

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE.  
UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERRI, TIZI-OUZOU.

FACULTÉ DES SCIENCES.  
DÉPARTEMENT : MATHÉMATIQUES.

## Mémoire de Master

SPECIALITE : **Mathématiques**  
Option : **Recherche Opérationnelle et Optimisation**

Présenté par  
**Ait Ali Aldjia et Sabour Yasmine**

Sujet :

---

### **Estimation des Systèmes Dynamiques non Linéaires à temps discrêt et Applications**

---

Devant le jury d'examen composé de :

Benaoudia	Djamila	MCB	UMMTO	Présidente
Bennani	Cherifa	MCB	UMMTO	Rapporteur
Abdouche	Safia	MAA	UMMTO	Examineur

Soutenue le 04/10/2022.

# Table des matières

Introduction générale	4
1 Résultats et préliminaires	7
2 Stabilité et théorie de Lyapunov	14
2.1 Notions de stabilité . . . . .	15
3 Synthèse d'observateur d'état des systèmes à temps discret	20
4 Conclusion et perspectives	27

## – Notations

Certaines notations seront utilisées tout au long de ce mémoire que nous listons ci-dessous :

- $\mathbb{R}$  : ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}^n$  : espace vectoriel de dimension  $n$  construit sur le corps des réels.
- $[a, b]$  : intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $a$  et  $b$ .
- $]a, b[$  : intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  d'extrémité  $a$  et  $b$ .
- $N_n = \{1, \dots, n\}$  : ensembles des  $n$  premiers nombres entiers positifs.
- $C^1(\mathbb{R}^n)$  : ensemble des fonctions continûment différentiables.
- $|\cdot|$  : valeur absolue ou module.
- $\|\cdot\|$  : norme sur  $\mathbb{R}^n$ .
- $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$  : vecteur d'état.
- $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$  : dérivée temporelle.
- $x^{(i)}$  :  $i$ ème dérivée.
- $x^T$  : transposé du vecteur  $x$ .
- $\|x\|$  : norme euclidienne de  $x$ .
- $[a_{ij}]$  : matrice dont le coefficient de la  $i$ ème ligne et  $j$ ème colonne est  $a_{ij}$ .
- $M^T$  : transposé de la matrice  $A$ .
- $M > 0$  ( $M \geq 0$ ) : signifie que  $M$  est une matrice symétrique définie (resp. semi-définie) positive.
- $M < 0$  (*resp*  $M \leq 0$ ) : signifie que  $M$  est une matrice symétrique définie (resp. semi-définie) négative.
- $\|A\|$  : norme euclidienne de  $A$ .
- $Id$  : matrice identité  $\mathbb{R}^n \times n$ .
- $M^{-1}$  : inverse de la matrice  $M$ .
- $\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ (*) & M_{22} \end{pmatrix}$  : Matrice symétrique, le symbole  $(*)$  représente  $M_{12}^T$ .
- $\lambda_{min}(M)$  (*resp*  $\lambda_{max}(M)$ ) : valeur propre minimale (resp. maximale) de  $M$ .
- $\sigma_{min}(M)$  : valeur singulière minimale de  $M$ .
- $det$  : déterminant.
- $rg$  ou *rang* : rang.
- $\exp(A)$ , ou  $e^A$  : exponentielle de la matrice  $A$ .

## Acronymes

- *LMI* : Inégalités Matricielles Linéaires (Linear Matrix Inequalities).
- *LPV* : Linéaire à Paramètres Variants (Linear Parameter Varying).
- *LTI* : Linéaire Temps Invariant (Linear Time Invariant).
- *SISO* : Mono-entrée Mono sortie (Single Input-Single Out put).
- *OLG* : Observateur de Luenberger généralisé.
- *DMVT* : Théorème des accroissements finis (Differential Mean Value Theorem).

# Introduction générale

La théorie du contrôle permet d'amener un système d'un état initial donné un certain état final en respectant certains critères : c'est l'étape de réalisation de la commande. Par exemple, tout le monde sait maintenir en équilibre un pendule sur son doigt. En revanche il est beaucoup plus difficile de maintenir en équilibre sur son doigt un double pendule inversé. La théorie du contrôle permet pourtant de le faire. Mais pour réaliser effectivement cet équilibre, mieux vaut disposer d'un bon modèle mathématique et savoir résoudre les équations. Une voiture sur laquelle on agit avec les pédales d'accélérateur et de frein, et que l'on guide avec le volant est un exemple de système de contrôle, de système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'une commande représenté par le frein à main.

Un système de contrôle est un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'une commande. Pour définir précisément le concept de système de contrôle, il faut utiliser le langage mathématique. Chaque système a une structure, des propriétés et des finalités spécifiques. Notons que ce concept peut aussi bien décrire des transformations discrètes que continues. Cela permet donc de modéliser le fonctionnement de robots, de systèmes adaptatifs à structure variable, etc. En considérant tous ces objets comme des systèmes de contrôle, on s'intéresse à leur comportement et à leurs caractéristiques fonctionnelles, sans forcément attacher d'importance à leurs propriétés internes ou intrinsèques. Par conséquent, deux systèmes de contrôle ayant, en un certain sens, même comportement et des caractéristiques similaires, sont considérés comme identiques. De nos jours, les systèmes automatisés font complètement partie de notre quotidien ; le but est d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certaines tâches.

Le comportement dynamique d'un procédé entièrement décrit par l'évolution de ses variables d'état. Pour la commande et la supervision d'un système dynamique, la connaissance de ces variables est capitale. Or ces variables ne sont

en général pas, accessibles par des mesures. Ce problème peut-être résolu, sous certaines conditions, en introduisant un observateur d'état ou un estimateur d'état dont la tâche sera de fournir une estimation (asymptotique ou exponentielle) du vecteur d'état du système étudié en fonction des informations disponibles sur ce système (les mesures d'entrée et de sortie et le modèle dynamique du procédé). Les premiers observateurs, dédiés à l'estimation de l'état des systèmes linéaires, ont été développés par Luenberger dans le cadre déterministe et par Kalman dans le cadre stochastique.

En revanche, en ce qui concerne les systèmes non linéaires, on ne dispose que d'une collection de solutions dédiées, chacune applicable à une classe particulière de systèmes. Etant donnée la multitude de forme non linéaires existantes, ces solutions essaient de répondre plutôt à une question générique : comment transformer un système non linéaire donné dans une forme pour laquelle on sait construire un observateur ? .

Ce manuscrit s'organise de la façon suivante : Le premier chapitre est consacré sur des rappels et préliminaires sur les systèmes dynamiques non linéaires à temps discret.

Le deuxième chapitre est consacré à l'estimation et observation des Systèmes Dynamiques non Linéaires à temps discret.

# Chapitre 1

## Résultats et préliminaires

### Généralités sur les systèmes dynamiques

Les systèmes dynamiques sont les notions mathématiques qui permettent de modéliser des phénomènes évoluant dans le temps, ces phénomènes pouvant provenir de la physique, la mécanique, l'économie, la biologie, l'écologie, la chimie... Un système dynamique est constitué d'un espace de phases, l'espace des états possibles du phénomène convenablement paramétré, muni d'une loi d'évolution qui décrit la variation temporelle de l'état du système. Dans le cadre choisi ici, celui de lois déterministes en temps continu, cette loi d'évolution prend la forme d'une équation différentielle.

### équations différentielles ordinaires :

$$\begin{aligned} f : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Une application de classe  $C^k$ ;  $k > 1$ , d'un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  : Nous écrivons,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

On appelle équation différentielle vectorielle autonome du premier ordre une équation du type

$$\dot{x} = f(x)$$

Le qualificatif autonome se rapporte au fait que le second membre dans l'équation ne dépend pas explicitement du temps. On appelle solution de

l'équation toute application dérivable  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , définie sur un intervalle non vide  $I \subseteq \mathbb{R}$  et telle que, pour tout  $t \in I$ ,  $x(t) \in \Omega$  et  $\dot{x}(t) = f(x(t))$

**Théorème 1.1** : *Supposons que  $f$  soit de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ . Alors, pour tout nombre réel  $t_0$  et tout vecteur  $x_0 \in \Omega$ , il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant  $t_0$ , sur lequel il existe une solution de l'équation qui satisfait la condition initiale  $x(t_0) = x_0$  et cette solution est unique. Le problème de trouver une solution de l'équation satisfaisant la condition initiale  $x(t_0) = x_0$ , est appelé problème de Cauchy.*

### Problème de Cauchy

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $f$  est une application de  $I \times U$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et  $x_0 \in U$ . Le théorème de Cauchy-Lipschitz usuel affirme l'existence et l'unicité d'une solution maximale pourvu que  $f$  soit continue, et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième composante.

**Définition 1.1** : *L'application  $f$  de l'ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  est Lipschitzienne par rapport à  $x$  sur  $U$  si :*

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}^n, \forall (t, x_1) \in U, \forall (t, x_2) \in U, \text{ alors } \|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| \leq \gamma \|x_2 - x_1\| \quad (1.3)$$

*est appelé la constante de Lipschitz. Noter qu'elle ne dépend ni de  $x_1$ , ni de  $x_2$ .*

**Définition 1.2** *L'application  $f$  de l'ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  est localement Lipschitzienne par rapport à  $x$  sur  $U$ , si  $(t, x)$  dans  $U$ , on peut trouver un voisinage ouvert de  $(t, x)$  dans  $U$ , dans lequel  $f$  est Lipschitzienne. Un résultat très important est que si  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$ , alors elle est localement lipschitzienne. En particulier en dimension 1, la constante est égale à*

$$\sup_{(t,x) \in U} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| (t, x)$$

### Stabilité des équilibres :

La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires autour des points d'équilibre. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de sa trajectoire lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre. Considérons l'équation différentielle autonome  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  où le champ de vecteurs  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est supposé de classe  $C^1$ . Les points d'équilibre sont les solutions de l'équation  $f(x) = 0$ .

**Définition 1.3** On dit qu'un point  $x^* \in \Omega$  est un équilibre de si la fonction constante  $x(\cdot) \Leftrightarrow x^*$  est solution de ou, de façon équivalente, si  $f(x^*) = 0$ .

*Quand l'équation modélise l'évolution d'un phénomène physique (mécanique, biologique, . . . ), un équilibre correspond bien à la notion habituelle ( **d'état d'équilibre** ) : si le système est dans l'état  $x^*$ , alors il y reste. En pratique on sait cependant que seuls les états d'équilibre ayant certaines propriétés de stabilité sont significatifs.*

Analyse de la stabilité au sens de Lyapunov (**cas discret**) La définition de la stabilité présente certains désavantages importants : -Il est nécessaire de pouvoir calculer de manière explicite chaque solution correspondant à chacune des conditions initiales.

-Le maniement de la définition est fastidieux.

Par conséquent, des résultats permettant de déterminer la stabilité sans devoir intégrer les équations différentielles seraient les bienvenues. Le comportement stable ou instable d'un système est relié à la fois à la caractéristique et à l'évolution de sa fonction d'énergie, la présence d'un maximum ou minimum d'énergie possède une influence critique. De plus la présence des perturbations est responsable de la croissance d'énergie complète, et influence donc la stabilité. Le comportement est stable lorsque :

1. L'énergie  $E$  diminue et  $E$  est minimum au point d'équilibre.
2. L'énergie  $E$  est conservée et  $E$  est minimum à l'équilibre.

Par contre, le comportement est instable lorsque :

1. L'énergie augmente.
2. L'énergie  $E$  est conservée, mais elle ne correspond pas à un minimum à l'équilibre.

La théorie de Lyapunov est fondée sur l'extension de ses concepts, la procédure de base est de générer une fonction scalaire "de type énergie" pour le système dynamique.

**L'approche des inégalités matricielles linéaires :**

Une grande quantité de problèmes d'automatique concernant les performances et la robustesse peuvent se traduire sous la forme d'une optimisation convexe avec des contraintes inégalités.

Auparavant, on faisait appel à la résolution d'équations de Riccati basées sur des contraintes égalités. De nombreux travaux ont montré qu'un grand nombre de problèmes qui apparaissaient difficiles à résoudre de manière analytique, pouvaient se formuler et se résoudre par l'approche **LMI**. [2, 19, 29, 31]

**quelques rappels sur les LMIs :**

**Définition 1.4 : (Linear Matrix Inequality).** Une contrainte **LMI** est une contrainte sur un vecteur réel  $x \in \mathbb{R}^m$  de la forme

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \geq 0 \tag{1.4}$$

Où les matrices symétriques  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont données, et le symbole d'inégalité au sens large (resp. strict) signifie que  $F$  est semi-définie (resp. définie) positive, c'est à dire que  $u^T F u \geq 0$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.5 : (Bilinear Matrix Inequality).** Une contrainte **BMI** est une contrainte sur  $x \in \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}^r$  qui est de la forme

$$F(x, y) := F_{0,0} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r x_i y_j F_{i,j} \geq 0$$

,  
Avec  $F_{0,0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $F_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**Problème LMI de programmation semi-définie :**

Un problème de programmation semi-définie (**SDP**) est un problème d'optimisation qui s'écrit

$$\begin{cases} \text{minimiser } c'x, \\ \text{sous la contrainte } F(x) > 0 \end{cases}$$

Où  $c \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur définissant l'objectif du problème. Si une formulation **SDP** est obtenue pour un problème donné, alors nous pouvons considérer ce problème comme "résolu" si on démontre qu'il est faisable.

Il s'agit de la généralisation de la notion de **LMI**. Une grande variété de problèmes d'automatique peuvent se formuler comme des **BMI**.

Cependant, les **BMI** ne sont pas convexes, ce qui génère des difficultés dans leurs résolutions.

L'intérêt des **LMIs** est résumé dans les quatre points décrits ci-dessous.

1. **Convexité** : La **LMI** (1.2.6) définit une contrainte convexe en  $x$ . En effet,  $\forall \{x, y\} \in \mathbb{E}, \mathbb{E} := \{x \mid F(x) > 0\}$ , alors

$$F(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha F(x) + (1 - \alpha)F(y) \forall \alpha \in ]0, 1[$$

Où  $F(x)$  est donnée par...

2. **Concaténation** : Des **LMIs** multiples peuvent se ramener en une seule. En effet, résoudre les deux **LMIs**  $F_1(x) > 0$  et  $F_2(x) > 0$  est équivalent à résoudre  $\overline{F}(x) > 0$  avec  $\overline{F} = \text{diag}(F_1, F_2)$ .
3. **Algorithmes** : Les algorithmes utilisés pour résoudre les contraintes LMI sont efficaces : une bonne initialisation garantit la convergence de l'algorithme, cette convergence étant à temps polynômial. Actuellement, les principales classes d'algorithmes sont basées sur les méthodes des points intérieurs ([30]).

### Lemmes utiles pour les LMIs :

Nous collectons quelques inégalités mathématiques et lemmes utiles qui ont été largement utilisés dans le manuscrit. Rappelons tout d'abord le "complément de Schur" qui permet de transformer certaines inégalités matricielles non linéaires en LMI.

**Lemme 1.1** Soit  $M, N$  et  $Q$  trois matrices de dimensions appropriées telles que  $Q = Q'$  et  $M = M'$ . Alors

$$\begin{pmatrix} Q & N \\ N' & M \end{pmatrix} < 0$$

Si et seulement si

$$M < 0, \text{ et } Q - NM^{-1}N' < 0$$

ou de manière équivalente

$$Q < 0, \text{ et } M - N'Q^{-1}N < 0$$

Pour avoir les inégalités désirées. La preuve est ainsi achevée.  
Une autre transformation est décrite par le lemme suivant :

**Lemme 1.2** : Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une matrice symétrique  $P > 0$  telle que

$$A^T P A - P < 0$$

2. Il existe une matrice symétrique  $P$  et une matrice  $G$  telles que

Le lemme suivant joue un rôle central pour les résultats de ce travail.

**Lemme 1.3** : [18]. Soit  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}, M = M' > 0, \gamma$  un scalaire positif, et une fonction  $\omega : [0, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , alors l'intégration suivante est bien définie, on a

**Preuve.** : C'est claire en utilisant le complément de Schur que :

$$\begin{pmatrix} \omega'(\beta)M\omega(\beta) & \omega'(\beta) \\ \omega(\beta) & M^{-1} \end{pmatrix} \geq 0$$

Pour tout  $0 \leq \beta \leq \gamma$  l'inégalité précédente reste toujours vraie donc,

$$\begin{pmatrix} \int_0^\gamma \omega'(\beta)M\omega(\beta)d\beta & \int_0^\gamma \omega'(\beta)d\beta \\ \int_0^\gamma \omega(\beta)d\beta & \gamma M^{-1} \end{pmatrix} \geq 0$$

En appliquant le lemme de Schur une autre fois on aura l'inégalité (1.2.5)

■

**Lemme 1.4** :[20]. *Les deux conditions suivantes sont équivalents :*

1. *A est stable et  $\|C(zI - A)^{-1}B + D\|_\infty < \gamma$ .*
2.  *$A'PA - P + C'C + (A'PB + C'D)R^{-1}(B'PA + D'C) < 0$  où  $R = \gamma^2I - B'PB - D'D$ .*
  - *$A(\cdot) \in L^1_{loc}(I, M_n(\mathbb{R}))$ .*
  - *$\gamma(\cdot) \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R}^n)$ .*  
Par ailleurs les hypothèses assurant l'intégrabilité locale de  $B(\cdot)u(\cdot)$  dépendent de l'ensemble des controles considéré.
  - *Si  $u(\cdot) \in L^\infty_{loc}(I, \mathbb{R}^m)$  alors on suppose que  $B(\cdot) \in L^1_{loc}(I, M_{n,m}(\mathbb{R}))$ .*
  - *Si  $u(\cdot) \in L^2_{loc}(I, \mathbb{R}^m)$  alors on suppose que  $B(\cdot) \in L^2_{loc}(I, M_{n,m}(\mathbb{R}))$ .*  
De manière générale si  $u(\cdot) \in L^p_{loc}(I, \mathbb{R}^m)$  alors on suppose que  $B(\cdot) \in L^q_{loc}(I, M_{n,m}(\mathbb{R}))$  où :  
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
  - *Si les controles sont des fonctions mesurables  $\tilde{A}$  valeurs dans un compact  $\Omega \in \mathbb{R}^m$ , alors on suppose que  $B(\cdot) \in L^1_{loc}(I, M_{n,m}(\mathbb{R}))$ .*

# Chapitre 2

## Stabilité et théorie de Lyapunov

La notion de stabilité correspond à l'idée d'un comportement qui dure dans le temps et permet de formaliser la question suivante : supposons que l'on initialise le système dynamique

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

en un point voisin d'un point d'équilibre  $x_0$ , qu'advient-il de la trajectoire solution ? Cette question est d'importance car dans la pratique les conditions initiales présentent des incertitudes ; il serait souhaitable que deux conditions initiales voisines conduisent à des trajectoires solutions voisines pour tout temps et ceci même pour des temps infiniment longs. Une manière naturelle d'aborder cette question consisterait à résoudre l'équation différentielle et à examiner le comportement des solutions. Cependant, en général, on ne sait pas résoudre les équations différentielles.

Dans un premier temps, nous allons considérer la stabilité des systèmes autonomes décrits par (2.1). Nous présenterons les deux méthodes de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité des systèmes autonomes (méthodes directes et méthodes indirectes). Ensuite, nous étendrons cette étude au cas des systèmes non autonomes.

On suppose que pour toute condition initiale  $x_0$ , il existe une unique solution définie sur  $\mathbb{R}$  du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Nous noterons indifféremment  $x(t, x_0)$  ou  $x(t)$  cette solution.

## 2.1 Notions de stabilité

Une notion qui est primordiale dans l'étude de la stabilité est la notion du point d'équilibre.

**Définition 2.1** *L'état  $x_e$  est appelé état d'équilibre ou point d'équilibre pour le système (2.2) si lorsque  $x(t_0) = x_e$  alors  $x(t) = x_e$  pour tout  $t \geq t_0$ . En d'autres termes,  $x_e$  vérifie l'équation  $f(x_e) = 0$ .*

**Remarque 2.1** *puisque si  $x_e$  vérifie  $f(x_e) = 0$ , il suffit de considérer le changement de coordonnées  $z = x - x_e$ , la dérivée de  $z$  est donnée par*

$$\dot{z} = \dot{x} = f(x) = f(z + x_e) \stackrel{\text{déf}}{=} g(z), \quad \text{et } g(0) = 0.$$

*l'origine est bien un point d'équilibre du système  $\dot{z} = g(z)$ .*

**Définition 2.2 ([18])** *Le point d'équilibre  $x_e$  est dit stable si  $\forall \rho > 0$ , il existe  $r(\rho) > 0$  tel que*

$$\text{si } \|x_0 - x_e\| \leq r \text{ alors } \|x(t) - x_e\| \leq \rho, \quad \forall t \geq 0.$$

*Sinon le point d'équilibre est instable.*

Cette définition signifie que, quelle que soit la boule d'exigence de rayon  $\rho$ , il est toujours possible de choisir une certaine sous-boule de rayon  $r$  telle que pour toute condition initiale comprise dans cette sous-boule, la trajectoire résultante sera, en tout temps, comprise dans la boule d'exigence de rayon  $\rho$ .

Dans un langage plus imagé, un petit déséquilibre initiale n'entraîne qu'un petit déséquilibre au cours du temps, déséquilibre qui peut très bien être permanent.

Il existe plusieurs notions de stabilité :

- Stabilité asymptotique.
- Stabilité exponentielle.
- Stabilité locale et globale.

La stabilité asymptotique exige l'existence d'un voisinage de l'équilibre tel que toute trajectoire ayant pour condition initiale un point de ce voisinage converge vers le point d'équilibre.

**DÃ©finition 2.3 (Stabilité asymptotique)** *Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif, i.e., s'il existe  $r > 0$  tel que  $\forall x_0 \in B(x_e, r)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .*

**DÃ©finition 2.4 (Stabilité exponentielle)** *Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est exponentiellement stable s'il existe deux scalaires strictement positifs  $k$  et  $\alpha$  tels que*

$$\forall t \geq 0, \quad \|x(t)\| < k \|x_0\| \exp(-\alpha t)$$

*dans une boule  $B(r)$  autour de l'origine.*

**Exemple 2.1** *Considérons le système décrit par*

$$\dot{x} = -(1 + \sin(x^2))x.$$

*Il est clair que  $x_e = 0$  est un point d'équilibre.*

*La solution du système est donnée par*

$$x(t) = x(0) \exp^t - (1 + \sin(x^2(s))) ds. \quad (2.3)$$

*On a  $\forall t \geq 0, |x(t)| < k |x(0)| \exp(-t)$ . D'où la stabilité exponentielle du système en question.*

**Remarque 2.2** – *Dans chacune des définitions précédentes, la stabilité est définie de manière locale puisque reliée à la notion de voisinage. En utilisant les définitions précédentes, il n'est pas possible à priori de prédire le comportement du système pour une condition initiale prise loin du point d'équilibre.*

**DÃ©finition 2.5** *Si un système est stable asymptotiquement (exponentiellement) pour n'importe quelle condition initiale dans  $\mathbb{R}^n$ , on dira que le point d'équilibre  $x_e = 0$  est asymptotiquement (exponentiellement) stable au sens large. On dira aussi qu'il est globalement asymptotiquement (exponentiellement) stable.*

**Remarque 2.3** – Pour un système linéaire  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ , on rappelle que l'origine est un point d'équilibre et la stabilité locale est équivalente à la stabilité globale. C'est une conséquence directe du théorème ci-dessous caractérisant la stabilité des systèmes linéaires autonomes.

**Théorème 2.1 ([18])** – Si toutes les valeurs propres de  $A$  sont à partie réelle strictement négative, alors le point d'équilibre  $0$  est asymptotiquement stable.

- Le point d'équilibre  $0$  est stable si et seulement si toute valeur propre de  $A$  a une partie réelle négative ou nulle, et si toute valeur propre à partie réelle nulle est simple.

La définition de la stabilité présente certains désavantages importants :

- Il est nécessaire de pouvoir calculer de manière explicite chaque solution correspondant à chacune des conditions initiales.
- Le maniement de la définition est fastidieux.  
Par conséquent, des résultats permettant de déterminer la stabilité sans devoir intégrer les équations différentielles seraient les bienvenues.

**Exemple 2.2** : Considérons le système décrit par

$$\dot{x} = -(1 + \sin(x^2))x$$

Il est clair que  $x_e = 0$  est un point d'équilibre.

La solution du système est donnée par :

$$x(t) = x(0) \exp \int_0^t -(1 + \sin(x^2(s))) ds$$

On a  $\forall t > 0, |x(t)| < k|x(0)| \exp(-t)$ . D'où la stabilité exponentielle du système en question

**Cas des systèmes à temps discret :**

Dans le cas des systèmes à temps discret, nous considérons le système analogue suivant :

$$x(k+1) = f(x(k), k), x(k_0) = x_0$$

Où  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue. Nous désignons par  $x(k, k_0, x_0)$  la solution à l'instant  $k \geq k_0$  du système (1.2) initialisée en  $x_0$  à l'instant  $k_0$ .

Les définitions précédentes restent valables pour les systèmes à temps discret de la forme (1.2).

Cependant, concernant la stabilité exponentielle, il convient d'apporter la définition suivante :

**Définition (Stabilité exponentielle) :** L'origine est un point d'équilibre localement exponentiellement stable pour (1.2) s'il existe des constantes  $\alpha > 0$  et  $0 < \rho < 1$  telles que :

$$\|x(k, k_0, x_0)\| \leq \alpha \|x_0\| \rho^{(k-k_0)}, \forall k \geq k_0 \geq 0, \forall x_0 \in B_r.$$

Lorsque  $B_r = \mathbb{R}^n$ , on dit que l'origine est globalement exponentiellement stable .

**Système à temps discret :**

Considérons maintenant un système non linéaire à temps discret, s'écrivant

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

Comme dans le cas du temps continu, la théorie de Lyapunov permet encore de fournir des conditions suffisantes de stabilité dans le cas général.

l'équilibre  $x^* = 0$  est dit :

**-localement stable :** s'il existe une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et un voisinage  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  de l'origine tels que :

- $V(x_k) > 0, \forall x_k \in \Omega$  et  $V(0) = 0$
- $\Delta V(x_k) \leq 0, \forall x_k \in \Omega$  et  $x \neq 0$

**-localement asymptotiquement stable :** s'il existe une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et un voisinage  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  de l'origine tels que :

- $V(x_k) > 0, \forall x_k \in \Omega$  et  $V(0) = 0$
- $\Delta V(x_k) < 0, \forall x_k \in \Omega$  et  $x \neq 0$

**-globalement asymptotiquement stable :** s'il existe une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

- $V(x_k) > 0, \forall x_k \in \mathbb{R}^n$  et  $V(0) = 0$

- $\Delta V(x_k) < 0, \forall x_k \in \mathbb{R}^n$  et  $x \neq 0$
- $V(x_k) \rightarrow \infty$  lorsque  $\|x_k\| \rightarrow \infty$

Avec  $\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k)$ .

Dans le cas particulier des système linéaire à temps-discret, à l'instant du cas à temps continue, la condition d'existence d'une fonction de Lyapunov s'avère être nécessaire et suffisante.

En effet, considérons le système

$$x_{k+1} = Ax_k$$

De la même manière que les système LTI à temps continu, le théorème suivant rappelle la stabilité asymptotique des système LTI à temps discret.

**Théorème 2.2** *le point  $x^* = 0$  est asymptotiquement stable si et seulement si, pour tout  $Q = Q^T > 0$ , il existe une matrice  $P = P^T > 0$  vérifiant l'équation de Lyapunov*

$$A^T P A - P + Q = 0$$

## Chapitre 3

### Synthèse d'observateur d'état des systèmes à temps discrêt

$$(1) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \psi^T \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \psi - \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} + \tilde{C}^T \tilde{C} & \Delta + \psi^T \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \Omega & \psi^T \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \psi_w \\ (*) & \Omega^T \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \Omega - \Phi & \Omega^T \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \psi_w + \theta D_w \\ (*) & (*) & \psi_w^T \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \psi_w - \mu I_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \psi^T \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \psi - I + \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tilde{C}^T \tilde{C} & \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Delta + \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \psi^T \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \\ (*) & \Omega^T \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \Omega - \Phi \\ (*) & (*) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (1) \times \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\
(2) &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \psi^T \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \psi \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tilde{C}^T \tilde{C} \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ (*) \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ (*) \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{equiv} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \psi^T \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \psi \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \Pi_{\tilde{C}} & (*) \\ \Delta^T \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \Omega^T \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \psi \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & \Omega^T \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \Omega - \Phi \\ \psi_w^T \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \psi \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & (*) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Considérons la décomposition suivante :

$$\begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{equiv} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \psi^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \psi \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \Delta^T \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \Omega^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \psi \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \psi_\omega^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \psi \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \psi^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \psi \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & 0 \\ \Omega^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \psi \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & \Omega^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \psi \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \psi_\omega^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \psi \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}$$

**DÃ©finition 3.1** : (*Lemme de Schur*)

pour  $A = A^T, C = C^T$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} > 0$$

**Si et seulement si** :  $C - B^T A^{-1} B > 0$  si  $A > 0$

où bien :  $A - B C^{-1} B^T > 0$  si  $C > 0$

On a :

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] \psi^T \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{array} \right] \left( \left[ \begin{array}{cc} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & p_2 \end{array} \right] \right)^{-1} \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{array} \right] \psi \left[ \begin{array}{cc} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] \\ \\ \Omega^T \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{array} \right] \left( \left[ \begin{array}{cc} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & p_2 \end{array} \right] \right)^{-1} \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{array} \right] \psi \left[ \begin{array}{cc} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] \\ \\ \psi_\omega^T \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{array} \right] \left( \left[ \begin{array}{cc} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & p_2 \end{array} \right] \right)^{-1} \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{array} \right] \psi \left[ \begin{array}{cc} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] \end{array} \right] \\ \\ - \left[ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] \psi^T \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] \tilde{C}^T \\ \Omega^T \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{array} \right] 0 \\ \psi_\omega^T \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{array} \right] 0 \end{array} \right] \times \left( \left( \left[ \begin{array}{cc} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & p_2 \end{array} \right] 0 \right) \right)^{-1} \\ \left[ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{array} \right] \psi \left[ \begin{array}{cc} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{array} \right] \Omega \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{array} \right] \psi_\omega \\ \tilde{C} \left[ \begin{array}{cc} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] 0 0 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Complément de Schur pour une matrice  $A$  inversible, le **Complément de Schur** de  $A$  dans  $M$

est donné par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est la matrice :  $D - CA^{-1}B$

**Du Lemme de Schur**, On déduit que :

$$\Pi_{equiv} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{c} \left[ - \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \Delta \quad 0 \\ (*) \quad \quad \quad (-\theta) \quad \quad \quad \theta \Delta_w \\ (*) \quad \quad \quad (*) \quad \quad \quad -\mu I_s \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \psi^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tilde{C}^T \\ \Omega^T \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \psi_w^T \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ - \left[ \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \quad 0 \\ 0 \quad I \end{array} \right] \end{array} \right] < 0$$

Qui est équivalente à :

$$\left[ \begin{array}{c} \left[ - \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \Delta \quad 0 \\ (*) \quad \quad \quad (-\theta) \quad \quad \quad \theta \Delta_w \\ (*) \quad \quad \quad (*) \quad \quad \quad -\mu I_s \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_x - A_u F) & LC \\ 0 & (A_x - LC) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \\ \Omega^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} L \Delta_w \\ (E_w - L \Delta_w) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \\ - \left[ \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \quad 0 \\ 0 \quad I \end{array} \right] \end{array} \right] < 0$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc} - \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \Delta & 0 \\ (*) & -\theta & \theta \Delta_\omega \\ (*) & (*) & -\mu I_s \end{array} \right] \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_x - A_u F)^T & 0 \\ (LC)^T & (A_x - LC)^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \\ \Omega^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (L\Delta_W)^T & (E_W - L\Delta_W)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ (*) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc} - \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \Delta & 0 \\ (*) & -\theta & \theta \Delta_\omega \\ (*) & (*) & -\mu I_s \end{array} \right] \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Z A_x^T - Z A_u^T F^T & 0 \\ (LC)^T & (A_x - LC)^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \\ \Omega^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (L\Delta_W)^T & (E_W - L\Delta_W)^T p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ (*) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc} - \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \Delta & 0 \\ (*) & -\theta & \theta \Delta_\omega \\ (*) & (*) & -\mu I_s \end{array} \right] \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Z A_x^T - Z A_u^T F^T & 0 \\ (LC)^T & (A_x - LC)^T p_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \\ \Omega^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (L\Delta_\omega)^T & (E_W - L\Delta_\omega)^T p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ (*) < 0$$

Utilisation de la relation de **Young** pour obtenir un **LMI**.

Le but de cette étape consiste à éviter la bilinéarité relative à l'observateur  $L$ .

Pour se faire, considérons  $\Pi_{equiv}$  trouvée précédemment.

$\Pi_{equiv}$  peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc} - \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \Delta & 0 \\ (*) & -\theta & \theta \Delta_\omega \\ (*) & (*) & -\mu I_s \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} ZA_x^T - ZA_u^T F^T & 0 \\ 0 & (A_x - LC)^T p_2 \end{array} \right]^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \\ \Omega^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \\ \left[ 0 \quad (E_\omega - L\Delta_\omega)^T p_2 \right] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \\ - \left[ \begin{array}{cc} Z & 0 \\ 0 & p_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \end{array} \right] \\ & (*) \end{aligned} \\ & + X^T \left[ \begin{array}{c} 0 \\ (LC)^T \\ 0 \\ (L\Delta_\omega)^T \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ (LC)^T \\ 0 \\ (L\Delta_\omega)^T \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \overbrace{\left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad I \quad 0 \quad 0 \right]} + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \overbrace{\left[ 0 \quad LC \quad 0 \quad L\Delta_\omega \quad 0 \quad 0 \right]} \end{aligned}$$

Inégalité de Young, pour toute matrice  $S > 0$  et un scalaire  $\varepsilon > 0$  nous avons :

$$X^T Y + Y^T X \leq \varepsilon X^T S X + \frac{1}{\varepsilon} Y^T S^{-1} Y$$

# Chapitre 4

## Conclusion et perspectives

Durant tout au long de ce mémoire, nous avons cité plusieurs problèmes de contrôle : la contrôlabilité, la stabilisation, l'observabilité et l'estimation de l'état. Nous avons accordé une attention particulière aux problèmes de stabilisation et de l'estimation. Le problème de stabilisation d'un système consiste à construire un retour d'état, ou feedback (ou encore un régulateur), c'est-à-dire une fonction  $x \rightarrow u(x)$  tel que le point que l'on cherche à atteindre (l'équilibre) soit asymptotiquement stable pour le système bouclé  $\dot{x} = f(x, u(x))$ . La contrôlabilité est indispensable pour stabiliser un tel système, en effet, pour atteindre le point d'équilibre, le système doit être contrôlable. Un tel feedback est dit bouclage statique. Souvent on ne mesure pas tout l'état  $x$ , mais une partie  $y$  de  $x$ . On peut se demander si la connaissance partielle de cet état permet de reconstituer l'état complet. c'est le problème de l'observabilité. Dans ce cas, stabiliser le système entier revient à construire un feedback par retour de sortie dynamique, il s'agit donc de construire une fonction  $y \rightarrow u(y, \hat{x})$ , où  $\hat{x}$  est l'état estimé de  $x$ , telle que l'équilibre du système en boucle fermé soit asymptotiquement stable. Estimer  $x$  revient à construire un observateur asymptotique  $\hat{x}$  de  $x$ , i.e. une fonction dynamique de l'observable  $y$  tel que  $\hat{x}(t) - x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ .

Le problème de construction d'un régulateur en fonction de l'observateur asymptotique de l'état pour un système contrôlable et observable s'appelle synthèse régulateur-observateur. Ce problème est loin d'être résolu dans le cas des systèmes non linéaires.

Les deux difficultés majeures du problème de stabilisation des systèmes non linéaires sont

1. comment construire le régulateur ?.
2. Une fois le régulateur construit comment analyser la stabilité asymptotique du système en boucle fermée, comme nous l'avons vu au chapitre 2, il n'existe pas de méthode "universelle" pour la construction de la fonction de Lyapunov.

De même, la synthèse d'observateur asymptotique est un problème d'actualité, largement inversé par les automaticiens.

Dans le cas des systèmes linéaires, les deux problèmes sont complètement résolus.

L'analyse de la stabilité de Lyapunov joue un rôle primordial aussi dans les problèmes de stabilisation que dans les problèmes de la synthèse d'observateur. Nous avons consacré, à cet effet, le chapitre deux aux différentes méthodes de Lyapunov pour la stabilité des systèmes linéaires et non linéaires, autonomes et non autonomes.

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la contrôlabilité et la stabilisation des systèmes linéaires et non linéaires. Dans le cas non linéaire, nous avons présenté que des résultats locaux sur ces deux notions.

# Bibliographie

- [1] Akhenak, A. ; *Conception d'observateurs non linéaires par approche multimodèle : application au diagnostic. univ-Nancy, 16 decembre 2004.*
- [2] Bara, G. I. ; State estimation of linear parameter-varying systems. PHD Thesis, National Polytechnic Institute of Lorraine, 2001.
- [3] Bestle, D. and Zeitz, M. ; Canonical form observer design for non linear time variable systems. International Journal of control, 47(6) : 1823-1836, 1988.
- [4] Birk, J. and Zeitz, M. ; Extended Luenberger observer for non linear multi variable systems. International Journal of control, 47(6) : 1823-1836, 1988.
- [5] Bonnas, F. and Rouchon, P. ; *Analyse et Commande de Systèmes Dynamiques, Mathématiques Appliquées, Ecole polytechnique, septembre 2003.*
- [6] Bornard, G. Celle-couenne, F. and Gilles, G. ; *Observabilité et observateurs des systèmes non linéaires. chapitre 3. Modélisation-Estimation. Masson, 1993.*
- [7] Boscain U., Piccoli B. ; An introduction to optimal control, ecole de CIMPA. Tlemcen du 26 avril au 08 mai 2003.
- [8] Boyd, S., EL Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. ; *Linear matrix inequalities in system and control theory. In SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 1994.*
- [9] Brockett, R. W. Asymptotic stability and feedback stabilization. Differential Geometric Control Theory. (R.W. Brockett, R. S. Millman and H. J. Sussman, Eds.), Boston, USA. pp. 181-191, 1983.
- [10] Brookner, E. ; Tracking and Kalman filtering made easy. John Wiley & Sons, 1998.

- [11] Bullo, F., Leonard, N. et Lewis., A. Controllability and motion algorithms form underactuated lagrangian systems on lie groups. IEEE Transaction on Auto-matic Control, 45(8) :1437–1454, 2000.
- [12] Coron, J. M.; Quelques résultats sur la commandabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires, cours donné dans "Les journées mathématiques X-UPS en 1999". <http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups99-02.pdf>.
- [13] Chen, G.; Approximate Kalman filtering. World Scientific series in approximations and decompositions, 1993.
- [14] Cherrier, E.; *Estimation de l'état et des entrées inconnues pour une classe de systèmes non linéaires. PhD Thesis, National Polytechnic Institute of lorraine, 2006.*
- [15] Fan, X. and Arcak, M.; Observer design for systems with multivariable monotone nonlinearities. Systems and Control Letters, 50 : 319-330, 2003.
- [16] *Golub, G. H. and Van Loan, C. F.; Matrix Computations. The John Hopkins University Press, Baltimore, 1983.*
- [17] Grewal, M. and Andrews, A.; Kalman filtering : Theory and practice. Prentice Hall, 1993.
- [18] Khalil, H. K.; Non Linear System, Third Edition, Prentice Hall, 2002.
- [19] Kazantzis, N. and Kravaris, C.; Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem. Systems and control Letters, 34(5) : 241-247, 1998.
- [20] Hahn W., Stability of Motion, Springer Verlag, Berlin (1967).
- [21] Hermann, R. Accessibility problems for path systems. Differential Geometry and the Calculus of Variations. Brookline., Ma, USA. pp 241-257, 1968.
- [22] *Herman, R. and Krener, J.; Nonlinear controlability and observability. IEEE Trans. Automatic control, 22(5) : 728-740, 1977.*
- [23] Isidori, A. (1989). Nonlinear Control Systems. 2nd ed.. Springer-Verlag. Berlin, Germany, 1989.
- [24] Lee, E. B. and Markus, L.; Foundations of Optimal Control Theory, John Wiley & Sons, New-York (1967).

- [25] Li, C. W. and Tao, Observing nonlinear time variable systems through a canonical form observer. *International Journal of control*, 44(6) : 1703-1713, 1987.
- [26] Lohmiller, J. and Slotine, J. J. E. ; On contraction analysis for non linear systems. *Automatica*, 34(6) : 683-696, 1998.
- [27] Lohmiller, J. and Slotine, J. J. E. ; Control system design for mechanical systems using contraction theory. *IEEE Trans. Aut. Control*, 45(5) : 984-989,2000.
- [28] Lohmiller, W. and Slotine, J. J. E. ; Non linear process control using contraction theory. *A. I. Ch. E Journal*, 2000.
- [29] Nijmeijer, H. et van der Schaft, A. J. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag. New York, USA, 1990.
- [30] Lohmiller, W. and Slotine, J. J. E. ; Contraction analysis of non linear distributed systems. *International Journal of control*, 2005.
- [31] Müllhaupt, P. ; Introduction à l'analyse et à la commande des systèmes non linéaire. 12 Juin 2007.
- [32] Nesterov, Y. and Nemirovsky, A. ; *Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming*. SIAM, 1994.
- [33] *Raghavan, S. and Hedrick, J. K. ; Observer Design for a class of nonlinear systems ; Int. J. of control, 59(2) : 515-528, 1994.*
- [34]
- [35] Sallet, G. ; Théorie du contrôle et équations algébriques de Ricatti, école de CIMPA. Tlemcen du 26 avril au 08 mai 2003.
- [36] *Slotine, J. J. and Li, W. ; Applied Non Linear Control. Prentice Hall. 1991.*