'intégration de la loi de comportement GTN.

Ce dernier se base sur la méthode du « prédicteur élastique »-« correction plastique ».

Les principales étapes suivies lors de l'implémentation sont :

- Initialisation les valeurs $\boldsymbol{\sigma}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_t, H_t^\alpha, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}$

où H^α sont les variables d'état

- Ecriture de la loi d'élasticité linéaire en se positionnant dans le cadre des petites perturbations (décomposition additive de la déformation totale)

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta}^e = \boldsymbol{\sigma}_t + \mathbf{C}^e : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} \quad (\text{II. 68})$$

$$\mathbf{C}_{ijkl}^e = \left(K - \frac{2}{3} G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

où \mathbf{C} est la matrice des modules élastiques, G et K sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient d'incompressibilité du matériau, δ_{ij} est le symbole de KRONECKER et les indices (t) et (Δt) se rapportent au début et la fin de l'incrément respectivement.

- En utilisant la notation employée par Aravas, nous pouvons calculer la contrainte hydrostatique sous la forme suivante :

$$p_{t+\Delta t}^e = -\frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}^e : \mathbf{I} \quad (\text{II. 69})$$

et la contrainte équivalente comme suit :

$$q_{t+\Delta t}^e \left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}^e : \boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}^e \right)^{1/2} \quad (\text{II. 70})$$

- Calcul du critère plastique qui est réécrit en fonction de p, q, f et $\bar{\sigma}$ comme suit

$$\Phi(\sigma, \bar{\sigma}; f) = \Phi(q, p, H^\alpha) = \frac{q^2}{\bar{\sigma}^2} + 2q_1 f^* \cosh \left(\frac{3}{2} q_2 \frac{p}{\bar{\sigma}} \right) - (1 + q_3 f^{*2}) = 0 \quad (\text{II. 71})$$

- Vérification du signe du critère Φ

Si $\Phi \leq 0$, alors la solution est élastique, on passe à l'incrément suivant. Pour $\Phi > 0$, la solution est plastique, on passe à l'étape suivante.

- Initialisation de: $\boldsymbol{\sigma}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_t, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}$ et des variables d'état.
- Calcul des corrections de c_p et c_q :

Une fois le système non-linéaire mis en place, nous commençons par chercher les valeurs de c_p et c_q solution du système

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_p \\ C_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 72})$$

- Le calcul des coefficients A_{ij} et b_j nécessite le calcul des dérivées partielles du critère ainsi que celles des variables internes. Les expressions de ces six coefficients dans le cas présent sont données en annexe :

Nous dérivons les expressions des variables d'état Δf et $\Delta \bar{\sigma}$ par rapport aux variables $\Delta \varepsilon_p, \Delta \varepsilon_q, p, q, \bar{\sigma}$ et f .

Les expressions des variables d'état Δf et $\Delta \bar{\sigma}$ sont données comme suit :

$$\Delta f = (1 - f)\Delta \varepsilon_p + \mathcal{A} \left(\frac{-p\Delta \varepsilon_p + q\Delta \varepsilon_q}{(1 - f)\bar{\sigma}} \right) \quad (\text{II. 73})$$

$$\Delta \bar{\sigma} = \hbar \Delta \bar{\varepsilon}^p \quad (\text{II. 74})$$

$$\hbar = \frac{E}{\frac{1}{\frac{1-n}{n\sigma_0^n}} \bar{\sigma}^{\frac{1-n}{n}} - 1} \quad (\text{II. 75})$$

$$\Delta \bar{\varepsilon}^p = \frac{-p\Delta \varepsilon_p + q\Delta \varepsilon_q}{(1 - f)\bar{\sigma}} \quad (\text{II. 76})$$

$$\Delta \bar{\sigma} = \left(\frac{E}{\frac{1}{\frac{1-n}{n\sigma_0^n}} \bar{\sigma}^{\frac{1-n}{n}} - 1} \right) \left(\frac{-p\Delta \varepsilon_p + q\Delta \varepsilon_q}{(1 - f)\bar{\sigma}} \right) \quad (\text{II. 77})$$

- Une fois c_p et c_q calculées, nous procédons à la réactualisation de $\Delta \varepsilon_p$ et $\Delta \varepsilon_q$:

$$\Delta\varepsilon_p \rightarrow \Delta\varepsilon_p + c_p \quad (\text{II.78})$$

$$\Delta\varepsilon_q \rightarrow \Delta\varepsilon_q + c_q \quad (\text{II.79})$$

- Puis, nous réactualisons les contraintes équivalentes q et la contrainte hydrostatique p en employant les relations suivantes :

$$p = p^e + K\Delta\varepsilon_p \quad (\text{II.80})$$

$$q = q^e - 3G\Delta\varepsilon_q \quad (\text{II.81})$$

- Finalement, l'intégration temporelle des variables d'état conduit à

$$f_{t+\Delta t} = f_t + (1-f)\Delta\varepsilon_p + \mathcal{A} \left(\frac{-p\Delta\varepsilon_p + q\Delta\varepsilon_q}{(1-f)\bar{\sigma}} \right) \quad (\text{II.82})$$

$$\bar{\sigma}_{t+\Delta t} = \bar{\sigma}_t + \left(\left(\frac{E}{\frac{1}{n\sigma_0^{\frac{1-n}{n}}} - 1}} \right) \left(\frac{-p\Delta\varepsilon_p + q\Delta\varepsilon_q}{(1-f)\bar{\sigma}} \right) \right) \quad (\text{II.83})$$

où les valeurs de $p, q, \Delta\varepsilon_p$ et $\Delta\varepsilon_q$ utilisées dans le système précédent sont les valeurs réactualisées. Le schéma continue jusqu'à convergence totale.

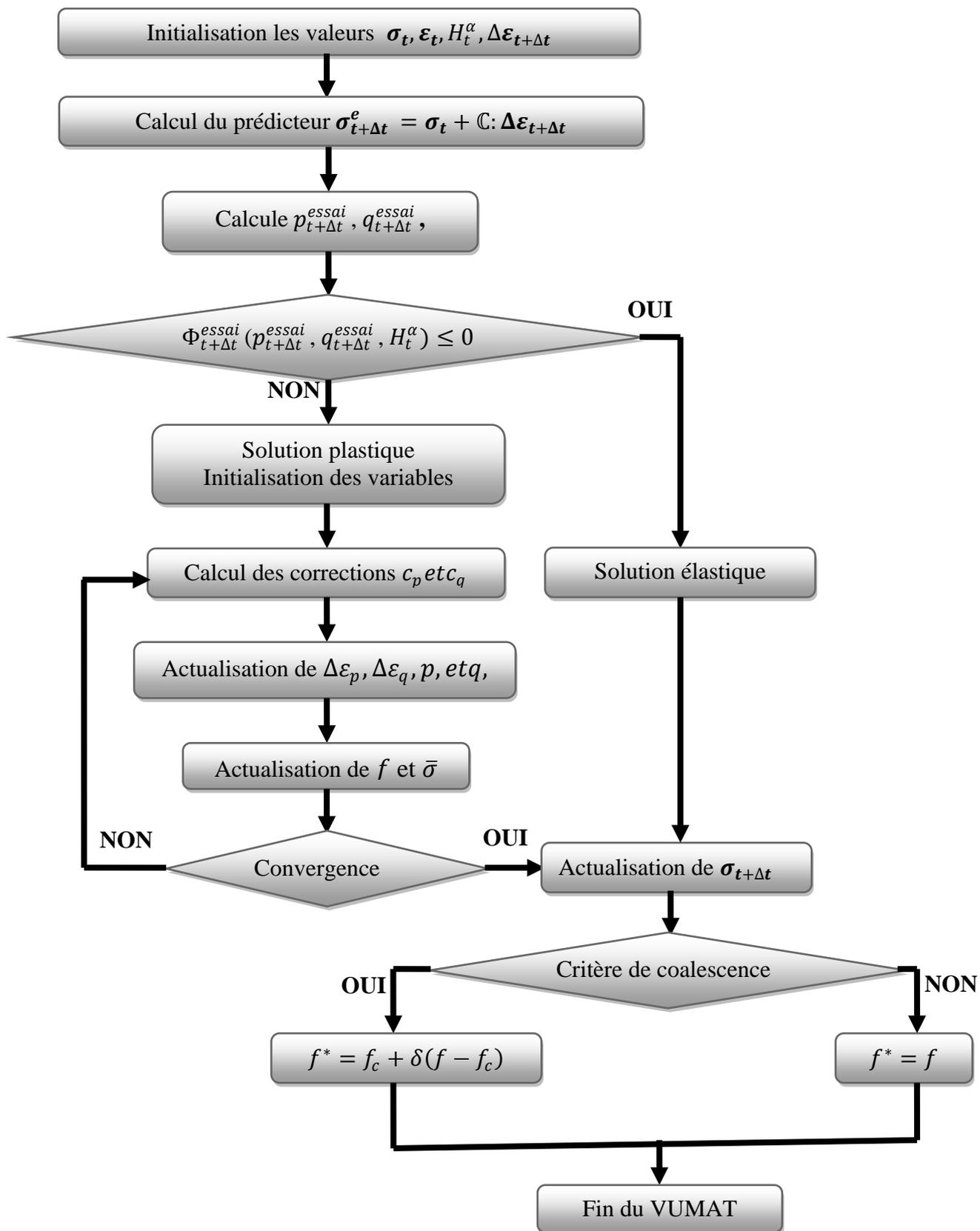


Figure. II.4 : Organigramme de l'implémentation du modèle GTN [20].

II.4.3 Implémentation du modèle GTN couplé à la viscoplasticité

Nous présentons dans cette section les principales étapes de l'implémentation du modèle GTN couplé à la viscoplasticité dans le code de calcul Abaqus. L'algorithme proposé par Aravas présenté dans ce chapitre a été modifié pour l'intégration de la loi de comportement GTN dans le cas viscoplastique.

Ce dernier se base sur la méthode du « prédicteur élastique »-« correction plastique ».

Nous donnons les principales étapes suivies lors de l'implémentation, des mêmes procédures de l'implémentation à partir de l'équation (II.68)-(II.73).

Nous dérivons les expressions des dérivées partielles des variables d'état Δf et $\Delta \bar{\sigma}$ par rapport aux variables $\Delta \varepsilon_p$, $\Delta \varepsilon_q$, p , q , $\bar{\sigma}$ et f . Les expressions des variables d'état Δf et $\Delta \bar{\sigma}$ dans le cas viscoplastique sont données comme suit :

$$\Delta f = (1 - f)\Delta \varepsilon_p + \mathcal{A} \left(\frac{-p\Delta \varepsilon_p + q\Delta \varepsilon_q}{(1 - f)\bar{\sigma}} \right) \quad (\text{II. 84})$$

$$\Delta \bar{\sigma} = \dot{h}\Delta \bar{\varepsilon}^p \quad (\text{II. 85})$$

$$\dot{h} = \frac{\eta\sigma_0}{m\Delta t} \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \right)^{1-m} + \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \right) \frac{E\bar{\sigma}^{1-N}}{N\sigma_0^{1-N} - \bar{\sigma}^{1-N}} \quad (\text{II. 86})$$

$$\Delta \bar{\sigma} = \left(\frac{\eta\sigma_0}{m\Delta t} \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \right)^{1-m} + \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \right) \frac{E\bar{\sigma}^{1-N}}{N\sigma_0^{1-N} - \bar{\sigma}^{1-N}} \right) \left(\frac{-p\Delta \varepsilon_p + q\Delta \varepsilon_q}{(1 - f)\bar{\sigma}} \right) \quad (\text{II. 87})$$

- Une fois c_p et c_q calculées, nous procédons à la réactualisation de $\Delta \varepsilon_p$ et $\Delta \varepsilon_q$:

$$\Delta \varepsilon_p \rightarrow \Delta \varepsilon_p + c_p \quad (\text{II. 88})$$

$$\Delta \varepsilon_q \rightarrow \Delta \varepsilon_q + c_q \quad (\text{II. 89})$$

- Puis, nous réactualisons la contrainte équivalente q et la contrainte hydrostatique p en employant les relations suivantes :

$$p = p^e + K\Delta \varepsilon_p \quad (\text{II. 90})$$

$$q = q^e - 3G\Delta \varepsilon_q \quad (\text{II. 91})$$

- Finalement, l'intégration temporelle des variables d'état conduit à

$$f_{t+\Delta t} = f_t + (1 - f)\Delta\varepsilon_p + \mathcal{A} \left(\frac{-p\Delta\varepsilon_p + q\Delta\varepsilon_q}{(1 - f)\bar{\sigma}} \right) \quad (\text{II. 92})$$

$$\bar{\sigma}_{t+\Delta t} = \bar{\sigma}_t + \left(\frac{\eta\sigma_0}{m\Delta t} \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \right)^{1-m} + \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \right) \frac{E\bar{\sigma}^{1-N}}{N\sigma_0^{1-N} - \bar{\sigma}^{1-N}} \right) \left(\frac{-p\Delta\varepsilon_p + q\Delta\varepsilon_q}{(1 - f)\bar{\sigma}} \right) \quad (\text{II. 93})$$

η et m Sont des constantes du matériau, le terme de la viscosité est souvent écrite sous la forme suivante $D = 1/\eta$, Δt est l'incrément de temps.

où les valeurs de $p, q, \Delta\varepsilon_p$ et $\Delta\varepsilon_q$ utilisées dans le système précédent sont les valeurs réactualisées. Le schéma continue jusqu'à convergence totale.

II.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'ensemble des aspects numériques liés au modèle théorique développé au chapitre précédent ainsi que la procédure d'implémentation du modèle GTN couplé à la viscoplasticité dans le code de calcul par élément finis ABAQUS. On a traité la formulation de la discrétisation spatiale de principe des travaux virtuels et la discrétisation temporelle. De là, nous avons abouti à un système algébrique non linéaire qu'on a développé selon la méthode itérative statique implicite et la méthode dynamique explicite. La méthode de résolution du système d'équations non linéaires à résoudre par la méthode d'Aravas est développée en détail.

Chapitre III

Résultats et discussions

III.1 Introduction

La modélisation numérique a fait des progrès considérables durant les vingt dernières années, suite à l'évolution continue de la puissance des calculateurs. Grâce à des algorithmes de plus en plus robustes, la méthode des éléments finis peut traiter des problèmes non linéaires issus du comportement du matériau, de la géométrie de la pièce et du contact avec les outils.

Aujourd'hui, plusieurs logiciels de simulation permettent d'optimiser et de modéliser plusieurs phénomènes lors des procédés de mise en forme des matériaux. Parmi ces logiciels on peut citer Abaqus, Ansys, Patran...etc

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude du comportement viscoplastique de notre matériau par deux approches expérimentale et numérique. Les résultats expérimentaux obtenus à partir d'essais de traction à différentes vitesses de déformations sont utilisés pour d'une part étudier le comportement viscoplastique de notre matériau et servir de comparaison aux prédictions numériques des lois de comportement implémenté dans le code de calcul par éléments finis Abaqus.

III.2 Les matériaux étudiés

III.2.1 Caractérisation de l'acier TU48C et de l'acier X100

- **L'acier TU48C**

L'acier étudié est un acier au Carbone – Manganèse utilisé dans les tuyauteries du circuit secondaire des centrales nucléaires à eau pressurisée. Ces tubes sont soumis, en conditions de fonctionnement, à une pression de l'ordre de 70 à 80 bars. La désignation de l'acier étudié est TU48C selon la norme NF A49-215, et A106GrC selon la norme ASTM. Ce type d'acier faiblement allié est généralement utilisé en chaudronnerie pour les tuyauteries et choisis pour leur bonne soudabilité. L'acier TU48C a fait l'objet d'une composition chimique présentée dans le tableau III.1.

C	S	P	Si	Mn	Ni	Mo
0.19	0.0074	0.011	0.27	1.07	0.04	0.01
Nb	V	Cu	Sn	N	Al	
<0.01	<0.01	0.05	<0.005	0.011	0.0085	

Tableau.III.1 : Composition en % massique de l'acier TU48C [56].

- **L'acier X100**

Le transport du gaz dans des conditions économiques nécessite l'utilisation de pressions de transport élevées, et donc l'utilisation d'acier à haute limite d'élasticité comme l'acier X100.

La composition chimique de cet acier est donnée dans le tableau III.2.

C	Mn	Si	P	S	Ni	Cu	Mo	Al
0.21	2.013	0.24	0.012	0.005	0.182	0.203	0.295	0.029

Tableau.III.2 : Composition en % Massique de l'acier X100 [57].

III.2.2 Propriétés de l'acier TU48C et de l'acier X100

La matrice est supposée avoir un comportement viscoplastique à écrouissage isotrope. Pour des simulations éléments finis, on utilise les propriétés mécaniques suivantes :

- **L'acier TU48C**

- Le matériau constitutif de la matrice est viscoplastique écrouissable, avec une limite d'écoulement $\sigma_0 = 200\text{Mpa}$;
- module de Young $E = 209\text{ GPa}$;
- coefficient de Poisson $\nu = 0.3$;
- Comme n est le coefficient d'écrouissage dont la valeur est choisie égal à 0.17.

- **L'acier X100**

- Le matériau constitutif de la matrice est viscoplastique écrouissable, avec une ; limite d'écoulement $\sigma_0 = 574\text{Mpa}$;
- module de Young $E = 200\text{ GPa}$;

- coefficient de Poisson $\nu = 0.3$;
- Comme n est le coefficient d'érouissage dont la valeur est choisie égal à 0.1.

III.3 Les éprouvettes utilisées

III.3.1 Eprouvette axisymétrique entaillée (AE)

Les éprouvettes axisymétriques entaillées (AE), figure III.1, sont des éprouvettes de traction qui ont été mises au point à l'origine pour analyser l'effet de la contrainte de traction sur la rupture par déchirement ductile. La rupture d'une éprouvette AE se développe au niveau de l'entaille. En jouant sur le rayon d'entaille r , il est possible d'atteindre localement des niveaux de contrainte supérieurs à la limite d'écoulement du matériau ce qui se traduit par une augmentation du taux de triaxialité des contraintes T . Pour des rayons d'entailles r assez importants et en gardant le même rayon de la section minimale R_0 , les éprouvettes AE permettent d'engendrer des états de contrainte et de déformation quasi-homogènes et un taux de triaxialité constant et faible au centre de l'éprouvette [17, 40, 41].

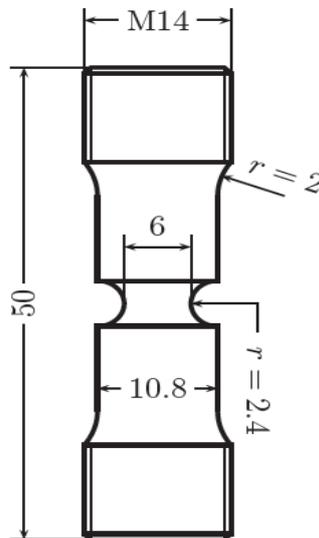


Figure. III.1 : Géométrie d'une éprouvette axisymétrique entaillée.

III.3.2 Eprouvette cylindrique lisse

Le comportement à la rupture d'une barre cylindrique lisse (c'est-à-dire non entaillée) soumise à une traction est l'objet de cette section. Cet exemple est choisi en raison des nombreuses études dont il a fait l'objet (Tvergaard et Needleman, 1984; Aravas, 1987; Thomason, 1990) [17, 39, 16]. Expérimentalement, la rupture de ce type de barre se produit en son milieu [17, 16]. L'évolution de la configuration de la barre depuis l'état

initial jusqu'à la rupture finale est représentée schématiquement à la figure III.2 [42]. Tout d'abord, le milieu de l'éprouvette se rétrécit (striction) ; ensuite une fissure s'amorce au centre de la partie "strictionnée", au voisinage de l'axe de symétrie, et se propage horizontalement vers la surface libre ; enfin, au voisinage de cette dernière et jusqu'à la rupture finale de l'éprouvette, la fissure dévie à 45° du plan horizontal, soit vers le haut soit vers le bas, dessinant ainsi, compte tenu de l'axisymétrie. Un calcul de structure par éléments finis faisant l'hypothèse d'un comportement local régi par le modèle GTN permet de reproduire fidèlement une telle succession d'événements [17, 16, 42].

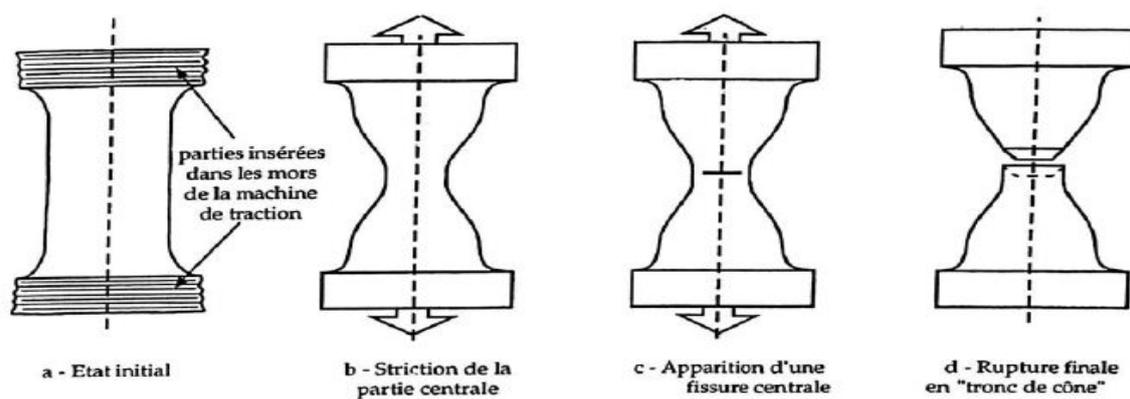


Figure.III.2 : Succession d'événements observée sur une éprouvette axisymétrique lisse en traction [42].

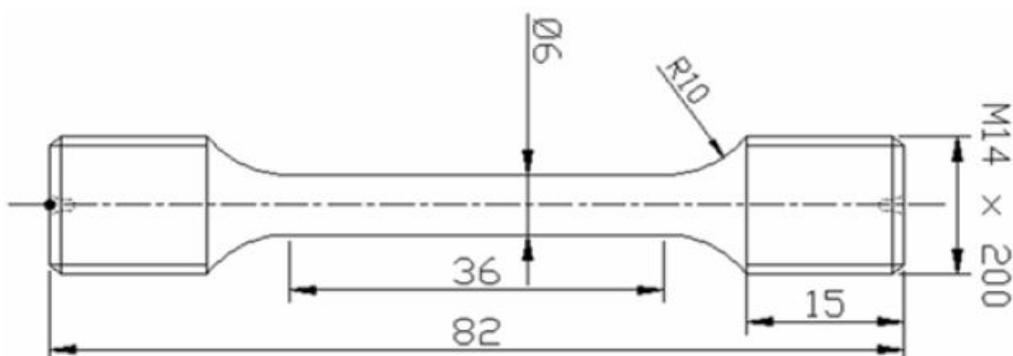


Figure.III.3 : Caractéristiques géométriques de l'éprouvette cylindrique lisse.

III.4 Simulation numérique

III.4.1 Le calibrage

Cette méthode est en général utilisée pour avoir accès à des paramètres internes des lois de comportement. Dans le cas de modèle GTN, il s'agit de déterminer la porosité critique f_c (porosité de début de coalescence) et la porosité à la rupture f_f .

- **L'acier X100**

Pour l'acier X100, nous avons choisi les valeurs des paramètres suivants.

- porosité initiale f_0 de l'acier considéré est prise égale à 0.0001 ;
- paramètres de Tvergaard : $q_1 = 1.5$, $q_2 = 1$ et $q_3 = (q_1)^2 = 2.25$;
- paramètres de nucléation de nouvelles cavités pilotée par la déformation plastique équivalente dans la matrice : $\varepsilon_N = 0.3$, $s_N = 0.1$ et $f_N = 0.04$;
- paramètres de coalescence des cavités : $f_c = 0.001$ et $\delta = 900$;
- Les constantes du matériau : $\eta = 1$ et $m = 35$.

- **L'acier TU48C**

Pour l'acier TU48C, nous avons choisi les valeurs des paramètres suivants.

- porosité initiale f_0 de l'acier considéré est prise égale à 0.0001 ;
- paramètres de Tvergaard : $q_1 = 1.5$, $q_2 = 1$ et $q_3 = (q_1)^2 = 2.25$;
- paramètres de nucléation de nouvelles cavités pilotée par la déformation plastique équivalente dans la matrice : $\varepsilon_N = 0.3$, $s_N = 0.1$ et $f_N = 0.04$;
- paramètres de coalescence des cavités : $f_c = 0.00135$ et $\delta = 800$;
- Les constantes du matériau : $\eta = 1$ et $m = 35$.

III.4.2 Tests sur un élément de volume

Dans cette section, la simulation numérique du modèle GTN couplé à la viscoplasticité, dans le code de calcul par élément finis ABAQUS, en utilisant l'algorithme d'Aravas étendu pour prendre en compte les effets visqueux, est vérifiée à travers des tests illustratifs sur un élément de volume cubique à huit nœuds. Les tests se portent sur une traction à différentes vitesses de déplacement (1, 0.1 et 0.01mm/s).

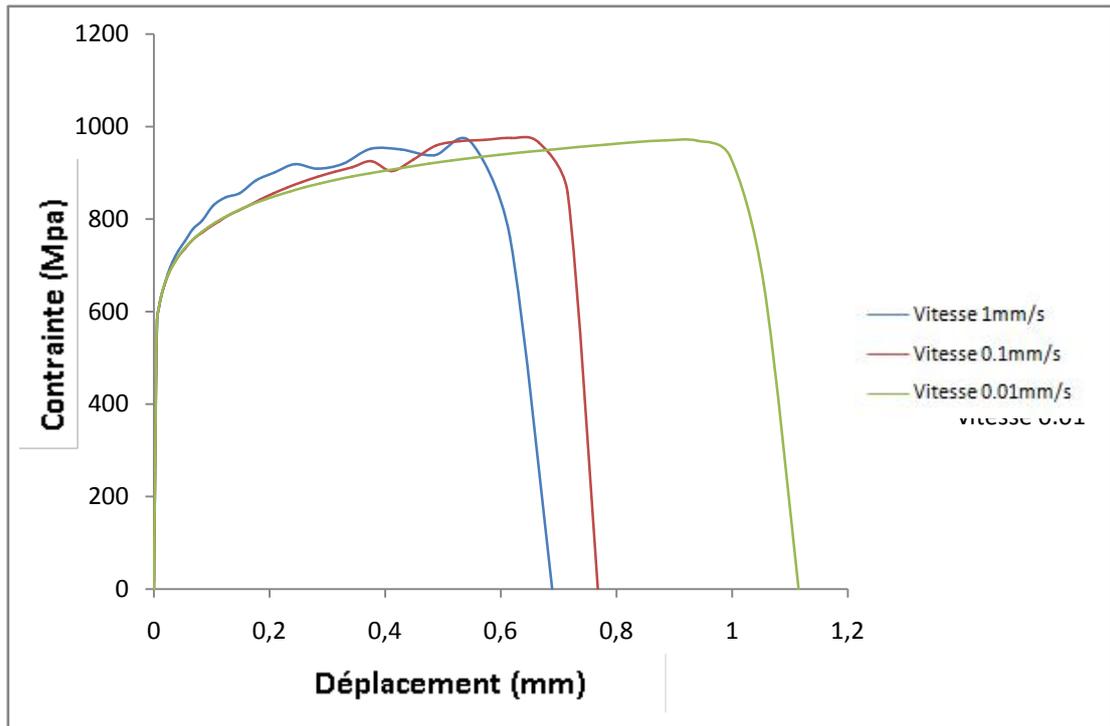


Figure. III.6 : Courbe contrainte-déplacement pour l'élément de volume (X100).

- L'acier TU48C

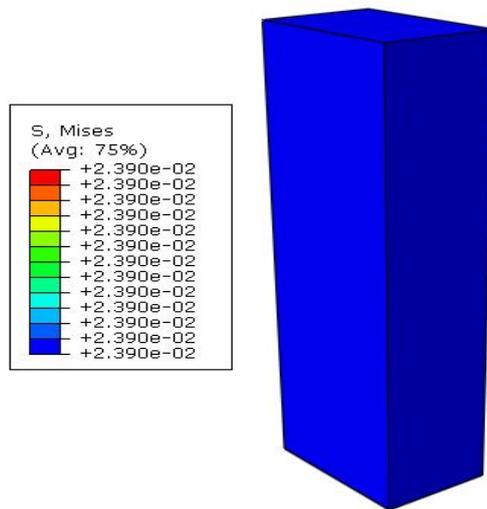


Figure. III.7 : Un élément de volume sous chargement (TU48C).

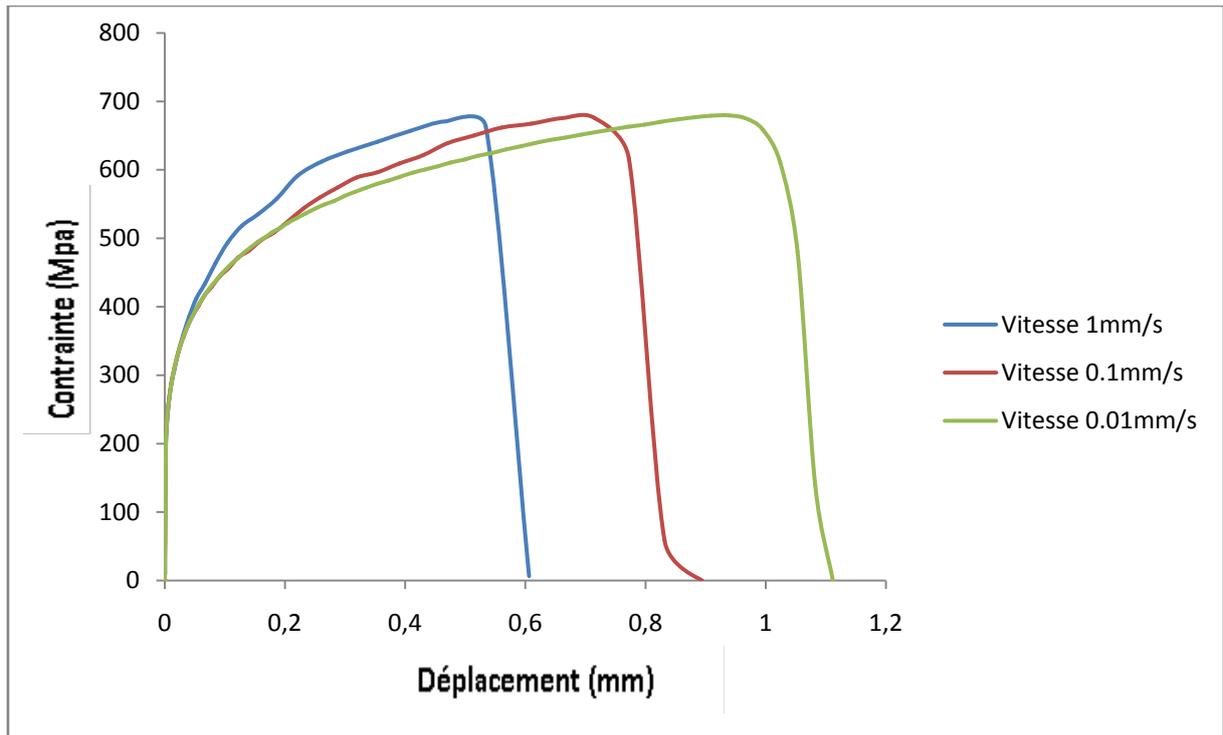


Figure. III.8 : Courbe contrainte-déplacement pour l'élément de volume (TU48C).

III.4.3 Etude de maillage

Les paramètres nécessaires au calibrage de la courbe numérique sont déterminés. Donc, nous allons passés à la simulation numérique de l'essai de traction. Il est bien connu que la solution élément fini dépend du maillage. En effet, ce dernier doit être suffisamment fin afin de capter correctement la réponse de notre matériau à l'essai de traction. Le nombre d'éléments doit d'autre part être limité en raison du temps de calcul qui croit fortement avec le nombre d'éléments. Afin d'adapter un meilleur maillage nous avons effectués plusieurs simulation d'essais de traction en changeant le nombre d'éléments jusqu'à l'obtention d'une courbe contrainte/déformation qui ne change pas quelque soit le nombre d'éléments ajouter.

III.4.3.1 Etude de maillage de l'éprouvette axisymétrique entaillée

a) Description des conditions de la simulation

Des simulations numériques de l'éprouvette AE avec une entaille ont été effectuées. L'éprouvette est désignée par AE_r où r représente la valeur du rayon de l'entaille. Par symétrie seul un quart du plan méridien est modélisé en mode axisymétrique.

Les conditions aux limites et de chargement de l'éprouvette (Figure III.9) : blocage de déplacement longitudinal des nœuds en X, et les vitesses de déformations $\dot{\epsilon} = 5.10^{-4} \text{ s}^{-1}$ imposée selon l'axe Y aux nœuds du sommet de l'éprouvette.

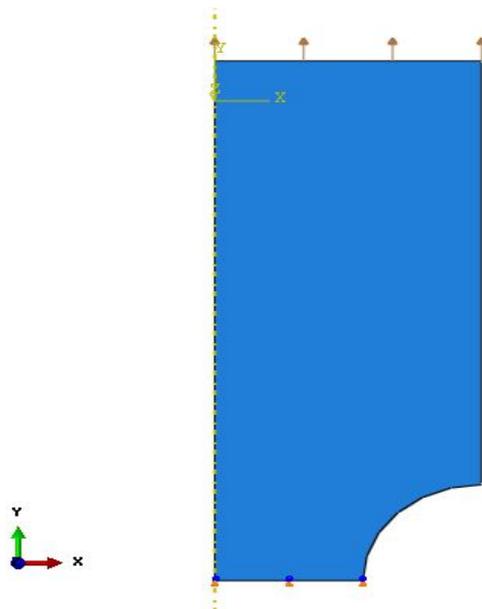


Figure. III.9 : Éprouvettes axisymétrique entaillées : conditions aux limites et chargement utilisés dans la simulation.

La figure III.10 présente les différents types de maillage utilisé pour notre simulation et la figure III.11 montre l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation pour différents nombre d'éléments.

Nous avons réalisé 5 simulations avec 5 maillages différents :

- Maillage grossier : 5 et 10 éléments sur l'arrête.
- Maillage moyen : 15 éléments sur l'arrête.
- Maillage fin : 30 et 40 éléments sur l'arrête.

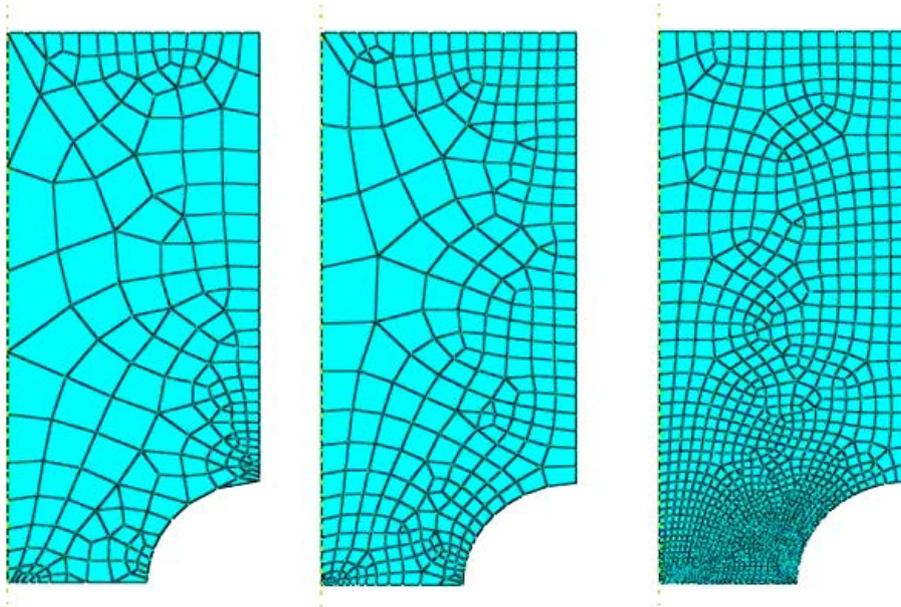


Figure III.10 : Différents maillage de l'éprouvette axisymétrique entaillée.

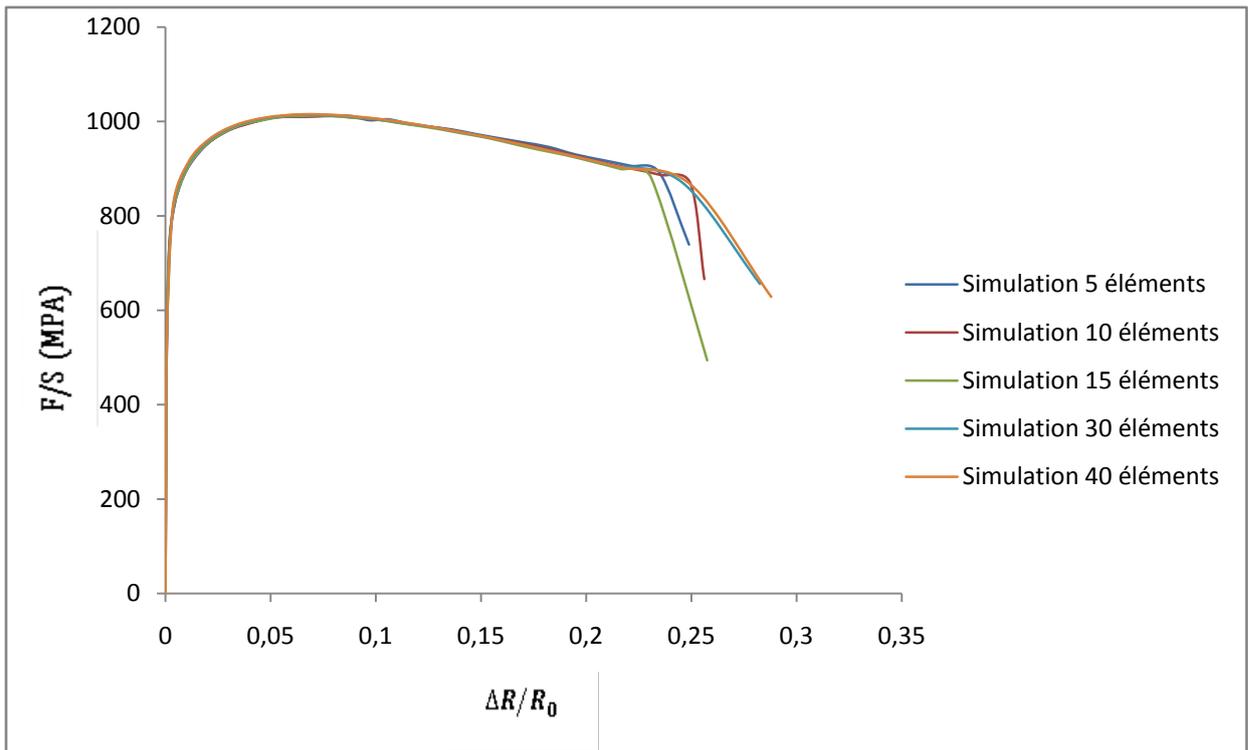


Figure.III.11 : Les courbes contrainte/déformation pour différents de nombre d'éléments de mailles.

III.4.3.2 Etude de maillage de l'éprouvette cylindrique lisse

a) Description des conditions de la simulation

Des simulations numériques de l'éprouvette cylindrique lisse ont été effectuées. Une fois les paramètres identifiés. On considère une barre de longueur initiale de $2l_0=36\text{mm}$ et de section circulaire de rayon initial $R_0=3\text{mm}$. En raison de l'axisymétrie du problème considéré seul le quart de la structure est analysé.

Les conditions aux limites et de chargement de l'éprouvette (Figure III.12) : blocage de déplacement longitudinal des nœuds en X, et la vitesse de déformation $\dot{\epsilon} = 0.0001 \text{ s}^{-1}$ imposée selon l'axe Y aux nœuds du sommet de l'éprouvette.

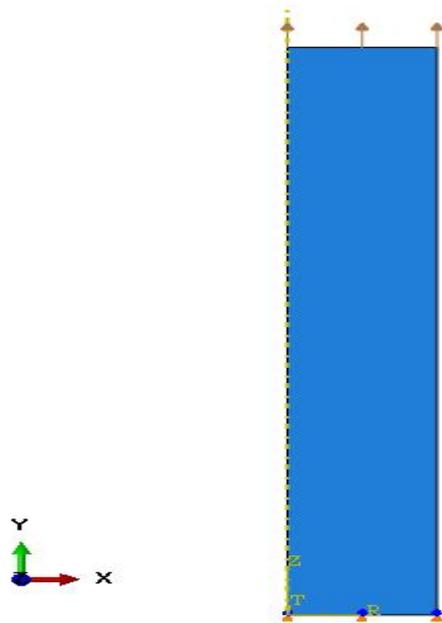


Figure. III.12 : Éprouvettes cylindrique lisse : conditions aux limites et chargement utilisés dans la simulation.

La figure III.13 représente les différents types de maillage utilisé pour notre simulation et la figure III.14 montre l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation pour différents nombre d'éléments.

Nous avons réalisé 9 simulations avec 9 maillages différents :

- Maillage grossier : 5 et 10 éléments sur l'arrête.
- Maillage moyen : 15 et 20 éléments sur l'arrête.
- Maillage fin : 30, 40, 50, 60 et 70 éléments sur l'arrête.

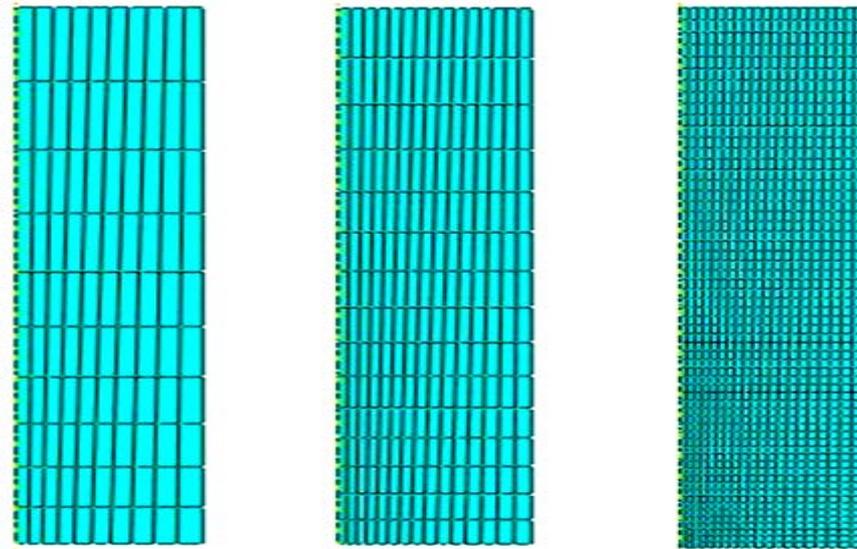


Figure III.13 : Différents maillage de l'éprouvette cylindrique lisse.

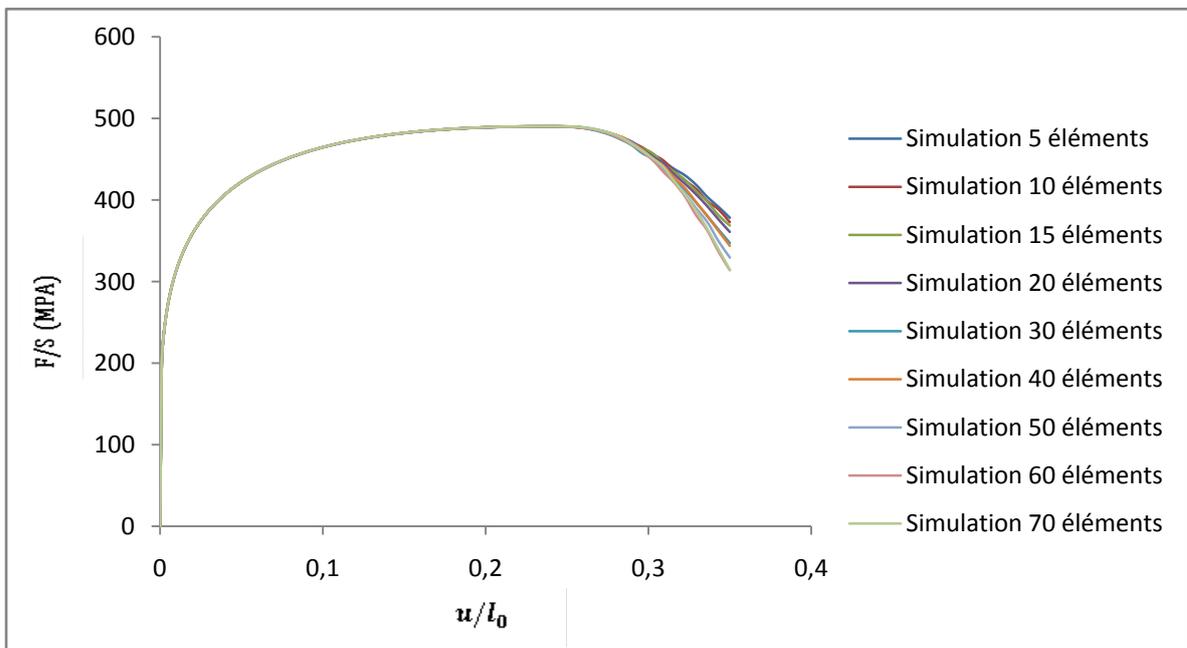


Figure.III.14 : Les courbe contrainte/déformation pour différents de nombre d'éléments de mailles.

III.4.3.3 Discussion des résultats de l'étude de maillage

Les figures (III.11 et III.14) montrent la réponse globale contrainte/déformation pour différentes tailles de mailles pour les deux types d'éprouvettes. Notons d'abord que la solution est parfaitement indépendante du maillage jusqu'à la striction localisée, le fait de mailler plus ou moins finement n'influence que la phase finale adoucissante des

courbes contrainte/déformation. Nous avons une dépendance certaine vis-à-vis de la taille du maillage dans la phase finale adoucissante.

D'après la figure III.11 pour l'éprouvette axisymétrique entaillée nous avons remarqué que la courbe contrainte/déformation ne change pas une fois le nombre de 30 éléments et atteint. Pour cela, nous avons optés pour le choix de 30 éléments sur l'arrête.

Pour la figure III.14 de l'éprouvette cylindrique lisse nous avons remarqué aussi que la courbe contrainte/déformation ne change pas une fois le nombre de 60 éléments et atteint. Pour cela, nous avons optés pour le choix de 60 éléments sur l'arrête.

III.4.4 Etude de concentration de contraintes

Une étude de maillage a été effectuée et il est bien connu que la solution élément fini dépend du coefficient de concentration de contraintes. En effet, ce dernier doit être suffisamment fin afin de capter correctement la réponse de notre matériau vis-à-vis l'essai de traction. La valeur de coefficient de concentration de contraintes doit être limitée en raison de temps de calcul. Pour avoir un meilleur coefficient de concentration de contraintes nous avons effectués plusieurs simulation d'essai de traction en variant la valeur de coefficient de concentration de contraintes jusqu'à l'obtention d'une courbe contrainte/déformation qui ne change pas quelque soit la valeur de coefficient de concentration de contraintes ajouter.

III.4.4.1 Etude de la concentration de contraintes de l'éprouvette axisymétrique entaillée

La figure III.15 présente les différents types de concentration de contraintes utilisées pour notre simulation. La figure III.16 montre l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation pour différents nombre des coefficients de concentration de contraintes.

Nous avons réalisé 6 simulations avec 6 coefficients différents :

- Concentration de contraintes grossier : 2 et 5 coefficients sur l'arrête.
- Concentration de contraintes moyen : 15 et 20 coefficients sur l'arrête.
- Concentration de contraintes fin : 30 et 40 coefficients sur l'arrête.

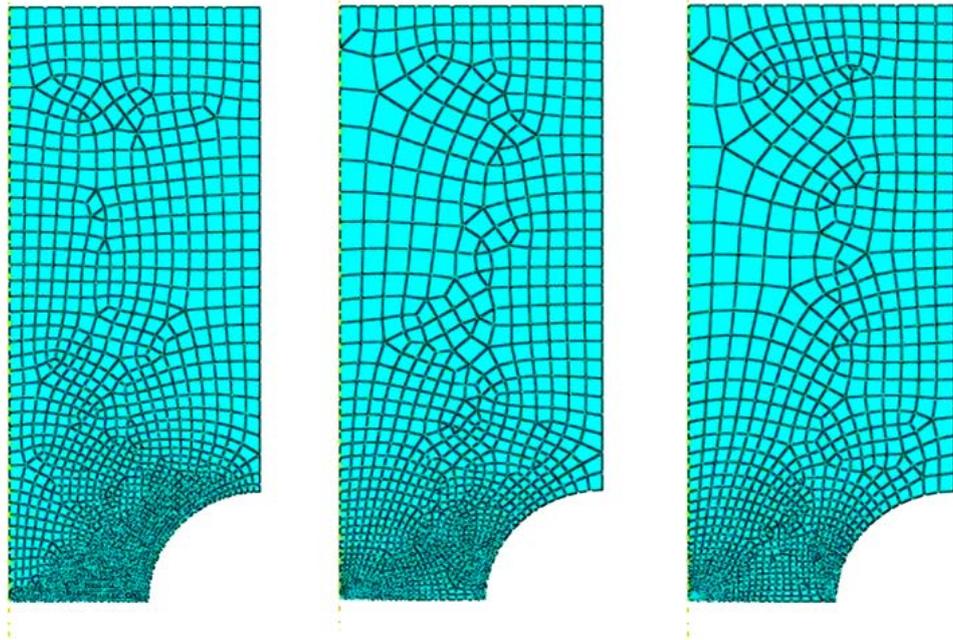


Figure III.15 : Différents coefficients de concentration de contraintes de l'éprouvette axisymétrique entaillée.

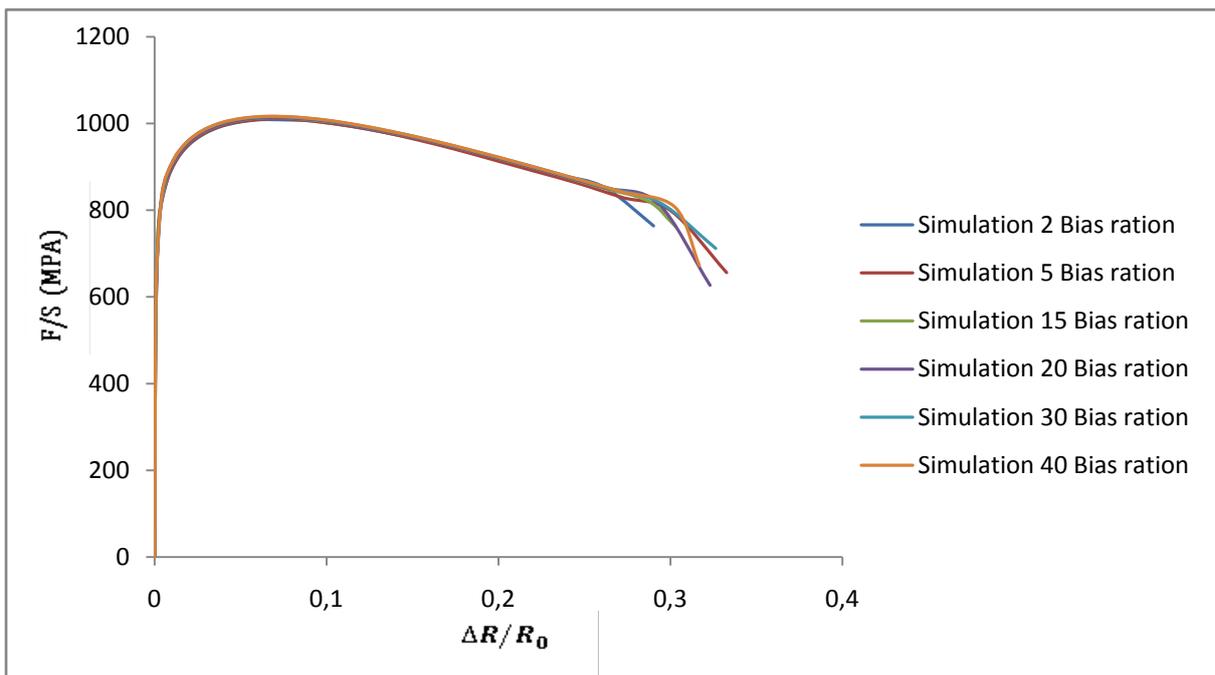


Figure.III.16 : Courbe contrainte/déformation pour différentes coefficients de concentration de contraintes.

III.4.4.2 Etude de concentration de contraintes de l'éprouvette cylindrique lisse

La figure III.17 présente les différents types de concentration de contraintes utilisées pour notre simulation. La figure III.18 montre l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation pour différents nombre des coefficients de concentration de contraintes.

Nous avons réalisé 6 simulations avec 3 coefficients différents :

- Concentration de contraintes grossier : 2 et 5 coefficients sur l'arrête.
- Concentration de contraintes moyen : 15 et 20 coefficients sur l'arrête.
- Concentration de contraintes fin : 30 et 40 coefficients sur l'arrête.

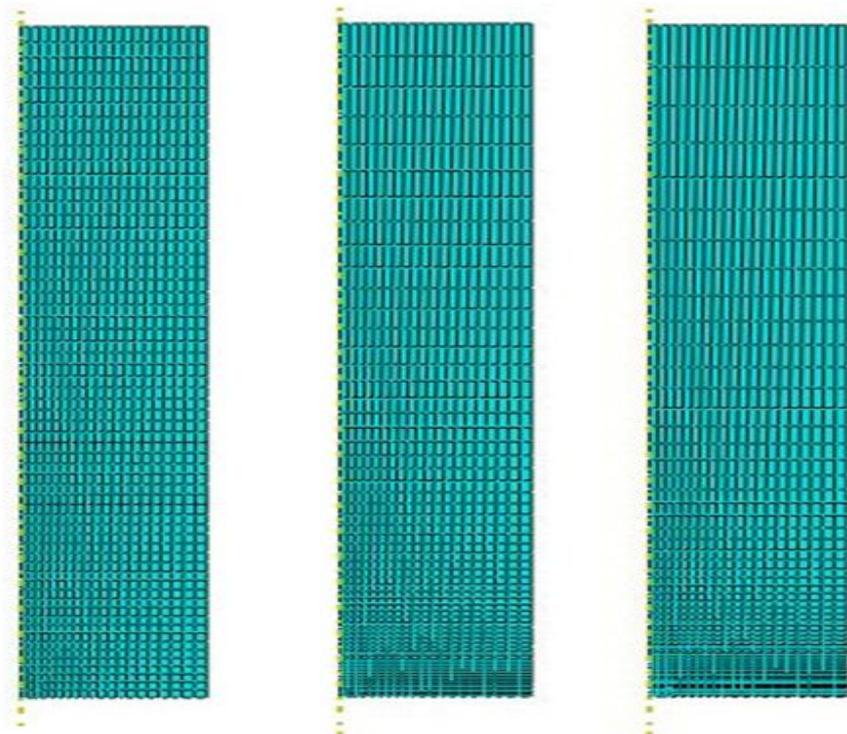


Figure III.17 : Différents coefficients de concentration de contraintes de l'éprouvette cylindrique lisse.

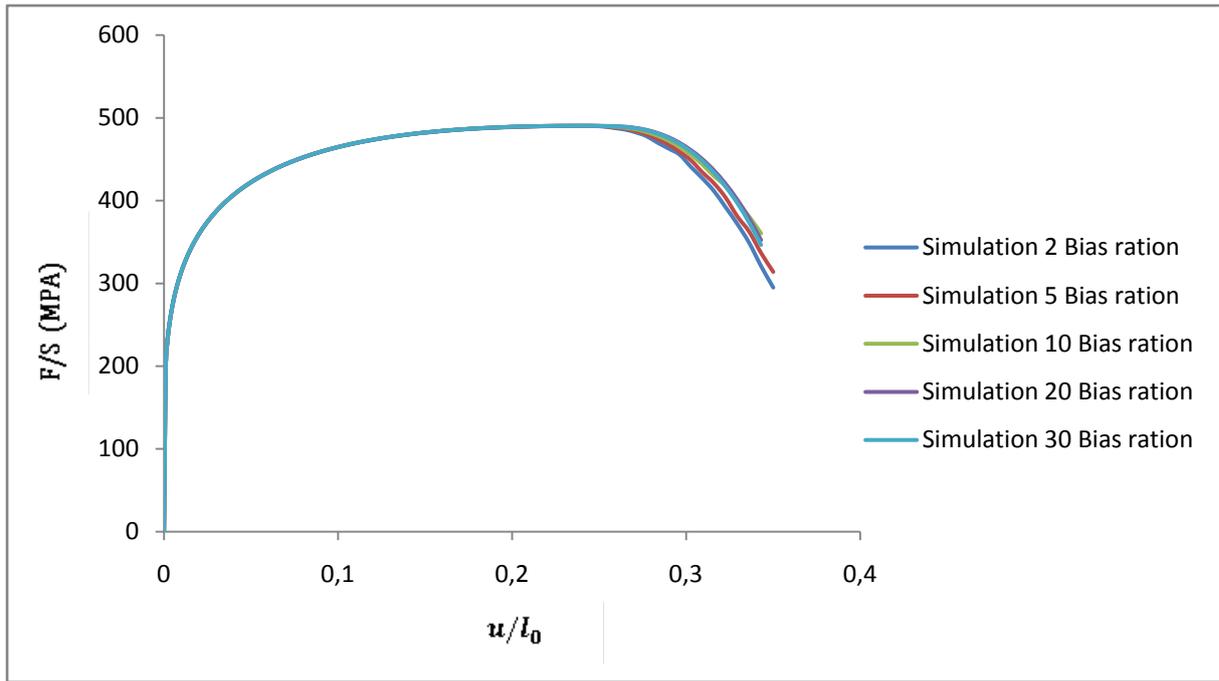


Figure.III.18 : Courbe contrainte/déformation pour différents coefficients de concentration de contraintes.

III.4.4.3 Discussion des résultats de l'étude de concentration de contraintes

Des comparaisons de courbes contraintes/déformation sont présentées sur les figures III.16 et III.18. Ces deux figures montrent que les calculs viscoplastiques sont très peu sensibles au coefficient de concentration de contraintes. Les résultats obtenus par calculs viscoplastiques sont indépendants du coefficient de concentration de contraintes jusqu'à la striction localisée et dépendent à la phase finale adoucissante.

D'après la figure III.16 de l'éprouvette axisymétrique entaillée nous avons constaté que la courbe contrainte/déformation est stable une fois la valeur de coefficient de concentration de contraintes vingt (20) est atteinte. Pour cela, nous avons optés pour le choix de vingt (20) comme valeur de coefficient de concentration de contraintes sur l'arrête de l'éprouvette.

D'après la figure III.18 concernant l'éprouvette cylindrique lisse, nous avons remarqué que la courbe contrainte/déformation ne change pas une fois le nombre de coefficient de concentration de contraintes vingt (20) est atteint. Pour cela, nous avons

optés le choix de vingt (20) comme valeur de coefficient de concentration de contraintes sur l'arrête de l'éprouvette.

III.4.5 Résultats et analyses des essais de simulation

III.4.5.1 Eprouvette axisymétrique entaillée

A partir des essais de simulation obtenus en utilisant le code de calcul par éléments fini ABAQUS pour l'éprouvette AE en acier ductile X100, nous avons abouti aux résultats suivants. Les figures III.10 et III.15 présentent le maillage éléments finis de l'éprouvette AE, composé d'élément axisymétrique. Au niveau de l'entaille, le maillage est très dense car c'est la zone litigieuse de fort endommagement. Pour l'éprouvette retenue, la barre cylindrique entaillée a une longueur initiale de $2l_0 = 26\text{mm}$, un rayon extérieur de $R_{\text{ext}} = 5.4\text{mm}$ et un rayon de la section minimale au niveau de l'entaille de $R_0 = 3\text{mm}$.

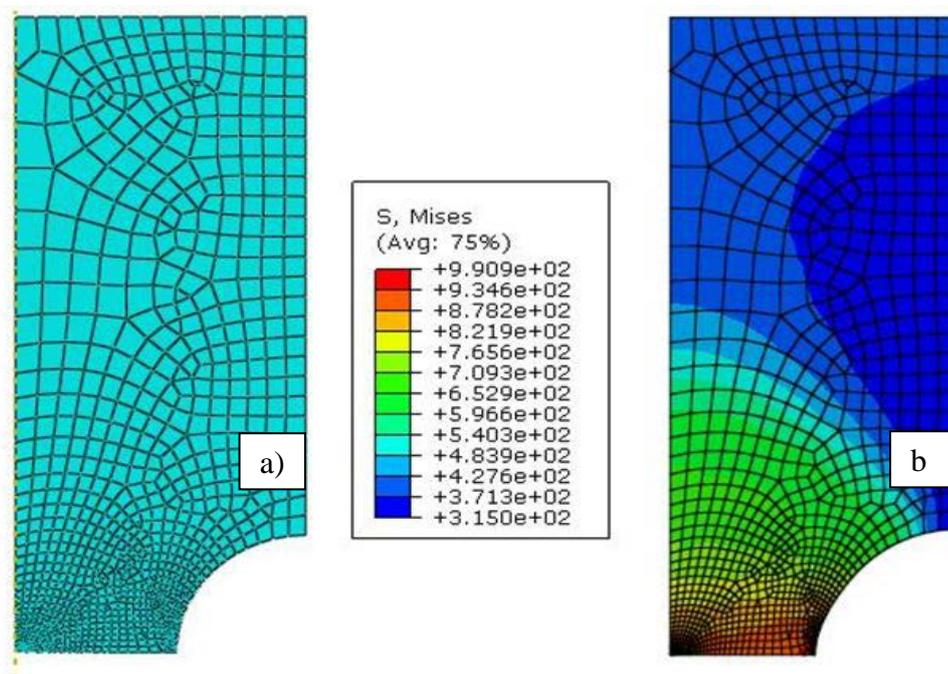


Figure. III.19 : ¼ d'éprouvette AE maillée a) avant chargement b) après chargement.

Les résultats obtenus après la simulation sont donnés dans les figures III.20 et III.21

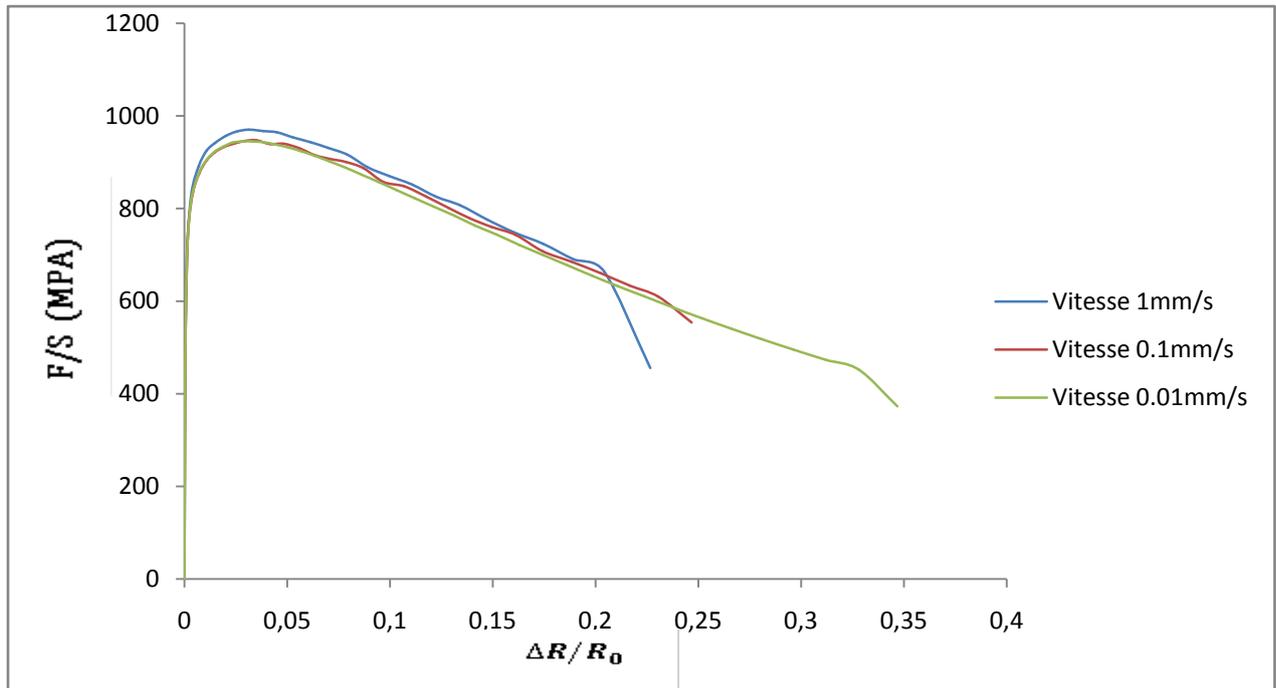


Figure. III.20 : Variations de la contrainte nominale $\sigma = \frac{F}{S}$ en fonction de la réduction nominale de rayon $\frac{\Delta R}{R_0}$ de l'éprouvette axisymétrique entaillée.

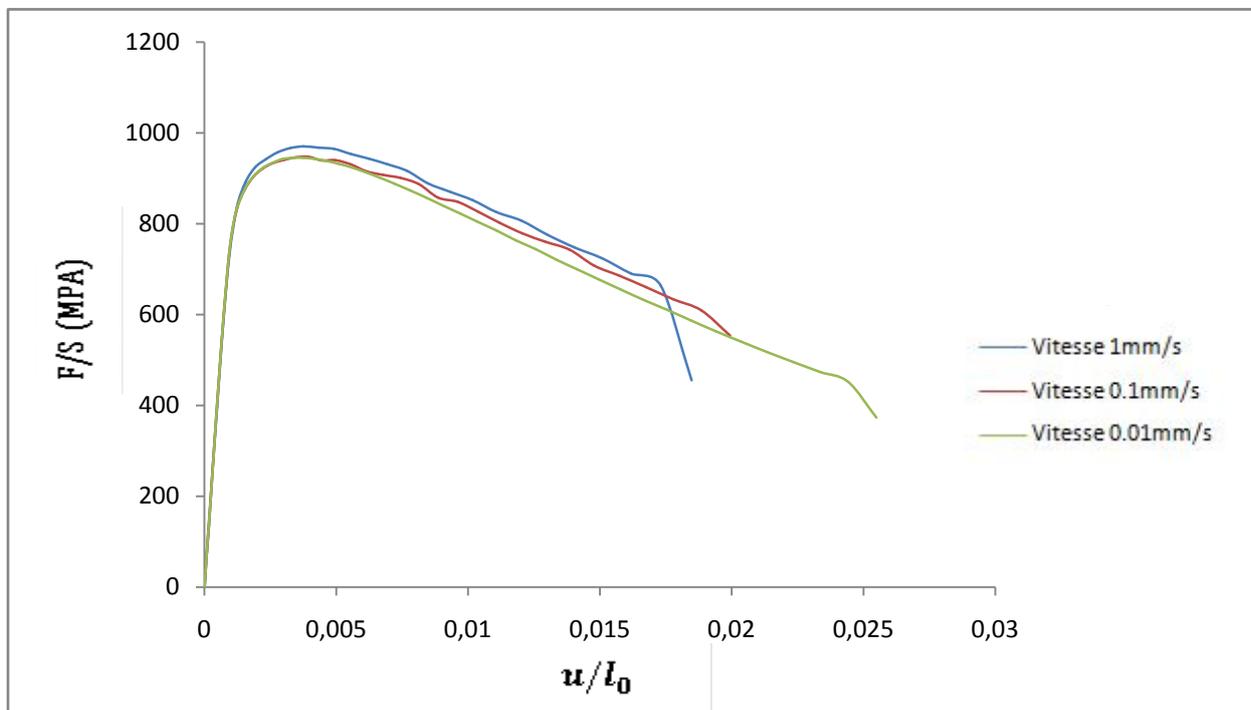


Figure. III.21 : Variations de la contrainte nominale $\sigma = \frac{F}{S}$ en fonction de la déformation nominale $\varepsilon = \frac{u}{l_0}$ de l'éprouvette axisymétrique entaillée.

III.4.5.2 Eprouvette cylindrique lisse

A partir des essais de simulation qui sont effectués dans le code de calcul par éléments fini Abaqus pour l'éprouvette cylindrique lisse en acier ductile TU48C, nous avons abouti aux résultats suivants. Le maillage est raffiné près du centre de l'éprouvette en raison de l'adoucissement et la déformation intense suspectés dans cette région.

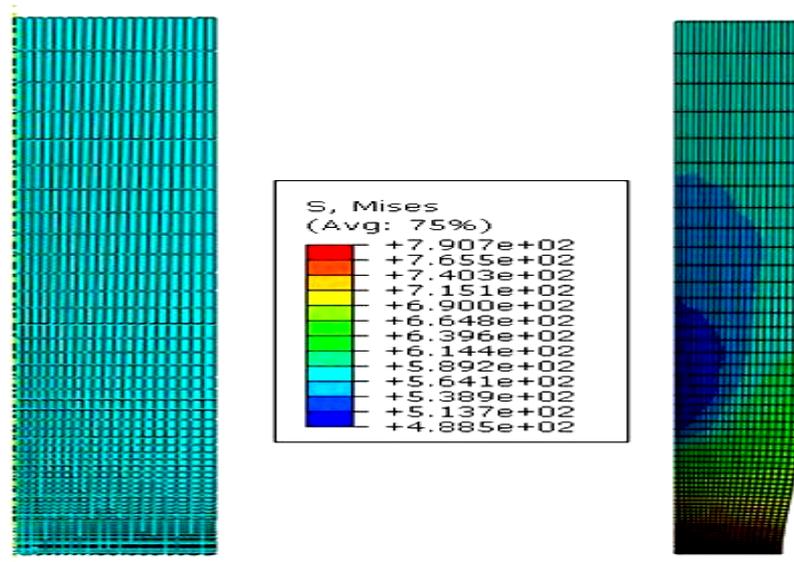


Figure.
III.22 : ¼

d'éprouvette lisse maillée a) avant chargement b) après chargement

Les résultats obtenus après la simulation sont données dans la figure III.23

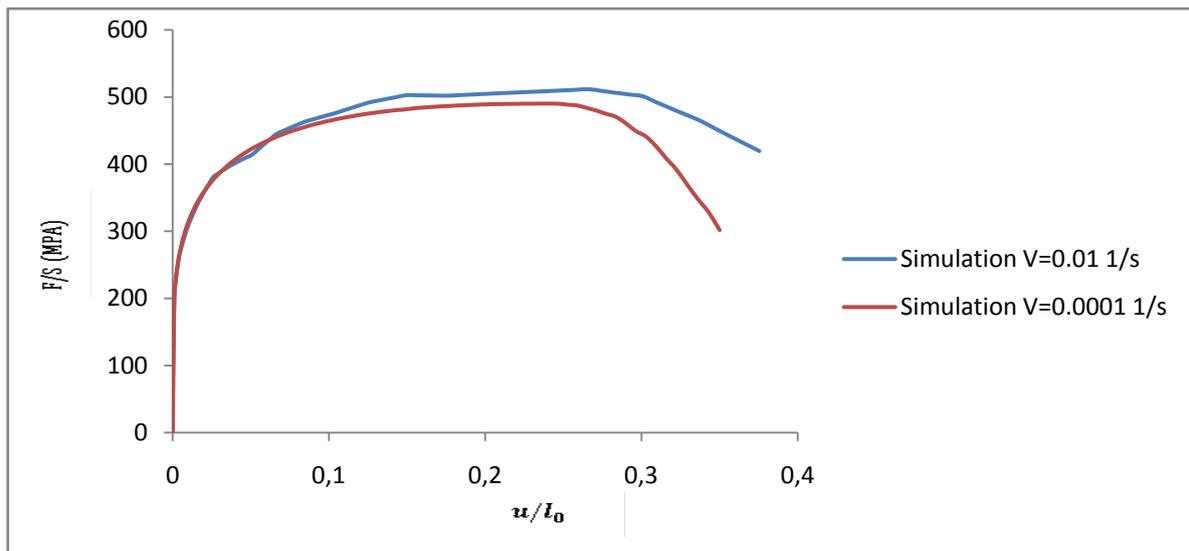


Figure. III.23 : Variations de la contrainte nominale $\sigma = \frac{F}{S}$ en fonction de la déformation nominale $\varepsilon = \frac{u}{l_0}$ de l'éprouvette cylindrique lisse.

III.4.5.3 Discussions des résultats

L'évolution de la contrainte nominale $\sigma = \frac{F}{S}$ en fonction de la déformation nominale $\varepsilon = \frac{u}{l_0}$ et de la réduction nominale de rayon $\frac{\Delta R}{R_0}$ pour les deux éprouvettes de modèle de comportement GTN couplé à la viscoplasticité est présentée sur les figures III.20, III.21 et III.23.

Pour l'éprouvette cylindrique lisse La contrainte nominale commence d'abord par augmenter jusqu'à atteindre un maximum puis la courbe se redresse et amorce une descente à cause de la diminution de la section au niveau du col de la barre. Cette chute s'accroît vers la fin en raison de la coalescence de certaines cavités au niveau du col de la barre. La force maximale, correspond au début de la striction.

Pour l'éprouvette axisymétrique entaillée La contrainte nominale commence d'abord par augmenter jusqu'à atteindre un maximum qui correspond au début de la striction, c'est la première partie (droite) correspond au domaine élastique, puis amorce une descente à cause de la diminution de la section au niveau de l'entaille, c'est la deuxième partie correspond au domaine viscoplastique.

Pour les deux éprouvettes on remarque que à chaque fois on augmente la vitesse de déformation le domaine viscoplastique diminue. On remarque aussi un décalage entre les courbes par rapport à différentes vitesses de déformation.

III.5 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux et discussions

III.5.1 Résultats obtenus sur une éprouvette axisymétrique entaillée

Dans cette section, nous comparons les résultats obtenus numériquement aux résultats expérimentaux tirés des travaux de « Thant Trung LUU » [57].

La figure III.24 représente une superposition de la courbe expérimentale et celle obtenue numériquement pour l'éprouvette axisymétrique entaillée. Nous observons sur la figure III.24 que la courbe numérique contrainte/déformation avec une vitesse de déformation de ($\dot{\varepsilon}=0.0005s^{-1}$) reproduit correctement les résultats expérimentaux. L'écart entre le modèle de GTN couplé à la viscoplasticité et les résultats de

l'expérience peut s'expliquer par le fait que le matériau utilisé (X100) est un matériau anisotrope.

Donc pour une évaluation de la courbe contrainte-déformation à partir de modèle GTN couplé à la viscoplasticité, il faudrait proposer une extension pour tenir en compte l'anisotropie du matériau.

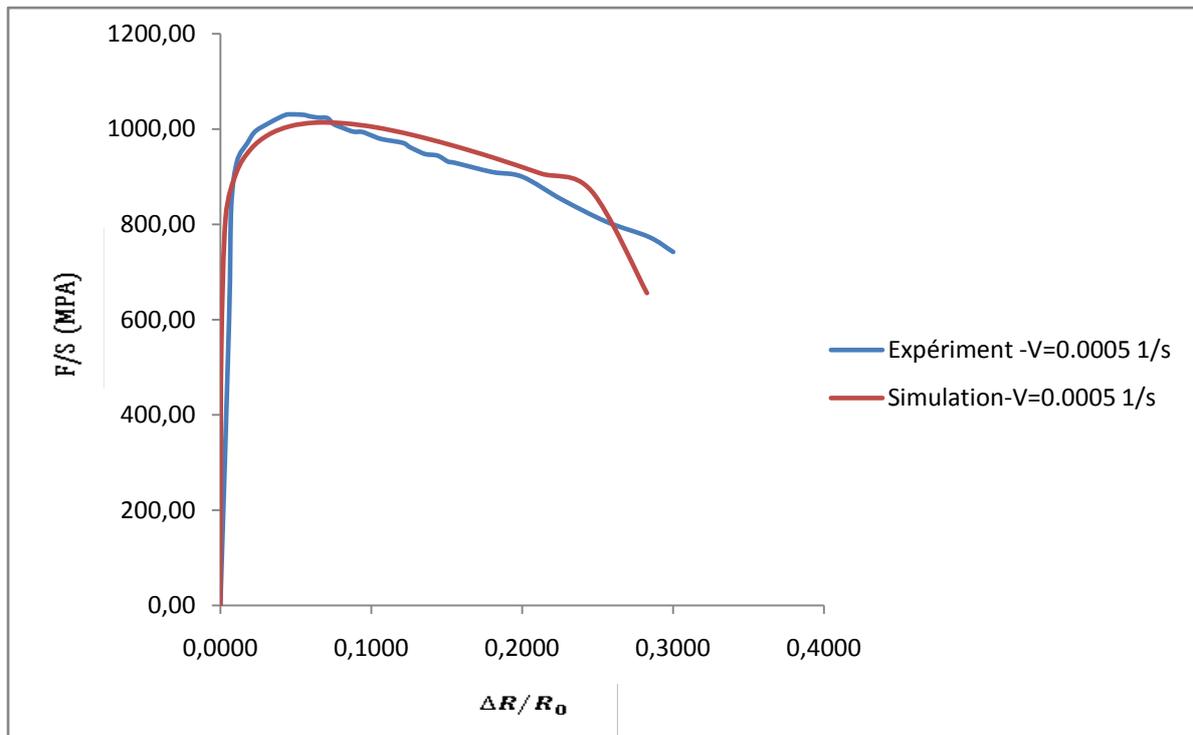


Figure.III.24 : Courbe contrainte/déformation simulation et expérimentale de l'éprouvette axisymétrique entaillée.

III.5.2 résultats obtenus sur une éprouvette cylindrique lisse

Dans cette section, nous comparons les résultats obtenus numériquement aux résultats expérimentaux tirés des travaux de « Huaidong WANG » [56].

La figure III.25 représente une superposition de la courbe expérimentale et celle obtenue numériquement pour l'éprouvette cylindrique lisse. Nous observons sur la figure III.25 que la courbe numérique contrainte/déformation à différentes vitesses de déformations ($\dot{\epsilon}_1=0.0001s^{-1}$ et $\dot{\epsilon}_2=0.01s^{-1}$) reproduit correctement les résultats expérimentaux.

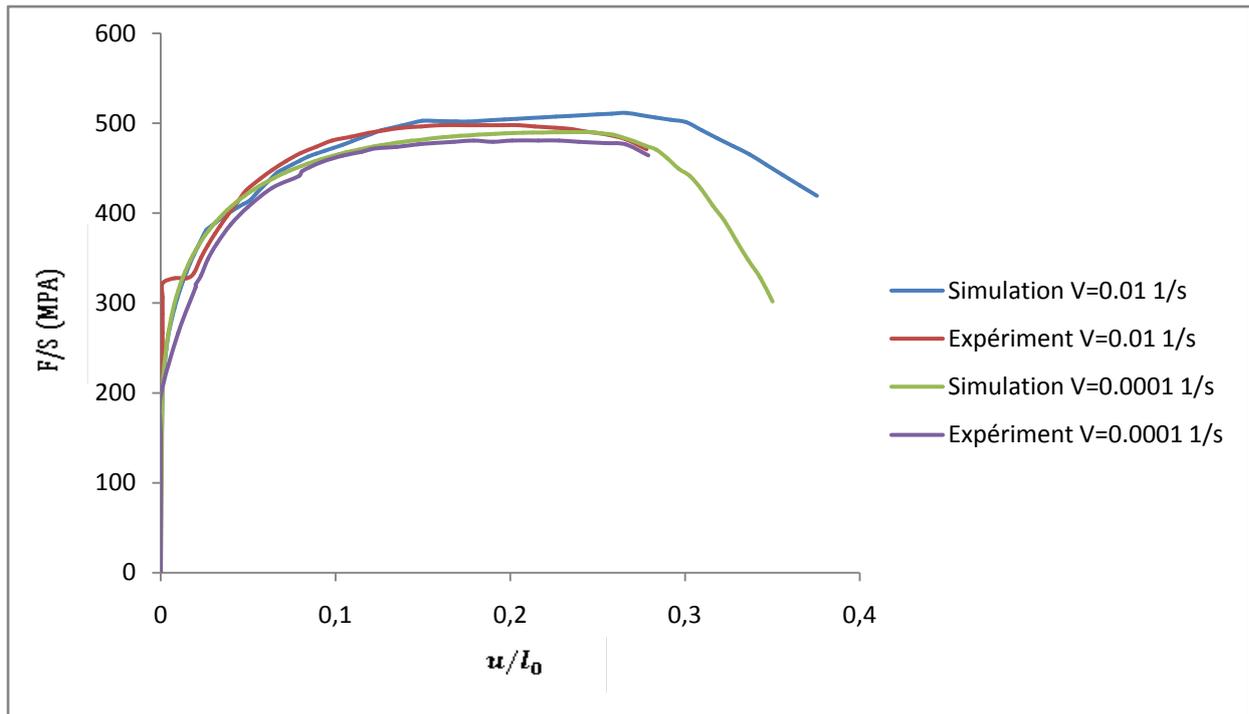


Figure.III.25 : Courbe contrainte/déformation simulation et expérimentale de l'éprouvette cylindrique lisse.

III.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé la partie simulation numérique et plus précisément le calcul à la rupture de la structure mécanique avec l'approche micromécanique. Nous avons également présenté des résultats de calculs de l'implémentation de modèle GTN couplé à la viscoplasticité.

Le test de calibrage que nous avons présenté au début de ce chapitre, nous a permis de déterminer les paramètres du matériau de notre modèle. Les valeurs ainsi déterminées sont utilisées pour la simulation numérique des essais de traction avec le modèle GTN couplé à la viscoplasticité. Les résultats de la simulation numérique présentée au cours de ce chapitre sont très proches de l'expérimentale.

Conclusion générale

Conclusion générale

La mécanique de la rupture est un domaine en plein essor, dont l'étude fait appel à différentes disciplines : modélisation numérique, investigations physiques et métallurgique.

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la modélisation de la rupture ductile de matériaux métalliques à partir de l'approche locale. Ce type de démarche a pour objectif de modéliser les mécanismes physiques de l'endommagement ductile : l'amorçage, la croissance et la coalescence de micro-cavités. Au vu de l'étude bibliographique, il s'est avéré que les modèles de micromécanique semblaient être les plus aptes à décrire les processus physiques de l'endommagement ductile.

Le travail effectué dans le cadre de ce mémoire, nous a permis :

- De développer une certaine maîtrise sur la théorie de la plasticité et son extension à la viscoplasticité et à l'endommagement dans le cadre de l'approche physique de la rupture ductile ;
- De nous familiariser avec les algorithmes d'implémentation de lois de comportement ainsi qu'au langage Fortran et les techniques numériques de programmation ;
- D'approfondir nos connaissances sur la modélisation du comportement des métaux présentant une sensibilité à la vitesse de chargement (viscoplasticité) et à l'optimisation de ce puissant outil tels que l'étude de l'influence du maillage, l'identification des paramètres,

Nous avons donc abordé les aspects théoriques et numériques liés à l'étude de la viscoplasticité couplée à l'endommagement dans le cadre de l'approche physique. Le couplage du modèle GTN pour rendre compte des effets visqueux adopté dans cette étude a montré que la formulation adoptée est prometteuse. La comparaison des prédictions numériques aux résultats expérimentaux confirmant cette conclusion.

Les développements et calculs numériques de cette étude permettent d'envisager plusieurs perspectives.

- L'incorporation des effets visqueux dans une loi de comportement élastoplastique avec écrouissage cinématique.
- Couplage adiabatique température-viscoplasticité dans le cas de la dynamique rapide.
- Couplage fort frottement-température-viscoplasticité.
- Réalisation d'essais de traction pour le comportement viscoplastique de deux éprouvettes (axisymétrique entaillée et cylindrique lisse) à des différentes vitesses de déformation.
- Introduire une loi non linéaire pour inclure la vitesse de déformation.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] **KLEINE, A.**, « Modélisation numérique du comportement des ouvrages souterrains par une approche viscoplastique ». Thèse de Doctorat d'Etat, Institut national polytechnique de lorraine, 2007.
- [2] **BOIDY, E.**, « Modélisation numérique du comportement différé des cavités souterraines ». Thèse de Doctorat d'Etat, Institut des sciences et techniques de Grenoble (I.S.T.G), 2002.
- [3] **GURLAND, J., et PLATEAU, J.**, « Mechanism of ductile rupture of metals rupture of metals containing inclusions ». Journal of the ASM, 56:442-455, 1963.
- [4] **GOODS, S.-H., et BROWN, L.-M.**, « The nucleation of cavities by plastic deformation ». Acta metallurgica, 27:1-15, 1979.
- [5] **ARGON, A.-S.**, « Formation of cavities from non deformable second phase particles in low temperature ductile fracture ». Transaction of the ASME, 1976.
- [6] **NEEDLEMAN, A.**, « A continuum model for void nucleation by inclusion debonding ». Journal Applied Mechanics, 54:525-530, 1987.
- [7] **BEREMIN, F.-M.**, « Cavity formation from inclusions in ductile fracture of A508 steel ». Metallurgical transactions, 12A:723-731, 1981.
- [8] **NEEDLEMAN, A., et RICE, J.-R.**, « Limit to ductility set by plastic flow localization ». Mechanics of sheet metal forming, 1978.
- [9] **CHU, C.-C., et NEEDLEMAN, A.**, « Void nucleation effects in biaxially stretched sheets ». J. Engng. Mater. Technol., 102:249-256, 1980.
- [10] **McCLINTOCK, F.-A.**, « A criterion for ductile fracture by the growth of holes ». J. Applied Mechanics, 35:363-371, 1968.
- [11] **RICE, J.-R., et TRACEY, D.-M.**, « On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields ». J. Mech. Phy. Solids, 17:201-217, 1969.
- [12] **HUANG, Y.**, « Accurate dilatation rates for spherical voids in triaxial stress fields ». Journal of Applied Mechanics, 58:1084-1086, 1991.
- [13] **PERRIN, G., et LEBLOND, J.-B.**, « Analytical study of a hollow sphere made of plastic porous material and subjected to hydrostatic tension-application

- to some problems in ductile fracture of metals ». *Int. J. Plasticity*, 6:677-699, 1990.
- [14] **KOPLIK, J., et NEEDLEMAN, A.,** « Void growth and coalescence in porous plastic solids ». *Int. J. Solids Struct*, 24:835-863,1988.
- [15] **BENZERGA, A.-A.,** « Rupture ductile des toles anisotropies: simulation de la propagation longitudinale dans un tube pressurisé ». Thèse de Doctorat d'Etat, Ecole nationale supérieure des mines de paris, 2000.
- [16] **THOMASON, P.-F.,** « A theory for ductile fracture by internal necking of cavities ». *Journal of the institute of metals*, 96:360-365, 1968.
- [17] **TVERGAARD, V., et NEEDLEMAN, A.,** « Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar ». *Acta metallurgica*, 32:157-169, 1984.
- [18] **GURSON, A.-L.,** « Continuum theory for ductile rupture by void nucleation and growth: part1-yield criteria and flow rules for porous ductile media ». *J. Engng Mater. Technol*, 99(2), 1977.
- [19] **BENABBES, A.,** « Approches micromécaniques de la compaction de poudres et de la rupture ductile des matériaux incluant le 3^{me} invariant des contraintes ». Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Reims Champagne Ardenne École Doctorale Sciences, Technologie, Santé, 2009.
- [20] **OULD OUALI, M.,** « Approche micromécanique de la rupture ductile dans les procédés de mise en forme des matériaux. Prise en compte de l'effet de forme des cavités ». Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Reims Champagne-ardenne, 2007.
- [21] **PERZYNA, P.,** « Fundamental problems in viscoplasticity ». *Advances in applied mechanics*, vol 9, Academic press New York and London PP243-377, 1966.
- [22] **RISTINMAA, M., et OTTOSEN, N.-S.,** « Consequences of dynamic yield surface in viscoplasticity ». *Int. J. Solids Struct*, vol 37, pp4601-4622. 2000.
- [23] **LEMAITRE, J., et CHABOCHE, J.-L.,** « Mécanique des matériaux solides ». 2^{ème} édition. Collection sciences sup, Edition DUNOD, 2004.
- [24] **CHAMBON, R.,** « General presentation of constitutive modelling of geomaterials ». *Revue Francaise de genie civil*, vol 4, N°5, pp9-31, 2000.

- [25] **SINGH, A., et MITCHELL, J.-K.,** « Creep potential and rupture of soils ». Proceedings of 7th conference on soil mechanics and foundation engineering. Mexico, pp 379-384, 1969.
- [26] **LESTRIEZ, P.,** « Modélisation numérique du couplage thermo-mécanique-endommagement en transformation finies. Application à la mise en forme ». Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Technologie de Troyes, 2003.
- [27] **TVERGAAR, V.,** « Influence of voids on shear bands instabilities under plane strain conditions ». Int. J. Fracture, 17:389-407, 1981.
- [28] **ABAQUS.,** Version 6.12-1.
- [29] **ZIENKIEWICZ, O.-C., et TAYLOR, R.-L.,** « The finite element method, vol. 1: The basis, vol. 2: Solid mechanics, vol. 3: Fluid dynamics ». Butterworth-Heinemann, Oxford, fifth edition, 2000.
- [30] **DHATT, G., et TOUZOT, G.,** « Methode des éléments finis-une présentation ». Hermès, Paris, 2005.
- [31] **KARDESTUNCER, H., et NORRIE, D.-H.,** « Finite elements handbook ». McGraw-Hill, 1987.
- [32] **KHELIFA, M.,** « Simulation numérique de l'endommagement en formage des structures minces ». Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Technologie de Troyes, 2004.
- [33] **ORTIZ, M., et POPOV, E.-P.,** « Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations ». Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 21, pp. 1561-1576, 1985.
- [34] **MARCAL, P.-V.,** « A stiffness method for elastic-plastic problems ». Int. J. Mec. Sci., vol. 7, pp. 229-238, 1965.
- [35] **DHATT, G., et TOUZOT, G.,** « Une présentation de la méthode des éléments finis ». collection UTC, Maloigne, Paris, 1985.
- [36] **BRAUDEL, J.-H.,** « Modélisation numérique des grandes déformations élastoplastiques d'un solide isotrope par la méthode des éléments finis. Application à l'extrusion à froid des métaux ». Thèse de Doctorat d'Etat, Université Claude Bernard, Lyon I, France, 1986.

- [37] **LI, S., et SIMONSEN, C.-B.,** « Meshfree simulations of ductile crack propagation ». International journal for computational methods in engineering science and mechanics, 6:1-19, 2005.
- [38] **CHEN, Y., et GHOSH, S.,** « Micromechanical analysis of strain rate-dependent deformation and failure in composite microstructures under dynamic loading conditions ». International Journal of plasticity 32-33(2012)218-247.
- [39] **ARAVAS, N.,** « On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models ». International journal for numerical methods in engineering, 24, 1395-1416,(1987).
- [40] **BESSON, J.,** « Eprouvettes axisymétriques entaillées ». Rapport technique, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Centre des Matériaux, Evry, France, 1999.
- [41] **BENZERGA, A.-A., BESSON, J., et PINEAU, A.,** « Anisotrope ductile fracture ». Part ii : theory. Acta Materialia, 52, 2004.
- [42] **LEBLOND, J.-B.,** « Mécanique de la rupture fragile et ductile ».2003.
- [43] **RENON, N.,** « Simulation numérique par éléments finis des grandes déformations des sols. Application à la Scarification ». Thèse de Doctorat d'Etat, Ecole des Mines de Paris, 2002.
- [44] **WILSIUS, J.,** « Etude expérimental et numérique de la déchirure ductile basée sur des approches locales en mécanique de la rupture ». Thèse de Doctorat d'Etat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1999.
- [45] **CHAMBERT, J.,** « Analyse et modélisation de la rupture ductile par des modèles micromécaniques fondés sur l'approche locale ». Thèse de Doctorat d'Etat, Université BLAISE PASCAL-CLERMONT II, 2001.
- [46] **MARIAGE, J.-F.,** « Simulation numérique de l'endommagement ductile en formage de pièces massives ». Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Technologie de Troyes en SCIENCES MECANIQUES POUR L'INGENIEUR, 2003.
- [47] **BOUCHARD, P.-O.,** « Contribution a la modélisation numérique en mécanique de la rupture et structures multimatériaux ». Thèse de Doctorat d'Etat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.

- [48] **MOHAMMAD SADEGHI, B.**, « Analyse et Identification du comportement mécanique d'aciers à effet TRIP à partir de mesures de champs cinématiques ». Thèse de Doctorat d'Etat, Ecole nationale supérieure d'arts et Métiers, 2010.
- [49] **ZHIYING, C., et XIANGHUAI, D.**, « The GTN model based on Hill'48 anisotropic yield criterion and its application in sheet metal forming ». *Computational Materials Science* 44 (2009) 1013-1021.
- [50] **HEALY, B., GULLERUD, A., KOPPENHOEFER, K., ROY, A., ROYCHOWDHURY, S., WALTERS, M., BICHON, B., COCHRAN, K., CARLYLE, A., et DODDS, R.**, « 3-D Dynamic nonlinear fracture analysis of solids using parallel computers and workstations ». University of Illinois Urbana, Illinois, 2010.
- [51] **CHEN, Y., et GHOSH, S.**, « Micromechanical analysis of strain rate-dependent deformation and failure in composite microstructures under dynamic loading conditions ». *International Journal of plasticity* 32-33(2012)218-247.
- [52] **TRILLAT, M.**, « Analyse limite : application à la rupture ductile des matériaux poreux ». Thèse de Doctorat d'Etat, Université de savoie- chambéry, 2005.
- [53] **ZAIRI, F., NAIT-ABDELAZIZ, M., WOZNICA, K., et GLOAGUEN, J.-M.**, « Constitutive equations for the viscoplastic-damage behaviour of a rubber-modified polymer ». *European journal of mechanics A/solids* 24(2005)169-182.
- [54] **FENG, Z.-Q.**, « Mécanique non linéaire ». UFR Sciences et Technologies, Université d'Evry Val d'Essonne, 2007.
- [55] **HAO, S., et BROCKS, W.**, « The Gurson-Tvergaard-Needleman-model for rate and temperature-dependent materials with isotropic and kinematic hardening ». *Computation mechanics* 20 (1997) 34-40 Springer-Verlag 1997.
- [56] **WANG, H.**, « Comportement mécanique et rupture des aciers au C-MN en présence de vieillissement dynamique ». Thèse de Doctorat d'Etat, Ecole Centrale Arts et Manufactures (Ecole Centrale Paris), 2011.
- [57] **LUU, T.-T.**, « Déchirure ductile des aciers à haute résistance pour gazoducs (X100) ». Thèse de Doctorat d'Etat, Ecole des Mines de Paris, 2006.

Annexes

Annexes

Extensions du potentiel de Gurson

Le modèle GTN est fort utilisé pour suivre dans un calcul par éléments finis l'évolution de la porosité et donc celle de l'endommagement d'un matériau. Il permet en particulier de déterminer l'instant au cours du processus de chargement où l'endommagement atteint une valeur critique conduisant à la rupture d'un élément de volume. Plusieurs extensions ont cependant été apportées au modèle de Gurson par plusieurs auteurs parmi lesquels les suivants.

a) Richmond et Smelser (1985)

Ont modifié le critère original de Gurson de la manière suivante

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \bar{\sigma}, f) = \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}}\right)^2 + 2f^m \cosh\left(\frac{3}{2}m\frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - f^{2m} = 0$$

où m est une constante liée au matériau compris entre $2/3$ et 1 . **Richmond et Smelser (1985)** ont suggéré de prendre $m = (2 + N)/3$ où N est l'exposant d'écroutissage de la courbe contrainte déformation de la matrice. Dans le cas d'un chargement en cisaillement d'un réseau périodique de cellules cubiques contenant des vides sphériques, ces auteurs ont constaté que les valeurs de la contrainte d'écoulement pouvaient être beaucoup plus faibles que celles trouvées par le modèle GTN. C'est pour cette raison les auteurs ont remplacé la porosité f par une porosité effective f^m .

b) Sun et Wang (1989)

Ont estimé la surface de charge macroscopique d'un matériau poreux ($f \leq 0.3$) à travers l'analyse limite d'une cellule de base identique à celle utilisée par Gurson, et soumise cependant à son bord à un état de contrainte homogène. Le critère obtenu s'écrit

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \bar{\sigma}, f) = \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}}\right)^2 + f\left(2 - \frac{1}{2}\ln f\right) \cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - f(1 + \ln f) = 0$$

c) Michel et Suquet (1992)

Le comportement effectif des matériaux poreux élastoplastiques isotropes est approché par le critère, fondé sur la méthode d'homogénéisation non linéaire, suivant

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \bar{\sigma}, f) = \left(1 + \frac{2}{3}f\right) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}}\right)^2 + \frac{9}{4} \left(\frac{1-f}{\ln f}\right)^2 \left(\frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}}\right)^2 - (1-f)^2 = 0$$

Le terme devant $(\Sigma_m/\bar{\sigma})^2$ a été déterminé pour satisfaire le résultat. En revanche, le terme de $(\Sigma_{eq}/\bar{\sigma})^2$ a été introduit afin de respecter la borne inférieure de Hashin-Shtrikman dans le cas d'un chargement purement déviatorique.

d) Leblond et al. (1994)

Ont proposé de modifier, de manière phénoménologique, le critère de Gurson en introduisant le facteur $\left(1 + \frac{2}{3}q_1f\right)$ affectant le terme adimensionnel $(\Sigma_{eq}/\bar{\sigma})^2$. Pour un comportement élastoplastique écrouissable de la matrice, **Leblond et al. (1994)** proposent la forme

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \bar{\sigma}, f) = \left(1 + \frac{2}{3}q_1f\right) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}}\right)^2 + 2q_1f \cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - (q_1f)^2 = 0$$

e) Zuo et Lou (1996)

Ont remplacé, de manière purement phénoménologique, le tenseur des contraintes de Cauchy Σ par le tenseur des contraintes "effectif" introduit par **Kachanov (1986)** $\tilde{\Sigma}$.

En remplaçant le paramètre d'endommagement D dans $\tilde{\Sigma} = \frac{\Sigma}{1-D}$ par la porosité f ,

les auteurs proposent la formulation suivante

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \bar{\sigma}, f) = \left(\frac{\Sigma_{eq}}{(1-f)\bar{\sigma}}\right)^2 + 2q_1f \cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\Sigma_m}{(1-f)\bar{\sigma}}\right) - 1 - (q_1f)^2 = 0$$

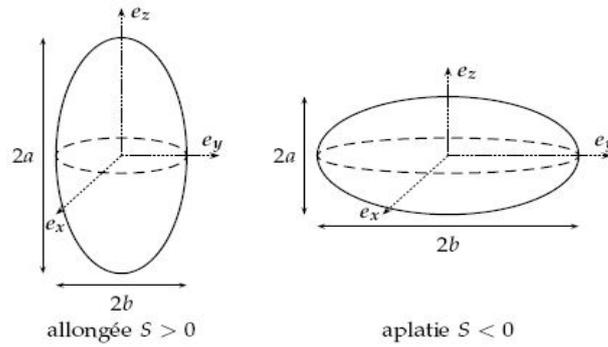


Figure. I : Cavités sphéroïdale de révolution allongée et aplatie.

f) Gologanu et al. (1993; 1994; 1997)

Le modèle GTN considère que les cavités sont initialement sphériques et qu'elles le restent au cours de la déformation. Or il est manifeste que cette hypothèse n'est pas satisfaite car les cavités se déforment et, sauf pour le cas de forte triaxialité, perdent leur forme sphérique initiale. Gologanu, Leblond et Devaux (**Gologanu et al., 1993; 1994; 1997**) ont proposé un modèle complet de comportement des métaux tenant compte de l'effet de forme des cavités au cours du chargement. En effet, ils ont repris dans leur démarche l'analyse de Gurson en supposant que la cellule représentative du milieu poreux est de forme sphéroïdale aplatie (oblate) ou sphéroïdale allongée (prolate) contenant une cavité de même forme et qui lui est confocale. Le modèle comprend quatre éléments : un critère de plasticité macroscopique dépendant de deux paramètres géométriques indépendants, la porosité f et le paramètre de forme $S = \ln(a/b)$ (figure I), une loi d'écoulement plastique associée par la normalité, et une loi d'évolution pour chacun des deux paramètres f et S . Pour un chargement axisymétrique du VER considéré, le nouveau critère connu sous le nom de GLD en référence à ses auteurs, prend la forme suivante

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_h, \sigma_0, f, S) = \frac{c}{\sigma_0^2} (\Sigma_{eq} + \eta \Sigma_h)^2 + 2q_w (g + 1)(g + f) \cos\left(K \frac{\Sigma_h}{\sigma_0}\right) - (g + 1)^2 - q_w^2 (g + 1)^2 = 0$$

où $\Sigma_h = 2\alpha_2\Sigma_x + (1 - 2\alpha_2)\Sigma_z$. Les coefficients C , η , K , α_2 , q_w et g et α_2 dépendent uniquement de la porosité et du facteur de forme. Le coefficient g est nul pour $S \geq 0$. Le terme en cosinus hyperbolique ne dépend plus de la contrainte moyenne Σ_m mais d'une contrainte Σ_h faisant intervenir les contraintes selon l'axe de la cavité Σ_z et les contraintes dans les deux directions perpendiculaires, avec des poids différents. Plusieurs cas particuliers sont à envisager avec le critère GLD :

- si $S \rightarrow +\infty$ la cavité est un cylindre d'axe e_z , alors $\alpha_2 = 1/2$ de sorte que Σ_h ne dépend que des contraintes dans les directions perpendiculaires à l'axe de la cavité.
- si $S = 0$ alors on se trouve dans le cas du modèle de Gurson.
- si $S \rightarrow -\infty$ la cavité est une fissure plane circulaire de porosité nulle.

L'endommagement est alors seulement représenté par le paramètre g .

Une description détaillée du modèle GLD ainsi que ses paramètres est donnée par les références citées ci-dessus. Récemment, des modifications ont été introduites sur ce modèle pour tenir en compte par exemple de l'anisotropie de la matrice (**Croix et al., 2003; Benzerga et al., 2004**) ou la viscoplasticité de la matrice (**Flandi et Leblond, 2005**).

g) Pastor et ses collaborateurs

Dans une série de papiers dont la publication avaient commencé au début des années 2000. Pastor et ses collaborateurs (**Francescato et al., 2001; Trillat et Pastor, 2005; Trillat et al., 2006**) ont abordé le problème de la rupture ductile des matériaux métalliques en focalisant leurs investigations sur l'étude des matériaux poreux à cavités cylindriques ou sphériques aussi bien en contrainte plane qu'en déformation plane. Leur approche est fondée sur la méthode d'homogénéisation des milieux hétérogènes en analyse limite, méthode respectant le principe de macro-homogénéité de Hill-Mandel. Les deux méthodes (approches statique et cinématique) de l'analyse limite sont utilisées et couplées avec une discrétisation éléments finis. La résolution des problèmes d'optimisation (linéaire ou non linéaires) auxquels conduisent inmanquablement les deux méthodes de l'analyse limite est effectuée en utilisant des

codes d'optimisation commerciaux (ou des codes ad hoc développés via les facilités qu'offre MATLAB) très performants (XA, MOSEK).

La méthodologie employée a permis à Pastor et ses collaborateurs de préciser très finement les critères macroscopiques de plasticité pour les différents cas considérés. Par exemple, dans leurs premières études ces auteurs (i) confirment que le critère de Gurson ne peut convenir pour des porosités au delà de 0.1 ; (ii) mettent en évidence l'existence d'un point anguleux sur la surface de charge au voisinage de l'axe des pressions moyennes ; (iii) affirment que, du point de vue de l'analyse limite, le critère de **Richmond et Smelser (1985)** semble être « le plus exact » ; et (iv) pour les cas considérés, justifient la non dépendance du critère de Gurson vis-à-vis du troisième invariant des contraintes.

Calcul des coefficients A_{ij} et b_j

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \Delta \varepsilon_p \left(K \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right) \\
 &\quad + \Delta \varepsilon_q \left(K \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right) \\
 A_{12} &= \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \Delta \varepsilon_p \left(-3G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon_q} \right) \\
 &\quad + \Delta \varepsilon_q \left(-3G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon_q} \right) \\
 A_{21} &= K \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon_p} \\
 A_{22} &= -3G \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon_q} \\
 b_1 &= -\Delta \varepsilon_p \frac{\partial \Phi}{\partial q} - \Delta \varepsilon_q \frac{\partial \Phi}{\partial p} \\
 b_2 &= -\Phi
 \end{aligned}$$