

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUDE MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D' INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

**Mémoire de Fin d'Etude
de MASTER ACADEMIQUE**
Spécialité : **Automatique**
Option : **Commande des systèmes**

Présenté par :

TOUATI Ghani

et

BERKANI Fateh

Mémoire dirigé par **Mme NAIT ABDESSELAM Aldjia**

Thème

**Estimation d'état optimale des graphes
d'événements temporisés: application à
la détection de défaillances**

Mémoire soutenu publiquement le 29/09/2016 devant le jury composé de :

Mr Mohand Achour TOUAT
MCB, UMMTO, Président

Mr Redouane KARA
MCA, UMMTO, Rapporteur

M^{elle} Zedjiga YACINE
MCB, UMMTO, Examineur

M^{me} Fatima OUENDI
MAA, UMMTO, Examineur

Remerciements

Nous tenons particulièrement à témoigner notre toute gratitude et à exprimer ma considération à Mme Nait Abdesselam pour avoir bien voulu accepter de nous encadrer, et pour nous avoir guidé tout au long de ce travail.

Nous tenons également à remercier Monsieur Kara Redouane pour sa patience, ses conseils et remarques pertinentes, et pour son guide afin de réaliser ce travail.

Nous remercions les membres du Jury pour avoir accepté d'examiner notre travail.

Pour tous ceux qui nous ont porté de l'aide de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

- ❖ Mes chers parents, sans leurs sacrifices je n'en serais jamais arrivé là ;
- ❖ Mes chères sœurs et frères : Stephane, Sofiane, Naima, Anissa.
- ❖ Mes chers amis : Fateh, Arezki, Halim, Koceila, Said Moh Ameziane, Hocine, Ghiles, Sofiane, Zahir, Juba, Yacine, Zakia, Kamelia Malika...
- ❖ Mes chers(es) oncles.
- ❖ Tous mes camarades de la section Automatique promotion 2015/2016.

Ghani.

Je dédie ce travail à :

- ❖ Mes chers parents, sans leurs sacrifices je n'en serais jamais arrivé là ;
- ❖ Mes chères sœurs Lynda, Katia et Lydia.
- ❖ Mes chers amis : Ghani, Moh Ameziane, Hocine.D, Yacine, Zahir, Sofiane, Mansour, Zakia, Kamelia, Koceila, Juba, Malika, Ghiles, Hocine.C, Katia, Farida, Sarah, Sophia...
- ❖ Mes chères grandes mères.
- ❖ Mes chers(es) oncles : Djamel et sa femme, Kamel, Malika.
- ❖ Tous mes camarades de la section Automatique promotion 2015/2016.

Fateh.

Introduction générale	1
Chapitre1 : Rappels algébriques	
Introduction	3
1. Structures ordonnées et treillis	3
1.1. Relation d'ordre et structures ordonnées	3
1.2. Demi-treillis et treillis.....	5
2. Eléments de la théorie des dioïdes	5
2.1. Notions de base sur les dioïdes :.....	6
2.2. Relation d'ordre dans un dioïde.....	7
2.3. Dioïdes et treillis	7
2.4. Applications définies sur des dioïdes	8
3. Dioïdes matriciels	9
3.1. Propriétés spectrales des matrices définies dans un dioïde	10
4. Résolution d'équation dans un dioïde.....	13
4.1. Théorie de la résiduation	13
4.2. Application résiduable sur les dioïdes complets (résiduation de $ax \leq b$ et $xa \leq b$) .	13
4.3. Extension aux dioïdes de matrices :	15
4.4. Equations aux points fixes.....	16
4.5. Résolution d'équation par étoile de Kleene au point fixe.....	16
4.6. Notion (étoile de Kleene)	16
Conclusion.....	18

Chapitre 2 : Modélisation des graphes d'événement temporisés dans les diodes.

Introduction	19
1. Système à événement discret :	19
2. Modélisation graphique des systèmes à événement discrets :	19
3. Réseau de Petri :	20
3.1 Rappels et notions de base des réseaux de Petri :	20
3.2 Marquage d'un RdP	22
3.3 Tir des transitions	23
3.4 Evolution d'un RdP:	23
3.5 Quelques propriétés des RdP	24
3.6 Ensemble des marquages accessibles	24
3.7 Classes de Réseaux de Petri.....	25
3.7.1 Graphe d'état	25
3.7.2 Graphe d'événement	25
3.7.3 Réseau de Petri sans conflit.....	26
3.7.4 Réseau de Petri à choix libre	27
3.7.5 Réseau de Petri simple	27
3.7.6 Réseau de Petri pur.....	27
4. Graphes d'événements temporisés (GET) :	28
4.1 Synchronisations et concurrences.....	28
4.2 Introduction du temps dans les graphes d'événements(GET)	29
4.3 Fonctions compteurs, domaine temporel.....	30
Conclusion.....	39

Chapitre 3 : Principe d'estimation d'états des graphes d'événements temporisés et détection de défaillances

Introduction	40
1. Observabilité d'un système :	41
1.1 Rappels sur les observateurs	41
1.2 Observateurs en continu	41
1-3 Observateurs en discret :	42
1.4 Observateur dans l'algèbre max-plus	42
1.5 Observabilité des graphes d'événements temporisés	42
2. Estimation d'état par étoile de Kleene	43
2.1 Objectif :	43
2.2 Le principe:	43
3. Développement de la méthode de résolution par étoile de Kleene	45
3.1 Formulation du système d'inéquation	45
3.2 Construction d'un système d'inéquations particulières en introduisant les CBDs.....	45
3.3 Résolution du système par étoile de Kleene	46
4. Exemple d'application à un atelier d'assemblage	47
4.1 Etude du système sans perturbation	47
4.2 Etudes du système avec perturbation.....	68
Conclusion :	72
Conclusion générale	73

Table des figures

Figure 1.1: Graphe orienté et valué.....	12
Figure 2.1: Exemple de réseau de Petri.....	21
Figure 2.2: Exemple de réseau marqué.....	22
Figure 2.3: RdP avant franchissement de T_1 (gauche) et après franchissement de T_1 (droite)	23
Figure 2.4: Transition validée (gauche), non validée (droite)	24
Figure 2.5: Exemple de graphe des marquages accessibles.....	25
Figure 2.6 Graphe d'état.....	25
Figure 2.7: Graphe d'événement.....	26
Figure 2.8: RdP Conflit et sans conflit.....	26
Figure 2.9: RdP pas à choix libre.....	27
Figure 2.10: Exemple d'un RdP n'est pas.....	27
Figure 2.11: RdP pur et impur.....	28
Figure 2.12: Concurrence et synchronisation dans les RdP.....	29
Figure 2.13: Exemple d'un graphe d'événement temporisé d'une cellule de production.....	30
Figure 2.14: Graphe d'événements P-temporisés.....	34
Figure 2.15: Graphe d'événements P-temporisés étendu.....	36
Figure 2.16: Graphe d'événements P-temporisés étendu.....	38
Figure 3.1: Reconstruction d'état à partir des entrées et la sortie.....	38
Figure 3.2: Exemple datelier d'assemblage.....	38
Figure 3.3: Graphe d'événements temporisés étendu.....	38
Figure 3.4: GET du système précédent avec perturbation.....	38
Figure 3.5: GET étendu du système avec perturbation.....	38

Liste des tableaux

Tableau 3.1: Les entrées $u_1(k)$, $u_2(k)$ et leur sortie $y(k)$ correspondante sur l'horizon $[1,20]$	53
Tableau 3.2 : Les résultats de calcul du vecteur d'état sur l'horizon $k \in [1,20]$	67
Tableau 3.3 : Les résultats de calcul du plus grand état estimé.....	67
Tableau 3.4: Les résultats de calcul du vecteur $x(k)$ du système sur l'horizon $k \in [1,20]$	71

Liste des symboles

\oplus : Addition dans un dioïde.

\otimes : Multiplication dans un dioïde.

ε : Élément neutre pour la loi \oplus .

e : Élément neutre pour la loi \otimes .

\mathbf{T} : plus grand élément dans un dioïde.

A^* : Etoile de Kleene de la matrice $A(A = E \oplus A \oplus A^2 \oplus \dots)$.

a^* : Etoile de Kleene d'un scalaire ($a = e \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots$).

a^+ : Dérivée de l'étoile de Kleene ($a^+ = a \oplus a^2 \oplus \dots$).

D : Dioïde.

$D^{n \times n}$: Dioïde matriciel.

\wedge : Borne supérieure dans un dioïde.

\vee : Borne supérieure dans un dioïde.

\mathbb{R}_{max} : Dioïde complet $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, max, +)$, appelé aussi algèbre $(max, +)$.

\mathbb{R}_{min} : Dioïde complet $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, min, +)$, appelé aussi algèbre $(min, +)$.

L_a : Produit à gauche par a , $L_a(x) = a \otimes x$.

R_a : Produit à droite par a , $R_a(x) = x \otimes a$.

$L_a^\#$: Résidué de l'application L_a .

$R_a^\#$: Résidué de l'application R_a .

$a \setminus b$: Notation utilisé pour représenté $L_a^\#(b)$

b / a : Notation utilisé pour représenté $R_a^\#(b)$

P : Ensemble des places $P = \{p_1, p_2, p_3 \dots\}$.

T : Ensemble des transitions $T = \{t_1, t_2, t_3 \dots\}$.

P_{ij} : La place qui relie la transition t_j à t_i .

τ_{ij} : La temporisation de la place p_{ij} .

m_{ij} : Le marquage de la place p_{ij} .

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

Les systèmes à événements discrets peuvent être définis comme des systèmes dont la dynamique est exclusivement gouvernée par l'occurrence d'événements, et dont l'espace d'état, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les variables du système, est un ensemble discret. A la différence des systèmes continus où l'évolution des variables du système est continue. Ces différences ont pour origine la nature des phénomènes essentiellement naturels (descriptibles par les lois de la physique), la dynamique des systèmes à événement discrets est régie par des phénomènes artificiels que sont la synchronisation et la concurrence (exclusion mutuelle, parallélisme). Parmi les systèmes à événements discrets, on peut citer : les systèmes de production, les ateliers flexibles, les systèmes informatiques, les réseaux de communication et les systèmes de transport.

Ces systèmes sont alors représentés par des modèles états/transitions, tel que les automates d'état finis, les chaînes de Markov et les réseaux de Petri (RdP).

Le formalisme réseau de Petri jouent un rôle important, présentant la caractéristique d'être un outil à la fois graphique et mathématique de modélisation. L'emploi de ces graphes pour spécifier et analyser ces systèmes, s'est généralisé ces dernières années, car ils permettent de décrire des phénomènes d'assemblage, de synchronisation, de cumul, de partage de ressource. Parmi la multitude de classes des RdP, la classe des graphes d'événement temporisés (GET) joue un rôle important en raison de son comportement déterministe. La modélisation des SED modélisés par des GET dans l'algèbre usuelle permet d'avoir des modèles non linéaires. L'introduction d'une nouvelle structure algébrique dite : algèbre des dioïdes permet de modéliser l'évolution du système par des équations linéaires dans cette structure.

En dehors du cadre des systèmes linéaire, peu de résultats sont connus pour l'estimation des variables d'états dans un système à événement discret. Les premiers résultats concernant les problèmes d'observation des systèmes à événement discrets, obtenus par une approche $(\max,+)$, ont été développés en Mars 2004 par Laurent Hardouin et Carlos Maia, il s'agit d'un résultat inspiré de Luenberger. La méthode consiste à calculer, par la théorie de la résiduation, le plus grand gain qui permet d'estimer au mieux le vecteur d'état.

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la théorie de l'observation des systèmes à événements discrets dans les dioïdes. La conception d'un tel observateur nécessite la connaissance du modèle et les conditions initiales qui permettent de caractériser le vecteur

d'état par une itération directe de l'équation d'état. Nous allons utiliser une méthode proposée par (Declerck, 2010) qui est basée sur l'étoile de Kleene pour estimer les variables d'état d'un système d'assemblage avec et sans perturbation. Notons que cette méthode n'utilise pas la théorie de la résiduation pour construire l'observateur.

Ce mémoire est structuré comme suit :

On a consacré le premier chapitre pour donner un rappel sur les notions de base sur les propriétés des demi-anneaux idempotents ou dioïde, il s'agit en premier lieu de définir la théorie des treillis aboutissant à la notion de structure ordonnée qui est une base fondamentale des dioïdes. Nous terminons le chapitre par les méthodes de résolution des équations à valeurs dans un dioïde.

Le deuxième chapitre est dédié à la modélisation graphique et analytique des systèmes à événement discrets, plus précisément les systèmes de production, l'évolution de ces systèmes est observée par le décompte ou la datation d'événement ayant lieu dans le système. Pour aboutir à ces résultats, on a utilisé les applications compteurs ou dateurs qui sont liées aux transitions du graphe d'événements considéré. Nous insistons particulièrement sur le formalisme des graphes d'événements temporisés, qui est le seul à fournir un cadre déterministe pour une représentation analytique linéaire d'un système dans un dioïde.

Dans le troisième chapitre nous avons commencé par des rappels sur les observateur, nous étudions ensuite l'effet d'une perturbation sur un système de production, pour cela on a estimé la borne maximale de $x(k)$ pour k allant de k_f à k_0 du système perturbé et celui non perturbé, sachant que la commande $u(k)$ et la sortie $y(k)$ sont connus sur le même horizon d'observation, pour cela nous avons utilisé non pas le théorème de résiduation mais, l'étoile de Kleene.

On termine ce travail par une conclusion générale.

CHAPITRE 1 :
RAPPELS
ALGEBRIQUES

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons passer en revue la théorie de base des dioïdes [2],[16],[17],[22]. Les notations, les outils algébriques et les principaux concepts qui seront utilisés dans ce manuscrit seront précisés. Dans un premier temps, nous introduirons les notions de base relatives aux structures ordonnées et aux treillis. Ensuite, nous présenterons les dioïdes qui sont des structures algébriques que l'on peut munir d'un ordre naturel à partir de leur loi additive, et de ce fait, ils peuvent être vus comme des treillis. Enfin, nous présentons les techniques propres aux dioïdes permettant de résoudre des équations. La première, est la théorie de résiduation [13] qui est une alternative au problème d'inversion d'application isotones définis sur les dioïdes et qui permet sous des hypothèses de continuité de caractériser la plus grande solution de l'inéquation $ax \leq b$ ou la plus petite solution de l'inéquation $ax \geq b$. La seconde, est l'étoile de Kleene qui concerne les équations au point fixe et qui nous intéresse dans la suite de notre travail.

1. Structures ordonnées et treillis

L'association d'une relation d'ordre avec un ensemble (ou sous ensemble) définit un ensemble ordonné qui à son tour introduit un treillis. Nous rappelons brièvement dans cette partie un ensemble de notions, de définitions et de propriétés sur les ensembles ordonnés et les treillis.

1.1. Relation d'ordre et structures ordonnées

Sur les entiers, on peut définir les deux relations suivantes :

$a \leq b$: Relation d'ordre habituelle

a/b : a divise b

Ces deux relations présentent des propriétés communes :

Réflexivité $a \leq a$ et a/a

Antisymétrie $\begin{cases} \text{si } a \leq b \text{ et } b \leq a \text{ alors } a = b \\ \text{si } \frac{a}{b} \text{ et } \frac{b}{a} \text{ alors } a = b \end{cases}$

Transitivité $\begin{cases} \text{si } a \leq b \text{ et } b \leq c \text{ alors } a \leq c \\ \text{si } \frac{a}{b} \text{ et } \frac{b}{c} \text{ alors } \frac{a}{c} \end{cases}$

On dit alors que les relations \leq et $/$ sont des relations d'ordre.

Définition 1.1 (ensemble ordonné)

Un ensemble E muni d'une relation d'ordre \leq forme un ensemble ordonné (E, \leq) . Cet ensemble est dit totalement ordonné **si** \leq est une relation d'ordre totale c'est-à-dire si deux

Chapitre 1 : Outils algébriques

éléments quelconques x et y de E sont comparables ($x \leq y$ ou $y \leq x$). Dans le cas contraire, l'ordre est partiel et l'ensemble est dit partiellement ordonné. On dira que deux éléments x et y de E sont incomparables, noté $x \parallel y$, s'ils vérifient $x \not\leq y$ et $y \not\leq x$.

Un ensemble totalement ordonné est aussi appelé une chaîne tandis qu'un ensemble composé d'éléments incomparables entre eux est appelé une antichaîne.

Exemple 1 (ensembles ordonnés) On présente ici quelques exemples d'ensembles munis d'une relation d'ordre

- L'ensemble (\mathbb{N}, \leq) est totalement ordonné.
- La relation d'ordre \parallel définie dans \mathbb{N} est partielle. En considérons cette relation, on a par exemple : $6 \parallel 8$
- L'ensemble $(\mathbb{N}^{2 \times 2}, \leq)$ est partiellement ordonné bien que (\mathbb{N}, \leq) le soit totalement. On peut aisément le remarquer en considérons les deux éléments suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 1.2 soit E un ensemble ordonné par \leq . On peut définir certains éléments particuliers :

Majorant : M est un majorant de $A \subset E$ si $\forall a \in A, a \leq M$. on dit alors que A est une partie majorée de E .

Minorant : m est un minorant de $A \subset E$ si $\forall a \in A, m \leq a$. A est une partie minorée de E .

Borne supérieure : $S = \sup A$ (également notée $S = \bigvee A$) est la borne supérieur de A si S est un majorant de A et si pour tout majorant M de A , $S \leq M$. La borne supérieur est communément appelée "plus petit majorant".

Borne inférieure : $I = \inf A$ (également notée $I = \bigwedge A$) la borne inférieure de A si I est minorant de A et si pour tout minorant m de A , $m \leq I$. La borne inférieure apparait comme "le plus grand minorant".

Élément maximal : a est un élément maximal de $A \subset E$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} a \in A \\ x \in A, a \leq x \end{cases} \Rightarrow a = x$$

Élément minimal: Un élément minimal b de $A \subset E$ est défini par :

$$\begin{cases} b \in A \\ x \in A, x \leq b \end{cases} \Rightarrow b = x$$

Chapitre 1 : Outils algébriques

Plus grand élément: On appelle plus grand élément d'un ensemble E , un ensemble noté $T_E \in E$ tel que pour tout élément $x \in E$, on ait $x \leq T_E$.

Plus petit élément: On appelle plus petit élément d'un ensemble E , un élément noté $\perp_E \in E$ tel que pour tout élément $x \in E$, on ait $\perp_E \leq x$.

Remarque 1 :

- Le plus petit élément (resp. le plus grand élément), s'il existe, est nécessairement unique.
- S et I peuvent ne pas appartenir à A . Si ces bornes existent, elle sont uniques.
- Même s'il admet des majorants (resp. minorants), un ensemble n'admet pas toujours de borne supérieure (resp. borne inférieure).
- Un ensemble ordonné peut admettre plusieurs éléments maximaux (resp. minimaux).

1.2. Demi-treillis et treillis [13]

Définition 1.3 (demi-treillis) Soit (E, \leq) un ensemble ordonné non vide.

(i) Si $x \vee y$ existe dans E pour tout couple $(x, y) \in E$, alors E est un demi-treillis supérieur.

(ii) Si $x \wedge y$ existe dans E pour tout couple $(x, y) \in E$, alors E est un demi-treillis inférieur.

Définition 1.4 (treillis) L'ensemble ordonné (E, \leq) est un treillis si c'est à la fois un demi-treillis supérieur et un demi-treillis inférieur.

Remarque : Pour toute relation d'ordre, notée \leq , il existe une relation d'ordre inverse, notée \geq . Par conséquent, si (E, \leq) est un demi-treillis supérieur (resp. demi-treillis inférieur) alors (E, \geq) est demi-treillis inférieur (resp. demi-treillis supérieur). C'est ce que on appelle le principe de dualité.

Définition 1.5 (demi-treillis complet) Soient (P, \leq) un demi-treillis supérieur et (Q, \leq) un demi-treillis inférieur.

(i) si $\bigvee S$ existe pour tout $S \subseteq P$, alors P est demi-treillis supérieur complet.

(ii) si $\bigwedge S$ existe pour tout $S \subseteq Q$, alors Q est demi-treillis inférieur complet.

Définition 1.6 (treillis complet) L'ensemble ordonné (E, \leq) est un treillis complet si c'est à la fois un demi-treillis supérieur complet et un demi-treillis inférieur complet.

Exemple 2. Le treillis $(\mathbb{N}, \vee, \wedge)$ n'est pas complet. $(\mathbb{N} \{+\infty, -\infty\}, \vee, \wedge)$ est un treillis complet.

Remarque : Tout treillis fini est complet.

Théorème 1: Un demi-treillis supérieur complet est un treillis complet, s'il contient un plus petit élément.

2. Eléments de la théorie des dioïdes

Chapitre1 : Outils algébriques

Dans cette partie, nous rappelons les fondements concernant les demi-anneaux idempotents ou dioïdes, et nous montrons aussi le lien qui existe entre ces derniers et les structures ordonnées. Les dioïdes apparaissent ainsi comme des demi-treillis. De plus, un dioïde complet a la structure d'un treillis complet.

2.1. Notions de base sur les dioïdes :

Les concepts généraux et les notations sur les structures algébriques des dioïdes qui seront utilisés dans ce mémoire, sont donnés cette section.

Définition 1.7 (monoïde) Un monoïde (M, \oplus) est un ensemble M muni d'une loi de composition interne notée \oplus , associative et qui possède un élément neutre ε tel que, $\forall m \in M, m \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus m = m$. Le monoïde est commutatif, si la loi \oplus est commutative, C'est-à-dire, $\forall a, b \in M, a \oplus b = b \oplus a$.

Définition 1.8 (demi-anneau, dioïde) On appelle demi-anneau un ensemble D muni de deux lois internes \oplus et \otimes tel que :

- (D, \oplus) est un monoïde commutatif dont l'élément neutre ε est appelé élément nul.
- (D, \otimes) est un monoïde, son élément neutre est appelé unité et est noté e .
- La multiplication \otimes est distributive à droite et à gauche par rapport à la loi \oplus ,
 $\forall a, b, c \in D, c \otimes (a \oplus b) = (c \otimes a) \oplus (c \otimes b)$,
 $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$.
- L'élément nul ε est absorbant pour la loi \otimes ($\forall a \in D, a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$).

Si la loi additive \oplus est idempotente ($\forall a \in D, a \oplus a = a$), alors (D, \oplus, \otimes) est appelé un demi-anneau idempotent ou dioïde.

Exemple 3. $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$ est un dioïde commutatif pour lequel $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$. Ce dioïde est noté \mathbb{R}_{\max} , et traditionnellement appelé "algèbre $(\max, +)$ ". Dans ce dioïde, la loi \oplus correspond à l'application \max et la loi \otimes est la somme usuelle.

Notons toutefois que : $\varepsilon \otimes (+\infty) = (-\infty) + (+\infty) = \varepsilon = (-\infty)$ dans le dioïde \mathbb{R}_{\max} .

Exemple 4. $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \min, +)$ est un dioïde commutatif pour lequel $\varepsilon = +\infty$; et $e = 0$. Ce dioïde est noté \mathbb{R}_{\min} , et traditionnellement appelé "algèbre $(\min, +)$ ". Dans ce dioïde la loi \oplus correspond à l'application \min et la loi \otimes est la somme usuelle.

On note que $\varepsilon \otimes (-\infty) = (+\infty) + (-\infty) = \varepsilon = (+\infty)$ dans le dioïde \mathbb{R}_{\min} .

Remarque: Dans les équations définies sur les dioïdes, le symbole \otimes du produit est supprimé ou remplacé par un point ($a \otimes b = ab = a.b$).

2.2. Relation d'ordre dans un dioïde

Chapitre1 : Outils algébriques

Dans un dioïde D donné, la propriété d'idempotence de la loi additive \oplus induit une relation d'ordre, notée \preceq , définie par : $\forall (a, b) \in D^2, a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$. De plus cette relation d'ordre est compatible avec les lois de structure de D , c'est-à-dire :

$$\forall (a, b, c) \in D^3, a \preceq b \Rightarrow a \oplus c \preceq b \oplus c,$$

$$a \preceq b \Rightarrow a \otimes c \preceq b \otimes c.$$

Remarque : L'ordre \preceq définie dans \mathbb{R}_{max} est total est coïncide avec l'ordre usuel \leq .

En revanche, l'ordre total \preceq définie dans \mathbb{R}_{min} est l'inverse de l'ordre usuel.

Exemple 5. La relation \preceq , associée à l'application max est une relation d'ordre qui correspond à l'ordre usuel \leq , $a \preceq b \Leftrightarrow b = max(a, b) \Leftrightarrow a \leq b$.

$$(1 \preceq 3) \Leftrightarrow 3 = max(1,3) \Leftrightarrow 1 \leq 3.$$

La relation \preceq , associée à l'application min est une relation d'ordre qui correspond à l'inverse de l'ordre usuel \geq , $a \preceq b \Leftrightarrow b = min(a, b) \Leftrightarrow a \geq b$.

$$(3 \preceq 1) \Leftrightarrow 1 = min(1,3) \Leftrightarrow 3 \geq 1.$$

2.3. Dioïdes et treillis [1],[13]

L'idempotence de la somme dans un dioïde induit une structure de demi-treillis supérieur, pour lequel la borne supérieure, notée \vee , correspond à la loi additive \oplus du dioïde, ($(a \oplus b)$ est le plus petit majorant de a et b).

De même, en considérant la définition algébrique d'un *sup-demi-treillis*, on peut noter que la loi \vee d'un demi-treillis supérieur est associative, commutative et idempotente, c'est-à-dire que \vee possède les mêmes axiomes que la loi additive \oplus d'un dioïde. De plus, on sait qu'un dioïde possède un élément minimum ε (le plus petit que tous les autres éléments du dioïde), ce qui confère au dioïde une structure de treillis.

Définition 1.9 (dioïde complet). Un dioïde (D, \oplus, \otimes) est complet s'il est fermé pour toute les sommes infinies et si le produit \otimes distribue à gauche et à droite des sommes infinies. Autrement dit, pour tout $d \in D$ et tout sous-ensemble $A \subset D$, les propriétés suivantes sans vérifiées:

$$d \otimes (\oplus_{a \in A} a) = \oplus_{a \in A} (d \otimes a),$$

$$(\oplus_{a \in A} a) \otimes d = \oplus_{a \in A} (a \otimes d).$$

Chapitre 1 : Outils algébriques

Puisqu'un dioïde D a une structure de treillis (D, \leq) , s'il est complet, il admet un plus grand élément. On notera T ce plus grand élément. L'élément T correspond à la somme de tous les éléments de D , $T = \bigoplus_{x \in D} x$.

L'élément T est absorbant pour la loi additive $\forall a, T \oplus a = T$, Rappelons néanmoins que,

Puisque ε est absorbant pour la loi \otimes on a : $T \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes T = \varepsilon$.

Définition 1.10 (sous-dioïde). Soit (D, \oplus, \otimes) un dioïde. Le sous-ensemble $C \subseteq D$ est qualifié de sous-dioïde de (D, \oplus, \otimes) , noté (C, \oplus, \otimes) , si et seulement si $\varepsilon, e \in C$ et le sous-ensemble C est fermé pour les lois \oplus et \otimes , c'est-à-dire $\forall a, b \in C, a \oplus b \in C$ et $a \otimes b \in C$.

Exemple 6. L'ensemble $\bar{\mathbb{N}}_{min} = (\mathbb{N} \cup \{+\infty, -\infty\}, min, +)$ est un sous-dioïde complet du dioïde $\bar{\mathbb{R}}_{min}$. On remarque que le dioïde $\bar{\mathbb{N}}_{min}$ est fermé pour les lois \oplus et \otimes , $\varepsilon, e \in \bar{\mathbb{N}}_{min}$ et e le plus grand élément de ce dioïde (l'ordre est en Min-Plus qui est l'inverse de l'ordre usuel).

2.4. Applications définies sur des dioïdes [1],[13]

Définition 1.11 (Isotonie, antitonie). Soit f une application définie d'un dioïde (D, \oplus, \otimes) dans un dioïde (C, \oplus, \otimes) ,

f est dite isotone si :

$$\forall a, b \in D, a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b).$$

f est dite antitone si :

$$\forall a, b \in D, a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b).$$

Remarque : Une application f est dite **monotone** si elle est **isotone ou antitone**. L'isotonie et l'antitonie sont des notions utilisées pour caractériser les applications respectivement croissantes et décroissantes, définies sur des ensembles ordonnés.

Définition 1.11 (Application injective, surjective et bijective). Soit f une application définie d'un dioïde (D, \oplus, \otimes) dans un dioïde (C, \oplus, \otimes) ,

- f est injective si $\forall a, b \in D, f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$.
- f est surjective si $\forall b \in C, \exists a \in D, f(a) = b$.
- f est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

Définition 1.12 (Homomorphisme). Une application f définie d'un dioïde D vers un dioïde C est un homomorphisme si :

$$\forall a, b \in D: f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \quad \text{et} \quad f(\varepsilon) = \varepsilon, \quad (1.1)$$

$$f(a \otimes b) = f(a) \otimes f(b) \quad \text{et} \quad f(e) = e. \quad (1.2)$$

Chapitre 1 : Outils algébriques

Notons que chaque application qui vérifie la propriété (1.1) sera appelée \oplus -morphisme.

Aussi, une application qui ne vérifie que la propriété (1.2) sera appelée \otimes -morphisme. Un homomorphisme est donc \oplus -morphisme et \otimes -morphisme.

Définition 1.13 (Isomorphisme). Une application f est dit isomorphisme si est seulement si : l'application f est un **homomorphisme** et f est **bijective**

Définition 1.14 (Continuité). Soient (D, \oplus, \otimes) et (C, \oplus, \otimes) deux dioïdes complets. Une application f de D dans C est dite semi-continue inférieurement (s.c.i), si, pour tout sous-ensemble $B \subset D$,

$$f(\bigvee_{x \in B} x) = \bigvee_{x \in B} f(x)$$

et semi-continue supérieurement (s.c.s.), si :

$$f(\bigwedge_{x \in B} x) = \bigwedge_{x \in B} f(x)$$

Remarque : Une application **s.c.s** ou **s.c.i** est nécessairement isotone puisque

$$a \geq b \Leftrightarrow \begin{aligned} a = a \oplus b &\Rightarrow f(a) = f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \Leftrightarrow f(a) \geq f(b) \\ b = a \wedge b &\Rightarrow f(b) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \Leftrightarrow f(b) \leq f(a) \end{aligned}$$

Définition 1.15 (Linéarité). Une application f d'un dioïde (D, \oplus, \otimes) dans un dioïde (C, \oplus, \otimes) est dite linéaire si elle satisfait les propriétés d'additivité et d'homogénéité :

$$\forall a, b \in D, \forall \alpha \in D, f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \quad (\text{additivité})$$

$$f(\alpha a) = \alpha f(a) \quad (\text{homogénéité})$$

La combinaison des deux conditions mentionnées est connue sous le nom de principe de superposition, soit :

$$\forall a, b \in D, \forall \alpha \beta \in D, f(\alpha a \oplus \beta b) = \alpha f(a) \oplus \beta f(b).$$

Remarque : En toute rigueur, on devrait plutôt parler de (\oplus, \otimes) -linéarité du fait de la structure algébrique particulière d'un dioïde. Dans l'algèbre $(max, +)$ on parlera de $(max, +)$ -linéarité.

Exemple 7. La multiplication par $A \in D^{n \times n}$, définie par :

$$\begin{aligned} L_A &: D^{n \times n} \rightarrow D^{n \times n} \\ x &\rightarrow A \otimes x \end{aligned}$$

est une application linéaire.

3. Dioïdes matriciels

Soit (D, \oplus, \otimes) un dioïde, soit $A \in D^{m \times p}, B \in D^{p \times n}$ et $C \in D^{m \times n}$ des matrices à coefficients dans D . La somme et le produit des matrices sont définis de la façon suivante :

Chapitre 1 : Outils algébriques

La somme $A \oplus B: (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$,

Le produit $A \otimes B: (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p A_{ik} \oplus B_{kj}$.

On peut montrer que l'ensemble D muni de ces deux opérations est un dioïde matriciel, dont l'élément nul noté ε , est la matrice composée exclusivement de ε . L'élément unité est la matrice notée Id_n composée de e sur la diagonale et de ε partout ailleurs

Exemple 8. Nous donnons ici un exemple d'un produit et une somme de deux matrices carrées dans l'algèbre $(max, +)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \max[2,1] & \max[4,3] \\ \max[8,6] & \max[3,9] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \max[2+1, 4+6] & \max[2+3, 4+9] \\ \max[8+1, 3+6] & \max[8+3, 3+9] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

On peut définir la multiplication d'une matrice A par une constante α :

$$(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes A_{ij} = \alpha + A_{ij}$$

En général, la multiplication des matrices dans $D^{n \times n}$ n'est pas commutative, même si (D, \oplus, \otimes) est commutative. $D^{n \times n}$ est distributive si D l'est. $A \succcurlyeq B$ dans

$$D^{n \times n} \Leftrightarrow \{A_{ij} \succcurlyeq B_{ij} \text{ dans } D, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n\}.$$

Exemple 9. Exemple d'un produit et une somme de deux matrices carrées dans l'algèbre $(min, +)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \min[2,1] & \min[4,3] \\ \min[8,6] & \min[3,9] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \min[2+1, 4+6] & \min[2+3, 4+9] \\ \min[8+1, 3+6] & \min[8+3, 3+9] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$$

3.1. Propriétés spectrales des matrices définies dans un dioïde [13]

Les matrices carrées à coefficients dans un dioïde présentent certaines propriétés spectrales intéressantes qui permettent notamment d'étudier le comportement asymptotique de certains systèmes dynamique. Plus particulièrement, pour chaque matrices carrés, on peut lui associer un graphe valué orienter, appelé graphe de précédence. Si un graphe de précédence est fortement connexe, alors la matrice qui lui correspond est dite irréductible.

Définition 1.16 (graphe valué orienté). Un graphe orienté est définit par un ensemble de nœud interconnectés par des arcs orientés. Un graphe est dit valué, si des poids positifs ont

Chapitre1 : Outils algébriques

associés aux arcs qui reliant les nœuds j et les nœuds i , ces poids correspondent aux termes notés A_{ij} , de la matrice A .

Définition 1.17 (Graphe de précédence). On appelle graphe de précédence d'une matrice $A \in D^{n \times n}$ noté $G(A)$, le graphe qui est composé de n nœuds et des arcs, notés (j, i) , qui sont pondérés par le coefficient A_{ij} . Si $A_{ij} \neq \varepsilon$, alors il existe un arc qui relie le nœud j au nœud i , sinon l'arc (j, i) , n'existe pas. Dualement, pour tous graphes orientés valués composés de n nœud, on peut associer une matrice carrée de dimension $n \times n$, telle que les coefficients de cette matrice correspondent aux poids des arcs du graphe.

Définition 1.18 (Graphe fortement connexe). Un graphe est dit fortement connexe si pour deux nœuds i et j quelconques il existe un chemin allant de i à j .

Définition 1.19 (matrice irréductible). Une matrice $A \in D^{n \times n}$ est dite irréductible si pour toute paire de nœuds (j, i) , il existe un entier k tel que $(A^k)_{ij} \neq \varepsilon$. Cette matrice admet une unique valeur propre notée $\lambda \in D$, et donnée par : $\lambda = \bigoplus_{k=1}^n (\text{trace} A^k)^{1/k}$.

Avec : $\text{trace} A^k = \bigoplus_{i=1}^n (A^k)_{ii}$ et n désigne l'ordre de la matrice A .

Dans l'algèbre usuelle, l'expression des valeurs propres λ s'écrit comme suit :

$$\lambda = \max_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} (\max_{i=1}^n (A^k)_{ii}) \right].$$

Cette valeur propre correspond au maximum des poids moyens des circuits élémentaires du graphe de précédence $G(A)$.

Le graphe de précédence associé à une matrice réductible n'est pas fortement connexe. Il est décomposable, dans ce cas, en plusieurs sous graphes fortement connexes. Cette matrice réductible, peut avoir plusieurs valeurs propres, en la décomposant en blocs irréductibles. La détermination des vecteurs propres d'une matrice A définie sur un dioïde, revient à résoudre l'équation suivante : $Au = \lambda u$.

On appelle u le vecteur propre associé à la valeur propre λ . Le vecteur propre associé à cette unique valeur propre, ne contient pas de ε . Si une composante du vecteur u est égale à ε , il faut que la matrice A contienne au moins une ligne avec des ε , ce qui correspondra à un graphe $G(A)$ non fortement connexe.

Exemple 10. Nous considérons le graphe orienté et valué de la figure 1.1 suivante :

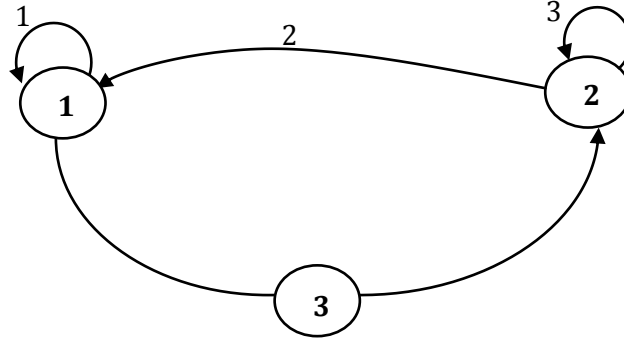


Figure 1.1: Graphe orienté et valué

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & e \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix}$ est la matrice de précédence associée au graphe de la figure 1.1

Le graphe de la figure 1.1 est composé de trois nœuds et pour chaque paire de nœuds, il existe toujours un chemin orienté qui relie ses nœuds. Le graphe est donc fortement connexe, par conséquent sa matrice de précédence associée A est irréductible. la valeur propre de cette matrice est unique, elle est notée λ et est donnée par : $\lambda = \bigoplus_{k=1}^3 (\text{trace} A^k)^{1/k}$ dans l'algèbre $(\max, +)$ on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} \max(1 + 1, 2 + \varepsilon, \varepsilon + e) & \max(1 + 1, 2 + 3, \varepsilon + \varepsilon) & \max(1 + \varepsilon, 2 + e, \varepsilon + \varepsilon) \\ \max(\varepsilon + 1, 3 + \varepsilon, e + e) & \max(\varepsilon + 2, 3 + 3, e + \varepsilon) & \max(\varepsilon + \varepsilon, 3 + e, e + \varepsilon) \\ \max(e + 1, \varepsilon + \varepsilon, \varepsilon + e) & \max(e + 2, \varepsilon + 3, \varepsilon + \varepsilon) & \max(e + \varepsilon, \varepsilon + e, \varepsilon + \varepsilon) \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & \varepsilon \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda = (\bigoplus_{i=1}^3 A_{ii}) \oplus \frac{1}{2} (\bigoplus_{i=1}^3 (A^2)_{ii}) \oplus \frac{1}{3} (\bigoplus_{i=1}^3 (A^3)_{ii})$$

$$\lambda = (1 \oplus 3 \oplus e) \oplus \frac{1}{2} (2 \oplus 6 \oplus \varepsilon) \oplus \frac{1}{3} (3 \oplus 9 \oplus 2) = (3 \oplus \frac{6}{2} \oplus \frac{9}{3}) = 3$$

Le vecteur propre, noté u , associé à la valeur propre λ vérifie l'équation suivante :

$Au = \lambda u$ le calcul du vecteur propre ce fait comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \max(1 + u_1, 2 + u_2, \varepsilon + u_3) \\ \max(\varepsilon + u_1, 3 + u_2, 0 + u_3) \\ \max(\varepsilon + u_1, \varepsilon + u_2, 0 + u_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + u_1 \\ 3 + u_2 \\ 3 + u_3 \end{pmatrix}$$

On trouve le vecteur propre suivant : $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Chapitre1 : Outils algébriques

Définition 1.20 (Chemin). Un chemin est une suite de nœuds que l'on peut parcourir séquentiellement en empruntant les arcs de $G(A)$.

Un chemin est élémentaire si aucun nœud n'est rencontré deux fois. La longueur d'un chemin est égal à son nombre d'arcs.

Définition 1.21 (Circuit). Un est un chemin dont l'origine est confondu avec l'extrémité.

Un circuit est élémentaire si tout nœud n'est l'origine que d'un seul arc appartenant au circuit (on peut dans cette définition remplacer le mot "origine" par le mot "extrémité").

4. Résolution d'équation dans un dioïde

Dans ce travail, nous serons amenés à résoudre principalement des équations de la forme :

$$f(x) = b,$$

qui sont définit sur un dioïde.

Les lois \oplus et \otimes n'étant pas inversibles, en particulier les applications matricielles. Il n'est donc pas possible, en général d'inverser les applications définies sous forme analytique dans un dioïde. La théorie de la résiduation permet cependant, sous certaines conditions, de définir des pseudo-inverses pour certaines de ces applications et, par conséquent, permet de déterminer des solutions extrêmes de l'équation précédente. C'est-à-dire la plus petite ou la plus grande solution.

Cette théorie concerne de façon générale les fonctions croissantes est souvent on parlera d'application isotones définies sur des ensembles ordonnés.

Mais il peut ne pas exister de solution à cette équation (quand f est non surjective) et/ou une telle solution peut ne pas être unique (quand f est non injective). C'est pourquoi nous étudierons plus précisément deux types d'inéquations de la forme $f(x) \leq b$ ou $f(x) \geq b$, dont on cherchera respectivement la plus grande et la plus petite solution.

4.1. Théorie de la résiduation

Définition 1.22 (application résiduable et sa résiduée). Une application isotone

$f: (D, \oplus, \otimes) \rightarrow (C, \oplus, \otimes)$ définie sur des dioïdes complets est dite résiduable si $\forall b \in C$, l'équation $f(x) \leq b$ admet une plus grande solution dans D . L'application qui associe à b la plus grande solution de $f(x) \leq b$ est notée $f^\#$ et est appelée application résiduée de f . Ainsi :

$$f^\#(b) = \oplus\{x \in D \mid f(x) \leq b\}.$$

4.2. Application résiduable sur les dioïdes complets (résiduation de $ax \leq b$ et $xa \leq b$)

Chapitre1 : Outils algébriques

Soient L_a (produit à gauche) et R_a (produit à droite), les applications définies sur un dioïde D complet comme suit :

$$L_a: x \rightarrow a \otimes x$$

$$R_a: x \rightarrow x \otimes a$$

Le fait que le dioïde D soit complet implique que les applications L_a et R_a sont semi-continues inférieurement (distributivité de produit à gauche et à droite sur les sommes infinies).

En outre, comme ε est absorbant pour le produit \otimes , alors $L_a(\varepsilon) = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$ et

$R_a(\varepsilon) = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$. Autrement dit, L_a et R_a sont isotones donc résiduable, et leurs applications résiduées sont notées :

$$L_a^\# : x \rightarrow a \bowtie x$$

$$R_a^\# : x \rightarrow x \bowtie a$$

et respectivement appelées quotient à gauche et quotient à droite. Ainsi, $L_a^\#(b) = a \bowtie b$ et

$R_a^\#(b) = b \bowtie a$ sont les plus grandes solutions des inégalités $a x \leq b$ et $x a \leq b$.

Donc

Remarque : lorsque D est un dioïde commutatif, $L_a = R_a$ cela implique que $L_a^\# = R_a^\#$.

Les applications L_a et R_a possèdent les propriétés suivantes, qui sont vraies pour tout dioïde complet (D, \oplus, \otimes) , avec $a, b, x \in D$.

$$\begin{aligned}
 a \bowtie \top &= \top & \top \not\bowtie a &= \top, \\
 a(a \bowtie x) &\preceq x & (x \not\bowtie a)a &\preceq x, \\
 a \bowtie (ax) &\succeq x & (xa) \not\bowtie a &\succeq x, \\
 a(a \bowtie (ax)) &= ax & ((xa) \not\bowtie a)a &= xa, \\
 a \bowtie (a(a \bowtie x)) &= a \bowtie x & ((x \not\bowtie a)a) \not\bowtie a &= x \not\bowtie a, \\
 a \bowtie (x \wedge y) &= a \bowtie x \wedge a \bowtie y & (x \wedge y) \not\bowtie a &= x \not\bowtie a \wedge y \not\bowtie a, \\
 a \bowtie (x \oplus y) &\succeq (a \bowtie x) \oplus (a \bowtie y) & (x \oplus y) \not\bowtie a &\succeq (x \not\bowtie a) \oplus (y \not\bowtie a), \\
 (a \wedge b) \bowtie x &\succeq (a \bowtie x) \oplus (b \bowtie x) & x \not\bowtie (a \wedge b) &\succeq (x \not\bowtie a) \oplus (x \not\bowtie b), \\
 (a \oplus b) \bowtie x &= a \bowtie x \wedge b \bowtie x & x \not\bowtie (a \oplus b) &= x \not\bowtie a \wedge x \not\bowtie b, \\
 (ab) \bowtie x &= b \bowtie (a \bowtie x) & x \not\bowtie (ba) &= (x \not\bowtie a) \not\bowtie b, \\
 (a \bowtie x)b &\preceq a \bowtie (xb) & b(x \not\bowtie a) &\preceq (bx) \not\bowtie a, \\
 b(a \bowtie x) &\preceq (a \not\bowtie b) \bowtie x & (x \not\bowtie a)b &\preceq x \not\bowtie (b \bowtie a),
 \end{aligned}$$

4.3. Extension aux dioïdes de matrices :

Concernant le cas matriciel, définissons comme suit les applications produit à gauche $L_A : D^{n \times p} \rightarrow D^{m \times p}$ et produit à droite $R_{A'} : D^{p \times n} \rightarrow D^{p \times m}$ sur les dioïdes de matrices à coefficients dans le dioïde complet D :

$$L_A : X \rightarrow A \otimes X$$

$$R_{A'} : X \rightarrow X \otimes A'$$

Dans ces applications, $A \in D^{m \times n}$ et $A' \in D^{n \times m}$.

Les plus grandes solutions des inéquations $AX \leq B$ et $XA' \leq B'$ pour lesquelles $B \in D^{m \times p}$ et $B' \in D^{p \times m}$, sont respectivement la résiduée du produit à gauche notée $L_A^\#(B) = A \bowtie B$ et la résiduée du produit à droite notée $R_{A'}^\#(B') = B' \not\bowtie A'$. Les valeurs de ces matrices sont alors données comme suit :

$$L_A^\#(B) = A \bowtie B : (A \bowtie B)_{ij} = \bigwedge_{k=1}^m A_{ki} \bowtie B_{kj}$$

$$R_{A'}^\#(B') = B' \wp A' : (B' \wp A')_{ij} = \bigwedge_{k=1}^m B'_{ik} \wp A'_{jk}$$

En toute rigueur, seul le produit de matrices carrées constitue une application résiduable. Cependant, il est toujours possible de réécrire les applications L_A et $R_{A'}$ dans le dioïde de matrices $D^{q \times q}$ pour lequel $q = \max(m, n, p)$. Les lignes et les colonnes doivent alors être complétées par l'élément ε , ce qui peut compliquer les écritures.

4.4. Equations aux points fixes

Grâce à leurs structures de treillis, il est possible d'appliquer aux dioïdes les résultats concernant les points fixes d'applications isotones définies sur des treillis complets. Ainsi, des équations du type $f(x) = x$ peuvent être résolues.

Définition 1.23 (Ensemble des points fixes d'application). Soit f une application isotone définie sur un dioïde complet D . Les ensembles des points fixes, post-fixes et pré-fixes d'application sont respectivement définis comme suit :

$$\mathcal{F}_f = \{x \in D \mid f(x) = x\}$$

$$\mathcal{P}_f = \{x \in D \mid f(x) \geq x\}$$

$$\mathcal{Q}_f = \{x \in D \mid f(x) \leq x\}$$

Notons que les ensembles des points post-fixes \mathcal{P}_f et pré-fixes \mathcal{Q}_f peuvent être interprétés dans \mathcal{F}_f selon les équivalences suivantes :

$$f(x) \geq x \Leftrightarrow f(x) \oplus x = x,$$

$$f(x) \leq x \Leftrightarrow f(x) \oplus x = x.$$

4.5. Résolution d'équation par étoile de Kleene au point fixe

Les équations de type point fixes formulées dans les dioïde, de la forme $f(x) = x$ ou $f(x) = ax \oplus b$, sont importante, car on cherchera systématiquement à représenter les systèmes étudiés sous des formes récurrentes explicites de types point fixe. Il a notamment été mis en évidence que sous certaines hypothèses de continuité de l'application f , les ensembles de solutions de ces équations sont ordonnés, nous nous intéressons plus particulièrement à leurs solutions nominales.

Nous allons voir la manière de résoudre une équation de type $ax \oplus b$ par l'étoile de Kleene ainsi que les propriétés relatives à cette méthode qui nous intéresse essentiellement dans notre travail par la suite.

4.6. Notion (étoile de Kleene) [17]

Soit $*$ l'opérateur défini sur un dioïde (D, \oplus, \otimes) par

$$\forall a \in D, a^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} a^i, \text{ avec } a^0 = e$$

Cet opérateur est cohérent avec la relation d'ordre \preceq par l'implication suivante :

$$\forall a, b \in D, \text{ si } a \preceq b, \text{ alors } a^* \preceq b^*.$$

De la même façon que pour un dioïde de scalaires, l'étoile d'une matrice carrée $A \in D^{n \times n}$, notée A^* , est défini par $A^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A^i$ avec par convention $A^0 = I_n$.

L'étoile de Kleene possède certaines propriétés dont les plus courantes ont été regroupées si dessous. Ces propriétés sont valables $\forall a, b \in D$.

$$(a^*)^* = a^* \tag{1}$$

$$a^* a = a a^* \tag{2}$$

$$a(b a)^* = a(a b)^* a \tag{3}$$

$$(a b^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^* \tag{4}$$

$$(a \oplus b)^* = (a^* b)^* a^* = a^* (b a^*)^* = (a^* b^*)^* \tag{5}$$

$$(a \oplus b)^* = (a^* \oplus b)^* = (a \oplus b^*)^* = (a^* \oplus b^*)^* \tag{6}$$

Lorsque D est commutatif :

$$(a \oplus b)^* = a^* b^*$$

On note $+$ l'opérateur défini dans un dioïde complet (D, \oplus, \otimes) par :

$$a \in D, \quad a^+ = \bigoplus_{n \geq 1} a$$

On a :

$$a^* = e \oplus a^+ \text{ et } a^+ = a \otimes a^*.$$

Exemple 11 . Soit dans le dioïde \mathbb{R}_{max} , $A_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & 4 & \varepsilon \end{pmatrix}$

$$A_0^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_0^i = I_3 \oplus A_0 \oplus A_0^2 \oplus A_0^3$$

Chapitre1 : Outils algébriques

$$A_0^* = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$A_0^* = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & e & \varepsilon \\ 6 & 4 & e \end{pmatrix}$$

Théorème [14],[16] : Dans un dioïde complet, la quantité A^*B est la plus petite solution de l'équation

$$x = Ax \oplus B \text{ et de l'inéquation } x \geq Ax \oplus B.$$

Démonstration : Nous montrons que A^*B est la plus petite solution de l'inéquation données dans le théorème. En effet pour toute solution x de l'inéquation $x \geq Ax \oplus B$, nous avons :

$$x \geq Ax \oplus B \geq A.(Ax \oplus B) \oplus B \geq A^k.x \oplus (\bigoplus_{i=0}^{k-1} A^i.B), \forall k \geq 0$$

En outre

$$A^k.x \oplus (\bigoplus_{i=0}^{k-1} A^i.B) = A^k.x \oplus A^*B$$

D'où

$$x \geq A^k.x \oplus A^*B$$

Remarque : Dans le dioïde \mathbb{R}_{max} , la quantité (A^*B) est la plus petite solution de l'inéquation $x \geq Ax \oplus B$, par contre (A^*B) correspond à la plus petite solution au sens usuel et à plus grande solution de l'inéquation $x \leq Ax \oplus B$ au sens inverse de l'ordre usuel dans \mathbb{R}_{min} .

Exemple 12. Soit le système

$$x = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix}$$

Le calcul de A^* donne

$$A^* = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & e & 3 \\ 4 & \varepsilon & e \end{pmatrix}$$

Cela donne la solution suivante :

$$x = A^*B = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & e & 3 \\ 4 & \varepsilon & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Conclusion

Dans ce premier chapitre nous avons présenté les outils mathématiques utilisés dans ce travail. Après un bref rappel sur les ensembles ordonnés et treillis, leurs relation avec la structure algébrique des dioïdes, nous avons donné les applications définies sur les dioïdes.

Chapitre1 : Outils algébriques

Ensuite, plusieurs types de fonctions définies sur les dioïdes sont considérés, fonctions qui généralement ne sont pas inversibles. Cependant, grâce à la théorie de la résiduation, il est possible de considérer les pseudo-inverses d'application isotone, ainsi que la résolution des équations de type point fixes qui nécessitent la définition de l'application étoile de Kleene qui joue un rôle clé dans le problème d'estimation qui fera l'objet de dernier chapitre.

La théorie des dioïdes est intéressante, car elle permet de représenter de manière linéaire les phénomènes de synchronisation, très présents dans les systèmes de production, le chapitre suivant décrit comment appliquer cette théorie à l'étude de systèmes dynamiques à événements discrets. En particulier, nous chercherons à représenter des systèmes sous forme graphique, basés sur le formalisme des réseaux de Petri. Ensuite, nous verrons comment ces graphes peuvent être représentés dans des dioïdes.

CHAPITRE 2 :
MODELISATION DES
GRAPHES
D'ÉVENEMENTS
TEMPORISES DANS LES
DIOÏDES

Introduction

L'étude des systèmes à événements discrets (SED) constitue un domaine de recherche très actif ayant donné lieu à de nombreuses publications. De cette littérature se dégagent de multiples classes de systèmes et autant de modèles mathématiques qui, en raison de la dynamique complexe de ces systèmes, n'en permettent pas toujours une analyse efficace.

Certaines sous-classes des SED bénéficient néanmoins de modèles linéaires dans les structures algébriques introduites dans le chapitre précédent. Il s'agit notamment des systèmes mettant en jeu des phénomènes de synchronisation et de retard et dont une représentation graphique par des graphes d'événements temporisés GET, qui est une sous-classe des réseaux de Petri (RdP), conduit à des modèles dans les dioïdes avec des variables d'état de type dateurs d'événements ou compteurs d'événements très proche de la représentation d'état d'un système linéaire continu[6].

1. Système à événement discret :

Un système à événements discrets est un système dont l'espace d'état est discret. Les transitions d'état sont provoquées par l'occurrence d'événements. L'ensemble des événements est également discret. Un événement est validé si l'ensemble des conditions nécessaires à son occurrence sont vérifiées.

Pour prendre en compte le temps, des temporisations peuvent être associées aux événements, une temporisation est un laps de temps qui doit être écoulé avant qu'un événement validé puisse survenir.

Au moins deux niveaux d'abstraction peuvent être considérés pour un système à événements discrets :

- On peut s'intéresser exclusivement à l'ordre d'occurrence des événements, c'est-à-dire au comportement logique du système ;
- En plus de l'ordre, on peut étudier les instants d'occurrence des événements, c'est-à-dire le comportement temporisé du système.

Plusieurs objets mathématiques ont été proposés pour modéliser les systèmes à événements discrets. Les réseaux de Petri constituent un de ces formalismes.

2. Modélisation graphique des systèmes à événement discrets :

Les réseaux de Petri (RdP) sont un formalisme privilégié pour l'étude des propriétés qualitatives d'un système complexe. On peut citer la bornitude, la vivacité et l'accessibilité d'état d'un RdP.

Cependant dans notre étude, nous nous intéressons plutôt aux propriétés quantitatives qui peuvent exister entre les différentes places et/ou transitions d'un RdP. Il s'agit d'établir des relations entre elles, qui pourront aisément être formalisées dans un dioïde approprié. Nous traitons plus particulièrement une sous-classe de réseaux de Petri : les graphes d'événements.

3. Réseau de Petri :

Les Réseaux de Petri (RdP) constituent un formalisme graphique propre à la modélisation des Systèmes à Evénements Discrets (SED) introduit en 1962 par Carl Adam Petri. Ils sont particulièrement adaptés à l'étude des processus complexes mettant en jeu des propriétés de synchronisme et de partage de ressources. Leur support mathématique a permis en outre d'établir de nombreux résultats analytiques. Pour l'étude des SED dans l'algèbre des dioïdes, les RdP sont souvent utilisés comme un outil de modélisation intermédiaire. La démarche consiste en effet à modéliser le système étudié en premier lieu par un réseau de Petri, puis à établir, à partir du graphe obtenu, les équations dans le dioïde propre à l'analyse de ce système.

- Ils permettent de décrire de manière précise la structure d'un système,
- Ils offrent un support graphique de conception,
- Ils permettent de décrire le système étape par étape, en décomposant en éléments plus simples les éléments constitutifs initiaux du système,
- Ils permettent de décrire à l'aide d'un même support de base, à la fois la structure et la dynamique d'un système,
- Ils permettent de passer d'une description graphique d'un système à une description formelle permettant l'analyse mathématique du système (cohérence).

3.1 Rappels et notions de base des réseaux de Petri :

Un réseau de Petri est un graphe biparti fait de deux types de sommets : *places* (représentées par des cercles) et *transitions* (représentées par des barres). Des *arcs* orientés relient certaines places à certaines transitions, ou certaines transitions à certaines places. Une place peut contenir un nombre entier de marques ou jeton. A chaque arc on associe un *poids* (entier positif). On associe 1 par défaut aux arcs sur lesquels il ne figure aucun poids.

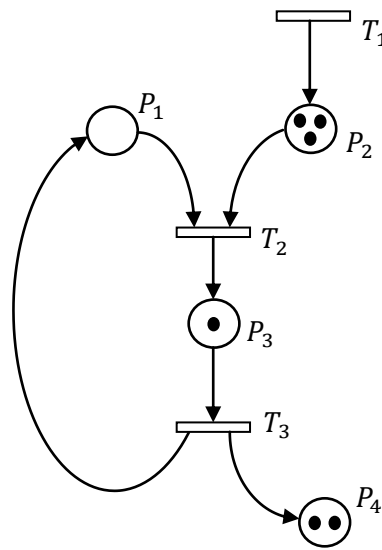


Figure 2.1 : Exemple de réseau de Petri

Définition 2.1 :

Un réseau de Petri est un quadruplet $Q = (P, T, Pré, Post)$ où :

$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ est un ensemble fini de places.

$T = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ est un ensemble fini de transitions.

$Pré : P \times T \rightarrow N$ est l'application d'incidence avant.

$Post : P \times T \rightarrow N$ est l'application d'incidence arrière.

$Pré(P_i, T_j)$ représente le poids de l'arc reliant P_i à T_j , alors que $Post(P_i, T_j)$ représente le poids de l'arc reliant T_j à P_i .

On définit la matrice d'incidence du réseau par l'application W telle que :

$$W = W^+ - W^-$$

Avec : $W_{ij}^+ = Pré(P_i, T_j), W_{ij}^- = Post(P_i, T_j)$

Remarque :

L'accomplissement de certains événements nécessite la disponibilité *simultanée* de plusieurs ressources ou la vérification simultanée de plusieurs conditions. La fin d'un événement entraîne l'apparition simultanée de plusieurs autres événements. Par exemple, pour qu'une conversation téléphonique ait lieu, il faut qu'une ligne soit disponible pour acheminer l'appel et que les deux interlocuteurs aient décroché. La fin de la conversation marque la libération de la ligne, et le fait que les deux interlocuteurs peuvent désormais vaquer à d'autres occupations. De telles considérations peuvent être reprises par exemple à propos d'un atelier flexible.

3.2 Marquage d'un RDP

Définition 2.2 (Marquage) le marquage M d'un réseau de Petri est une application $M: P \rightarrow N$. La quantité $M(p)$ détermine le marquage de la place p . Un réseau de Petri marqué est déterminé par le couple (R, M_0) formé d'un réseau de Petri R et d'un marquage initial M_0 .

Un marquage d'un réseau de Petri se caractérise de manière graphique par la présence de $M(p)$ jetons en chaque place p .

Le marquage du RDP présenté dans la figure 2.1 est donné par : $M = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Exemple 1. Un exemple de réseau de Petri marqué sous forme graphique est donné par la figure 2.2.

Les ensembles des places représentées et les transitions sur le RDP de la figure 2.2 sont respectivement :

$P = \{p_1, p_2, p_3\}$ et $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ On a par ailleurs :

$Pré(p_1, t_1) = 1 ; Post(p_1, t_2) = 1$

$Pré(p_2, t_2) = 1 ; Post(p_2, t_1) = 1$

$Pré(p_3, t_3) = 1 ; Post(p_3, t_4) = 1$

$Pré(p_2, t_4) = 1 ; Post(p_2, t_3) = 1$

Le marquage M représenté ici est $M(p_2) = 1, M(p_1) = M(p_3) = 0$

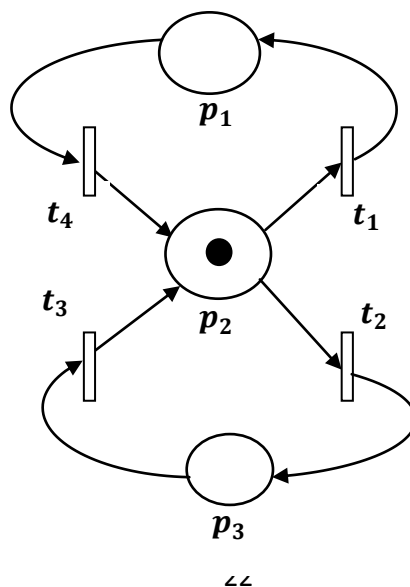


Figure 2.2 : Exemple de réseau marqué

3.3 Tir des transitions

La dynamique d'un RDP est liée aux tirs de ses transitions. Ces tirs consomment et génèrent des jetons. L'évolution au cours du temps des marques des places dans un réseau de Petri définit son comportement dynamique.

Définition 2.3 (Transition franchissable). Étant donné un réseau de Petri R et un marquage M , on dit que la transition $t \in T$ est franchissable pour M si l'on a :

$$\forall p \in P, M(p) \geq \text{pré}(p, t).$$

Lorsque cette condition est satisfaite, l'activation (on dit aussi « le tir ») de la transition t conduit à un nouveau marquage M' défini, $\forall p \in P$, par :

$$M'(p) = M(p) - \text{pré}(p, t) + \text{post}(p, t).$$

Ainsi par exemple, en reprenant le cas du réseau de la figure 2.2 et en partant du marquage $M_0 = (0,1,0)$ (c'est-à-dire $M(p_1) = M(p_3) = 0$ et $M(p_2) = 1$), on atteint par tir de la transition t_1 le marquage $M_1 = (1,0,0)$; puis à partir de M_1 , par tir de la transition t_3 , on obtient le marquage $M_2 = (0,1,0)$ et ainsi de suite. Concrètement, l'activation d'une transition provoque le retrait d'un jeton dans chaque place amont de cette transition et un jeton est placé dans chacune de ses places aval.

3.4 Evolution d'un RdP:

L'évolution d'un RdP correspond à l'évolution de son marquage au cours du temps (évolution de l'état du système) : il se traduit par un déplacement de marques ce qui s'interprète comme la consommation/production de ressources déclenchée par des événements ou des actions. Déterminer l'évolution d'un RdP correspond en fait à le simuler, terme plus généralement utilisé en modélisation.

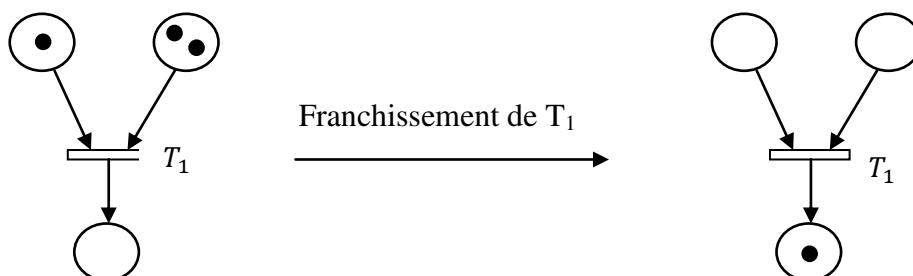


Figure 2.3 : RdP avant franchissement de T_1 (gauche) et après franchissement de T_1 (droite)

Définition 2.4. Une transition est dite validée si toutes les places en amont (c'est-à-dire en entrée) de celle-ci possèdent au moins une marque. Une transition source est par définition toujours validée.



Figure 2.4 : Transition validée (gauche), non validée (droite)

3.5 Quelques propriétés des RdP [2]:

Accessibilité : Un marquage M_f est accessible à partir du marquage initial M_0 s'il existe une séquence de franchissement S telle que : du franchissement de cette séquence à partir de M_0 , résulte un nouveau marquage M_f et on note : $M_0[S > M_f$

Cette propriété permet de savoir si un état non désiré risque de se produire.

Bornitude : Une place P_i est dite *bornée* pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible à partir de M_0 , le nombre de marques dans P_i est fini.

Un RdP est dit borné si toutes ses places sont bornées.

Vivacité : Un réseau de Petri est dit *vivant* pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage M accessible à partir de M_0 et pour toute transition T_i , il existe une séquence de franchissement S qui inclut la transition T_i .

Cette propriété permet de déduire si le système ne comporte pas de blocage.

Remarque : On notera que la vivacité et l'absence de blocage sont deux notions bien distinctes. Un réseau peut être sans blocage bien qu'aucune de ses transitions soient vivantes.

3.6 Ensemble des marquages accessibles

Soit $P = (R, M_0)$ un RdP marqué. L'ensemble des marquages accessibles de P notés M_a , est l'ensemble des marquages que l'on peut atteindre à partir du marquage initial M_0 par une séquence de franchissement S . On peut, lorsque cet ensemble est fini, le représenter sous la forme d'un graphe. Les sommets de ce graphe correspondent aux différents marquages accessibles de M_a . Un arc orienté relie deux sommets M_i et M_j s'il existe une transition t franchissable permettant de passer d'un marquage à un autre, ce qui se note $M_i \xrightarrow{t} M_j$ Ainsi, on peut noter plus formellement l'ensemble M_a de la manière suivante :

$$M_a = \{M_i \mid \exists S, M_0 \xrightarrow{S} M_i\}.$$

La figure 2.5 représente le graphe des marquages accessibles pour le réseau de Pétri de la figure 2.2 avec un marquage initial , $M_0 = (0, 1, 0)$.

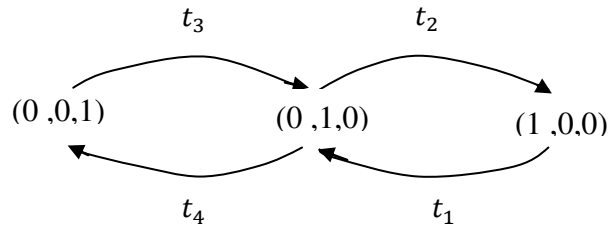
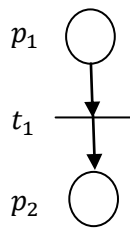


Figure 2.5 .Exemple de graphe des marquages accessibles

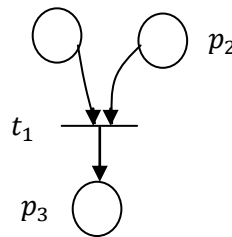
3.7 Classes de Réseaux de Petri [23]

3.7.1 Graphe d'état

Un RdP non marqué est un graphe d'état si et seulement si toute transition a exactement une place d'entrée et une place de sortie.



(a) Graphe d'état



(b) Ne sont pas des graphes d'état

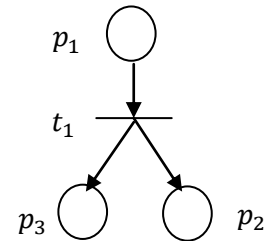


Figure 2.6 Graphe d'état

3.7.2 Graphe d'événement

Un RDP est un graphe d'événement si et seulement si toute place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie. Un graphe d'événement est donc dual d'un graphe d'état.

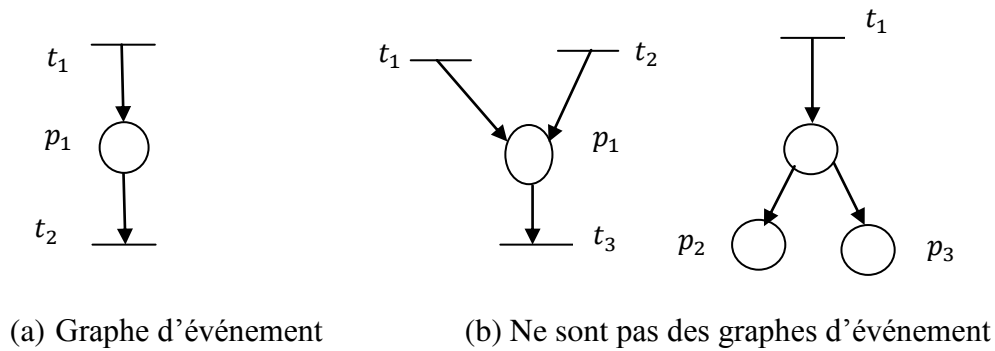


Figure 2.7 Graphe d'événement

Remarque :

- Un graphe d'événement est parfois appelé graphe de transition ou graphe marqué (cette dernière expression, marked graph en anglais, peut donner lieu à confusion avec RdP marqué).
- Dans un graphe d'état il peut y avoir des conflits, mais il n'y a pas de synchronisation. Dans un graphe d'événements il peut y avoir des synchronisations mais il n'y a pas de conflit.

3.7.3 Réseau de Petri sans conflit

C'est un RdP dans lequel toute place a au plus une transition de sortie. Un conflit (ou conflit structural) correspond donc à l'existence d'une place p_i qui a au moins deux transitions de sortie, t_j, t_k, \dots . Notation $\langle p_i\{t_j, t_k, \dots\} \rangle$.

Le RDP de la figure 2.8(b) a le conflit $\langle p_1\{t_2, t_3\} \rangle$

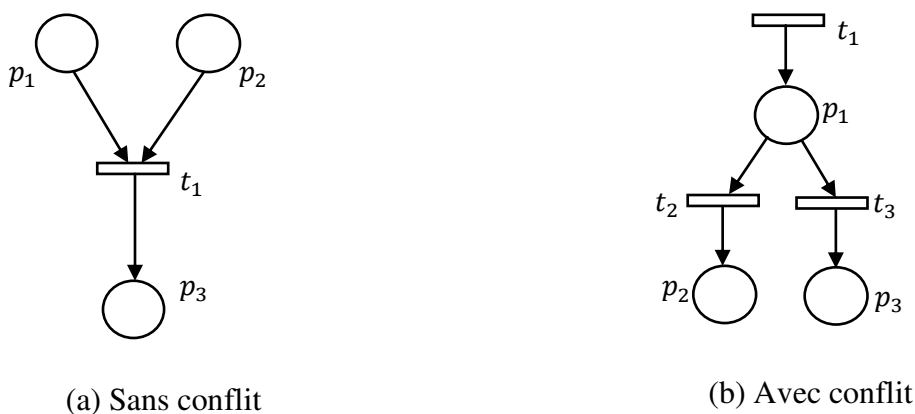


Figure 2.8: RdP Conflit et sans conflit

3.7.4 Réseau de Petri à choix libre

Un réseau de Petri est dit à choix libre est un RdP dans le quelle pour tout conflit $\langle p_1\{t_2,t_3\} \rangle$ aucune des transitions t_2,t_3 ne possède une autre place d'entrée que (voir figure 2.8(b)).

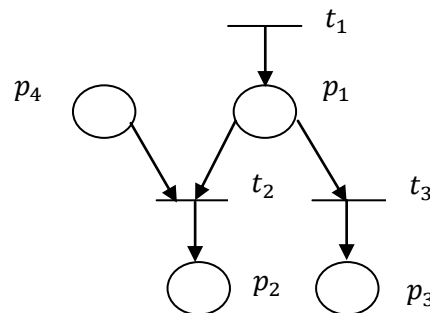


Figure 2.9 RdP pas à choix libre

3.7.5 Réseau de Petri simple

Un RDP est dit simple si et seulement si toutes ses transitions n'interviennent que dans un seul conflit au maximum. Le RDP représenté dans la figure 2.11 est simple et celui représenté figure 2.12 n'est pas simple car t_2 intervient dans les deux conflits $\langle p_1\{t_2,t_3\} \rangle$ et $\langle p_4\{t_2,t_5\} \rangle$.

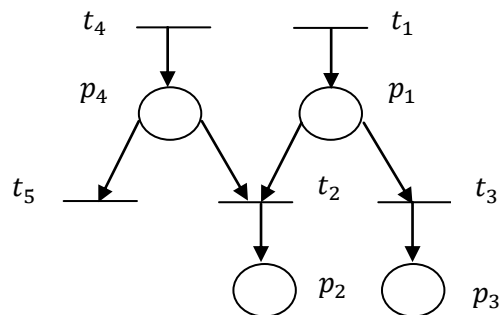


Figure 2.10 Exemple d'un RdP n'est pas simple

Remarque :

On peut noter que l'ensemble des RdPs simples inclut l'ensemble des RdPs à choix libre, qui inclut l'ensemble des RdPs sans conflit, qui inclut lui-même l'ensemble des graphes des événements.

3.7.6 Réseau de Petri pur

Un RdP pur est RdP dans lequel il n'existe pas de transition ayant une place d'entrée qui soit également place de sortie de cette transition.

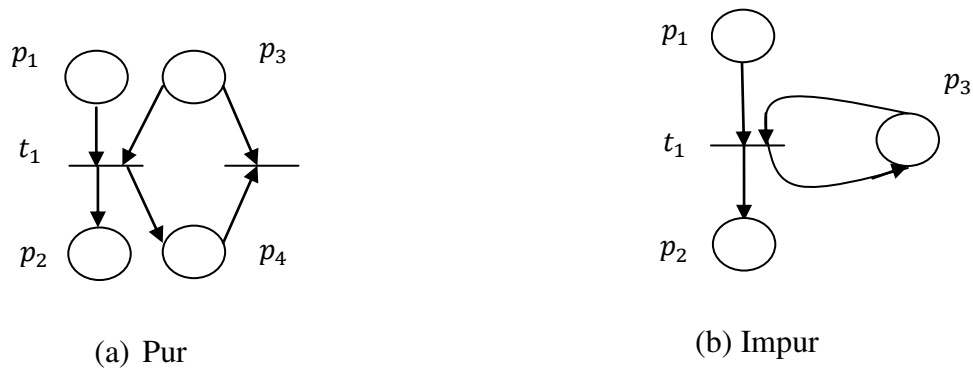


Figure 2.11 RdP pur et impur

4. Graphes d'événements temporisés (GET) :

Dans notre travail, nous allons s'intéresser à l'une de ces structures qui est les graphes d'événements temporisés, dont nous présentons dans la section suivante quelques propriétés correspondantes.

Définition 2.5. Un graphe d'événement est un réseau de Petri où chaque place possède exactement une transition d'entrée et une transition de sortie. Un graphe d'événement est dit temporisé si des temporisations sont associées aux places et/ou transitions. Dans la suite de ce mémoire, nous considérons des graphes d'événement P-temporisés où les temporisations sont associées aux places. Pour chaque couple de transitions $t_i, t_j \in T$, tel que T est l'ensemble des transitions du graphe considérée. On note p_{ij} . La place qui relie la transition t_j à t_i . Si cette place existe, la temporisation correspondante est notée τ_{ij} et son marquage est noté M_{ij} . Si quelque soit l'évolution du graphe considéré le plus grand marquage des places est 1, on dit que le graphe est binaire ou sauf.

4.1 Synchronisations et concurrences [22], [17]

Le formalisme des réseaux de Pétri est suffisamment puissant pour permettre de représenter, de façon fine et précise, une grande variété de comportements de systèmes réels mettant en jeu des phénomènes de concurrence et de synchronisation.

Sur la figure 2.12, nous avons représenté quatre motifs de réseaux de Pétri permettant de les décrire.

- La figure 2.12 (a) représente une structure nécessitant un choix. La place p_1 a deux transitions aval, notées t_1 et t_2 . Formellement, cette situation arrive si la proposition suivante est vraie : $\exists p \in P, \text{Pré}(p, t_1) \times \text{Pré}(p, t_2) \neq 0$. Le tir de t_1 ou de t_2 consomme le jeton de la place p_1 et exclue donc le tir de l'autre. Une telle configuration permet de

modéliser un phénomène de concurrence a la consommation, comme par exemple le partage d'un processeur entre des taches concurrentes dans un système informatique ;

- la configuration de la figure 2.12 (b) permet quant a elle de modéliser une concurrence a l'apport de jetons dans une place, ici p_1 ;
- le motif de la figure 2.12 (c) représente un phénomène de rendez-vous. La transition t_1 n'est franchissable que lorsque les places p_1 et p_2 contiennent toutes les deux au moins un jeton ;
- dans la structure de la figure 2.12 (d), l'apport de jetons dans les places p_1 et p_2 est synchronisé par le tir de la transition t_1 et permet, par exemple, de modéliser l'initialisation simultanée de différentes taches dans un système a événements discrets.

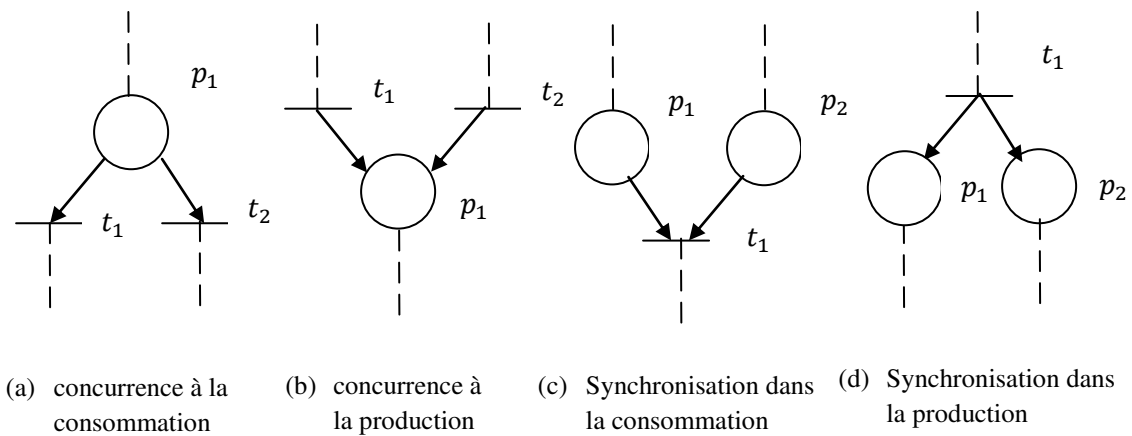


Figure 2.12: Concurrence et synchronisation dans les RdP.

4.2 Introduction du temps dans les graphes d'événements(GET) [16]

Les modèles de systèmes à événements discrets étudiés par la suite sont temporisés.

Un RdP temporisé est un graphe d'évènements auquel on associe des temporisations. Il permet de décrire un système dont le fonctionnement dépend du temps. Les RdPs temporisés sont utiles pour l'évaluation des performances d'un système. Soit les temporisations sont associées aux places (RdP P-temporisé) soit aux transitions (RdP T-temporisé).

Dans notre travail nous allons s'intéresser aux réseaux de Petri P-temporisés.

Définition 2.6 (Réseaux de Petri P-temporisés). On associe pour chaque couple de transition $t_i, t_j \in T$, on note P_{ij} la place qui relie la transition t_j à t_i . Si cette place P_{ij} existe, la temporisation (en valeur rationnelle positive) correspondante est notée τ_{ij} et son marquage noté m_{ij} .

La plus grande temporisation du graphe d'évènement considéré est notée τ^{max} , définie par :

$$\tau^{max} = \max\{\tau_{ij}\}_{ij/p_{ij} \in P}.$$

Le plus grand marquage initial des places du graphe d'évènement considéré est noté m^{max} ,

$$\text{défini par : } m^{max} = \max\{m_{ij}\}_{ij/p_{ij} \in P}$$

Principe de fonctionnement : lorsqu'une marque arrive dans une place temporisée, on dit qu'elle est indisponible pendant un temps τ_{ij} . Quand le temps est écoulé, la marque devient disponible.

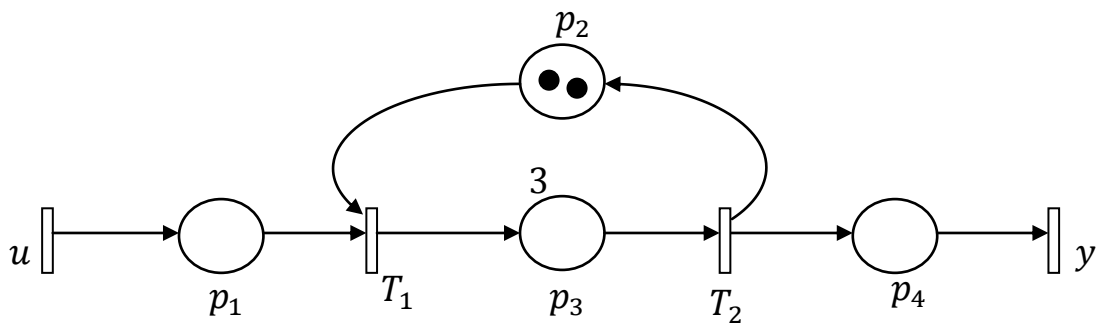


Figure 2.13: Exemple d'un graphe d'évènement temporisé d'une cellule de production

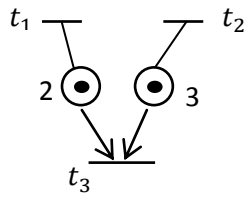
4.3 Fonctions compteurs, domaine temporel

La mise en équation de GET peut se faire dans le domaine temporel, où le système est écrit par des fonctions dépendant du temps t . Dans ce cas, on ne s'intéresse plus aux dates d'activation des transitions mais au nombre d'activation de ces dernières jusqu'à un moment donné. En effet, cette représentation consiste à associer à chaque transition un vecteur $\theta(t) \in \mathbb{R}_{min}^n$ que l'on appellera compteur. Le comportement d'un graphe d'évènements temporisé, si on s'intéresse à l'évolution au plus tôt, est représenté par l'équation dans \mathbb{R}_{min}^n .

On associe à chaque transition t_i une fonction appelée compteur $\theta(t) \in \mathbb{R}_{min}^n$ qui désigne le nombre de tirs de transition t_i cumulés à l'instant t .

Les compteurs correspondants aux transitions source sont les composantes du vecteur $u(t) \in \mathbb{R}_{min}^m$.

Exemple



$$\theta_3(t) \leq \min(1 + \theta_1(t - 2), 1 + \theta_2(t - 3))$$

Plus généralement, le comportement d'un graphe d'événements temporisé est représenté par l'inéquation suivante :

$$\theta(t) \leq \oplus_{\tau=0}^{\tau \max} (A_{\tau} \cdot \theta(t - \tau) \oplus B_{\tau} \cdot u(t - \tau)).$$

où $A_{\tau} \in \mathbb{R}_{min}^{n \times n}$ est la matrice dont le terme $A_{\tau,ij}$ est égal a m_{ij} , qui correspond au nombre de jetons initiaux dans la place p_{ij} si cette place existe et ε sinon. Les termes des matrices $B_{\tau}(k) \in \mathbb{R}_{min}^{n \times m}$ correspondent aux marquages initiaux des places de sortie des transitions sources. En général, on s'intéresse à l'évolution au plus tôt des graphes d'événements temporisés, c'est-à-dire qu'une transition est franchie dès qu'elle est franchissable. Cette évolution correspond à la solution maximale de l'inéquation précédente dans \mathbb{R}_{min} . Cette solution satisfait l'équation linéaire suivante :

$$\theta(t) = \oplus_{\tau=0}^{\tau \max} (A_{\tau} \cdot \theta(t - \tau) \oplus B_{\tau} \cdot u(t - \tau)). \quad (2.2)$$

L'équation (2.2) est implicite en général. Elle est souvent remplacée par la solution explicite (forme ARMA).

Définition 2.7 (forme ARMA). Appelée aussi forme **explicite**, définit l'ensemble des dates au plus tôt pour le fonctionnement du système. Ainsi, à partir d'un vecteur de commande $u(t)$ et des états précédents, l'équation (2.3) permet de déterminer toutes les valeurs du vecteur d'état. ARMA signifie (Auto-Régressif à Moyenne Ajustée (Auto Regressive-Moving Average en anglais)).

En fait, le passage à la forme explicite se fait par la résolution de la partie implicite, en sélectionnant la plus grande solution de l'équation implicite. Ceci correspond bien au fonctionnement « au plus tôt ». la forme ARMA est donné comme suit :

$$\theta(t) = \oplus_{\tau=1}^{\tau \max} (A_0^* \cdot A_{\tau} \theta(t - \tau) \oplus A_0^* B_{\tau} u(t - \tau)) \quad (2.3)$$

Où : A_0^* est l'étoile de Kleene de la matrice A_0 .

Du point de vue de la l'interprétation, la suppression de la partie implicite correspond dans le Graphe d'événements à une transformation au cours de laquelle les places internes (entre deux transitions) sans temporisation sont supprimées.

Equation d'état dans \mathbb{R}_{min}

Par analogie avec la théorie des systèmes linéaires classiques, l'équation explicite (2.3) peut être transformée en une forme d'état. Pour obtenir un modèle d'état, nous décomposons toutes les places dont la temporisation $\tau > 1$ en τ places temporisées à 1. Nous ajoutons donc $(\tau-1)$ transitions intermédiaires. On associe des compteurs à ces transitions intermédiaires, au nombre de n' qui sont les composantes du vecteur $\bar{\theta}(t) \in \mathbb{R}_{min}^{n'}$. Le vecteur d'état résultant, noté $x(t)$, appartient à \mathbb{R}_{min}^N , avec $N = n + n'$, et est défini par :

$$x(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \bar{\theta}(t) \end{pmatrix}.$$

Le comportement dynamique du graphe d'événements temporisé étendu est décrit par une équation de la forme :

$$x(t) = \hat{A}_0 \cdot x(t) \oplus \hat{A}_1 \cdot x(t-1) \oplus \hat{B} \cdot u(t),$$

Qui peut s'écrire sous la forme explicite :

$$x(t) = A \cdot x(t-1) \oplus B \cdot u(t), \quad (2.4)$$

$$\text{avec } A = \hat{A}_0^* \cdot \hat{A}_1 \text{ et } B = \hat{A}_0^* \cdot \hat{B}$$

4.2 Fonctions dateurs, domaine événementiel

Pour la représentation en dateurs, on s'intéresse aux dates d'activation des transitions du GET. Dans ce cas, on associe à chaque transition une fonction $\theta(k) \in \mathbb{R}_{max}^n$ cette fonction est appelée dateur. Les dateurs correspondants aux transitions source sont les composantes du vecteur $u(k) \in \mathbb{R}_{max}^m$.

La dynamique d'un graphe d'événements temporisé est représentée par l'inéquation suivante :

$$\theta(k) \geq \oplus_{l=0}^{m \max} (A_l \cdot \theta(k-l) \oplus B_l \cdot u(k-l)).$$

où $A_l \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ est la matrice dont le terme $A_{l,ij}$ est égal à τ_{ij} , qui correspond a la temporisation de la place p_{ij} marquée à l . Si cette place n'existe pas, le terme $A_{l,ij}$ est égale à ε . Les termes des matrices $B_l \in \mathbb{R}_{max}^{n \times m}$ correspondent aux temporisations des places de sortie des transitions source.

En général, on s'intéresse à l'évolution au plus tôt des graphes d'événements temporisés, c'est à dire qu'une transition est franchie dès qu'elle est franchissable. Cette évolution correspond à la solution minimale dans \mathbb{R}_{max} de l'inéquation précédente. Cette solution satisfait l'équation linéaire suivante :

$$\theta(k) = \oplus_{l=0}^{m \max} (A_l \cdot \theta(k-l) \oplus B_l \cdot u(k-l)) \quad (2.7)$$

L'équation (2.7) est implicite en général. Elle est souvent remplacée par sa solution explicite suivante :

$$\theta(k) = \oplus_{l=1}^{m \max} (A_0^* \cdot A_l \theta(m-l) \oplus A_0^* B_l u(m-l)) \quad (2.8)$$

Où A_0^* est l'étoile de Kleene de la matrice A_0 .

Equation d'état dans \mathbb{R}_{max} .

Pour obtenir un modèle d'état dans \mathbb{R}_{max} pour des GET, nous décomposons toutes les places dont le marquage $m > 1$ en m places marquées à 1, et donc, nous ajoutons $(m-1)$ transitions intermédiaires. On associe des dateurs à ces transitions intermédiaires au nombre de n'' qui sont les composantes d'un vecteur $\bar{\theta}(k) \in \mathbb{R}_{max}^{n''}$. Le vecteur d'état résultant, noté $x(k)$, appartient à \mathbb{R}_{max}^N , avec $N = n + n''$, et est défini par :

$$x(k) = \begin{pmatrix} \theta(k) \\ \bar{\theta}(k) \end{pmatrix}.$$

Dans notre cas, nous considérons des graphes d'événements dont le marquage des place qui ont des transirons source en amont est nul. Le comportement dynamique du graphe d'événements temporisé étendu est décrit par une équation de la forme :

$$x(k) = \hat{A}_0 \cdot x(k) \oplus \hat{A}_1 \cdot x(k-1) \oplus \hat{B} \cdot u(k),$$

Qui peut s'écrire sous la forme explicite suivante :

$$x(k) = A \cdot x(k-1) \oplus B \cdot u(k), \quad (2.9)$$

Avec $A = \hat{A}_0^* \cdot \hat{A}_1$ et $B = \hat{A}_0^* \cdot \hat{B}$

Exemple :

Nous considérons le graphe d'événement temporisé suivant :

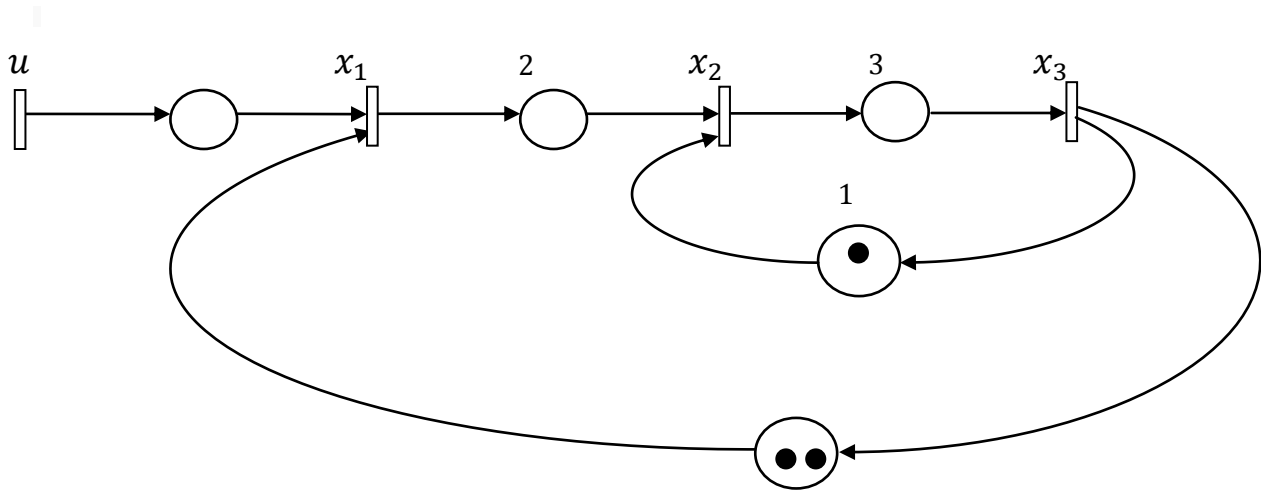


Figure 2.14 Graphe d'événements P-temporisés

Equation compteur :

On considère un franchissement au plus tôt, c'est-à-dire que toute transition validée est immédiatement franchie. Les fonctions compteurs vérifient alors les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_1 \leq \min\{u(t), x_3(t) + 2\} \\ x_2 \leq \min\{x_1(t-2), x_3(t-1) + 1\} \\ x_3 \leq \min\{x_2(t-3)\} \end{cases}$$

Dans l'algèbre $(\min, +)$, La solution au plus tôt de ces équations est comme suit :

$$\begin{aligned} x_1 &= u(t) \oplus 2 \otimes x_3(t) \\ x_2 &= x_1(t-2) \oplus 1 \otimes x_3(t-1) \\ x_3 &= x_2(t-3) \end{aligned}$$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$, Matriciellement, on peut écrire

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} X(t) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} X(t-1) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} X(t-2) \\ &\oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix} X(t-3) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}$$

Cette solution est implicite, et peut être remplacée par sa solution explicite :

$$X(t) = A_0^* [X(t-1) \oplus A_2 X(t-2) \oplus A_3 X(t-3) \oplus B_0 U(t)]$$

Avec

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Premièrement, on calcule A_0^* , tel que $A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$

$$A_0^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_0^i = I_4 \oplus A_0 \oplus A_0^2 \oplus A_0^3$$

I est une matrice identité tel que :

$$I = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

Calcul de A_0^* :

$$A_0^2 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Donc $A_0^* = I \oplus A_0$

$$A_0^* = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

Calcul de la forme explicite :

$$A_0^* A_1 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_0^* A_2 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_0^* A_3 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_0^* B_0 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

La forme explicite s'écrit sous la forme suivante :

$$X(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} X(t-1) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} X(t-2) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix} X(t-3) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} U(t)$$

Pour avoir la forme d'état, nous avons étendu le graphe d'événements temporisés initial pour avoir un nouveau graphe équivalent avec des temporisations égales à 1 ou à 0. Nous obtenons alors le graphe de la Figure 2.15

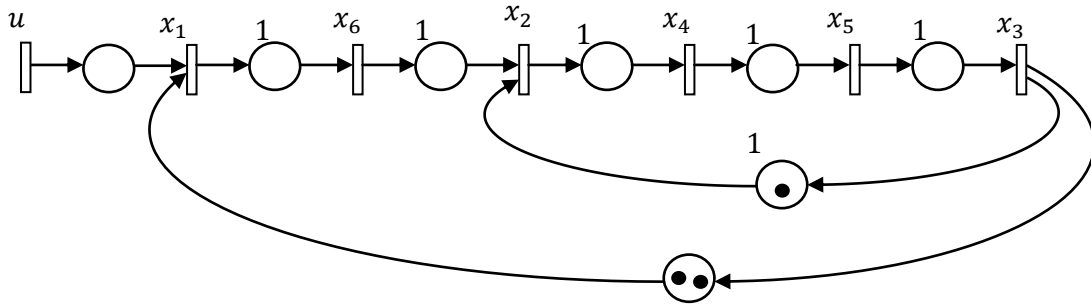


Figure 2.15: Graphe d'événements temporisés étendu

On calcul le modèle d'état :

$$\begin{cases} x_1(t) = 2 \otimes x_3(t) \oplus u(t) \\ x_2(t) = 1 \otimes x_3(t-1) \oplus x_6(t-1) \\ x_3(t) = x_5(t-1) \\ x_4(t) = x_2(t-1) \\ x_5(t) = x_4(t-1) \\ x_6(t) = x_1(t-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = 2 \otimes x_5(t-1) \oplus u(t) \\ x_2(t) = 1 \otimes x_3(t-1) \oplus x_6(t-1) \\ x_3(t) = x_5(t-1) \\ x_4(t) = x_2(t-1) \\ x_5(t) = x_4(t-1) \\ x_6(t) = x_1(t-1) \end{cases}$$

La représentation d'état s'écrit comme suit :

$$X(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} X(t-1) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(t)$$

Equation aux dateurs :

Pour le graphe d'événements de la Figure 2.14, on associe une fonction dateur $x_i(k)$ à chaque transition. Pour un franchissement au plus tôt, les fonctions dateurs vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_1(k) \geq \max\{x_3(k-2), u(k)\} \\ x_2(k) \geq \max\{2 + x_1(k), 1 + x_3(k-1)\} \\ x_3(k) \geq \max\{3 + x_2(k)\} \end{cases}$$

Dans l'algèbre $(\max, +)$, La solution au plus tôt de ces équations est comme suit :

$$\begin{cases} x_1(k) = x_3(k-2) \oplus u(k) \\ x_2(k) = 2 \otimes x_1(k) \oplus 1 \otimes x_3(k-1) \\ x_3(k) = 3 \otimes x_2(k) \end{cases}$$

La forme implicite :

$$X(n) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{bmatrix} x(n) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(n-1) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(n-2) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(n)$$

Avec

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \text{ et } B_0 = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

Ecriture sous forme explicite :

$$X(n) = A_0^* A_1 x(n-1) \oplus A_0^* A_2 x(n-2) \oplus A_0^* B_0 u(n)$$

$$A_0^* = I \oplus A_0 \oplus A_0^2$$

$$A_0^2 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_0^3 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_0^* = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & e & \varepsilon \\ 5 & 3 & e \end{bmatrix}$$

$$A_0^* A_1 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & e & \varepsilon \\ 5 & 3 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_0^* A_2 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & e & \varepsilon \\ 5 & 3 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_0^* B_0 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & e & \varepsilon \\ 5 & 3 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

On aura l'équation explicite suivante :

$$X(n) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{bmatrix} x(n-1) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} x(n-2) \oplus \begin{bmatrix} e \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} u(n)$$

Pour avoir la forme d'état, nous avons étendu le graphe d'événements temporisés de la figure 2.14 pour cela nous décomposons chacune des deux places ayons deux jetons en deux places avec un seul jeton, et ajoutons aussi deux transitions intermédiaires. Nous obtenons un GET équivalent dans les marquages sont égaux à 1 ou 0. Nous obtenons alors le graphe de la figure 2.16

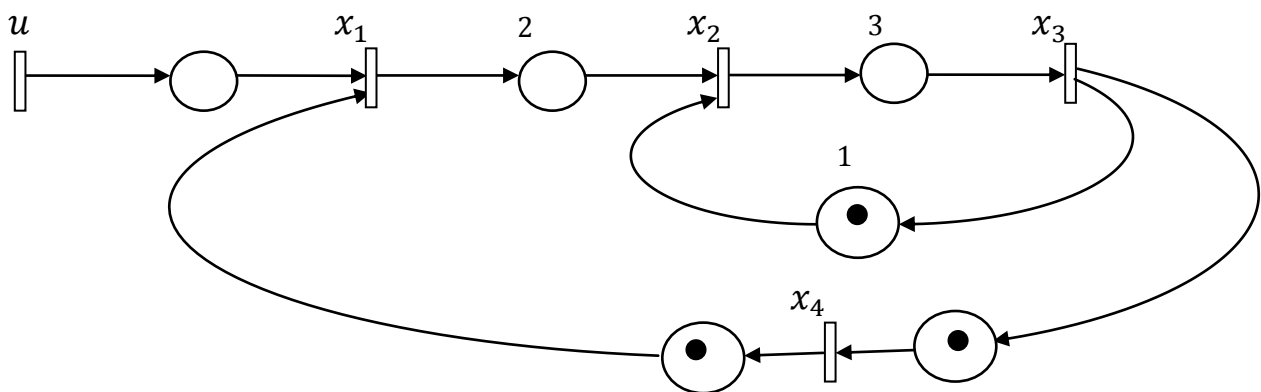


Figure 2.16 : Graphe d'événements temporisés étendu

Le modèle d'état obtenu est donnée par :

On calcule le modèle d'état :

$$\begin{cases} x_1(k) = x_4(k-1) \oplus u(k) \\ x_2(k) = 2 \otimes x_1(k) \oplus 1 \otimes x_3(k-1) \\ x_3(k) = 3 \otimes x_2(k) \\ x_4(k) = x_3(k-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(k) = x_4(k-1) \oplus u(k) \\ x_2(k) = 2 \otimes x_4(k-1) \oplus 2 \otimes u(k) \oplus 1 \otimes x_3(k-1) \\ x_3(k) = 3 \otimes x_2(k) \\ x_4(k) = x_3(k-1) \end{cases}$$

Le modèle d'état obtenu est donnée par :

$$X(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & 2 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix} X(t-1) \oplus \begin{bmatrix} e \\ 2 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(t)$$

Conclusion

Dans ce chapitre, on a principalement abordé les problèmes liés à la modélisation des systèmes linéaires dans les dioïde. Nous avons vu la modélisation de systèmes à événements discret par des réseaux de patri et plus particulièrement, par une sous-classe des réseaux de Patri, à savoir, les graphes d'événement temporisés avec les représentations aux dateurs et aux compteurs.

Les représentations d'état basées sur des dateurs et des compteurs d'évènements nous ont permis de représenter les systèmes sous une forme récurrente explicite canonique.

CHAPITRE 3 :

**PRINCIPE D'ESTIMATION DES
GRAPHES D'ÉVÉNEMENTS
TEMPORISÉS ET DÉTECTION DE
DÉFAILLANCE**