

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI OUZOU
FACULTE DU GENIE DE LA CONSTRUCTION
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME

Master académique

Option : Construction mécanique

THEME

ANALYSE EXPERIMENTALE ET NUMERIQUE

DES CHAMPS DE CONTRAINTES DANS DES PIECES MECANIQUES

Proposé par

Mr BILEK

Présenté par

Melle BOURKACHE Ourida

2017 /2018

Remerciements

Je remercie le bon dieu de m'avoir montré le chemin de la science et m'avoir donné le courage de le suivre.

Je destine mes remerciements les plus vifs à Mr Bilek Ali pour avoir accepté de m'encadrer et superviser mon travail. Sans que j'oublie de remercier également Mr Beldi M et pour le soutien qu'il a accordé à ce projet tout au long de sa réalisation.

Je me dois de remercier bien comme il le faut tous les enseignants qui ont contribué à ma formation et à l'enrichissement de mon enseignement.

Mes remerciements vont également à messieurs les membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'examiner et de juger mon travail.

Enfin que tous ceux qui m'ont aidé de loin ou de près puissent trouver ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Dédicaces

*A tous ceux qui font de moi une personne meilleure chaque
jour*

Mes parents

Mes sœurs : Narimene et Lina

Mes frères : Mohamed et Nadir

*A celui qui était toujours ma source de courage et de
bonheur (Yacine)*

A la mémoire de ma grand-mère

Mes oncles et mes tantes et à toute ma famille

A tout mes amis et mes camarades de promo

*A tous ceux qui me connaissent et m'apprécient, je
leurs dédie ce modeste travail.*

Sommaire

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

CHAPITRE I : Généralités

I Généralité sur la photoélasticimétrie.....	2
I.1 Introduction.....	2
I.2 Définition.....	3
I.3 Principe de la photoélasticimétrie.....	3
I.3.1 Polariseurs et Analyseurs.....	4
I.4 Le phénomène de biréfringence.....	4
I.4.1 Description des milieux biréfringents.....	4
I.4.2 La constante de frange.....	5
I-5-Description de la réfraction.....	5
I.5.1 Définition du l'indice de réfraction.....	6
I.6 Polariscopes.....	6
I. 6. 1. Différents types de polariscopes.....	7
I.6.2. Polariscopes à transmission.....	7
I.6.3 Polariscopes à réflexion.....	7
I.7 Eléments d'un polariscopes.....	8
I.7.1 Sources lumineuses.....	8
I.2 Généralité sur l'élasticité linéaire.....	9
I.2.1 Introduction.....	9
I.2.2 définition de l'Elasticité.....	9
I.2.3 Théorie de l'élasticité.....	9
I.2.4 Contraintes et déformations.....	10
I.2.4.1 Définition des Contraintes.....	10

I.2.4.1.1 Tenseur de contraintes.....	10
I.2.4.1.2 Contrainte de traction et de compression.....	11
I.2.4.1.3 Contraintes tangentielles.....	12
I.2.4.1.4 Contrainte de torsion.....	12
I.2.4.1.5 Contrainte de flexion.....	13
I.2.4.1.6 Moments quadratiques.....	14
I.2.4.2 Déformations	14
I.2.4.2.1 Cas de la traction simple	15
I.2.4.2.2 Cas de la torsion.....	15
I.2.4.3 Etude de la déformée en flexion.....	16
I.2.5. Relations entre contraintes et déformations.....	16
I.2.6 Représentation de Mohr	17
I.2.6.1 Tracés du cercle de Mohr.....	18
I.2.6.2 Cercle de Mohr pour une sollicitation uniaxiale.....	19
I.2.6.3. Cercle de Mohr pour un cisaillement pur	21
I.2.6.4. Cercle de Mohr pour une sollicitation biaxiale.....	21
I.2.7 Lois de Maxwell.....	22

CHAPITRE II : Contact mécanique

II.1 Introduction.....	24
II.2 Application d'un effort normal seul.....	24
II.2.1 Contact cylindre sur cylindre.....	24
II.2.2 Contact cylindre sur plan.....	30
II.2.3 Contact poinçon sur plan.....	31

CHAPITRE III: Analyse expérimentale

III.1 Introduction.....	33
III.2 Modèle utilisé.....	33
III.3 Vérification du modèle.....	33
III.4 Détermination des efforts.....	34
III.5 Détermination de la valeur de frange.....	34
III.6 Détermination des contraintes.....	39

III.7	Visualisation du réseau d'isochrome sur le modèle en champ obscur.....	40
III.8	Les isoclines.....	41
III.9	Le deuxième modèle.....	43
III.10	Visualisation du réseau d'isochrome sur le modèle en champ obscur.....	44
III.11	Calcul de la valeur de τ_{\max} suivant le segment [AB].....	45
III.12	Les franges isoclines.....	46

CHAPITRE IV: Analyse numérique

IV.1.	Analyse numérique des contraintes.....	48
IV.2.	Traçage des isochromes.....	49
IV.3.	Visualisation des isoclines.....	50
IV.4.	La variation de la contrainte de cisaillement maximale le long de la droite [AB].	51
IV.5.	Comparaison des résultats.....	52
IV.5.1.	Comparaison de Réseau d'isochromes.....	52
IV.5.2.	Comparaison des graphes numériques et expérimentaux.....	53
IV.6.	Interprétation des résultats.....	53
IV.6.1.	Discussion sur les images isochromes.....	53
IV.6.2.	Discussion sur les tracés d'évolution de $[(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2]$.....	53
Conclusion générale.....		55

NOMENCLATURE ET SYMBOLES

Lettres latines majuscules

R : Rayon du cylindre
 C : Constante optique relative du matériau biréfringent
 C_1, C_2 : Constantes photoélastiques absolues du matériau
 C_0 : La vitesse de la lumière dans le vide
 V_1 : vitesse de la lumière dans le milieu considéré
 E_1 : Module de Young du cylindre en aluminium
 E_2 : Module de Young de l'époxy
 WL : Charge par unité de longueur
 E_{eq} : Module de Young équivalent
 N : Ordre de frange du modèle
 H : Point de Hertz
 F_N : Charge normale
 F_T : Charge tangentiel
 P_0 : pression à l'origine
 T : Période
 U : Direction d'observation
 V : Direction de propagation
 X : Axe du polariseur
 Y : Axe du l'analyseur
 a : demi- largeur du contact cylindre sur plan
 b : demi- largeur du contact poinçon sur plan

Lettres latines minuscules

f : Constante de frange du modèle
 e : épaisseur du modèle
 a : demi largeur de contact plan sur plan
 b : demi largeur de contact cylindre sur plan

Lettres grecques

σ_{xx} : Contrainte normale sur la face xx

σ_{zz} : Contrainte normale sur la face zz

σ_{xz} : Contrainte normale sur la face xz

σ_{rr} : Contrainte normale sur la face rr

$\sigma_{\theta\theta}$: Contrainte normale sur la face $\theta\theta$

σ_{zz} : Contrainte normale sur la face zz

τ_{xy} : Contrainte de cisaillement

τ_1, τ_{\max} : Contraintes de cisaillement maximales

σ_1, σ_2 , Contraintes principales dans le modèle

λ : Longueur d'onde

n_1, n_2 et n_3 : Indices de réfraction

δ : Différence de chemin optique entre les deux rayons

ν_1 : Coefficient de Poisson de l'aluminium

ν_2 : Coefficient de Poisson du modèle en époxy

μ : Coefficient de frottement

$I_{(x,y)}$: Intensité lumineuse

Liste des figures

N° de la figure	Nomination de la figure	N° de page
Fig. (I.1)	Schéma de principe de la photoélasticimétrie plane par réflexion.....	4
Fig. (I.2)	Polariscope rectiligne (champ obscur).....	6
Fig. (I.3)	Polariscope à réflexion.....	7
Fig. (I.4)	État de contraintes sur une face orientée suivant n_1	10
Fig. (I.5)	Poutre en flexion simple.....	13
Fig. (I.6)	Cercle de Mohr pour un état de contraintes planes.....	19
Fig. (I.7)	État d'équilibre uniaxial.....	20
Fig. (I.8)	Cercle de Mohr de la traction.....	21
Fig. (I.9)	Cercle de Mohr pour un état de contrainte biaxiale.....	22
Fig. (I.10)	Modèle sous contraintes planes.....	22
Fig. (II.1)	Contact entre deux cylindres.....	25
Fig. (II.2)	Cas d'un solide semi-infini.....	26
Fig. (II.3)	Contact cylindre sur plan.....	30
Fig. (II.4)	Isovaleurs des contraintes principales σ_1 et σ_2 et du cisaillement maximal τ_{\max}	32
Fig. (III.1)	Forme de modèle N°1.....	33
Fig. (III.2)	Observation des contraintes résiduelles sur le crochet.....	33
Fig. (III.3)	Dispositif de chargement en flexion.....	34
Fig. (III.4)	Eprouvette de flexion.....	35
Fig. (III.5)	Franges isochromes obtenues en flexion.....	36
Fig. (III.6)	Relevé de l'ordre de franges au bord de l'éprouvette.....	37
Fig. (III.7)	Visualisation du réseau d'isochromes.....	38
Fig. (III.8)	Graphe de $[(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2]$ le long de la droite [AB].....	40
Fig. (III.9)	Réseau d'isoclines suivant les différentes configurations du polariscope.....	41
Fig. (III.10)	Forme du modèle N°2.....	42
Fig. (III.11)	Dispositif de chargement pour l'essai de contact.....	43
Fig. (III.12)	Réseau d'isochromes observé sur le polariscope.....	43

Fig. (III.13) : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope.....	44
Fig. (III.14) : Valeurs de $[(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2]$ relevées suivant le segment [AB].....	44
Fig. (III.15) : Graphe de $[(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2]$ le long de la droite [AB].....	46
Fig. (III.16) : Réseau d'isoclines suivant les différentes configurations du polariscope.....	47
Fig. (IV.1) : Représentation de la surface maillée.....	48
Fig. (IV.2) : Tracé de la déformée de l'éprouvette.....	48
Fig. (IV.3) : Représentation des réactions.....	49
Fig. (IV.4) : Tracé des isochromes obtenues sous la charge F.....	49
Fig. (IV.5) : Tracé des isoclines obtenues numériquement de.....	50
Fig. (IV.6) : Evolution de τ_{\max} relevée numériquement le long de la droite AB.....	51
Fig. (IV.7) : Isochromes relevées expérimentalement.....	52
Fig. (IV.8) : Isochromes simulées à l'aide du logiciel CASTEM2000.....	52
Fig. (IV.9) : Superposition des graphes numériques et expérimentaux.....	53

LISTE DES TABLEAUX

N° Tableau	Désignation	N° de page
------------	-------------	------------

Tableau I.1: Intensité lumineuse I pour les différentes configurations du polariscope.....**8**

Tableau III.1: Valeurs de $[(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2]$ relevées suivant le segment [AB].....**40**

Tableau III.2: Valeurs de $[(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2]$ relevées suivant le segment [AB].....**45**

Chapitre I

Généralités sur la
photoélasticimétrie et
l'élasticité linéaire

Introduction Générale

La concentration de contraintes est un problème souvent rencontré dans les composants ou organes mécaniques. C'est un phénomène d'augmentation locale des contraintes dans une zone comportant une modification géométrique de la pièce. Il apparaît dans une discontinuité de la pièce ou au voisinage d'une entaille après l'usinage. La zone de concentration de contraintes est souvent le lieu d'amorçage de fissures. Elle peut être aussi l'origine d'une rupture brutale dans le cas d'un matériau fragile.

En plus des problèmes de rupture statiques, la prise en compte des concentrations de contraintes en fatigue est un domaine important dans une démarche d'allégement de structures. En effet, la fatigue est la cause de la plupart des cas de rupture des composants contenant des concentrations des contraintes. Donc, une analyse par la méthode photoélastique s'impose pour montrer comment traiter ce type de problèmes et développer des solutions numériques dans le contexte de calcul de structures par éléments finis.

Le travail est réparti en trois parties, le premier chapitre est consacré à quelques rappels sur la théorie de l'élasticité, la présentation de la méthode photoélastique et le principe de la photoélasticimétrie

Le deuxième est consacré au contact mécanique et la théorie de Herts

Le troisième chapitre traite la partie expérimentale. Deux expériences ont été réalisées sur deux modèles en traction à fin d'analyser expérimentalement le comportement des contraintes dues à la traction.

Le quatrième chapitre est consacré à la méthode numérique. Le travail consiste à écrire un programme en utilisant le logiciel Castem. Une comparaison entre les résultats obtenus avec la méthode expérimentale et les résultats obtenus par la M.E.F qui va nous permettre de valider les résultats.

On termine par une conclusion.

I Généralité sur la photoélasticimétrie

I.1 Introduction

La photoélasticimétrie est une technique industrielle de prévision des contraintes qui vient compléter les méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis. Elle est largement utilisée dans des secteurs de technologie avancée comme l'aéronautique. Sa capacité à simuler des structures complexes a conduit à élaborer des démarches hybrides calcul-photoélasticimétrie. Plus qu'une complémentarité, il s'agit d'une véritable intégration de ces deux moyens prévisionnels. Certains bureaux d'études, possédant de gros moyens de calculs, ont recours systématiquement à la photoélasticité afin d'élaborer par exemple des hypothèses plausibles sur les conditions aux limites. Cette technique est fondée sur le phénomène de biréfringence accidentelle ou effet photoélastique : certains matériaux transparents acquièrent une biréfringence lorsqu'ils sont soumis à des sollicitations mécaniques extérieures. L'ensemble des lois physiques décrivant ce phénomène constitue la photoélasticité.

Deux grandes familles de techniques existent en photoélasticimétrie :

- les revêtements photoélastiques correspondent à des méthodes d'extensométrie. c'est à dire des mesures de déformations sur la surface des structures réelles.
- les modèles photoélastiques permettent une détermination prévisionnelle des contraintes. Ces modèles sont réalisés à une échelle différente de celle de la structure réelle. Ils sont soumis à des sollicitations équivalentes, il s'agit donc d'un calcul par similitude. Cette solution est avantageuse car elle est non destructive et les modèles sont facilement modifiables.

Historiquement, c'est l'étude des modèles photoélastiques bidimensionnels qui a fondé la photoélasticimétrie. C'est Maxwell qui réalisa au milieu du XIX^{ème} siècle la première étude photoélasticimétrique plane. Jusqu'à l'apparition des matières plastiques (Seconde Guerre Mondiale), les modèles étaient en verre, et l'on se contentait de simulations bidimensionnelles de pièces plus complexes (par exemple en tenant compte des plans de symétrie).

Avec les matières plastiques, la réalisation des modèles devient très simple et peu coûteuse. Les méthodes d'investigation et d'appareils concernant les modèles bidimensionnels sont analogues à ceux utilisés pour les revêtements.

I.2 Définition

La photoélasticimétrie est une technique de champ qui mesure de façon quantitative le niveau et les directions des contraintes principales dans toute la région analysée. On utilise généralement des modèles transparents en époxy pour simuler les vraies contraintes dans les pièces réelles. Cependant, on peut aussi analyser les contraintes dans les pièces réelles en utilisant la technique de recouvrement photoélastique (photo stress). La pièce à analyser est enduite d'une couche photoélastique qui permettra de mesurer les contraintes directement sur la pièce analysée [1]

I.3 Principe de la photoélasticimétrie

Cette méthode est basée sur la biréfringence des matériaux acquise sous l'effet des contraintes. Cette biréfringence peut être étudiée en analysant la façon dont la polarisation de la lumière est transformée après le passage à travers le matériau. Par exemple, une onde lumineuse polarisée rectilignement pourra ressortir polarisée elliptiquement. Cela s'explique par le fait que les deux composantes de l'onde subissent un retard l'une par rapport à l'autre. Ce retard est directement relié aux contraintes présentes dans le matériau. On peut donc mesurer les contraintes grâce à cette modification de la polarisation. Le retard entre les deux composantes de l'onde correspond à un déphasage qui dépend de la longueur d'onde, c'est-à-dire de la couleur. C'est pourquoi les images obtenues avec de la lumière blanche présentent des franges colorées.

Expérimentalement, on peut simplement utiliser la méthode suivante : Une lumière monochromatique polarisée à l'aide d'un polariseur est envoyée sur l'échantillon à analyser (Figure 1). Elle passe ensuite à travers un second polariseur appelé analyseur. Un rayon de lumière polarisée de façon rectiligne va subir une certaine biréfringence différente selon le trajet qu'il emprunte dans le matériau. Sa polarisation va alors être transformée différemment selon le trajet et le second polariseur va donc éteindre ou pas ces rayons. On verra ainsi apparaître des zones claires ou sombres. De plus, en utilisant de la lumière blanche, on verrait apparaître des franges colorées.

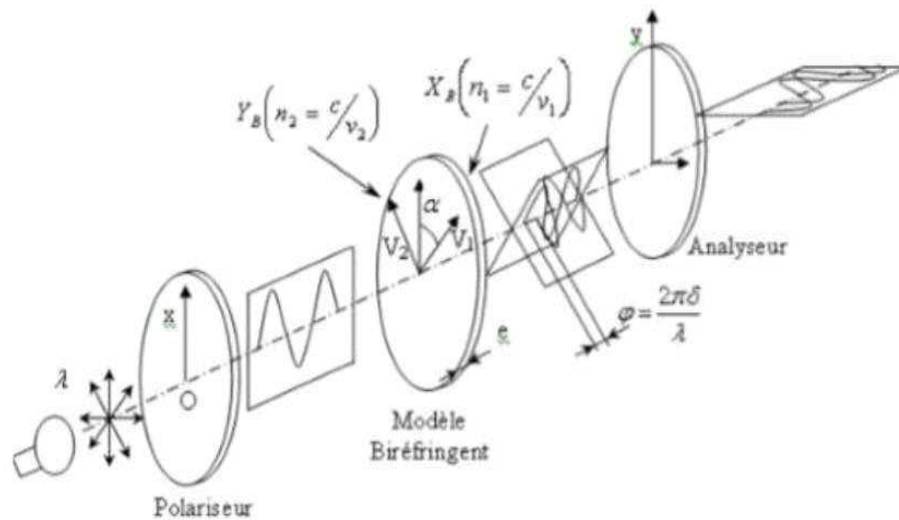


Figure I.1: Schéma de principe de la photoélasticimétrie plane par réflexion [2]

I.3.1 Polariseurs et Analyseurs

Un polariseur est un filtre polarisant qui recevant de la lumière naturelle non-polarisée, donne de la lumière polarisée à sa sortie. Un analyseur est également un filtre polarisant qui recevant de la lumière polarisée, permet de déterminer le plan de polarisation par extinction du faisceau sortant.

I.4 Le phénomène de biréfringence

C'est la propriété physique d'un matériau dans lequel la lumière se propage de façon anisotrope. Dans un milieu biréfringent, l'indice de réfraction n'est pas unique, il dépend de la direction de polarisation de l'onde lumineuse.

La biréfringence appelée aussi **double réfraction** est un phénomène par lequel le rayon lumineux pénétrant dans un cristal se divise en deux rayons distincts. Ce phénomène est caractéristique des milieux biréfringents, à tel point que les termes « double réfraction » et « biréfringence » sont parfois confondus.

Lorsqu'on parle de biréfringence, on sous-entend en général **biréfringence linéaire**, c'est à-dire qu'on considère les indices de réfraction pour des ondes polarisées rectilignement.

I.4.1 Description des milieux biréfringents

On considère la propagation d'un rayon lumineux polarisé rectilignement dans un milieu biréfringent. De manière générale, la vitesse de cette onde, ou en d'autres termes l'indice de

réfraction, dépend de la direction de polarisation du rayon. C'est le propre d'un milieu biréfringent.

On distingue deux sortes de biréfringence :

- **La biréfringence naturelle (double réfraction)**

La majorité des corps transparents présentent cette sorte de biréfringence sans qu'ils soient sollicités par des forces extérieures. Le phénomène de biréfringence se caractérise par un retard optique (δ) entre les deux composantes à la sortie du corps biréfringent. Ceci est dû à la structure anisotrope de la matière.

- **La biréfringence accidentelle**

Les milieux dans lesquels il n'y a aucune direction privilégiée ne sont pas biréfringents, cependant certains milieux peuvent le devenir sous l'action d'une cause extérieure qui crée une direction privilégiée : c'est la biréfringence provoquée (ou induite). Une anisotropie optique est provoquée lorsqu'on soumet de nombreux matériaux plastiques à des contraintes, c'est ce qu'on appelle la biréfringence accidentelle. Les axes principaux de l'état de contrainte coïncident avec les axes optiques principaux. Les indices de réfraction principaux sont en relation linéaire avec les contraintes principales.

$$\left. \begin{array}{l} n_1 = n_1(\sigma_1, \sigma_2) \\ n_2 = n_2(\sigma_2, \sigma_1) \end{array} \right\} n_1 - n_2 = C(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{I.1})$$

Ces deux composantes vont vibrer selon des plans orthogonaux qui sont parallèles aux directions principales des contraintes (1 et 2), elles ont la même fréquence mais elles sont déphasées l'une par rapport à l'autre. Le retard optique δ entre ces deux composantes sera proportionnel à la différence des indices principaux donc à la différence entre les contraintes principales et à l'épaisseur " d " du matériau.

$$\delta = C \cdot d(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{I.2})$$

Dans la présente étude on utilisera un polariscope. C'est un banc d'essai de photoélasticimétrie composé d'un polariseur qui transforme la lumière naturelle en lumière polarisée (rectiligne ou circulaire), d'un analyseur qui a pour rôle de détecter la lumière polarisée et d'un dispositif d'application de charge (en traction ou en flexion).

I.4.2 La valeur de frange

La constante de frange est le rapport entre la longueur d'onde λ qui sera employée sur le banc de la photoélasticimétrie et la constante photoélastique(c) du modèle utilisé. Cette constante sera déterminée expérimentalement grâce à des essais mécaniques de traction et de flexion (chapitre III)

D'après l'équation de MAXWELL, la constante de frange (f) est le rapport entre la différence des contraintes principales sur l'unité d'ordre de frange en un point du modèle ayant comme l'épaisseur e .

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot f}{e} \Rightarrow f = \frac{e}{N} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{I.3})$$

I-5-Description de la réfraction

La lumière est déviée lorsqu'elle passe d'un milieu transparent à un autre (par exemple : de l'air à l'eau, ou le contraire...). C'est ce phénomène qu'on observe lorsqu'on regarde une paille dans un verre : celle-ci paraît brisée. Cette fracture apparente est à l'origine du mot réfraction. En physique des ondes, notamment en optique, acoustique et sismologie, le phénomène de réfraction est la déviation d'une onde lorsque la vitesse de celle-ci change entre deux milieux. Typiquement, cela se produit à l'interface entre deux milieux, ou lors d'un changement d'impédance du milieu.

I.5.1 Définition du l'indice de réfraction

C'est le rapport entre la vitesse de la lumière c dans le vide et la vitesse de la lumière dans le milieu transparent.

$$n = c_0 / v \quad (\text{I.4})$$

C_0 : vitesse de la lumière dans le vide et V : vitesse de la lumière dans le milieu considéré.

I.6 Polariscopes

C'est un ensemble formé d'une source lumineuse de longueur λ , de deux polaroids (appelés polariseur pour le plus proche de la source de lumière et analyseur pour le plus proche de l'observateur), d'un système de chargement, d'un appareil de prise d'images et enfin du modèle que l'on veut analyser (Figure 2).

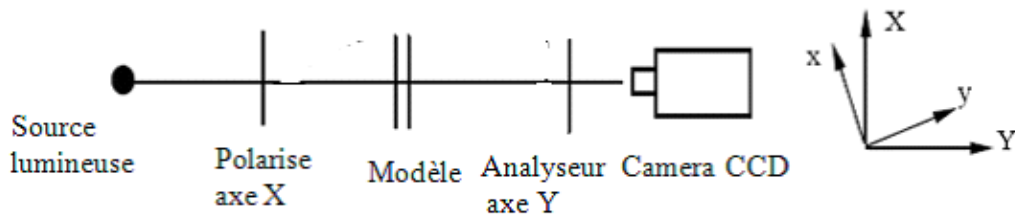


Figure I.2 Polariscope rectiligne (champ obscur)

Ox et Oy sont les directions principales des contraintes du modèle chargé. A l'entrée du modèle pris comme origine de l'axe Z, on est en présence d'une onde plane rectiligne suivant la direction OX :

$$\vec{E} = a \cos(\omega t) \vec{X} \quad (\text{I.5})$$

I. 6. 1. Différents types de polariscopes

Il existe plusieurs sortes de polariscope, citons principalement :

- polariscope à transmission
- polariscope à réflexion
- polariscope à faisceaux laser.

I.6.2. Polariscope à transmission

Il est composé d'une source lumineuse diffusée ou ponctuelle, d'un polariseur, d'un analyseur, de deux lames quart d'onde et du dispositif de mise en charge. On peut joindre un dispositif d'observation ou d'enregistrement (microscope, camera, appareil photo,...).

I.6.3 Polariscope à réflexion

Le procédé consiste à déposer à la surface des structures réelles, une mince couche de produit photoélastique (stress coating). La surface de la structure est rendue réfléchissante à l'aide d'une peinture. La lumière polarisée incidente est réfléchiée par la couche réfléchissante déposée sur la pièce et traverse deux fois le revêtement avant d'être analysée. Les filtres polarisants sont placés du même côté de la pièce. L'exploitation des franges obtenues permet de retrouver les valeurs et les directions principales des contraintes agissant sur la structure étudiée. La photoélasticimétrie ou polariscope (Fig I.3) comprend essentiellement une source lumineuse indispensable pour la production de la lumière. On peut utiliser soit la lumière monochromatique (une seule longueur d'onde) soit la lumière polychromatique.

- Un filtre polariseur et un filtre analyseur (polaroids)
- Deux lames quarts d'onde

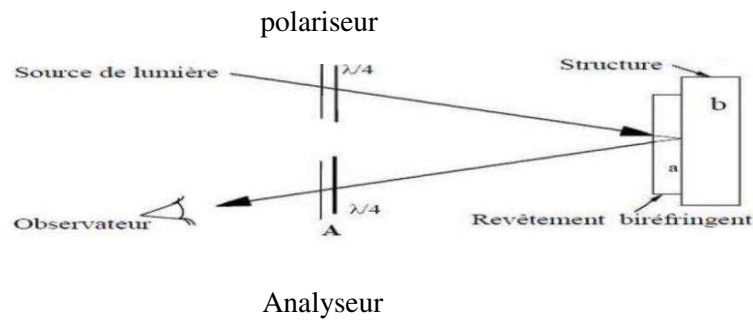


Figure I.3 Polariscope à réflexion [3]

I.7 Eléments d'un polariscope

I.7.1 Sources lumineuses

La lumière se propage par ondes sinusoïdales, sous sa forme la plus simple, c'est une onde plane monochromatique représentée par deux grandeurs vectorielles sinusoïdales en phase et perpendiculaire. La lumière monochromatique est dite polarisée si chacun des vecteurs champs reste parallèle à une direction fixe.

Trois sortes de sources lumineuses sont utilisées pour ces études ; une source de lumière blanche, une source de lumière monochromatique et une lumière à vapeur de mercure.

❖ Source de lumière blanche

C'est une lampe ordinaire dont la lumière sert à l'observation des lignes isoclines et lignes isochromatiques.

❖ Source de lumière monochromatique

Cette lumière est obtenue en filtrant la lumière blanche à l'aide de filtres monochromatiques. Cette lumière permet l'observation aisée des isochromes avec la lumière circulaire, les isoclines étant éliminées.

❖ Lumière à vapeur de mercure

Plus cohérente, cette lumière permet de visualiser nettement des ordres de franges élevés, quand l'ordre de frange (N) est supérieur à dix, il est préférable d'utiliser la lampe à vapeur de mercure.

Pour les différentes configurations du polariscope, voici un tableau résumant la valeur de l'intensité lumineuse.

Type de polariscope	Champ clair	Champ sombre
rectiligne	$I_{x, y} = I_0 - I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$	$I_{x, y} = I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$
circulaire	$I_{x, y} = I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$	$I_{x, y} = I_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$

Tableau I.1 L'intensité I pour les différentes configurations.

I.2 Généralité sur l'élasticité linéaire

I.2.1 Introduction

La théorie de l'élasticité s'occupe, en fait, des mêmes questions que la résistance des matériaux mais d'un point de vue plus rigoureux. Elle s'intéresse, comme son nom l'indique, au comportement des éléments de structure dans le domaine élastique c'est-à-dire le domaine des déformations faibles et non permanents, par opposition au domaine plastique qui fait l'objet de la théorie de la plasticité. Il y est fait abstraction, dans une large mesure, des hypothèses simplificatrices et des méthodes approchées. Aussi, y est-on souvent confrontés à un appareil mathématique complexe qui permet, certes, une analyse plus fine des phénomènes étudiés mais qui, en revanche, limite des possibilités d'utilisation pratique. Justement, dans le souci d'étendre le champ d'investigation aux domaines d'applications pratiques, est née la théorie appliquée de l'élasticité qui est une discipline qui accorde une plus large importance aux interprétations physiques des phénomènes que ne l'accorde la théorie mathématique de l'élasticité

I.2.2 Définition de l'Elasticité

Elle est définie comme une discipline qui étudie avec rigueur les petites déformations élastiques linéaires des solides continus, homogènes, isotropes, à partir des forces connues et/ou des déplacements connus de certains points. Son principe consiste à isoler un volume élémentaire, et à étudier son équilibre [4].

I.2.3 Théorie de l'Elasticité

La théorie de l'élasticité suppose que les matériaux étudiés possèdent les trois propriétés suivantes :

- Ils sont parfaitement élastiques. Les forces extérieures qui provoquent leurs déformations ne dépassent pas une certaine limite ; celle-ci disparaît en même temps que la force qui lui a donné naissance.
- Ils sont homogènes et distribués uniformément dans tout le volume qu'ils occupent, de telle sorte que le plus petit élément détaché d'un corps possède les mêmes propriétés que le corps tout entier.
- Ils sont isotropes, c'est à-dire, que leurs propriétés élastiques sont les mêmes dans toutes les directions.

I.2.4 Contraintes et déformations

Les raisons physiques du comportement élastique diffèrent d'un matériau à un autre. Pour les métaux, le treillis atomique change de taille et de forme quand des forces leur sont appliquées (ajout d'énergie au système). Quand les forces sont supprimées, le système retourne à son état initial où l'énergie est la plus faible. Pour le caoutchouc et d'autres polymères, l'élasticité est due à l'extension des chaînes de polymère lorsque les forces sont appliquées.

I.2.4.1 Définition des Contraintes

La contrainte est définie comme l'intensité d'une force élémentaire appliquée df à un point donné du matériau, sur une surface infinitésimale ds . Son unité dans le système internationale [1] est le Pascal (1 Pascal=1N/m²) ou méga pascal (1MPa=10⁶ N/m²).

$$\sigma = df/ds \quad \text{(I.6)}$$

- ❖ Lorsque la force est perpendiculaire à la surface on parle de contrainte normale σ_n .
- ❖ Lorsque la force est parallèle à la surface on parle de contrainte tangentielle ou contrainte de cisaillement τ_n .

I.2.4.1.1 Tenseur de Contraintes

Le terme tenseur des contraintes a été introduit par Cauchy vers 1822 [2], C'est une représentation utilisée en mécanique des milieux continus pour caractériser l'état de contrainte, c'est-à-dire les efforts intérieurs mis en jeu.

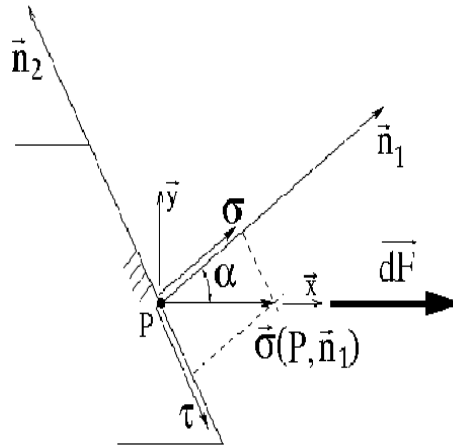


Figure I.4 État de contraintes sur une face orientée suivant n_1 [5]

Dans les cas de sollicitations simples (traction/compression uniaxiale, flexion, torsion), la contrainte peut être représentée par un simple scalaire. Mais pour décrire précisément l'état de contrainte, il faut utiliser une matrice.

$$[\sigma]_{(P, xyz)} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (I.7)$$

Avec :

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$: contraintes principales.

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$: contraintes tangentielles (en statique, le tenseur des contraintes est toujours symétrique, c'est-à-dire que : $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$).

Remarque :

· Pour le calcul des contraintes principales, on utilise l'équation suivante :

$$\text{Det}(\sigma - \lambda \text{Id}) = 0$$

Tel que :

$$\text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matrice identité}$$

Les solutions $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres des contraintes principales.

· Pour le calcul des directions principales, on utilise la relation suivante :

$$([\sigma] - \lambda [I_i]) (x_i) = 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

Les solutions **XI**, **XII**, **XIII** sont les directions principales des contraintes.

I.2.4.1.2 Contrainte de traction et de compression

L'essai le plus fréquemment utilisé afin de déterminer le comportement mécanique d'un matériau est l'essai de traction. Cet essai est caractérisé par sa facilité de mise en œuvre et par la richesse des informations fournies.

$$\sigma = F/S \quad (\text{I.8})$$

σ : Contrainte de traction ou de compression (N/mm²)

F : Effort normal extérieur (N)

S : Section (mm²)

Remarque:

Il est à noter que quand (σ) est une valeur algébrique positive, on parle dans ce cas de traction et quand elle a une valeur négative c'est une compression.

I.2.4.1.3 Contraintes tangentielles

La contrainte de tangentielle (τ) agit dans le plan de la section. Elle est exprimée en Pascals (Pa) ou pour les grandes valeurs en méga Pascals (MPa).

$$\tau = T/S \quad (\text{I.9})$$

τ : Contrainte tangentielle exprimée (N/mm²)

T : Effort tranchant exprimé (N) ;

S : Section cisailée (mm²).

Remarque :

Il existe deux formes de contrainte tangentielle:

1- Une poutre subit une sollicitation de cisaillement simple lorsque les actions mécaniques de liaison se réduisent, dans une section droite (S), à deux résultantes directement opposées et perpendiculaires à l'axe de la poutre. La section (S) est alors appelée section de cisaillement ou section cisailée. On considère alors que la contrainte de cisaillement est uniforme et se calcule en utilisant l'équation **(I.8)**.

2- L'état de cisaillement pur est caractérisé, en tout point d'une section (S) de normale n, par une contrainte normale ($\sigma_n=0$) et une répartition uniforme de la contrainte tangentielle ($\tau_n=\text{constante}$).

I.2.4.1.4 Contrainte de torsion

La torsion est la sollicitation subie par un corps soumis à l'action d'un couple de forces opposées agissant dans des plans parallèles et dont l'élément de réduction est un moment de force agissant dans l'axe de la poutre. Elle se modélise comme un cisaillement. La contrainte de torsion est définie :

$$\tau = (M_t/IG).r \quad (\text{I.10})$$

Avec :

M_t : Moment de torsion (N.mm)

IG : Moment quadratique de torsion dépendant de la forme de la section (mm⁴)

r : Rayon de la section (mm)

Remarque :

Le rapport (IG/r) est appelé module de torsion est exprimé en (mm³)

Le moment de torsion M_t est déterminé par la relation suivante :

$$M_t = G.\theta.I_0 \quad (\text{I.11})$$

Avec :

M_t : moment de torsion (N.mm)

$$G = E / 2(1+\nu) \quad (\text{I.12})$$

G : est le module de cisaillement ou module de Coulomb. C'est un coefficient de glissement reliant les contraintes tangentielles aux déformations angulaires, appelé aussi module d'élasticité transversale. Il varie sensiblement comme E en fonction de la température et le type de matériau, et s'exprime en (MPa), ou en (GPa), quelques fois en (N/m²),

θ : Angle de torsion (rad)

I_0 : Moment quadratique de torsion (mm⁴)

E : Module de Young (MPa)

ν : Coefficient de poisson (adimensionnel)

ϵ_L : Allongement relatif longitudinale

ϵ_T : Allongement relatif transversale

I.2.4.1.5 Contrainte de flexion

La flexion est la déformation d'un objet qui se traduit par une courbure. Dans le cas d'une poutre, elle tend à rapprocher les deux extrémités de la poutre. Dans le cas d'une plaque, elle

tend à rapprocher deux points diamétralement opposés sous l'effort appliqué. Il existe plusieurs types de flexions (pure, plane, déviée, composée). Nous limiterons notre étude au cas de la flexion plane simple.

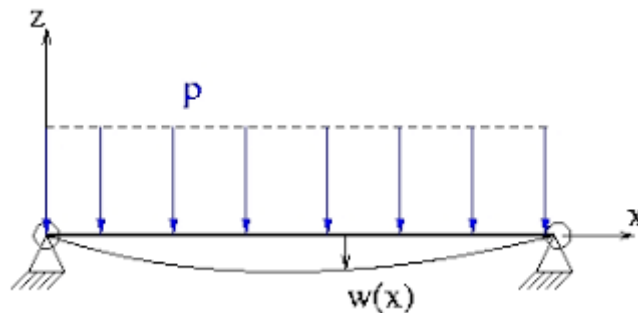


Figure I.5 Poutre en flexion simple

Définition

Une poutre est sollicitée en flexion plane simple lorsque le système des forces extérieures se réduit à un système coplanaire et que toutes les forces sont perpendiculaires à la fibre moyenne. La contrainte de flexion est définie comme :

$$\sigma = (M_f / I_x) \cdot y \quad (\text{I.13})$$

Avec :

σ : Contrainte maximale;

M_f : Moment de flexion (N.m) ;

I_x : Moment quadratique (mm⁴).

I.2.4.1.6 Moments quadratiques

- Le moment quadratique d'une section (S) par rapport à un axe Ox est :

$$I_x = I_y = \int y^2 ds \quad (\text{I.14})$$

$$I_o = \int r^2 ds$$

-Le moment quadratique d'une section circulaire soumise a une contrainte de flexion est :

$$I_x = I_y = \pi d^4 / 64 \quad (\text{I.15})$$

$$I_G = \pi d^4 / 32$$

- Le moment quadratique d'une section rectangulaire est :

$$I_x = bh^3 / 12$$

$$I_y = hb^3 / 12$$

$$I_G = (bh/12) (b^2 + h^2)$$

I.2.4.2 Déformations

La déformation est définie comme l'ensemble des variations dimensionnelles et des distorsions qui affectent un solide autour d'un point. On utilise deux modèles de déformation élastique : la traction-compression et le cisaillement :

- ❖ La flexion peut se modéliser selon les cas comme une traction-compression ou comme un cisaillement.
- ❖ La torsion se modélise comme un cisaillement.

La représentation matricielle du tenseur de déformations est :

$$[\varepsilon](p) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est symétrique et les termes $\varepsilon(p)$ s'expriment en fonction des déplacements

$$u(p) = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

I.2.4.2.1 Cas de la traction simple

La déformation pour une traction simple est le rapport de l'allongement à la longueur initiale.

$$\varepsilon = \Delta L / L_0 = (L - L_0) / L_0 \quad \text{(I.16)}$$

Avec :

ε : déformation (%) ;

ΔL : Allongement (mm) ;

L : Longueur finale après rupture (mm) ;

L_0 : Longueur initiale (mm).

Remarque :

- Un matériau élastique retrouve sa géométrie d'origine lorsque la charge est supprimée.
- Un matériau plastique garde une déformation résiduelle.

I.2.4.2.2 Cas de la torsion

Dans ce cas l'angle unitaire de torsion (θ) est donné par la relation suivante :

$$\theta = Mt/G.IG \quad (\text{I.17})$$

Avec :

θ : angle unitaire de torsion exprimé (rad/m)

Mt : moment de torsion (N.m)

G : module de cisaillement ou de Coulomb (GPa)

IG : moment quadratique de torsion (m⁴)

I.2.4.3 Etude de la déformée en flexion

L'équation de la déformée d'une poutre en flexion est donnée sous la forme

$$y = f(x) \quad (\text{I.18})$$

Elle est principalement basée sur la résolution de l'équation différentielle suivante :

$$Mf = -E.I.y''$$

Il faut alors procéder à deux intégrations successives. Les constantes d'intégration s'obtiennent grâce aux conditions aux limites (appuis, encastremets...).

I.2.5. Relations entre contraintes et déformations

L'effet des forces sur différents matériaux a été expliqué par Robert HOOKE (1635-1703) [3], de façon empirique et à échelle macroscopique : un matériau à l'état solide ne résiste à une force appliquée qu'en se déformant sous l'action de cette force. Les matériaux sont élastiques. Il établit une règle, la loi de HOOKE, qui est à la base de la résistance des matériaux et de la mécanique des milieux continus selon laquelle l'allongement est toujours proportionnel à la force appliquée, et ceci pour plusieurs matériaux (les céramiques, le verre, la plupart des minéraux et les métaux les plus durs). Ce n'est qu'en (1789-1857) que la définition claire et utilisable de ces deux notions, a été adopté grâce à Augustin CAUCHY [4]. Il établit que quand on soumet un corps à l'action de forces extérieures, des contraintes s'établissent par réaction, à l'intérieur de ce corps, à ces contraintes sont associées des déformations. Si l'on se ramène à la contrainte de traction et à l'allongement unitaire par unité de volume, la loi de Hooke prend alors la forme :

$$\sigma = E. \varepsilon \quad (\text{I.19})$$

Avec :

σ : Contrainte de traction /ou de compression

E : Module d'élasticité ou de Young exprimé (MPa)

ε : Allongement (%)

Remarque:

- Pour un essai de traction ou de compression dans un repère orthonormé (o, x, y, z) la loi de comportement pour des petites déformations s'écrit :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (\text{I.20})$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x \quad (\text{I.21})$$

E : est le module de Young qui est une caractéristique du matériau. Il est homogène à une pression. Plus il est grand plus le matériau est rigide. C'est le coefficient de proportionnalité entre la contrainte (σ) appliquée et la déformation axiale mesurée ε . En générale il s'exprime en (GPa). Cependant, en cisaillement, on a une loi similaire :

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (\text{I.21})$$

Avec :

τ : contrainte de tangentielle (MPa) ;

I.2.6 Représentation de Mohr

Le cercle de Mohr est une représentation graphique des états de contrainte à deux ou trois dimensions, proposée par Christian Otto Mohr en 1882[5]. Dans un graphique où l'axe horizontal représente l'amplitude de la contrainte normale et l'axe vertical représente l'amplitude de la contrainte de cisaillement, le cercle de Mohr est le lieu des états de contrainte en un point P lorsque le plan de coupe tourne au tour du point P. Il s'agit d'un cercle centré sur l'axe horizontal. Les intersections avec l'axe horizontal correspondent aux deux contraintes principales au point P. Ce cercle se construit à partir de la connaissance des efforts extérieurs auxquels est soumise la pièce. Il permet de déterminer :

- ❖ Les directions principales (XI, XII, XIII), ainsi que les contraintes principales σ_I , σ_{II} et σ_{III} ;

- ❖ La direction pour laquelle on a la contrainte τ maximale, qui est donc la direction de rupture probable (l'orientation du faciès de rupture), ainsi que la valeur de cette contrainte.

I.2.6.1 Tracés du cercle de Mohr

Considérons un point P d'un solide soumis à un état de contrainte plane. Il s'agit typiquement d'un point de la surface d'une pièce où aucune force extérieure ne s'applique : pas de pression hydrostatique, pas de contact avec une autre pièce (surface libre) (Figure 6).

Nous supposons ici que l'on est dans un état de contraintes planes dans le plan (x, y) . Le tenseur des contraintes est donc symétrique et de la forme :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Avec :

σ_x : Contrainte normale sur la face normale à l'axe x.

σ_y : Contrainte normale sur la face normale à l'axe y.

τ_{xy} : Contrainte tangentielle sur la face normale à l'axe z.

Si les valeurs de ces trois contraintes sont connues, alors le cercle de Mohr se trace de la manière suivante :

- ❖ On place le point A décrivant les contraintes sur la face normale à x, qui a pour coordonnées (σ_x, τ_{xy}) , c'est un point du cercle ;
- ❖ On place le point B décrivant les contraintes sur la face normale à y, qui a pour coordonnées $(\sigma_y, -\tau_{xy})$, c'est un point du cercle ;
- ❖ Le segment [AB] est donc un diamètre, donc le milieu de [AB] est le centre du cercle si A et B ne sont pas sur l'axe horizontal, le centre est à l'intersection de [AB] et de l'axe σ_n . Cela permet de tracer le cercle

On vérifie que le centre du cercle a pour abscisse :

$$C_z = (\sigma_x + \sigma_y)/2 \quad (\text{I.22})$$

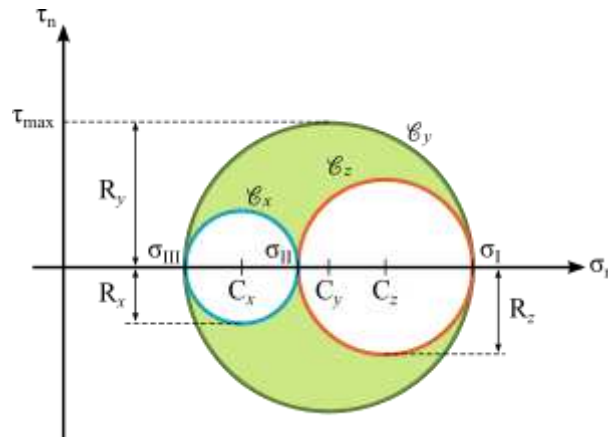
Et que le rayon du cercle vaut :

$$R_z = \frac{AB}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (\text{I.23})$$

Si l'on veut connaître les contraintes sur une face quelconque faisant un angle θ avec le plan (x, y) , il faut prendre les coordonnées du point C situé à un angle -2θ du point A sur le cercle (voir figure I.6), l'angle $(OA, OC) = -2\theta$.

Les intersections du cercle avec l'axe horizontal σ_n donnent les contraintes principales σ_I et σ_{II} . Si l'on appelle $-2\theta_p$ l'angle que fait le point A avec l'horizontale $(OA, \sigma_n) = -2\theta_p$ la direction première principale fait un angle (θ_p) avec l'axe des x , la seconde direction principale lui est perpendiculaire.

On note que sur le cercle : l'axe (σ_n) représente les contraintes principales et l'axe (τ_n) représente les contraintes de cisaillement maximale ; les axes géométriques x et y sont représentés par une droite diamétrale inclinée d'un angle de $(-2\theta_p)$.



. **Figure I.6** Cercle de Mohr pour un état de contraintes planes [6]

I.2.6.2 Cercle de Mohr pour une sollicitation uniaxiale

Considérons un point P d'une pièce ayant un état de contrainte uni axiale. Il s'agit typiquement :

- De tout point d'une pièce rectiligne (poutre) subissant une traction ou une compression dans l'axe (couple de forces colinéaires égales et opposées) : tirant, bielle, poutre d'un treillis, d'une éprouvette de traction ou de compression ; on appelle x l'axe des forces ;

- De tout point d'une pièce rectiligne en flexion pure (partie centrale d'une flexion à 4 points) ; on appelle x l'axe de la pièce ;
- De tout point de la surface supérieure ou inférieure d'une poutre en flexion simple (flexion 3 points).

La contrainte normale nominale est σ_x . Le cercle de Mohr est tangent à l'axe τ_n , il se trouve du côté des σ_n positif dans le cas de la traction, et du côté des σ_n négatifs en compression. Son centre est au point d'abscisse $C_z = \sigma_x / 2$, et le cisaillement maximal vaut

$$\tau_{\max} = Rz = \sigma_x / 2. \quad (\text{I.24})$$

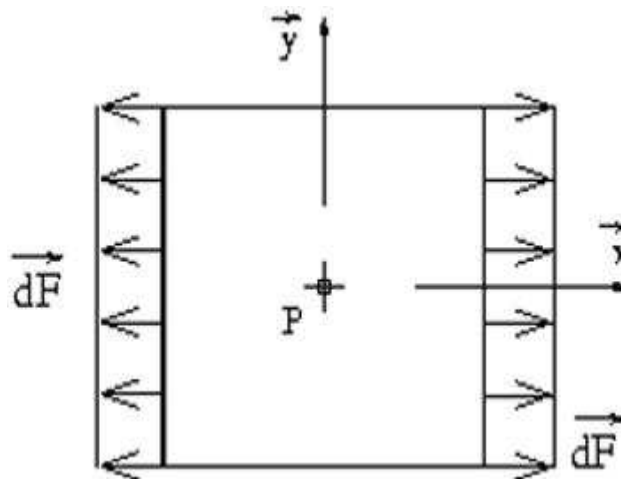


Figure I.7 État d'équilibre uniaxial [7]

Ceci est démontré comme suit :

On considère un élément de matière cubique infinitésimale orienté selon le repère. La face normale à l'axe x et orientée suivant cet axe subit une force dF , répartie sur la surface dS .

A l'équilibre, la surface opposée (orientée suivant l'axe $-x$) est soumise à un effort $(-df)$ (voir figure 7).

On notera que :

La contrainte au point P due à l'effort df sur la surface ds :

$$\sigma_x = dfx / ds$$

la contrainte sur la surface Y est nulle :

$$\sigma_y = dfy / ds = 0$$

On remarquera que le cisaillement est nul sur les deux surfaces considérées, les directions sont donc principales et (σ_x, σ_y) sont les valeurs des contraintes principales.

On détermine maintenant l'état de contrainte sur une face qui aurait tourné de α comme représenté sur le schéma ci-contre. On a les contraintes suivantes :

$$[\sigma]_{(p,n)} = \begin{cases} \sigma_{n1} = (df \cos\alpha) / (ds / \cos\alpha) = \sigma_x \cos^2\alpha = \sigma_x/2 + \sigma_x/2 \cos(-2\alpha) \\ \tau_{n1} = -(df \sin\alpha) / (ds / \cos\alpha) = -\sigma_x \sin\alpha \cos\alpha = (\sigma_x/2) \sin(-2\alpha) \end{cases}$$

C'est l'équation d'un cercle de centre $(\sigma_x/2, 0)$ et de diamètre σ_x . Lorsque l'on tourne de (-2α) sur le cercle, on tourne de α dans la matière. On aura la représentation ci-contre :

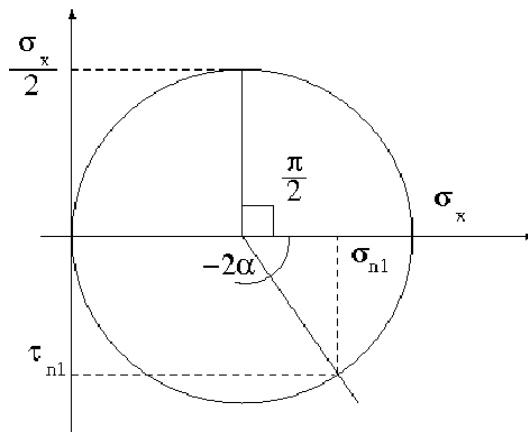


Figure I.8 Cercle de Mohr de la traction [8]

On observe que le cisaillement τ_{n1} est maximal pour $2\alpha = \pm\pi/2 [2\pi]$ soit $\alpha = \pm\pi/4 [\pi]$:

$\tau = \pm\sigma_x/2$ suivant des directions à $\alpha = \pm 45^\circ$, ce qui justifie les observations.

I.2.6.3. Cercle de Mohr pour un cisaillement pur

Le cisaillement pur se rencontre dans un tube en torsion, ainsi que dans une pièce cisailée, mais uniquement sur le plan à la fibre neutre (le cisaillement simple s'accompagne d'une légère flexion). Le cercle de Mohr est centré sur l'origine, ($C_z = 0$), d'une contrainte de cisaillement maximale est également d'un cisaillement nominale, $\tau_{max} = RZ = \tau_{xy}$. Les directions principales sont les bissectrices du repère (x, y) (droite à 45° dans l'espace réel).

Avec :

$$\sigma_I = -\sigma_{II} = \tau_{xy}$$

I.2.6.4. Cercle de Mohr pour une sollicitation biaxiale

Considérons un point P où l'état de contrainte est biaxial. Il peut s'agir typiquement d'un point à l'air libre d'un réservoir sous pression, ou bien d'un point d'une tôle soumise à deux couples de forces perpendiculaires dans le plan de la tôle.

Le cercle passe par les points de coordonnées $(\sigma_x, 0)$ et $(\sigma_y, 0)$. On en déduit que :

- ❖ Les axes x et y sont les directions principales ;
- ❖ Le centre du cercle a pour abscisse $(\sigma_x + \sigma_y)/2$;
- ❖ Le cisaillement maximale vaut $\tau_{\max} = (\sigma_x - \sigma_y)/2$.

Notons que σ_x ou σ_y peuvent être négatives.

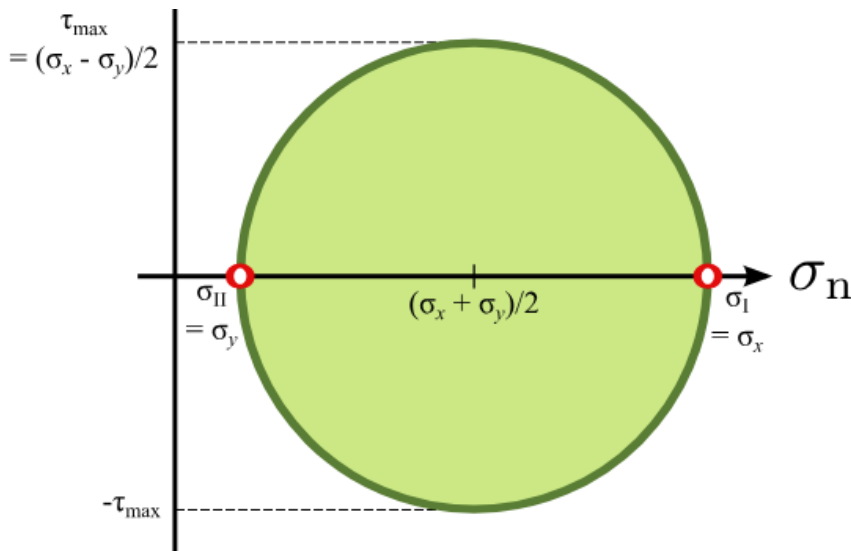


Figure I.9 Cercle de Mohr pour un état de contrainte biaxiale [9]

On remarque que le cercle dans le cas $\sigma_x = -\sigma_y$ est identique au cercle obtenu dans cas d'un cisaillement pur, avec $\tau_{xy} = \sigma_x / 2$. L'état mécanique est donc identique, et donc si la matière est isotrope, l'état de la matière est identique, seule change l'orientation.

I.2.7 Lois de Maxwell

Maxwell a déterminé les lois liant les indices principaux aux contraintes principales

$$\begin{cases} n_1 = n_0 + c_1 \sigma_1 + c_2 (\sigma_2 + \sigma_3) \\ n_2 = n_0 + c_1 \sigma_2 + c_2 (\sigma_3 + \sigma_1) \\ n_3 = n_0 + c_1 \sigma_3 + c_2 (\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases} \quad (I.25)$$

Dans le cas d'un problème plan ; on considère un modèle en matériau isotrope sous un état de contraintes planes soumis aux contraintes principales 1 et 2 représentées sur la figure

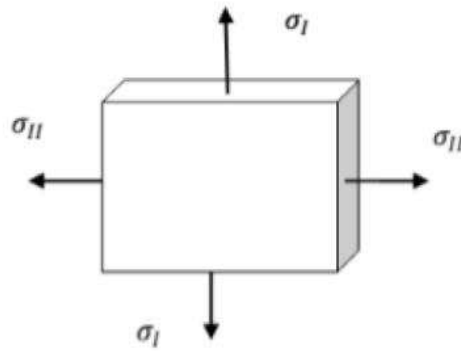


Figure I.10 Modèle sous contraintes planes

Soit A un point du modèle à analyser, les directions privilégiées de la biréfringence accidentelle coïncident en A avec les directions des contraintes principales. Le modèle est donc traversé en A par deux vibrations V_1 et V_2 .

La vibration V_1 parallèle à (σ_1) correspond à une vitesse v_1 et un indice de réfraction

$$n_r = c_0 / v$$

La vibration V_2 correspond à une vitesse v_2 et un indice de réfraction $n_r = c_0 / v_2$.

Newman a élaboré des relations entre les indices de réfractons et la valeur des déformations, Maxwell a exprimé ces relations en se référant aux contraintes.

La loi de Maxwell énonce :

$$\begin{cases} n_1 = n_0 + c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 \\ n_2 = n_0 + c_1 \sigma_2 + c_2 \sigma_1 \end{cases} \quad (\text{I.26})$$

$$\text{D'où : } n_1 - n_2 = c(\sigma_1 - \sigma_2)$$

$C = C_1 - C_2$: Constante photoélastique du matériau elle s'exprime en Brewster = 10^{-12} Pa $^{-1}$.

n_0 : Indice de réfraction dans l'état non contraint.

On déduit donc, que la biréfringence d'un modèle en état de contrainte plane est proportionnelle à la différence des contraintes principales $(\sigma_1 - \sigma_2)$.

Par convention on prend $\sigma_1 > \sigma_2$ donc $n_1^r - n_2^r > 0$ d'où $v_1 < v_2$.

En élasticité, on peut relier le tenseur des indices au tenseur des contraintes et obtenir l'orientation (paramètre isocline) et la différence (paramètre isochrome).

Si un milieu est anisotrope optiquement et biréfringent, le déphasage φ , des composantes B_t et B_n de l'onde B polarisée rectilignement qui le traverse, est de :

$$\varphi = \frac{2\pi e}{\lambda/c} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{I.27})$$

φ dépend de la différence des contraintes principales. L'un des objectifs des montages photo élastiques est de visualiser des isovaleurs de φ donc les lignes $(\sigma_1 - \sigma_2)$

I.3 Conclusion

Dans ce chapitre on a rappelé essentiellement sur quelque rappelles sur la RDM et le phénomène de biréfringence utilisée en photoélasticité bidimensionnelle pour analyser les contraintes dans les modèles sollicités. On a expliqué aussi le principe du polariseur qui permet d'utiliser ce phénomène de biréfringence en lumière plane ou en lumière circulaire.

Chapitre II

Contact mécanique

II.1 Introduction

Plusieurs types de contacts peuvent être rencontrés dans les transmissions mécaniques et les assemblages : contact cylindre sur cylindre, contact cylindre sur plan, contact poinçon sur plan et contact sphère sur plan. Les contraintes sont généralement concentrées au voisinage des zones de contact et diminuent rapidement en s'éloignant de ces zones. Le problème est donc d'analyser le contact. Ces contraintes sont régies par des équations aux dérivées partielles. Leur résolution peut être faite analytiquement, expérimentalement ou numériquement. La solution analytique est dans certains cas complexes et difficile à obtenir.

On peut alors faire recours à la solution numérique. Lorsque les moyens le permettent une solution expérimentale est recommandée pour validation.

Lorsque deux surfaces sont mises en contact, des sollicitations mécaniques sont imposées aux massifs et peuvent donner lieu à des dégradations. Afin d'évaluer l'usure ou plus précisément les dégradations telles que la formation des débris, l'amorçage et la propagation de fissure, il est important d'évaluer le type et l'amplitude des sollicitations mécaniques imposées. L'une des causes de l'usure et de la dégradation des pièces mécaniques en contact est l'amorçage et la propagation des fissures générées par les contraintes imposées. Il est donc important d'évaluer leur type et leur amplitude.

Nous considérons les formulations de Hertz [**Johnson, 1985**] et [**Mc Ewen, 1948**] comme méthode de calcul dans le domaine de l'élasticité linéaire des corps homogènes, ainsi que les hypothèses spécifiques au problème des massifs semi-infinis. Hertz a montré que lorsque deux corps sphériques sont en contact sous chargement normal, l'aire de contact est un cercle de rayon (a) très petit devant les rayons de courbures des corps en contact. Dans le cas d'un contact cylindre – plan, le chargement est linéique (charge par unité de longueur L) et est appliqué sur un massif semi – infini. Le problème se résume à l'étude d'un contact bidimensionnel sans concentration de contraintes aux bords. En réalité la longueur finie du cylindre induit une concentration des contraintes aux bords que nous discuterons par la suite [**Robert,1998**][10]

II.2 Application d'un effort normal seul

II.2.1 Contact cylindre sur cylindre

La connaissance de la distribution et de l'évolution des contraintes dans les contacts mécaniques est très importante, du fait qu'au voisinage de la surface du contact, des endommagements importants sont observés en surface par usure ou en subsurface par fissure et par fatigue. On considère deux cylindres élastiques, d'axes parallèle, de rayons R_1 et R_2 , de module d'élasticité E_1 et E_2 , de coefficient de Poisson ν_1 et ν_2 et de longueur infinie, chargé par une force W/L par unité de longueur perpendiculaire à leur plan tangent.

L'hypothèse des relations de Hertz est la suivante: «Si deux corps à surfaces courbes sont pressés l'un contre l'autre, il y a contact sur une surface de pression elliptique».

Les solutions exactes ont été établies par Hertz sous les conditions suivantes :

- les surfaces sont continues et non conforme.
- les déformations sont petites.
- chaque solide peut être considéré comme un milieu semi-infini.
- pas de frottement.

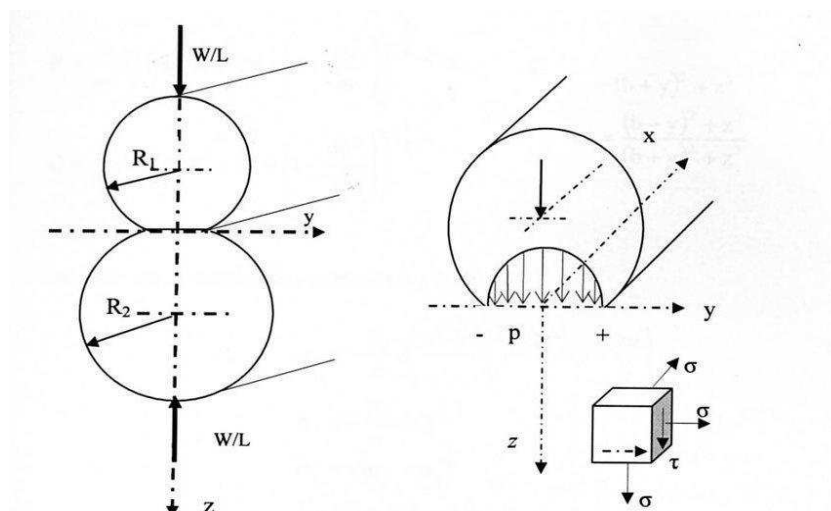


Figure II.1 : Contact entre deux cylindres (Contact dynamique cylindre – cylindre)[11]

Lors d'un glissement relatif, sous l'effet d'une force tangentielle de frottement $F_T = \mu F$, la contrainte tangentielle de glissement induite dans le contact en surface de contact est $\tau_{xz} = \mu P$ où P est la pression de contact.

Equations différentielles de l'équilibre et les conditions de compatibilité :

- Un élément de surface des sollicité par les contraintes σ_{xx} , σ_{zz} et τ_{xz} est en équilibre si seulement si :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad [\text{II.1}]$$

- La compatibilité des déformations avec le champ des contraintes conduit à la relation de Laplace suivante :

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) = 0 \quad [\text{II.2}]$$

où : σ_{xx} , σ_{zz} sont les contraintes normales dans les directions normales x , z et τ_{xz} la contrainte tangentielle.

Les conditions aux limites :

Les conditions aux limites imposées sur le contact pour une distribution elliptique de la charge sur un contact semi – infini sont les suivantes).

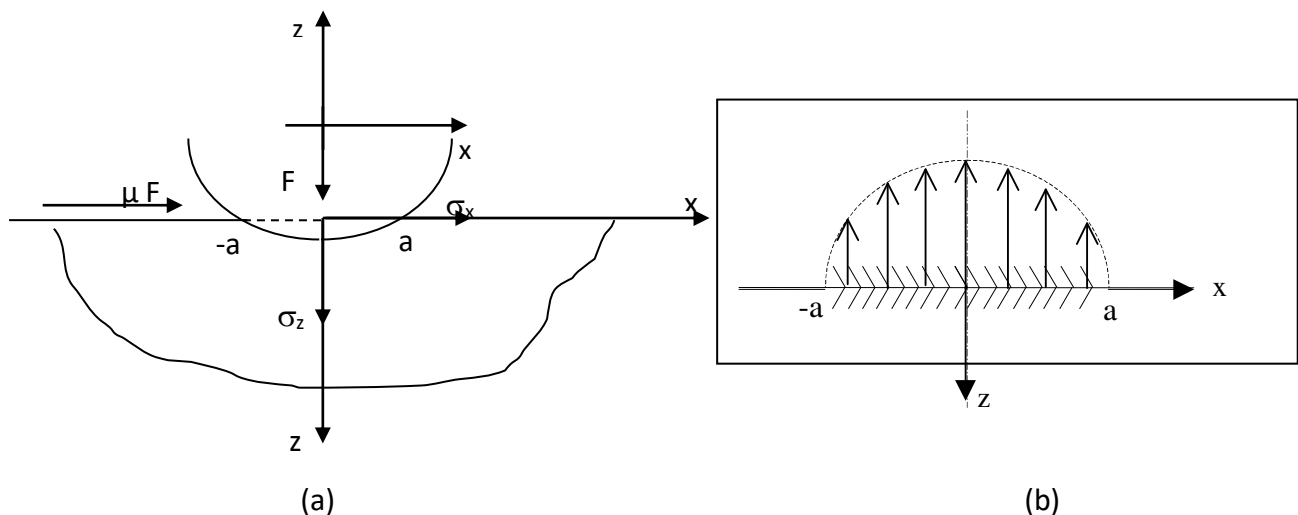


Figure II.2 Cas d'un solide semi-infini[12]

- (a) contact cylindre / espace semi-infini
 (b) distribution elliptique de la charge de contact

Dans la zone de contact $[-a,a]$ à $z = 0$ où a est la demi largeur de contact on a ,

$$\int_{-a}^{+a} \sigma_{zz} dx = -F , \text{ force appliquée par unité de longueur et } \tau_{xz} = \mu \sigma_z(x,z).$$

En dehors de la zone de contact en surface, la contrainte σ_{zz} est nulle.

$$\text{pour } |x| > a, \text{ à } z = 0 \quad \sigma_{zz} = 0 \quad [\text{II.3}]$$

Les contraintes s'annulent dans le matériau, loin de la zone de contact.

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{xx} \rightarrow 0 \\ \sigma_{zz} \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ quand } \quad \text{Im}z > 0. \quad [\text{II.4}]$$

Les solutions de l'équation de Laplace sont obtenues à l'aide des fonctions holomorphes :

Soit : $\Gamma(Y) = \Phi(Y) + i\psi(Y)$ une fonction holomorphe de la variable complexe

$Y = x + iz$, dont les parties, fonction imaginaire ψ et fonction réelle Φ vérifient l'équation de Laplace (V.2). $\Gamma(Y)$ est une fonction dérivable dont les dérivées partielles du premier ordre par rapport à x et z existent et satisfont aux conditions de Cauchy Riemann :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad [\text{II.5}]$$

Les contraintes σ_{xx} , σ_{zz} et τ_{xz} dans l'un des corps du couple des matériaux pour le contact dynamique semi-infini cylindre / plan de coefficient de frottement μ sont données par les relations de Mc Ewen [Mc Ewen, 1948] (II.6, II.7 et II.8)

$$\sigma_{xx} = \phi + 2\mu\psi - z \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu z \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad [\text{II.6}]$$

$$\sigma_{zz} = \phi + z \frac{\partial \psi}{\partial x} - \mu z \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad [\text{II.7}]$$

$$\tau_{xz} = \mu \phi - z \frac{\partial \psi}{\partial x} - \mu z \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad [\text{II.8}]$$

Les équations (II.6), (II.7) et (II.8) vérifient les équations d'équilibre et de compatibilité (II.1) et (II.2).

Expression des fonctions ϕ (Y) et ψ (Y) :

$$\Gamma = \frac{-2F}{\pi a^2} (\sqrt{a^2 - Y^2} + iY) = \frac{-2F}{\pi a^2} (\sqrt{a^2 - x^2 + z^2 - 2ixz} + ix - z) \quad [\text{II.9}]$$

À $z = 0$ l'équation (II.9) devient $\Gamma_{z=0} = \frac{-2F}{\pi a^2} (\sqrt{a^2 - x^2} + ix)$, par identification on obtient

$$\phi_{z=0} = \frac{-2F}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \quad [\text{II.10}] \quad \text{et} \quad \psi_{z=0} = \frac{-2F}{\pi a^2} x \quad [\text{II.11}]$$

Ainsi d'après l'équation [II.7] : $\sigma_{zz_{z=0}} = \phi_{z=0} = \frac{-2F}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2}$

Ce qui conduit dans la zone de contact $[-a, a]$ pour $z = 0$,

$$\int_{-a}^{+a} \sigma_{zz} dx = \frac{-2F}{\pi a^2} \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = -F \quad [\text{II.12}]$$

En utilisant un développement asymptotique, l'expression (V.9) peut être s'écrire :

$$\Gamma = \frac{-2F}{\pi a^2} \left[\sqrt{a^2 - Y^2} + iY \right] = \frac{-2F}{\pi a^2} iY \left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{2Y^2}\right) + \dots \right] \quad \Gamma \text{ tend vers } 0 \text{ si } Y \text{ tend vers l'infini et}$$

vérifie donc les conditions aux limites (V.4).7

II.2.2 Contact cylindre sur plan

Une approche similaire peut être appliquée au contact cylindre-plan. On considère un chargement linéique sur un massif semi-infini. Dans ce cas, le problème se résume à l'étude d'un contact bidimensionnel.

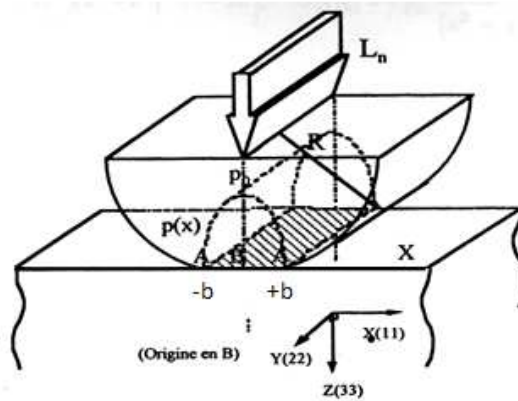


Figure II.3 : Contact cylindre sur plan [13]

Champ de contraintes dues aux pressions Hertziennes

Dans le cas du cylindre sur plan, le champ de contraintes à l'intérieur du volume du parallélépipède dû aux pressions Hertziennes s'écrit alors [18]:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_y &= - \left(\frac{b^2 + 2y^2 + 2z^2}{b} Q - \frac{2\pi}{b} - 3yR \right) \\
 \sigma_z &= - \frac{P_0}{\pi} z(bQ - yR) \\
 \sigma_x &= \nu(\sigma_y + \sigma_z) \\
 \tau_{yz} &= - \frac{P_0}{\pi} z^2 R \\
 \tau_{xy} &= 0 \\
 \tau_{xz} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad \text{[II.13]}$$

Où il est posé :

$$\left. \begin{aligned}
 R &= \frac{\pi}{\omega \varepsilon} (1 - \varepsilon) \left[\varepsilon^2 + 2\varepsilon + \left(1 - \frac{4b^2}{\omega} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
 Q &= \frac{\pi}{\omega \varepsilon} (1 + \varepsilon) \left[\varepsilon^2 + 2\varepsilon + \left(1 - \frac{4b^2}{\omega} \right) \right]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \right\} \quad \text{[II.14]}$$

Avec :

$$\begin{aligned}\omega &= (b + y)^2 + z^2 \\ \varepsilon^2 &= \frac{(b - y)^2 + z^2}{(b + y)^2 + z^2}\end{aligned}\quad \text{[II.15]}$$

Sur l'axe oz, le champ des contraintes s'écrit :

$$\left. \begin{aligned}\sigma_y &= -\frac{P_0}{\pi} z \left(\frac{b^2 + 2y^2 + 2z^2}{b} Q - \frac{2\pi}{b} \right) \\ \sigma_z &= -\frac{P_0}{\pi} zbQ \\ \sigma_x &= \nu(\sigma_y + \sigma_z) \\ \tau_{yz} &= \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0\end{aligned}\right\}$$

Sur l'axe oz, les axes x,y,z sont des axes principaux. La différence des contraintes principales est maximale pour $z = h_c = 0,78b$ (point de hertz) et la valeur de la contrainte tangentielle est égale à $0,3 P_0$.

II.2.3 Contact poinçon sur plan

Dans de nombreuses configurations industrielles on utilise le contact plan-plan sous pression normale ou plus exactement le contact poinçon-plan. Différentes formulations peuvent être considérées. Dans le cas d'une distribution uniforme de pression, correspondant au cas d'un poinçon souple, on détermine les composantes du tenseur en différents points du massif à l'aide des relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned}\sigma_{11}^N &= \frac{-P}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) - (\sin \theta_1 - \sin 2\theta_2)] \\ \sigma_{33}^N &= \frac{-P}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin \theta_1 - \sin 2\theta_2)] \\ \sigma_{13}^N &= \frac{P}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \\ \theta_1 &= \text{arctg} \left(\frac{Z}{X - a} \right) \\ \theta_2 &= \text{arctg} \left(\frac{Z}{X + a} \right) \\ \theta_{1,2} &= \text{arctg} \left(\frac{Z}{X \mp a} \right)\end{aligned}\right\} \quad \text{[II.17]}$$

On calcule respectivement les valeurs principales :

$$\sigma_{12}^N = \frac{-P}{\pi} (\alpha \pm \sin \alpha) \text{ et le cisaillement maximal } \tau_{\max} = \frac{P}{\pi} \sin \alpha$$

Les isovalues des contraintes principales σ_1 et σ_2 et du cisaillement maximal τ_{\max} sont décrites par la famille de cercles passant par les deux points du contact O_1 et O_2 (fig.II.14).

La valeur maximale est obtenue pour avec $\alpha = \frac{\pi}{2}$ avec $\tau_{\max}^n = \frac{P}{\pi}$

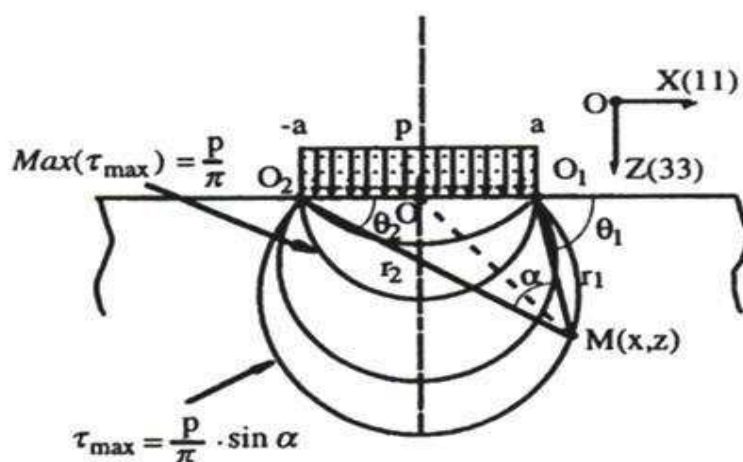


Figure II.4 Isovalues des contraintes principales σ_1 et σ_2 et du cisaillement maximal τ_{\max} [14]

Contact poinçon sur plan sous l'effet d'un effort tangentiel

Pour un contact poinçon sur plan sous l'effet d'un effort tangentiel, lorsqu'un déplacement relatif est imposé, le maintien parallèle des surfaces en contact plan est extrêmement difficile à obtenir. Une inclinaison apparaît, conduisant inévitablement à des effets de coin. L'introduction de l'effort tangentiel, outre le fait qu'il induit un désalignement, accentue les discontinuités observées en bordure de contact pour un chargement normal simple. Dans le cas idéal d'un alignement parfait, pour un poinçon souple conduisant à une distribution homogène du champ de cisaillement.

On détermine les composantes du tenseur en différents points du massif à l'aide des relations suivantes.

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^T &= \frac{\mu P}{2\pi} \left[4 \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) - (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \right] \\ \sigma_{33}^T &= \frac{\mu P}{2\pi} [(\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2)] \\ \sigma_{13}^N &= \frac{-\mu P}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)] \\ r_{1,2} &= [(X \mp a)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad \text{[II.18]}$$

Contrairement au chargement purement normal qui présente toujours des valeurs finies, l'introduction du chargement tangentiel introduit une discontinuité infinie par la composante σ_{11}^T en bordures de contact.

Ainsi, aussi petite que soit la valeur de la force tangentiel associée, cette surcontrainte ne pourra être adaptée que par une accommodation irréversible du matériau et donc par plastification ou fissuration.

Aux composantes associées au chargement normal, on superpose celles induites par le chargement tangentiel pour obtenir l'état global de chargement.

II.3 Conclusion

L'application de la théorie de Hertz offre la possibilité de calculer facilement et correctement la longueur, la pression maximale au point du contact et le déplacement engendrée par l'effort. Les calculs montrent que, pour un contact normal d'un cylindre sur plan, la différence des contraintes principales est maximale $z=h= 0.78 b$ (point de Hertz) et la valeur de contrainte tangentielle est égale à $0.37 P_0$.

Chapitre III

Analyse expérimentale

III.1 Introduction

L'objectif est de déterminer les contraintes expérimentalement à l'aide de la photoélasticimétrie sur le modèle en époxy biréfringent. Ce modèle est sollicité à la traction simple avec des charges différentes. On passe ensuite à l'analyse sur le polariscope pour obtenir les franges isochromes et isoclines.

III.2 Modèle utilisé

Pour pouvoir observer les champs de contraintes, le modèle utilisé a été usiné dans une plaque biréfringente. (Fig.III.1). Il s'agit d'un crochet qui est un élément très utilisé en mécanique par exemple pour soulever des charges.



Figure.III.1 Forme de modèle N°1

III.3 Vérification du modèle

Avant de procéder à l'observation et l'analyse du modèle sur le polariscope, on doit vérifier qu'il ne présente pas de contraintes résiduelles. Après observation, on a constaté qu'il y a une très faible présence de contraintes résiduelles qui n'influenceront pas les résultats de l'expérience.



Figure III2 : Observation des contraintes résiduelles sur le crochet

III.4 Détermination des efforts

Les efforts ont été mesuré à l'aide d'un dynamomètre anneau dont la raideur est : $K= 1.738$.

III.5 Détermination de la valeur de frange

Avant d'effectuer les essais, on doit d'abord retrouver la valeur de frange de l'époxy f . Pour cela, on la détermine à l'aide d'un essai de flexion 4 points; la valeur obtenue par l'essai sera la valeur de f utilisée pour l'analyse des contraintes dans les deux modèles.

- **La méthode (essai de flexion 4 points)**

L'essai de flexion 4 points (Fig.III.4), permet de créer un moment fléchissant constant sur une éprouvette en matériau biréfringent.

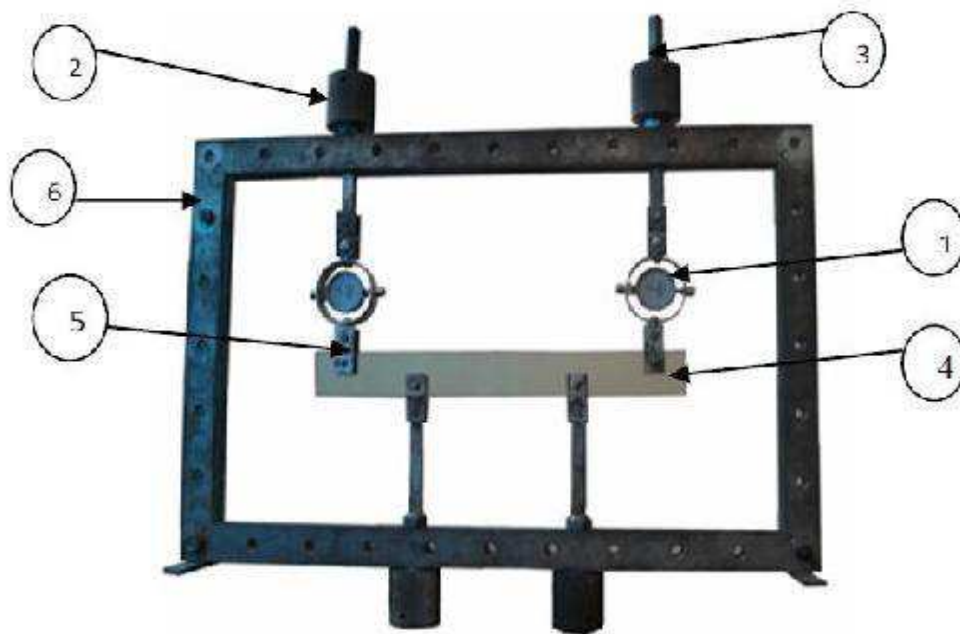


Figure III.3 Dispositif de chargement en flexion

Les composants du dispositif

1. Dynamomètres
2. Ecou
3. Tige filetée
4. Eprouvette
5. Plaque de liaison
6. Cadre de charge

Modèle utilisé

L'éprouvette ci-dessous sera soumise à un moment fléchissant en utilisant le banc d'essai sur la figure III.4.

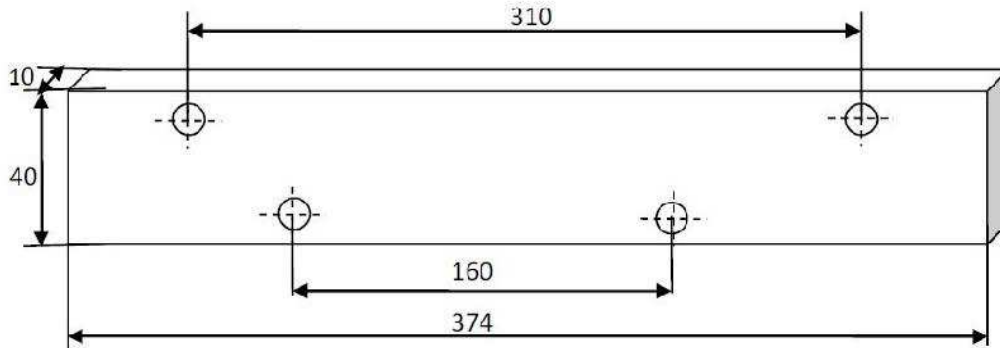


Figure III.4 Eprouvette de flexion

Principe et procédure de détermination de la constante de frange

Avant de commencer l'expérience, il est nécessaire de régler la disposition des polaroïds qui donne la lumière circulaire avec élimination des isoclines. En créant un moment fléchissant constant sur une certaine partie de l'éprouvette, une fois les franges isochromes visualisées (fig.III.6). On relève leurs nombres afin de retrouver la valeur de l'ordre de frange au niveau du bord libre.

Le calcul de M_f par des relations RDM puis les remplacer dans la relation (III.5), permet de retrouver la valeur de la constante de frange.

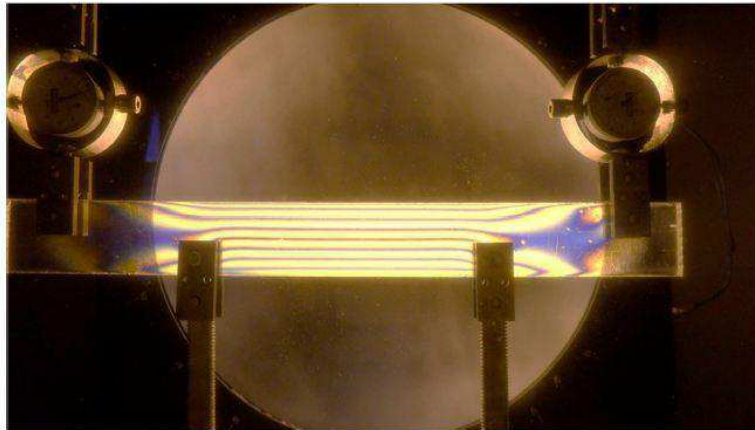


Figure III 5 Franges isochromes obtenues en flexion

- **Calcul de la valeur de frange**

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot f}{e} \quad \text{(III.1)}$$

Sur les bords de l'éprouvette nous avons : $\sigma_2 = 0$

Ce qui donne :

$$f = \frac{e \sigma_1}{N} \quad \text{(III.2)}$$

La contrainte σ nous est donnée par la formule suivante :

$$\sigma_1 = \frac{Mf}{w_{xx}} = \frac{Mf}{I_{xx}} \cdot v \quad \text{(III.3)}$$

Tel que :

$$w_{xx} = I_{xx} / v$$

Ou : I_{xx} est le moment d'inertie de la plaque qu'est donné par la relation :

$$I_{xx} = \frac{e \cdot h^3}{12} \quad \text{(III.4)}$$

En remplaçant (III.3) dans la relation (III.2) on aura :

$$f = 6 \frac{Mf}{N h^2} \quad \text{(III.5)}$$

- **Calcul du moment fléchissant Mf :**

On applique aux points A et B, un effort F d'intensité égale à 173,8 N.

➤ A l'équilibre, on a :

$$\Sigma F_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow 2F - R_B - R_C = 0$$

$$\Sigma M_{f/B} = F_A(AB) + R_B(BB) + R_C(CB) + F_D(DB) = 0$$

$$\Rightarrow 160R_C - 235F_D + 75F_A = 0 \quad \text{(III.6)}$$

A partir de ces équations d'équilibre, on retrouve :

$$R_D = R_C = F = 173,8 \text{ N} \quad (\text{III.7})$$

Le moment fléchissant entre A et B est :

$$M_f = F.x \quad (\text{III.8})$$

Le moment fléchissant entre B et C est :

$$\begin{cases} M_f = F.x - R_B(x - 75) \\ M_f = F.x - F.x + 75.F \\ M_f = 75.F \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

De (III.7) et (III.9), on déduit le moment maximum :

$$M_f = 13035 \text{ N.mm}$$

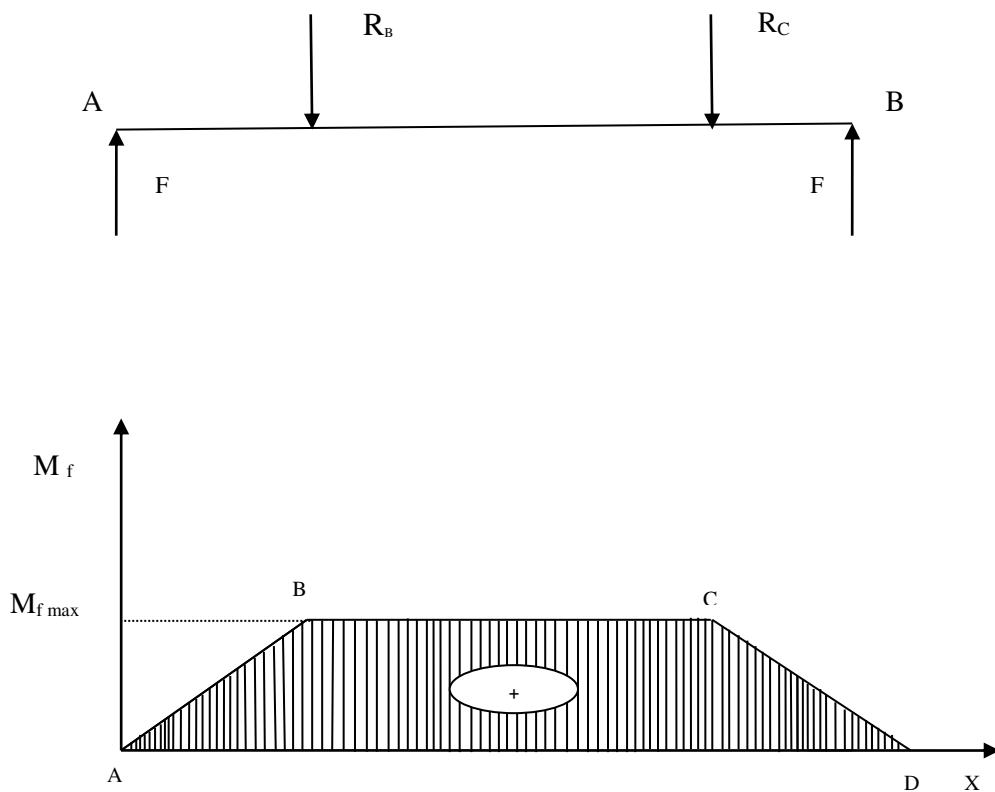


Figure.III.6. Diagramme du moment fléchissant.

Après application des efforts, on relève sur la largeur de la poutre l'ordre de frange N^* correspondant au moment fléchissant appliqué sur le modèle.

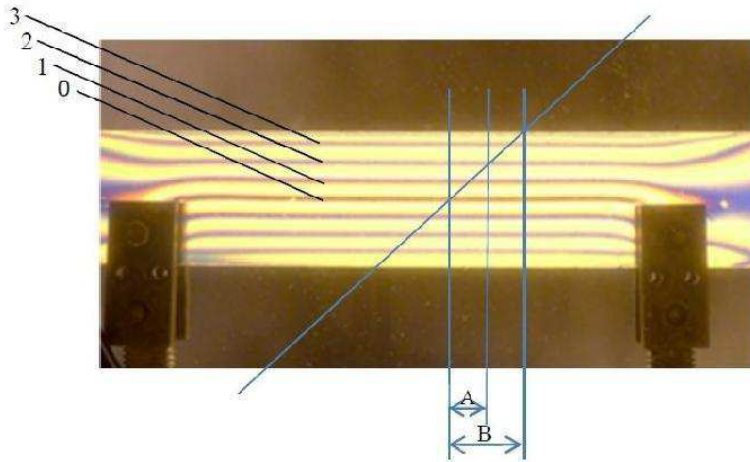


Figure III.7 Relevé de l'ordre de franges au bord de l'éprouvette

Sachant que l'ordre de frange au niveau de la ligne neutre est égale à zéro, à une distance A, on a l'ordre de frange égale à 1,5, l'ordre de frange N au bord de l'éprouvette, a une distance B sera donné avec : $N = 2 (B/A)$.

En mesurant les distances A et B à partir de la figure (III.8), on aura le rapport (B/A) égale à 2, ce qui donne $N = 4,5$

$$N = N^* / 2 \quad (III.10)$$

En substituant (III.10) dans (III.5) on aura :

$$f = \frac{12M_f}{h^2 N^*}$$

Application numérique :

$$h = 40 \text{ mm.}$$

$$M_f = 11587,5 \text{ N.mm.}$$

$$N^* = 9$$

On trouve : $f_l = 10.9 \text{ N/mm}$

III.6 Détermination des contraintes

A l'aide des isochromes, on peut déterminer la variation de la différence des contraintes principales, après avoir déterminé les ordres de franges le long de la droite [AB]. en utilisant la loi de Maxwell :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N.f}{e}$$

La contrainte de cisaillement maximale est donnée par la relation de MAXWELL :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

On aura donc à partir des relations ci-dessous :

$$\tau_{\max} = \frac{N.f}{2.e}$$

Avec :

N : Ordre de frange.

f : Constante de frange

e : Epaisseur du modèle.

On a calculé à l'aide des relations données, les valeurs de τ_{\max} en un nombre déterminé de points pris sur le segment [AB]. En effet, ces points sont repérés au niveau des intersections du segment [AB] avec les franges isochromes.

L'abscisse X et l'ordre de frange N sont relevés en chacun de ces points. Ces valeurs sont portées sur des tableaux à partir desquels seront tracés les graphes de l'évolution de la contrainte de cisaillement maximale le long du segment [AB].

III.7 Visualisation du réseau d'isochrome sur le modèle en champ obscur

Après chargement du modèle en lumière monochromatique polarisée circulairement, les franges isochromes en champ obscur peuvent être distinguées et repérées par leur ordre d'apparition (fig.III.9). Nous pouvons compter les franges par ordre croissant.

La figure(III.8) suivante représente le réseau d'isochromes sur le premier modèle sous la charge F_1 et l'ordre des franges en champ obscur

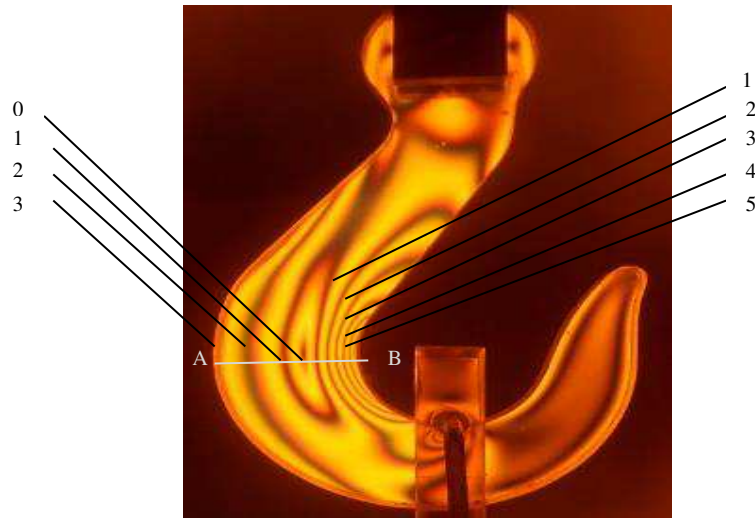


Figure III.8 Visualisation du réseau d'isochromes

On relève les distances de l'intersection des franges isochromes avec la droite [AB] par rapport au point A. On reporte toute les valeurs dans un tableau et les valeurs de $[(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2]$ calculées (tab.III.2).

Ordre de frange N	distance sur image en (mm)	distance réel en (mm)	$(\sigma_1 - \sigma_2)$ (N/mm ²)	Contrainte de cisaillement maximale τ_{\max} [MPa]
3	2	1,16	3,27	1,63
2	12	7	2,18	1,09
1	23	13,41	1,09	0,54
0	30	17,5	0	0
1	34	19,83	1,09	0,54
2	38	22,16	2,18	1,09
3	41	23,91	3,27	1,63
4	43	25,08	4,36	2,18
5	45	26,25	5,45	2,72

Tab.III.1. Valeurs de $[(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2]$ relevées suivant le long [AB]

La figure suivante représente le graphe de la variation des contraintes le long de la droite [AB].

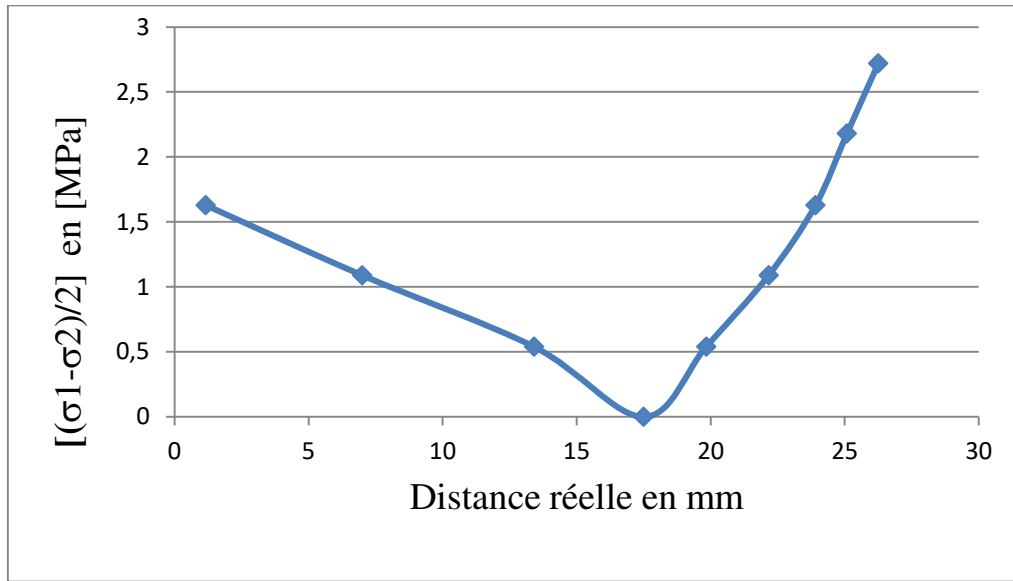
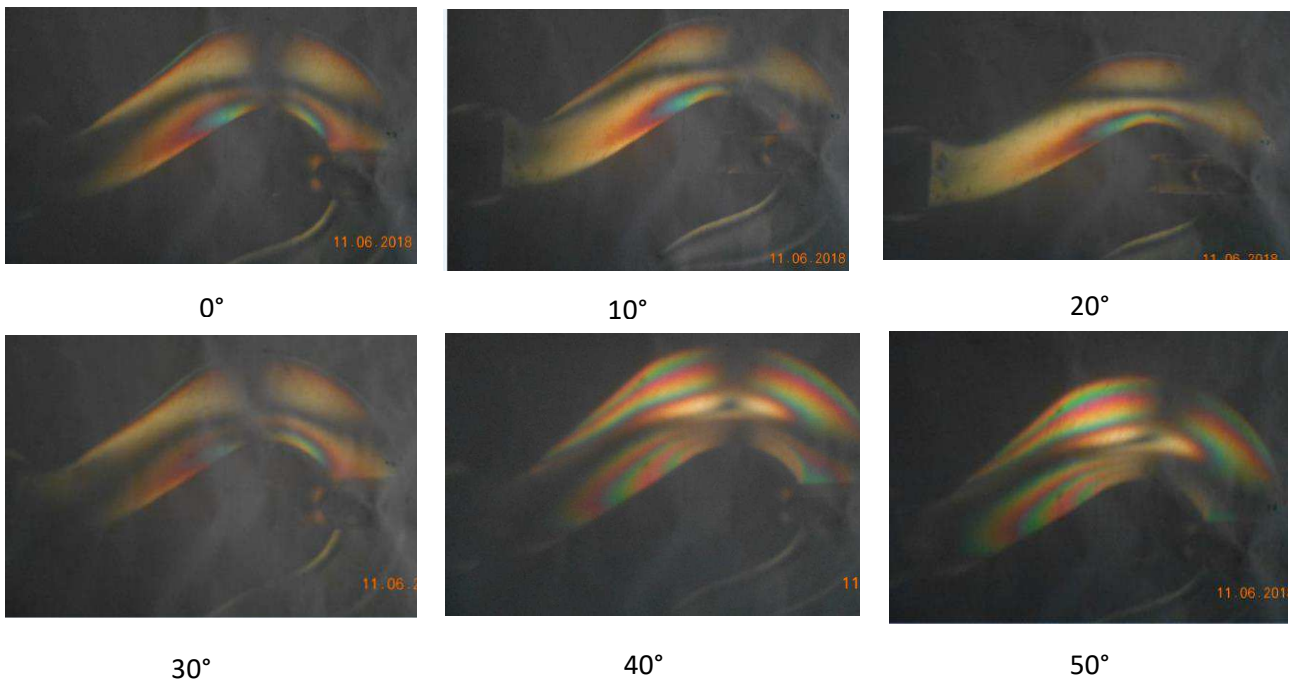


Fig.III.9 Graphe de $[(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2]$ le long de la droite [AB].

III.8 Les isoclines

En faisant tourner les deux polaroïds simultanément les franges isoclines apparaissent l’une après l’autre suivant l’angle de rotation (α). On remarque qu’en faisant tourner simultanément les deux polaroïds, les franges isoclines apparaissent en zones sombres, qui changent de position suivant l’angle de rotation.



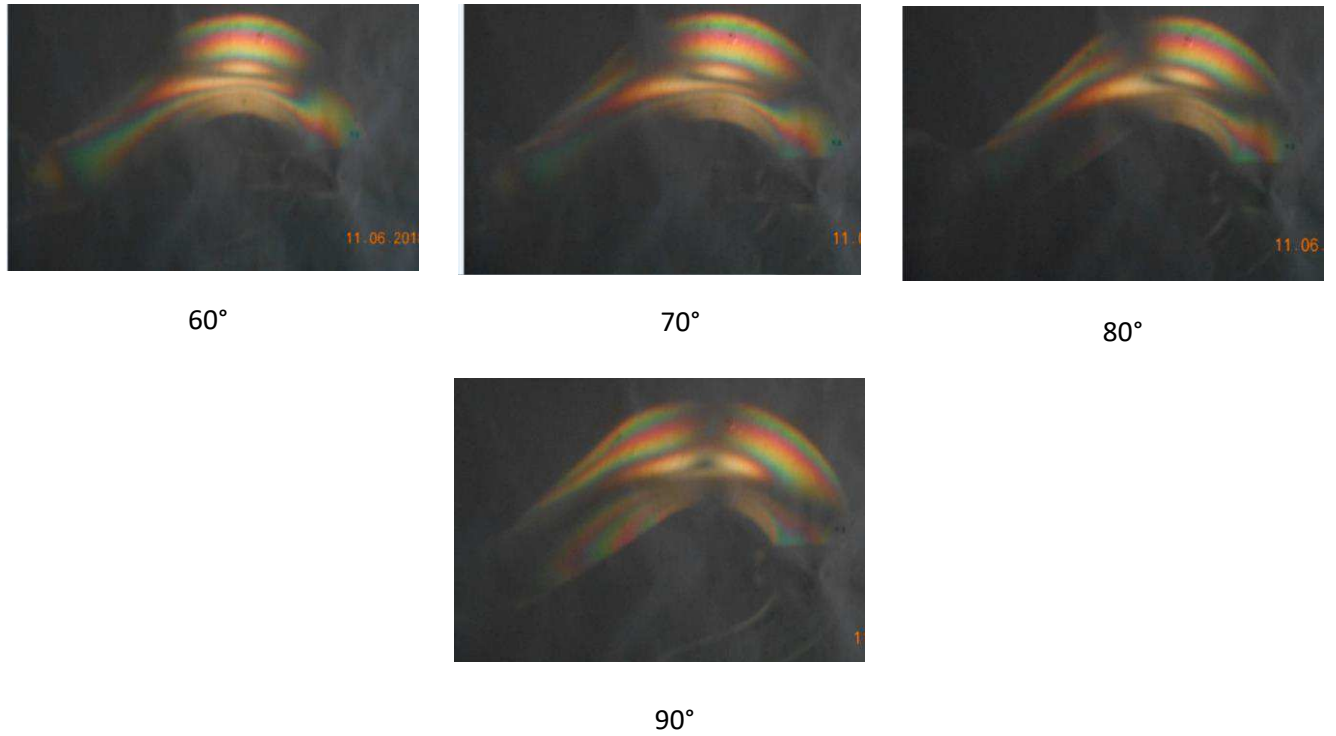


Figure III.10. Réseau d'isoclines suivant les différentes configurations du polariscope.

III.9 Le dispositif du deuxième modèle vis-écrou

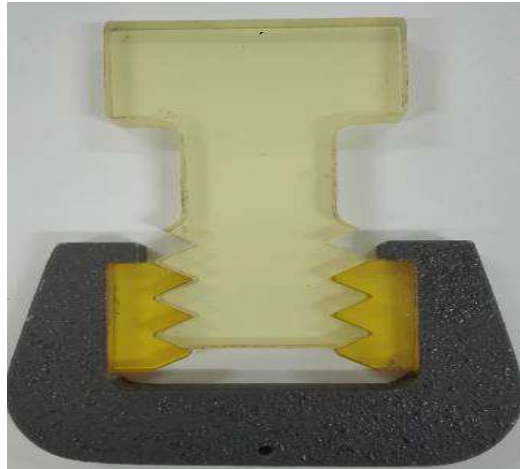


Figure III.11 Forme du modèle N°2

Dispositif de chargement

Le modèle est sollicité en traction avec une charge $F=100\text{N}$

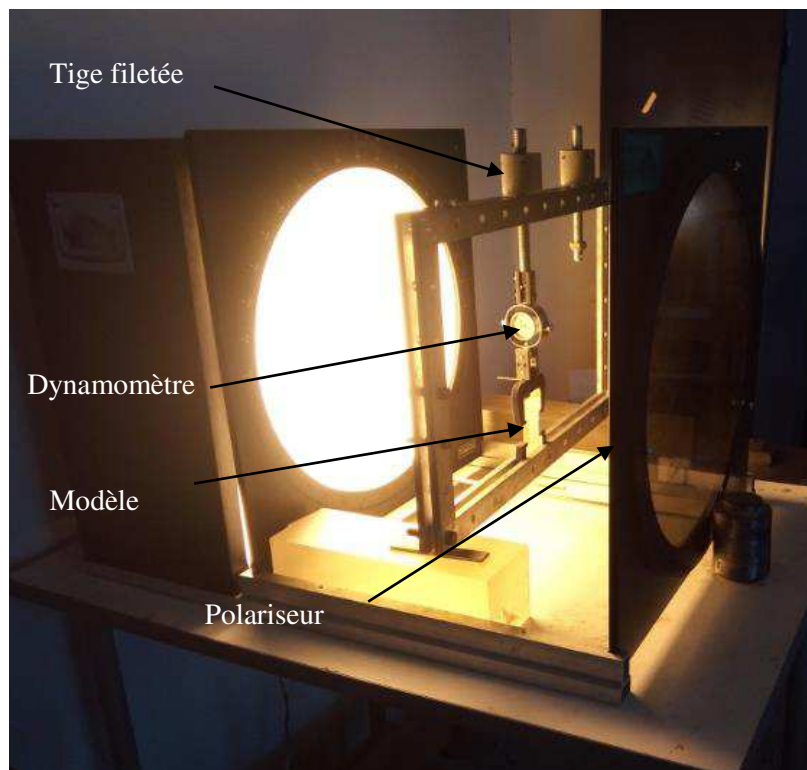


Figure III.12 Dispositif de chargement pour l'essai de contact

III.10 Visualisation du réseau d'isochrome sur le modèle en champ obscur

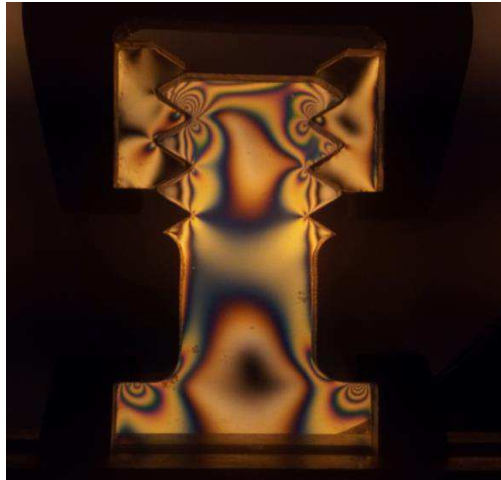


Figure III.13 Réseau d'isochromes observé sur le polariscope

On voit que les franges sont difficiles à distinguer, ce qui nous amène à agrandir la zone pour pouvoir repérer les franges **Figure.III.13**.

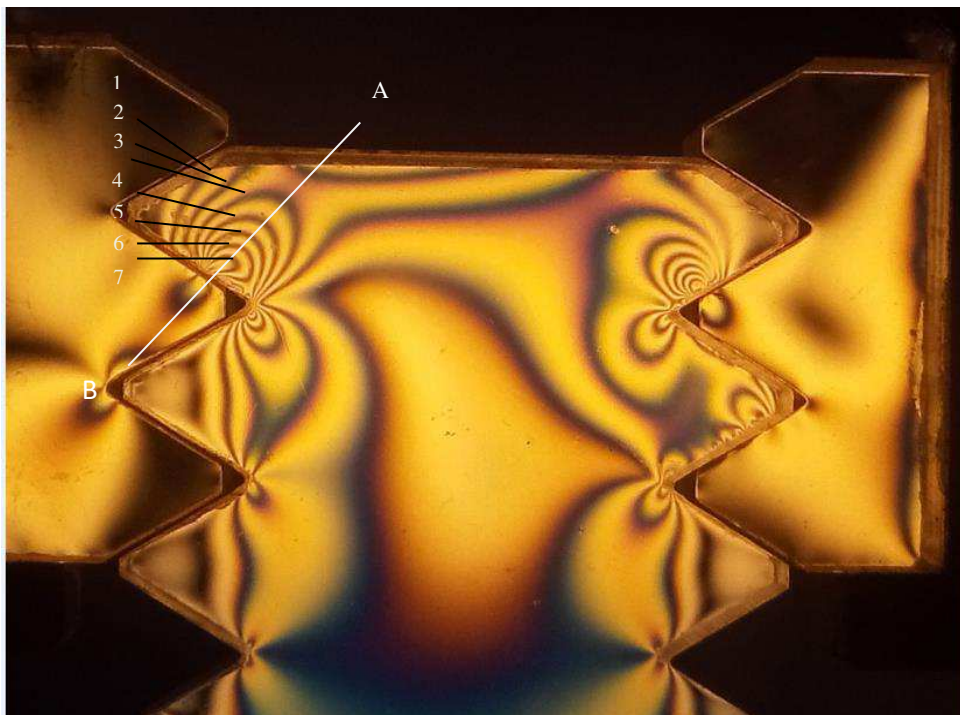


Figure.III.14 Réseau d'isochromes observé sur le polariscope

III.11 Calcul de la valeur de τ_{\max} suivant le segment [AB]

A l'intersection du segment [AB] avec les granges isochromes, on relève les distances correspondantes par rapport au point A. Ces valeurs sont portées sur un tableau à partir duquel on trace le graphe de l'évolution de la contrainte de cisaillement maximale.

Ordre de frange N	distance sur image en (mm)	distance réel en (mm)	$(\sigma_1 - \sigma_2)$ (N/mm ²)	Contrainte de cisaillement maximale τ_{\max} [MPa]
1	28	9,25	1,09	0,54
2	19	6,28	2,18	1,09
3	12	3,96	3,27	1,63
4	9	2,97	4,36	2,18
5	5,5	1,81	5,45	2,72
6	4	1,32	6,54	3,27
7	2	0,66	7,63	3,81

Tab.III.2 Valeurs de $[(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2]$ relevées suivant le segment [AB]

A chaque ordre de frange, l'ordre de frange N correspond à une valeur de la contrainte de cisaillement maximale donnée en valeur absolue ($\tau_{\max} \geq 0$)

La figure suivante représente le graphe des contraintes le long de la droite [AB] sous la charge sur le deuxième modèle.

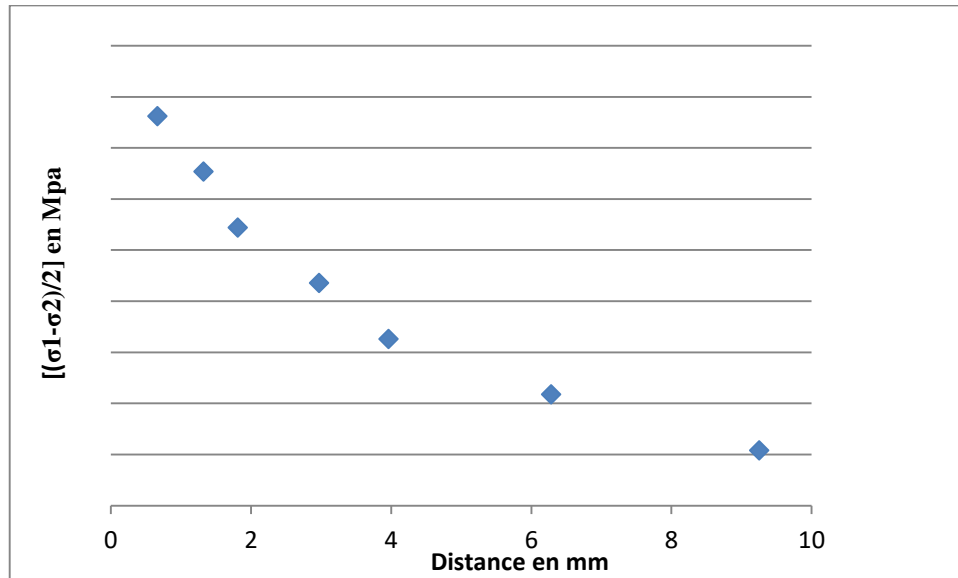


Fig.III.15 Graphe de $[(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2]$ le long de la droite [AB]

III.12 Les franges isoclines

En faisant tourner les deux polaroïds simultanément les franges isoclines apparaissent l'une après l'autre suivant l'angle de rotation (α). On remarque qu'en faisant tourner les deux polaroids, les franges isoclines apparaissent en zones sombres, qui changent de position suivant l'angle de rotation. Les isoclines ne dépendent pas de la charge appliquée voir la figure(Fig.III.14).

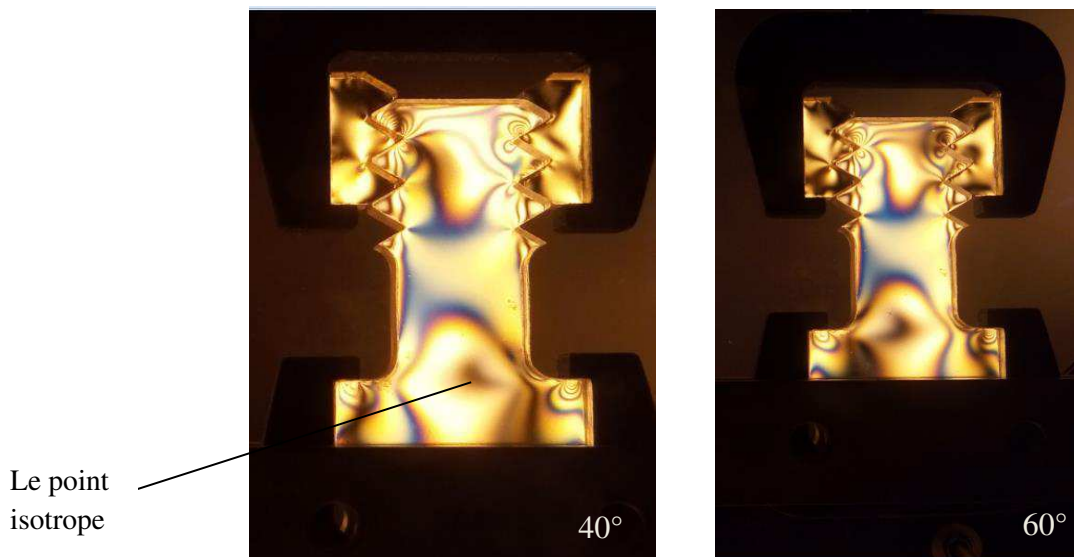


Figure.III.16 Réseau d'isoclines suivant les différentes configurations du polariscope

III.13 Conclusion

Dans ce chapitre, on a utilisé la photoélasticimétrie 2D pour l'analyse des contraintes, on a déterminé le champ de contrainte développé dans les deux modèles, pour valider les résultats numériques, une analyse expérimentale des champs des contraintes à l'aide de la photoélasticimétrie a été faite. Principalement, on a montré que les franges isoclines et isochromes sont similaires aux réseaux des franges obtenues numériquement. Une comparaison a été faite entre les graphes de la variation de la contrainte de cisaillement maximale le long d'une droite [AB]. Les résultats obtenues ont relevé relativement une bonne concordance entre les valeurs numériques et expérimentales.

Chapitre IV

Analyse numérique

IV.1 Analyse numérique des contraintes

L'analyse par éléments finis conduit avec le logiciel Castem a été utilisée pour obtenir le champ des contraintes développées à l'intérieur du modèle. Le comportement du modèle est isotrope et élastique. L'analyse est faite pour deux éprouvettes de formes différentes et avec deux charges différentes. La simulation a été réalisée à l'aide d'un programme écrit sous CASTEM, elle est basée sur la configuration du montage expérimentale. Dans le calcul par éléments finis on a considéré le comportement des modèles isotrope purement élastique.

a) Géométrie et maillage

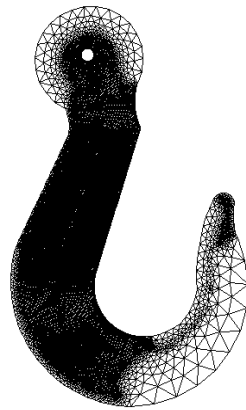


Figure. IV.1 Représentation de la surface maillée

b) Représentation des déformations

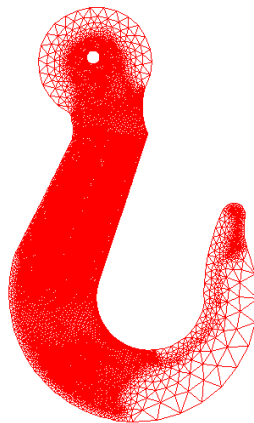


Figure. IV.2 Tracé de la déformée de l'éprouvette

c) Représentation des réactions

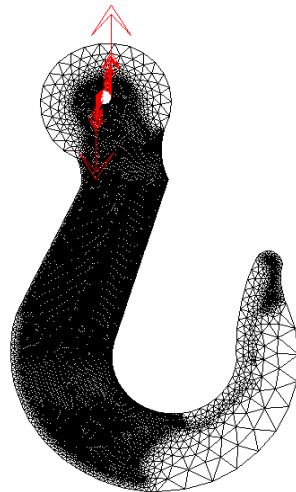


Figure.IV.3 Représentation des réactions

IV.2 Traçage des isochromes

La figure IV.4 représente les franges isochromes en champ obscur obtenues à l'aide d'un programme écrit sous CASTEM. Elles sont tracées avec une échelle de couleur dont le bleu correspond aux franges noires relevées sur le polariscope et le rouge correspond aux franges claires. . Le réseau d'isochromes est donné par $\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)=0$ ou φ est le déphasage.

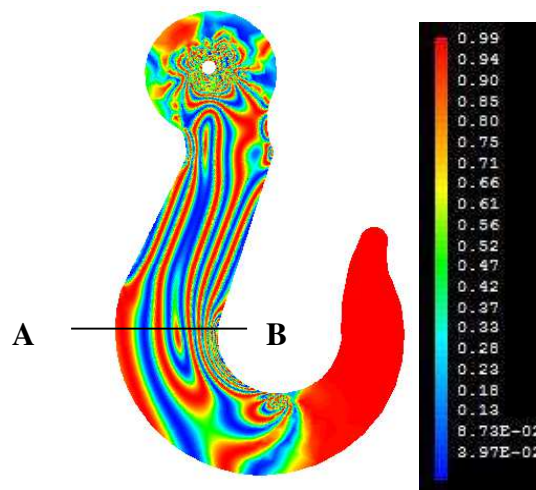
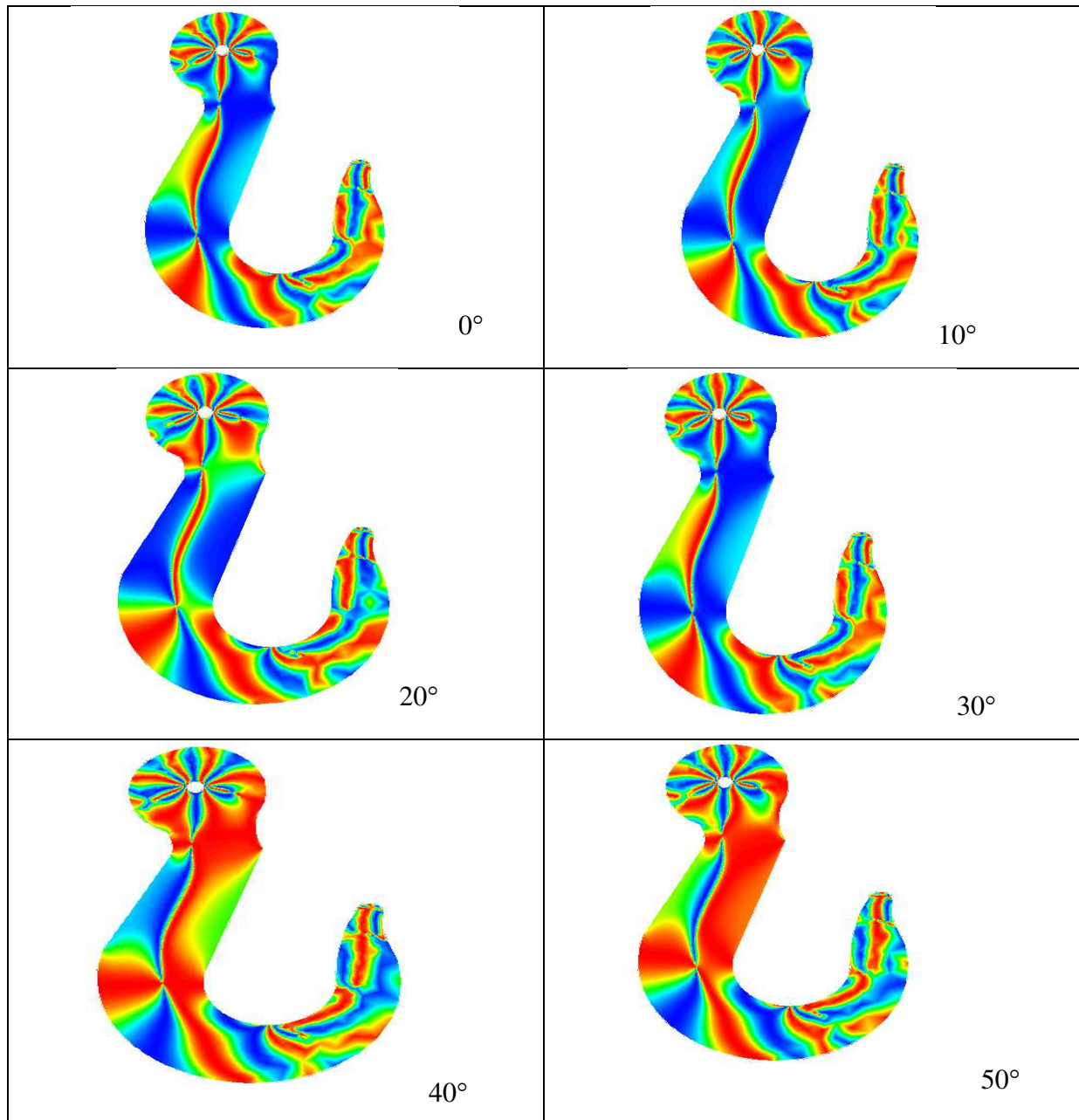


Figure.IV.4 Tracé des isochromes obtenues sous la charge F

IV.3 Visualisation des isoclines

Le programme donne la valeur du $\sin^2 2\alpha$ en chaque point du modèle. Ceci permet de tracer les isoclines correspondant à $\sin^2 2\alpha = 0$. On simule la rotation des polaroids en augmentant successivement l'angle isocline α de 10 degrés. La figure IV.5 représente les différentes franges isoclines obtenues pour les différentes valeurs de l'angle isocline α .



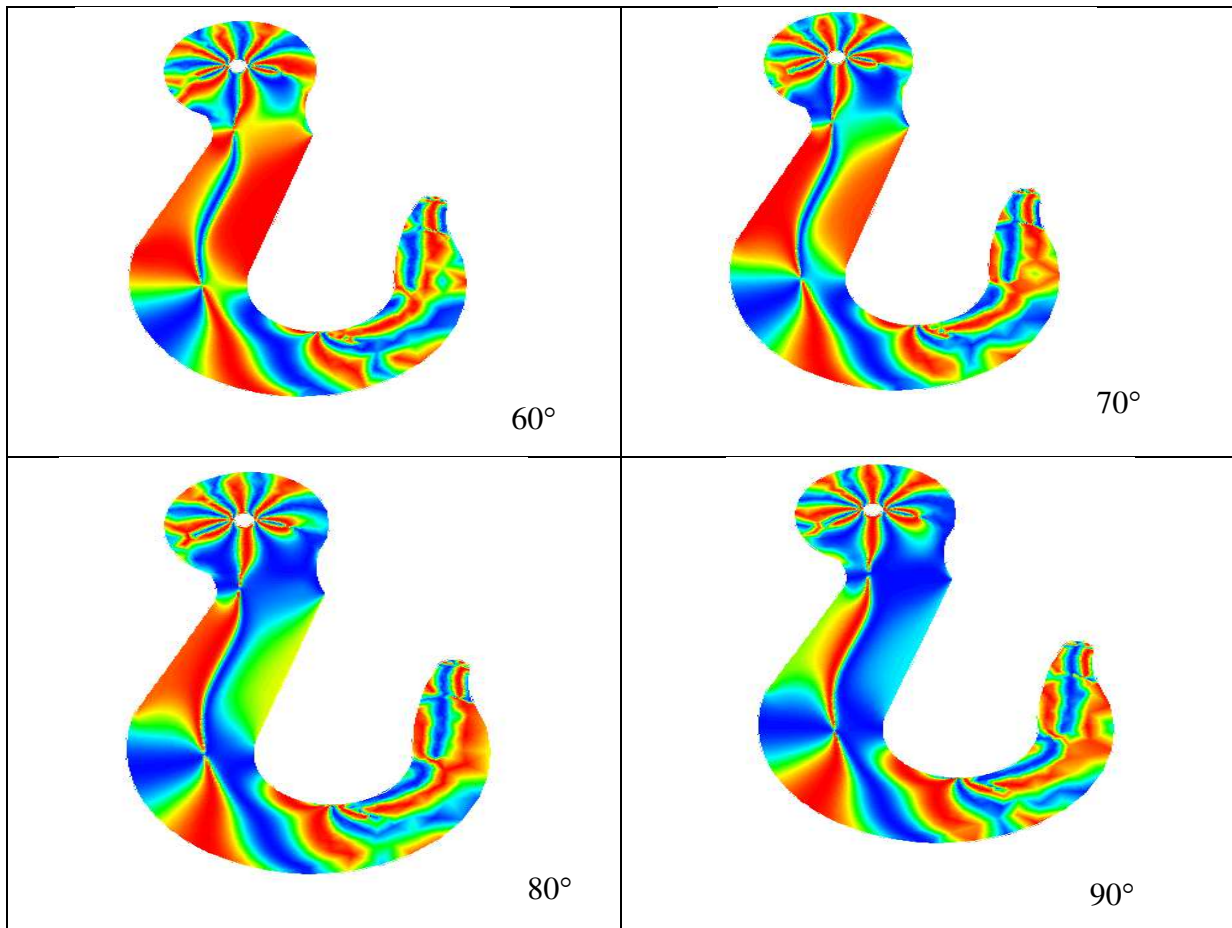


Figure. IV.5 Tracé des isoclines obtenues numériquement de 0° à 90°

IV.4 La variation de la contrainte de cisaillement maximale le long de la droite [AB]

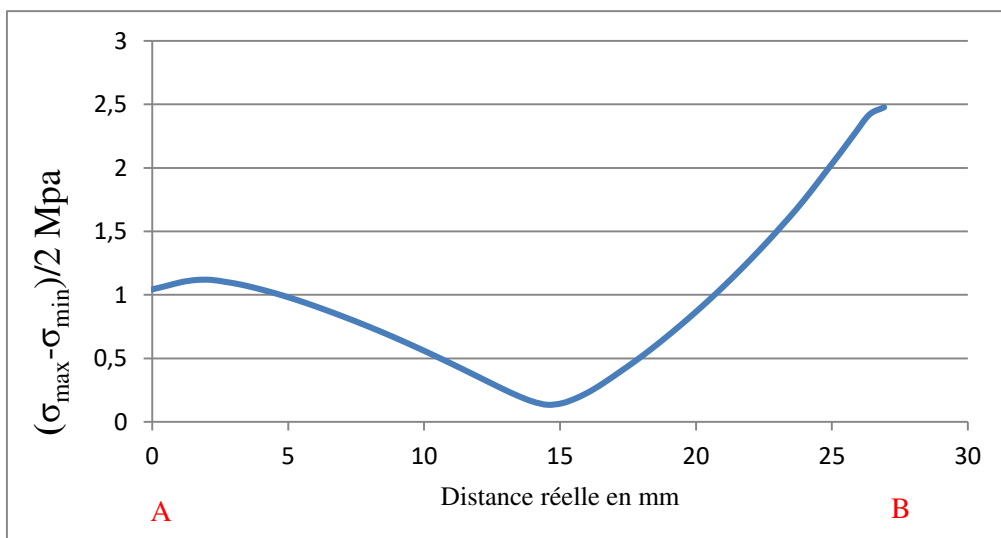


Figure IV.6 Evolution de τ_{max} relevée numériquement le long de la droite AB

IV.5 Comparaison des résultats

Le but de cette comparaison est de valider les résultats éléments finis par l'expérimentale. Deux comparaisons sont possibles. La première sera faite entre les images des isochromes et isoclines relevées expérimentalement et celles simulées numériquement, la deuxième sera faite entre les courbes de la variation de la différence des contraintes principales.

IV.5.1 Comparaison de Réseau d'isochromes

Les images relevées expérimentalement sont comparées avec les images calculées numériquement avec CASTEM.



Figure IV.7 Isochromes relevées expérimentalement

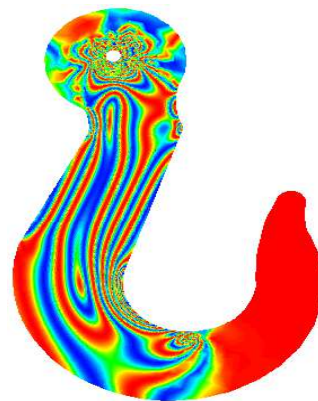


Figure IV.8 Isochromes simulées à l'aide du logiciel CASTEM2000

IV.5.2 Comparaison des graphes numériques et expérimentaux

La figure IV.7 représente la superposition des courbes expérimentales et numériques de la différence des contraintes principales.

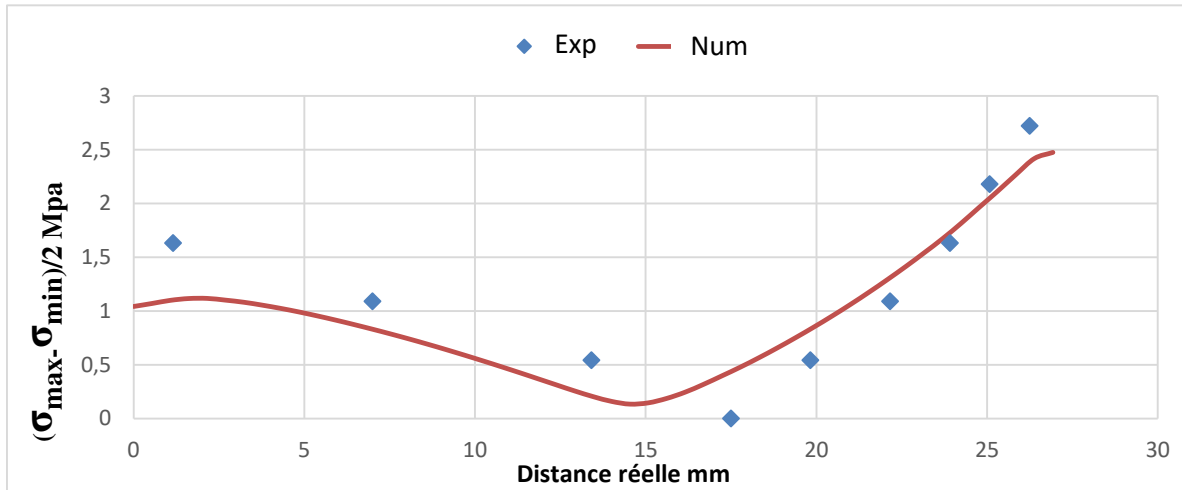


Figure IV.9 Superposition des graphes numériques et expérimentaux

IV.6. Interprétation des résultats

IV.6.1 Discussion sur les images isochromes

En pratique, en champs sombre, la couleur noire qui représente les franges isochromes correspond au bleu sur les figures données par Castem.

Pour le modèle, les différents réseaux d'isochromes obtenues par la méthode expérimentale et la méthode des éléments finis sont comparables.

IV.6.2 Discussion sur les tracés d'évolution de $[(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2]$

La figure IV.7 représente une superposition des deux courbes (expérimentale et numérique), Ces courbes sont obtenues par les tracés de l'évolution de la contrainte de cisaillement maximale (τ_{\max}) suivant le segment [AB].

Nous pouvons remarquer que les deux courbes ont presque la même allure. Il existe une bonne concordance des résultats.

Conclusion

Le but de ce travail est d'analyser les champs des contraintes développés dans deux modèles soumises à une traction simple. Deux méthodes d'analyse ont été utilisées. La première méthode est la photoélasticimétrie; elle consiste à utiliser le phénomène de biréfringence. L'exploitation des franges photoélastiques obtenues permet d'analyser les contraintes. La deuxième méthode est la méthode des éléments finis; des programmes écrits sous CASTEM permettent de faire une simulation; on peut déterminer aussi bien les valeurs des contraintes que leurs directions. Des comparaisons peuvent donc être faites avec la solution expérimentale pour validation.

La comparaison a été faite en utilisant les valeurs des contraintes ainsi que les champs de contraintes obtenues sous formes de frange isochromes et de franges isoclines.

Principalement, on a montré que les résultats obtenus expérimentalement et ceux obtenus avec la méthode des éléments finis sont relativement en bonne concordance.

Les écarts sont dus probablement aux :

- Conditions aux limites qui peuvent être légèrement différentes des conditions réelles.
- Présence de contraintes résiduelles.
- Sur CASTEM on a considéré un comportement purement élastique.

Cette étude implique des prolongements que l'on peut considérer dans le cadre de perspective. Surtout en ce qui concerne le phénomène de concentration des contraintes, vu la différence de répartition des champs de contraintes entre les deux modèles analysés, causé probablement par les variations géométriques des deux surfaces.

Références bibliographiques

- [1] Thèse doctorat, **BILEK ALI**, Méthode non destructive de découpage optique en photoélasticimétrie tridimensionnelle. Application au problème fondamental du contact. UMMTO, promotion 2007.
- [2] mémoire de fin d'étude (ingénieur) proposé par Broz VACLAV et présenté par Mustapha TOUMI et Djamel TILIUIUNE « La photoélasticimétrie ; problème de concentration de contrainte » promotion 1989.
- [3] Mémoire d'ingénieur, M. BELDI, S.MERBAH, Analyse numérique et expérimentale du champ de contraintes dans un contact d'engrènement à denture droite. UMMTO, promotion 2008.
- [5] D. DARTUS, « *Élasticité linéaire* », Édition CEPADUES - janvier 1995
- [6] Didier BELLET- Jean Jacques BARRAU, « *Cours d'élasticité* » (Photoélasticité) Éditions CEPADUES - Août 1990.
- [7] GERARD. ZANBELLI, LEO. VINCENT, matériaux et contacts. Première édition, presse polytechniques, 1998.
- [8] CHERFI TASSADIT«Détermination du facteur de concentration de contraintes et du facteur d'intensité de contraintes avec la méthode photoélastique et la méthode des éléments finis» 2013
- [9] Abaques tirés des : cours et applications d'RDM par LP, AULNOYE
- [10] Livre intitulé « élasticité linéaire» collection polytech de L'I.N.P de Toulouse
- [11] DJEDDI FADHILA: « Détermination numérique et expérimentale de contraintes dans le problème de contact mécanique » Mémoire de Magister 2007.
- [12] K. L. Johnson, « *Contact mechanics* », Cambridge University press 1985.
- [13] Ressource internet, mot clé (Elasticité, Photoélasticimétrie, Point isotrope, Castem, Eléments finis).
- [14] TOUAT TARIK« Analyse des contraintes dans les pièces mécaniques à l'aide de la photoélasticimétrie et de la méthode des éléments finis» Mémoire de magister 2012

Programme Castem pour le crochet

a) début du programme

* =====

*options

* =====

OPTI DIME 2 ELEM SEG2 ;

La directive opti(on) permet de déclarer les principaux paramètres du programme
(Ex: dimension du problème, type d'élément géométrique....)

b) géométrie du modèle

* =====

*les points

* =====

P1=2. 50.;

P12=39. 0.;

C8=5. 87.;

P13=27. 111.;

P14=25. 113.;

P16=25. 109.;

P15=23. 111.;

P9=18. 94.;

P10=19. 86.;

C7=25. 111.;

P6=28. 43.;

P8=41. 102.;

P7=42. 88.;

C1=40. 39.;

C5=43. 38.;

P5=60. 37.;

P56=43. 22.;

C6=60. 97.;

P4=65. 65.;

C3=69. 64.;

P3=72. 64.;

P89=20. 125.;

P2=73. 53.;

C2=92. 59.;

C4=123. 41.;

*=====

Trou

*=====

ARC1=P1 CERC 50 C1 P12;

ARC2=P12 CERC 10 C1 P2;

ARC3=P2 CERC 10 C2 P3;

ARC4=P3 CERC 10 C3 P4;

ARC5=P4 CERC 10 C4 P5;

ARC6=P5 CERC 10 C5 P56;

ARC7=P56 CERC 300 C5 P6;

ARC8=P7 CERC 50 C6 P8;

ARC9=P8 CERC 10 C7 P89;

ARC10=P89 CERC 10 C7 P9;

ARC11=P9 CERC 10 C8 P10;

ARC13=P13 CERC 10 C7 P16;

ARC14=P16 CERC 10 C7 P15;

ARC15=P15 CERC 10 C7 P14;

ARC16=P14 CERC 10 C7 P13;

TR=ARC13 ET ARC14 ET ARC15 ET ARC16;

L1=P6 DROI 300 P7;

L2=P10 DROI 50 P1;

CONT=ARC1 ET ARC2 ET ARC3 ET ARC4 ET

ARC5 ET ARC6 ET ARC7 ET L1 ET ARC8

ET ARC9 ET ARC10 ET ARC11 ET L2 ET TR;

TRAC CONT;

SURF1=SURF PLAN CONT;

TRAC SURF1 QUAL;

*=====

* données du matériau

*=====

MO=MODE SURF1 MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE;

MA=MATE MO YOUN 3273 NU 0.37;

*=====

* rigidité et conditions aux limites

*=====

RI=RIGI MO MA;

arcc=ARC15 ET ARC16;

CL1=BLOQU arcc 'UY';

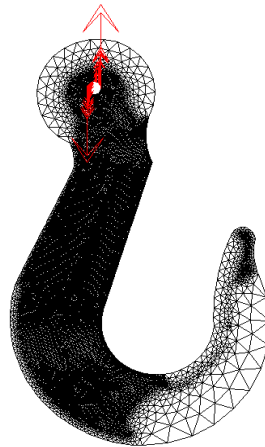
CL2=BLOQU P56 'UX';

RI1=CL1 ET RI;

```

*=====
*effort appliqué
*=====
F=forc (0. -15.6) P56;
*=====
* calcul des déformations
*=====
DEPL1=RESO RI1 F;
DEF0=DEFO 0. DEPL1 SURF1 blanc;
DEF1=DEFO 1. DEPL1 SURF1 rouge;
TRAC SURF1 (DEF0 ET DEF1);
*=====
*visualisations des réactions
*=====
REAC1=REAC RI1 DEPL1;
VR1='VECT' REAC1 1. 'FX' 'FY' 'ROUG';
'TITR' 'Forces de réaction.' ;
'TRAC' VR1 (SURF1);

```



visualisations des réactions

```

*=====
*calcul des contraintes
*=====
CHACONTR=SIGM MO MA DEPL1;
CHANOEUD=CHAN NOEUD MO CHACONTR;
CHANPOIN=CHAN CHPO MO CHANOEUD;
*=====
extraction des contraintes(SX,SY,SXY)
*=====
SY=EXCO CHANPOIN SMYY;
SX=EXCO CHANPOIN SMXX;

```

```
SXY=EXCO CHANPOIN SMXY;
```

```
*=====
```

```
*tracé des isochromes
```

```
*=====
```

```
DIFCONTR=((((SX-SY)**2)+(4*(SXY**2)))**0.5;
```

```
f=11.;
```

```
e=10.;
```

```
phi=360*(1./f)*e*DIFCONTR;
```

```
ISOC=(sin((phi)/2.))**2;
```

```
ISOC=1-ISOC
```

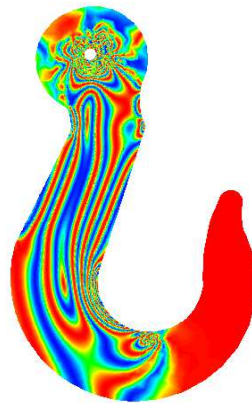
```
*=====
```

```
*Tracé des isochromes
```

```
*=====
```

```
TRAC ecla 0.0001 ISOC SURF1 ;
```

```
Le réseau d'isochromes est donné pour  $\sin^2(\varphi/2)=0$ 
```



Tracé des isochromes

```
*=====
```

```
* Evolution des contraintes Sx Sy suivant un *segment donné
```

```
*=====
```

```
TOM=DIFCONTR/2;
```

```
L1=P1 DROI 50 P6;
```

```
COMPTOM=INT_COMP SURF1 TOM L1;
```

```
EVOL1=EVOL rouge 'CHPO' L1 COMPTOM;
```

```
dess EVOL1;
```

```
*=====
```

```
*tracé les isoelines
```

```
*=====
```

```
term1= (2.*SXY);
```

```
term2= (SX-SY);
```

```
term3= (term1/term2);
```

```
ALPHA=(0.5)*(ATG term3);  
ISOCL=sin(2. *ALPHA);  
ISOCL=ISOCL**2;  
trac ISOCL SURF1 CONT;
```

```
ALPHA1=(ALPHA+10.);  
ISOCL1=sin(2*ALPHA1);  
ISOCL1=ISOCL1**2;  
trac ISOCL1 SURF1 CONT;
```

```
ALPHA2=(ALPHA+20.);  
ISOCL2=sin(2*ALPHA2);  
ISOCL2=ISOCL1**2;  
trac ISOCL1 SURF2 CONT;
```

```
ALPHA3=(ALPHA+30.);  
ISOCL3=sin(2*ALPHA3);  
ISOCL3=ISOCL1**2;  
trac ISOCL1 SURF3 CONT;
```

```
ALPHA4=(ALPHA+40.);  
ISOCL4=sin(2*ALPHA4);  
ISOCL4=ISOCL1**2;  
trac ISOCL1 SURF4 CONT;
```

```
ALPHA5=(ALPHA+50.);  
ISOCL5=sin(2*ALPHA1);  
ISOCL5=ISOCL1**2;  
trac ISOCL5 SURF5 CONT;
```

```
ALPHA6=(ALPHA+60.);  
ISOCL6=sin(2*ALPHA6);  
ISOCL6=ISOCL1**2;  
trac ISOCL1 SURF6 CONT;
```

```
ALPHA7=(ALPHA+70.);  
ISOCL7=sin(2*ALPHA7);  
ISOCL7=ISOCL1**2;  
trac ISOCL7 SURF1 CONT;
```

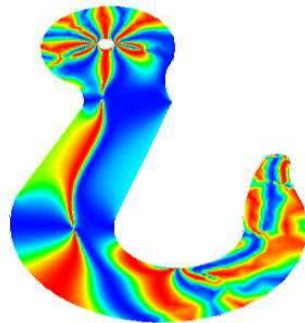
```
ALPHA8=(ALPHA+80.);  
ISOCL8=sin(2*ALPHA8);  
ISOCL8=ISOCL1**2;  
trac ISOCL1 SURF8 CONT;
```

```
ALPHA9=(ALPHA+90.);  
ISOCL9=sin(2*ALPHA9);  
ISOCL1=ISOCL1**2;  
trac ISOCL9 SURF1 CONT;
```

*=====

Tracé des isoclines

*=====



Tracé des isoclines

*=====

***Fin du fichier**

*=====

Fin ;