

REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERRI
TIZI- OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES
Département de Mathématiques

Polycopié

écrit par

GOUBI Mouloud

en vue

d'Habilitation Universitaire
en Mathématiques

Titre :

Cours d'analyse 1ère année LMD
Domaine ST

Tizi-ouzou le 18/12/2018

Table des matières

Introduction	1
1 ENSEMBLES ET APPLICATIONS	1
1.1 Introduction	1
1.2 Appartenance, inclusion	1
1.3 Opérations sur les ensembles	2
1.4 Produit d'ensembles	4
1.5 Applications	4
1.6 Image, image réciproque et graphe d'une application	4
1.7 Restriction, prolongement et composition	5
1.8 Applications injective, surjective et bijectives	5
1.9 Application réciproque d'une bijection	6
1.10 Exercices et solutions	6
2 FONCTIONS NUMERIQUES CONTINUES	12
2.1 Introduction	12
2.2 Etude des variations d'une fonction	12
2.2.1 Fonction croissante, décroissante ou constante	12
2.2.2 Accroissement de la variable et de la fonction, taux d'accroissement et dérivabilité	13
2.2.3 Fonction monotone	14
2.2.4 Extremum d'une fonction	14
2.2.5 fonction majorée, minorée	14
2.2.6 Borne supérieure, borne inférieure et fonction bornée	15
2.2.7 Fonction périodique	15
2.3 Limite et continuité d'une fonction	16
2.3.1 limite d'une fonction	16
2.3.2 Continuité	17
2.3.3 Rapport entre monotonie et inversibilité	19
2.4 Inversion des fonctions trigonométriques.	20
2.5 Fonctions hyperboliques	21
2.6 Exercices et solutions	21

TABLE DES MATIÈRES

3	ETUDES DES SUITES NUMERIQUES	25
3.1	Introduction	25
3.2	Suites numériques	25
3.3	Convergence et divergence d'une suite numérique	26
3.3.1	Définitions	26
3.3.2	Opérations élémentaires sur les suite convergntes	26
3.4	Quelques critères de convergence	27
3.5	Le cas des suites monotones	27
3.5.1	Théorème de convergence monotone	27
3.5.2	Théorème de Bolzano-Weierstrass	27
3.6	Suites de Cauchy	28
3.7	Exemple fondamental : suites géométriques	28
3.8	Etude des suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$	28
3.8.1	Le cas f croissante	28
3.9	Exercices et solutions	29
4	FONCTIONS DERIVABLES	33
4.1	Introduction	33
4.2	Propriétés de la dérivation	34
4.2.1	Fonctions de classe \mathcal{C}_1	35
4.3	Propriétés globales	36
4.3.1	Théorème de Rolle	36
4.3.2	Théorème des accroissements finis et formule de Taylor	37
4.3.3	Formules de Taylor	38
4.4	Dérivations des fonctions trigonométriques et hyperboliques	39
4.5	Exercices et solutions	39
5	DEVELOPPEMENTS LIMITES	45
5.1	Introduction aux développement limités	45
5.1.1	Commentaires	45
5.1.2	Les cas simples	46
5.1.3	Unicité de développement limité	46
5.2	Théorème de Taylor-Young	47
5.2.1	Quelques développement limités usuels	47
5.3	Opérations sur les développements limités.	48
5.3.1	Les différentes applications des développement limités	49
5.4	Exercices et solutions.	50
6	CALCUL INTEGRAL	53
6.1	La primitivations des fonctions.	53
6.2	Intégration des fonctions continues	53
6.2.1	La relation de Chasles	54
6.2.2	Intégrale et ordre.	54
6.2.3	Conséquences	54

TABLE DES MATIÈRES

6.3	Techniques de calcul des primitives	55
6.3.1	Intégration par parties et changement de variable	55
6.3.2	Intégration des développements limités	55
6.3.3	Notion de suite définie par une intégrale	56
6.3.4	Formule de Taylor avec reste intégral et tableau des primitives usuelles	56
6.3.5	Primitives des fonctions rationnelles.	56
6.3.6	Tableau des primitives usuelles	59
6.4	Exercices et solutions	60
	Bibliographie	64

Introduction

Ce polycopé est le fruit de 14 années (2002-2016) d'enseignement du module d'analyse en 1^{ère} année universitaire pour les étudiants de l'INATAA Université de Constantine et ST/SM de l'Université Mouloud Mammeri Tizi-ouzou enseigné en 1^{er} semestre. Il comporte un rappel du cours suivant le programme officiel de l'époque ; plus une série de travaux dirigés avec solutions à la portée des étudiants. Le premier chapitre est consacré à la théorie élémentaire des ensembles. Le deuxième chapitre concerne les applications et l'image réciproque d'un ensemble. Dans le troisième chapitre, on introduit les fonctions numériques. Et dans le quatrième chapitre on revient sur la notion de suite numérique et son lien avec les fonctions. Le 5^{ème} chapitre est consacré à la notion de dérivabilité, et le 6^{ème} chapitre concerne les développements limités. Enfin on termine ce travail par un cours sur le calcul intégral.

Mouloud Goubi
Tizi-ouzou le 15/11/2019

Chapitre 1

ENSEMBLES ET APPLICATIONS

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on revient sur les notions de base concernant les ensembles déjà vu en terminal.

Définition 1.1.

Un ensemble est une collection d'objets, chaque objet est un élément de l'ensemble.

Exemple 1.2. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ensemble des entiers relatifs.

Remarque 1.3.

Un élément x est distinct de l'ensemble à un élément $\{x\}$ et on a $x \neq \{x\}$.

1.2 Appartenance, inclusion

Soit E un ensemble, si x est un élément de E , on dit aussi l'élément x appartient à l'ensemble E et on écrit $x \in E$. La négation de cette relation est : x n'est pas un élément de E , l'élément x n'appartient pas à E ; on écrit $x \notin E$.

Définition 1.4.

Un ensemble A est inclu dans un ensemble E si et seulement si tout élément de A est un élément de E . et on écrit

$$(A \subset E) \Leftrightarrow [(\forall x) x \in A \Rightarrow x \in E]$$

.

Remarque 1.5.

On dit aussi que A est une partie de E , ou que A est un sous ensemble de E .

Exemple 1.6. *L'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} est inclu dans l'ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z} .*

1.3. OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES

Définition 1.7.

On appelle ensemble vide un ensemble sans éléments, on le note ϕ .

Définition 1.8.

Deux ensembles A et B sont égaux si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

1.3 Opérations sur les ensembles

Définition 1.9.

On appelle intersection de deux ensembles A et B l'ensemble de leurs éléments communs et on écrit

$$A \cap B = \{x/x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Ainsi deux ensembles A et B sont disjoints lorsque leur intersection est vide et on écrit

$$A \cap B = \phi.$$

Théorème 1.10.

L'intersection des ensembles est commutative et associative.

Démonstration .

On rappelle déjà la commutativité et l'associativité d'une loi de composition interne notée par exemple \star dans un monoïde N :

$$\star \text{ est commutative ssi } \forall a, b \in N : a \star b = b \star a$$

$$\star \text{ est associative ssi } \forall a, b, c \in N : (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$

- Preuve de la commutativité : Par définition la commutativité signifie $A \cap B = B \cap A$. Soit un élément $x \in A \cap B$ cela signifie $x \in A$ et $x \in B$ c.à.d $x \in B$ et $x \in A$ ainsi $x \in B \cap A$ et vis versa.

- Preuve de l'associativité : L'associativité veut dire que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. Cette égalité équivaut à deux inclusion.

Montrons l'inclusion $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$: Soit un élément $x \in (A \cap B) \cap C$; cela signifie $x \in A \cap B$ et $x \in C$. Il entraîne $(x \in A \text{ et } x \in B)$ et $x \in C$, les éléments n'étant pas ordonnés, on peut prendre $x \in B$ et $x \in C$ qui donne $x \in B \cap C$ avec $x \in A$, on obtient $x \in A \cap (B \cap C)$.

Montrons l'inclusion $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$: Soit $x \in A \cap (B \cap C)$; cela signifie $x \in A$ et $x \in B \cap C$ ce qui entraîne $x \in A$ et $(x \in B \text{ et } x \in C)$. Les éléments n'étant pas ordonnés, on prend $x \in A$ et $x \in B$ qui donne $x \in A \cap B$ avec $x \in C$; on obtient $x \in (A \cap B) \cap C$.

Définition 1.11.

La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble de leurs éléments comptés une seule fois et on écrit

$$A \cup B = \{x/ x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

1.3. OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES

Théorème 1.12.

La réunion est commutative et associative

Etant donné \star et \circ deux lois de composition interne d'un monoïde N . \star est distributive par rapport à \circ si on a

$$\forall a, b, c \in N : a \star (b \circ c) = (a \star b) \circ (a \star c).$$

Ainsi \cap et \cup vérifient cette propriété comme le montre le théorème suivant

Théorème 1.13.

a)- *L'intersection est distributive par rapport à la réunion et on a*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

b)- *La réunion est distributive par rapport à l'intersection et on a*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

La preuve des deux théorèmes 1.12 1.13 est traitée dans la série des travaux dirigés.

Définition 1.14.

Soit A une partie d'un ensemble E . On appelle complémentaire de A par rapport à E l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A . Cet ensemble est noté par

$$\mathbb{C}_E^A = E \setminus A = \{x / x \in E \text{ et } x \notin A\}$$

Théorème 1.15.

a)- *Le complémentaire de la réunion de deux ensembles A et B est égal à l'intersection de leurs complémentaires c.à.d. $\mathbb{C}_E^{A \cup B} = \mathbb{C}_E^A \cap \mathbb{C}_E^B$*

b)- *Le complémentaire de l'intersection de deux ensembles A et B est égal à la réunion de leurs complémentaires c.à.d. $\mathbb{C}_E^{A \cap B} = \mathbb{C}_E^A \cup \mathbb{C}_E^B$*

Remarque 1.16.

Soient deux parties A et B de E . On notera pas $A \setminus B$, la différence de A et B , l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B . Cet ensemble est noté :

$$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

Définition 1.17.

Etant donnée deux ensembles A et B , leur différence symétrique, noté $A \Delta B$ est l'ensemble

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1.4 Produit d'ensembles

Le produit cartésien d'ensembles est donné par la définition suivante.

Définition 1.18.

On appelle produit des ensembles A et B l'ensemble des éléments (x, y) , $x \in A$, $y \in B$, ordonnés dans l'ordre de leur écriture. Et on écrit

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ } y \in B\}.$$

Remarque 1.19.

- Le système ordonné (x, y) s'appelle un couple, x en est la première coordonnée ou composante et y la seconde.
- Deux couples sont égaux si et seulement si leurs composantes de même rang sont égales

$$(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a \text{ et } y = b.$$

1.5 Applications

En commençant par rappeler la notion d'application dans la définition suivante

Définition 1.20.

On appelle application d'un ensemble A dans un ensemble B toute correspondance f qui, à tout élément de A associe un élément de B . Et on note $f : A \rightarrow B$ ou $A \xrightarrow{f} B$.

On note souvent $f(x)$ l'élément de B associé à $x \in A$; $f(x)$ est l'image de x par f ; c'est aussi la valeur de f en x .

Il en résulte qu'une application f de A dans B est un triplet (A, B, f) où A est l'ensemble de départ, B l'ensemble d'arrivée et f le moyen de passage d'un élément de A à un élément de B .

Deux application (A, B, f) et (C, D, g) sont égales si et seulement si $A = C$, $B = D$ et $f = g$. L'égalité $f = g$ signifie $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$.

Exemple 1.21. L'application $Id_A : A \rightarrow B$ définie par $Id_A(x) = x$ est appelée application identique de A .

1.6 Image, image réciproque et graphe d'une application

Soit f une application de l'ensemble A dans l'ensemble B .

Définition 1.22.

a)- L'image de f est l'ensemble

$$f(A) = \{f(x); x \in A\}$$

1.7. RESTRICTION, PROLONGEMENT ET COMPOSITION

b)- L'image réciproque d'une élément $y \in B$ est l'ensemble des éléments $x \in A$ d'image $f(x) = y$, et on le note

$$f^{-1}(y) = \{x \in A / y = f(x)\}$$

c)- Par extension, l'image réciproque d'une partie $E \in B$ est l'ensemble

$$f^{-1}(E) = \{x \in A / f(x) \in E\}$$

d)- On appelle graphe de l'application f l'ensemble des couples $(x, f(x)) \in A \times B$. Ce graphe de f peut être représenté dans un plan par une courbe.

1.7 Restriction, prolongement et composition

A partir d'une ou plusieurs applications, on peut construire d'autres applications au moyen de restriction, de prolongement et de composition.

Définition 1.23.

Soit $f : A \rightarrow B$ une application.

a)- On appelle restriction de f à une partie A_1 de A l'application $g : A_1 \rightarrow B$ de valeur $g(x) = f(x)$ sur A_1 .

b)- On appelle prolongement de f à un sur-ensemble $E \supset A$ l'application $h : E \rightarrow B$ qui prend les mêmes valeurs que f sur A : $h(x) = f(x)$ sur A .

Proposition 1.24.

a)- Une application $f : A \rightarrow B$ admet toujours une restriction unique à une partie A_1 de A .

b)- Une application $f : A \rightarrow B$ admet des prolongement à tout sur-ensemble E de A .

Définition 1.25.

Soit trois ensembles A, B et C et deux applications $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$. On appelle la composée des applications f et g l'application $h : A \rightarrow C$ qui prend la valeur $h(x) = g(y)$ où $y = f(x)$, et on note $h = g \circ f$.

Théorème 1.26.

a) La composition des applications est associative

b) Elle admet l'application identique comme élément neutre

c) Elle n'est commutative.

1.8 Applications injective, surjective et bijectives

Définition 1.27.

Une application $f : A \rightarrow B$ est dite injective si et seulement si elle vérifie la propriété suivante :

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

1.9. APPLICATION RÉCIPROQUE D'UNE BIJECTION

Définition 1.28. Une application $f : A \rightarrow B$ est dite surjective ssi

$$\forall y \in B, \exists x \in A \text{ tel que } y = f(x)$$

Définition 1.29.

Une application $f : A \rightarrow B$ est dite bijective ssi elle est injective et surjective.

Théorème 1.30.

Soit $f : A \rightarrow B$ une application strictement monotone. Alors f est injective.

1.9 Application réciproque d'une bijection

A toute bijection f on peut associer une unique application g bijective que l'on détermine par la définition suivante

Définition 1.31. Soit une bijection $f : A \rightarrow B$. On appelle l'application réciproque de f , l'application $g : B \rightarrow A$ de valeur $g(y) = x$ avec $y = f(x)$ et on note

$$g = f^{-1} : B \rightarrow A.$$

Il ne faut pas confondre l'application réciproque f^{-1} et ses valeurs $f^{-1}(x)$ et $f^{-1}(B)$ avec l'image réciproque $f^{-1}(x)$ qui est définie pour toute application f , bijective ou non.

Remarque 1.32.

Si $f : A \rightarrow A$ une application bijective alors :

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_A \text{ et } (f^{-1})^{-1} = f.$$

1.10 Exercices et solutions

Exercice 1.33. Soient les ensembles A et B avec $A = \{x \in \mathbb{Z}, x \text{ divisible par } 6\}$ et $B = \{y \in \mathbb{Z}, y \text{ multiple de } 2 \text{ et } 3\}$. Montrer l'égalité $A = B$.

Exercice 1.34. En utilisant une méthode autre que celle de cours, montrer que l'intersection des ensembles est associative.

Exercice 1.35. Montrer que la réunion des ensembles est commutative et associative.

Exercice 1.36. Démontrer le théorème 1.13 de cours.

Exercice 1.37. Soient les ensembles $E = \{24x, x \in \mathbb{Z}\}$ et $F = \{6y, y \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $E \subset F$ et chercher l'ensemble \mathbb{C}_F^E .

Exercice 1.38. Montrer que $\mathbb{C}_E^{A \cup B} = (\mathbb{C}_E^A) \cap (\mathbb{C}_E^B)$ et $\mathbb{C}_E^{A \cap B} = (\mathbb{C}_E^A) \cup (\mathbb{C}_E^B)$

1.10. EXERCICES ET SOLUTIONS

Exercice 1.39. Soient A et B deux sous ensembles de E , on leur associe leur différence $A \setminus B$. Etablir que $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$. En déduire l'ensemble $A \setminus (A \setminus B)$.

Exercice 1.40. Soit C un troisième sous ensemble de E . Montrer les formules suivantes :

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

Exercice 1.41. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = C_{A \cup B}^{A \cap B}$ et calculer $A \Delta A, A \Delta \phi$.

Exercice 1.42. Soient A, B et C trois parties de E . Montrer que :

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Exercice 1.43. Soit l'application $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de valeur $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Déterminer la restriction de f à $]0, \frac{1}{2}]$.
2. Déterminer des prolongements de f à $[-1, 1]$.

Exercice 1.44. Démontrer le théorème 1.26 de cours.

Exercice 1.45. Soient les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de valeurs

$$f_1(x) = 3x - 2, f_2(x) = \frac{x}{x^2 + 5} \text{ et } f_3(x) = x^3 - 1$$

Calculer les composées $f_1^4, f_1 \circ f_2, f_2 \circ f_1$ et $f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

Exercice 1.46. Soit une application injective $f : A \rightarrow B$, montrer que l'équation $f(x) = a$ admet une ou zéro solution x pour tout $a \in B$.

Exercice 1.47. Soit une application $f : A \rightarrow B$. Montrer que f est surjective ssi $f(A) = B$.

Exercice 1.48. Soit une application $f : A \rightarrow B$, montrer que f est bijective ssi $f^{-1}(a)$ contient un seul élément pour tout $a \in B$.

Exercice 1.49. Soient deux applications $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$. Démontrer que

- a) Si $g \circ f = Id_A$, alors f est injective et g surjective.
- b) Si $g \circ f = Id_A$ et $f \circ g = Id_B$, alors f et g sont bijectives et $g = f^{-1}$

Exercice 1.50. Soient deux ensembles finis A et B ayant le même nombre d'éléments et l'application $f : A \rightarrow B$. Montrer que si f est injective alors f est bijective.

Solutions

Exercice 1.33.

On sait que x est multiple de 6 si et seulement si x est multiple de 2 et de 3. Alors $A = B$.

Exercice 1.34.

Soient A, B et C trois ensembles. $x \in (A \cap B) \cap C$ si et seulement si ($x \in A$ et $x \in B$) et $x \in C$. Donc $x \in (A \cap B) \cap C$ ssi $x \in A$ et ($x \in B$ et $x \in C$). Ainsi $x \in (A \cap B) \cap C$ ssi $x \in A \cap (B \cap C)$, d'où $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Exercice 1.35.

Soient A, B et C trois ensembles. La réunion est commutative, en effet $x \in A \cup B$ ssi $x \in A$ ou $x \in B$. Ensuite $x \in A \cup B$ ssi $x \in B$ ou $x \in A$. D'où $A \cup B = B \cup A$.

La réunion est associative, en effet $x \in (A \cup B) \cup C$ si et seulement si ($x \in A$ ou $x \in B$) ou $x \in C$. Donc $x \in (A \cup B) \cup C$ ssi $x \in A$ ou ($x \in B$ ou $x \in C$). Ainsi $x \in (A \cup B) \cup C$ ssi $x \in A \cup (B \cup C)$, d'où $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Exercice 1.36.

Soient A, B et C trois ensembles. L'intersection est distributive par rapport à la réunion : $x \in A \cap (B \cup C)$ ssi $x \in A$ et $x \in B \cup C$, d'où $x \in A \cap (B \cup C)$ ssi $x \in A$ et ($x \in B$ ou $x \in C$). Enfin $x \in A \cap (B \cup C)$ ssi ($x \in A$ et $x \in B$) ou ($x \in A$ et $x \in C$), c.à.d. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

La réunion est distributive par rapport à l'intersection : $x \in A \cup (B \cap C)$ ssi $x \in A$ ou $x \in B \cap C$, d'où $x \in A \cup (B \cap C)$ ssi $x \in A$ ou ($x \in B$ et $x \in C$). Enfin $x \in A \cup (B \cap C)$ ssi ($x \in A$ ou $x \in B$) et ($x \in A$ ou $x \in C$), c.à.d. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Exercice 1.37.

Soit $x \in E$ alors $x = 24x' = 6(4x')$. Ainsi $x = 6y$ avec $y = 4x'$. D'où $E \subset F$. Enfin le complémentaire de E dans F est $C_F E = \{6y \mid y \neq 4z\}$.

Exercice 1.38.

Soient A et B deux parties de E . $x \in \mathbb{C}_E^{A \cup B}$ ssi $x \in E$ et $x \notin A \cup B$. Ainsi $x \in \mathbb{C}_E^{A \cup B}$ ssi ($x \in E$ et $x \notin A$) et ($x \in E$ et $x \notin B$). Enfin $\mathbb{C}_E^{A \cup B} = \mathbb{C}_E^A \cap \mathbb{C}_E^B$.
 $x \in \mathbb{C}_E^{A \cap B}$ ssi $x \in E$ et $x \notin A \cap B$. Ainsi $x \in \mathbb{C}_E^{A \cap B}$ ssi ($x \in E$ et $x \notin A$) ou ($x \in E$ et $x \notin B$). Enfin $\mathbb{C}_E^{A \cap B} = \mathbb{C}_E^A \cup \mathbb{C}_E^B$.

Exercice 1.39.

Soient A et B deux parties de E . Soit $x \in E$, $x \in A \setminus B$ ssi $x \in A$ et $x \notin B$. Comme $B \cap A \subset B$ alors $x \in A \setminus B$ ssi $x \in A$ et $x \notin A \cap B$. Ainsi $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

$x \in (A \cup B) \setminus B$ ssi $x \in A \cup B$ et $x \notin B$ d'où $x \in (A \cup B) \setminus B$ ssi $x \in A$ et $x \notin B$ et alors $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$. Enfin $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$.

Dans ces conditions $A \setminus (A \setminus B) = A \setminus (A \setminus (A \cap B)) = A \cap B$.

Exercice 1.40.

Soient A, B et C trois parties de E . Soit $x \in E$, $x \in A \setminus (B \cup C)$ ssi $x \in A$ et

1.10. EXERCICES ET SOLUTIONS

$x \notin (B \cup C)$. Alors $x \in A \setminus (B \cup C)$ ssi $(x \in A \text{ et } x \notin B)$ et $(x \in A \text{ et } x \notin C)$. Ainsi $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

$x \in A \setminus (B \cap C)$ ssi $x \in A$ et $x \notin (B \cap C)$. Alors $x \in A \setminus (B \cap C)$ ssi $(x \in A \text{ et } x \notin B)$ ou $(x \in A \text{ et } x \notin C)$. Ainsi $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

$x \in (A \setminus B) \setminus C$ ssi $x \in A \setminus B$ et $x \notin C$. Ainsi $x \in (A \setminus B) \setminus C$ ssi $x \in A$ et $x \notin B$ et $x \notin C$ c.à.d $x \in A$ et $x \notin B \cup C$. Enfin $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

Exercice 1.41.

Soient A et B deux ensembles, on sait que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

$$\begin{aligned} x \in A \Delta B &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \text{ ou } x \in (B \setminus A) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A)) \text{ ou } (x \notin B \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A)) \\ &\Leftrightarrow ((x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \notin A)) \text{ et } ((x \notin B \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \notin B \text{ ou } x \notin A)) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \text{ et } x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

Ainsi $A \Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \phi$ et $A \Delta \phi = (A \setminus \phi) \cup (\phi \setminus A) = A$.

Exercice 1.42.

On a $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ en effet

$$\begin{aligned} x \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } y \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (y \in B \text{ ou } y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \text{ ou } (x, y) \in A \times C \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C). \end{aligned}$$

Et on a $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ car

$$\begin{aligned} x \in A \times (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } y \in B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (y \in B \text{ et } y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ et } (x \in A \text{ et } y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \text{ et } (x, y) \in A \times C \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C). \end{aligned}$$

Exercice 1.43.

Par définition la restriction de f à $]0, \frac{1}{2}]$ est l'application $g :]0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ de valeur $g(x) = f(x) = \sqrt{x}$. Cette application est unique.

Par définition, un prolongement de f à $[-1, 1]$ est une application $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(x) = f(x)$ sur $A =]0, 1]$. Pour définir h , il faut préciser ses valeurs sur $B = [-1, 0]$. Il y a plusieurs valeurs possibles, donc plusieurs prolongements de f à

1.10. EXERCICES ET SOLUTIONS

$[-1 \ 1]$. Citons :

g_1 de valeur $g_1(x) = \sqrt{x}$ sur A et $g_1(x) = x$ sur B

g_2 de valeur $g_2(x) = \sqrt{x}$ sur A et $g_2(x) = 3x^2$ sur B

g_3 de valeur $g_3(x) = \sqrt{x}$ sur A et $g_3(x) = \sin x$ sur B , etc...

Exercice 1.44.

a)- Soit quatre ensembles A_i et trois applications $f_i : A_i \rightarrow A_{i+1}$, $i = 1, \dots, 4$. La condition de la composition des applications est remplie. Les composés $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ et $(f_3 \circ f_2) \circ f_1$ ont même ensemble de départ A_1 et même ensemble d'arrivée A_4 ; comparons leurs valeurs. Posons $f_1(x) = y$, $f_2(y) = z$ et $f_3(z) = t$. Alors $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(y) = z$, il en résulte que $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)(x) = f_3(z) = t$.

La valeur $f_1(x) = y$ donne $(f_3 \circ f_2) \circ f_1(x) = (f_3 \circ f_2)(y) = f_3(f_2(y)) = f_3(z) = t$ et alors $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

b)- Soit Id_A et Id_B les applications identiques sur A et sur B respectivement. Pour toute application $f : A \rightarrow B$ on a : $f(x) = f(Id_A(x)) = f \circ Id_A(x)$, $Id_B(f(x)) = f(x)$ d'où : $f \circ Id_A = Id_B \circ f = f$.

Si $A \neq B$, il y a un élément neutre à droite Id_A et un élément neutre à gauche Id_B . Si $A = B$ il y a un seul élément neutre Id_A .

c)- Soient les applications $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$. Alors il existe deux composés $f \circ g : B \rightarrow B$ et $g \circ f : A \rightarrow A$. Si $A \neq B$, cela entraîne $f \circ g \neq g \circ f$. Si $A = B$, les valeurs $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$ peuvent ne pas être égales donc $f \circ g \neq g \circ f$.

Exercice 1.45.

Par définition de la composition des applications, on a :

$$f_1^2(x) = f_1(f_1(x)) = 3f_1(x) - 2 = 9x - 8.$$

$$f_1^3(x) = f_1(f_1^2(x)) = 3f_1^2(x) - 2 = 27x - 26$$

$$f_1^4(x) = f_1(f_1^3(x)) = 3f_1^3(x) - 2 = 81x - 80$$

$$f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = 3f_2(x) - 2 = \frac{3x}{x^2 + 5} - 2 = \frac{3x - 2x^2 - 10}{x^2 + 5}$$

$$f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x)) = \frac{f_1(x)}{(f_1(x))^2 + 5} = \frac{3x - 2}{(3x - 2)^2 + 5} = \frac{3x - 2}{9x^2 - 12x + 9}$$

$$f_3 \circ f_2 \circ f_1(x) = f_3(f_2 \circ f_1(x)) = (f_2 \circ f_1(x))^3 - 1 = \left(\frac{3x - 2}{9x^2 - 12x + 9} \right)^3 - 1$$

Exercice 1.46.

Supposons que l'équation $f(x) = a$ admette deux solutions x_1 et x_2 . Alors $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$. De fait que f est injective, il en résulte que l'équation $f(x) = a$ admet une ou zéro solution.

Exercice 1.47.

On a $f : A \rightarrow B$, il est clair que $f(A) \subset B$, si f est surjective, pour $y \in B$ il existe

1.10. EXERCICES ET SOLUTIONS

$x \in A$ tel que $y = f(x) \in f(A)$. d'où $B \subset f(A)$ et alors $f(A) = B$.

Si $B = f(A)$ alors $\forall y \in B = f(A)$ il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, d'où f est surjective.

Exercice 1.48.

On a $f : A \rightarrow B$. Si f est bijective alors $f^{-1}(a)$ contient au plus un élément, mais $a = f(b)$ pour un certain $b \in A$ car f est surjective, donc $f^{-1}(a) = b$. D'où $f^{-1}(a)$ contient un seul élément pour tout $a \in B$.

Si $f^{-1}(a)$ contient un seul élément pour tout $a \in B$. $f(x) = f(y) = a$ implique $x, y \in f^{-1}(a)$ alors $x = y$ donc f injective. D'autre part $\forall a \in B$, $a = f(f^{-1}(a))$ donc $\exists x = f^{-1}(a)$ tel que $a = f(x)$ et alors f est surjective.

Exercice 1.49.

Soit $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow A$.

a)- $g \circ f = Id_A$: Si $f(x) = f(y)$ alors $g(f(x)) = g(f(y))$ et donc $Id_A(x) = Id_A(y)$ d'où $x = y$, et f injective. D'autre part pour tout $x \in A$ on a $Id_A(x) = x$ d'où $g \circ f(x) = x$ et alors $x = g(f(x))$ donc g est surjective.

b)- Si $g \circ f = Id_A$ et $f \circ g = Id_B$, d'après la question (a) f, g sont bijectives et alors $f = g^{-1}$.

Exercice 1.50.

$f : A \rightarrow B$, d'après les hypothèses il suffit de montrer que f est surjective. On a $f(A) \subset B$, mais $f(A)$ et B ont même nombre d'éléments alors $f(A) = B$, ainsi on obtient la surjectivité.

Chapitre 2

FONCTIONS NUMERIQUES CONTINUES

2.1 Introduction

Une fonction numérique d'une variable réelle, est une application d'une partie \mathcal{D} de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . \mathcal{D} est alors appelée domaine de définition de cette fonction. Lorsque l'on rencontre une fonction numérique, la première précision à obtenir est bien entendu, son domaine de définition \mathcal{D} . Tout au long de ce chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle I (ouvert ou fermé) de \mathbb{R} .

2.2 Etude des variations d'une fonction

2.2.1 Fonction croissante, décroissante ou constante

Définition 2.1.

a)- f est dite croissante sur I si

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1).$$

b)- f est dite décroissante sur I , si

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1).$$

c)- f est dite constante sur I , si

$$\forall x_1, x_2 \in I : f(x_2) = f(x_1).$$

La croissance et la décroissance deviennent strictes si on remplace les symboles \geq et \leq respectivement par $>$ et $<$. Par conséquent on a :

2.2. ETUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

a)- f est dite strictement croissante sur I si

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

b)- f est dite strictement décroissante sur I , si

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$$

2.2.2 Accroissement de la variable et de la fonction, taux d'accroissement et dérivabilité

Soit f une fonction sur un intervalle I et soit x_1 et x_2 deux valeurs distinctes appartenant à I prises successivement dans cet ordre par x . et soient $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ leurs images respectives.

Définition 2.2.

a)- On appelle l'accroissement de la variable x , la différence

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

b)- On appelle l'accroissement de la fonction f , la différence

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

c)- On appelle le taux d'accroissement de la fonction f entre les valeurs x_1 et x_2 , le quotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

A la lumière de cette définition on peut dire que :

a)- f est croissante sur I si

$$\forall x_1 \neq x_2 \in I : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \text{ ou } \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0.$$

b)- f est décroissante sur I si

$$\forall x_1 \neq x_2 \in I : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0 \text{ ou } \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0.$$

c)- f est constante sur I si

$$\forall x_1 \neq x_2 \in I : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \text{ ou } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

2.2. ETUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

Le passage à la limite dans le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ conduit à la notion de dérivabilité (On reviendra sur cette notion, avec plus de détails dans le chapitre 4). Ainsi f est dérivable au point x_0 si on a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est finie. Dans ce cas on écrit

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

2.2.3 Fonction monotone

Définition 2.3.

- a)- La fonction f définie sur un intervalle I est dite monotone sur I si elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante sur I .
b)- La fonction f est dite strictement monotone si la croissance (ou la décroissance) est prise au sens strict. Pour une telle fonction, on a $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

2.2.4 Extremum d'une fonction

Définition 2.4.

Soit x_0 un point de I . On dit que

- a)- la fonction f admet un maximum local, $f(x_0)$, s'il existe un ouvert $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\subset I$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[: f(x) \leq f(x_0).$$

- b)- la fonction f admet un minimum local, $f(x_0)$, s'il existe un ouvert $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\subset I$ tel que

$$\forall b \in]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[: f(x) \geq f(x_0).$$

Remarque 2.5.

Soit \mathcal{D} le domaine de définition de f et x_0 un point de \mathcal{D} .

- a)- On dit que f admet un maximum absolu, $f(x_0)$, si

$$\forall x \in \mathcal{D} : f(x) \leq f(x_0).$$

- b)- On dit que f admet un minimum absolu, $f(x_0)$, si

$$\forall x \in \mathcal{D} : f(x) \geq f(x_0)$$

2.2.5 fonction majorée, minorée

Définition 2.6.

- a) f est dite majorée sur I , s'il existe un nombre α tel que

$$\forall x \in I : f(x) \leq \alpha.$$

2.2. ETUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

b) f est dite minorée sur I , s'il existe un nombre β tel que

$$\forall x \in I : f(x) \geq \beta.$$

c) les nombres α et β sont respectivement appelés majorant et minorant de f sur I .

Remarque 2.7. Le majorant et le minorant ne sont pas uniques.

2.2.6 Borne supérieure, borne inférieure et fonction bornée

Définition 2.8.

L'ensemble des majorants de f sur I admet un élément plus petit que tous les autres. Cet élément M est appelé borne supérieure de f sur I . Il est noté par

$$M = \sup_{x \in I} f(x).$$

La propriété suivante découle :

$$\forall x \in I : f(x) \leq M, \text{ ou } f(x) \leq \sup_{x \in I} f(x).$$

Définition 2.9.

L'ensemble des minorants de f sur I admet un élément plus grand que tous les autres. Cet élément, m , est appelé borne inférieure de f sur I . Il est noté par $m = \inf_{x \in I} f(x)$.

La propriété suivante découle :

$$\forall x \in I : f(x) \geq m, \text{ ou } f(x) \geq \inf_{x \in I} f(x).$$

Ainsi découle la définition d'une fonction bornée.

Définition 2.10.

Une fonction f définie sur I est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée. Dans ce cas :

$$\forall x \in I : \inf_{x \in I} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{x \in I} f(x)$$

Remarque 2.11.

Une fonction définie et bornée sur I n'atteint pas nécessairement ses bornes.

2.2.7 Fonction périodique

Définition 2.12.

Une fonction f , dont le domaine de définition est \mathcal{D} est dite périodique s'il existe un nombre $T \neq 0$, tel que

$$\forall x \in \mathcal{D} : x + T \text{ et } f(x + T) = f(x).$$

2.3. LIMITE ET CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

Exemple 2.13. Les fonctions trigonométriques $\sin x$, $\cos x$ sont périodiques de période 2π , c'est à dire

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \text{ et } \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Par contre la période de la fonction tangente est π , et on a

$$\tan(x + \pi) = \tan x.$$

2.3 Limite et continuité d'une fonction

2.3.1 limite d'une fonction

Définition 2.14.

On dit qu'une fonction f admet pour limite l au point x_0 si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \forall x \in \mathbb{D}, 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

. Le nombre l est unique, et on écrit :

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Définition 2.15.

Soit f une fonction numérique de domaine de définition \mathcal{D} et $x_0 \in \mathbb{R}$.

a) l est la limite de f à droite au point x_0 si ona :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \forall x \in \mathcal{D}, 0 < x - x_0 < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

b) l' est la limite de f à gauche au point x_0 si ona :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \forall x \in \mathcal{D}, 0 < x_0 - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l'| < \epsilon.$$

Souvent on écrit

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad l' = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Par ailleurs, on dit f tend vers plus l'infini à droite de x_0 si on a

$$\forall c > 0, \exists \eta > 0 \forall x \in \mathcal{D}, 0 < x - x_0 < \eta \Rightarrow f(x) > c.$$

On dit f tend vers plus l'infini à gauche de x_0 si on a

$$\forall c > 0, \exists \eta > 0 \forall x \in \mathcal{D}, 0 < x_0 - x < \eta \Rightarrow f(x) > c.$$

Ainsi on écrit

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$

De la même manière on obtient la limite vers moins l'infini, il suffit de considérer $-f$ pour revenir sur le premier cas. Par contre la limite à l'infini se présente comme suit :

2.3. LIMITE ET CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

Soit l un réel, en $+\infty$, f tend vers l si pour tout intervalle ouvert centré en l , il existe un réel a tel que pour tout $x > a$, $f(x)$ appartient à cet intervalle. On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

En $-\infty$, f tend vers l si pour tout intervalle ouvert centré en l , il existe un réel a tel que pour tout $x > a$, $f(x)$ appartient à cet intervalle. On note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l.$$

Pour une valeur infinie de x , une fonction peut aussi prendre une valeur infinie, positive ou négative. Quand x tend vers $+\infty$, f tend vers $+\infty$ si pour tout réel A il existe un réel a tel que, quel que soit $x > a$, $f(x) > A$ (et f tend vers $-\infty$ si $f(x) < -A$). Quand x tend vers $-\infty$, f tend vers $+\infty$ si pour tout réel A il existe un réel a tel que, quel que soit $x < a$, $f(x) > A$ (et f tend vers $-\infty$ si $f(x) < -A$).

En général les fonctions sont données par la somme, le produit, le quotient ou la composition de fonctions. Soient $g : \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathcal{D}_h \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{x \rightarrow x_0} g = l_1$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} h = l_2$. Il est facile de montrer que $\alpha g(x) + \beta h(x)$ admet, pour limite en x_0 le nombre $\alpha l_1 + \beta l_2$. De plus si $l_2 \neq 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Si maintenant g une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J (veut dire que les valeurs prises par g ne se situent que dans l'intervalle J , par exemple des valeurs positives pour la fonction carré). Si h une fonction définie sur J . Soit $x_0 \in J$ (en particulier aux bornes de son ensemble de définition) et soit $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta$. Si $\lim_{y \rightarrow \beta} f(y) = d$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f \circ g(x) = d.$$

2.3.2 Continuité

Définition 2.16.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique et $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On dit que f est continue en x_0 si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- a)- f admet une limite finie en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- b)- $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Continuité à gauche et continuité à droite

Définition 2.17.

Avec les notations précédentes, on dit que f est continue à droite (respectivement à gauche) en x_0 si on a : f admet une limite à droite (resp. à gauche) en x_0 et

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \text{ (resp. } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0))$$

2.3. LIMITE ET CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

Remarque 2.18.

Une fonction f est continue en x_0 ssi f est continue à droite et à gauche en ce point.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et soit I un intervalle de \mathbb{R} . On dit que f est continue sur I si f est définie au moins sur I et continue en tout point de I . Nous noterons $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur I , et toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné; elle atteint ses bornes.

Exemple 2.19. La fonction $f(x) = \log x$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Prolongement par continuité

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathcal{D}_f} \setminus \mathcal{D}_f$ (ce qui signifie : $x_0 \notin \mathcal{D}_f$ et $\forall \eta > 0, \exists x \in \mathcal{D}_f$ tel $|x - x_0| < \eta$). La fonction f possède une limite en x_0 si et seulement si il existe un prolongement de f à $\mathcal{D}_f \cup \{x_0\}$ continu en x_0 . Lorsque ce prolongement existe, il est unique et est appelé le prolongement par continuité de f en x_0 . Sa valeur en x_0 est $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Si la fonction f est continue en $a \in \mathcal{D}_f$ alors il en est de même pour son prolongement par continuité en x_0 .

Exemple 2.20. La fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ est définie sur \mathbb{R}^* . Comme on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, alors f admet un prolongement par continuité g à \mathbb{R} qui coïncide avec f sur \mathbb{R}^* et vaut 1 en 0.

Comme conséquences de la définition 2.17, on donne quelques familles de fonctions continues.

- a)- Toute fonction polynôme est continue en tout point
- b)- Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.
- c)- les fonction sinus et cosinus sont continues en tout point.
- d)- Les fonctions tangente et cotangente sont continues en tout point où elles sont définies.
- e)- Si une fonction f est continue sur un intervalle fermé $[a; b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes.
- f)- Soit g et h deux fonctions continues en x_0 . Les fonctions $\alpha g + \beta h$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et gh sont continues en x_0 . De plus, si $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{h(x)}{g(x)}$ est continue en x_0 .
- g)- Soit g une fonction continue en x_0 et h une fonction continue en $g(x_0)$. La fonction $h \circ g$ est continue au point x_0 .
- k) La fonction $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ est continue au point x_0 si et seulement si pour toute suite (x_n) de points de \mathcal{D}_f qui converge vers x_0 , la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x_0)$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2.21.

Soit f une fonction continue d'un intervalle $[a; b]$ dans \mathbb{R} . On suppose que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Alors il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = 0$.

2.3. LIMITE ET CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

Démonstration. On suppose $f(a) < f(b)$. Soit A le sous-ensemble de $[a; b]$ formé des points qui ont une image positive par f , l'ensemble A n'est pas vide car il contient au moins b , aussi il est minoré par a . Alors A possède une borne inférieure $c \in [a; b]$. Si $f(c) > 0$ alors $c \neq a$ et il existerait $\alpha > 0$ tel que pour tout x dans $[c - \alpha; c]$, on ait $|f(x) - f(c)| \leq \frac{f(c)}{2}$, a fortiori $f(x) \geq \frac{f(c)}{2} > 0$. En particulier, on aurait $c - \alpha \in A$, ce qui contredirait le fait que c est un minorant de A . On a donc $f(c) \leq 0$, d'où $f(c) = 0$.

Si on avait $f(c) < 0$, alors $c \neq b$ et il existerait $\beta > 0$ tel que $\forall x \in [c; c + \beta]$, on ait $|f(x) - f(c)| \leq \frac{-f(c)}{2}$, a fortiori $f(x) \leq \frac{f(c)}{2} < 0$. Il n'y aurait donc aucun élément de A dans l'intervalle $[c; c + \beta]$. Ce qui contredit avec le fait que c soit la borne inférieure de A . On a donc $f(c) \geq 0$, d'où $f(c) = 0$.

On comprendra mieux le nom de ce théorème en le formulant ainsi :

Corollaire 2.22. *Pour toute fonction f définie et continue sur un intervalle I et à valeurs réelles, l'image $f(I)$ est un intervalle.*

On peut dire aussi, Pour toute application continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et tout réel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = u$. On particulier si f prend au moins une valeur négative et au moins une valeur positive, alors f prend la valeur 0.

2.3.3 Rapport entre monotonie et inversibilité

Théorème 2.23.

*Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle I , alors :
 f bijective de I sur son image $\Leftrightarrow f$ strictement monotone sur I .*

Théorème 2.24.

Soit f une fonction numérique réelle définie sur un intervalle I et strictement monotone, alors $g = f^{-1}$ est définie et continue sur $f(I)$.

Synthèse

Soit f une fonction définie, continue, strictement monotone sur un intervalle I , alors f est bijective et sa bijection réciproque g est définie, continue, strictement monotone sur $f(I)$, de même sens que f .

Pour montrer ce résultat, on suppose f est strictement croissante sur I . Alors, l'image J de I par f est un intervalle d'après ce qui précède. De plus, comme f est strictement croissante, elle est forcément injective et donc bijective. On peut alors considérer l'application réciproque f^{-1} de J dans I . L'application f^{-1} est strictement croissante. En effet, si y_1 et y_2 sont dans J , avec $y_1 < y_2$, et si x_1 et x_2 sont les antécédants respectifs de y_1 et y_2 par f , alors on ne peut avoir $x_1 \geq x_2$ car f est croissante. On a donc $f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$. Il reste à prouver la continuité de f^{-1} .

2.4. INVERSION DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

Soit y dans J , $x \in I$ son image par f^{-1} et considérons une suite y_n de J qui converge vers y , ainsi que x_n la suite de terme général $f^{-1}(y_n)$. Soit $\epsilon > 0$, si $x - \epsilon \notin I$, alors ce réel minore I et on a $x_n > x - \epsilon$ pour tout n . Sinon, comme f est strictement croissante, on a $f(x + \epsilon) > y$, de plus la suite de terme général y_n tend vers y , on a, pour n assez grand, $f(x - \epsilon) < y_n$, ce qui, en appliquant la fonction f^{-1} qui est strictement croissante, nous donne $x_n > x - \epsilon$. Cette dernière inégalité est donc toujours vérifiée pour n assez grand. d'une manière analogue, on a, pour n assez grand, $x_n < x + \epsilon$. Ainsi, pour n assez grand, on a $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$. Cela prouve que la suite de terme général $x_n = f^{-1}(y_n)$ converge vers $x = f^{-1}(y)$. On en déduit la continuité de f^{-1} .

2.4 Inversion des fonctions trigonométriques.

Les fonctions trigonométriques fondamentales sinus, cosinus, tangente, cotangente sont périodiques et continues sur leurs ensemble de définition. Il va de soi que pour inverser ces fonctions il sera nécessaire de considérer leurs restrictions à un intervalle où elles sont monotones.

1) La restriction de la fonction sinus à l'intervalle $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue, strictement croissante, telle que $\sin(I) = [-1, 1]$. Elle admet donc une bijection réciproque, notée Arcsinus définie sur $[-1, 1]$, d'image I , donnée par :

$$\forall x \in [-1, 1], y = \arcsin x \Leftrightarrow y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ et } \sin y = x.$$

Cette fonction est continue, strictement croissante sur $[-1, 1]$ et impaire.

2) La restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $J = [0, \pi]$ est continue, strictement décroissante, telle que $\cos(J) = [-1, 1]$. Elle admet donc une bijection réciproque, notée Arcosinus, définie sur $[-1, 1]$, d'image J donnée par :

$$\forall x \in [-1, 1], y = \arccos x \Leftrightarrow y \in [0, \pi] \text{ et } \cos y = x.$$

Cette fonction est continue, strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

3) La restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\dot{I} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est continue, strictement croissante telle que $\tan(\dot{I}) = \mathbb{R}$. Elle admet donc une bijection réciproque, notée Arctangente, définie sur \mathbb{R} d'image \dot{I} , donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, y = \arctan x \Leftrightarrow y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } \tan y = x.$$

Cette fonction est continue, strictement croissante, sur \mathbb{R} et impaire.

2.5. FONCTIONS HYPERBOLIQUES

2.5 Fonctions hyperboliques

La fonction $x \mapsto e^x$ est définie sur \mathbb{R} et n'est ni paire ni impaire. Par conséquent la fonction exponentielle s'écrit, de façon non triviale, comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire à l'aide de la décomposition

$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

D'où la définition suivante :

Définition 2.25.

On appelle fonction sinus hyperbolique, noté \sinh , et fonction cosinus hyperbolique \cosh , les fonctions définies sur \mathbb{R} par les relations :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

2.6 Exercices et solutions

Exercice 2.26. Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 3x - 4}, \quad g(x) = \log \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 3x - 4}$$

Exercice 2.27. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \cos x.$$

Exercice 2.28. Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer que la fonction partie entière E est continue à droite en n , mais pas à gauche en n .

Exercice 2.29. Montrer que si f est une fonction paire ou impaire qui est continue en un point x_0 , alors f est aussi continue au point $-x_0$.

Exercice 2.30. Montrer que si f est une fonction T -périodique continue en un point x_0 , alors pour tout entier relatif n , f est également continue en $x_0 + nT$.

Exercice 2.31. Montrer que fonction partie fractionnaire $\{x\} = x - [x]$ est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et continue à droite en tout point de \mathbb{R} .

Exercice 2.32. Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Exercice 2.33. Etudier la fonction

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

Solutions

Exercice 2.26.

Comme toute fonction rationnelle, f est définie sur \mathbb{R} privé des pôles de cette fonction. Or $x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$, 1 et -4 ne sont pas racines du numérateur, d'où l'on déduit $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-4, 1\}$.

g apparaît comme la composée de la fonction \log et de la fonction f précédente. On a donc

$$x \in \mathcal{D}_g \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(x) \in \mathcal{D}_{\log} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-4, 1\} \text{ et } f(x) > 0.$$

Cherchons donc le signe de f . Or $f(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+4)}$. D'où et par conséquent

x	$] - \infty - 4[$	$] - 4 - 2[$	$] - 2 - 1[$	$] - 1 1[$	$] 1 + \infty[$
$x + 1$	-	-	-	+	+
$x + 2$	-	-	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	-	+
$x + 4$	-	+	+	+	+
$f(x)$	+	-	+	-	+

$$\mathcal{D}_g =] - \infty - 4[\cup] - 2 - 1[\cup] 1 + \infty[.$$

Exercice 2.27.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \cos x = 0.$$

Exercice 2.28.

$E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$. pour $x \in \mathbb{R}$ il existe $n \in \mathbb{Z}$ unique tel que $n \leq x < n + 1$ et ainsi $E(x) = n$. On peut considérer $x = n + \epsilon$ avec $0 < \epsilon < 1$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow n^+} E(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E(n + \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E(n) = n$. Donc E est continue à droite de n .

Ensuite pour $\lim_{x \rightarrow n^-} E(x)$, on peut considérer $x = n - \epsilon$ avec toujours $0 < \epsilon < 1$, et on a $n - 1 < n - \epsilon = x < n$. Alors $\lim_{x \rightarrow n^-} E(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (n - 1) = n - 1 \neq n = E(n)$. E n'est pas continue à gauche de n .

Exercice 2.29.

Soit f une fonction numérique continue en x_0 . Si f est paire ou impaire alors $f(x) = \pm f(-x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = \lim_{-x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \lim_{-x \rightarrow x_0} f(-x) = \pm \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm f(x) = f(-x).$$

Alors si f est continue en x_0 , alors f est continue en $-x_0$ lorsque $-x_0$ est dans $\text{def}(f)$.

2.6. EXERCICES ET SOLUTIONS

Exercice 2.30.

f une fonction T -périodique veut dire $f(x+T) = f(x)$. f est continue en x_0 , montrons que f est également continue en $x_0 + nT$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + nT} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + nT} f(x - nT) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f(x_0 + nT).$$

Autre méthode

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } |x + nT - (x_0 + nT)| < \delta \Rightarrow |f(x + nT) - f(x_0 + nT)| < \epsilon.$$

Ainsi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } |x - (x_0 + nT)| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0 + nT)| < \epsilon.$$

d'où $\lim_{x \rightarrow x_0 + nT} f(x) = f(x_0 + nT)$.

Exercice 2.31.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $m(x) = x - E(x)$. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ unique tel que $n \leq x < n+1$ et alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} m(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - E(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} x - \lim_{x \rightarrow x_0} E(x) = x_0 - n = m(x_0)$$

donc m est continue en tout point de $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

En particulier m est continue à droite en tout point de $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, il reste à montrer que m est continue à droite en tout point de \mathbb{Z} , la chose qu'on a démontré dans l'exercice 2.28 : $\lim_{x \rightarrow n^+} E(x) = E(n) = n$ et alors $\lim_{x \rightarrow n^+} m(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} (x - E(x)) = n - \lim_{x \rightarrow n^+} E(x) = n - n = 0 = m(n)$. Ainsi m est continue à droite de tout point de \mathbb{R} .

Exercice 2.32.

On a $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ alors

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} + \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} \\ &= \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

Exercice 2.33.

$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ est définie en tout point x tel que $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$ (et dérivable en tout point vérifiant les inégalité stricte), or $\frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 2x \leq 1+x^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$

2.6. EXERCICES ET SOLUTIONS

et de même $\frac{2x}{1+x^2} \geq -1 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0$. Le domaine de définition de f est donc \mathbb{R} . Puisque x parcourt \mathbb{R} il est possible de poser $x = \tan u$, u parcourt l'intervalle $] -\frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2}[$. Ce choix de u permet d'écrire $u = \arctan x$. On a alors

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \arcsin\left(\frac{2 \tan u}{1 + \tan^2 u}\right) = \arcsin(\sin 2u).$$

Il convient maintenant de distinguer plusieurs cas suivant les valeurs de u , c'est à dire de x .

cas 1. si $u \in [-\frac{\pi}{4} \frac{\pi}{4}]$ alors $2u \in [-\frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2}]$ et $\arcsin(\sin 2u) = 2u$. Soit si $x \in [-1 \ 1]$, $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2 \arctan x$.

cas 2. Si $u \in [\frac{\pi}{4} \frac{\pi}{2}]$, $2u \in [\frac{\pi}{2} \pi]$ et l'angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ qui a même sinus que $2u$ est $\pi - 2u$, ie. $\arcsin 2u = \pi - 2u$. Soit, si $x \in [1 + \infty[$, $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \pi - 2 \arctan x$.

cas 3. Si $u \in [-\pi - \frac{\pi}{2}]$, alors $2u \in [-\frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2}]$ et dans ce cas on trouve $\arcsin(2u) = -\pi - 2u$. Soit, si $x \in] -\infty - 1]$, $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \pi - 2 \arctan x$.

Chapitre 3

ETUDES DES SUITES NUMERIQUES

3.1 Introduction

3.2 Suites numériques

Définition 3.1.

Soit X un ensemble quelconque, on appelle suite d'éléments de X toute application u d'une partie A de \mathbb{N} dans X .

Une suite numérique est une application u de \mathbb{N} dans \mathbb{R} , pour $n \in \mathbb{N}$ on lui associe $u_n \in \mathbb{R}$. Soient u_n et v_n deux suites numériques, alors $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ est une suite numérique. Si de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$; $v_n \neq 0$. Le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ est aussi une suite numérique.

Définition 3.2.

Soit u_n une suite numériques ;

1) On dit que u_n est majorée (resp. minorée) s'il existe un nombre M (resp. m) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M, \text{ (resp. } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m)$$

et on dit alors que M (resp. m) est un majorant (resp. un minorant) de cette suite.

2) Une suite à la fois majorée et minorée est dite bornée.

Définition 3.3.

On dit que u_n est une suite croissante (resp. décroissante) si l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n \text{ (resp. } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n)$$

3.3. CONVERGENCE ET DIVERGENCE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

3.3 Convergence et divergence d'une suite numérique

3.3.1 Définitions

Définition 3.4.

On dit que u_n est convergente s'il vérifie la condition suivante

$$\exists l \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0; |u_n - l| < \epsilon$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente. Le nombre l dont la définition précédente (3.4) affirme que l'existence est unique. On l'appelle limite de la suite u_n et on écrit

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

Exemple 3.5.

On cite par exemple

a)- $u_n = \frac{1}{n}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b)- $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Plus généralement, on a l'équivalence forte utile :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0.$$

Proposition 3.6.

Toute suite numérique convergente est bornée.

Démonstration . Soit u_n une suite numérique convergente et l sa limite. On a alors : pour $\epsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|u_n - l| < 1$ i.e. $l - 1 < u_n < l + 1$. Posons $M = \max \{u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, l + 1\}$ et $m = \min \{u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, l - 1\}$. On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$, ce qui achève la démonstration.

Définition 3.7.

Soit u_n une suite numérique et soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. La suite v_n définie par $v_n = u_{\varphi(n)}$ est appelée suite extraite de la suite initiale. v_n n'est finalement rien d'autre que la composée $u \circ \varphi$.

Remarque 3.8.

Si la suite u_n est convergente, toute suite extraite de la suite u_n est convergente de même limite.

3.3.2 Opérations élémentaires sur les suite convergtes

Soient u_n et v_n deux suites convergentes de limites respectives l_1 et l_2 . Alors $u_n + v_n$ est convergente, de limite $l_1 + l_2$, $u_n - v_n$ est convergente, de limite $l_1 - l_2$, $u_n v_n$ est convergente de limite $l_1 l_2$. De plus si $l_2 \neq 0$ et la suite $\frac{u_n}{v_n}$ est définie à partir d'un certain rang n_0 et convergente, de limite $\frac{l_1}{l_2}$. Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ alors $l_1 \leq l_2$. Si on suppose $l_1 = 0$ et v_n une suite bornée. Alors $u_n v_n$ est convergente de limite 0. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la suite λu_n est convergente de limite λu_n .

3.4. QUELQUES CRITÈRES DE CONVERGENCE

3.4 Quelques critères de convergence

Critère de Cesaro

Soit v_n une suite numérique, posons $\forall n \in \mathbb{N}^* u_n = \frac{v_1+v_2+\dots+v_n}{n}$. Alors :
 v_n est convergente $\Rightarrow u_n$ est convergente.

D'autres critères classiques sont donnés dans la liste suivantes :

a)- Soit u_n une suite bornée et v_n une suite convergente de limite nulle, alors $u_n v_n$ est convergente de limite nulle.

b)- Soient u_n et v_n deux suites numériques à termes positifs telles que, à partir d'un certain rang, on ait $u_n \leq v_n$. Alors si v_n est convergente on a de même pour u_n .

c)- Soient u_n, v_n et w_n trois suites numériques telles que à partir d'un certain rang, on ait $u_n \leq v_n \leq w_n$. Alors si u_n et w_n sont convergentes de même limite l , la suite v_n est convergente de limite l .

3.5 Le cas des suites monotones

3.5.1 Théorème de convergence monotone

Théorème 3.9.

Soit u_n une suite numérique.

- a)- Si u_n est croissante, alors u_n est convergente si et seulement si elle est majorée.
- b)- Si u_n est décroissante, alors u_n est convergente si et seulement si elle est minorée.
- c)- Si u_n croissante non majorée (resp. décroissante non minorée) alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$.)

Définition 3.10.

On dit que deux suites u_n et v_n sont adjacentes si elles vérifient les trois conditions suivantes :

- a)- u_n est une suite croissante.
- b)- v_n est décroissante.
- c)- $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$.

Remarque 3.11. Soient u_n et v_n deux suites adjacentes, ces deux suites sont convergentes et admettent la même limite.

3.5.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 3.12. De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.

3.6 Suites de Cauchy

Définition 3.13.

Soit u_n une suite numérique. On dit que u_n est une suite de Cauchy si l'on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq n_0, q \geq n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| < \epsilon.$$

Remarque 3.14.

Toute suite numérique convergente est une suite de Cauchy. Et toute suite de Cauchy est convergente.

3.7 Exemple fondamental : suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$ et considérons la suite u_n de terme général $u_n = q^n$. Une telle suite est définie sur \mathbb{N} (sauf pour $q = 0$ où elle n'est définie que sur \mathbb{N}^*) est appelée suite géométrique de raison q .

Théorème 3.15.

Soit la suite géométrique $u_n = q^n$ alors on a

a)- $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

b)- $q > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

c)- $q \leq -1 \Rightarrow$ la suite q^n est divergente de second espèce.

d)- $q = 1 \Rightarrow$ la suite est constante égale 1

3.8 Etude des suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

On se donne le premier terme u_0 et une relation permettant de calculer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n .

Une suite récurrente simple $u_{n+1} = f(u_n)$ est parfaitement définie ssi, pour tout entier n ; $u_n \in \text{def}(f)$. Il peut se faire que cela dépend de la valeur donnée au premier terme u_0 .

Exemple 3.16. La suite définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ est bien définie.

Si une suite u_n définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l situé dans le $\text{def}(f)$ et si f est continue au point l , alors nécessairement l vérifie l'égalité $l = f(l)$. On dit que l est un point fixe de f . En conséquence il faudra faire une recherche de l'ensemble des points fixes de f et pour cela étudier la fonction $x \mapsto f(x) - x$.

3.8.1 Le cas f croissante

En particulier si f est croissante, on a la proposition suivante

3.9. EXERCICES ET SOLUTIONS

Proposition 3.17.

Soit u_n une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est croissante, alors la suite u_n est monotone. Plus précisément

- a)- Si $u_0 \geq u_1$, la suite u_n est croissante.
b)- Si $u_0 \leq u_1$, la suite u_n est décroissante.

Et donc dans le cas (a) la suite u_n converge ssi elle est majorée, sinon elle tend vers $+\infty$. De même, dans le cas (b) la suite u_n converge ssi elle est minorée, sinon elle tend vers $-\infty$.

Exemple 3.18. Soit la suite numérique définie par $u_0 = 1, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$. La fonction correspondante est ici $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, son domaine de définition est \mathbb{R} et la suite est donc bien définie. Il est d'autre part quasi-evident que tous les termes u_n sont strictement positifs. Le sens de variation de f sur \mathbb{R}_+ est donc suffisant. f étant manifestement croissante sur \mathbb{R}_+ nous pouvons en conclure que u_n est monotone. Comme $u_1 = \sqrt{2} > u_0$ la suite est croissante. Si la suite u_n converge, sa limite l doit vérifier $l = \sqrt{1 + l^2}$. Or l'équation $l^2 = 1 + l^2$ n'a pas de solutions dans \mathbb{R}_+ , et ainsi u_n ne converge pas. Comme elle est croissante, nous en déduisons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3.9 Exercices et solutions

Exercice 3.19. Quelle est la nature des suites suivantes :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad u_n = n^2 \quad \text{et} \quad u_n = \log \frac{n+1}{n^2+1}$$

Exercice 3.20. En utilisant la définition, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$$

Exercice 3.21. Considérons la suite u_n définie sur \mathbb{N}^* par

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Montrer que u_n est décroissante et conclure.

Exercice 3.22. Montrer que les suites u_n et v_n sont adjacentes dans les deux cas suivant :

- 1) $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$
2) $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad u_0 < v_0.$

Exercice 3.23. Montrer que la suite

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

n'est pas de Cauchy.

3.9. EXERCICES ET SOLUTIONS

Exercice 3.24. Vérifier l'égalité $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$. Appliquer-la à $x = 2, 3, \dots, n$. En déduire une expression simple de $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2} + \dots + \frac{1}{n(n-1)}$ et trouver sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3.25. Retrouver vous-même, ou à défaut relisez dans un livre de terminale, quelle est la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $u_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n, a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.26. Soit $u_0 = 1$ et d'une manière générale, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$. En additionnant membre à membre une tour d'égalité, exprimer u_{n+1}^2 en fonction de n . Déduire ensuite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ grâce à l'exercice précédent.

Exercice 3.27. Montrer que

- 1) Toute suite de Cauchy est bornée.
- 2) Toute suite de Cauchy est convergente.

Solutions

Exercice 3.19.

$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et u_n est convergente.

$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$ et alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et u_n est convergente.

$u_n = n^2, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors u_n est divergente.

$u_n = \ln \frac{n+1}{n^2+1}$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, alors u_n est divergente.

Exercice 3.20.

Posons $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Soit $\epsilon > 0$. Si $|u_n - 0| < \epsilon$ alors $\frac{1}{n} < \epsilon$ donc $n > \frac{1}{\epsilon}$. Alors il suffit de prendre $n_0 = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$ l'inégalité de la définition est satisfaite.

Posons $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$,

$$|u_n - 2| = \left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2n+1-2n-2}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$$

et $\frac{1}{n+1} < \epsilon$ veut dire $n+1 > \frac{1}{\epsilon}$ et $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$. Il suffit de prendre $n_0 = E(\frac{1}{\epsilon} - 1) + 1$ pour que l'inégalité sera satisfaite.

Exercice 3.21.

On a $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ et u_n sera une suite de Cauchy si on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq n_0, q \geq n_0 \text{ tq. } |u_p - u_q| < \epsilon.$$

Pour $p = 2n$ et $q = n$ on a

$$|u_p - u_q| = \left| \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right| \geq \left| \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n}$$

D'où l'existence de $\epsilon = \frac{1}{2}$ pour qui la définition n'est pas valable. Alors u_n n'est pas de Cauchy.

3.9. EXERCICES ET SOLUTIONS

Exercice 3.22.

a)- On a $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$. Il est clair que la suite u_n est croissante (u_{n+1} est obtenue en ajoutant $\frac{1}{(n+1)!}$ à u_n) et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$ car $0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n}$. De plus on a $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0$. Par conséquent la suite v_n est décroissante, donc les suites u_n et v_n sont adjacentes

b)- On a $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}$ avec $u_0 < v_0$. Effectuons l'hypothèse de récurrence $0 \leq u_n < v_n$. Alors u_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et v_n , par conséquent $u_n < u_{n+1} < v_n$. De même v_{n+1} est la moyenne géométrique de u_{n+1} et v_n , donc $u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$. De l'hypothèse $u_n < v_n$ nous avons donc déduit : $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$, ceci prouve que la suite u_n est strictement croissante et que la suite v_n est strictement décroissante. De plus $u_0 < u_n < v_n < v_0$. Ces suites sont donc bornées et par conséquent convergentes. Notons l la limite de la suite u_n et l' celle de la suite v_n . De la relation $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, on déduit que $l = \frac{l+l'}{2}$ i.e. $l = l'$. Ces deux suites sont donc adjacentes.

Exercice 3.23.

Comme $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$ alors pour $n > 0$ on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = -\frac{3n+2}{n(2n+1)(2n+2)} < 0.$$

Donc u_n est strictement décroissante. Cette suite étant manifestement minorée par 0, on en déduit qu'elle est convergente.

Exercice 3.24.

On a $\frac{1}{n(n-1)} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$ Alors

$$u_n = \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} = \left(-\frac{1}{2} + 1\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

et alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Exercice 3.25.

Comme $u_n = 1 + a + \dots + a^n$ alors $au_n - u_n = a + a^2 + a^3 + \dots + a^n + a^{n+1} - u_n$, d'où $au_n - u_n = a^{n+1} - 1$ et alors pour $a \neq 1$ on a $u_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. Ainsi

$a = 0$, $u_n = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

$|a| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$ et alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1-a}$

$|a| \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 3.26.

On a $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$ alors $u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{1}{2^n}$. Ainsi

$$u_1^2 - u_0^2 = 1, \quad u_2^2 - u_1^2 = \frac{1}{2}, \quad u_3^2 - u_2^2 = \frac{1}{2^2}, \dots$$

d'où

$$(u_1^2 - u_0^2) + (u_2^2 - u_1^2) + \dots + (u_{n+1}^2 - u_n^2) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

3.9. EXERCICES ET SOLUTIONS

Alors $u_{n+1}^2 - u_0 = \frac{1-2^{-1-n}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - 2^{-n}$ et $u_{n+1}^2 = 3 - 2^{-n}$ et donc $u_{n+1} = \sqrt{3 - 2^{-n}}$, enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Exercice 3.27.

Soit u_n une suite de Cauchy et choissant par exemple $\epsilon = 1$. Il existe donc un rang n_0 tel que $\forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq n_0, q \geq n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| < 1$. En particulier cette inégalité est vraie pour tout $p > n_0$ et $q = n_0$. On donc $\forall p \geq n_0, |u_p - u_{n_0}| < 1$, ie. $u_{n_0} - 1 < u_p < u_{n_0} + 1$. La suite u_n est donc bornée, puisque minorée par $u_{n_0} - 1$ et majorée par $u_{n_0} + 1$. Il en est de même pour la suite u_n , les premiers termes peuvent influencer sur les bornes supérieure et inférieure, mais pas sur le caractère borné de la suite, d'où le résultat désiré.

Chapitre 4

FONCTIONS DERIVABLES

4.1 Introduction

Après les notions de fonction, de limite et de continuité, on s'intéresse maintenant à la dérivabilité d'une fonction.

Définition 4.1.

On dit que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable au point $a \in \mathbb{R}$, si le rapport

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers a . Cette limite s'appelle alors la dérivée de f en a et se note traditionnellement $f'(a)$.

Proposition 4.2.

Si une fonction f définie sur un voisinage de a est dérivable en ce point. La représentation graphique de f , dans un repère quelconque admet au point A de coordonnées $(a, f(a))$ une tangente dont la pente est égale à $f'(a)$. Cette droite a donc pour équation dans le repère considéré

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Nous allons maintenant donner quelques généralisations simple de ces définitions afin de s'adapter aux diverse situations géométriques.

Définition 4.3.

Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ où V est un voisinage à droite (resp. à gauche) du point a . Si le rapport $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à droite (resp. à gauche) en a . Nous noterons dans ce cas :

$$f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \left(\text{resp. } f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$

4.2. PROPRIÉTÉS DE LA DÉRIVATION

Ces notions de gauche et de droite sont extrêmement importantes pour étudier des fonction f qui ne sont pas définies que d'un côté d'un point a , ou bien dans le cas où $f(x)$ est définie par des formules différentes selon que x se trouve à gauche ou à droite d'un certain point a . On parle alors de demi-tangente à droite ou à gauche pour la représentation graphique de la fonction considérée. Le cas où il existe une dérivée à droite et une dérivée à gauche différentes en un point correspond géométriquement à ce que l'on appelle un point anguleux sur la représentation graphique de f .

Proposition 4.4.

Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ où V est un voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante :
 f dérivable en $a \Leftrightarrow f$ est dérivable à gauche et à droite en a et

$$f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a).$$

4.2 Propriétés de la dérivation

Théorème 4.5.

Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ où V est un voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Si f est dérivable au point a , alors f est continue en ce point.

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de a , à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que f et g sont dérivables en a alors :

- a)- $f + g$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- b)- Pour tout λ réel, λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.
- c)- fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- d)- Si $g(a) \neq 0$, on peut trouver un sous voisinage W de V sur lequel g ne s'annule jamais et alors $\frac{f}{g} : W \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

En particulier

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Dérivation des fonctions composées

Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ où V est un voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Soit $g : W \rightarrow \mathbb{R}$ où W est un voisinage de $f(a)$. On suppose en outre que $f(V) \subset W$ pour que la composée $g \circ f$ ait un sens sur V . Alors dans le décor ci-dessus, si f est dérivable en a et g dérivable en $f(a)$, la composée $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a).$$

4.2. PROPRIÉTÉS DE LA DÉRIVATION

Dérivation d'une fonction réciproque

Théorème 4.6. *Si f est une bijection et dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors la fonction réciproque est dérivable en a et on a :*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \text{ ou } (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)},$$

où $b = f(a)$.

Démonstration . On a

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \left(\frac{y - b}{f^{-1}(y) - a} \right)^{-1} = \left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} \right)^{-1}.$$

Comme f^{-1} est continue en b , alors $\lim_{y \rightarrow b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$. D'où

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On sait que $f'(a) \neq 0$; alors

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Ainsi f^{-1} est dérivable en b et on a

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}.$$

Exemple 4.7. *La fonction arcsin est dérivable sur $] - 1 \ 1[$; elle est la fonction réciproque de la fonction sin de $[-1 \ 1]$ dans $[-\frac{\pi}{2} \ \frac{\pi}{2}]$. On a*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Mais $\cos^2(\arcsin) = 1 - \sin^2(\arcsin) = 1 - x^2$. Enfin on obtient

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

4.2.1 Fonctions de classe \mathcal{C}_1

Définition 4.8.

Soit I un intervalle, on dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 si on a

- a)- f est dérivable sur I
- b)- f' est continue sur I .

4.3. PROPRIÉTÉS GLOBALES

Dérivation et ordre

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} .

- a)- Si f est constante sur I alors $f' = 0$.
- b)- Si f est croissante sur I alors $f' \geq 0$.
- c)- Si f est décroissante sur I alors $f' \leq 0$.

Formule de Leibniz

Une fonction f admet une dérivée d'ordre n (qu'on peut écrire $f^{(n)}$) si elle est dérivable n fois et on écrit

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et n un entier naturel quelconque. Si u et v sont n dérivables en un point a de I , le produit uv l'est également et l'on a :

$$(uv)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)}(a)v^{(n-k)}(a);$$

avec

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ et } n! = n(n-1)\cdots 1.$$

4.3 Propriétés globales

4.3.1 Théorème de Rolle

Lemme 4.9.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I non vide. Si f passe par un extremum en un point c de I , alors $f'(c) = 0$.

Démonstration. On suppose que c est un maximum local. Alors pour x au voisinage de c on a $f(x) \leq f(c)$; comme f est dérivable alors $\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$ et $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$. Mais on a $\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ et $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$. D'où $0 \leq f'(c) \leq 0$, et enfin $f'(c) = 0$. De la même manière, on obtient le même résultat si c est un minimum local.

Théorème 4.10. (Théorème de Rolle)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ avec $a \neq b$. Nous supposons vérifiées les hypothèses suivantes :

- a)- f est continue sur $[a, b]$
- b)- f est dérivable sur $]a, b[$
- c)- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe au moins un point c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

4.3. PROPRIÉTÉS GLOBALES

Démonstration . La continuité de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ implique que f est bornée et atteint ses bornes, autrement dit, il existe $m \leq M \in [a; b]$ tels que $\forall x \in [a; b]$, on $m \leq f(x) \leq M$. D'après le lemme précédent il existe c dans $]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

1ère généralisation

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ dérivable sur $]a, +\infty[$ vérifiant de plus $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Alors il existe au moins un point c de $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

2 ème généralisation

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si f s'annule en n points distincts de $]a, b[$, $n \geq 2$, alors f s'annule en au moins $n - 1$ points distincts de $]a, b[$.

4.3.2 Théorème des accroissements finis et formule de Taylor

Théorème 4.11.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$ avec $a \neq b$. Nous supposons vérifiées les hypothèses suivantes : f est continue sur $[a, b]$ et f dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe au moins un point c de $]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Démonstration . On a f continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$. On considère g la fonction, définie aussi sur $[a; b]$, pour tout $x \in [a; b]$,

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

g est donc aussi continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ et $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. De plus, on a $g(a) = 0$ et $g(b) = 0$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction g , ce qui permet de déduire l'existence d'un élément c de $]a; b[$ tel que $g'(c) = 0$ et alors $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Généralisation

Soient f et g deux fonctions vérifiant les hypothèses du Théorème 4.11 sur l'intervalle $[a, b]$. Alors si $\forall x \in]a, b[, g'(x) \neq 0$, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

4.3. PROPRIÉTÉS GLOBALES

Application

Montrons que

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log x < \frac{1}{x}.$$

Il est possible de démontrer ce résultat en étudiant les deux fonctions u et v définies par $u(x) = \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x}$ et $v(x) = \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x+1}$. Mais ceci est relativement long et particulièrement inélégant. Comme la fonction \log est indéfiniment dérivable et continue sur $]0, +\infty[$, les hypothèses du Théorème 4.11 sont vérifiées sur l'intervalle $[x, x+1]$ et donc

$$\exists c \in]x, x+1[, \log(x+1) - \log x = (x+1-x)(\log)'(c) = \frac{1}{c}$$

mais $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ ce qui achève la preuve.

La règle de l'Hôpital

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage I de a . On suppose que f et g sont continues sur $I \setminus \{a\}$. On suppose en outre que $f(a) = g(a) = 0$ et que $\forall x \in I \setminus \{a\}, g'(x) \neq 0$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

4.3.3 Formules de Taylor

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, $a \neq b$, et n un entier naturel quelconque. f est dite de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$ si elle est n fois dérivable et sa dérivée n -ième est continue.

Théorème 4.12. *On suppose que f vérifie les hypothèses suivantes :*

1) f est de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$.

2) $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

La quantité $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ est appelée le reste de Lagrange. Comme pour la formule des accroissements finis, il est d'usage de poser $b = a + h$ et ainsi $c \in]a, b[$ permet d'écrire $c = a + \theta h$ avec $0 < \theta < 1$. Par conséquent, le décor restant inchangé, Ainsi on obtient la **formule de Taylor-Mac Laurin** :

$$\exists \theta \in]0, 1[, f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

4.4. DÉRIVATIONS DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES ET HYPERBOLIQUES

Si f est de classe \mathcal{C}^n sur $[0, x]$ on aura la **formule de Mac Laurin** suivante

$$\exists \theta \in]0, 1[, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x).$$

Ce résultat découle de la formule de Taylor-Mac Laurin ; en prenant $a = 0$ et $h = x$.

4.4 Dérivations des fonctions trigonométriques et hyperboliques

La fonction sin est dérivable, et sa dérivée est la fonction cos. La fonction cos est dérivable et sa dérivée est l'opposé de la fonction sin. La fonction tan est dérivable là où elle est définie et sa dérivée est la fonction $1 + \tan^2$.

On rappelle que les fonctions sinh et cosh sont données par $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Comme on a $(e^x)' = e^x$, ainsi $(e^{-x})' = -e^{-x}$. Alors on montre facilement que

$$\sinh'(x) = \cosh x \text{ et } \cosh' x = \sinh x.$$

La fonction tangente hyperbolique tanh est définie par $\tanh = \frac{\sinh x}{\cosh x}$. Alors

$$\tanh' x = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x.$$

Mais on a

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = 1$$

Alors on aura aussi

$$\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Par ailleurs de la même manière on calcule la dérivée de la fonction cotangente hyperbolique coth ; qui donnée par $\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x}$.

$$\coth' x = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

4.5 Exercices et solutions

Exercices

Exercice 4.13. En utilisant la notion de rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, calculer les dérivées en $a \in \mathbb{R}$, si elles existent des fonctions suivantes

- 1) $f(x) = \lambda$ constante
- 2) $f(x) = x$

4.5. EXERCICES ET SOLUTIONS

- 3) $f(x) = x^2$
 4) $f(x) = x^n$
 5) $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice 4.14. On suppose que $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, où V est un voisinage de a est telle que $\forall x \in V, f(x) \geq f(a)$. Montrer que si f est dérivable au point a alors $f'(a) = 0$.

Exercice 4.15. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes ainsi que l'ensemble des points où celles-ci sont dérivables. Calculer enfin les dérivées correspondantes.

- 1) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$
 2) $f(x) = \arccos \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$
 3) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$
 4) $f(x) = x \log x - x$
 5) $f(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{1+x}$.

Exercice 4.16. 1) Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} au point x_0 . Calculer $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0}$.
 2) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, trouver la dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ au point a et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$.

Exercice 4.17. Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.
 2) Montrer que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 4.18. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ .

Exercice 4.19. Montrer que la dérivée n^{me} de la fonction sinus au point x peut s'écrire $\sin(x + \frac{n\pi}{2})$ et que la dérivée n^{me} de la fonction cosinus au point x peut s'écrire $\cos(x + \frac{n\pi}{2})$.

Exercice 4.20. Montrer que la fonction $f(x) = x^2 \sin x$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et calculer $f^{(n)}$, pour tout entier n (utiliser la formule de Leibniz.)

Exercice 4.21. Appliquer la règle de l'Hôpital pour calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1} u(t) dt$$

4.5. EXERCICES ET SOLUTIONS

Exercice 4.22. Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que f ne s'annule pas sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(a)}{f(b)} = \exp \left[(a-b) \frac{f'(c)}{f(c)} \right].$$

Solutions

Exercice 4.13.

$f(x) = \lambda$ est bien définie sur \mathbb{R} . On a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\lambda - \lambda}{x - a} = 0$, $f'(a) = 0$

$f(x) = x$, alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1$ et donc $f'(a) = 1$

$f(x) = x^2$ alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x + a$, d'où $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a$.

$f(x) = x^n$, comme

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{(x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})}{x - a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = a^{n-1} + \dots + a^{n-1} = na^{n-1} = f'(a)$.

$f(x) = \frac{1}{x}$ et $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \frac{\frac{a-x}{ax}}{x-a} = -\frac{1}{ax}$ avec $a, x \in \mathbb{R}^*$ et alors $f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(-\frac{1}{ax} \right) = -\frac{1}{a^2}$

Exercice 4.14.

On a $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in V$ et $\forall x \in V : f(x) \geq f(a)$. Comme f est dérivable en a alors

$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ hors que si $x < a : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$ donc

$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$ et si $x > a : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$. D'où

$0 \leq f'(a) \leq 0$ et alors $f'(a) = 0$.

Exercice 4.15.

1). On a $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$. Comme $\arcsin x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ si $x \in [-1, 1]$ alors $x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$ D'où $def(f) = [-1, 1]$.

Les fonctions x , $\arcsin x$ et $\sqrt{1 - x^2}$ sont continues et dérivables en tout point de $] -1, 1[$. Alors $f'(x) = \arcsin x + (\arcsin)'(x)x - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}$. \arcsin est la fonction réciproque de \sin alors $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y}$ avec $y = \arcsin x$. D'où

$$\begin{aligned} f'(x) &= \arcsin x + \frac{x}{\cos(\arcsin x)} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \arcsin x + \frac{x}{1 - \sin^2(\arcsin x)} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \arcsin x. \end{aligned}$$

2). $f(x) = \arccos \frac{x^{2n-1}}{x^{2n+1}}$, pour $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq \frac{x^{2n-1}}{x^{2n+1}} \leq 1$. Alors $def(f) = \mathbb{R}$. $\frac{x^{2n-1}}{x^{2n+1}}$ est continue dérivable sur \mathbb{R} et $\arccos x$ est continue dérivable sur $] -1, 1[$ et

4.5. EXERCICES ET SOLUTIONS

$\frac{x^{2n}-1}{x^{2n+1}} = -1$ pour $x = 0$ Alors f est dérivable en \mathbb{R}^* et après un simple calcul on obtient $f'(x) = \frac{2nx^{2n-1}}{|x|(x^{2n+1})}$.

3). $f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$, Comme $-1 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 1 \Rightarrow -x^2 - 1 \leq 2x \leq x^2 + 1$ alors $(x-1)^2 \geq 0$ et $(x+1)^2 \geq 0$ donc $def(f) = \mathbb{R}$.
 $x \rightarrow \frac{2x}{x^2+1}$ est dérivable sur \mathbb{R} ainsi que $x \mapsto \arcsin x$ est dérivable sur $] -1 1[$. Et on a

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}} = \frac{2(1-x^2)(1+x^2)}{(x^2+1)|1-x^2|}$$

d'où $f'(x) = 2\frac{1-x^2}{|1-x^2|}$.

4). $f(x) = x \ln x - x$, f est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}^* . Et on a $f'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.

5). $f(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{1+x} = \exp(-(1+x)\ln(1+x^2))$. est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} et on a

$$f'(x) = -\ln(1+x^2) - \frac{2x(1+x)}{1+x^2}.$$

Exercice 4.16.

1). On a $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - xf(x) + xf(x) - x_0f(x)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x(f(x_0) - f(x)) + f(x)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x) - x \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= f(x_0) - x_0f'(x_0). \end{aligned}$$

2). $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \end{aligned}$$

d'où $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ et enfin $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x-a} = \sqrt{a} - \frac{a}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{2}$.

Exercice 4.17.

1). Cas $x \neq 0$, il est clair que f est dérivable en x , comme cocktail de bonnes et braves fonctions dérivables et à l'aide du théorème du produit et de celui de la composition des fonctions dérivables on obtient $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$

4.5. EXERCICES ET SOLUTIONS

Cas $x = 0$, $\forall x \neq 0$, $r(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x \sin \frac{1}{x}$; of $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$ et donc $0 \leq |r(x)| \leq |x|$. Par encadrement il vient donc $\lim_{x \rightarrow 0} r(x) = 0$. f est bien dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
 2). Si f' avait une limite l quand x tend vers 0, comme $x \sin \frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on en déduirait $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} = -l$, ce qui est absurde.

Exercice 4.18.

On a $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 1$ si $x = 0$. Il est clair que f est continue sur \mathbb{R}^* . Par contre en 0 on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos 0 = 1$ et donc f est aussi continue en 0.

D'autre part si $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. Et si $x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 - x}{x^2} = 0.$$

Il reste à montrer que f' est continue en 0, car pour $x \neq 0$, f' est continue en x . A l'aide de la règle de l'Hôpital on montre que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$.

Exercice 4.19.

$f(x) = \sin x$ alors $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$. Ainsi on a $f(x) = \sin(x + 0\frac{\pi}{2})$, $f'(x + \frac{\pi}{2})$ et $f^{(2)}(x) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$. On suppose que $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ et on montre que $f^{(n+1)}(x) = \sin(x + (n+1)\frac{\pi}{2})$. On a $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$ et alors $f^{(n+1)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2}) = \sin(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + (n+1)\frac{\pi}{2})$
 2). $g(x) = \cos x$ de la même manière on montre que $g^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$

Exercice 4.20.

Les fonction $g(x) = x^2$ et $h(x) = \sin x$ sont de classe \mathcal{C}^∞ , alors $f(x) = x^2 \sin x$ est de classe \mathcal{C}^∞ . D'après la formule de Leibniz $f^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)} h^{(n-k)}$. Et comme $g^{(x)}(x) = x^2$, $g^{(2)}(x) = 2x$, $g^{(2)}(x) = 2$ et $g^{(k)}(x) = 0$ pour $k \geq 3$. Et d'après l'exercice précédent 4.19 on a $h^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$ et ensuite on obtient

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) \\ &= g(x) h^{(n)}(x) + n g^{(1)}(x) h^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} g^{(2)}(x) h^{(n-2)}(x) \\ &= x^2 \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 2nx \sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + n(n-1) \sin\left(x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Exercice 4.21.

1)- Posons $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = x^3$. On a $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 - \cos x}{3x^2}$, $\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{\sin x}{6x}$ et $\frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{\cos x}{6}$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{1}{6}$. En remontant on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$. Ce résultat est obtenu en appliquant trois fois la règle de l'Hôpital, modulo les vérifications triviales des hypothèses.

2)- Posons $f(x) = n \int_0^x t^{n-1} u(t) dt$ et $g(x) = x^n$, on obtient $f'(x) = nx^{n-1} u(x)$ et $g'(x) = nx^{n-1}$. Les hypothèses de la règle de l'Hôpital sont vérifiées au voisinage de 0

4.5. EXERCICES ET SOLUTIONS

et on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = u(0)$ car u est continue en 0, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1} u(t) dt = u(0)$.

Exercice 4.21.

f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\forall x \in [a, b], f(x) \neq 0$. Alors la fonction $\ln f(x)$ (On suppose que $f(x) > 0$ sur $[a, b]$) est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors le théorème des accroissements finis est applicable, d'où $\exists c \in]a, b[$ tel que $\ln f(b) - \ln f(a) = (b - a) (\ln f)'(c)$. Ainsi $\ln f(b) - \ln f(a) = (b - a) \frac{f'(c)}{f(c)}$ ou encore $\frac{f(a)}{f(b)} = \exp(a - b) \frac{f'(c)}{f(c)}$.

Chapitre 5

DEVELOPPEMENTS LIMITES

5.1 Introduction aux développements limités

La théorie qui va suivre sera volontairement faite au voisinage de 0. En effet, dans toute étude locale on peut toujours par des changements de variables simples se ramener à ce cas. Indiquons ce qu'il ya lieu de faire si l'on se trouve pas au voisinage de 0.

a)- w est un réel, on pose $h = x - w$ ou $h = w - x$ et il est clair que si x décrit un voisinage de w alors h parcourt un voisinage de 0.

b)- $w = \pm\infty$, on pose alors $h = \frac{1}{x}$ et h parcourt alors encore un voisinage épointé de 0 (eventuellement un voisinage à droite ou à gauche de 0.)

Définition 5.1.

Soit V un voisinage de 0 et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, soit enfin n un entier naturel. On dit que f possède au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n (en raccourci un d.l.n) s'il est possible de trouver un polynôme P_n et une fonction $\epsilon : V \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

a)- $d^\circ P_n \leq n$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$

b)- $\forall x \in \dot{V}, f(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x)$.

Nous noterons $dl_n(V, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur V et admettant au voisinage de 0 un d.l.n.

5.1.1 Commentaires

1) L'ordre d'un développement limité se voit sur le terme correctif $x^n \epsilon(x)$ et non pas sur le degré du polynôme P_n qui peut très bien être strictement inférieur à n . Par exemple $f(x) = x^4 + x^3 \epsilon(x)$ ne représente pas un d.l.4, mais on peut alors écrire $f(x) = x^3(x + \epsilon(x)) = x^3 \epsilon_1(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_1(x) = 0$. C'est à dire que f admet un d.l.3, le polynôme P_3 associé étant le polynôme nul.

2) Il est clair qu'une fonction qui admet un d.l.n possède nécessairement une limite lorsque x tend vers zéro. En effet la partie 2 de la définition (5.1) entraîne que

5.1. INTRODUCTION AUX DÉVELOPPEMENT LIMITÉS

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = P_n(0)$. Nous avons donc déjà un critère permettant de déclarer qu'une fonction n'a pas sûrement de d.l au voisinage de 0.

Par exemple $\log x$, $\frac{1}{x}$, $\sin \frac{1}{x}$ n'ont pas de d.l au voisinage de 0 puisque elles n'admettent pas de limite en 0.

3) Comme toujours, nous prolongerons ϵ par continuité en 0, en posant $\epsilon(0) = 0$. Il sera donc toujours supposé que ϵ est définie sur V et continue en 0. Nous ferons de même pour f en posant $f(0) = P_n(0)$ et par conséquent il pourra nous arriver de ne pas ép pointer nos voisinages.

Dans l'analyse asymptotique, il est recommandé d'utiliser les notations de Landu o et O . Elles sont utilisées de la manière suivante. Soient f et g deux fonctions, alors on a

$$f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow g(x) \neq 0, \text{ pour } x \text{ assez grand et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

et

$$f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \exists c, x_0 \in \mathbb{R}, \text{ tel que } |f(x)| \leq c|g(x)| \text{ pour tout } x \geq x_0.$$

f et g sont équivalente, et on écrit $f \sim g$; cela veut dire que pour x assez grand $g(x) \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Ainsi la définition précédente peut aussi se formuler ainsi : f admet un d.l.n s'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[x]$ tel que $f(x) - P_n(x) = o(x^n)$.

5.1.2 Les cas simples

Soient V un voisinage de 0 et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. On a alors :

- 1) f admet un d.l.0 $\Leftrightarrow f$ admet une limite en 0.
- 2) f admet un d.l.1 $\Leftrightarrow f$ est dérivable en 0. Dans ce cas on a le d.l.1 qui est ;

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x).$$

5.1.3 Unicité de développement limité

Si f admet un d.l.n, le couple (P_n, ϵ) dont la définition affirmant l'existence est unique. On dit alors que P_n est la partie régulière du développement limité de f à l'ordre n . Nous noterons $P_n = \text{reg}_n(f)$.

Conséquence.

Soit f une fonction définie sur un voisinage V de 0 centré en 0 qui admet un d.l.n, on peut donc écrire avec les notations standard :

$$\forall x \in V, f(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x).$$

5.2. THÉORÈME DE TAYLOR-YOUNG

D'où

$$f(-x) = P_n(-x) + x^n \eta(x)$$

, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \eta(x) = 0$.

Si f est une fonction paire, on a pour tout x de V , $f(-x) = f(x)$ et l'unicité de d.l.n entraîne que l'on a $P_n(-x) = P_n(x)$. Le polynôme P_n est également pair, i.e ne contient que des termes de degré pair.

Si f est une fonction impaire, le même raisonnement permet de conclure que la partie régulière de son développement limité ne contient que des termes de degré impair.

5.2 Théorème de Taylor-Young

1ère version.

Soit V un voisinage de 0 et soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n sur V . Alors f admet un développement limité à l'ordre n donné par

$$\forall x \in V, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x^n).$$

2ième version

Soit V un voisinage de 0 et soit f une fonction définie sur V , on suppose seulement l'existence de $f^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors conclusion subsiste, i.e f admet un d.l.n donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x^n).$$

5.2.1 Quelques développements limités usuels

Si sur un voisinage de 0, f est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , les hypothèses du théorème de Taylor-Young sont satisfaites à tout ordre. Cela permet de découvrir nos premiers développements limités.

$$1) e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$2) \ln(1+x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$$

$$3) \sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \begin{cases} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \end{cases}$$

5.3. OPÉRATIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS.

$$4) \cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \begin{cases} o(x^{2n}) \\ o(x^{2n+1}) \end{cases}$$

$$5) \sinh x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \begin{cases} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \end{cases}$$

$$6) \cosh x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \begin{cases} o(x^{2n}) \\ o(x^{2n+1}) \end{cases}$$

$$7) (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-k+1)}{k!} + o(x^n), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Enfin à l'aide des dérivées successives

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \begin{cases} o(x^5) \\ o(x^6) \end{cases}$$

5.3 Opérations sur les développements limités.

Soit $f, g \in DL_n(V, \mathbb{R})$ alors pour tout entier naturel p tel que $p \leq n$, f admet un d.l.p dont la partie régulière s'obtient en enlevant les termes de la partie régulière du d.l.n de f dont le degré dépasse strictement p . On dit que $reg_p(f)$ s'obtient en tronquant au degré p la partie régulière $reg_n(f)$.

La fonction $f + g$ admette un d.l.n dont la partie régulière s'obtient en faisant la somme des parties régulières des d.l de f et g ;

$$Reg_n(f + g) = Reg_n(f) + Reg_n(g).$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f \in DL_n(V, \mathbb{R})$ et on a

$$Reg_n(\lambda f) = \lambda Reg_n(f).$$

La fg admet un d.l.n dont la partie régulière s'obtient en tronquant au degré n le produit des parties régulières de f et g .

Si de plus $g(0) \neq 0$, alors le quotient $\frac{f}{g}$ admet un d.l.n dont la partie régulière est le quotient de la division de la partie régulière de f par celle de g suivant les puissances croissantes à l'ordre n .

Soient V et W deux voisinage de 0. On suppose que g est une fonction de V dans W telle que :

a)- $g(0) = 0$

b)- $g \in dl_n(V, \mathbb{R})$

On suppose enfin que f est une fonction appartenant à $dl_n(V, \mathbb{R})$. Alors la composée $f \circ g$ admet un d.l.n dont la partie régulière s'obtient comme suit :

On compose la partie régulière de f par la partie régulière de g , ce qui donne un

5.3. OPÉRATIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS.

polynôme de degré inférieur ou égal à n^2 qu'il suffit alors de tronquer au degré n .

Enfin si $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ où V est un voisinage de 0. On suppose que f admet un d.l.n et que f est continue sur V . Alors si

$$\forall x \in V, f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

on a

$$\forall x \in V, \int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1}).$$

5.3.1 Les différentes applications des développements limités

A l'aide des DL on peut calculer la limite d'une fonction, la position de la courbe par rapport la tangente en un point et les branches infinies. Plus précisément si f admet en x_0 le DL_n suivant

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o(x^n).$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_0.$$

Les développements limités servent également à l'étude d'une fonction f définie au voisinage d'un point x_0 . Si f admet le DL suivant

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o(x^n),$$

avec $f(x_0) = a_0$, $n \geq 2$ et $a_n \neq 0$. Ainsi l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $A(x_0, a_0)$ est donnée par

$$y = a_0 + a_1(x - x_0).$$

La position de la courbe f dépend de signe de $a_n(x - x_0)^n$. Cette courbe est au dessus de la tangente ssi $a_n(x - x_0)^n \geq 0$, elle au dessous dans le cas contraire. Pour démontrer ce resultat on doit calculer $f(x) - y$ et on a

$$f(x) - y = f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) = a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

En particulier si n est impair, la courbe de f admet un point d'inflexion.

La fonction f admet une droite asymptotique à l'infini d'équation $y = ax + b$ si et seulement si la fonction $x \mapsto f(x) - ax - b$ admet une limite nulle en $+\infty$. Les nombres a et b sont calculés de la manière suivante :

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ et } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

5.4. EXERCICES ET SOLUTIONS.

5.4 Exercices et solutions.

Exercices.

Exercice 5.2. Trouver le d.l.6 de la fonction $\tan x$ au voisinage de 0.

Exercice 5.3. Trouver le d.l.4 au voisinage de 0 de la fonction $\cosh x \ln \cos x$.

Exercice 5.4. Trouver le d.l.4 au voisinage de 0 de la fonction $e^{\cos x}$

Exercice 5.5. Trouver un d.l de la fonction $\tan x$ en utilisant l'intégration.

Exercice 5.6. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x) - \tan x}{\sin x - \tan x}$

Exercice 5.7. Etudier les branches infinies de la fonction $f(x) = xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$

Exercice 5.8. Déterminer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x e^{\frac{1}{1-\sin x}}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x}$.

Exercice 5.9. On suppose que f et g admettent pour développement limités d'ordre 4 à l'origine les polynômes $x - \frac{x^3}{6}$ et $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Trouver le développement limité d'ordre 4 de $g \circ f$. En déduire la limite, lorsque x tend vers 0 de l'expression $\frac{g \circ f(x) - 1 + \frac{x^2}{4}}{x^4}$.

Exercice 5.10. Voici les développements limités d'ordre 5 des fonctions \sin et \cos à l'origine $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ pour la première et $1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24}$ pour la seconde. Trouver le développement limité d'ordre 5 de sinus au point $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Solutions

Exercice 5.2.

Au voisinage de 0, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$. Comme $\cos 0 = 1 \neq 0$, on peut donc appliquer le dl de rapport et on obtient $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$.

Exercice 5.3.

Lorsque x est dans un voisinage de 0, $\cos x$ est dans un voisinage de 1, ie. $\cos x = 1 + u$, où u est dans un voisinage de 0. Ainsi $\ln \cos x$ est alors de la forme $\ln(1 + u)$. On a $u = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ et $\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ d'où $\ln \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$. Et comme $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, alors $\cosh x \ln \cos x = \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$.

Exercice 5.4.

Pour la fonction $x \rightarrow \exp \cos x$ on peut appliquer le résultat de dl de la composée. Puisque $\cos x$ est dans un voisinage de 1, lorsque x est dans un voisinage de 0. On ruse alors en écrivant $e^{\cos x} = ee^{\cos x - 1}$, ce qui nous ramène au problème précédent : $u = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ et $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(x^2)$ (l'ordre 2 suffit) d'où

5.4. EXERCICES ET SOLUTIONS.

$e^{\cos x - 1} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$ et ainsi $e^{\cos x} = e - \frac{ex^2}{2} + \frac{ex^4}{6} + o(x^4)$.

Exercice 5.5.

Pour $x \rightarrow \tan x$ on utilise la propriété $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$. Nous savons que $\tan x = x + o(x)$, d'où $\tan^2 x = x^2 + o(x^2)$. Par conséquent $1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + o(x^2)$ et $\tan x = \int_0^x (1 + \tan^2 t) dt = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Rien nous empêche de recommencer : $1 + \tan^2 = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$ et $\tan x = x + \frac{x^3}{x} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$. Et si on recommence une autre fois, on obtient $\tan x = x + \frac{x^3}{x} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$.

Exercice 5.6.

Pour calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x) - \tan x}{\sin x - \tan x}$, nous allons chercher un équivalent du numérateur ainsi qu'un équivalent du dénominateur. Chacun d'eux étant une différence, il est nécessaire de passer par l'intermédiaire de leurs développements limités. Nous savons que $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et que $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. D'où $\sin x - \tan x = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$ (l'ordre 3 étant donc suffisant et indispensable pour que la partie régulière ne se réduise pas au polynôme nul).

Pour obtenir un équivalent du numérateur, nous écrivons $\sin x = x + o(x^2)$ et $\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Le théorème de composition s'applique et donne $\ln(1 + \sin x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Comme $\tan x = x + o(x^2)$, on en déduit $\ln(1 + \sin x) - \tan x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ (ici aussi l'ordre 2 était indispensable et suffisant). Alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x) - \tan x}{\sin x - \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}$ et ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1 + \sin x) - \tan x}{\sin x - \tan x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \sin x) - \tan x}{\sin x - \tan x} = +\infty$.

Exercice 5.7.

On $f(x) = xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$. Posons $X = \frac{1}{x}$ et étudions $X \rightarrow Xf(\frac{1}{X})$ au voisinage de 0. On a $Xf(\frac{1}{X}) = \exp(\frac{2}{\frac{1}{X^2}-1}) = e^{\frac{2X}{1-X^2}}$. A l'ordre 2 on a $\frac{2X}{1-X^2} = 2X + o(X^2)$ (car la fonction est impaire) et $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Le théorème de composition s'applique et donne $\exp(\frac{2}{\frac{1}{X^2}-1}) = 1 + 2X + 2X^2 + o(X^2)$, soit en revenant à la variable initiale : $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$, ou encore $f(x) = x + 2 + \frac{2}{x} + o(\frac{1}{x})$. Par conséquent la droite $y = x + 2$ est asymptote oblique des deux branches infinies (en $+\infty$ et $-\infty$). La courbe étant au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ et au-dessous de l'asymptote au voisinage de $-\infty$.

Exercice 5.8.

1). Pour calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \times e^{\frac{1}{1-\sin x}}$, effectuons le changement de variable $h = x - \frac{\pi}{2}$

5.4. EXERCICES ET SOLUTIONS.

ie. $x = h + \frac{\pi}{2}$, afin que h décrive un voisinage de 0

$$\begin{aligned} \cos x \times e^{\frac{1}{1-\sin x}} &= \cos\left(h + \frac{\pi}{2}\right) \exp\left(\frac{1}{1 - \sin\left(h + \frac{\pi}{2}\right)}\right) \\ &= -\sin h \exp\left(\frac{1}{1 - \cos h}\right) \\ &= -\sin h \exp\left(\frac{1}{2 \sin^2 \frac{h}{2}}\right) \\ &= -\sin \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2} \exp\left(\frac{1}{2 \sin^2 \frac{h}{2}}\right) \simeq -\sin \frac{h}{2} \exp\left(\frac{1}{2 \sin^2 \frac{h}{2}}\right). \end{aligned}$$

Posons alors $X = \frac{1}{\sin \frac{h}{2}}$ et séparons les deux cas $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$ et $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$. On est alors

amené à rechercher $\lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{2}{X} e^{\frac{X^2}{2}}$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} -\frac{2}{X} e^{\frac{X^2}{2}}$ et on déduit alors

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \cos x e^{\frac{1}{1-\sin x}} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x e^{\frac{1}{1-\sin x}} = +\infty.$$

2). On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, par conséquent $\frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x} \simeq \frac{1}{x} \left(\frac{e^x - 1}{x} - 1\right)$ ainsi $\frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x} \simeq \frac{e^x - 1 - x}{x}$. Pour obtenir un équivalent du numérateur, effectuons un dl2 de e^x c.à.d $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ D'où $e^x - 1 + x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. La limite cherchée est donc $\frac{1}{2}$.

Exercice 5.9.

Puisque le polynôme $x - \frac{x^3}{6}$ s'annule à l'origine, nous avons bien $f(0) = 0$ et nous pouvons appliquer le théorème des fonctions composées. Le développement cherché est donc le polynôme $1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{24} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4$. Or nous avons $\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \dots$, $\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 = x^4 + \dots$ le développement cherché est donc $1 - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{x^4}{24} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4$. Nous pouvons écrire donc $g \circ f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^4\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = \epsilon(0) = 0$. Il vient donc

$$\frac{g \circ f(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^4\epsilon(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \frac{5}{24} + \epsilon(x)$$

et finalement la limite est $\frac{5}{24}$.

Exercice 5.10.

Posons $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Le développement limité qu'on cherche est celui de f à l'origine. $f(x) = \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$. Le développement limité est donc $\frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)$ que l'on ordonne pour mieux présenter le résultat : $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}x^2}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{\sqrt{3}x^4}{48} + \frac{x^5}{240}$.

Chapitre 6

CALCUL INTEGRAL

6.1 La primitivations des fonctions.

Définition 6.1.

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I . On dit que f est primitive sur I si l'on peut trouver une fonction F définie et dérivable sur I telle que $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$. Une telle fonction F s'appelle alors une primitive de f sur I .

La primitivation apparait donc en quelque sorte comme l'opération inverse de la dérivation.

Une question facile : Si f possède une primitive F sur I , cette primitive est-elle unique ?

La réponse est bien évidemment non, car il est clair que toutes les fonctions $G(x) = F(x) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ une constante sont encore des primitives de f et d'ailleurs si G est une autre primitive de f sur I alors l'égalité $G' = f$ entraîne que l'on a $(G - F)' = 0$, comme $G - F$ est continue sur l'intervalle I , $G - F$ est une constante.

Bref, si la fonction f possède sur l'intervalle I une primitive F , alors elle en possède une infinité qui se déduisent de F par addition d'une fonction constante sur I .

On admet le théorème suivant :

Théorème 6.2. (Théorème de Darboux(1875))

Toute fonction continue sur un intervalle I possède au moins une primitive sur I .

6.2 Intégration des fonctions continues

Définition 6.3.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ avec $a \neq b$. Soit F une primitive quelconque de f sur cet intervalle. Alors le nombre $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive F choisie et s'appelle l'intégrale de f sur $[a, b]$. et le note

$$\int_a^b f(t)dt$$

6.2. INTÉGRATION DES FONCTIONS CONTINUES

La différence $F(b) - F(a)$ est souvent notée $[F(t)]_a^b$ et on lit alors $F(t)$ à prendre entre a et b .

Remarque 6.4.

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a, b]), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_a^b (\lambda f + g)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Mais il n'existe pas de formule général reliant l'intégrale $\int_a^b f(x)g(x) dx$ aux intégrales $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^b g(x) dx$

6.2.1 La relation de Chasles

Soient a, b et c trois nombres réels. On note m le plus petit (resp. M le plus grand) de ces trois nombres. Soit $f : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On a alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

6.2.2 Intégrale et ordre.

Soit une intégrale $\int_a^b f(x) dx$. Nous disons que les bornes sont dans le bon sens si $a \leq b$ et dans le mauvais sens si $a > b$.

Proposition 6.5.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$

a)- Si f est positive et si les bornes sont dans le bon sens alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

b)- Si f est strictement positive et si les bornes sont strictement dans le bon sens, alors $\int_a^b f(x) dx > 0$.

6.2.3 Conséquences

Soient f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

Si $f \leq g$ et $a \leq b$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Si $f < g$ et $a < b$ alors $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$

Si $a \leq b$ alors $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

En particulier si on pose $M = \max_{[a, b]} f$ on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b - a).$$

On termine cette section par le théorème de la moyenne suivant : Soient a, b deux nombres réels, f une fonction continue sur $[a, b]$ et g une fonction continues et de signe constant sur $[a, b]$. Alors :

1) $\exists c \in]a, b[, \int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$.

2) En particuliers $\exists d \in [a, b], \int_a^b f(x) dx = (b - a)f(d)$

6.3 Techniques de calcul des primitives

Dans ce cette section expose les techniques de calcul des intégrales. En l'occurrence l'intégration par partie, le changement de variable et la méthode de calcul des intégrales des fonctions rationnelles.

6.3.1 Intégration par parties et changement de variable

Le théorème suivant donne la formule d'intégration par partie.

Théorème 6.6.

Soient f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et telles que $f'g$ et fg' soient continues sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Si f et g sont classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$ on a alors

$$\int_a^b f(x)g^{(n)}(x) = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(k)}(x)g^{(n-k-1)}(x) \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(x)g(x)dx.$$

La méthode de changement de variable est donnée par le théorème qui suit.

Théorème 6.7.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ telle que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$. Alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)du.$$

a)- Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ une application périodique, T étant sa période. On a

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

b)- Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $f \in \mathcal{C}[-a, a]$:

Si f est paire on a $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$ d'où $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.

Si f est impaire on a $\int_{-a}^0 f(x)dx = - \int_0^a f(x)dx$ d'où $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

6.3.2 Intégration des développements limités

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} contenant le point x_0 . On suppose que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 . Alors

6.3. TECHNIQUES DE CALCUL DES PRIMITIVES

toute primitive F de f sur I admet un développement d'ordre $n + 1$ au voisinage de x_0 . Plus précisément si $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$ on a

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} + o((x - x_0)^{n+1})$$

6.3.3 Notion de suite définie par une intégrale

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables sur un segment $[a, b]$, considérons la suite $\int_a^b f_n(x) dx$.

La faute la plus courante consiste à confondre $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ et $\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$.

Exemple 6.8. Soit f_n une suite de fonctions intégrables sur le segment $[0, 1]$ définie par $f_n(x) = 2nx e^{-nx^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Ces fonctions sont de classe infinie sur $[0, 1]$
a)- Il est clair que pour tout x compris entre 0 et 1 on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ et donc

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

b)- Il est clair aussi que $x \mapsto -e^{-nx^2}$ est une primitive de la fonction à intégrer et donc

$$\int_0^1 f_n(x) dx = [-ne^{-nt^2}]_0^1 = 1 - e^{-n},$$

par conséquent $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-n}) = 1$

6.3.4 Formule de Taylor avec reste intégral et tableau des primitives usuelles

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur un intervalle $[a, b]$. Alors

$$\forall x \in [a, b], f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \int_a^x \frac{(x - t)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

6.3.5 Primitives des fonctions rationnelles.

Position du problème

La linéarisation des fonctions rationnelles se fait grâce à la théorie de la décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles.

Nous rappelons qu'une décomposition en élément simples sur \mathbb{R} fait, en général intervenir trois types d'éléments.

6.3. TECHNIQUES DE CALCUL DES PRIMITIVES

1er type : Partie entière.

Celle ci est un polynôme, son traitement ne pose donc aucun problème.

2ème type : Les éléments simples de première espèce.

Ils sont de la forme

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

est mis sous la forme $A(x-a)^{-n}$ se traitent de manière élémentaire. Nous rappelons tout de même les résultats.

$$\int \frac{dt}{(t-a)^n} = \begin{cases} \ln |t-a|, & \text{si } n = 1, \\ \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + c, & n > 1. \end{cases}$$

3ème type : Les éléments simples de second espèce.

Il sont de la forme

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta = p^2 - 4q < 0$. Les rencontres du 3ème type sont peu sympathiques, et c'est là que se posent les problèmes. Nous proposerons alors un traitement en trois phases.

1) La dérivée de $x^2 = px + q$ est évidemment $2x + p$. L'astuce consiste à écrire $Ax + B = \frac{A}{2}(2x + p) + B - \frac{pA}{2}$. La linéarisation donne alors

$$\int^x \frac{At+B}{(t^2+pt+q)^n} dt = \frac{A}{2} \int^x \frac{2t+p}{(t^2+pt+q)^n} dt + \left(B - p\frac{A}{2}\right) \int^x \frac{dt}{(t^2+pt+q)^n}.$$

La première partie de second membre est de la forme $\int^x u^{-n} du$ et par conséquent se traite sans difficultés, en séparant, comme pour les rencontres du 2ème type les cas $n = 1$ et $n > 1$.

L'intérêt de ce premier temps est de ramener au cas d'un numérateur constant pour le traitement de la seconde primitive.

Le passage à la forme canonique.

Nous devons traiter maintenant l'expression $\int^x \frac{dt}{(t^2+pt+q)^n}$ et la première chose à faire est la canonisation du trinôme :

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4}.$$

6.3. TECHNIQUES DE CALCUL DES PRIMITIVES

Comme $\Delta < 0$ on fait le changement de variable suivant $t + \frac{p}{2} = u \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. En effet $(t + \frac{p}{2})^2 = u^2 \frac{-\Delta}{4}$ et donc $x^2 + px + q = (1 - \frac{p}{2}) - \frac{\Delta}{4} = -\frac{\Delta}{4} (u^2 + 1)$. D'autre part $dt = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} du$. On peut donc écrire

$$\int^x \frac{dt}{(t^2 + pt + q)^n} = \alpha \int^{\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}} \frac{du}{(u^2 + 1)^n}$$

α désigne un certain coefficient réel qu'il n'est pas indispensable de connaître par coeur. L'intérêt de ce second temps est de se ramener au trinôme $u^2 + 1$ qui est le plus simple des discriminant négatif.

Le temps de la récurrence

Il ne reste plus qu'à calculer $\int^\lambda \frac{du}{(u^2+1)^n}$ avec $\lambda = \frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}$. Notons alors que si $n = 1$ le résultat fait partie du formulaire de base

$$I_1 = \int^\lambda \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan \lambda + c$$

Ce qui incite à procéder par induction pour calculer $I_n = \int^\lambda \frac{du}{(u^2+1)^n}$. Nous proposons gracieusement deux méthodes permettant de conduire la récurrence.

1). La voie algébrique

Soit $n > 1$, On écrit $I_n = \int^\lambda \frac{(u^2+1)-u^2}{(u^2+1)^n} du$, ce qui donne par linéarité

$$I_n = I_{n-1} - \int^\lambda \frac{u^2 du}{(u^2 + 1)^n}.$$

On fait alors subir à cette dernière intégrale une intégration parties judicieusement choisie ; on pose $f(u) = u$ donc $f'(u) = 1$ et $g'(u) = \frac{u}{(u^2+1)^n}$ donc $g(u) = \frac{1}{2(1-n)(u^2+1)^{n-1}}$ il vient alors

$$\int^\lambda \frac{u^2 du}{(u^2 + 1)^n} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{(1-n)(\alpha^2 + 1)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1}$$

et alors

$$I_n = -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{(1-n)(\alpha^2 + 1)^{n-1}} + \left(1 + \frac{1}{2(1-n)}\right) I_{n-1}$$

6.3. TECHNIQUES DE CALCUL DES PRIMITIVES

2). La voie trigonométrique

Celle-ci s'appuie sur la remarque suivante : Une expression telle que $u^2 + 1$ s'arrange relativement bien si l'on pose $u = \tan \theta$. En effet, $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ et la fonction cosinus a le bon goût du monter au numérateur.

La voie trigonométrique consiste donc en effet à effectuer le changement de variable $\theta = \arctan u$. Il vient dans ce cas $u = \tan \theta$ et $du = \frac{du}{\cos^2 \theta}$ et par conséquent

$$I_n = \int^{\lambda} \frac{du}{(u^2 + 1)^n} = \int^{\arctan \lambda} \cos^{2n-2} \theta d\theta.$$

On est alors ramené à la détermination d'une primitive dite de type Wallis qui se traite encore à l'aide de l'intégrale par parties.

6.3.6 Tableau des primitives usuelles

Quelques primitives usuelles sont données dans le tableau 6.1.

TABLE 6.1 – Primitives usuelles

$f(x)$	$\int f(x)dx$
k	kx
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\sin(ax+b), a \neq 0$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b)$
$\cos(ax+b), a \neq 0$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b)$
$\sinh(ax+b), a \neq 0$	$\frac{1}{a} \cosh(ax+b)$
$\cosh(ax+b), a \neq 0$	$\frac{1}{a} \sinh(ax+b)$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$\tan x$	$-\ln \cos x + c$
$\cot x$	$\ln \sin x + c$
x	$\ln \cosh x + c$
$\frac{1}{x^2+a^2}, a > 0$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, a > 0$	$\arcsin \frac{x}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+h}}$	$\ln x + \sqrt{x^2+h} $
e^x	e^x
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln \left \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right $
$\frac{1}{\cos x}$	$\ln \left \tan \frac{x}{2} \right $
$\ln x$	$x \ln x - x$

6.4 Exercices et solutions

Exercices.

Exercice 6.9. Soit F la fonction définie sur \mathbb{R}^* par

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } x < 0, \\ x^2 + 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Soit G la fonction sur \mathbb{R}^* par $G(x) = x^2$, et soit enfin f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = 2x$. Vérifier que F et G sont deux primitives de f sur \mathbb{R}^* . Conclure.

Exercice 6.10. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

Exercice 6.11. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x dx$$

Exercice 6.12. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$ telle que

$$\forall x \in [a, b], f(a + b - x) = f(x).$$

A l'aide de changement de variable $\varphi : u \mapsto a + b - u$ montrer que l'on a

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

En déduire que l'on a

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Exercice 6.13. Calculer une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$

Exercice 6.14. Calculer une primitive de la fonction $f(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

Exercice 6.15. Trouver les primitives de la fonction $f(x) = \frac{1}{\cos^3 x}$ et de la fonction $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$

Exercice 6.16. Calculer

$$I(x) = \int^x \cos t \ln t \ln t dt$$

Exercice 6.17. Calculer les intégrales suivantes

$$I_n(x) = \int^x (\ln t)^n dt, J_n(x) = \int^x e^{-t} t^n dt, K_n(x) = \int^x t^n \sin t dt, L_n(x) = \int^x t^n \cos t dt$$

Exercice 6.18. Calculer les intégrales suivantes

$$I(x) = \int^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{t+1}}, J(x) = \int^x \frac{dt}{\sqrt{t+1} + \sqrt{1-t}}, K(x) = \int^x \sqrt{(t-1)(3-t)} dt$$

6.4. EXERCICES ET SOLUTIONS

Solutions.

Exercice 6.9.

Sur \mathbb{R}^* on $F'(x) = 2x$ et $G'(x) = 2x$ et comme f est aussi définie sur \mathbb{R}^* alors $F' = G' = f$. De plus $F(x) - G(x)$ est une fonction constante par morceau, et sa dérivée est nulle sur \mathbb{R}^* .

Exercice 6.10.

La fonction à intégrer se présente sous la forme $f'(t)g(t)$, en prenant $g(t) = t$ (d'où $g'(t) = 1$) et $f'(t) = \sin t$ (d'où par exemple $f(t) = -\cos t$). f et g sont bien de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = [-t \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Exercice 6.11.

On peut sentir le bon changement de variable $u = \sin x$ en écrivant

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \cos x dx = \int_0^1 u^2 (1 - u^2) du = [\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}]_0^1 = \frac{2}{15}$$

Exercice 6.12.

1). On pose $u = a + b - x$ alors $du = -dx$. Ainsi

$$\int_a^b x f(x) dx = \int_b^a (a + b - u) f(a + b - u) (-du) = (a + b) \int_a^b f(u) du - \int_a^b u f(u) du$$

et alors $\int_a^b x f(x) dx = (a + b) \int_b^a f(x) dx - \int_b^a x f(x) dx$ et on déduit que $\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$.

2). On a $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$, il est clair que $f \in \mathcal{C}([0, \pi])$ et $\forall x \in [0, \pi]; f(x - \pi) = f(x)$. Alors $\int_0^\pi x \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ et on obtient $\int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\int_1^{-1} \frac{du}{1 + u^2} = \int_{-1}^1 \frac{du}{1 + u^2}$ après le changement de variable $u = \cos x$ et par la suite $\int_{-1}^1 \frac{du}{1 + u^2} = \arctan |_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$. et alors $\int_0^\pi x \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$.

Exercice 6.13.

On a $t^3 + 1 = (t + 1)(t^2 - t + 1)$. On écrit alors $\frac{1}{t^3 + 1} = \frac{A}{t + 1} + \frac{Bt + C}{t^2 - t + 1}$, et les méthodes habituelles permettent de trouver $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}$ et $C = \frac{2}{3}$. D'où

$$\int^x \frac{dt}{t^3 + 1} = \frac{1}{3} \int^x \frac{dt}{t + 1} - \frac{1}{3} \int^x \frac{t - 2}{t^2 - t + 1} dt = \frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{3} \int^x \frac{t - 2}{t^2 - t + 1} dt$$

$$\int^x \frac{t - 2}{t^2 - t + 1} dt = \frac{1}{2} \int^x \frac{2t - 1}{t^2 - t + 1} dt - \frac{3}{2} \int^x \frac{dt}{t^2 - t + 1} = \frac{1}{2} \ln(t^2 - t + 1) - \frac{3}{2} \int^x \frac{dt}{t^2 - t + 1}$$

Comme $t^2 - t + 1 = (t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, on pose donc $t - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} u$, ce qui donne

$$\int^x \frac{dt}{t^2 - t + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int^{\frac{2x-1}{\sqrt{3}}} \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

6.4. EXERCICES ET SOLUTIONS

La condensation des résultats obtenus donne

$$\int^x \frac{dt}{t^3 + 1} = \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \ln(t^2 - t + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Exercice 6.14.

On pourrait écrire $\frac{t^2-1}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{2}{(t^2+1)^2}$ la meilleure est de décomposer la fraction rationnelle sur \mathbb{C} , et on obtient $\frac{t^2-1}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2(t-i)^2} + \frac{1}{2(t+i)^2}$, faisons comme si i était un paramètre quelconque :

$$\int^x \frac{t^2 - 1}{(t^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \int^x \frac{dt}{(t - i)^2} + \frac{1}{2} \int^x \frac{dt}{(t + i)^2} = -\frac{1}{2(x - i)} - \frac{1}{2(x + i)} + C$$

et après développement on obtient $\int^x \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + C$.

Exercice 6.15.

1). On pose $u = \sin t$ alors $du = \cos t dt$. On écrit

$$\int^x \frac{dt}{\cos^3 t} = \int^x \frac{\cos t dt}{\cos^4 t} = \int^{\sin x} \frac{du}{(1 - u^2)^2}.$$

Une décomposition élémentaire en éléments simples donne

$$\frac{1}{(1 - u^2)^2} = \frac{1}{(1 - u)^2 (1 + u)^2} = \frac{1}{4(1 - u)} + \frac{1}{4(1 + u)} + \frac{1}{4(1 - u)^2} + \frac{1}{4(1 + u)^2}$$

et par conséquent $\int^x \frac{du}{(1-u)^2} = [-\frac{1}{4} \ln|1-u| + \frac{1}{4} \ln|1+u| + \frac{1}{4(1-u)} - \frac{1}{4(1+u)}]_{\sin x}$ et enfin $\int^x \frac{du}{(1-u)^2} = \frac{1}{4} \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x} + \frac{\sin x}{2 \cos^2 x}$.

2). Posons $u = \tan \frac{t}{2}$, alors $du = \frac{1}{2} (1 + u^2) dt$. Ainsi $\int^x \frac{dt}{2+\cos t} = 2 \int^{\tan \frac{x}{2}} \frac{du}{3+u^2}$. On se dispose de nouveau changement de variable $u = \sqrt{3}v$, on obtient $du = \sqrt{3}dv$ et alors

$$\int^{\tan \frac{x}{2}} \frac{du}{3 + u^2} = \int^{\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3} dv}{3(1 + v^2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C_1.$$

Enfin $\int^x \frac{dt}{2+\cos t} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C$.

Exercice 6.16.

On intègre par parties ; $u = \ln \tan t$ alors $u' = \frac{1}{\tan^2 t \cos^2 t} = \frac{1}{\sin t \cos t}$ et $v' = \cos t$ d'où $v = \sin t$ et donc $\int^x \cos t \ln \tan t dt = [\sin t \ln \tan t]^x - \int^x \frac{dt}{\cos t}$. On calcule d'abord $\int^x \frac{dt}{\sin t}$, $u = \tan \frac{t}{2}$ et alors $u' = \frac{1}{2} (1 + u^2) dt$ et donc $\int^x \frac{dt}{\sin t} = \int^{\tan \frac{x}{2}} \frac{du}{u} = \ln |\tan \frac{x}{2}| + C$ et comme $\cos t = \sin(t + \frac{\pi}{2})$. Alors $\int^x \frac{dt}{\cos t} = \ln |\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2})| + C$ et enfin $\int^x \cos t \ln \tan t dt = \sin x \ln \tan x - \ln |\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2})| + C$

Exercice 6.17.

1). On a $I_n(x) = \int^x \ln^n t dt$. si $n = 0$; $I_0(x) = x + C$, alors supposons $n > 0$ et posons

6.4. EXERCICES ET SOLUTIONS

$u = \ln^n t$ d'où $u' = n \frac{\ln^{n-1} t}{t}$ et $v' = 1$ d'où $v = t$ et une intégration par partie donne $I_n(x) = [t \ln^n t]^x - n \int^x \ln^{n-1} dt$ c.à.d $I_n(x) = x \ln^n x - n I_{n-1}(x)$. Ce qui permet, de proche en proche de ramener le calcul de I_n à celui de I_0 .

2). On a $J_n(x) = \int^x e^{-t} t^n dt$ alors $J_0(x) = \int^x e^{-t} dt = -e^{-x} + C$. Pour $n > 0$ on pose $u = t^n$ alors $u' = n t^{n-1}$ et $v' = e^{-t}$ d'où $v = -e^{-t}$ et par conséquent $J_n(x) = [-t^n e^{-t}]^x + n \int^x e^{-t} t^{n-1} dt = -x^n e^{-x} + n J_{n-1}(x)$

3). $K_n(x) = \int^x t^n \sin t dt$. On pose $u = t^n$ alors $u' = n t^{n-1}$, $v' = \sin t$ d'où $v = -\cos t$ alors $K_n(x) = [-t^n \cos t]^x + n \int^x t^{n-1} \cos t dt$. On fait une deuxième intégration par parties et on obtient $K_n(x) = -x^n \cos x + n x^{n-1} \sin x - n(n-1) K_{n-2}$.

Exercice 6.18.

1). On pose $u = \sqrt{t+1}$ ou encore $t^2 = u - 1$, par conséquent $dt = 2u du$. Ce changement de variable donne $\int^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{t+1}} = \int^{\sqrt{x+1}} \frac{2u(u^2-1)^2}{u} du = 2 \int^{\sqrt{x+1}} (u^2 - 2u^2 + 1) du = \frac{2x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + 2x + C$

2). On a $(t-1)(3-t) = -t^2 + 4t - 3 = 1 - (t-2)^2$. On pose alors $u = t-2$, d'où $du = dt$ et l'intégrale devient $\int^{x-2} \sqrt{1-u^2} du$. Effectuons le changement de variable $\varphi = \arcsin u$, d'où $u = \sin \varphi$ d'où $\int^{x-2} \sqrt{1-u^2} du = \int^{\arcsin(\varphi-2)} \cos^2 \varphi d\varphi = \int^{\arcsin(\varphi-2)} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = [\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi]^{\arcsin(\varphi-2)}$. Enfin $\int^x \sqrt{(t-1)(3-t)} dt = \frac{1}{2} \arcsin(x-2) + \frac{1}{2} \sqrt{(t-1)(3-t)} + C$.

Bibliographie

- [1] K. ALLAB, *Eléments d'Analyse*, OPU, Alger, 1984.
- [2] Y. BOUGROV, S. NIKOLSKI *Cours de Mathématiques Supérieures*, Editions Mir, Moscou, 1983.
- [3] B. CALVO, J. DOYEN, A. CALVO, F. BOSCHET, *Cours d'analyse*, Librairie Armand Colin, Paris, 1976.
- [4] JEAN GUEGAND, JEAN LOUIS ROQUE et CHRISTIAN LEBOEUF *Cours d'analyse*, 2^{ime} édition 1985.
- [5] GRANVILLE SMITH, LONGLEY VUIBERT. *Eléments de calcul différentiel et intégral*,
- [6] J.-M. MONIER, *Analyse PCSI-PTSI*, Dunod, Paris 2003.
- [7] J. LELONG-FERRAND ET J. M. ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques*, tome 2, Edition Dunod, 1978.
- [8] N. PISKOUNOV, *Calcul différentiel et intégral*, Tome 1, Editions Mir, Moscou, 1980.