

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

Faculté du génie de la construction

Département de génie civil



En vue d'obtention du diplôme master en génie civil.

Option : Structures

thème

**Simulation du comportement
des sections planes en béton
précontraint**

Réalisé par :

-MAHOUCHE Thenina

directeur de mémoire :

-Mr MERAKEB S

2018-2019

A decorative border of small, light gray hearts surrounds the entire page. The hearts are arranged in a grid-like pattern, with some hearts slightly overlapping or offset from others, creating a soft, textured frame.

Remerciements

Je remercie avant tous Allah tout puissant, de m'avoir aidé et donné courage pour arriver au terme de ce travail

Juste quelques mots pour ne pas être ingrate envers tous ceux et celles qui ont contribués de près ou de loin à la réalisation de ce travail. Et si cette page peut ne paraître qu'un exercice convenu de politesse, j'espère que celles et ceux auxquels elle s'adresse, sauront y trouver l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je remercie sincèrement mon promoteur **Mr S. MERAKEB**, pour ses judicieux conseils. Quelques mots ne suffiront pas à exprimer ma profonde gratitude pour la confiance que vous m'avez accordée en acceptant de m'encadrer. Je n'oublierai jamais votre gentillesse, disponibilité, et vos encouragements mais surtout la qualité scientifique exceptionnelle que vous avez su mettre au service de mon apprentissage.

J'adresse de chaleureux remerciements à tous les enseignants et les travailleurs du département de **Génie-Civil**.

Je remercie également **les membres des jurys** pour l'effort qu'ils feront dans le but d'examiner ce modeste travail.

Je tiens à exprimer du fond de mon cœur, ma reconnaissance à mes proches qui savent déjà combien je leur dois, Il s'agit de ma famille, surtout mes parents qui m'offrent toujours un appui sûr et sans réserves, par leur soutien et leur encouragement. Merci à tous mes amis(es) et collègues qui ont sus m'apporter leur entière disponibilité et leur soutien indéfectible dans les moments les plus difficiles.



Dédicace

Je dédie ce lapidaire travail :

- ❖ A La mémoire de mes très chères grands-mères mon grand-père et mes deux oncles que leurs âme repose en paix.
- ❖ A mes très chers parents qui m'ont guidé durant les moments les plus pénibles de ce long chemin, ma mère qui a été à mes côtés et m'a soutenu durant toute ma vie, et mon père qui a sacrifié toute sa vie afin de me voir devenir ce que je suis.
- ❖ A mon très cher seul et unique frère.
- ❖ A mon grand-père qui est chère a mon cœur plus que tous.
- ❖ A ma seule et unique tante.
- ❖ A mes oncles, cousins et cousines
- ❖ A toute la famille MAHOUCHE et SADCHAOUCHE sans exception.
- ❖ A tous mes amis(es) et à toute la promotion génie civil.

Résumé

Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse au calcul permettant la modélisation et la simulation numérique des poutres en béton précontraint, afin de pouvoir suivre l'évolution de leur comportement non linéaire.

L'étude du comportement non-linéaire des structures à précontrainte intérieure nécessite la prise en considération des effets non-linéaires dus au comportement des matériaux, et l'utilisation de cette méthode de calcul pour la résolution d'une section plane, soumise à un couple d'efforts nous permet de déduire leur comportement aux états ultimes loin de la phase élastique et approchant la rupture.

Par la suite, l'intégration du champ de déformation d'une section plane nous permet de déduire la déformée des structures moyennant les hypothèses appliquées aux poutres, celles de Bernoulli ou de Timoshenko.

La comparaison entre les résultats calculés et ceux d'essais, a permis de tirer des conclusions sur le comportement global des poutres.

Mots clés

Béton précontraint, précontrainte intérieure, Béton armé, poutre, section plane, non linéarité, modélisation, simulation, élément finis, discrétisation, incrémentation.

Table des matieres

Introduction generale	1
Chapitre I : Etude bibliographique	
Introduction	3
I.1.Historique.....	3
I.2.Comportement non-linéaire des structures en béton précontraint	4
I.3.Lois de comportement.....	4
I.3.1.Comportement du béton en compression.....	4
I.3.2.Comportement du béton en traction.....	6
I.3.3.Les aciers	8
I.3.3.1.Comportement des aciers passifs	8
I.3.3.2.Comportement des aciers actifs	10
I.4.Les matériaux.....	11
I.4.1.Béton.....	12
I.4.2.Aciers de la précontrainte	12
I.4.2.1.Les armatures passives.....	12
I.4.2.2.Les armatures actives	13
I.4.3.Conduits 16	
I.4.4.Protection anticorrosion	16
I.4.5.Système d’ancrage de la précontrainte.....	16
I.5.Principe de béton précontraint	17
I.6.Domaines d’utilisation du béton précontraint	19
I.7.Avantage et Inconvénient du béton précontraint	20
I.7.1.Avantages.....	20
I.7.2.Inconvénients	20
I.8.Mode d’application de la précontrainte	20
I.8.1.Précontrainte par pré-tension	20
I.8.2.Précontrainte par post-tension.....	21
I.8.3.Précontrainte par vérin	24
I.9.Poutres CEBTP	25
Conclusion.....	28

Chapitre II : Etude d'une section droite

Introduction	29
II.1.L'effet de la précontrainte	30
II.2.Calcul des sollicitations internes	31
II.2.1.Flexion simple	35
II.2.2.Flexion composée	35
II.3.Déformation de la section à l'équilibre	37
II.4.Méthode itérative de résolution et critères de convergence.....	39
II.5.Organigramme de la recherche de l'équilibre d'une section	40
II.6.Méthodes de résolution non-linéaire	42
II.6.1.La méthode de Newton-Raphson.....	42
II.6.2.La méthode de Newton Raphson modifiée.....	42
II.6.3.La méthode de la rigidité sécante	43
II.7.Etablissement des courbes d'interaction des sections de l'essai CEBTP	43
Conclusion.....	44

Chapitre III : Etude d'un élément poutre

Introduction	45
III.1.Théorie de Navier-Bernoulli	45
III.1.1.Hypothèses de base	45
III.1.2.Cinématique	46
III.1.3.Relation contrainte-déformation.....	48
III.1.4.Relation déformations –déplacements :	48
III.1.5.Principe des travaux virtuels (P.T.V) :.....	49
III.1.6.Relation entre efforts et déformation	50
III.1.7.Modélisation par élément finis et calcul de la matrice de rigidité.....	51
III.2.Théorie de Timoshenko.....	54
III.2.1.Cinématique	55
III.2.2.Formulations d'éléments finis poutre Timoshenko.....	55
III.2.3.Principe des travaux virtuels (P.T.V) :.....	55
III.2.4.Matrices de rigidité.....	56
III.2.5.Vecteurs de forces	58
III.3.Présentation générale de CASTEM 2000.....	59

III.3.1.Définition du logiciel	59
III.3.2.Etapes de calcul sur Castem	60
III.3.2.1.Choix des options générales de calcul.....	60
III.3.2.2.Définition de la géométrie de la structure et du maillage.....	60
III.3.2.3.Conditions aux limites.....	63
III.3.2.4.Définition du comportement matériau et du modèle.....	64
III.3.2.5.Disposition des armatures passives et définition de leur géométrie et caractéristique.....	65
III.3.2.6.Disposition des armatures actives et définition de leur géométrie et caractéristique.....	67
III.3.2.7.Définition du chargement.....	68
III.3.3.Remplissage d'une table de donnée	71
III.4.Etablissement des courbes de comportement des poutres de l'essai CEBTP	72
Conclusion.....	77
Conclusion generale	78

INTRODUCTION

GÉNÉRALE

Introduction générale

Dans les constructions civiles et industrielles, les éléments structuraux en béton précontraint se présentent sous diverses formes : les poutres, Les ponts, Les structures industrielles, les réservoirs d'eau, les silos, les enceintes de réacteurs nucléaires, ...etc.

Dans ce domaine, l'intérêt des ingénieurs concepteurs porte sur l'application des techniques adéquates garantissant la durabilité et le bon fonctionnement des ouvrages bâtis. Et pour y parvenir, il leur est indispensable de prédire le comportement réel des différents éléments constitutifs, et de comprendre leurs réponses respectives sous divers modes de sollicitations. Cela pouvant être assuré par l'utilisation d'une modélisation numérique, considérée comme un processus de création tendant à idéaliser la représentation du comportement réel des structures. Ceci représente une étape essentielle de l'analyse structurale, permettant l'adoption de modèles optimaux capable de fournir une précision suffisante dans la prédiction du comportement réel d'une structure.

Le traitement par la méthode des éléments finis des structures, conduit d'une façon générale à une formulation discrétisée, cette méthode est largement utilisée dans la modélisation des structures en béton précontraint, béton armé et béton de fibres ; elle est induite dans l'analyse en tenant compte des différents effets de non-linéarités dans le comportement matériels et structural des éléments, la résolution de ces systèmes s'effectue la plus part du temps en utilisant des procédures itératives.

En littérature, on rencontre deux types d'approches pour la modélisation du comportement non linéaire des structures en béton précontraint.

- L'approche locale : Elle consiste à modéliser la structure étudiée par des éléments finis plans ou tridimensionnels et d'évaluer finement les champs de contraintes, de déplacements et de déformations par l'utilisation de lois de comportement locales multidimensionnelles des matériaux constitutifs. Cette approche permet une analyse fine des phénomènes non linéaires tels que l'interaction acier-béton et la fissuration mais elle est coûteuse.

- L'approche globale : Elle consiste à utiliser des éléments finis poutres. Elle est bien adaptée à l'analyse et à la simulation des ossatures en béton précontraint, constituées de poutres et poteaux. Cette dernière approche permet la modélisation des phénomènes non linéaires en utilisant des lois de comportement uni axiales. Elle constitue le cadre de la présente étude.

L'objectif principal est de simuler le comportement mécanique de modèles non linéaire des éléments de poutres en flexion composée avec la prise en compte de l'effort tranchant.

La présente étude est structurée comme suit :

- Le chapitre I débute par une revue bibliographique d'une synthèse sur les caractéristiques et le comportement des matériaux utilisés, et le comportement non linéaire des structures en béton précontraint et son mode de réalisation, et d'autre part l'analyse des Essais de CEBTP- Poutres hyperstatique à précontrainte intérieure.
- Le chapitre II on s'intéresse à l'étude d'une section d'un élément de poutre en béton précontraint. En présentant la méthode de calcul concernant l'étude de l'équilibre d'une section et organigramme général de calcul, ce programme permet la modélisation numérique du comportement non linéaire des sections de poutre en béton précontraint, soumises à la flexion composée et à l'effort tranchant.
- Le chapitre III est consacré au calcul non linéaire d'une poutre par l'approche des éléments finis, en se basant sur la méthode incrémentale dont nous présentons l'examen de la validation. Pour cela l'analyse est portée sur les poutres des Essais de CEBTP - Poutres hyperstatique à précontrainte intérieure.
- Enfin, une conclusion générale pour terminer ce travail, où nous présentons quelques remarques et perspectives pour des travaux futures.

CHAPITRE I :
ÉTUDE
BIBLIOGRAPHIQUE

Introduction

Nous savons que le béton armé est relativement lourd : les parties tendues du béton ne sont utilisées que pour enrober l'acier et il est évident que leur poids constitue un handicap telles les poutres de grande portée et de grand élanement. Il est donc économiquement important de chercher à utiliser à plein, la résistance du béton en le comprimant à l'avance par le jeu de forces internes, de façon que la variation de contrainte qui faisait naître des tractions en béton armé ne provoque qu'une décompression du béton précontraint [1]. Comme le béton armé, le béton précontraint associe béton et armatures, mais ils sont différenciés de façon fondamentale dans leur principe [2] Sachant que le béton résiste mieux en compression qu'en traction.

L'utilisation du béton précontraint dans la construction des ponts connaît un développement spectaculaire après avoir été utilisée pour renforcer des ouvrages anciens.

On se propose alors, dans ce chapitre d'exposer certains points de connaissance concernant cette technique.

I.1. Historique

La paternité de cette nouvelle technique qui est l'idée de précontrainte revient sans conteste à Eugène Freyssinet.

En effet, c'est en 1907, pour étudier le décintrement par vérins des voûtes d'une série de grand ponts sur l'Allier, Freyssinet utilisa le principe le plus pur de la précontrainte pour équilibrer les poussées d'une voûte d'essai de 50 m de portée et assurer la stabilité des culées. Le mot « précontrainte » ne fut pas prononcé à l'époque et l'on n'y vit qu'un ingénieur procédant d'exécution ; mais en utilisant ce que nous savons aujourd'hui de la précontrainte, on ne ferait pas autrement.

Ce n'est que vingt et un ans plus tard, le 02 octobre 1928 que Freyssinet déposa son premier brevet ; il était modestement tiré d'un procédé de fabrication des pièces en béton armé mais on y trouve presque toutes les bases de ce qu'est aujourd'hui la précontrainte. Enfin, cinq ans plus tard, en 1933 le mot précontrainte apparaît ; il est imprimé pour la première fois dans un article intitulé Idée et Voies Nouvelle paru sous la signature de Freyssinet dans un numéro de la revue science et Industrie [3].

I.2. Comportement non-linéaire des structures en béton précontraint

En dehors du modèle linéaire utilisé pour analyser le comportement des structures, une place essentielle est donnée dans les règlements au calcul à la rupture, basé sur les principes de l'analyse aux états limites. En conséquence, l'utilisation de telles méthodes de calcul sera donc plus ou moins fondée, en fonction des non linéarités affectant le système ; celles-ci peuvent être classées en trois catégories :

La non-linéarité matérielle : Elle est due à la non-linéarité entre contrainte et déformation des matériaux. La loi de Hooke n'est, en général, pas valable lorsque les contraintes dans les matériaux approchent la résistance ultime.

La non linéarité mécanique : elle résulte en particulier de la loi de comportement intrinsèque des matériaux et la considération du domaine de post-fissuration (prise en compte du béton tendu situé entre deux fissures successives de flexion) [3].

La non-linéarité géométrique due au comportement d'ensemble de la structure. Lorsque les déplacements deviennent importants, l'équilibre du système ne peut plus être décrit dans la configuration déformée (théorie du second ordre des déplacements) [3].

I.3. Lois de comportement

I.3.1. Comportement du béton en compression

Pour décrire le comportement réel du béton en compression, on admet un modèle élastique non linéaire qui est décrit par SARGIN [5]. L'allure générale de la courbe contrainte – déformation est donnée par le diagramme représenté à la figure II-1 suivante :

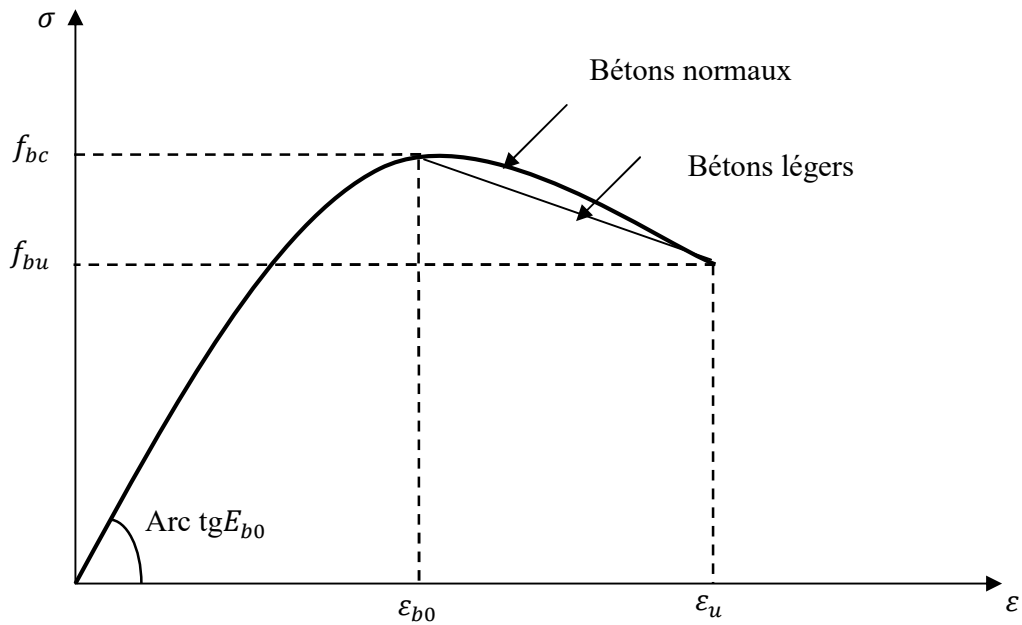


Figure I-1: Courbe contrainte- déformation d’un essai de compression (Loi de SARGIN [5]).

La courbe est caractérisée par :

- Une branche ascendante, à concavité dirigée vers le bas admettant un module tangent initial E_{b0} et un maximum de contrainte qui correspond à la résistance à la compression f_c ;
- Une branche descendante commençant par le maximum de la branche ascendante et qui se termine par le point (σ_u, ϵ_u) .

La contrainte est donnée par la relation suivante :

$$\sigma = f_c' \frac{k_b \bar{\epsilon} - (k_b' - 1) \bar{\epsilon}^2}{1 + (k_b - 2) \bar{\epsilon} - k_b' \bar{\epsilon}^2}$$

Où :

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon_p}$$

Le paramètre k_b ajuste la branche ascendante de la loi et est donné par:

$$k_b = \frac{E_{b0} \epsilon_0}{f_{cj}}$$

f_{cj} : Résistance à la compression du béton à l’âge j

ε_p : Déformation de pic correspondant à f_{cj}

E_{b0} : Module élastique du béton à l'origine.

Le paramètre k'_b permet d'ajuster la forme de la branche décroissante de la courbe.

Avec $K'_b=0$, on obtient des courbes avec une branche qui descend brutalement, ce qui correspond à un béton ayant un comportement élastique fragile.

Pour $K'_b=1$, on obtient au contraire des courbes assez plates qui correspondent à un béton ayant un comportement ductile. Pour un béton normal, on prend généralement $K'_b=K_b - 1$

En modifiant cette loi de comportement par l'introduction d'un coefficient de réduction, on peut formuler la loi de comportement bi axiale contrainte-déformation pour une bielle de béton comprimée. La contrainte maximale de compression d'une bielle de béton est alors reliée à celle obtenue sur un cylindre standard par la relation proposée par Vecchio et Collins [6] :

$$\frac{f_{c2}}{f'_c} = \frac{1}{0.8 - .34 (\varepsilon_1/\varepsilon_0)}$$

La contrainte principale de compression du béton est alors reliée à la déformation principale de compression par la relation :

$$\sigma = f_{c2} \frac{k_b \bar{\varepsilon} - (k'_b - 1) \bar{\varepsilon}^2}{1 + (k_b - 2) \bar{\varepsilon} - k'_b \bar{\varepsilon}^2}$$

I.3.2. Comportement du béton en traction

Généralement, dans la pratique (règlement), la résistance à la traction du béton ainsi que la contribution du béton tendu entre deux fissures sont négligées.

La prise en compte de la contribution du béton tendu entre les fissures, permet une représentation convenable de la déformabilité réelle d'un élément fissuré, ainsi qu'une estimation meilleure de la redistribution des efforts dans les structures hyperstatiques et dans les cas sensibles aux effets de second ordre. Elle permet ainsi de mieux estimer les déplacements.

Plusieurs modèles sont proposés dans la littérature. Dans le cadre de la présente étude nous avons utilisé la loi de GRELAT [7]. Elle attribue au béton tendu fissuré un diagramme fictif triangulaire à partir de l'axe neutre (figure I-2)

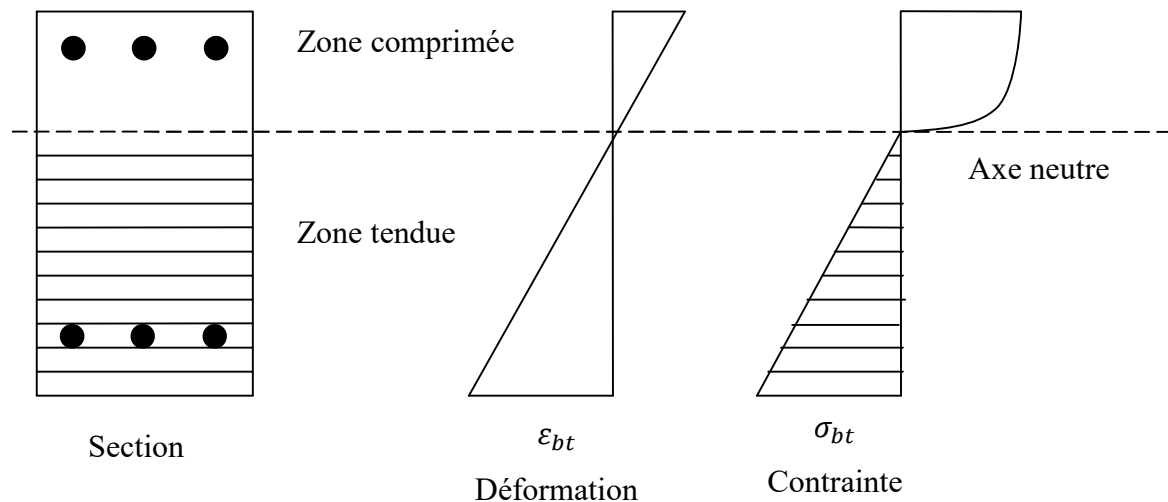


Figure I-2 : comportement du béton avant fissuration

Les fibres du béton tendu sont affectées d'un module de déformation E_{bt} qui est défini à partir de la contrainte et de la déformation instantanée du bord tendu :

$$E_{bt} = \frac{\sigma_{bt}}{\varepsilon_{bt}}$$

Au-delà de la fissuration en traction on tient compte d'une participation du béton tendu situé entre deux fissures successives. La contrainte ne s'annule pas brusquement, mais, décroît selon une loi parabolique (figure I-3). On étudie ainsi le comportement moyen d'une zone de poutre.

Avec

f_{tj} : Résistance du béton à la traction ;

ε_{ft} : Déformation de traction correspondant à f_{tj} ;

ε_{rt} : Déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu ;

E_{b0} : Module d'élasticité longitudinal du béton.

- $\sigma_{bt} = E_{b0} \cdot \varepsilon_{bt}$ Si $|\varepsilon_{bt}| \leq \varepsilon_{ft}$
- $|\varepsilon_{bt}| < \varepsilon_{rt}$ et $|\varepsilon_{bt}| > \varepsilon_{ft}$ fissuration avec participation du béton tendu.

$$\sigma_{bt} = -f_{ft} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{rt})^2}{(\varepsilon_{rt} - \varepsilon_{ft})^2}$$

- $|\varepsilon_{bt}| > \varepsilon_{rt}$ fissuration sans participation du béton tendu.

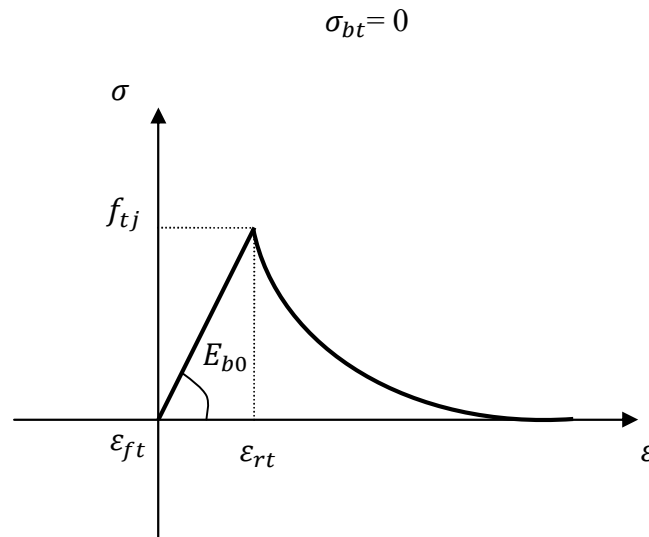


Figure I-3 : Contribution du béton tendu après fissuration A.GRELAT [7]

I.3.3. Les aciers

Le comportement de l'acier est représenté par une loi contrainte-déformation supposée identique en traction qu'en compression sous chargement monotone. On distingue les aciers passifs qui sont les aciers de béton armé et les aciers actifs ou aciers de précontrainte.

I.3.3.1. Comportement des aciers passifs

On distingue les aciers naturels et les aciers écrouis.

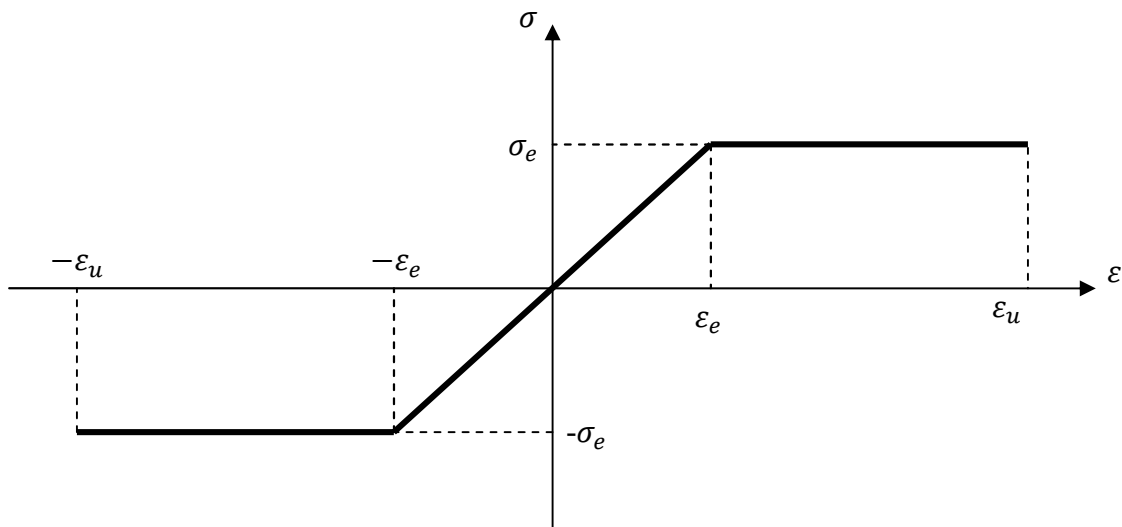


Figure I-4 : Comportement des aciers naturels.

A) Les aciers naturels : sont caractérisés par une loi de comportement élastoplastique parfaite. On utilise ces aciers pour le calcul à l'état limite de résistance (ELU) ou l'évaluation précise des déformations n'est pas nécessaire.

$$\begin{aligned} \sigma &= E_a \varepsilon && \text{pour } \varepsilon \leq \varepsilon_e \\ \sigma &= \sigma_e && \text{pour } \varepsilon_e < \varepsilon < \varepsilon_u \\ \sigma &= 0 && \text{pour } \varepsilon > \varepsilon_u \end{aligned}$$

Du côté de la traction les relations se déduisent par symétrie.

Les déformations extrêmes sont fixées par le règlement BAEL à 10‰

E_a : Module longitudinal de l'acier ;

ε_e : Déformation limite élastique de l'acier ;

σ_e : Contrainte limite élastique de l'acier ;

ε_u : Déformation ultime de l'acier.

B) Aciers écrouis

On adopte la loi préconisée par les règles BAEL 83 qui supposent un comportement linéaire élastique jusqu'à 70 % de la limite élastique (σ_e). Au-delà, une courbe $\varepsilon = f(\sigma)$ du cinquième degré (figure 3-5).

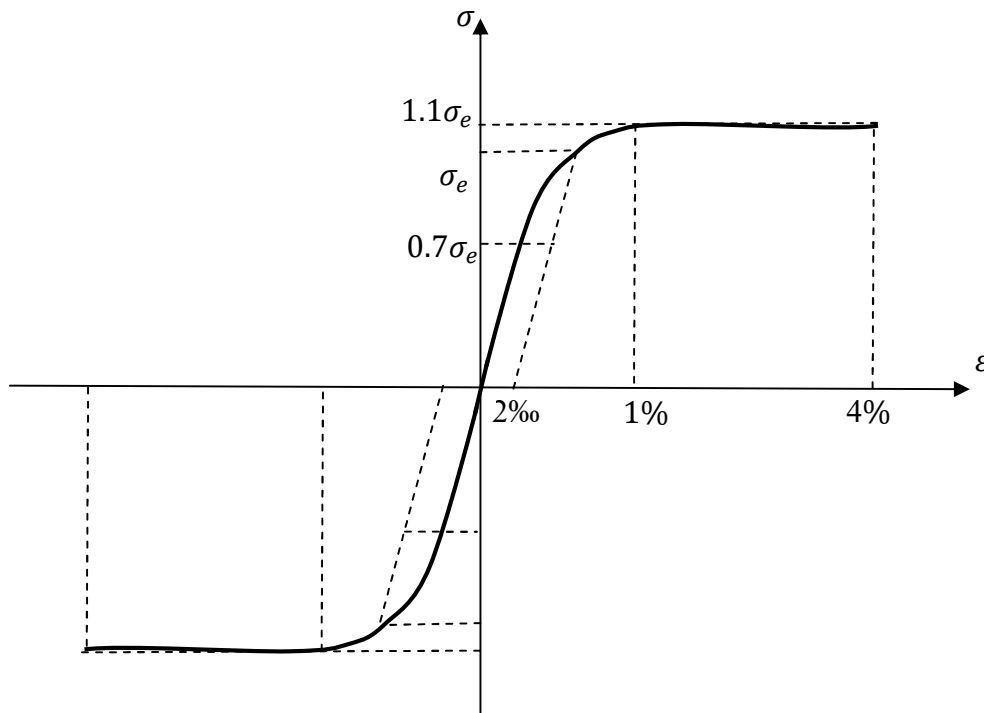


Figure I-5 : Comportement des aciers écrouis

Elle se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma &= E_s \cdot \varepsilon && \text{pour} && \sigma < 0.7\sigma_e \\ \varepsilon &= \frac{\sigma}{E_a} + 0.823 \left(\frac{\sigma}{\sigma_l} - 0.7 \right)^5 && \text{pour} && 0.7\sigma_e < \sigma < 1.1\sigma_e \\ \sigma &= 1.1\sigma_e && \text{pour} && 1\% < \varepsilon < \varepsilon_u \end{aligned}$$

Avec les relations qui se déduisent en traction par symétrie.

I.3.3.2. Comportement des aciers actifs

Le comportement des aciers de précontrainte est représenté par la loi, du même type que celle des aciers écrouis du béton armé, recommandée par le règlement BPEL 83 (figure 1-6).

$$\sigma = E_a \varepsilon_p \quad \text{pour} \quad 0 < \sigma < 0.9\sigma_e$$

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_a} + 100 \left(\frac{\sigma_p}{f_e} - 0.9 \right)^5 \quad \text{pour} \quad 0.9\sigma_e < \sigma_p < 1.06\sigma_e$$

$$\varepsilon_p = 1.06\sigma_e \quad \text{pour} \quad \varepsilon > 2\%$$

Avec les relations qui se déduisent par symétrie du coté de la traction.

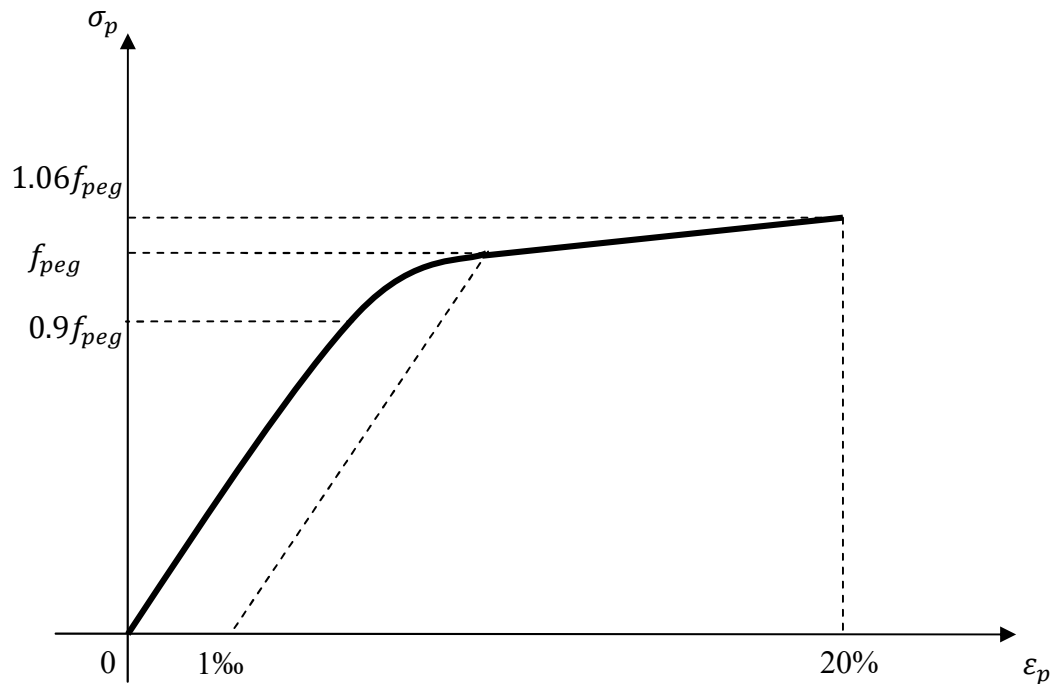


Figure I-6 : Comportement des aciers actifs

Remarque : pour calculer la contrainte à partir de la déformation il est nécessaire de décrire un sous programme d'inversion. La courbe est continue, et la dérivée l'est aussi à la limite du domaine élastique.

I.4. Les matériaux

Les trois matériaux utilisés dans les structures en béton précontraint sont :

- le béton
- les aciers
 - ✓ les armatures actives
 - ✓ les armatures passives

I.4.1. Béton

Le béton est un matériau composé de graviers, sable, de ciment et d'eau ; il est souvent fabriqué sur chantier. Ses caractéristiques physique et mécanique dépendent de nombreux paramètres :

- Nature des constituants ;
- Granulométrie ;
- Dosage en ciment ;
- Dosage en eau ;
- Condition de mise en œuvre (vibration);
- Condition thermique et hygrométriques lors de la prise dans les premiers jours de durcissement

Il n'est pas possible de fixer les caractéristiques du béton avec la même précision et les mêmes exigences de tolérance que pour un acier. Cependant, les nombreuses études qui ont été effectuées dans le monde ont permis de cerner et quantifier le rôle des différents paramètres [9].

I.4.2. Aciers de la précontrainte

Les aciers utilisés dans les ouvrages en béton précontrainte sont de deux natures différentes. On distingue :

- Les aciers actifs qui créent et maintiennent la précontrainte sur le béton ;
- Les aciers passifs nécessaires pour reprendre les efforts tranchants, pour limiter la fissuration et pour servir d'aciers de montage afin de construire 'cage d'armatures' qui maintiennent les autres aciers.

I.4.2.1. Les armatures passives

Ce sont des armatures identiques à celles utilisées en béton armé. Elles ne sont mises en tension que par la déformation de l'élément. Les aciers généralement utilisés sont classés en plusieurs catégories :

- Barres rondes lisses ;
- Barres à haute adhérence ;
- Fils (fils à haute adhérence et fils lisses) ;
- Treillis soudés.

D'une façon générale, on distingue pour les armatures passives en béton précontraint les aciers passifs longitudinaux et les aciers passifs transversaux [10].

Les caractères des armatures passives à prendre en compte dans les calculs sont la section nominale de l'armature, le module d'Young E_s et la limite d'élasticité de l'acier définie par la valeur garantie, notée f_e . Le tableau (I.1) donne les désignations conventionnelles, les nuances et les limites d'élasticité sur le marché.

Tableau 1: Désignations conventionnelles, nuances et limites d'élasticité

Type	Désignation	Limite d'élasticité
Ronds	FeE215	215
lisses	FeE235	235
Barres HA	FeE400	400
	FeE500	500
Fils tréfilés HA et treillis HA	FeTE500 TSHA	500
Treillis soudés lisses	TSL	500

I.4.2.2. Les armatures actives

Les aciers actifs sont les aciers de la précontrainte. A l'inverse des armatures de béton armé qui se contentent d'un acier de qualité courante, les armatures de précontrainte exigent un acier satisfaisant un certain nombre de conditions [10]. Elles ont été classées par :

- catégorie : fils, barres, torons.
- classe de résistance.

a) Les fils

On distingue les fils ronds et lisses et les fils non lisses. Leur diamètre maximal ne dépasse pas 12mm.

Tableau 2: Caractéristiques des fils de précontrainte

Diamètre (mm)	4	5	6	7	8	10	12.2
Section (mm^2)	12.6	19.6	28.3	38.5	50.3	78.5	117

b) Les barres

Elles sont définies comme étant de section supérieure aux fils (diamètre supérieur à 12mm). Les barres les plus courants ont un diamètre nominal de 26mm.

Tableau 3:Caractéristiques des barres de précontrainte

<i>Diamètre (mm)</i>	20	22	26	32	36
<i>Section(mm²)</i>	314	380	531	804	1018

c) Les torons

Les torons sont constitués d'un ensemble de 3ou7 fil de faible diamètre (2 à 4mm) enrôlés en hélice sur eux ou sur un fil central.

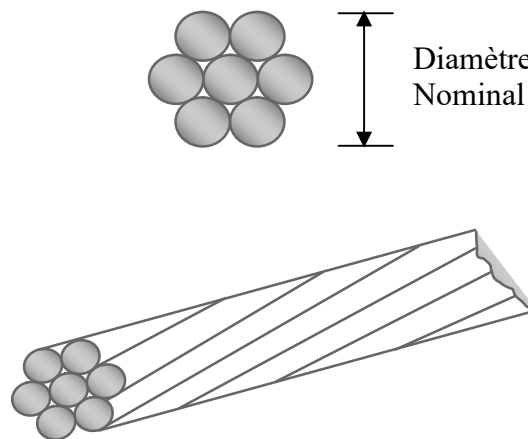


Figure I-7 : Toron standard à 7 fils

Les torons sont caractérisés par le nombre de fils (et la section du fil) et leur diamètre. Les caractéristiques des torons les plus courants sont données dans le tableau ci-dessous.

Tableau 4 : Caractéristiques des torons de précontrainte

<i>Type</i>	<i>3fils</i>	<i>7fils</i>	<i>7fils</i>	<i>7fils standard</i>	<i>7fils standard</i>	<i>7fils super</i>	<i>7fils super</i>
<i>Diamètre (mm)</i>	5.2	6.85	9.3	12.5	15.2	12.9	15.7
<i>Section(mm²)</i>	13.6	28.2	52	93	139	100	150

Tableau 5: Caractéristiques des torons de précontrainte

Désignation	Diamètre (mm)	Section (mm^2)
T 13	12.5	93
T 13 S	12.9	100
T 15	15.2	139
T 15 S	15.7	150

Par exemple, T13 désigne un toron de 13 fils de diamètre 12.5mm chacun.

d) Les câbles

Les câbles sont constitués de plusieurs torons en acier à haute résistance pour béton précontraint. Un câble est défini par le type et le nombre de torons et la classe de résistance.



Figure I-8 : câble d'acier.

La figure I-8 : montre un câble constitué de 12 torons, chaque toron contient 7 fils.

I.4.3. Conduits

Les conduits permettent la libre circulation du câble dans la structure, afin qu'il puisse s'allonger librement pendant la mise en tension. Il existe plusieurs types de conduits dans lesquels sont disposés les câbles :

- Gaine (métallique) nervurée en feuillard: épaisseur du feuillard: 0,3 à 0,6 mm, diamètre 25 à 130 mm;
- tube rigide en acier : épaisseur 1,5 à 2 mm;
- gaine nervurée en PEHD;
- tube en PEHD.

En pratique les unités et les conduits les plus couramment employés ont les diamètres extérieurs minimaux données par le tableau ci-après [11]:

Tableau 6 : représentation des diamètres extérieurs des conduits en (mm).

Câble	Tube en acier	Tubes en polyéthylène
7T15	76,1	75
12T15	80	90
19T15	101,6	110
27T15	114,3	125
37T15	139,7	140

I.4.4. Protection anticorrosion

Les tubes métalliques doivent être protégés extérieurement par une peinture donnant une garantie d'anticorrosion de 4ans au minimum [11].

I.4.5. Système d'ancrage de la précontrainte

Il constitue un organe essentiel puisqu'ils permettent d'assurer le maintien de l'effort de précontrainte dans les armatures après la mise en tension (la tête d'ancrage assure cette fonction). Ces systèmes ont été développés par des sociétés détentrices de procédés de précontrainte dans le monde.

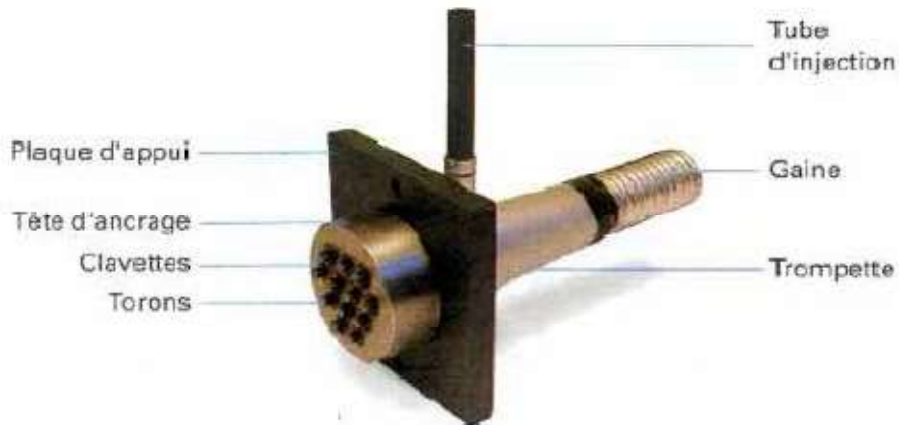


Figure I-9 : Exemple de système d'ancrage à plaque VSL

Sur la figure I-9, on distingue la tête d'ancrage. Sa protection est assurée par un capot étanche définitif fixé mécaniquement. Ce capot reçoit lui-même une protection anticorrosion efficace [11], [12].

I.5. Principe de béton précontraint

Le béton résistant mieux en compression qu'en traction, le but du précontraint est d'obtenir des pièces qui ne travailleront qu'à la compression. En imposant aux éléments un effort de compression axial judicieusement appliqué, de supprimer (ou fortement limiter) les sollicitations de traction dans le béton. [13] (Figure I-10).

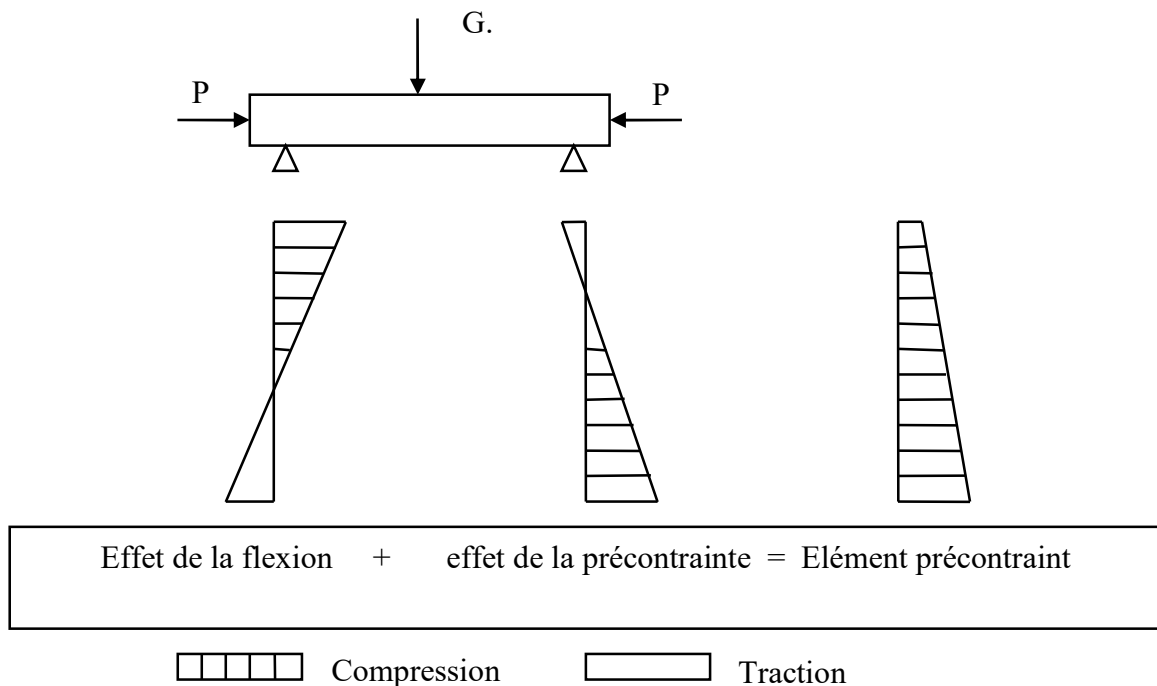


Figure I-10 : Les sollicitations de traction dans le béton

Cette précontrainte peut être :

- Une précontrainte partielle : autorisation des contraintes de traction limitées.
- Une précontrainte totale : élimination totale des contraintes de traction. [13]

Les forces de traction engendrées par les charges appliquées à l'ouvrage viendront en déduction des forces de compression créées par la mise en tension des câbles de précontrainte.

Soit par exemple une poutre en béton armé reposant sur deux appuis simples. Si on la soumet à une charge, elle se déforme. La section transversale, au droit de l'application de la charge se trouve comprimée à la fibre supérieure et tendue à la fibre inférieure. Lorsque la charge est trop forte, des fissures apparaissent à la partie inférieure de la poutre.

Supprimons dans cette poutre l'armature de traction classique pour la remplacer par une gaine courbe suivant la déformée de la poutre et contenant des câbles de précontrainte.

En tirant sur les câbles, on comprime la poutre. Dans la section transversale, la fibre supérieure se trouve tendue et la fibre inférieure comprimée. Si l'on applique une charge au centre de la poutre, la fibre inférieure va se tendre et la fibre supérieure va se comprimer.

Il est possible de déterminer l'effort de précontrainte nécessaire pour que la poutre soit toujours comprimée quelles que soient les charges appliquées.

Lors d'un chargement les efforts de traction viennent alors en déduction des efforts de compression créés par la précontrainte mais toutes les fibres restent comprimées.

En réalité, dans les grosses poutres, il y a de nombreuses gaines. La disposition exacte de ces câbles et leur nombre dépend de nombreux paramètres (dimensions et forme de la poutre, charges à supporter, etc.). Leur position relevée vers les extrémités est destinée à améliorer la résistance à l'effort tranchant.

Nous avons décrit le principe de la précontrainte en prenant une poutre comme exemple, mais tous les éléments de construction peuvent être réalisés en béton précontraint [11].

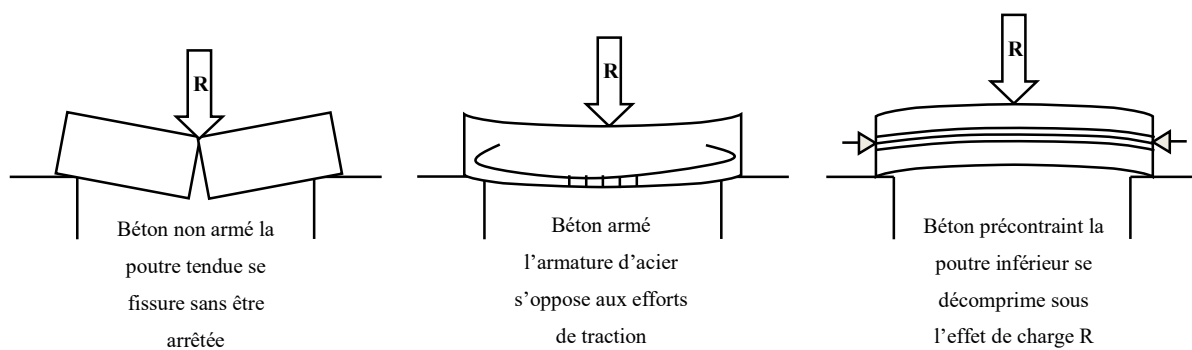


Figure I-11 : Dédution des efforts de Lors d'un chargement

I.6. Domaines d'utilisation du béton précontraint

Le béton précontraint est utilisé pour de nombreux ouvrages.

- Les ponts,
- Les structures off-shore,
- Les structures industrielles
- Les réservoirs (d'eau, d'hydrocarbures) et les silos
- Les enceintes de réacteurs nucléaires
- Les bâtiments industriels, commerciaux ou agricoles.

On note aussi dans le domaine du bâtiment, la précontrainte par post-tension, bien que moins courante, est utilisée pour des poutres de grande portée ou pour des dalles de planchers de section relativement mince par rapport à leur portée: parkings, bâtiments industriels ou commerciaux [2].

I.7. Avantage et Inconvénient du béton précontraint

I.7.1. Avantages

- 1) Une compensation partielle ou complète des actions des charges ;
- 2) Une économie appréciable des matériaux ;
- 3) Augmentation des portés économiques ;
- 4) Une réduction des risques de corrosion.

I.7.2. Inconvénients

- 1) La nécessité de matériaux spécifiques ;
- 2) La nécessité de main d'œuvre qualifié ;
- 3) La nécessité d'équipements particuliers ;
- 4) Risque de rupture à vide par excès de compression ;
- 5) Un calcul relativement complexe [13].

I.8. Mode d'application de la précontrainte

La précontrainte peut être obtenue soit « à l'avance » c'est-à-dire avant la mise en place du béton dans le coffrage, soit au contraire après durcissement du béton, au moyen de vérins prenant appuis sur celui-ci.

Dans le premier cas, il s'agit de précontrainte par pré-tension et dans le second, de précontrainte par post-tension. Cette distinction conduit à des applications très différentes en ce qui concerne la conception et la mise en œuvre [1].

I.8.1. Précontrainte par pré-tension

Dans ce procédé, les câbles de précontrainte sont tendus entre deux massifs solidement ancrés avant le coulage du béton (Figure I-12). Cette technique est surtout employée sur les bancs de préfabrication, pour réaliser des éléments répétitifs.

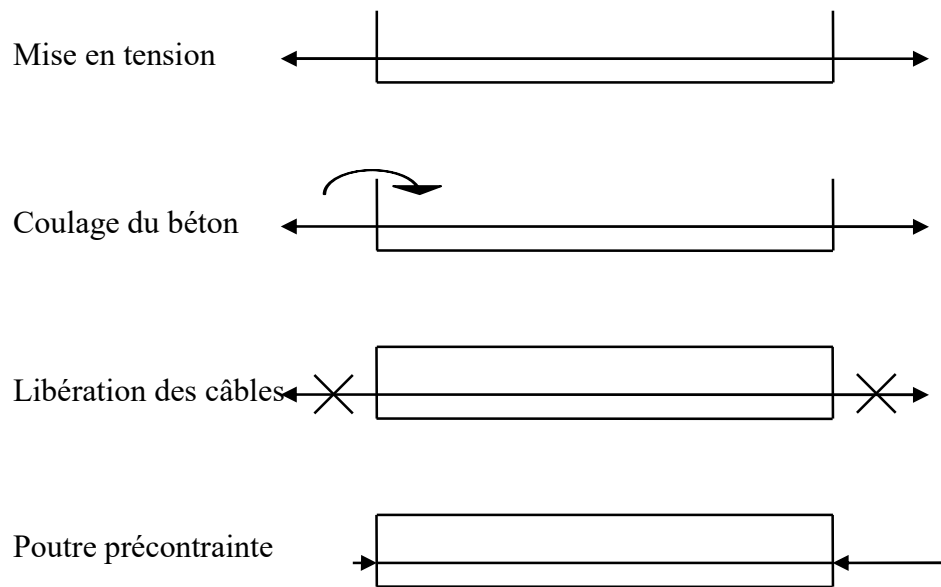


Figure I-12 : Précontrainte par pré-tension.

Etapas générales de réalisation

- Mise en tension des câbles.
- Coulage du béton.
- La libération des câbles après le durcissement du béton.
- Par adhérence, la précontrainte de compression est transmise au béton.

I.8.2. Précontrainte par post-tension

Ce procédé consiste à tendre les câbles de précontrainte, après coulage et durcissement du béton, en prenant appui sur la pièce à comprimer (Figure I-13). Cette technique est utilisée pour les ouvrages importants est, généralement, elle est mise en œuvre sur chantier.

La précontrainte par post tension se présente sous deux formes :

- Une précontrainte par post-tension interne
- Une précontrainte par post-tension externe

Etapas générales de réalisation

- Placement des gaines dans le coffrage.

- Coulage du béton.
- Après le durcissement du béton, la mise en tension des câbles.
- Le blocage se fait par différents systèmes de cales sur une zone de béton fretté.
- L'injection d'un coulis de ciment

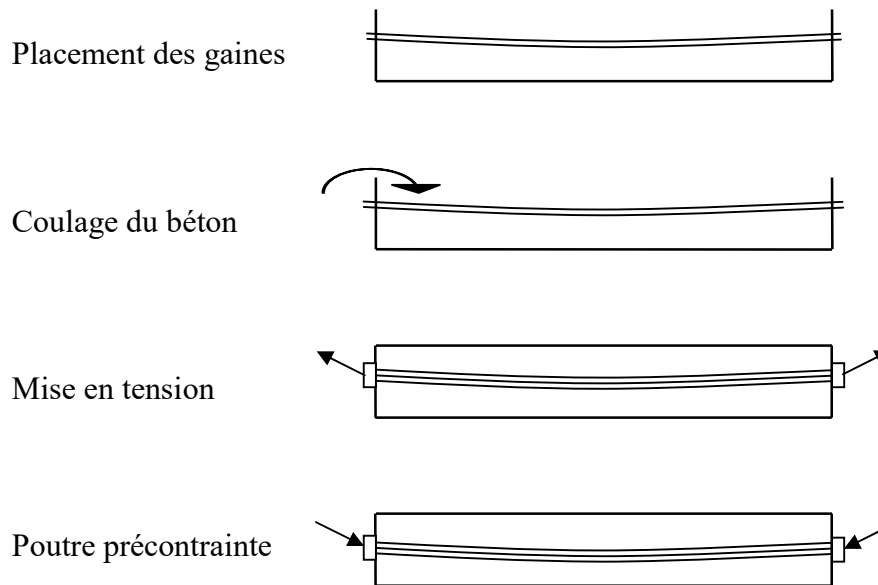


Figure I-13 : Précontrainte par post-tension.

La mise en tension peut être faite en tendant l'acier aux deux extrémités de la pièce (Actif - actif) ou en tendant une seule extrémité uniquement (actif - passif) (Figure I-14).

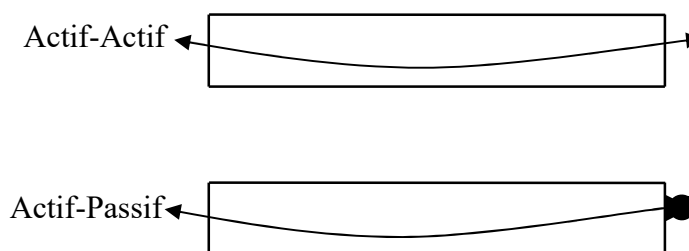


Figure I-14 : Précontrainte par post-tension (Actif – actif/ Actif – passif)

L'injection est une opération extrêmement importante, car elle assure un double rôle:

- 1) La protection des armatures de précontrainte contre la corrosion.
- 2) L'amélioration de l'adhérence entre les armatures et les gaines.

L'opération de l'injection doit être réalisée dès que possible après la mise en tension des armatures. Le produit d'injection doit répondre aux impératifs suivants:

Avoir une assez faible viscosité pour couler facilement et pénétrer dans toutes les ouvertures et entre fils des câbles de précontrainte ;

- conserver cette faible viscosité pendant un délai suffisant pour que l'injection puisse s'effectuer dans de bonnes conditions avant le début de prise;
- après durcissement, avoir une résistance suffisante pour assurer efficacement l'adhérence de l'armature au béton;
- présenter un retrait minimal ;
- ne pas être agressif vis-vis de l'acier de précontrainte.



Figure I-15 : Vue d'un ensemble de torons gainés regroupés dans une gaine PVC

Le produit d'injection était autrefois un mortier formé de ciment, de sable et de l'eau; aujourd'hui le sable est à peu près complètement abandonné, au profit de coulis de ciment CPA, comportant un adjuvant.

L'ensemble du procédé de précontrainte comprend, généralement, les éléments suivants :

- a. **Dispositif d'ancrage:** on distingue, principalement, deux types d'ancrage:
Ancrage actif, situé à l'extrémité de la mise en tension.
Ancrage passif (ancrage mort), situé à l'extrémité opposée à la mise en tension.
- b. **Les coupleurs :** dispositif permettant les prolongements des armatures.
- c. **Matériels de mise en tension :** vérins, pompes d'injection, pompe d'alimentation des vérins etc.
- d. **Les accessoires :** gaines, tubes d'injection etc...

I.8.3. Précontrainte par vérin

Les deux techniques précédentes utilisent des torons ou des fils d'acier à haute limite élastique. Il est possible, lorsqu'on peut disposer de culées suffisamment résistantes, d'effectuer directement la mise en compression d'une structure en béton au moyen de vérins prenant appui sur ces culées. C'est encore Freyssinet qui a mis en œuvre en premier ce mode de précontrainte au moyen de vérins plats, outils extrêmement puissants, d'un faible coût. Ce procédé, par la nécessité des culées qu'il impose, n'a que des applications limitées. Il a cependant été utilisé pour la construction de pistes d'aviation ou de routes. Il a, en particulier, permis la réalisation de la chaussée du tunnel sous le Mont Blanc. La précontrainte par vérins plats et aussi utilisée dans les barrages.



Figure I-16 : Mise en tension des câbles de précontrainte.

I.9. Poutres CEBTP

Il s'agit d'un programme d'essais réalisé au **CEBTP** (trinh, [14]). Ce programme comporte quatre poutres différenciées principalement par le degré de précontrainte qui varie de 100% (précontrainte totale) à 0% (béton armé). Les quatre poutres sont identiques en forme et dimensions. Elles présentent une section transversale en double T et une longueur totale de 10.40m constitué de deux travées de 5 m de portée chacune. Elles sont soumises à un chargement croissant jusqu'à rupture, par deux charges concentrées d'intensité égale, Q appliquées au milieu des travées. (Le tableau 7) montre les caractéristiques géométriques des poutres.

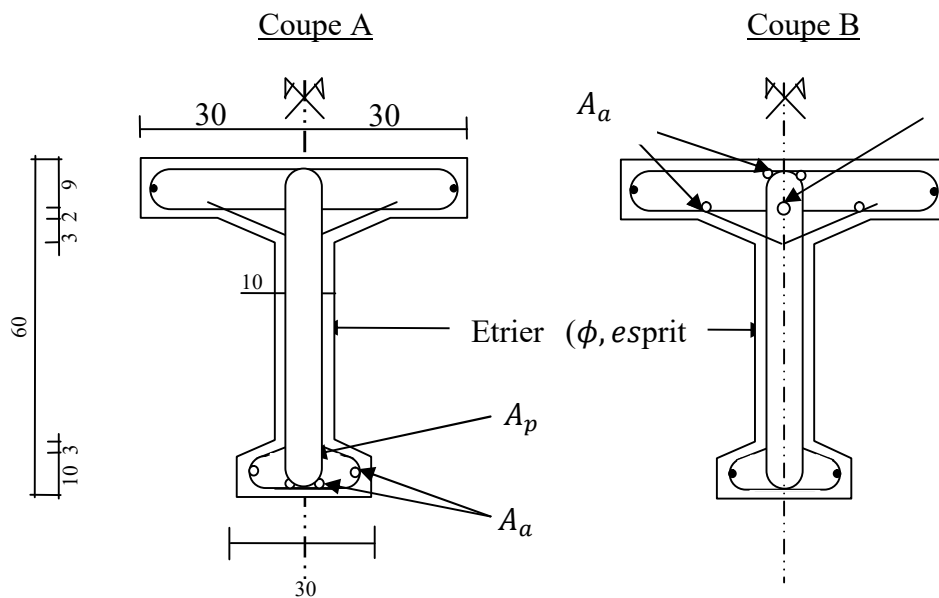


Figure I-17 : Dimension et détails de ferrailage des poutres HZ

Tableau 7: Caractéristiques mécaniques des matériaux

Poutre HZ				
	1	2	3	4
A_a en	A	4T16	4T20+T6	3T25+2T20
	B	/	4T20	5T25
h_a en	A	56	56	55 ⁶
	B	/		55 ⁷
A_p	câble			/
	16 ϕ 7	10 ϕ 7	7 ϕ 7	
ϕ	Adx 8			T10
étrier				
t	18	16	15	20

La figure I-18 montre la disposition assez complexe des armatures passives longitudinales dans les membrures inférieure et supérieure des différentes poutres HZ2, 3, 4. La poutre HZ1, la plus précontrainte, est néanmoins munie d'un minimum d'armatures passives, filantes sur toute la longueur de la poutre, en barres lisses $\phi 6$ mm (en acier FeE22). Il n'y a pas d'armatures longitudinales dans l'âme. Chaque corps d'épreuve comporte une armature transversale disposée en cours successifs dans des sections droites avec un espacement t constant (voir tableau 7)

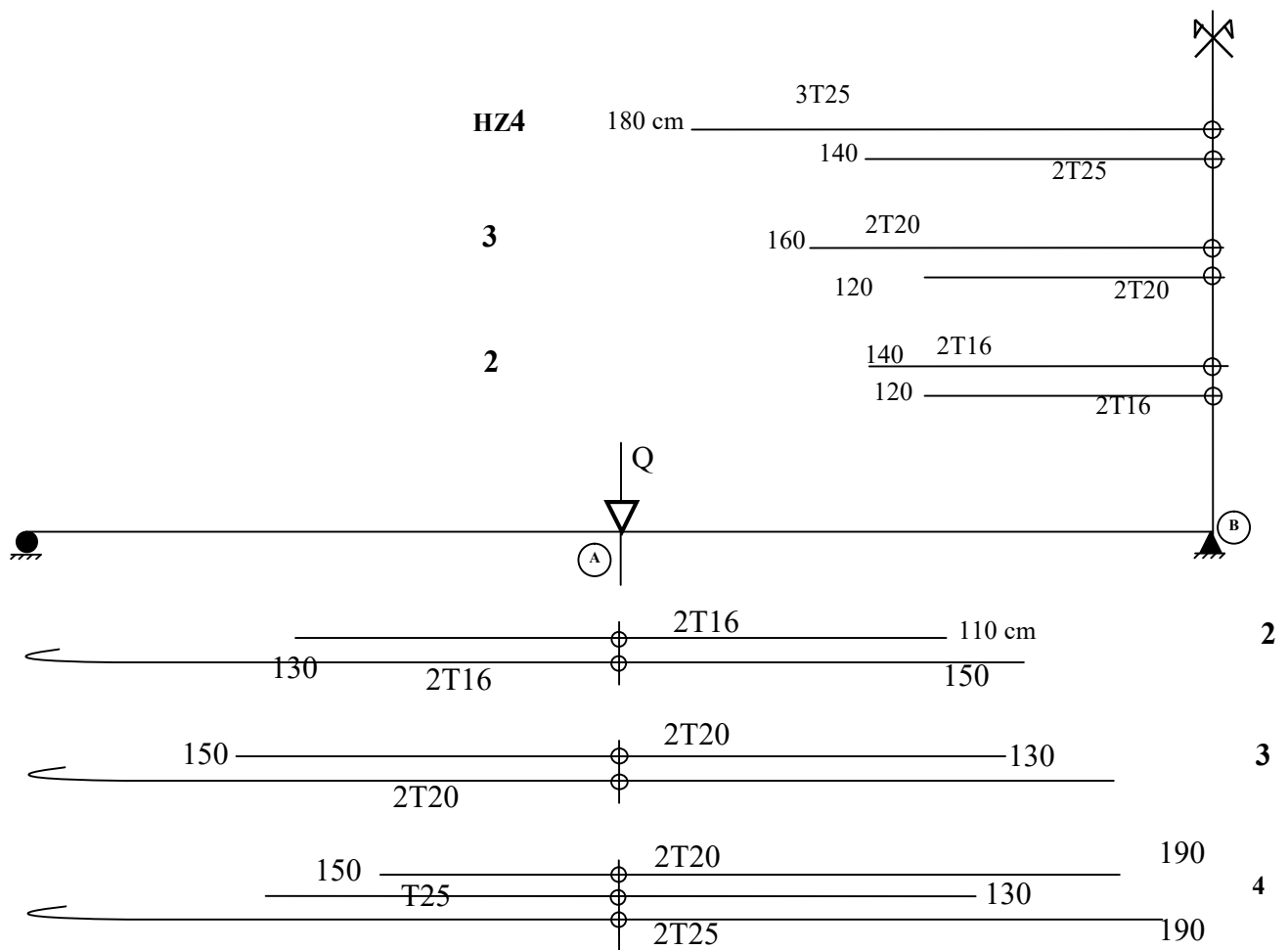


Figure I-17 : Disposition des armatures longitudinales pour les poutres HZ

Les caractéristiques mécaniques des matériaux sont résumées au tableau 8.

Tableau 8: caractéristique du béton et des armatures passives Trinh [14].

Béton				Armature passive			
Repère	f_{cj} (MPa)	f_{tj} (MPa)	E_{ij} (MPa)	Barres	f_e	E_a	f_u (MPa)
HZ1	39	3.4	35400	$\phi 6$	340	206	435
HZ2	33	3.0	31250	HA10	428	198	545
HZ3	34	3.4	32080	HA16	430	213	526
HZ4	32	3.3	32000	HA20	424	195	543
				HA25	450	230	588

La précontrainte des poutres est réalisée en post-tension. Les câbles, un par poutre, sont constitués d'un nombre variable de fils $\phi 7$: 16,10 et 7 respectivement pour les poutres HZ1, HZ2 et HZ3. Le fil $\phi 7$ est caractérisé par une limite d'élasticité de 1540 MPa, un module élastique de 175 GPa et une contrainte de rupture de 1970 MPa.

On peut noter que le modèle développé estime de façon satisfaisante la contribution de l'effort tranchant.

Conclusion

Ce chapitre nous a permis de connaître en détail les paramètres régissant le comportement des structures en béton précontraint. Les non-linéarités observées dans les structures ont pour origine des phénomènes géométriques et mécaniques (apparition des fissures, flambement, recule d'ancrage, glissement des barres dans le béton...etc.). La simulation du comportement des structures en béton armé et/ou précontraint nous oblige à tenir compte de ces non-linéarités.

CHAPITRE II :
ETUDE D'UNE SECTION
DROITE

Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre, à l'étude d'une section droite d'un élément de poutre en béton armé et/ou précontraint. La section est étudiée dans l'hypothèse des petites déformations et du comportement élastique non linéaire [14].

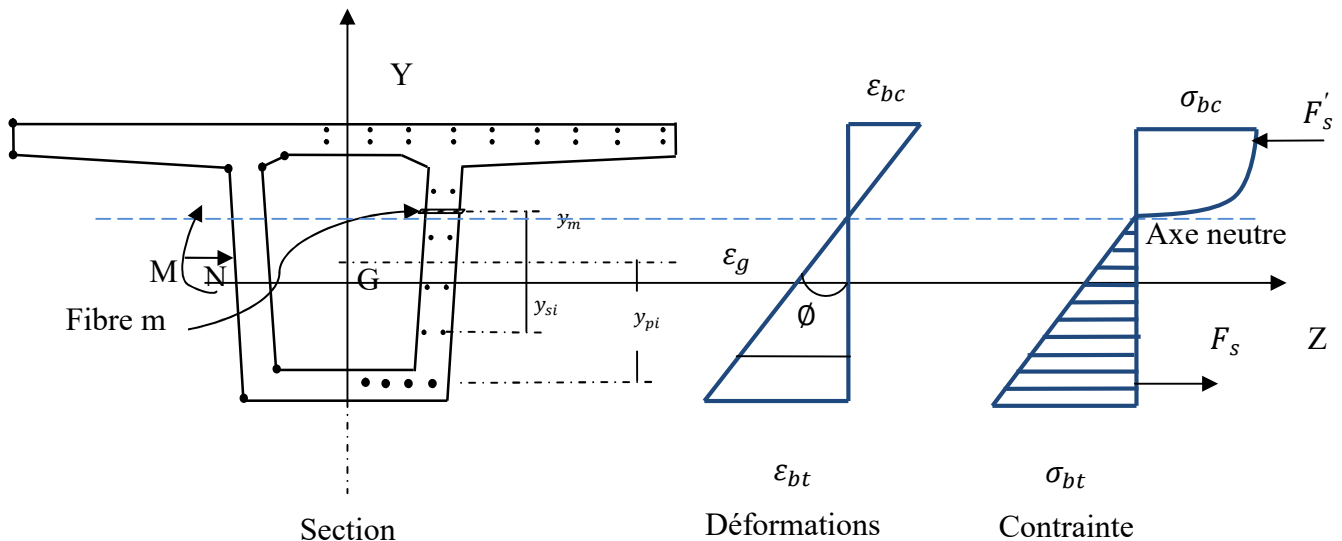


Figure II-1 : Description d'une section typique d'une section en béton armé et béton précontraint

En admettant que les sections restent planes après déformation, que les aciers passifs et les câbles de précontrainte intérieurs après mise en tension, sont parfaitement solidaire au béton et qu'ils ne reprennent que les efforts axiaux.

Les matériaux constituant une structure en béton armé et/ou précontraint, obéissent en général à des lois de comportement non linéaires. Ceci induit une non-linéarité dans le comportement global de la structure.

L'élément de base dans le calcul des structures élancées est une section plane. Tous les efforts internes définis dans une structure seront réduits à ceux d'une section plane sous forme d'un torseur de contrainte déterminé par : un effort normal, un moment fléchissant et un effort tranchant. De même, les déformations seront définies dans une section par une déformation normale, une courbure et une déformation de cisaillement. Cette dernière est exprimée sous la forme d'une rotation additionnelle qui sera étudiée au chapitre suivant.

II.1. L'effet de la précontrainte

L'effet du précontraint est introduit en tenant compte du phasage éventuel sur la mise en tension des câbles. A la mise en tension, l'action de la précontrainte, sur la section, est un effort de compression excentré, égale et opposé à l'effort de traction dans le câble. Cet effort est appliqué suivant la tangente à la ligne moyenne du câble, au point où il traverse la section.

Les câbles de précontrainte deviennent des éléments résistants, immédiatement après leur mise en tension, et possédant une pré-déformation par rapport à la section.

Dans le cadre de cette étude, l'analyse non-linéaire concerne aussi bien les sollicitations normales dues à un effort normal N et à un moment de flexion M , agissant dans le plan zy que la sollicitation tangente dans le béton, due à l'effort tranchant T . On admet que la distorsion dû à l'effort tranchant influe peut sur les déformations normales de la section.

Compte tenu de l'hypothèse de la section plane et de l'adhérence parfaite entre les matériaux constituant la section, en négligeant l'influence de la distorsion sur les déformations normale de la section, la déformation longitudinale ε comptée positivement dans les sens des raccourcissements en un point courant de la section est de donnée par :

$$\varepsilon = \varepsilon_g + y_m * \varnothing_z \quad \text{II-1}$$

Où

ε_g : est l'allongement unitaire au centre de gravité de la section, on désigne par \varnothing_z la rotation unitaire de flexion autour de l'axe G_y et y_m l'ordonnée du centre de gravité de la fibre d'ordre m .

La déformation tangente notée, γ_y désigne la déformation de cisaillement de la section dans le plan yz .

Les déformations normales $(\varepsilon_g, \varnothing_z)$ peuvent s'écrire sous forme d'un vecteur δ_n , défini par :

$$\delta_n = (\varepsilon_g, \varnothing_z)^T \quad \text{II-2}$$

De plus la déformation tangente peut s'écrire sous forme :

$$\delta_t = \gamma_y \quad \text{II-3}$$

Nous notons $\Delta\delta_n$ le vecteur contenant l'accroissement de déformation de la section droite sous sollicitations normales et $\Delta\delta_t$ l'accroissement de la déformation de la section droite sous sollicitation tangentes.

$$\Delta\delta_n = (\Delta\varepsilon_g, \Delta\phi_z)^T \quad \text{II-4}$$

$$\Delta\delta_t = \Delta\gamma_y \quad \text{II-5}$$

A une déformation $\Delta\delta_n$ et $\Delta\delta_t$ de la section, une déformation ε_{si} défini par NAIT RABAH [15]. Dans l'hypothèse des armatures passives et actives qui ne reprennent que les efforts axiaux son expression est :

$$\varepsilon_{si} = \cos^2\alpha_i \{1, y_{si}\} \delta_n \quad \text{II-6}$$

Où α est l'angle que fait la ligne moyenne du câble avec l'axe Gx normal à la section droite.

Dans le cas d'une armature active, la mise en tension produit sur chaque section de l'élément un effort de compression opposé à l'effort de traction du câble, appliqué suivant la tangente à la ligne moyenne du câble au point de passage de celui-ci dans la section. La relation (II-6) doit être corrigée pour tenir compte de la pré-déformation ε_p^* du câble par rapport à la section droite. La déformation ε_p^* dans le câble correspond à l'état de la décompression du béton. Elle exprime la différence entre la déformation du câble et celle de la section, dans la direction du câble, au moment de la mise en tension. La déformation dans l'armature de précontrainte d'ordre i s'écrit dans les hypothèses admises dans cette étude sous forme :

$$\varepsilon_{pi} = \cos^2\alpha_i \{1, y_{pi}\} \delta_n + \varepsilon_{pi}^* \quad \text{II-7}$$

II.2. Calcul des sollicitations internes

Les sollicitations normales à la section droite dues aux matériaux constituant la section, peuvent s'écrire sous la forme d'un vecteur F_n défini dans le repère principale Gzy, lié à la section droite par :

$$F_n = \begin{Bmatrix} N_m \\ M_m \end{Bmatrix} = \iint_A \begin{Bmatrix} 1 \\ y \end{Bmatrix} \sigma_m dydz \quad \text{II-8}$$

Où

σ_m : Est la contrainte normale en un point courant de la section transversale A de l'élément.

La section droite est composée généralement de béton et des armatures passives et actives. On peut écrire comme suit l'équation (II-8) en tenant compte de la contribution de chaque matériau constituant la section :

$$F_n = F_{nb} + F_{ns} + F_{np} \quad \text{II-9}$$

Où \vec{F}_{nb} représente la contribution du béton. Ce vecteur est donné par :

$$F_{nb} = \iint_A \begin{Bmatrix} 1 \\ y_m \end{Bmatrix} \sigma_m dy dz \quad \text{II-10}$$

La contribution des armatures passives, considérée comme concentrée dans leur lit en leur centre de gravité, est donnée par le vecteur \vec{F}_{ns} défini par :

$$F_{ns} = \sum_{i=1}^{n_{si}} \begin{Bmatrix} 1 \\ y_{si} \end{Bmatrix} \sigma_{si} A_{si} \quad \text{II-11}$$

Où σ_{si} est la contrainte normale au centre de gravité de la section de l'armature passive d'ordre i, A_{si} la section droite de l'armature et n_{si} le nombre d'armatures passives traversant la section droite.

La contribution des armatures actives, considérées comme concentrées dans leur lit en leur centre de gravité, est donnée par le vecteur F_{np} défini par :

$$F_{np} = \sum_{i=1}^{n_{pi}} \begin{Bmatrix} 1 \\ y_{pi} \end{Bmatrix} \sigma_{pi} A_{pi} \cos \alpha_i \quad \text{II-12}$$

Où σ_{pi} étant la contrainte normale au centre de gravité de la section de l'armature active d'ordre i, A_{pi} la section droite de l'armature, α_i l'angle que fait la ligne moyenne du câble d'ordre i avec l'axe x et n_{pi} le nombre d'armature active traversant la section droite.

La variation des déformations normales notée, $\Delta\delta_n$ de la section droite, produit une variation de sollicitations normales dans les matériaux de la section.

La variation des sollicitations normales ΔF_{nb} dans le béton est donnée par :

$$\Delta F_{nb} = \iint_A E_m \begin{bmatrix} 1 & y_m \\ y_m & y_m^2 \end{bmatrix} dy dz \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_g \\ \Delta\varphi_z \end{Bmatrix} \quad \text{II-13}$$

Où E_m désigne le module élastique longitudinal en un point courant de la section du béton. Il relie l'accroissement de la contrainte normale $\Delta\sigma_m$ à l'accroissement de déformation longitudinale $\Delta\varepsilon_m$ correspondant au point courant.

$$\Delta\sigma_m = E_m \cdot \Delta\varepsilon_m \quad \text{II-14}$$

La section A étant définie comme une succession de couches, les intégrales sur la section sont effectuées dans chaque couche en utilisant la formule de SIMPSON.

La variation de la sollicitation tangente due au béton est calculée en fonction des déformations correspondantes en supposant que le comportement est élastique non linéaire. Elles peuvent s'écrire sous forme :

$$\Delta T_{ym} = [K_{2b}] \Delta \gamma \quad \text{II-15}$$

Où $\{\delta_t\}$ est la déformation de la section sous sollicitations tangentes

$$K_{2b} = \frac{\Delta T_b}{\Delta \gamma}$$

K_{2b} : Est la rigidité de la section à l'effort tranchant dans le plan xz.

Où le terme $\frac{\Delta T_b}{\Delta \gamma}$ constitue le module corde de cisaillement de la section.

En tenant compte des relations (II-6 et II-11), nous pouvons écrire sous forme matricielle la relation liant les accroissements de déformations dans une section droite, et les accroissements de sollicitations internes développés dans le béton :

$$\Delta F_b = \begin{Bmatrix} \Delta F_b \\ \Delta T_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1b} & o \\ o^T & K_{2b} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \gamma \end{Bmatrix} \quad \text{II-17}$$

Avec

$$\Delta F_{nb} = \iint_A E_m \begin{bmatrix} 1 & y_m \\ y_m & y_m^2 \end{bmatrix} dy dz$$

$$o = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$K_{2b} = \frac{\Delta T_b}{\Delta \gamma}$$

La variation des déformations normales $\{\Delta\delta_n\}$ de la section droite produit une variation des sollicitations normales $\{\Delta F_{ns}\}$

$$\Delta F_{ns} = \sum_1^{ns} E_{si} A_{si} \begin{bmatrix} 1 & y_{si} \\ y_{si} & y_{si}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_g \\ \Delta \varphi_z \end{Bmatrix} \quad \text{II-18}$$

Où E_{si} est le module élastique au niveau de l'armature passive d'ordre i . Il relie l'accroissement des contraintes à l'accroissement des déformations longitudinales correspondantes au niveau du centre de gravité de l'armature.

$$\Delta \sigma_{si} = E_{si} \Delta \varepsilon_{si} \quad \text{II-19}$$

En négligeant la sollicitation tangente due aux armatures passives, la relation liant les accroissements de déformations aux accroissements des sollicitations internes développées dans les armatures passives s'écrit :

$$\Delta F_s = \begin{Bmatrix} \Delta F_{ns} \\ \Delta T_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1s} & 0 \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \gamma \end{Bmatrix} \quad \text{II-20}$$

Où $[K_{1s}]$ est la matrice symétrique (2x2) définie par :

$$K_{1s} = \sum_1^{ns} E_{si} A_{si} \begin{bmatrix} 1 & y_{si} \\ y_{si} & y_{si}^2 \end{bmatrix}$$

La variation des sollicitations normales à la section droite dues aux armatures de précontrainte adhérentes inclinées et supposées concentrées en leur centre de gravité, elle peut s'écrire sous la forme d'un vecteur ΔF_{np} en négligeant l'influence de la distorsion sur les déformations longitudinales au niveau de l'armature de précontrainte comme suit :

$$\Delta F_{np} = \sum_1^{np} E_{pi} A_{pi} \cos \alpha_i \begin{bmatrix} 1 & y_{si} \\ y_{si} & y_{si}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_g \\ \Delta \varphi_z \end{Bmatrix} \quad \text{II-21}$$

Equation qui peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta F_{np} = K_{1p} \Delta \delta_n \quad \text{II-22}$$

II.2.1. Flexion simple

Une section droite (S) d'une pièce est soumise à la flexion simple si les forces appliquées à la pièce, y compris les réactions d'appuis, situées à gauche de cette section peuvent être réduites, par rapport à un point quelconque de la section, à un couple de moment M et une force T située dans le plan de la section. Par suite de la symétrie envisagée, le couple et la force T se trouveront dans le plan de symétrie de la section.

M est la somme des moments par rapport à un point quelconque de la section des forces situées à gauche de cette section, et s'appelle le moment de flexion.

T est la résultante dans le plan de la section des forces situées à gauche de cette section, s'appelle l'effort tranchant.

II.2.2. Flexion composée

Une section droite (S) d'une pièce est soumise à la flexion composée si les forces appliquées à la pièce, y compris les réactions d'appuis, situées à gauche de cette section peuvent être réduites, par rapport à un point O quelconque de la section, à un couple de moment M et à une force R passant par O mais non située dans le plan de la section. Par suite de la symétrie envisagée, le couple et la force R se trouveront dans le plan de symétrie de la section.

La force R peut être décomposée en :

Une force N , perpendiculaire au plan de la section. N s'appelle l'effort normal;

Une force T , située dans le plan de la section. T s'appelle l'effort tranchant.

Une section (S) sera donc à calculer à la flexion composée dans les deux cas suivant :

- Si elle est soumise à un moment M et à un effort normal N , rapportées à un point O quelconque de la section, point qu'il y aura toujours lieu de préciser ;

- Si elle est soumise à un effort normal N excentré, puisque le système constitué par M et N appliqués au point O est équivalent au système constitué par N agissant à une distance e de O déterminée par $e = \frac{M}{N}$.

On voit que la flexion simple, définie ci-dessus, n'est qu'un cas particuliers de la flexion composée pour lequel $N=0$.

En flexion composée, suivant le sens de N (traction ou compression) et suivant les valeurs de M et de N , la section peut se trouver dans un état de contrainte telle que :

- La section est entièrement tendue ;
- La section est entièrement comprimée ;
- La section est partiellement comprimée (ou partiellement tendu, ce qui est équivalent).

Dans ce qui suit nous considérons que le moment M est positif, c'est-à-dire qu'il tourne dans le sens trigonométrique. Cette hypothèse ne diminue en rien la généralité des résultats qui seront établis car le sens du moment n'intervient que pour fixer la position de la fibre la plus comprimée (ou la moins tendue), c'est-à-dire pour déterminer si elle se trouve à la partie inférieure ou à la partie supérieure de la section. La position de cette fibre pouvant être fixée immédiatement dans chaque cas particuliers, on peut toujours supposer, dans les calculs, qu'elle se trouve à la partie supérieure de la section.

Avec

$$K_{1p} = \sum_1^{np} E_{pi} A_{pi} \begin{bmatrix} 1 & y_{pi} \\ y_{pi} & y_{pi}^2 \end{bmatrix} \cos \alpha_i$$

La variation des sollicitations tangentes dans l'armature de précontrainte d'ordre i est donnée par :

$$\Delta F_{np} = \sum_1^{np} E_{pi} A_{pi} \sin \alpha_i \cos^2 \alpha_i \begin{Bmatrix} 1 & y_{pi} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_g \\ \Delta \varphi_z \end{Bmatrix} \quad \text{II-23}$$

Equation qui peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta F_{tp} = K_{2p} \Delta \delta_n \quad \text{II-24}$$

Avec

$$K_{2p} = \sum_1^{np} E_{pi} A_{pi} \sin \alpha_i \cos^2 \alpha_i \begin{Bmatrix} 1 \\ y_{pi} \end{Bmatrix}$$

Où E_{pi} le module élastique longitudinal de l'armature de précontrainte d'ordre i . il relie l'accroissement de contrainte $\Delta \sigma_{pi}$ à l'accroissement de déformation $\Delta \varepsilon_{pi}$ au niveau de l'armature d'ordre i :

$$\Delta \sigma_{pi} = E_{pi} \Delta \varepsilon_{pi}$$

La relation matricielle liant les accroissements de déformations de la section aux accroissements de sollicitation internes développées dans les armatures de précontrainte s'écrit :

$$\Delta F_p = \begin{Bmatrix} \Delta F_{np} \\ \Delta F_{tp} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1p} & 0 \\ K_{2p}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \gamma \end{Bmatrix} \quad \text{II-25}$$

Avec

$$0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

II.3. Déformation de la section à l'équilibre

La section droite est supposée soumise aux accroissements d'efforts sollicitant dus aux forces extérieures :

$$\Delta F_S = \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_Z \\ \Delta T_Y \end{Bmatrix} \quad \text{II-26}$$

L'équilibre de la section droite se traduit par l'égalité des accroissements d'efforts sollicitant et les accroissements d'efforts internes.

$$\Delta F_S + \Delta P_S = \Delta F_b + \Delta F_a + \Delta F_p \quad \text{II-27}$$

Le vecteur ΔP_S contenant l'action de la précontrainte à la mise en tension des câbles est non nul. Ces composantes sont définies par la relation (II-8). Après la mise en tension des câbles intérieurs, ce vecteur devient nul et ne participe à l'équilibre de la section que si de nouveaux câbles sont mis en tension à une étape de calcul quelconque.

La condition d'équilibre de la section, tenant compte des relations (II-13), (II-13), (II-15)

et (II-17), peut être exprimée par la relation :

$$\Delta F_S + \Delta P_S = [K_S] \Delta \delta \quad \text{II-28}$$

$[K_S]$: Représente la matrice de rigidité de la section, donnée par:

$$[K_S] = \begin{bmatrix} K_{1b} + K_{1s} + K_{1p} & 0 \\ K_{2p}^T & K_{2b} \end{bmatrix}$$

Pour un accroissement donné d'efforts sollicitant, la résolution en déformation de l'équation (3.29) est itérative. La solution peut s'exprimer par :

$$\Delta \delta = [K_S]^{-1} \{ \Delta F_S + \Delta P_S \} \quad \text{II-29}$$

Où $[K_S]^{-1}$ représente la matrice de souplesse de la section.

$[K_b]$ est la rigidité de la section à l'effort normal et le moment dans son plan

$$K_b = \iint_A E \begin{bmatrix} 1 & y \\ y & y^2 \end{bmatrix} dy dz$$

$$\{0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ et } \langle 0 \rangle = \langle 0 \quad 0 \rangle$$

$$K_{2b} = \frac{\Delta T_b}{\Delta \gamma}$$

$[K_a]$ est la matrice symétrique (2x2) définie par :

$$K_a = \sum_1^{ns} E_{si} A_{si} \begin{bmatrix} 1 & y_{si} \\ y_{si} & y_{si}^2 \end{bmatrix}$$

$\Delta\delta = \begin{Bmatrix} \Delta\delta_n \\ \Delta\delta_t \end{Bmatrix}$ est l'accroissement de déformation.

II.4. Méthode itérative de résolution et critères de convergence

En élasticité non-linéaire, il est facile de calculer les efforts développés par une déformation donnée. Cependant il n'existe pas de méthode directe permettant de calculer la déformation produite par des efforts donnés. On est donc contraint à utiliser une méthode itérative pour la recherche de la solution en déformation.

Considérons un état d'équilibre de la section soumise à des sollicitations extérieures, qui peuvent s'écrire sous forme d'un vecteur $\{F_s\}$, défini par :

$$F_s = (N, M_z, T_y)^T \quad \text{II-30}$$

On note par $\vec{\delta}_s$, le vecteur de déformation de la section correspondant. Il est donnée par :

$$\delta = (\varepsilon_g, \varnothing, \gamma)^T \quad \text{II-31}$$

Pour une variation des sollicitations extérieures ΔF_s , et sous l'action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension des câbles, l'accroissement de déformation $\Delta\vec{\delta}_s$ de la section est recherché, en utilisant la méthode des substitutions successives utilisant les matrices codes. Cette méthode consiste à construire une suite de solutions, $\Delta\delta_0, \Delta\delta_1, \dots, \Delta\delta_i$

$\Delta\delta_i$ étant calculé à partir de $\Delta\delta_{i-1}$, en résolvant le système linéaire :

$$\Delta F_s + \Delta P_s = [K_s]_{i-1} \Delta\delta_i \quad \text{II-32}$$

Où $[K_s]_{i-1}$ est la matrice de rigidité de la section, à l'itération $(i - 1)$. En partant de la solution initiale nulle, le schéma de résolution s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta\delta_0 &= 0 \\ \Delta\delta_1 &= [K_s]_{i-1}^{-1} \{ \Delta F_s + \Delta P_s \} \end{aligned} \quad \text{II-33}$$

De façon générale l'équilibre d'une section est défini par deux conditions :

- La limitation de la variation des déformations entre deux itérations successives à une tolérance fixée à priori. Cette variation est déterminée avec la norme euclidienne des déformations :

$$\eta = \left[\frac{\langle \Delta\delta_i - \Delta\delta_{i-1} \rangle \cdot (\{\Delta\delta\}_i - \{\Delta\delta\}_{i-1})}{\langle \delta_s + \Delta\delta_i \rangle \cdot (\{\delta_s\} + \{\Delta\delta\}_i)} \right]^{1/2} < T_u \quad \text{II-34}$$

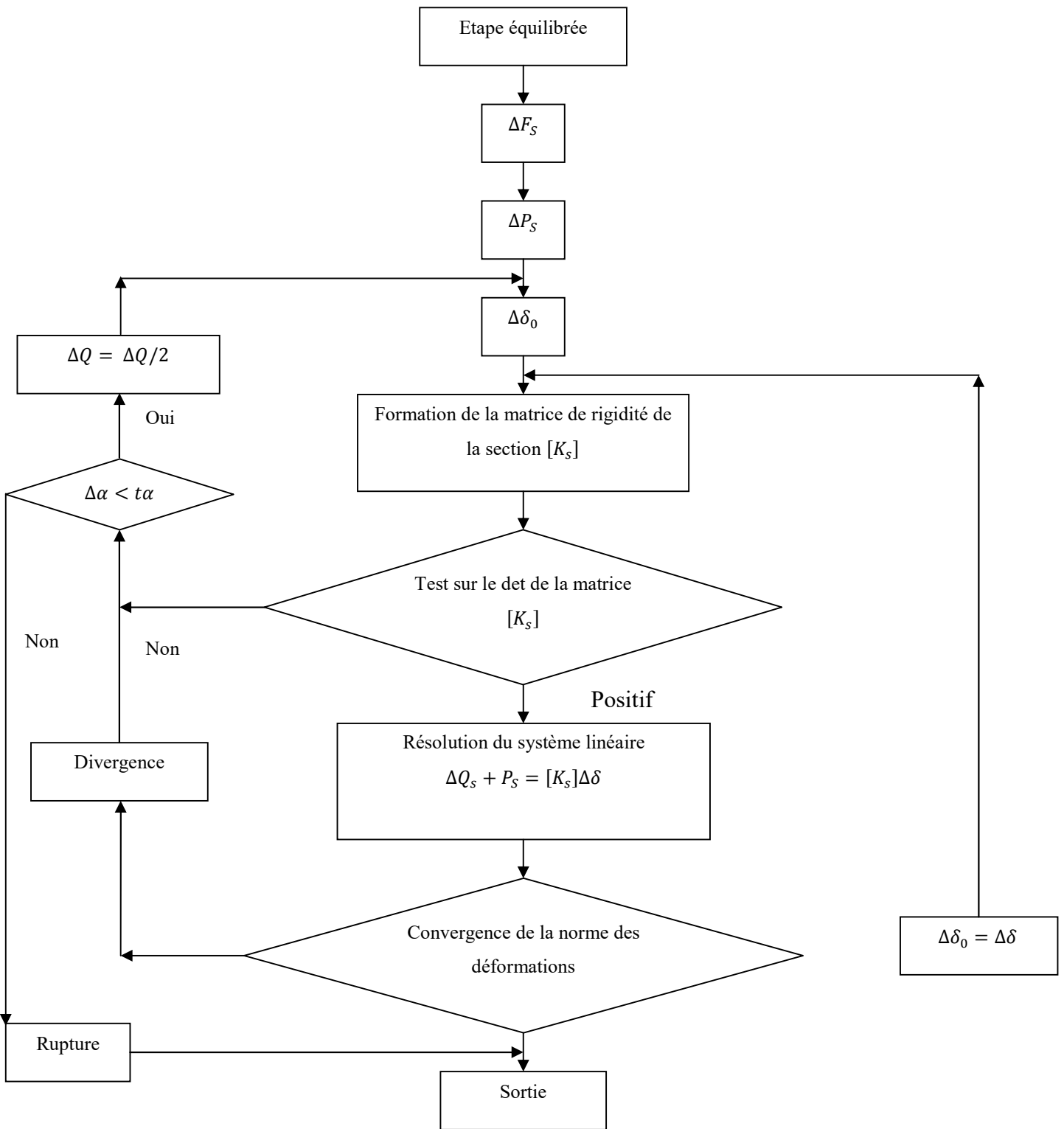
Où

$\{\delta_s\}$ Est la déformation à l'étape équilibrée précédente.

Généralement une dizaine d'itérations suffisent pour assurer la convergence.

II.5. Organigramme de la recherche de l'équilibre d'une section

Nous définissons ici l'organigramme simplifié de la recherche de l'état d'équilibre d'une section transversale lors d'un accroissement de sollicitations extérieurs ΔF_s et de l'action due à la précontrainte P_s à la mise en tension des câbles [15].



II-1 : Organigramme de la recherche de l'équilibre d'une section.

II.6. Méthodes de résolution non-linéaire

II.6.1. La méthode de Newton-Raphson

Elle est basée sur la matrice de rigidité tangente qui est recalculée après chaque itération. Le mode de convergence de cette méthode est quadratique, elle nécessite donc peu d'itérations [16].

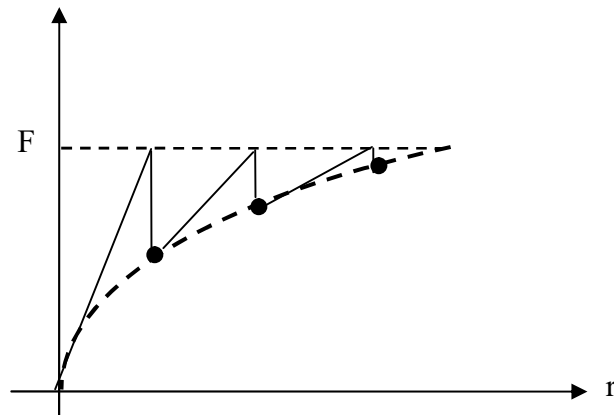


Figure II-2 : Méthode de Newton-Raphson

II.6.2. La méthode de Newton Raphson modifiée

Dans ce cas la matrice de rigidité tangente est calculée, une seule fois au début de l'incrément de charge, pour la première itération. Cette méthode exige un grand nombre d'itérations pour atteindre la convergence et arriver à la solution car le mode de convergence est linéaire.

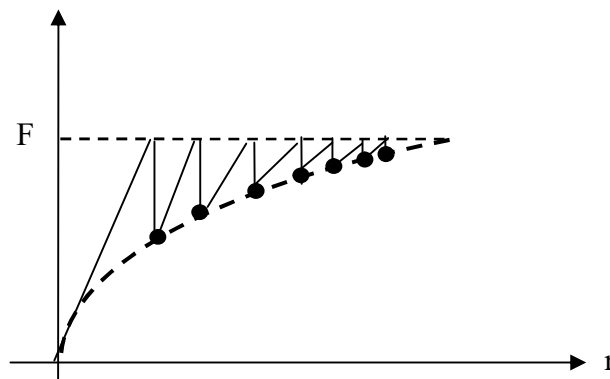


Figure II-3 : Méthode de Newton-Raphson modifiée.

II.6.3. La méthode de la rigidité sécante

Elle est mieux adaptée pour les cas des structures ayant un comportement adoucissant. C'est bien le cas du béton tendu fissuré dans les structures en béton armé.

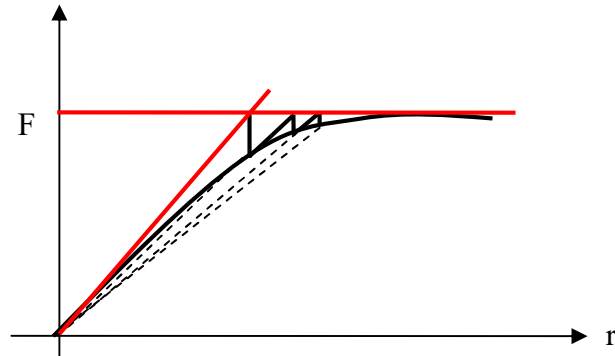


Figure II-4 : Méthode de la sécante

II.7. Etablissement des courbes d'interaction des sections de l'essai CEBTP

Les poutres CEBTP possèdent un ferrailage passif et actif varié et une forme en T de la section transversale voire figures (I-18, I-17) et tableaux (7 et 8) dans le chapitre I.

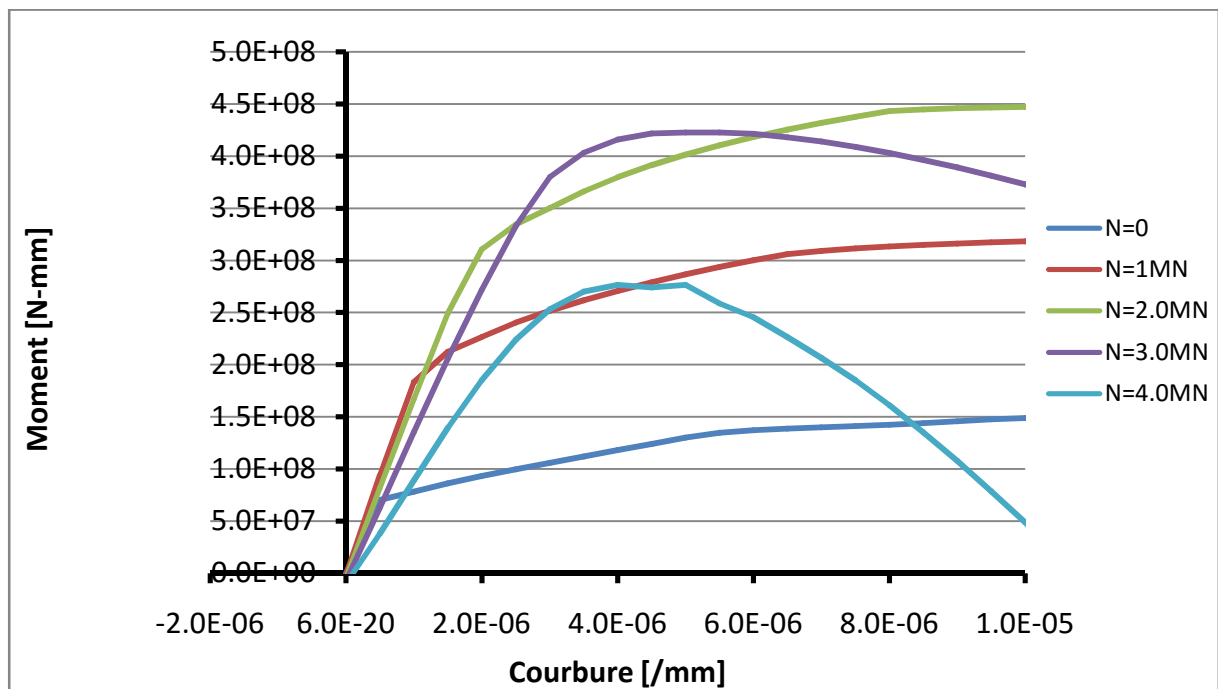


Figure II-5 : courbes d'interaction HZ1

Les courbes de la figures II-5 montrent que la résistance à la flexion des sections augmente avec l'effort normal de compression jusqu'à une valeur de 2.0MN ; au-delà, la résistance diminue par écrasement du béton. La résistance optimale à la flexion est d'environ 3MN

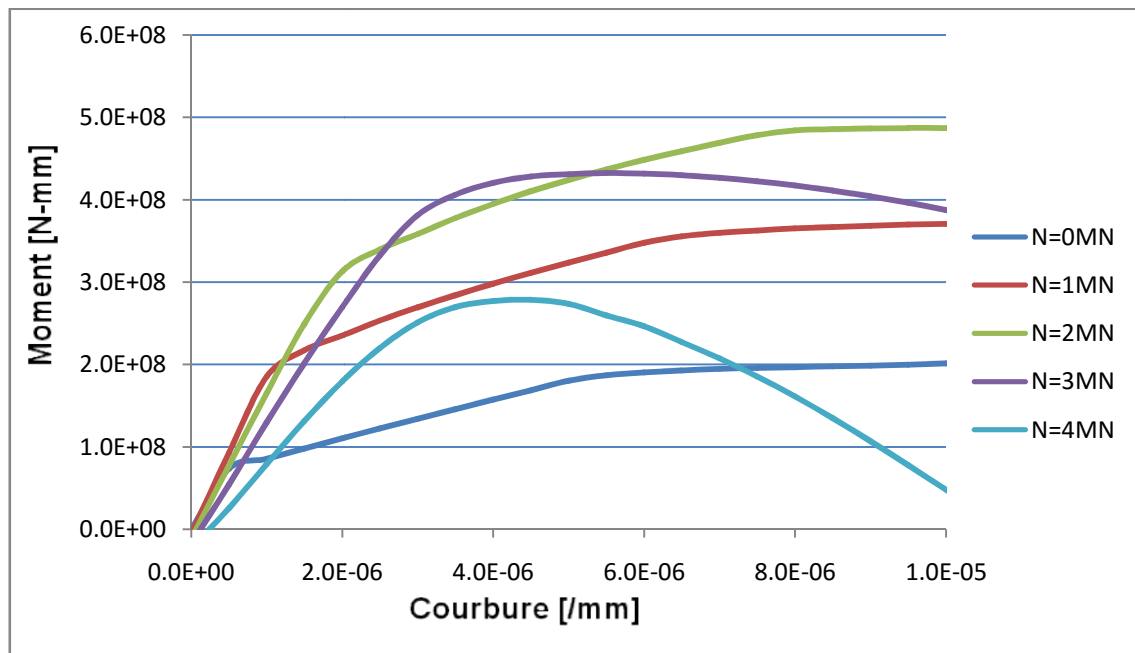


Figure II-6 : courbes d'interaction HZ2

On voit dans la figure II-6 qu'à chaque fois qu'on augmente N la résistance augmente jusqu'à $N = 2$ MN après la résistance diminue donc la résistance optimale à la flexion entre 3MN et 4MN. Les courbes d'interaction servent à trouver les résistances optimales à la flexion.

Conclusion

L'étude présentée jusqu'ici nous permet de simuler le comportement non linéaire des sections. Le calcul des sections est une étape importante pour le calcul des structures de poutre ; l'intégration des états de déformations des sections soumise à la flexion composée nous permettra de calculer la déformée et déduire le comportement des poutres en béton armé soumise à un chargement croissant.

CHAPITRE III :
ETUDE D'UN ÉLÉMENT
POUTRE

Introduction

La modélisation du comportement en flexion jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint est un problème bien connu. La présente étude s'inscrivant dans la suite des recherches menées au CEBTP.

Pour cela on présente les relations caractérisant la théorie des poutres dans un plan. Le calcul des poutres de Bernoulli néglige l'effort de cisaillement (poutre mince), par contre, la théorie de Timoshenko tiens compte de l'influence des déformations de cisaillement transversal (poutre épaisse), qui sont basé sur l'hypothèse des poutres droites (pour définir le champ de déplacement).

Ces deux formulations sont typiquement utilisées pour construire un modèle élément fini poutre pour des calculs non linéaires.

III.1. Théorie de Navier-Bernoulli

On s'intéresse à la modélisation du comportement non-linéaire des structures planes constituées d'éléments structuraux droits (poutres, poteaux, portiques et ossatures planes). En se basant sur la méthode des éléments finis, on présente, dans ce qui suit, une formulation détaillée d'un **élément poutre mince**.

III.1.1. Hypothèses de base

On s'intéresse à un élément poutre plan orienté selon l'axe longitudinal x et dont les dimensions dans le plan $y-z$ normal à l'axe x sont relativement petites par rapport à la dimension longitudinal (**Figure III-1**).

On se base sur les hypothèses suivantes :

1. L'axe longitudinal de la poutre est droit ;
2. La section droite est symétrique par rapport au plan $x-z$;
3. Les chargements agissant sur la poutre sont appliqués dans le plan $x-z$;
4. La poutre se déforme selon le plan de symétrie $x-z$ (en membrane, flexion et en cisaillement) ;

5. La poutre transmet des efforts normaux $N_x(x)$ suivant x , les efforts tranchants $T_z(x)$ suivant z et des moments fléchissant $M_y(x)$;
6. Les sections planes et droites avant déformation restent planes et orthogonal à la fibre neutre après déformation. Les déformations dues à l'effort tranchant sont négligées.
7. Les déplacements et les déformations du second ordre sont négligés (relation linéaire entre déformation et déplacements).

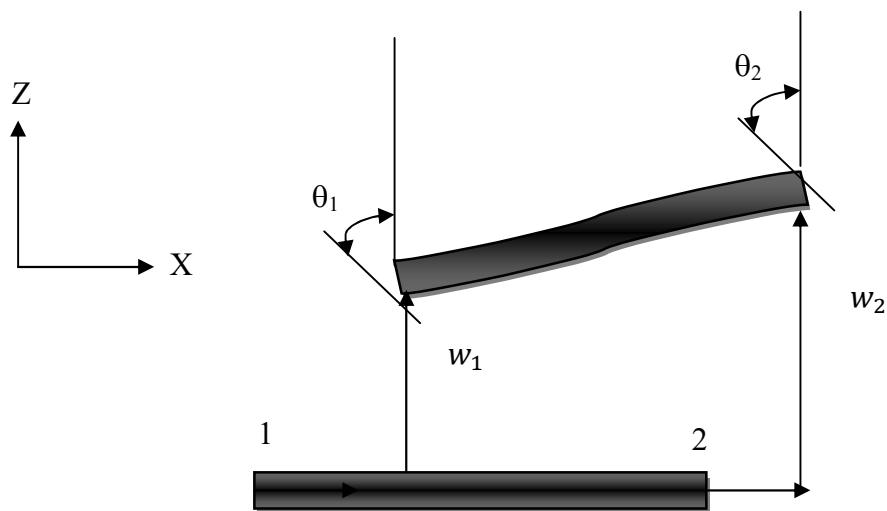


Figure III-1 : schématisation de l'élément avant et après déformation.

III.1.2. Cinématique

Considérons un tronçon de poutre de la figure III-2 avant et après déformation : soit le point M de coordonnées $(x-z)$ sur la configuration non déformée. Après déformation le point M subit un déplacement axial u selon x et un déplacement transversal w selon z tels que :

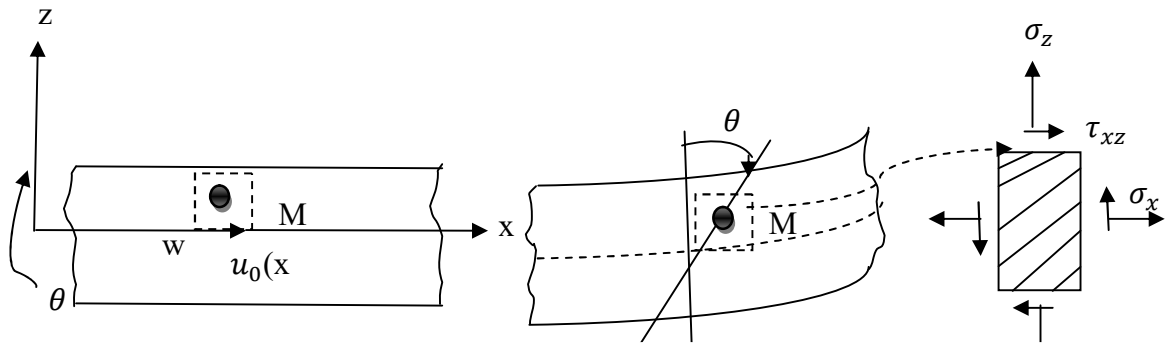


Figure III-2 : Cinématique de la poutre de Bernoulli

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x) + z\theta(x) \\ w(x, z) &= w(x) \end{aligned} \tag{III-1}$$

Où: $u_x(x)$ Le déplacement axial au niveau de l'axe de référence de la section transversale $\Sigma(x)$ d'abscisse x et $\theta(x)$ est la rotation de la même section tel que :

$$\theta(x) = -\frac{dw}{dx} + \gamma \tag{III-2}$$

Où γ est la rotation due au cisaillement transversal.

Dans le cadre de l'hypothèse de Navier-Bernoulli, les déformations dues à l'effort tranchant (ou cisaillement) sont négligées, $\gamma=0$, D'où :

$$\theta(x) = -\frac{dw}{dx}$$

La relation (III-1) devient :

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x) - z \frac{dw}{dx} \\ w(x, z) &= w(x) \end{aligned} \tag{III-3}$$

La relation (III-3) exprime l'hypothèse de Navier-Bernoulli, valable dans le cas des poutres minces.

III.1.3. Relation contrainte-déformation

Si on considère un état plan de contrainte au point M alors dans l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire et isotrope

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\vartheta^2} \begin{bmatrix} 1 & \vartheta & 0 \\ \vartheta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\vartheta}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad \text{III-4}$$

Avec : E : module de Young.

ϑ : Coefficient de poisson.

Dans le cas des poutres, on considère un état de contrainte uni axial, alors

$$\sigma_z = 0 \quad \text{III-5}$$

D'après les relations (III-4) et (III-5), on obtient

$$\varepsilon_z = -\vartheta \varepsilon_x \quad \text{III-6}$$

En remplaçant (III-6) dans (III-4) on obtient :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} \quad \text{III-7}$$

Avec

$$G = \frac{E}{2(1 + \vartheta)}$$

III.1.4. Relation déformations –déplacements :

Selon l'hypothèse précédente, la relation déformations-déplacements est linéaire :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x,z)}{\partial x} \quad \text{III-8}$$

En tenant compte de la relation (III-3), on obtient

$$\varepsilon_x = \frac{du_0(x)}{dx} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad \text{III-9}$$

Ou encore :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0x} + z\varnothing \quad \text{III-10}$$

Avec :

$$\begin{cases} \varepsilon_{0x} = \frac{du_0(x)}{dx} \\ \varnothing = -\frac{d^2w(x)}{dx^2} \end{cases}$$

Avec

ε_{0x} = déformation longitudinale au niveau de l'axe de référence.

\varnothing = courbure

III.1.5. Principe des travaux virtuels (P.T.V) :

On considère une poutre mince droite de longueur l, ayant une section transversale de hauteur h et de longueur b(z) variant avec la hauteur.

On suppose que la poutre est soumise à un chargement réparti transversal fz et longitudinal fx.

D'après le principe des travaux virtuels (P.T.V), pour toute variation des déplacements et déformations virtuels $\delta\hat{u}, \delta\hat{w}, \delta\hat{\varepsilon}$, le travail des efforts intérieurs est égal au travail des efforts extérieurs :

$$\partial\hat{W}_{int} = \partial\hat{W}_{ext} \quad \text{III-11}$$

Ce qui donne l'expression :

$$\int_v \langle \delta\varepsilon_x \rangle \{ \sigma \} dv = \int_0^l \delta\hat{w} f_z dx + \int_0^l \delta\hat{u} f_x dx \quad \forall \delta\hat{\varepsilon}, \delta\hat{w}, \text{ et } \delta\hat{u}$$

$$\int_0^l \int_s \delta\hat{\varepsilon}_x \cdot \sigma_x ds dx - \int_0^l \delta\hat{w} f_x dx - \int_0^l \delta\hat{u} f_x dx = 0$$

Or

$$\delta\varepsilon_x = \delta\hat{\varepsilon}_{x0} + z\delta\hat{\varnothing} \quad \text{III-12}$$

d'après

$$\int_0^l \int_s (\delta \hat{\varepsilon}_{x0} + z \delta \hat{\phi}) \cdot \sigma_x ds dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_x dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

$$\int_0^l \int_s (\delta \hat{\varepsilon}_{x0} \sigma_x + \delta \hat{\phi} \cdot \sigma_x \cdot z) ds dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_x dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

$$\int_0^l [\delta \hat{\varepsilon}_x \int \sigma_x ds + \delta \hat{\phi} \int \sigma_x z ds] dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_x dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0 \quad \text{III-13}$$

III.1.6. Relation entre efforts et déformation

L'effort normal dans la section transversale d'abscisse x est :

$$N = N(x) = \int_s \sigma_x ds$$

$$N = \int_s E \varepsilon_x ds = \int_s E (\varepsilon_{0x} + z \phi) ds = \varepsilon_{0x} \int_s E ds + \phi \int_s E \cdot z \cdot ds$$

On pose :

$$\overline{EA} = \int_s E \cdot ds = \text{rigidité à l'effort normal (de membrane)}$$

$$\overline{ES} = \int_s E \cdot z \cdot ds = \text{rigidité du au couplage effort normal + flexion}$$

L'expression de l'effort normal s'écrit comme suit :

$$N = \overline{EA} \cdot \varepsilon_{0x} + \overline{ES} \cdot \phi \quad \text{III-14}$$

De même, le moment fléchissant dans la section transversale d'abscisse x, par rapport à l'axe de référence est :

$$M = \int_s \sigma_x \cdot z ds =$$

$$= \int_s E \varepsilon_x \cdot z ds = \int_s E (\varepsilon_{0x} + z \phi) z ds = \varepsilon_{0x} \int_s E z ds + \phi \int_s E \cdot z^2 \cdot ds$$

On pose :

$$\overline{EI} = \int_s E \cdot z^2 \cdot ds = \text{rigidité à la flexion}$$

$$\overline{ES} = \int_s E \cdot z \cdot ds = \text{rigidité du au couplage effort normal + flexion}$$

L'expression de moment fléchissant devient :

$$M = \overline{ES} \cdot \varepsilon_{0x} + \overline{EI} \cdot \phi \quad \text{III-15}$$

Ainsi, dans la section transversale d'abscisse x , la relation entre les efforts et les déformations est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \phi \end{Bmatrix} \quad \text{III-16}$$

En tenant compte des relations (III-14) et (III-17), la relation (III-12) peut se réécrire sous la forme :

$$\int_0^l [\delta \hat{\varepsilon}_{0x} \cdot N + \delta \hat{\phi} \cdot M] dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

$$\int_0^l \langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x}, \delta \hat{\phi} \rangle \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

$$\int_0^l \langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x}, \delta \hat{\phi} \rangle \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \phi \end{Bmatrix} dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0 \quad \text{III-17}$$

$$\forall \delta \hat{\varepsilon}_{0x}, \forall \delta \hat{\phi} \quad \text{III-18}$$

III.1.7. Modélisation par élément finis et calcul de la matrice de rigidité

Pour la discrétisation des déplacements, on utilise un élément finis à deux nœuds. Chaque nœud est caractérisé par deux déplacements et une rotation qui constituent les degrés de liberté de l'élément (soit 6 d.d.l). Ces déplacements sont représentés par un vecteur de dimension 6x1 de la manière suivante :

$$\{U\}' = \{u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2\}$$

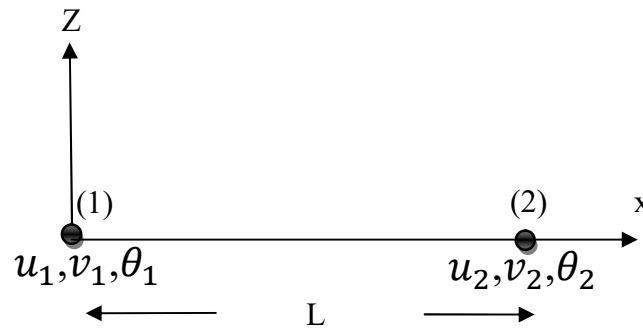


Figure III-3 : Élément fini à 2 nœuds et 6 d.d.l

Le déplacement longitudinal $u_0(x)$, au niveau de l'axe de référence, est approximé par des fonctions d'interpolations de type Lagrange de degré 1 dans la base polynomiale.

$$u_0(x) = N_1 \cdot u_1 + N_2 \cdot u_2 \quad \text{III-19}$$

Avec u_1, u_2 les valeurs du déplacement longitudinal aux nœuds 1 et 2 respectivement.

Avec

$$\begin{cases} N_1 = (1 - \frac{x}{l}) \\ N_2 = \frac{x}{l} \end{cases}$$

On posant :

$$\xi = \frac{x}{l},$$

L'expression du déplacement devient :

$$u_0(x) = (1 - \xi) \cdot u_1 + \xi \cdot u_2 \quad \text{III-20}$$

Pour le déplacement transversal $w(x)$, on utilise des fonctions d'interpolation de type Hermite de degré 3 dans la base polynomiale :

$$w(x) = N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 \theta_3 + N_4 \theta_4 \quad \text{III-21}$$

Les fonctions d'interpolations sont données par :

$$N_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3$$

$$N_2 = 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \quad \text{III-22}$$

$$N_3 = l\left[\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$$

$$N_4 = 1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3$$

Avec

w_1, w_2 : Les valeurs de déplacement transversal respectivement aux nœuds 1 et 2

θ_1, θ_2 : Les valeurs de la rotation respectivement aux nœuds 1 et 2.

La déformation longitudinal au niveau de l'axe de référence de l'élément poutre est donnée par:

$$\varepsilon_{0X} = \frac{du_0(x)}{dx} = \frac{-1}{l} \cdot u_1 + \frac{1}{l} \cdot u_2$$

La rotation $\theta(x)$ est donnée par :

$$\theta(x) = -\frac{dw}{dx} = -(N_1'(x) \cdot w_1 + N_2'(x) \cdot w_2 + N_3'(x) \cdot \theta_1 + N_4'(x) \cdot \theta_2)$$

La courbure ϕ s'écrit sous la forme suivante :

$$\phi(x) = -\frac{d^2w}{dx^2} = -(N_1''(x) \cdot w_1 + N_2''(x) \cdot w_2 + N_3''(x) \cdot \theta_1 + N_4''(x) \cdot \theta_2)$$

On déduit que :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0X} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}) & (\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}) & 0 & (\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}) & (\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{III-23}$$

Ce qui s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0X} \\ \phi \end{Bmatrix} = [B] \cdot \{u_n\} \quad \text{III-24}$$

A partir de l'expression (III-16) du P.T.V, on obtient :

$$\int_0^l \langle \delta \hat{u} \rangle' [B] t. [D]. [B]. \{u_n\} dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0 \quad \text{III-25}$$

Avec

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{-1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}) & (\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}) & 0 & (\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}) & (\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2}) \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \quad \text{III-26}$$

On déduit l'expression de la matrice de rigidité élémentaire $[k]_e$ [24] :

$$[k]_e = \int_0^l [B]^t \cdot [D] \cdot [B] dx \quad \text{III-27}$$

Le calcul de la matrice de rigidité élémentaire donne :

$$[k]_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ \text{symétrie} & & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \quad \text{III-28}$$

Remarque : Les composantes de la matrice de rigidité élémentaire $[k]_e$ sont évaluées en utilisant une intégration numérique.

III.2. Théorie de Timoshenko

La théorie de Timoshenko considère que les sections planes restent planes après la déformation (pas nécessairement perpendiculaires à l'axe moyen). Cette théorie introduit donc une liberté de rotation à la section, appelé angle de distorsion, qui permet de calculer la déformation de cisaillement.

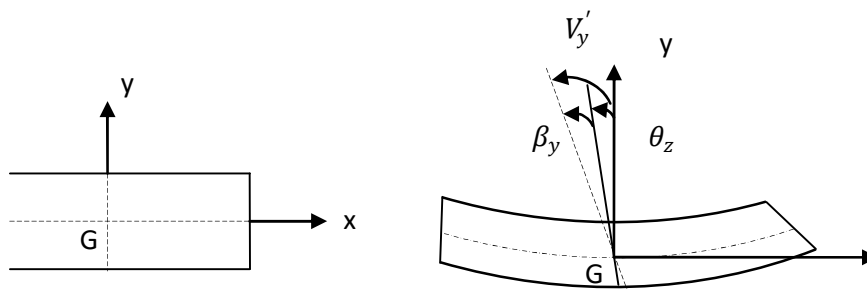


Figure III-4 : Cinématique de la poutre, théorie de Timoshenko

III.2.1. Cinématique

Le champ des déformations s'écrit :

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{\partial U_x}{\partial x} = U'_x(x) - y\theta'_x(x)$$

$$\gamma_{xy}(x, y) = \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} = U'_y(x) - \theta_x(x) = \beta_y \neq 0 \quad \text{III-29}$$

La théorie de Timoshenko permet par conséquent de calculer une déformation de cisaillement constante le long de la section. Ceci n'est évidemment pas conforme avec la distribution parabolique qu'on trouve selon la théorie d'élasticité et ne respecte pas les conditions aux limites. Pour améliorer la performance de l'approche, un coefficient de correction de cisaillement est donc introduit pour le calcul des contraintes.

III.2.2. Formulations d'éléments finis poutre Timoshenko

La formulation éléments finis adoptée ici est une formulation en déplacements. On considère une structure poutre linéique de longueur L discrétisée en n éléments finis poutres de longueur L_e composées (au minimum) de 2 nœuds i et j . Chaque nœud possède trois degrés de liberté : un déplacement axial U_x , un déplacement transversal V_y et une rotation θ_z . Les déplacements aux nœuds des éléments sont les inconnues du problème.

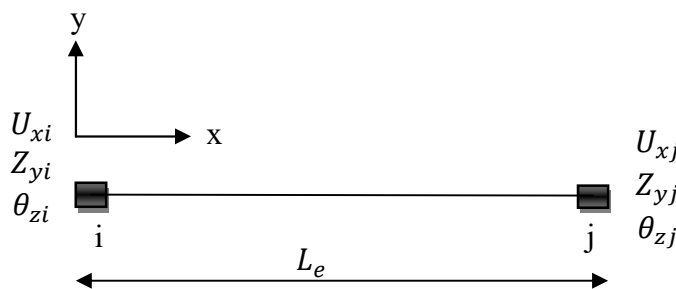


Figure III-5 : Élément fini poutre à 2 nœuds

III.2.3. Principe des travaux virtuels (P.T.V) :

Les déplacements virtuels forment des variations des déplacements réels cinématiquement admissibles (i.e. nulles où les conditions aux limites sont appliquées). Dans la suite, les déplacements virtuels sont interpolés par le biais des mêmes fonctions de forme que les déplacements réels (méthode de Galerkin). Ainsi, les déformations virtuelles peuvent se

déduire simplement des déplacements virtuels aux nœuds. Le travail virtuel pour une structure poutre Timoshenko de longueur L s'écrit :

$$\int_0^L \int_s (\delta \varepsilon_x + \delta \gamma_{xy} \tau_{xy}) dS dx - w_{externe} = 0 \quad \text{III-30}$$

Avec : $\delta \varepsilon_x$ et $\delta \gamma_{xy}$ les déformations virtuelles calculées à partir des déplacements virtuels et $w_{externe}$ le travail des actions mécaniques extérieurs.

on obtient :

$$\int_0^L \int_s (\delta(U'_x - y\theta'_z) \sigma_x + (\delta(U'_y - \theta_z) \tau_{xy}) dS dx \quad \text{III-31}$$

Avec

δU_x : le déplacement axial virtuel, δV_y le déplacement transversal virtuel et $\delta \theta_z$ la rotation virtuelle. Par ailleurs, les définitions suivantes sont adoptées pour les forces généralisées :

$$F_x = \int_s \sigma_x ds \quad F_y = \int_s \tau_{xy} ds \quad M_z = - \int_s y \sigma_x ds$$

Effort normal Effort tranchant Moment de flexion

On a :

$$\int_0^L \left(F_x \frac{d}{dx} \delta U_x + F_y \frac{d}{dx} \delta \beta_y + M_z \frac{d}{dx} \delta \theta_z \right) dx - w_{external} = 0 \quad \text{III-32}$$

Avec

β_y : L'angle de distorsion moyen de la section

$$\beta_y = \frac{dV_y}{dx} - \theta_z = U'_y - \theta_z \quad \text{III-33}$$

III.2.4. Matrices de rigidité

La loi de comportement (élasticité linéaire) prend la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_f & 0 \\ 0 & kG_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{III-341}$$

Par ailleurs:

$$F_x = \int_s \sigma_x ds = \int_s E_f \varepsilon_x ds = \int_s E_f \left(\frac{dU_x}{dx} - y \frac{d\theta_z}{dx} \right) ds = \int_s E_f ds U'_x - \int_s E_f y ds \theta'_z$$

$$F_y = \int_s \tau_{xy} ds = \int_s kG_f \gamma_{xy} ds = \int_s kG_f (\beta_y) ds = \int_s kG_f ds \beta_y \quad \text{III-35}$$

$$\begin{aligned}
 M_z &= - \int_s y \sigma_x ds = - \int_s y E_f \varepsilon_x ds = - \int_s y E_f \left(\frac{dU_x}{dx} - y \frac{d\theta_z}{dx} \right) ds \\
 &= - \int_s E_f y ds U'_x + \int_s E_f y^2 ds \theta'_z
 \end{aligned}$$

Par conséquent, le vecteur des forces généralisées F_S a la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_s E_f ds & 0 & - \int_s E_f y ds \\ 0 & \int_s k G_f ds & 0 \\ - \int_s E_f y ds & 0 & \int_s E_f y^2 ds \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \theta'_z \end{bmatrix} = K_s \cdot \begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \theta'_z \end{bmatrix} \quad \text{III-36}$$

avec

U'_x, β_y, θ'_z les déformations généralisées et K_s la matrice représentant la rigidité de la section, indépendante de la position de l'axe neutre[17]. Enfin, en considérant le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\int_0^l \delta [U'_x \quad \beta_y \quad \theta'_z] K_s [U'_x \quad \beta_y \quad \theta'_z]^T dx - w_{external} = 0 \quad \text{III-37}$$

Le vecteur des déplacements généralisés est donné par :

$$\begin{bmatrix} U_x \\ V_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^u & N_2^u & N_3^u & N_4^u & N_5^u & N_6^u \\ N_1^v & N_2^v & N_3^v & N_4^v & N_5^v & N_6^v \\ N_1^\theta & N_2^\theta & N_3^\theta & N_4^\theta & N_5^\theta & N_6^\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} \quad \text{III-38}$$

Où d_e est le vecteur contenant les déplacements nodaux de l'élément e et N la matrice des fonctions de forme dépendant de u(x) pour les déplacements et θ pour les rotations). Les déformations généralisées sont calculées comme :

$$\begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \theta'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'_x \\ U'_y - \theta'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^\varepsilon & B_2^\varepsilon & B_3^\varepsilon & B_4^\varepsilon & B_5^\varepsilon & B_6^\varepsilon \\ B_1^\gamma & B_2^\gamma & B_3^\gamma & B_4^\gamma & B_5^\gamma & B_6^\gamma \\ B_1^K & B_2^K & B_3^K & B_4^K & B_5^K & B_6^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^\varepsilon \\ B^\gamma \\ B^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} \quad \text{III-39}$$

avec B la matrice contenant les dérivées par rapport à x des fonctions de forme N (ε pour le axial, γ pour le cisaillement et K pour les rotations). L'introduction de (III-34) dans le principe des travaux virtuels (III-32) donne les expressions de la matrice de rigidité K_e de l'élément e :

$$K_e = \int_0^{l_e} B^T K_s B dx \quad \text{III-40}$$

L'assemblage donne la matrice de rigidité totale de la structure poutre :

$$K_{tot} = A_{e=1}^n \int_0^{l_e} B^T K_s B dx \quad \text{III-41}$$

L'extension des équations précédentes en 3D est simple et suit les mêmes étapes.

III.2.5. Vecteurs de forces

Comme mentionné précédemment, le vecteur des forces généralisées F_s de la section a la forme suivante :

$$F_s = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} = K_s \cdot \int_0^{l_e} B^T K_s B dx \quad \text{III-42}$$

avec U'_x , β_y , θ'_z les déformations généralisées et K_s la matrice représentant la rigidité de la section (Erreur ! Il n'y a pas de texte répondant à ce style dans ce document.-31).

Le vecteur des forces internes de l'élément est :

$$F_{int,e} = \int_0^{L_e} B^T F_s dx \quad \text{III-43}$$

Après assemblage on obtient le vecteur total des forces internes, pour toute la structure poutre :

$$F_{int,tot} = A_{e=1}^n \int_0^{L_e} B^T F_s dx \quad \text{III-44}$$

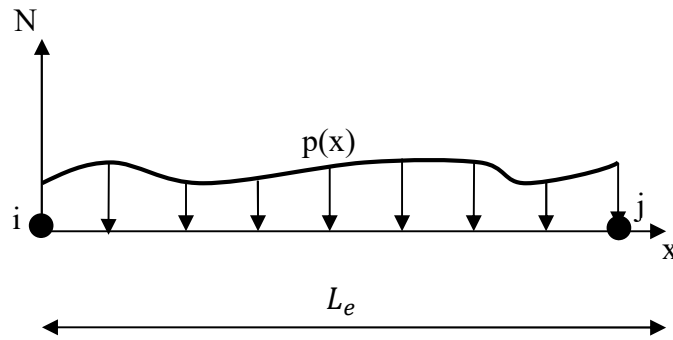


Figure III-6 ; Un élément fini poutre soumis à un chargement

Pour un chargement externe transversal distribué $p(x)$, le vecteur des forces externes est évalué en utilisant également le principe des travaux virtuels.

Le travail externe virtuel (III-32) pour un seul élément prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 w_{external,e} &= \int_0^{Le} \delta V_y(x) p(x) dx = \int_0^{Le} \delta (N^v d_e)^T p(x) dx \\
 &= \delta d_e^t \int_0^{Le} N^{vT} p(x) dx = \delta d_e^t F_{ext,e} \qquad \text{III-45}
 \end{aligned}$$

Avec

$$N^{vT} = [N_1^v \quad N_2^v \quad N_3^v \quad N_4^v \quad N_5^v \quad N_6^v]$$

Le vecteur des forces externes de l'élément devient :

$$f_{ext,e} = \int_0^{Le} N^{vT} p(x) dx = \int_0^{Le} [N_1^v \quad N_2^v \quad N_3^v \quad N_4^v \quad N_5^v \quad N_6^v]^T p(x) dx \qquad \text{III-46}$$

La matrice de rigidité analytique d'une poutre Timoshenko homogène élastique.

III.3. Présentation générale de CASTEM 2000

III.3.1. Définition du logiciel

Castem est un logiciel de simulation numérique utilisé en mécanique des structures et développé par le département de modélisation des systèmes et structures (DMT), du commissariat français à l'Energie atomique et aux énergies alternatives(CEA). Il est mis à la disposition gracieusement pour l'enseignement et la recherche. Il utilise la méthode des éléments finis pour résoudre différents types de problèmes scientifiques [18].

III.3.2. Etapes de calcul sur Castem

Nous allons présenter dans ce paragraphe les étapes générales de calcul d'une structure de poutre par éléments finis en utilisant CASTEM.

III.3.2.1. Choix des options générales de calcul

Dans notre exemple on a adopté un modèle de structure tridimensionnelle.

```
OPTI DIME 3 ELEM CUB8 ;
```

III.3.2.2. Définition de la géométrie de la structure et du maillage

➤ Définition des points

```
*POINTS
```

```
A01 = 0.0 0.0 150.0 ;
```

```
A02 = 0.0 100.0 150.0 ;
```

```
A03 = 0.0 130.0 50.0 ;
```

```
A04 = 0.0 460.0 50.0 ;
```

```
A05 = 0.0 490.0 100.0 ;
```

```
A06 = 0.0 490.0 300.0 ;
```

```
A07 = 0.0 600.0 300.0 ;
```

```
A08 = 0.0 600.0 -300.0 ;
```

```
A09 = 0.0 490.0 -300.0 ;
```

```
A10 = 0.0 490.0 -100.0 ;
```

```
A11 = 0.0 460.0 -50.0 ;
```

```
A12 = 0.0 130.0 -50.0 ;
```

```
A13 = 0.0 100.0 -150.0 ;
```

```
A14 = 0.0 0.0 -150.0 ;
```

Définition des segments

➤ Définition des operateurs

```
*DROITE
```

```
DENS1 = 50 ;
```

```
DR01 = DROI A01 A02 DINI DENS1 DFIN DENS1 ;
```

DR02 = DROI A02 A03 DINI DENS1 DFIN DENS1 ;

DR03 = DROI A03 A04 DINI DENS1 DFIN DENS1 ;

DR04 = DROI A04 A05 DINI DENS1 DFIN DENS1 ;

DR05 = DROI A05 A06 DINI DENS1 DFIN DENS1 ;

DR06 = DROI A06 A07 DINI DENS1 DFIN DENS1 ;

DR07 = DROI A07 A08 DINI DENS1 DFIN DENS1 ;

DR08 = DROI A08 A09 DINI DENS1 DFIN DENS1 ;

DR09 = DROI A09 A10 DINI DENS1 DFIN DENS1 ;

DR10 = DROI A10 A11 DINI DENS1 DFIN DENS1 ;

DR11 = DROI A11 A12 DINI DENS1 DFIN DENS1 ;

DR12 = DROI A12 A13 DINI DENS1 DFIN DENS1 ;

DR13 = DROI A13 A14 DINI DENS1 DFIN DENS1 ;

DR14 = DROI A14 A01 DINI DENS1 DFIN DENS1 ;

- L'opérateur DROIT construit le segment de droite joignant les deux points POIN1 et POIN2.
- La directive DENSITE sert à définir, par défaut, la taille locale de la maille s'appuyant sur les points à construire

CONT1 = DR01 ET DR02 ET DR03 ET DR04 ET DR05 ET DR06 ET DR07 ;

CONT2 = DR08 ET DR09 ET DR10 ET DR11 ET DR12 ET DR13 ET DR14 ;

- L'opérateur CONTOUR construit le contour d'un objet. CONT1 et CONT2 sont des objets maillage définis par les points A01, A02, A03, A04, A05, A06, A07, A08, A09, A10, A11, A12, A13 et A14 avec une densité d'éléments égale à 50 mm/élément (dimension moyenne des éléments).

*SURFACE

SURF1 = SURF (CONT1 ET CONT2) PLAN ;

- L'opérateur SURFACE construit le maillage de l'intérieur du contour défini par l'objet LIG1 (qui doit être un ensemble de lignes fermées). Par ailleurs l'option POLYNOME permet de construire une surface paramétrée.

* VOLUME

OPTI ELEM CUB8 ;

VOL1 = SURF1 VOLU DINI 100 DFIN 100 TRAN (5000.0 0.0 0.0) ;

- L'opérateur VOLU construit le maillage GEO1 (type MAILLAGE) du volume situé à l'intérieur de l'enveloppe SURF1 (type MAILLAGE).
- L'opérateur TRANSLATION construit la surface engendrée par la translation d'une ligne suivant un vecteur donné.

ELIM VOL1 0.01;

- La directive ELIM remplace dans GEO1 (type MAILLAGE) tous les nœuds distants de moins de FLOT1 (type FLOTTANT) par un seul point.
 - Si FLOT1 n'est pas fourni, le programme prend le dixième de la densité courante.
 - Si GEO2 (type MAILLAGE) est également fourni, l'élimination ne se fait qu'entre nœuds appartenant respectivement à GEO1 et GEO2 et non à l'intérieur d'un même objet. Autrement dit, les éventuels doublons à l'intérieur de GEO1 ou de GEO2 ne sont pas fusionnés.

TRAC VOL1;

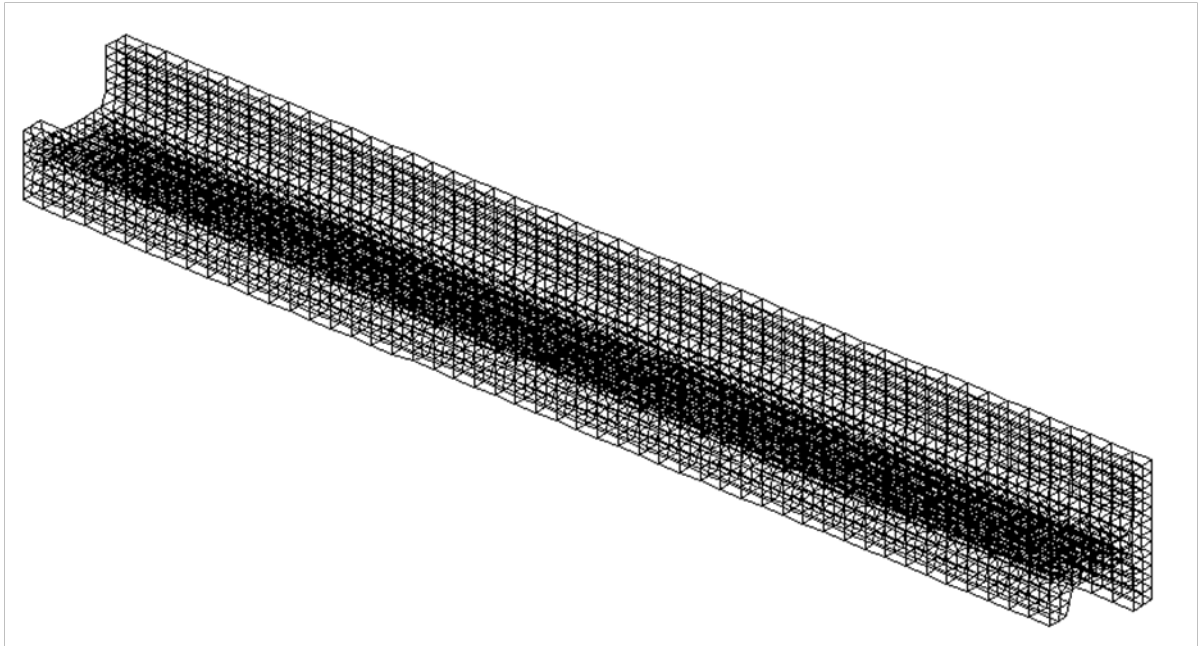


Figure III-7 : maillage tridimensionnel des poutres HZ

III.3.2.3. Conditions aux limites

On bloque tous les déplacements en Y et Z, c'est à dire sur la droite DR14 pour l'appui simple et on bloque tous les déplacements en X, Y et Z, c'est à dire sur SURF2 pour l'encastrement.

➤ Définition des operateurs

* CONDITION AUX LIMITES

* APPUI SIMPLE

RGDT1 = **BLOQ** DR14 UY UZ ;

* ENCASTREMENT

SURF2 = **FACE** 2 VOL1 ;

- L'opérateur FACE sert à retrouver la N1-ième face d'un objet massif GEO2 (type MAILLAGE) maille avec des cubes.

RGDT2 = (**BLOQ** SURF2 UX UY UZ) ET (**BLOQ** vol1 UZ);

- L'opérateur BLOQUE construit la rigidité RIG1, associée à des conditions de valeurs imposées sur les inconnues d'un problème discrétisé. Cette rigidité sera ultérieurement à adjoindre à la rigidité de la structure.

III.3.2.4. Définition du comportement matériau et du modèle

➤ Définition des opérateurs

* description du modèle de comportement du béton

MODEBET = **MODE** VOL1 MECANIQUE ELASTIQUE PLASTIQUE
DRUCKER_PRAGER ;

- L'opérateur MODE (MODELISER) permet d'associer à un maillage une formulation, un modèle de comportement du matériau, un type d'élément fini à utiliser et éventuellement un nom de constituant, Les caractéristiques des matériaux sont entrées en précisant le module d'Young, le coefficient de Poisson. Les valeurs à entrer dépendent du modèle de plasticité utilisé, il est important de se reporter à la notice de MATE pour vérifier ce point.
- Modèle plastique de type DRUCKER-PRAGER. Les équations du modèle sont de la forme :

✓ Notations :

- S est le tenseur des contraintes
- Seq est la contrainte équivalente au sens de Von Mises
- p est la déformation plastique équivalente cumulée

✓ **Critère initial** : $ALFA * Tr(S) + BETA * Seq = K$

✓ **Critère ultime** : $ETA * Tr(S) + MU * Seq = KL$

✓ **Ecrouissage** : $dK = H * dp$ (H en valeur algébrique)

✓ **Potentiel d'écoulement** : $GAMM * Tr(S) + DELT * Seq$

✓ Les paramètres à définir sont:

- ALFA, BETA, K, ETA, MU, KL, H, GAMM, DEL

MATRBET = MATE MODEBET YOUN 32080.0 NU 0.21 ALFA 0.441 BETA 1.02
K 4.1 GAMM 0.441 DELT 1.02 ETA 0.441 MU 1.02 KL 3.56 H 320 ;

- L'opérateur MATE (MATERIAU) crée un champ de propriétés matérielles et/ou géométriques

III.3.2.5. Disposition des armatures passives et définition de leur géométrie et caractéristique

* ARMATURES PASSIVES

ARM11 = 0.0 30.0 -70.0;

ARM12 = 4400.0 30.0 -70.0;

ARM21 = 0.0 30.0 70.0;

ARM22 = 4400.0 30.0 70.0;

ARM31 = 600.0 30.0 0.0;

ARM32 = 3800.0 30.0 0.0;

ARM41 = 1000.0 50.0 -70.0;

ARM42 = 4400.0 50.0 -70.0;

ARM51 = 1000.0 50.0 70.0 ;

ARM52 = 4400.0 50.0 70.0 ;

ARM61 = 3200.0 540.0 -270.0 ;

ARM62 = 5000.0 540.0 -270.0 ;

ARM71 = 3200.0 540.0 270.0 ;

ARM72 = 5000.0 540.0 270.0 ;

ARM81 = 3200.0 500.0 0.0 ;

ARM82 = 5000.0 500.0 0.0 ;

ARM91 = 3600.0 500.0 -50.0 ;

ARM92 = 5000.0 500.0 -50.0 ;

ARM101 = 3600.0 500.0 50.0 ;

ARM102 = 5000.0 500.0 50.0 ;

* DEFINITION GEOMETRIQUE DES ARMATURES

ARM1 = **DROI** ARM11 ARM12 DINI 200 DFIN 200 ;

ARM2 = **DROI** ARM21 ARM22 DINI 200 DFIN 200 ;

ARM3 = **DROI** ARM31 ARM32 DINI 200 DFIN 200 ;

ARM4 = **DROI** ARM41 ARM42 DINI 200 DFIN 200 ;

ARM5 = **DROI** ARM51 ARM52 DINI 200 DFIN 200 ;

ARM6 = **DROI** ARM61 ARM62 DINI 200 DFIN 200 ;

ARM7 = **DROI** ARM71 ARM72 DINI 200 DFIN 200 ;

ARM8 = **DROI** ARM81 ARM82 DINI 200 DFIN 200 ;

ARM9 = **DROI** ARM91 ARM92 DINI 200 DFIN 200 ;

ARM10= **DROI** ARM101 ARM102 DINI 200 DFIN 200 ;

ARM20 = (ARM4 **ET** ARM5) **COUL ROUG** ;

ARM25 = (ARM1 **ET** ARM2 **ET** ARM3 **ET** ARM6 **ET** ARM7 **ET**

ARM8 **ET** ARM9 **ET** ARM10) **COUL ROUG** ;

ARMTOT = ARM20 **ET** ARM25 ;

III.3.2.6. Disposition des armatures actives et définition de leur géométrie et caractéristique

➤ Définition des operateurs

* ARMATURE ACTIVE

DENS2 = 200.0 ;

ARMP01 = 0.0 70.0 0.0 ;

ARMP02 = 3800.0 70.0 0.0 ;

ARMP03 = 5000.0 500.0 0.0 ;

ARMP1 = **DROI** ARMP01 ARMP02 DINI DENS2 DFIN DENS2 ;

VEC1 = **POIN** 1000.0 0.0 0.0 ;

- L'opérateur VECT construit un objet de type VECTEUR:

ARMP2 = **CUBT** 5 ARMP02 VEC1 VEC1 ARMP03 ;

- L'opérateur CUBT construit un arc de cubique passant par deux points POIN1 et POIN2; il est de plus tangent respectivement en POIN1 au vecteur VECT1 et en POIN2 au vecteur VECT2.

ARMP = (ARMP1 **ET** ARMP2) **COUL** BLEU ;

CABLP = (KABL VOL1 ARMP) **COUL** BLEU ;

TRAC (VOL1 **ET** CABL20 **ET** CABL25 **ET** CABLP) ;

MOCABLP = **MODE** CABLP MECANIQUE ELASTIQUE ARMATURE BARR ;

MACABLP = **MATE** MOCABLP YOUN 1.75E5 'SECT' 269.3

'FF' 0.18 'PHIF' 2.0E-6 'GANC' 0.0 'RMU0' 0.0

'FPRG' 1700.0 'RH10' 0.0 ;

PREC1 = **PREC** MOCABLP MACABLP 4.15E5 ARMP01;

- L'opérateur PREC construit calcule les pertes de précontraintes et construit le champ des contraintes effectives sur des armatures à partir des tensions initiales appliquées à une extrémité de chaque câble appartenant au model (modèles MARR ou ARMATURE BARR).

CHAR2 = -1.0 * (**BSIG** PREC1 MOCABLP MACABLP) ;

VEC2 = **VECT** CHAR2 1.0E-3 'FX' 'FY' 'FZ' ROUG ;

TRAC VEC2 ARMP ;

* CREATION DE L'OBJET RIGIDITE POUR ACCROCHER LES ARMATURES
(PASSIVES ET ACTIVES) AU BETON

RA1 = **RELA** (CABL20 ET CABL25 ET CABLP) ACCROCHER VOL1 ;

- L'opérateur RELATION permet de construire la raideur associée à une relation linéaire entre les inconnues.

* MODELE DE TOUTE LA STRUCTURE

MODETOT = MODEBET ET MCABL20 ET MCABL25 ET MOCABLP ;

MATRTOT = MATRBET ET CCABL20 ET CCABL25 ET MACABLP ;

III.3.2.7. Définition du chargement

➤ Définition des operateurs

* CHARGEMENT

Q1 = VOL1 **POIN** 'PROC' (2500.0 600.0 -300.0) ;

Q2 = VOL1 **POIN** 'PROC' (2500.0 600.0 0.0) ;

Q3 = VOL1 **POIN** 'PROC' (2500.0 600.0 300.0) ;

MM = Q2 ;

DRCHAR = VOL1 **POIN** 'DROI' Q1 Q2 0.1;

CHAR1 = **FORC** FY (0.0 - 6.00E5) DRCHAR ;

- L'opérateur CHAR construit un objet CHAR1 de type CHARGEMENT, de sous-type FORCE, contenant la description spatiale et temporelle du chargement.

VEC1 = **VECT** CHAR1 1.0E-3 'FX' 'FY' 'FZ' ROUG ;

*TRAC VEC1 (VOL1 ET CABL1 ET CABL2) ;

* CALCUL AVEC DES SECTION PLANE

RGDT3 = (**RELA** ENSE UY DRCHAR) ET (**RELA** CORI DEPL ROTA SURF1) ;

- L'opérateur ENSEMBLE crée un objet SOL1 de type SOLUTION, contenant les modes d'ensembles associés à la matrice de rigidité RIG1 (type RIGIDITE).
- La directive DEPLACER a pour effet de déplacer l'ensemble des points appartenant à l'objet GEO1 (type MAILLAGE ou POINT) sans créer un nouvel objet.
- L'opérateur ROTATION construit une surface engendrée par la rotation d'une ligne, d'un angle donné autour d'un point en 2D ou d'un axe en 3D. Cette option permet de définir l'évolution d'une composante d'un champ le long d'une ligne de nœuds.

RIGTOT = RGDT1 ET RGDT2 ET RGDT3 ET RA1 ;

- L'opérateur RIGI calcule la RIGIDITE de différents objets.

* PROGRAMME DE CHARGEMENT

T0 = 0.0 ; TN = 100 ; DELTA_N1 = 1.0 ;

N1 = ENTI ((TN - T0) / DELTA_N1) ;

TEMPCALC = PROG T0 PAS DELTA_N1 TN ;

PP1 = PROG (N1 + 1) * 1.0 ;

LAMBDA = -0.07 ;

PP2 = PP1 - (EXP (LAMBDA * TEMPCALC));

MEVOL0 = EVOL MANU 'TEMPS' TEMPCALC 'COEFF' PP2 ;

MEVOL1 = EVOL MANU 'TEMPS' TEMPCALC 'COEFF' PP1 ;

- L'opérateur MENU propose un choix d'objets à l'utilisateur puis retourne celui choisi. Ces noms peuvent être mis sous forme d'une liste de mots.

CHARGE0 = CHAR MECA CHAR1 MEVOL0 ;

CHARGE1 = CHAR MECA CHAR2 MEVOL1 ;

* DESS MEVOL0

* CALCUL LINEAIRE

RIGI1 = **RIGI** MODETOT MATRTOT ;

RIGITOT = RIGI1 **ET** RIGTOT ;

DEP1 = **RESO** RIGITOT (CHAR2);

- L'opérateur RESO construit une solution, **si** elle existe, du système linéaire.

DEFO1 = **DEFO** (VOL1 **ET** ARMTOT **ET** ARMP) DEP1 ;

- L'opérateur DEFORME construit un objet de type DEFORME à partir d'une géométrie initiale et d'un champ de déplacements.

TRAC DEFO1;

SIG1 = **SIGM** MODETOT MATRTOT DEP1 ;

- L'opérateur SIGMA calcule un champ de contraintes à partir d'un champ de déplacements.

SIG2 = **REDU** SIG1 MOCABLP;

- L'opérateur REDU réduit :
 - un champ par points aux points d'un maillage donne ;
 - un champ par points aux valeurs non nulles d'un CHPOINT ;
 - un champ par éléments aux éléments d'un maillage donne ;
 - un champ par éléments à l'objet MODEL donne ;
 - un objet MODEL à un maillage donné ;
 - un objet NUAGE à des composantes données ;
 - un objet rigidité aux éléments d'un maillage donné ;
 - objet esclave de champ par éléments à l'objet MODEL donné ;
 - un MODEL de contact aux éléments qui risquent d'être actifs.

III.3.3. Remplissage d'une table de donnée

➤ Définition des opérateurs

*REEMPLISSAGE DE LA **TABLE** DE DONNEES

* INTRODUCTION DES DONNEES RELATIVES AU CALCUL **NON** LINEAIRE

TABINOUT = **table** ;

- Il y a lieu d'ajouter les données relatives à la précontrainte dans la table de données TABINOUT. Ce sont les excentricités, la section, les longueurs initiale et libre des câbles ainsi que les sections de déviateurs.

* INTRODUCTION DES DONNEES RELATIVES A LA STRUCTURE MECANIQUE

TABINOUT . MODELE = MODETOT ;

TABINOUT . CARACTERISTIQUES = MATRTOT ;

TABINOUT . BLOCAGES_MECANIQUES = RIGTOT ;

TABINOUT . CHARGEMENT = CHARGE0 ET CHARGE1 ;

TABINOUT . TEMPS_CALCULES = TempCalc ;

* DEFINITION DE L'ETAT INITIAL

* APPEL DE LA PROCEDURE DE CALCUL **NON** LINEAIRE

PASAPAS TABINOUT ;

- La procédure PASAPAS permet d'effectuer un calcul non linéaire incrémental. La non linéarité peut provenir soit du matériau (plasticité) soit des grands déplacements soit des deux à la fois.

* SAUVEGARDE DES RESULTATS

- La directive SAUVER permet d'écrire les objets OBJET1, ... OBJETi sur le fichier logique de manière à interrompre un calcul, pour le reprendre ultérieurement. Il ne s'agit pas d'un stockage de résultats en vue d'une recombinaison ultérieure. L'écriture se fait en incrémental, c'est à dire que seuls les objets n'ayant pas déjà été sauves et ceux ayant été modifiés seront écrits à la suite de ceux étant déjà sur le fichier. Il est possible de donner un "label" à cette partie de la sauvegarde dans la perspective de relire le fichier jusqu'à ce label inclus.

OPTI SAUV POUTREHZ4 ;

SAUV TABINOUT ;

FIN;

III.4. Etablissement des courbes de comportement des poutres de l'essai CEBTP

La figure I-18 montre la disposition assez complexe des armatures passives longitudinales dans les membrures inférieure et supérieure des différentes poutres HZ2, 3, 4. La poutre HZ1, la plus précontrainte, est néanmoins munie d'un minimum d'armatures passives

Les caractéristiques mécaniques des matériaux sont résumées dans les tableaux (7 et 8).

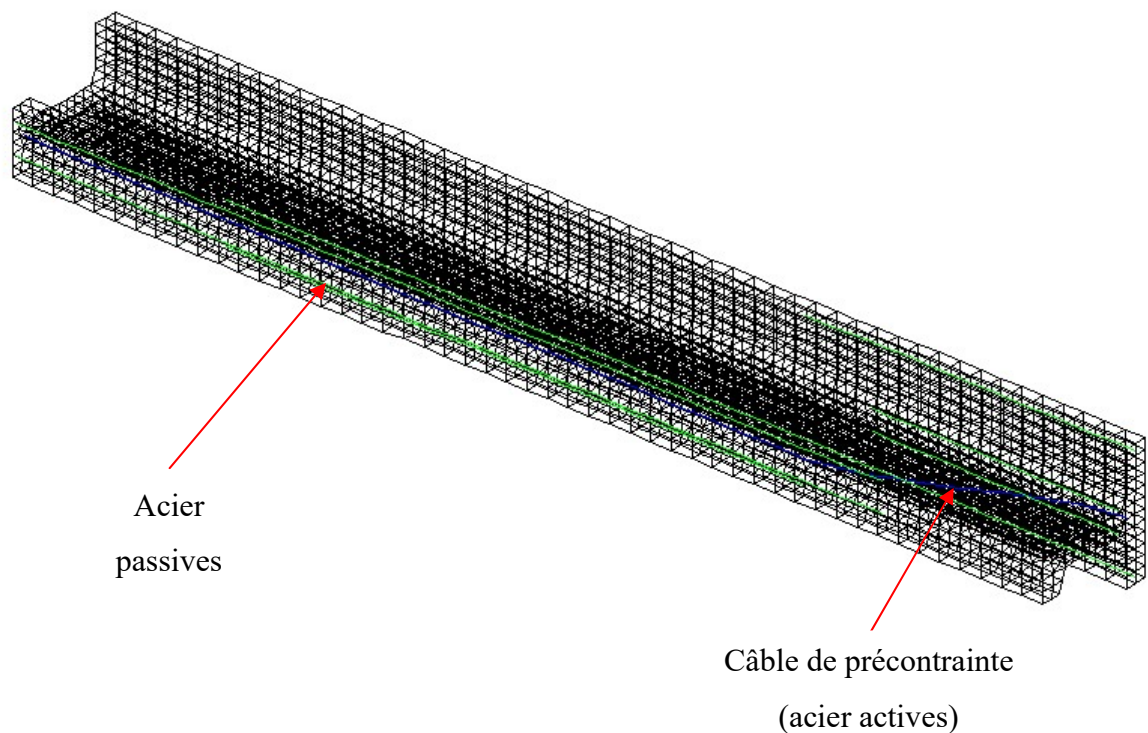


Figure 8-III : Poutre HZ en 3D modalisée sur Castem

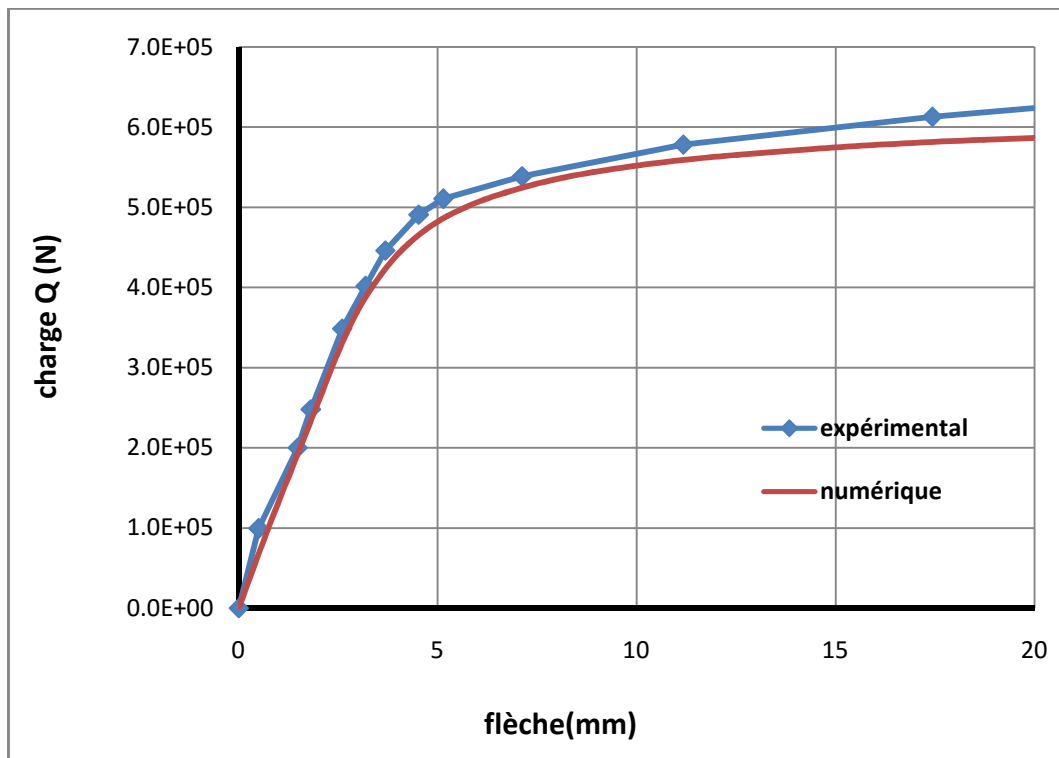


Figure III-9 : Poutre HZ1

A partir de la comparaison des deux courbes, on peut faire les constatations suivantes :

Le calcul simulent correctement le comportement expérimental dans le domaine élastique et ce jusqu'à une valeur de chargement d'environ 400kN. Au-delà de cette valeur, les deux courbes divergent légèrement. Les résultats des calculs montrent un comportement légèrement moins rigides que le comportement expérimental.

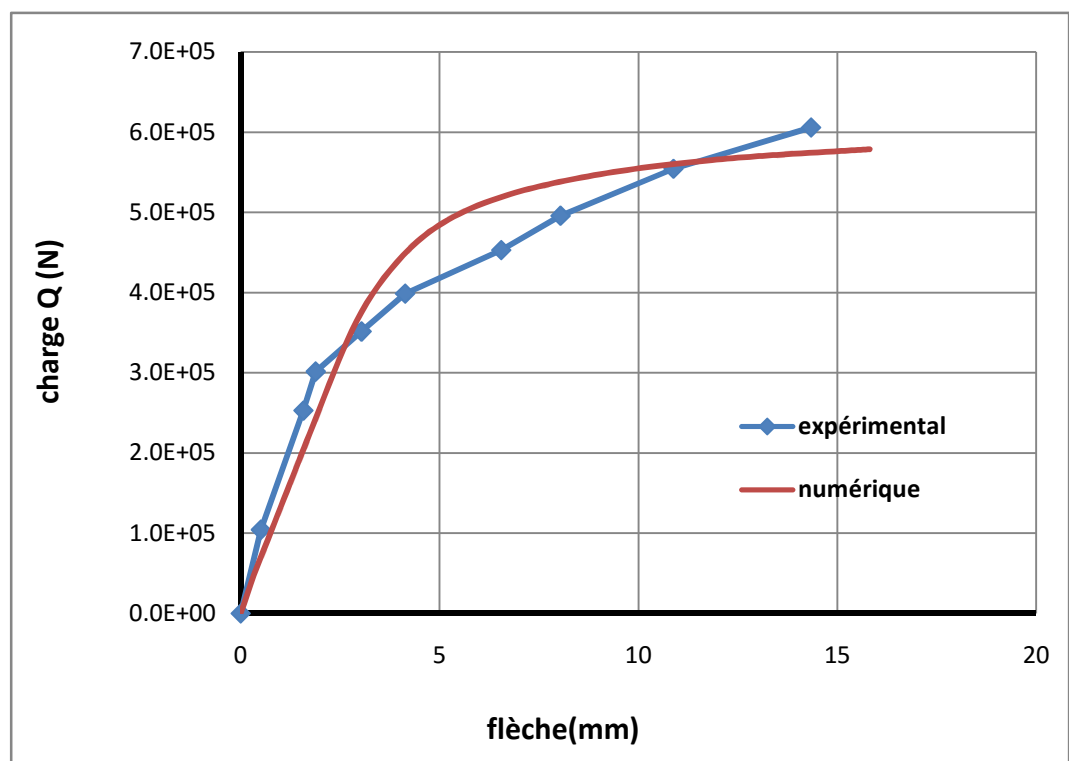


Figure III-10 : Poutre HZ2

La figure III-10 montre que le calcul simulent correctement le comportement expérimental dans le domaine élastique et ce jusqu'à une valeur de chargement d'environ 340kN. Au-delà de cette valeur, les deux courbes divergentes légèrement. La courbe numérique sous-estime la flèche est possède un palier de ductilité qu'on ne trouve pas dans la courbe expérimentale qui conserve une rigidité constante de la structure due certainement à la présence importante des aciers passifs ; le modèle de Drucker-Prager ne peut simuler cette rigidité.

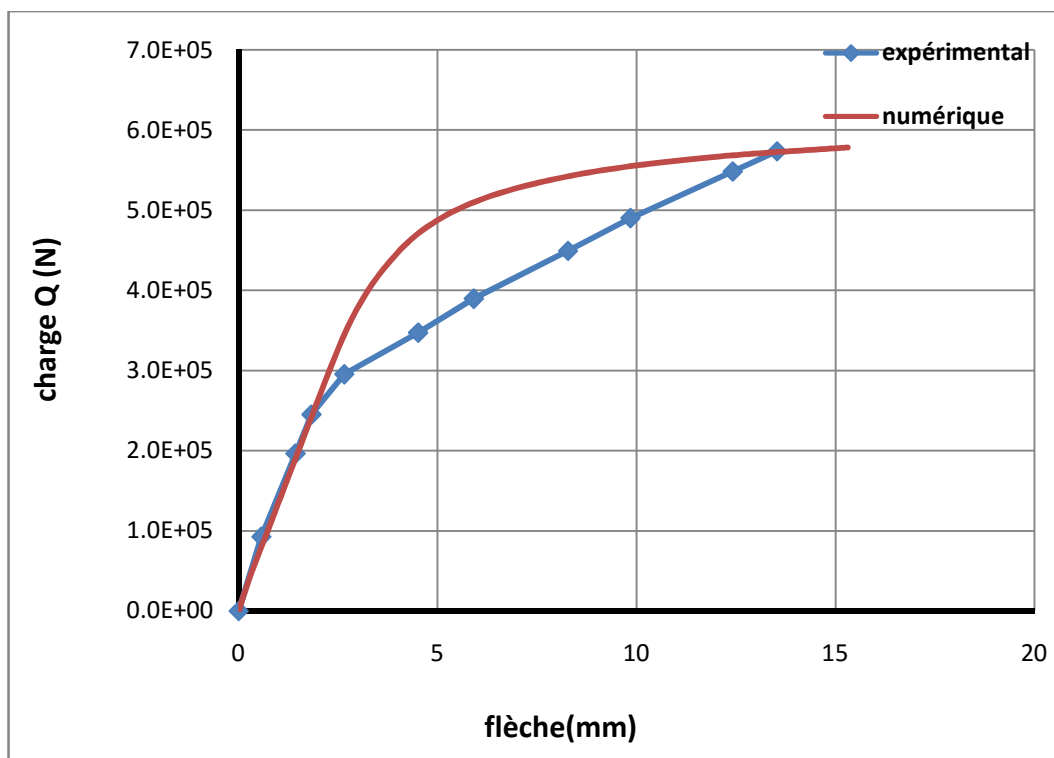


Figure III-11 : Poutre HZ3

La figure III-11 montre que le calcul simule correctement le comportement expérimental dans le domaine élastique et ce jusqu'à une valeur de chargement d'environ 250kN. Au-delà de cette valeur, les deux courbes divergentes. La courbe numérique sous-estime les déplacements mais estime bien la résistance ultime évaluée à environ 580kN.

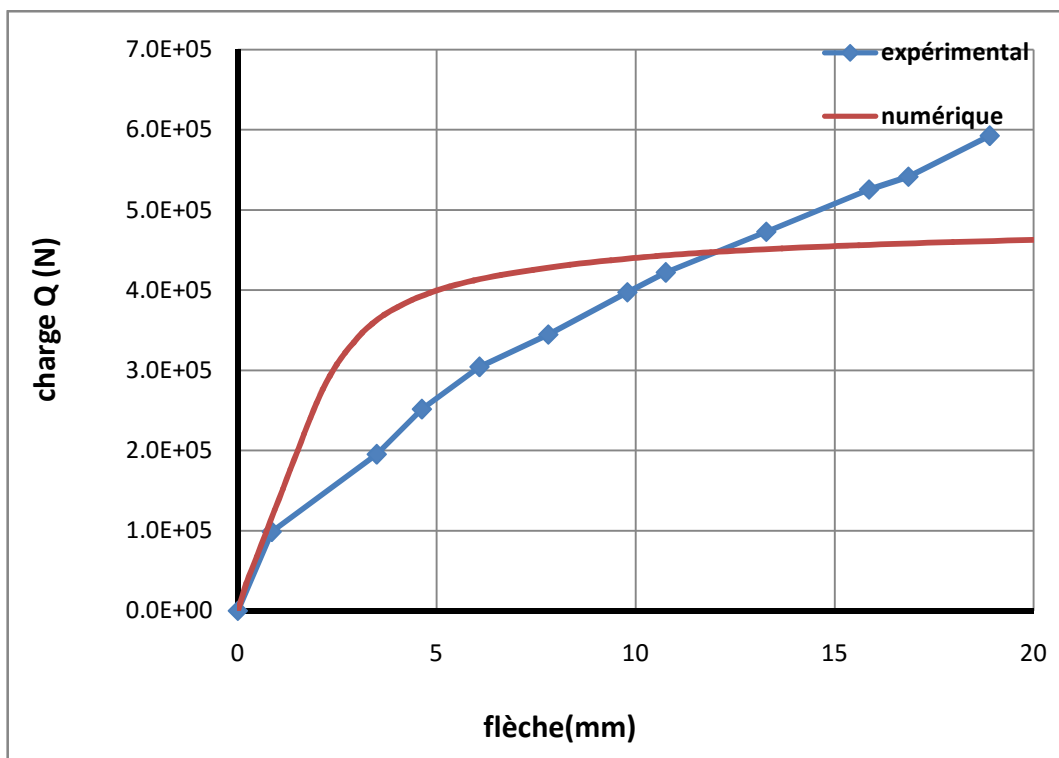


Figure III-12 : Poutre HZ4

La figure **III-12** montre que le calcul simulent correctement le comportement expérimental dans le domaine élastique et ce jusqu'à une valeur de chargement d'environ 100kN. Au-delà de cette valeur, les deux courbes divergentes. La courbe numérique sous-estime la flèche est possède un palier de ductilité qu'on ne trouve pas dans la courbe expérimentale qui, elle, conserve une rigidité constante de la structure due certainement à la présence importante des aciers passifs ; le modèle de Drucker-Prager ne peut simuler cette rigidité.

Conclusion

Le modèle analytique développé dans le cadre de cette étude pour le calcul des poutres, est basé sur :

- la méthode des éléments finis.
- le calcul incrémental : Appel de la procédure PASAPAS de CASTEM.

Cette dernière effectue un calcul incrémental portant sur la recherche de l'équilibre global de la structure. De ce fait la précision de calcul s'améliore proportionnellement à la finesse de la discrétisation.

**CONCLUSION
GÉNÉRALE**

Conclusion générale

L'étude du comportement non-linéaire des structures en béton précontraint nécessite la prise en considération des effets non-linéaire dus au comportement des matériaux. Cet effet influence sur le comportement de la structure et sur le niveau de surtension des câbles de précontrainte.

Dans le cadre de ce travail on s'est intéressé à la modélisation et à la simulation du comportement jusqu'à rupture des poutres (hyperstatiques) à précontrainte intérieure en intégrant les phénomènes cités précédemment liés à cette technique dont la méthode de calcul est basée sur une procédure de résolution itérative.

Les poutres CEBTP possèdent un ferrailage passif et actif varié et une forme en T de la section transversale. Le calcul permet de conclure que le modèle estime correctement le comportement des poutres précontraintes dans le domaine élastique que dans le domaine post-élastique. La simulation de la poutre est effectuée en 3 dimensions mais les sections transversales possèdent une cinématique propre à une poutre (Bernoulli ou Timoshenko) ; les sections se déplacent comme un corps rigide.

Les développements futurs de cette étude numérique, consistent à améliorer d'avantage le programme de calcul, on peut citer les orientations suivantes : Introduction des déformations dues à l'effort tranchant, prise en compte de l'adhérence béton-acier et prise en considération de l'ouverture des joints dans le cas des poutres à voussoirs préfabriqués.

Les résultats obtenus au cours de cette étude nous encouragent à la poursuite de cette étude de façon à comprendre encore mieux les mécanismes du comportement d'une poutre fléchie à précontrainte intérieure et les moyens de la modéliser, et pour élargir le champ d'application, on peut envisager les perspectives suivantes :

Introduction de la fissuration dans le comportement des structures ;

Tenir compte du glissement des armatures dans le béton ;

Simulation de la rupture des structures.

[1] : Les Ponts En Beton Precontraint, Memoire Master, Universite D'abou Bakr Belkaid, Tlemcen 2008.

[2] : [Http://Fr.Scrib.Com](http://fr.scrib.com). Le Beton Precontraint.

[3] : George Dreux, Nouveau Memento De Beton Precontraint, Boulevard Sain Germain Paris, 1978.

[4] : Y.Bouafia – H.Hammom, Analyse Non-Linaires Des Structures Des Ossatures Planes En Beton Arme Et Precontraint.

[5] : Sargin M; Stress-Strain Relationship For Concrete And The Analysis Of Structural Concrete Sections.PhD Thesis, University Of Waterloo, Ontario, Canada, Mars 1968.

[6]: Vecchio F.J; Collins Mp; Compression Response Of Cracked Reinforced Concrete Journal Of Structural Engineering, Vol 119 Num 12.1993.

[7] : Grelat A; Analyse Non Lineaire Des Ossatures Hyperstatiques En Beton Arme These De Doctorat Ingenieur-Universite Paris Vi-1978.

[8] : Setra, Collection Des Fiches Techniques, Memento Pour La Mise En Œuvre Sur Ouvrage D'art

[9] : Patrique Le Delliou, Beton Precontraint Aux Eurocadres, Presses Universitaire De Lyon 2003.

[10] : Kachi Ms, Bouafia Y, Muller P, Modelisation Du Comportement Jusqu'a Rupture En Cisaillement D'une Section De Poutre En Beton Arme Et Precontraint. Conference Internationale.

[11] : Analyse Du Comportement De Poutres En Beton Precontraint, Quinzieme Edition Des Journees Scientifiques, Du Regroupement Francophone Pour La Recherche Et La Formation Sur Le Beton, (Rf) De Precontraint, Douai, France, Juillet 2014.

[12] : Mr. Abdelaziz Yazid, Beton Precontraint, Cours Et Exercices, Centre Universitaire De Bechar Institut De Genie Civil2005/2006.

[13] : Thrin J.L, Precontrainte Partielle Essais De Poutres Continues. Annales De L'i.T.B.T.P.N°530, Serie Beton 318, Janvier 1995.

[14] : Kachi M S ; Muller P, Bouafia Y, Foure B. L'effort Tranchant Dans La Modelisation Du Comportement Jusqu'a Rupture Des Poutres Armees. Revue Europeenne De Genie Civil N° 10/10 Decembre 2006.

[15] : Nait- Rabah O; Simulation Numerique Du Comportement Des Ossatures Speciales Thèse De Doctorat Ecp-1990.

[16]: Filippou.F.C, Kwak .H.G, (1990), « Finite Element Analysis Of Reinforced Concrete Structures, Under Monotonic Loads. », Rapport N°, Department Of Civil Engineering, University California, P71.

[17]: Guedes, J., Pegon, P., And Pinto, A. V. (1994). A Fibre/Timoshenko Beam Element In Castem 2000. Special Publication Nr. I.94.31, Applied Mechanics Unit, Institute For Safety Technology, Joint Research Centre, Commission Of The European Communities, I21020 Ispra (Va).

[18] : E.Le Fichoux, Ensta-Lme, Presentation Et Utilisation De Castem 2000,16 Avril 1998