

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE et POPULAIRE.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



MEMOIRE DE MASTER
en
MATHEMATIQUES

Spécialité
Méthodes et modèles de décision

Thème

**Représentation des sous-treillis polyédraux et généraux et
sous-treillis des produits d'espaces**

Présenté par

ABBADJA Dahbia
AMMOUCHE Melha

Soutenu devant le jury composé de :

Mr OUKACHA Brahim . M C A . Rapporteur
Mr BELHADJ Abdelaziz . M A A . Président
Melle KHEFFACHE Rezika . M A A .Examinatrice

Soutenu le 30 / 09 / 2015

Remerciements

Nous remercions Dieu tout puissant d'avoir guidé nos pas vers les portes du savoir tout en illuminant notre chemin, et nous avoir donné suffisamment de courage et de persévérance pour mener notre travail à terme.

Nous témoignons une reconnaissance particulière à notre promoteur Mr OUKACHA BRAHIM pour son aide, conseils et précieuse orientations, qui nous a proposé le thème et ouvert les portes pour accomplir ce travail.

Je remercie Monsieur A. BELHADJ et Melle R. KHEFFACHE d'avoir accepté de prendre part au jury qui évaluera mon travail. Leur renommée dans le milieu des mathématiques en général et de la Recherche Opérationnelle en particulier, confère à leurs positions d'examineurs une grande qualité, ainsi, leur présence m'honore beaucoup.

Nous remercions aussi tous nos camarades de la faculté des mathématiques en particulier Mr AREZKI RAFIK pour ses conseils et ses encouragements, nos amis de la promotion. On leur exprime notre profonde sympathie et leur souhaitent beaucoup de réussites. Je remercie de tout coeur mes très chers enseignants de m'avoir donné le courage, le savoir, la science et la volonté de poursuivre mes études malgré tous les obstacles et les difficultés rencontrés.

Finalement, nous remercions toute personne ayant contribué de près où de loin à l'élaboration de ce mémoire, sans oublier tous ceux qui nous ont encouragé le long de notre parcours universitaire.

Dédicace

A ma très chère mère et mon très cher père pour leur dévouement leur disponibilité, leur sacrifice et leur affection tout au long de mes études.

A ma grande mère.

A mes chères tantes et à mes chers oncles.

A mes cousins et cousines.

A ma binôme Melha et sa famille.

A tous mes amis (es).

A toute la promotion RO 2015.

Je dédie cet humble mémoire.

DAHIA

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents, la source D'amour et de tendresse, ainsi pour
Leurs précieux conseils et leurs sacrifices,
que Dieu les protège et les entoure de sa bénédiction ;
Mes chères frères et sœurs ;

Tous mes amis (es) sans exception ;
Toute la promotion : 2015 ;
Tous ceux que j'aime et qui m'aiment.
A ma binome DAHBIA et sa famille ;

MELHA

Table des matières

Introduction	3
1 Concepts fondamentaux de la théorie des graphes et ordres	5
1.1 Introduction	5
1.2 Graphes	5
1.2.1 Graphes non orientés	5
1.2.2 Parcours dans les graphes non orientés	6
1.2.3 Graphes orientés	6
1.2.4 Parcours dans les graphes orientés	7
1.3 Représentation des graphes	8
1.3.1 Représentation matricielle d'un graphe	8
1.3.2 Représentation par liste d'adjacence	8
1.4 Programmation Linéaire	9
1.5 Système de substitution leontief	11
1.6 Ensemble ordonné	11
2 Treillis ; Ensembles et polyédres des sous treillis	14
2.1 Introduction	14
2.2 Treillis ordinal et treillis algébrique	14
2.2.1 Treillis complet	15
2.3 Propriétés algébrique d'un treillis	17
2.4 Ensembles et polyédre sous-treillis dans R^n	19
2.4.1 La relation de dominance dans R^n :	19
2.4.2 Polyédre inf-demi-treillis	19
2.4.3 Polyédre sup-demi-treillis :	19
2.4.4 Polyédre sous-treillis	20
2.4.5 Ensemble i-desincrémenté :	20
2.4.6 Ensemble i-incrémenté :	20
2.4.7 Ensembles bimonotones	21
2.4.8 Ensemble sous treillis :	23

3 La structure des sous-treillis généraux et polyédraux des n treillis des produit d'espace et leurs représentations	24
3.1 Introduction :	24
3.2 La structure d'un sous-treillis	24
3.3 Représentation des demi-sous-treillis	28
3.3.1 Représentation de sous-demi-treillis enveloppant des sous-ensemble de produits finis de chaines	30
3.3.2 La Représentation irréductible de sous-demi-treillis	30
3.4 Représentation et reconnaissance des sous-demi-treillis polyédraux . .	33
3.5 Représentation des sous-treillis	37
3.5.1 Représentation et Reconnaissance des treillis Polyédraux . . .	43
3.6 Polyèdre Network-flot dual	47
Conclusion	49
Bibliographie	50

Introduction

La recherche opérationnelle (R.O.) vise à l'amélioration du fonctionnement des entreprises et des organismes publics par l'application de l'approche scientifique. Reposant sur l'utilisation de méthodes scientifiques, de techniques spécialisées et des ordinateurs, la RO permet d'obtenir une évaluation quantitative des politiques, stratégies et actions possibles dans le cours des opérations d'une organisation ou d'un système.

La RO est apparue en Grande-Bretagne durant la seconde guerre mondiale, lorsqu'on décida d'employer des méthodes scientifiques pour étudier divers aspects des opérations militaires. Depuis, la RO est devenue un élément important du processus de prise de décision dans de nombreux contextes commerciaux, industriels et gouvernementaux, car elle permet d'appréhender de façon systématique la complexité toujours grandissante des problèmes de gestion auxquels est confronté tant le secteur privé et public.

Les treillis et sous-treillis ont des applications dans de nombreux domaines des mathématiques, pour cette raison et d'autre ; il est utile de comprendre leurs structure, leur génération et leur reconnaissance.

La structure d'un treillis est défini comme une structure algébrique et ensembliste, elle a été introduite dès la fin du 19^{me} siècle par Dedkind, puis développée au 20^{me} siècle dans les travaux de Menger, Klein, Ston et Birkoff. Enfin, notre travail est une synthèse des articles, intitulés respectivement présenté par Topkis [4] et Veinott [5] Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre est constitué des définitions et des concepts de base de la théorie des graphes, des ensembles ordonnés et de la programmation linéaire des systèmes de substitution pré-leontief.

Le second chapitre consiste à définir et à étudier les treillis en général, des ensembles, et particulièrement des polyèdres sous-treillis.

Le dernier chapitre fera l'objet de l'étude de la structure des sous-treillis polyédraux, de la représentation irréductible des sous-demi-treillis polyédraux, et de la reconnaissance et la caractérisation des sous-demi-treillis polyédraux par les inégalités linéaires. Ainsi qu'un treillis peut être décomposé en $n(n-1)/2$ sous-treillis d'un produit de deux treillis.

Chapitre 1

Concepts fondamentaux de la théorie des graphes et ordres

1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre, nous allons donner quelques définitions sur la théorie des graphes, les ensembles ordonnés et la programmation linéaire . Pour bien faciliter aux lecteurs, la compréhension de la suite de notre travail.

1.2 Graphes

Un graphe est un dessin géométrique défini par la donnée d'un ensemble de points (appelés sommets ou noeuds), reliés entre eux par un ensemble de lignes ou de flèches (appelées arêtes ou arcs). Chaque arête a pour extrémités deux points, éventuellement confondus.

1.2.1 Graphes non orientés

Définition 1.1. Si on définit une relation sur un ensemble où la notion d'ordre n'est pas importante, on représente ainsi la relation entre deux sommets par un arc non orienté appelé **arête**. On obtient alors un graphe non orienté, noté $G=(X, E)$.

Soit X un ensemble fini. Nous désignons par $|X|$ le cardinal de X , de plus $P(X)$ désigne l'ensemble des parties de X , et pour $0 \leq K \leq |X|$, $P_K(X)$ désigne l'ensemble des parties de X ayant k éléments.

- Un graphe simple $G=(X,E)$ où $X=\{a,b,c,d,e\}$ et $E=\{(a,b),(b,c),(a,c),(a,d),(d,e)\}$ = $P_2(x)$ peut se représenter par la figure (1.3) suivante :

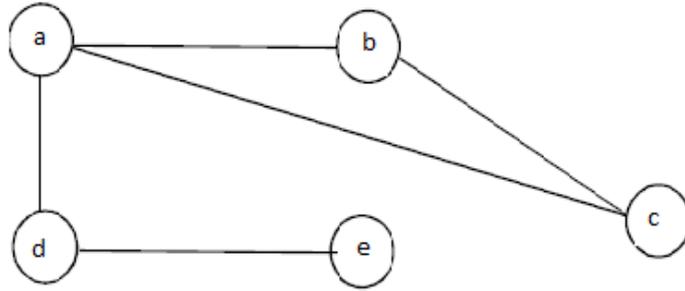


FIGURE 1.1 – Exemple d'un graphe

1.2.2 Parcours dans les graphes non orientés

- Dans un graphe simple $G=(X,E)$, une chaîne C est une séquence finie de sommets x_0, x_1, \dots, x_p telle que $\forall 0 \leq i \leq p, (x_i, x_{i+1}) \in E$; on écrit $C=[x_0x_1\dots x_p]$.
- $p=l(C)$: longueur de la chaîne.
- x_0 et x_p sont les extrémités respectivement initiale et terminale de la chaîne C .
- Lorsque $x_0 = x_p$, on dit que la chaîne est fermée et on l'appelle **cycle**.
- Une chaîne de longueur ≥ 1 dont toutes les arêtes (x_i, x_{i+1}) sont distinctes et dite **simple**.
- Une chaîne dont tous les sommets x_i sont distincts est dite **élémentaire**.
- Un graphe G est **connexe** si $\forall x, y \in X$, il existe une chaîne de x à y .
- Sur l'ensemble X des sommets du graphe simple G , on définit la relation d'équivalence suivante : $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow$ il existe une chaîne de x à y dans G .
- Les graphes simples G_i sont appelés composantes connexes de G .
- Un graphe non connexe peut se décomposer en composantes connexe.
- Soient X_1, X_2, \dots, X_k les classes d'équivalences de \mathfrak{R} , pour $1 \leq i \leq k, G_i = G_{X_i}$ est un sous-graphe de G .

1.2.3 Graphes orientés

Définition 1.2. Un graphe orienté est un système formé d'un ensemble fini de sommets que l'on notera x_1, x_2, \dots, x_n et d'un ensemble fini d'arcs reliant dans un ordre bien défini ces sommets, ou un certain nombre d'entre eux noté u_1, u_2, \dots, u_m . Un graphe est représenté par le couple $G=(X, U)$, où :

1. X est l'ensemble des sommets
2. U est l'ensemble des arcs

Dans notre exemple on a :

- L'ensemble des sommets $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- L'ensemble des arcs $U = \{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6\}$.

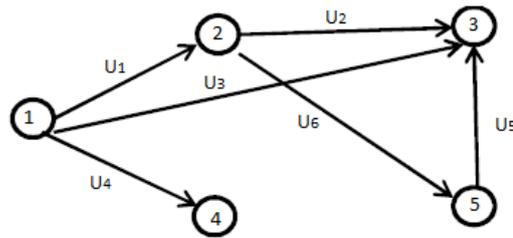


FIGURE 1.2 – Exemple d'un graphe orienté

- On définit le degré d'un sommet x dans le graphe orienté par $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$
- On note $d^+(x)$ le degré extérieur du sommet x , c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant x comme extrémité initiale.
- On note par $d^-(x)$ le degré intérieur du sommet x , c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant x comme extrémité finale.
- Si $u=(x,y) \in U$, alors on dit que x est l'extrémité initiale de u et y l'extrémité finale de u . On dit aussi que u est un arc de x à y .
- Si $u=(x,x)$, alors u est une **boucle** en x .

1.2.4 Parcours dans les graphes orientés

- Un chemin de $G=(X,E)$ est une séquence de sommets $C=[x_0, x_1, \dots, x_n]$, telle que pour $i=0,1,\dots,n-1$, on ait $(x_i, x_{i+1}) \in U$.
- On dit que x_0 est l'extrémité initial, x_n est l'extrémité terminale et n la longueur du chemin C .
- Si $x_0 = x_n$, on dit que le chemin est fermé et on l'appelle **circuit**.
- Le chemin C est dit **élémentaire** si les sommets x_i sont distincts.
- Il est dit **simple** si les arcs u_i sont distincts.

Les successeurs et les prédécesseurs

Soit $G(X,U)$ un graphe orienté avec x,y deux sommets de X

L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet x se définit par :

$$\Gamma^-(x) = \{y \in X / u \in U \text{ ou } I(u) = y \text{ et } T(u) = x \}$$

L'ensemble des successeurs d'un sommet x se définit par :

$$\Gamma^+(x) = \{y \in X / u \in U \text{ ou } T(u) = y \text{ et } I(u) = x \}$$

$$\Gamma(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$$

1.3 Représentation des graphes

1.3.1 Représentation matricielle d'un graphe

Définition 1.3. La matrice d'adjacence

On peut représenter un graphe orienté par une matrice d'adjacence, associée au graphe G , il s'agit d'une matrice carrée $n \times n$.

$$A = (a_{ij}); i, j = \overline{1, n}, \text{ où}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, y_j) \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 1.4. La matrice d'incidences

On peut représenter un graphe orienté par une matrice d'incidence ($n \times m$) où chaque colonne est associée à un arcs et chaque ligne à un sommet du graphe G .

$$M = (m_{ij}), \text{ où } i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}.$$

$$m_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si } x_i = I(u_j) \\ -1 & \text{si } x_i = T(u_j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.3.2 Représentation par liste d'adjacence

Définition 1.5. Une liste d'adjacence (adjacency list) est une structure de données dans laquelle on associe à chaque sommet sa liste de voisins.

Ainsi, on ne stocke que les informations " utiles " concernant l'adjacence dans le graphe, ce qui permet un gain d'espace mémoire non négligeable par rapport à une représentation par matrice.

En revanche, déterminer si deux sommets sont adjacents requiert en général plus d'opérations avec une liste d'adjacence qu'avec une matrice d'adjacence, puisqu'il se peut, qu'il faille parcourir la liste entière des voisins d'un sommet.

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \\ 2 &\longrightarrow 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \\ 3 &\longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 5 \\ 4 &\longrightarrow 2 \longrightarrow 5 \\ 5 &\longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \end{aligned}$$

Représentation par listes d'adjacence du graphe de la figure (1.3) suivante :

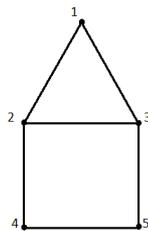


FIGURE 1.3 – Un graphe

Sous-graphes

Définition 1.6. Un graphe $G' = (V', E')$ est un sous-graphe (subgraph) du graphe $G = (V, E)$ Si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$ et toutes les arêtes de E' ont leurs extrémités dans V' , G' est alors un sur-graphe (supergraph) de G .

1.4 Programmation Linéaire

La programmation linéaire s'intéresse à la maximisation ou à la minimisation d'une fonction objectif linéaire définie sur un ensemble fini de variables qui vérifient un nombre fini d'inégalités linéaires.

Forme générale d'un programme linéaire.

$$\begin{cases} \max \text{ ou } \min \sum_{j=1}^n c_j x_j = Z \\ \forall i = 1, \dots, m : \sum a_{ij} x_j \leq, = \text{ ou } \geq b_i \\ \forall j = 1, \dots, n : x_j \geq 0 \end{cases}$$

Où, Z est la fonction objectif.

La résolution d'un problème pratique nécessite les étapes suivantes :

- **La modélisation** mathématique du problème sous forme d'un problème de programmation linéaire.
- **Formulation** du problème.
- **Resolution** du problème théorique par les algorithmes.
- **Determination** de la solution réelle.
- **Vérification** de la validité de la solution.

Définition 1.7.

Un espace est un ensemble muni de structure supplémentaire remarquable, permettant d'y définir des objets analogues à ceux de la géométrie usuelle, les éléments peuvent être appelés suivant le contexte points, vecteurs, fonctions...

Un demi-espace peut se définir de façon intuitive comme étant l'une des deux parties de l'espace que l'on aurait partagé avec un plan.

Définition 1.8. Un **polyèdre** $P \subseteq R^n$ est l'ensemble de solution d'un système fini d'inégalités linéaires, c'est-à-dire :

$$P = \{x \in R^n : Ax \leq b\}$$

Où A est une matrice $m \times n$, $b \in R^m$.

Géométriquement, c'est l'intersection des demi espaces, où chaque contrainte est défini dans deux demi espaces. Un polyèdre borné est appelé **polytope**.

En d'autres termes, un polyèdre $P \subseteq R^n$ est un polytope s'il existe x^1, x^2

$\in R^n$, tel que $x^1 \leq x \leq x^2$ pour tout $x \in P$.

Noter que tout polyèdre P est convexe, c'est-à-dire si x^1 et x^2 sont deux points quelconques de P alors $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ est aussi un point de P pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$.

– Le rang de la matrice A sera noté $\text{rang}(A)$. La **dimension**, $\dim X$, d'un ensemble non-vide $X \subseteq R^n$ est égale à $n - \max \{ \text{rang}(A) : A \text{ est une matrice } n \times n \text{ avec } Ax = Ay \text{ pour tout } x, y \in X \}$

Un polyèdre $P \subseteq R^n$ est de **pleine dimension** si $\dim P = n$.

Définition 1.9. Soit $P = \{x : Ax \leq b\}$ un polyèdre non-vide. Si c est un vecteur différent de zéro tel que $\delta = \max\{c'x : x \in P\}$ est fini, alors $\{x : c'x = \delta\}$ sera un **hyperplan support** de P . Une **face** de P est P lui-même ou l'intersection de P avec un hyperplan support de P . Un point x tel que $\{x\}$ est une face sera un **sommet** de P , et aussi une **solution de base** du système $Ax \leq b$.

Définition 1.10. Une combinaison linéaire d'éléments de X ($\sum_1^n \lambda_i x_i$) est dite convexe si $\sum \lambda_i = 1$ et $\lambda_i \geq 0$. Notons $X = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$, l'ensemble des solutions réalisables de (P) . Cet ensemble est convexe.

Définition 1.11. :

L'ensemble X est appelé un **polytope convexe**.

* Un polytope borné est un **polyèdre convexe**.

* Un **point extrême** d'un polytope ou d'un polyèdre convexe X , est un point qui ne peut être exprimé comme combinaison convexe d'autres points de X .

* On appelle support l'ensemble des indices des composantes non nulles. On le note $\text{sup } p$.

Définition 1.12. Une application (ou une fonction) α est dite isotone si elle conserve l'ordre, c'est-à-dire si $x, y \in E, x \leq y \Rightarrow \alpha(x) \leq \alpha(y)$

$\alpha(x), \alpha(y) \in \alpha(E) \subset F$;

elle est dite antitone si $x, y \in E, x \leq y \Rightarrow \alpha(y) \leq \alpha(x)$

$\alpha(x), \alpha(y) \in \alpha(E) \subset F$.

Une application est dite monotone si elle est isotone ou antitone.

Définition 1.13. Une fonction bimonotone est une fonction à deux variables de signes opposés, croissante sur son axe de coordonnée par rapport à une variable et décroissante par rapport à l'autre variable sur son axe de coordonnée.

1.5 Système de substitution leontief

Dans ce chapitre, on définira un système leontief et la matrice leontief utilisés par Veinott.

Définition 1.14. Une matrice A est dite pré-leontief si au plus elle a un élément positif dans chaque colonne, le système $Ax = b$, est appelé Système de Substitution Pré-Leontief(PLSS) si A est Leontief et b un vecteur colonne positif.

Définition 1.15. A est appelée une matrice de Leontief s'il existe au moins une solution au (PLSS), lorsque b est strictement positif.

Le système est appelé système de substitution de Leontief (LSS) si A est Leontief et b est strictement positif.

1.6 Ensemble ordonné

Définition 1.16. Pour que \mathfrak{R} soit une relation binaire sur un ensemble X , il suffit qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

1. Réflexivité : $x \mathfrak{R} x$
2. Antisymétrie : $x \mathfrak{R} y$ et $y \mathfrak{R} x \Rightarrow x = y$.
3. Transitivité : $x \mathfrak{R} y$ et $y \mathfrak{R} z \Rightarrow x \mathfrak{R} z$.

– Un ensemble ordonné est un couple $P = (X, \mathfrak{R})$ où X est un ensemble et \mathfrak{R} est une relation d'ordre sur X .

L'ordre P est dit total s'il est tel que, pour tous $x, y \in X$, $x \parallel y$ implique $y \mathfrak{R} x$ et l'ensemble ordonné $P = (X, \mathfrak{R})$ est alors appelé ensemble totalement ordonné.

- Quand une paire x, y d'éléments vérifie $x \mathfrak{R} y$ ou $y \mathfrak{R} x$ (où les deux), on dit que x et y sont comparables
- Dans le cas contraire, sont dits incomparables.

Remarque 1.1. Dans la suite, nous préférerons la notation \leq à celle de \mathfrak{R} pour désigner une relation d'ordre, et $x < y$ signifiera que $x \leq y$ avec $x \neq y$.

En outre, si $x < y$ et qu'il n'existe aucun élément z vérifiant $x < z < y$, on dit que y couvre x et l'on note $x \leq y$.

La relation $<$ associée à une relation d'ordre est appelée relation de couverture.

- Soient $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné et Y une partie de X . La restriction de l'ordre (\leq) à la partie Y est un ordre, noté \leq_Y et appelé un sous-ordre de (\leq). On dit alors que $Q = (Y, \leq_Y)$ est un sous-ensemble ordonné de P .
- Soit Q un sous-ensemble ordonné d'un ensemble ordonné P . Si Q est totalement ordonné, on dit que Q est une chaîne de P .
- On note $x_0 < x_1 < \dots < x_p$ une chaîne de P où, simplement, $x_0 x_1 \dots x_p$, l'élément x_0 est l'origine de la chaîne, x_p son extrémité, et sa longueur vaut le nombre de ses éléments moins un (donc p pour la chaîne $x_0 < x_1 < \dots < x_p$).

Définition 1.17. Une chaîne $Q = x_0, x_1, \dots, x_p$ de P est dite couvrante si elle vérifie $x_0 < x_1 < \dots < x_p$ avec p supérieur ou égal à 1.

Définition 1.18. On appelle antichaine d'un ensemble ordonné P tout sous-ensemble ordonnés de P dans lequel deux éléments (distincts) sont toujours incomparables vis-à-vis de \leq .

- La réduction transitive du graphe associé à P est appelée **graphe de couverture de P** ou **diagramme de Hasse**.
- Elle a pour **longueur** le nombre de ses éléments.
- La **hauteur** de P est la quantité $h(P) = d(P) - 1$, c'est la longueur d'une chaîne de cardinal maximum.
- La **largeur** de P est **cardinal maximum** d'une antichaine; On la note $W(P)$.
- $Q = (X, \leq_q)$ est une **extension** de $P = (X, \leq_p)$ si $x \leq_p y \Rightarrow x \leq_q y$ pour tout x, y de X .

Définition 1.19.

Un ordre total $L = (X, \leq_L)$ est une **extension linéaire** d'un ordre $P = (X, \leq_p)$ si L est une extension de P .

On note alors $L(p)$ l'ensemble des extensions linéaires de l'ordre P .

Définition 1.20.

On dit qu'un ordre $Q = (Y, \leq_q)$ est un **sous ordre** de P si et seulement si $Y \subseteq X$ et pour tout x, y de Y , $x \leq_q y$ si et seulement si $x \leq_p y$.

Définition 1.21.

Un **Idéal** I d'un ordre P , est une **partie héréditaire inférieure**, i.e. $I \subseteq X$ tel que si $x \in I$ et $y \in X$ vérifient $y \leq_p x$, alors $y \in I$.

On note par $I(P)$ l'ensemble des idéaux de p .

Un Idéal est dit **principal** s'il existe un élément $a \in X$ tel que $I = \{x \in X / x \leq_p a\}$, on note alors $I = \downarrow a$.

Définition 1.22.

Les notations de **filtre** et de filtre **principal** ou **partie héréditaire supérieure** peuvent se définir dualement.

Définition 1.23. Considérons un ordre $P = (X, \leq_p)$:

Un élément x de X est dit **borne supérieure** de y et z si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $y \leq_p x$ et $z \leq_p x$.
2. Pour $t \in X$, tel que $y \leq_p t$ et $z \leq_p t$ alors $x \leq_p t$.

La condition 2 exprime l'unicité de la borne supérieure, on la note $x \vee y$ ou $\sup(x, y)$.

Un élément x de X est dit **borne inférieure** de y et z si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $x \leq_p y$ et $x \leq_p z$.
2. Pour tout $t \in X$, tel que $t \leq_p y$ et $t \leq_p z$ alors $t \leq_p x$.
3. La condition 2 exprime l'unicité de la borne inférieure, on la note $x \wedge y$ ou $\inf(x, y)$.

Chapitre 2

Treillis ; Ensembles et polyédres des sous treillis

2.1 Introduction

Ce chapitre a pour but d'introduire les éléments de base de la théorie des treillis dans le cas fini.

En donnant quelques définitions des ensembles et particulièrement des polyédres sous treillis, d'ensembles incrémentés et desincrémentés par rapport à une variable qui seront utiles dans les chapitres suivants :

2.2 Treillis ordinal et treillis algébrique

On trouve dans la littérature deux définitions d'un treillis : une définition algébrique et une définition ordinale. Ces définitions introduisent la notion de borne supérieure (ou supremum) et de borne inférieure (ou infimum) : alors qu'il s'agit d'opérateurs binaires dans la définition algébrique, ce sont des éléments particuliers dans la définition ordinale.

Définition 2.1.

- la borne inférieure de x et y , notée $x \wedge y$, est l'unique élément maximal (plus grand élément) de l'ensemble des prédécesseurs (ou minorants) de x et y (ensemble des éléments $z \in S$ tels que $z \leq x$ et $z \leq y$).
- la borne supérieure de x et y , notée $x \vee y$, est l'unique élément minimal (i.e. plus petit élément) de l'ensemble des successeurs (ou majorants) de x et y (ensemble des éléments $z \in S$ tels que $z \geq x$ et $z \geq y$).

Définition 2.2. (Définition algébrique)

Un treillis ou encore une algèbre de treillis est un triplet $L = (S; \wedge; \vee)$ ou \wedge et \vee sont deux opérateurs binaires sur l'ensemble S qui vérifient les propriétés suivantes :

1. **L'idempotence :**

$$x \vee x = x. \text{ ou } x \wedge x = x.$$

2. **La commutativité :**

$$x \vee y = y \vee x. \text{ ou } x \wedge y = y \wedge x.$$

3. **L'associativité :**

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z.$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$$

4. **L'absorption :**

$$x \vee (x \wedge y) = x. \text{ ou } x \wedge (x \vee y) = x.$$

5. Et une relation d'ordre \leq telle que :

$$x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x.$$

Définition 2.3. (Définition ordinal)

Un treillis est une paire $L = (S; \leq)$ où :

\leq est une relation d'ordre sur l'ensemble S , i.e. une relation binaire pour toute paire d'éléments x, y de S admet à la fois une borne inférieure et une borne supérieure.

Définition 2.4.

Un ordre partiel $P = (X, \leq_p)$ non vide est dit **treillis** si pour tout couple d'éléments x et y de X , la borne supérieure $x \vee y$ et la borne inférieure $x \wedge y$ existent dans P .

2.2.1 Treillis complet

Un treillis est dit **complet** lorsque tout sous ensemble d'éléments (quelque soit son cardinal) admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Lorsque le treillis est fini ou complet, on peut étendre ces notions de bornes supérieures ou inférieures aux sous ensembles de cardinal quelconque.

Ainsi, les notations suivantes : $\vee Y$ et $\wedge Y$ représentent les bornes d'un ensemble $Y \subseteq X$.

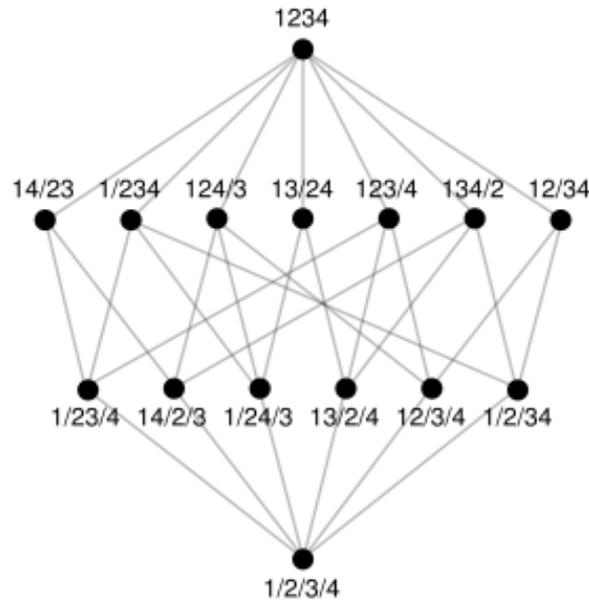


FIGURE 2.1 – Exemple d’un treillis

Sup et inf-demi-treillis

Un ordre partiel $P = (X, \leq_p)$ non vide est dit **Sup-demi-treillis** si pour tout couple d’éléments x et y de X , la borne supérieure $x \vee y$ existe.

Un ordre partiel $P = (X, \leq_p)$ non vide est dit **Inf-demi-treillis** si pour tout couple d’éléments x et y de X , la borne inférieure $x \wedge y$ existe.

Un treillis est un sup-demi-treillis ayant un seul élément minimal.

Un treillis est un inf-demi-treillis ayant un seul élément maximal.

Un treillis est un ensemble partiellement ordonné qui à la fois un inf-demi-treillis et sup-demi-treillis.

Sous-treillis

Si $T = (X, \leq_T)$ est un treillis, alors $L = (Y, \leq_L)$ avec $Y \subseteq X$ est appelé **sous-treillis** engendré par Y si et seulement si pour tout x, y de Y $x \vee_T y$ et $x \wedge_T y$ appartiennent à Y .

Soient x et y de X , tel que $x \leq_T y$, le sous treillis engendré par $t \in T$ tel que $t \leq y$ et $t \geq x$ est appelé **Intervalle** et sera noté $[x, y]_T$.

Remarque 2.1.

Notons que le dual d’un treillis est aussi un treillis.

Tout treillis sur un ensemble fini est un treillis complet.

Les éléments remarquables

Elément nul et élément universel

On notera $\perp = \wedge X$ son élément minimum, appelée élément **nul**; et $\top = \vee X$ son élément maximum, appelé aussi élément **universel**.

Elément irréductible

Un élément x d'un treillis T est appelé **sup-irréductible** si $a \vee b = x$ implique $a = x$ ou $b = x$, ou encore x ne peut s'écrire comme le supremum de deux éléments.

Un élément x est un sup-irréductible si et seulement si il couvre un seul élément dans le graphe de couverture associé à T .

Un élément x d'un treillis T est appelé **inf-irréductible** si $a \wedge b = x$ implique $a = x$ ou $b = x$, ou encore x ne peut s'écrire comme l'infimum de deux éléments.

Un élément x est inf-irréductible si et seulement si il est couvert par un seul élément dans le graphe de couverture associé à T .

L'ensemble des éléments sup-irréductible est noté par $\mathbf{J}(T)$.

L'ensemble des éléments inf-irréductible est noté par $\mathbf{M}(T)$.

Ces éléments irréductibles jouent un rôle essentiel dans la structure des treillis.

2.3 Propriétés algébrique d'un treillis

Précédemment, on avait donc défini le treillis en général d'une manière ensembliste, sachant, qu'il existe une définition purement algébrique contenant quelques propriétés très importantes qu'on définira et qu'on démontrera par la suite :

Théorème 2.1.

*Un treillis T est un ensemble ordonné tel que pour tout couple d'éléments x et y il existe un plus petit majorant noté $(x \vee y)$ et un plus grand minorant noté $(x \wedge y)$. Si $\forall x, y, z \in T$ alors les opérations \vee et \wedge possèdent les propriétés algébriques suivantes : **l'idempotence, la commutativité, l'associativité et l'absorption.***

Démonstration.

Soient $x, y, z \in T$

1. Idempotence :

$$x \vee x = x = x \wedge x$$

Cette propriété découle de la définition de la relation d'ordre, le plus petit des majorants (ppM) de x est x et le plus grand des minorants (pGm) de x est x .

2. Commutativité :

$$x \vee y = y \vee x \text{ et } x \wedge y = y \wedge x.$$

Par hypothèse $x \vee y$ est le plus petit des majorants (ppM) du sous-ensemble (x, y) et $x \wedge y$ est le plus petit des majorants (ppM) du sous-ensemble (y, x) or ces deux ensembles sont identiques comme ayant les mêmes éléments.

3. Associativité :

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \text{ et } x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$$

Cette démonstration est analogue a la précédente.

4. Absorption :

$$x \vee (x \wedge y) = x \text{ et } x \wedge (x \vee y) = x.$$

La relation d'ordre étant réflexive, on aura $x \leq x$, de plus $x \wedge y$ étant le (pGm), on peut écrire $(x \wedge y) \leq x$; ceci prouve que x est un majorant de l'ensemble $(x, x \wedge y)$, par ailleurs si z est un majorant de $(x, x \wedge y)$ on a nécessairement $x \leq z$. Il résulte de tout ceci que x est le (ppM) de $(x, x \wedge y)$ c'est à dire $x \vee (x \wedge y) = x$. Le théorème précédent admet une importante réciproque.

Dans la partie qui suit, on donne quelques définitions des ensembles et particulièrement pour les polyédres sous treillis, pour leurs utilité dans le chapitre qui suit :

2.4 Ensembles et polyédre sous-treillis dans R^n

2.4.1 La relation de dominance dans R^n :

On définit la relation de dominance dans un ensemble $E \subseteq R^n$ par :

- On dit que : pour $x, y \in E$ x domine y dans E si $y \leq x$
- On dit que : pour $x, y \in E$ x est dominé par y dans E ssi $x \leq y$
- On dit que : pour $x, y \in E$ x est le point dominant dans E , si $\forall y \in E ; y \leq x$;
- On dit que : pour $x, y \in E$ x est le point dominé dans E , si $\forall y \in E ; x \leq y$.

Ensemble inf-demi-treillis

Un ensemble ordonné E non-vide est un ensemble inf demi treillis si : $\exists m, x \in E, m \leq x, \forall x \in E$; où m est la borne inférieure.

Et autrement dit, $x \wedge m = m$ pour tout $x \in E$.

Ensemble sup-demi-treillis :

Un ensemble ordonné E non-vide est dit sup-demi-treillis si $\exists M, \forall x \in E, x \leq M, \forall x \in E ; x \vee M = M$; M est la borne supérieure.

où $x \vee M = M$.

Remarque 2.2.

1. Si E est à la fois inf et sup-demi-treillis alors E est un sous-treillis.
2. M, m sont les deux éléments, respectivement dominé strict et dominant strict dans D .
3. Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux polyédres, qui sont utilisés par Veinott pour la représentation de ces derniers, pour le cas particulier des systèmes de substitution pré-leontief

2.4.2 Polyédre inf-demi-treillis

Un polyédre D , est un ensemble ordonné non-vide est dit inf demi treillis si : $\exists m, x \in E, m \leq x, \forall x \in E$; où m est la borne inférieure.

2.4.3 Polyédre sup-demi-treillis :

Un polyédre D , non-vide est dit sup-demi-treillis si $\exists M, \forall x \in E, x \leq M, \forall x \in E ; x \vee M = M$; M est la borne supérieure.

2.4.4 Polyédre sous-treillis

Un polyédre D , non vide est dite sous-treillis si : $\exists m, M \in D$, pour lesquels $\forall x \in D ; m \leq x \leq M$.

Remarque 2.3.

- Si D est à la fois inf et sup-demi-treillis alors D est un sous-treillis.
- M, m sont les deux éléments, resp. dominé strict et dominant strict dans D .

2.4.5 Ensemble i-desincrémenté :

Soit $S = \times_N S_k$ un produit des ensembles ordonnées $S_k, K \in N$. Un sous ensemble L de S est appelé i-décroissant (i-desincrémenté) si $i \in N$ et pour chaque $r = (r_k) \in L$ et $s = (s_k) \in S$ avec $r \geq s$ (resp, $r \leq s$) et $r_i = s_i$ on a $s \in L$. et pour chaque $i \in N$ fixé, l'ensemble de i-desincrémenté de S est un sous-ensembles, chaque sous ensemble L de S a un enveloppant i-desincrémenté noté L_i^\downarrow . Il est facile à avoir que, pour chaque i , les deux enveloppant i-desincrémenté et de L ont de représentations utiles comme les projections $\Pi_s K$ de sous ensembles K de $L \times S$ sur S .

$$L_i^\downarrow = \Pi_s \{ (r, s) \in L \times S : r \geq s, r_i = s_i \}$$

2.4.6 Ensemble i-incrémenté :

Soit $S = \times_N S_k$ un produit des ensembles ordonnées $S_k, K \in N$. Un sous ensemble L de S est appelé i-croissant (i-incrémenté) si $i \in N$ et pour chaque $r = (r_k) \in L$ et $s = (s_k) \in S$ avec $r \leq s$ et $r_i = s_i$ on a $s \in L$, et pour chaque $i \in N$ fixé, l'ensemble de i-incrémenté de S est un sous-ensembles, chaque sous ensemble L de S à un enveloppant i-incrémenté noté L_i^\uparrow). Il est facile à avoir que, pour chaque i , les enveloppant i-incrémenté de L ont de représentations utiles comme les projections $\Pi_s K$ de sous ensembles K de $L \times S$ sur S .

$$L_i^\uparrow = \Pi_s \{ (r, s) \in L \times S : r \leq s, r_i = s_i \}$$

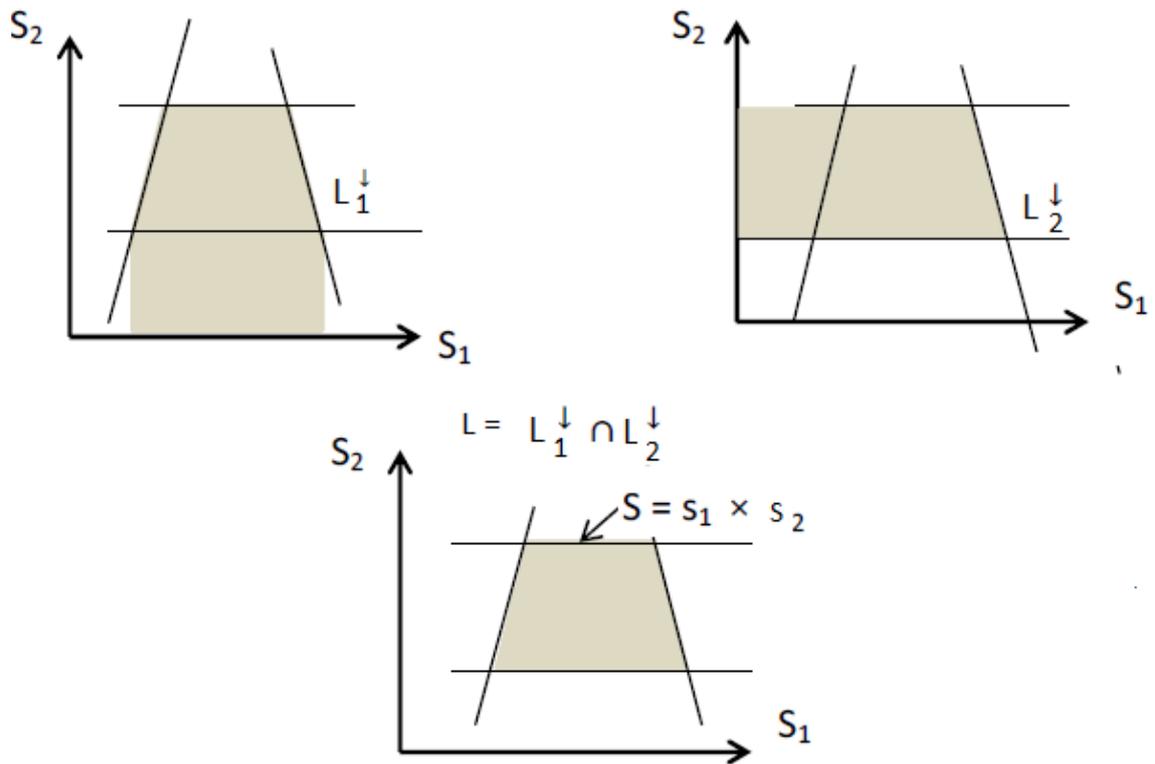


FIGURE 2.2 – exemple d'un ensemble désincrémenté

2.4.7 Ensembles bimonotones

Pour un ensemble ordonné S et $x \in S$, définissons $[x, +\infty) = \{y, x \leq y, y \in S\}$ et $(-\infty, x] = \{y, y \leq x, y \in S\}$.

Si S_1 et S_2 sont des ensembles ordonnés, $L \subseteq S_1 \times S_2$ et leurs $[x_1, \infty) \times (-\infty, x_2] \subseteq L$ pour tout $(x_1, x_2 \in L)$ ou $(-\infty, x_1] \times [x_2, \infty) \subseteq L$ pour tout $(x_1, x_2) \in L$, alors L est bimonotone. Si S_1 et S_2 sont des chaînes alors un sous ensemble bimonotone de $S_1 \times S_2$ est clairement un sous-treillis . Mais un sous ensemble bimonotone d'un produit de deux treillis n'est pas nécessairement un sous- treillis . Si $S_1 \times S_2$, alors L génère deux enveloppants bimonotones, $H_1(L) = \cup_{x \in L} [x_1, \infty) \times (-\infty, x_2]$ et $H_2(L) = \cup_{x \in L} (-\infty, x_1] \times [x_2, \infty)$ qui sont les plus petit ensembles bimonotone contenant L .

Dans un sous ensemble bimonotone d'un produit de deux chaînes est un sous-treillis, enveloppant bimonotone de chaque sous ensemble d'un tel produit doit être des sous treillis.

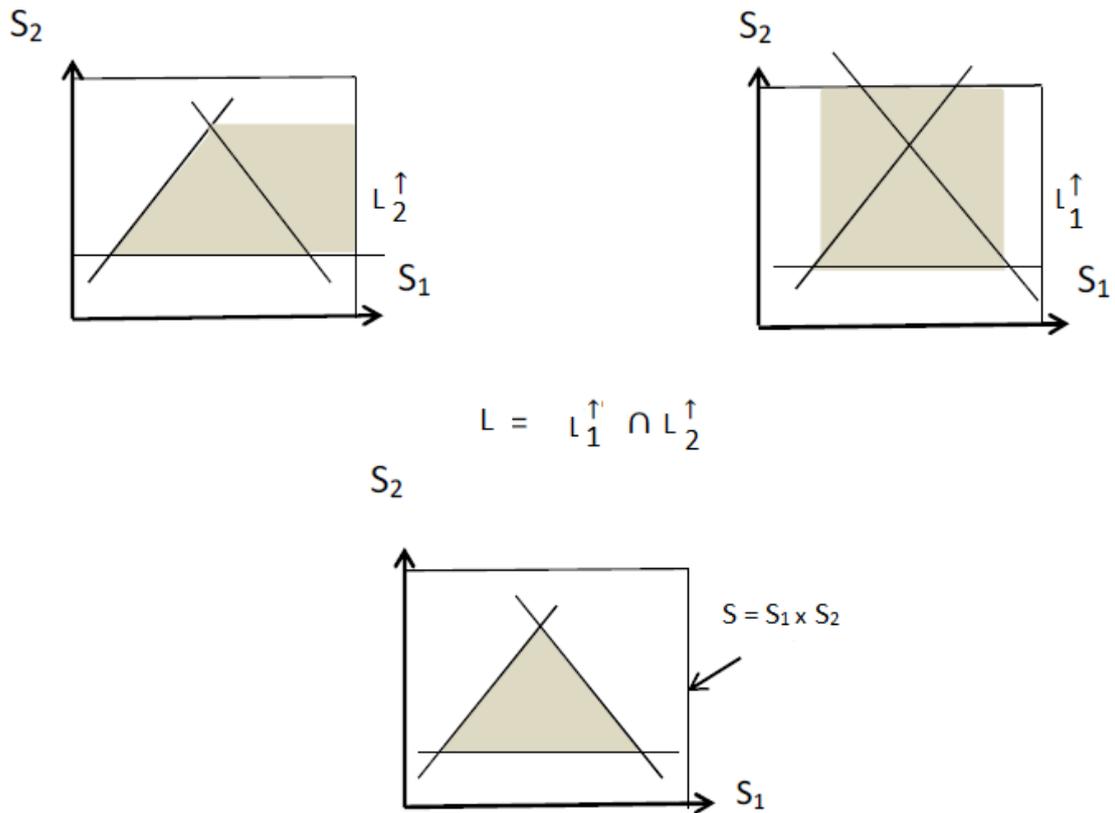


FIGURE 2.3 – exemple d'un ensemble incrémenté

Remarque 2.4.

- Si S_1 et S_2 sont des chaînes alors un sous ensemble bimonotone de $S_1 \times S_2$ est clairement un sous-treillis.
- Un sous ensemble bimonotone d'un produit de deux treillis n'est pas nécessairement un sous treillis.
- Si $S_1 \times S_2$, alors L génère deux enveloppes bimonotones, $H_1(L) = \cup_{x \in L} [x_1, \infty] \times (-\infty, x_2]$ et $H_2(L) = \cup_{x \in L} (-\infty, x_1] \times [x_2, \infty]$ qui sont les plus petit ensembles bimonotone contenant L .

2.4.8 Ensemble sous treillis :

Soit $S = \prod_{k \in N} S_k$ un produit des ensembles ordonnés S_k , $k \in N$. Un sous ensemble L de S est appelé i -décroissant (resp, i -croissant) (i -desincrémenté (i -incrémenté)) si $i \in N$ et pour chaque $r = (r_k) \in L$ et $s = (s_k) \in S$ avec $r \geq s$ (resp, $r \leq s$) et $r_i = s_i$ on a $s \in L$. et pour chaque $i \in N$ fixé, l'ensemble de i -desincrémenté (resp, i -incrémenté) de S est un sous-ensemble, chaque sous-ensemble L de S a un enveloppant i -desincrémenté (resp, incrémenté) noté L_i^\downarrow (resp, L_i^\uparrow). Il est facile à avoir que, pour chaque i , les deux enveloppants i -desincrémenté et i -incrémenté de L ont de représentations utiles comme les projections Π_s K de sous-ensembles K de $L \times S$ sur S , (reste à avoir)

$$L_i^\downarrow = \Pi_s \{ (r, s) \in L \times S : r \geq s, r_i = s_i \}$$

et

$$L_i^\uparrow = \Pi_s \{ (r, s) \in L \times S : r \leq s, r_i = s_i \}$$

Conclusion

Dans ce chapitre, on a donné des définitions des treillis, ensembles et polyédres sous treillis et ensemble incrémenté et désincrémenté introduit par Topkis [La structure des sous treillis d'un produit de n treillis] et Veinott [5]; pour leur représentation qu'on va étudier dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

La structure des sous-treillis généraux et polyédraux des n treillis des produit d'espace et leurs représentations

3.1 Introduction :

Ce chapitre est consacré pour l'étude de la structure des sous-treillis d'un produit de n treillis. Il est démontré par Topkis dans l'article [4] que les sous-treillis généraux peuvent être représentés en termes de quelques autres sous-treillis qui sont assez simple à conceptualiser et à caractériser, et à étudier la représentation des sous-treillis polyédraux et généraux donnée par Veinott dans l'article (Représentation des sous-treillis polyédraux des produits d'espaces)[5].

Dans le premier temps, Topkis a montré qu'un treillis peut être décomposé en terme de $n(n-1)/2$ sous treillis d'un produit de deux treillis.

3.2 La structure d'un sous-treillis

La structure d'un sous-treillis : Si $S = \times_{i=1}^n S_i$ et $L = \{x = (x_1, \dots, x_n); (x_J, x_k) \in T \text{ et } x \in S\}$ où T est un sous-ensemble de $S_J \times S_K$ pour deux indices distincts J et k , alors L est un sous ensemble de deux variables (de couple) de S et T est le Jk -générateur de L . Si S_1, \dots, S_n sont des treillis et T est le générateur d'un sous ensemble de deux variables L (de couple) de $S = \times_{i=1}^n S_i$ alors L est un sous-treillis de S ssi T est un sous-treillis de $S_J \times S_k$.

Théorème 3.1.

Si S_1, \dots, S_k sont des treillis, $n > 1$ et $S = \times_{i=1}^n S_i$, alors l'ensemble L est un sous-treillis de S ssi il est l'intersection de $n(n-1)/2$ sous-treillis de deux variables de S .

Preuve.

La condition suffisante est immédiate car l'intérsection des sous-treillis est un sous-treillis non-vide de S . Pour $1 \leq J \leq n, 1 \leq k \leq n, \text{ et } J \neq k$.

$$T_{Jk} = \{(x_J, x_k) : \text{il existe } y = (y_1, \dots, y_n) \in L \text{ avec } y_J = x_J \text{ et } y_k = x_k\} L_{Jk}$$

$$= \{x : (x_J, x_k) \in T_{Jk}, x \in S\};$$

Il a été noté que T_{Jk} est un sous-treillis de $S_J \times S_k$ parce que L est un sous-treillis de S , d'où L_{Jk} est un sous-treillis de deux variables .

Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in L$ alors $(x_J, x_k) \in T_{Jk}$ et donc $x \in L_{Jk}$ pour chaque $J \neq k$. Cependant,

(1)

$$L \subseteq \bigcap_{j \neq k} L_{Jk}.$$

Maintenant il a été pris $x \in \bigcap_{J \neq k} L_{Jk}$. Pour chaque $J \neq k, x \in L_{Jk}$ comme $(x_J, x_k) \in T_{Jk}$ et ainsi, il existe $y^{Jk} \in L$ avec $y^{Jk} = x_J$. Pour chaque $1 \leq J \leq n$, soit $y^i = \bigwedge_{k \neq J} y^{Jk}$.

Il a été noté que $y^J = x_J$ parce que $y^{Jk} = x_J$ pour tout $k \neq J$, et $y^i \leq x$ parce que $y_k^J \leq y_k^{Jk} = x_k$ pour tout $k \neq J$. Ainsi $y^J \in L$ et puis chaque $y^{ik} \in L$ et L est un sous-treillis de S . Mais $x = \bigvee_{j=1}^n y^j \in L$ parce que L est un sous-treillis. Donc

(2)

$$L \supseteq \bigcap_{J \neq k} L_{Jk}$$

de (1) et (2) et $L_{Jk} = L_{kJ}$, donc

$$L = \bigcap_{1 \leq J < k \leq n} L_{Jk}.$$

Le théorème 1 montre qu'un sous-treillis d'un produit de n treillis peut être complètement caractérisé en termes de sous-treillis de produit de deux treillis . On va explorer et caractériser la structure de sous-treillis d'un produit de deux treillis.

Le lemme 1 montre que les enveloppes bimonotones d'un sous treillis de produit de deux treillis sont des sous treillis.

Lemme 3.1.

Si S_1 et S_2 sont des treillis et L un sous-treillis de $S_1 \times S_2$ alors les enveloppes bimonotones de L sont des sous-treillis.

Preuve.

Il a été montré que $H_1(L)$ est un sous-treillis la preuve pour $H_2(L)$ s'ensuit symétriquement, où de façon symétrique.

choisir $(x_1, x_2) \in H_1(L)$ et $(y_1, y_2) \in H_1(L)$. Alors il existe $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in L$ et $(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in L$ avec $\bar{x}_1 \leq x_1, x_2 \leq \bar{x}_2, \bar{y}_1 \leq y_1$, et $y_2 \leq \bar{y}_2$. Parce que L est un sous-treillis de $S_1 \times S_2$, $(\bar{x}_1 \wedge \bar{y}_1, \bar{x}_2 \wedge \bar{y}_2) \in L$ et $(\bar{x}_1 \vee \bar{y}_1, \bar{x}_2 \vee \bar{y}_2) \in L$. Alors $(x_1, x_2) \wedge (y_1, y_2) = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2) \in [\bar{x}_1 \wedge \bar{y}_1, \infty) \times (-\infty, \bar{x}_2 \wedge \bar{y}_2] \subseteq H_1(L)$ et $(x_1, x_2) \vee (y_1, y_2) = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2) \in [\bar{x}_1 \vee \bar{y}_1, \infty) \times (-\infty, \bar{x}_2 \vee \bar{y}_2] \subseteq H_1(L)$. Donc $H_1(L)$ est un sous-treillis.

Si $L \subseteq \times_{i=1}^n S_i$ alors la section de L a $x_j \in S_j$ est $L^j(x_j) = \{(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \in L\}$ et la projection de L sur S_j est $\Pi_j L = \{x_j, L^j(x_j) \text{ est non vide} \}$. Si S_1, \dots, S_n sont des treillis et L un sous-treillis de $\times_{i=1}^n S_i$, alors chaque section $L^j(x_j)$ est un sous-treillis de $\times_{i \neq j} S_i$ et la projection $\Pi_j L$ est un sous-treillis de S_j pour tout j .

Théorème précédent montre qu'un sous-treillis d'un produit de deux treillis peut être représenté comme une intersection de leurs enveloppes bimonotone et le produit de leurs deux projections.

Le lemme 2 fournit un résultat intermédiaire nécessaire pour établir le théorème 2 et montre une caractéristique simple des sections d'un produit de deux treillis. Le corollaire 1, est une conséquence directe du lemme 2, montre qu'une section contenant ces infimum et supremum est simplement l'intersection appropriée et un intervalle.

Lemme 3.2.

Si S_1 et S_2 sont des treillis, L un sous-treillis de $S_1 \times S_2$, $x_1 \in S_1, a_2 \in L^1(x_1)$, et $b_2 \in L^1(x_1)$ alors $\Pi_2 L \cap [a_2, b_2] \subseteq L^1(x_1)$.

Preuve.

soit $x_2 \in \Pi_2 L \cap [a_2, b_2]$. Puisque $x_2 \in \Pi_2 L$, il existe $y_1 \in S_1$ avec $(y_1, x_2) \in L$. Parce que $a_2 \leq x_2$ et L est un treillis, $(x_1 \vee y_1, x_2) = (x_1, a_2) \vee (y_1, x_2) \in L$. Puisque $x_2 \leq b_2$ et L est un treillis, $(x_1, x_2) = (x_1 \vee y_1, x_2) \wedge (x_1, b_2) \in L$. Donc $x_2 \in L^1(x_1)$ et comme $\Pi_2 L \cap [a_2, b_2] \subseteq L^1(x_1)$.

Corollaire 3.1.

Si S_1 et S_2 sont des treillis, L est un sous-treillis de $S_1 \times S_2$, $x_1 \in S_1$, et $L^1(x_1)$ contient son infimum a_2 et son supremum b_2 , alors

$$L^1(x_1) = \Pi_2 L \cap [a_2, b_2].$$

Théorème 3.2.

Si S_1 et S_2 sont des treillis et L est un sous-treillis de $S_1 \times S_2$, alors L est l'intersection de leurs deux enveloppes bimonotones et le produit de leurs deux projections.

Preuve.

Clairement $L \subseteq H_1(L) \cap H_2(L) \cap \{\Pi_1 L \times \Pi_2 L\}$. Pour chaque $\bar{x} \in H_1(L)$ et $\bar{x} \in H_2(L)$, il existe $y \in L$ et $w \in L$ tels que $y_1 \leq \bar{x}_1, \bar{x}_2 \leq y_2, \bar{x}_1 \leq w_1$ et $w_2 \leq \bar{x}_2$ puisque L est un sous-treillis, $(y_1, w_2) = y \wedge w \in L$ et $(w_1, y_2) \in y \vee w \in L$. Donc $w_2 \in L^1(y_1)$ et $y_2 \in L^1(y_1)$ comme par le lemme 2, $\Pi_2 L \cap [w_2, y_2] \subseteq L^1(y_1)$ et en outre $\bar{x}_2 \in L^1(y_1)$ et $(y_1, \bar{x}_2) \in L$. Ainsi, $y_1 \in L^2(w_2)$ et $w_1 \in L^2(w_2)$ comme dans le théorème 2, $\Pi_1 L \cap [y_1, w_1] \subseteq L^2(w_2)$ et en outre $\bar{x}_1 \in L^2(w_1)$ et $(\bar{x}_1, w_2) \in L$.

Puisque L est un sous-treillis $\bar{x} = (y_1, \bar{x}_2) \vee (x_1, w_2) \in L$, et comme $L = H_1(L) \cap H_2(L) \cap \{\Pi_1(L) \times \Pi_2(L)\}$.

D'après le lemme 1 les enveloppes bimonotones sont des sous-treillis. La réciproque est immédiate où les enveloppes bimonotones sont des sous-treillis, mais l'exemple précédent du lemme 1 contredit généralement cette implication inverse (où cette réciprocity).

Si S_1, \dots, S_k sont des ensembles ordonnés, $S = \times_{i=1}^n S_i$, L est un sous ensemble bivarié (de deux variables) de S , T est le jk -générateur de L , et T est bimonotone, alors L est bimonotone.

Ce qui suit est immédiat du théorème 2 et lemme 1.

Corollaire 3.2.

Si S_1, \dots, S_n sont des treillis, $S = \times_{i=1}^n S_i$, et L est un sous-treillis bivariable (de deux variable) de S , alors L est l'intersection de deux sous-treillis bimonotone et $\times_{i=1}^n \Pi_i L$.

Il a été noté que le corollaire 2, $\Pi_i L = S_i$ pour au moins $(n-2)$ d'indices i . Le résultat du théorème 3 est obtenu en appliquant le corollaire 2 au théorème 1.

Théorème 3.3.

Si S_1, \dots, S_n sont des treillis et $S = \times_{i=1}^n S_i$ alors un ensemble L est un sous-treillis ssi il est l'intersection de $n(n-1)$ sous treillis bimonotones de S de $\times_{i=1}^n \Pi_i L$.

3.3 Représentation des demi-sous-treillis

Soit $S = \times_N S_k$ un produit des ensembles ordonnés $S_k, K \in N$. Un sous ensemble L de S est appelé i -décroissant (resp, i -croissant) (i -desincrémenté (i -incrémenté)) si $i \in N$ et pour chaque $r = (r_k) \in L$ et $s = (s_k) \in S$ avec $r \geq s$ (resp, $r \leq s$) et $r_i = s_i$ on a $s \in L$. et pour chaque $i \in N$ fixé, l'ensemble de i -desincrémenté (resp, i -incrémenté) de S est un sous-ensembles, chaque sous-ensemble L de S a une enveloppe i -desincrémentée (resp, incrémentée) noté L_i^\downarrow (resp, L_i^\uparrow).

Il est facile à avoir que, pour chaque i , les deux enveloppes i -desincrémenté et i -incrémenté de L ont de représentations utiles comme les projections $\Pi_s K$ de sous-ensembles K de $L \times S$ sur S ,

$$L_i^\downarrow = \Pi_s \{ (r, s) \in L \times S : r \geq s, r_i = s_i \} \tag{1}$$

et

$$L_i^\uparrow = \Pi_s \{ (r, s) \in L \times S : r \leq s, r_i = s_i \} \tag{2}$$

Théorème 3.4.

(Représentation de sous-demi-treillis des produits des chaines) Les propriétés suivantes d'un sous ensemble L d'un produit fini⁴ $S = \times_N S_K$ des chaines sont équivalentes :

- (a) L est un inf (resp, sup) sous-treillis de S .
- (b) L est l'intersection de ses $|N|$ i - desincrémenté (resp, i -incrémenté) env-

loppant pour tout $i \in N$.

(c) L est l'intersection de sous-ensembles i -desincrémenté (resp, i -incrémenté) de S pour tout $i \in N$.

4. Si N est infini, les implications (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a) et leurs preuves restent néanmoins valides. L'implication (a) \Rightarrow (b) et sa preuve reste valide si L est conditionnellement inf (resp, sup) sous complet, c-à-d pour chaque sous-ensemble K non-vidé de L , est borné majoré (resp, minoré) dans S , $\wedge K$ (resp, $\vee K$) existe dans S et il est dans L .

La représentation de inf (resp, sup) sous-treillis dans le théorème 1, (a) \Rightarrow (b) et sa preuve reste valide sous la faible hypothèse que les S_K sont inf (resp, sup) sous-treillis car la classe des inf (resp, sup) sous-treillis est fermées sous les projections.

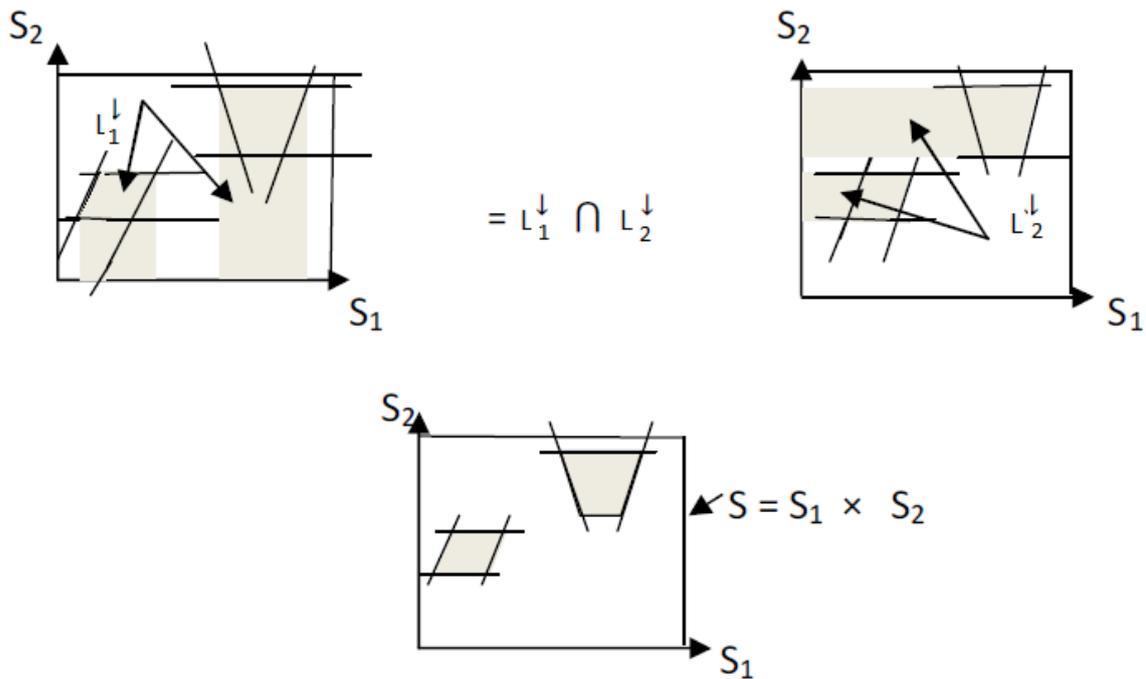


FIGURE 3.1 – Représentation d'un inf-sous-ttreillis L d'un produit de deux chaines

Preuve.

Par dualité, il suffit de prouver le résultat sans parenthèses.

(a) \Rightarrow (b) : D'après L_i^{\downarrow} est un enveloppe de L , $L \subseteq \bigcap_N L_i^{\downarrow}$. Si $s \in \bigcap_N L_i^{\downarrow}$, il existe $r^i \in L$ avec $r^i \geq s$ et $r^i_i = s_i$ pour tout $i \in N$.

Donc $s = \wedge_N r^i \in L$ car L est inf-sous-treillis de S .

(b) \Rightarrow (c) : Les treillis desincrémenté (décroissant) de L sont des i -sous-ensemble desincrémenté(décroissants) de S pour tout $i \in N$.

(c) \Rightarrow (a) : Puisque les intersections des inf-sous treillis sont des inf-sous treillis , il suffit de montrer que chaque i-sous ensemble décroissant (desincrémenté) L de S est un inf-sous-treillis. A cette fin, supposons $r, s \in L$. Nous pouvons supposer que $r_i \leq s_i$ puisque S est une chaine. Alors $r \wedge s \in S$, $r \wedge s \leq r$ et $(r \wedge s)_i = r_i$. Ainsi parce que L est i-desincrémenté (décroissant), $r \wedge s \in L$.

Les enveloppes 1- et 2- desincrémenté(décroissant) L_1^\downarrow et L_2^\downarrow respectivement d'un inf-sous-treillis L d'un produit $S = S_1 \times S_2$ de deux chaines sont illustrés dans . Observons que le théorème 1 affirme, $L = L_1^\downarrow \cap L_2^\downarrow$.

3.3.1 Représentation de sous-demi-treillis enveloppant des sous-ensemble de produits finis de chaines

Pour chaque sous-ensemble L d'un produit S de $|N|$ -chaine avec $|N|$ est fini, soit L^\wedge (resp, (L^\vee) le inf-sous-treillis (resp, sup-sous-treillis) enveloppant de L : bien sur L^\wedge (resp, (L^\vee) est l'ensemble de tout les inf (resp, sup) finis des éléments de L . Le résultat suivant exprime à la fois \wedge et \vee des sous-treillis enveloppant de L en terme de leurs i-décroissant (desincrémenté) et i-croissant (incrémenté) enveloppant.

Corollaire 3.3. (*Représentation des sous-treillis enveloppant des sous-ensemble des produits finis de chaines*)

Si S est un sous-ensemble d'un produit fini

$S = X_K \times S_K$ de chaines, alors le inf-sous-treillis (resp, sup-sous-treillis) de L est l'intersection de leurs i-décroissant enveloppes (resp, i-croissant) pour tout $i \in N$.

Preuve.

Par dualité, il suffit juste le résultat sans parenthèses. D'après le théorème 1 de représentation des sous-demi-treillis, $\bigcap_N L_i^\downarrow \subseteq \bigcap_N (L^\wedge)_i^\downarrow = L^\wedge \subseteq_N L_i^\downarrow$ est donc , l'inégalité est vérifiée dans N .

3.3.2 La Représentation irréductible de sous-demi-treillis

Nous étendrons maintenant le théorème 1 de représentation des sous-demi-treillis par le développement des représentations irréductibles et la caractérisation de ces éléments. Afin de fournir la finitude et la redondance

(fini) de la représentation. La clé pour le développement de la représentation irréductible des sous-demi-treillis est d'observer en premier temps que L est i-desincrémenté (décroissant) ssi son complément L^c est i-incrémenté (croissant). Et donc, le théorème 1 implique que inf (resp, sup) sous-treillis des produits finis de chaines ont des représentations dans inf (resp, sup) sous-treillis dont les compléments sont des sup (resp, inf) sous-treillis.

Théorème 3.5. *(Représentation irréductible des sous-demi-treillis des produits finis des chaines).*

Chaque inf (resp, sup) sous-treillis d'un produit fini $S = S_N \times S_K$ de chaines a une représentation comme une intersection des ensembles, chacun d'eux est le complément d'un i-croissant (resp, i-décroissant) enveloppant d'un ensemble singleton S de $i \in N$ et $s \in S$ est irréductible, et ça ssi pour $s = \vee S$ (resp, $s = \wedge S$) où $S_i \neq \vee S_i$ (resp, $S_i \neq \wedge S_i$)

Preuve.

Par dualité, il suffit de montrer le résultat pour le inf-sous-treillis L de S . Nous exigeons d'abord pour chaque $s \in S \setminus L$, il existe un $i \in N$ tel que $\{s\}_i^\uparrow \subseteq S \setminus L$ et soit $s = \vee S$ où $s_i \neq \vee S_i$, pour voir plus clair se réfère au théorème qui traite la représentation de sous-demi-treillis sachant qu'il existe un $J \in N$ tel que $s \ni L$. Puisque L_J^\downarrow est J -décroissant, $L_J^{\downarrow c}$ est J -croissant, comme $\{s\}_J^\uparrow \subseteq L_J^{\downarrow c} \subseteq S \setminus L$ si $s = \vee S$ où $s_J \neq \vee S_J$ l'exigence est prouvée en mettant $J = i$. Dans le cas contraire, $s_J = \vee S_J$ et il existe $i \neq J$ tel que $s_i \neq \vee S_i$, alors $\{s\}_i^\uparrow \subseteq \{s\}_j^\uparrow \subseteq S \setminus L$. L'exigence établie.

Il reste à justifier la caractéristique exigée d'irréductible $\{s\}_i^{\uparrow c}$, si $s = \vee S$, alors $\{s\}_i^{\uparrow c} = S \setminus \{\vee S\}$ est trivialement irréductible, si $s_i \neq \vee S_i$, alors $\{s\}_i^{\uparrow c}$ est ainsi irréductible. Pour montrer ça, il suffit de montrer que chaque inf-sous-treillis $P \supset \{s\}_i^{\uparrow c}$ ainsi contient $s \in \{s\}_i^{\uparrow c}$.

Maintenant, il existe un $r \in P \setminus \{s\}_i^{\uparrow c}$, comme $r_i = s_i$ et $r \geq s$. Choisir $t \in S$ tel que $s_i < t_i$, qui est possible parce que $s_i \neq \vee S_i$ et $t_J = S_J$ pour $J \neq i$. Alors $t \in \{s\}_i^{\uparrow c} \subset P$ et comme $s = r \wedge t \in P$. Si $s_i = \vee S_i$ et $s_J \neq \vee S_J$ pour $J \neq i$, alors $\{s\}_i^{\uparrow c}$ est réductible.

Pour choisir $r \in S$ de sorte que $s_J < r_J$, dont est possible car $s_J \neq \vee S_J$, et $r_k = s_k$ pour $k \neq J$. Alors $P = \{S\}_i^{\uparrow c} \cup \{r\}$ et $Q = \{s\}_i^{\uparrow c} \cup \{s\}$ sont inf-sous-treillis de S qui sont distincts de $\{s\}_i^{\uparrow c}$ et $\{s\}_i^{\uparrow c} = P \cap Q$.

Nous remarquons que $\vee S_i$ (resp, $\wedge S_i$) n'existe pas, alors $\{s\}_i^{\uparrow c}$ (resp, $\{s\}_i^{\downarrow c}$) est inf (resp, sup) sous-treillis irréductible pour chaque $s \in S$ puisque c'est trivialement $s_i \neq \vee S_i$ (resp, $s_i \neq \wedge S_i$).

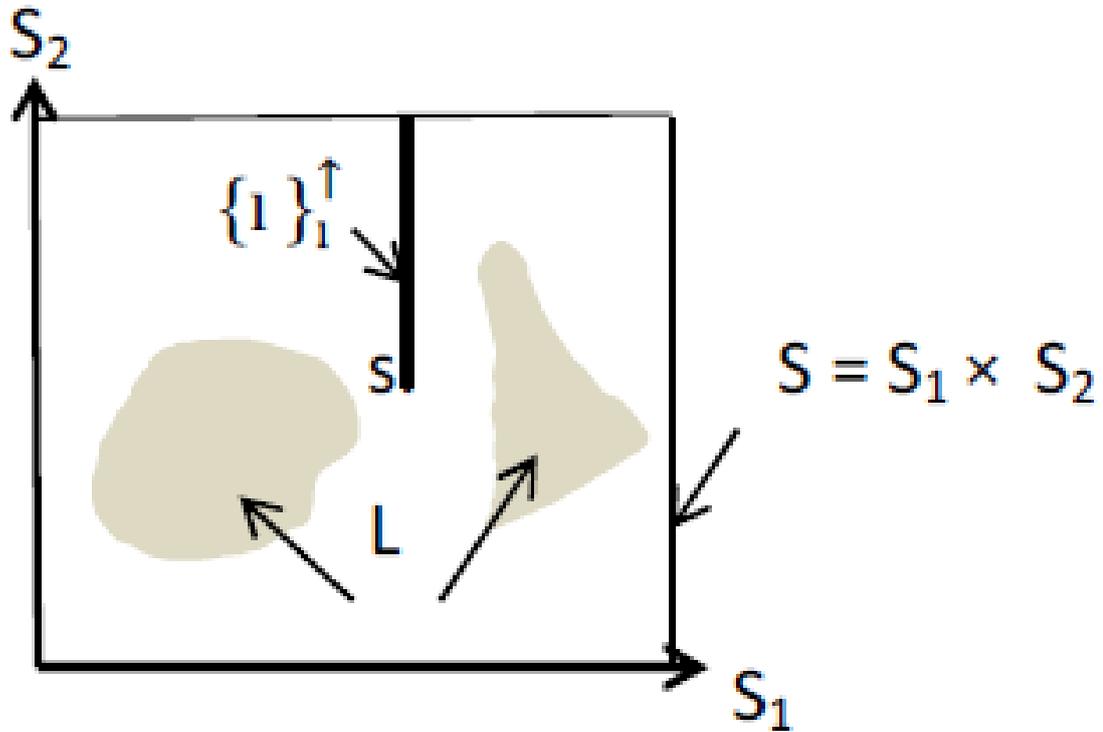


FIGURE 3.2 – Element d'une représentation irréductible d'un sous-treillis L d'un produit de deux chaînes

Dans la figure précédente, Nous illustrons un élément de la représentation irréductible du théorème précédent pour le inf sous-treillis L d'un produit $S = S_1 \times S_2$ de deux chaînes données en figure 1. Notons que I-incrémenté enveloppant (I-croissant) $\{s\}_I^{\uparrow}$ de l'élément $s \in S \setminus L$ donné il est contenu dans $S \setminus L$, comme le complément de $\{s\}_I^{\uparrow}$ contient L mais ne contient pas s et comme il sépare L de s. En revanche, le complément se $\{s\}_2^{\uparrow}$ ne contient pas L.

Il a observer que le théorème précédent assure que chaque inf-sous-treillis S peut être exprimé comme une intersection des ensembles, dont chacun est un ensemble de $r \in S$ qui ne satisfait pas à la fois les deux inégalités suivantes :

$$r \geq s \quad \text{et} \quad r_i \leq s_i \tag{3}$$

pour $s \in S$ fixé et $i \in N$ une formulation équivalente est que r satisfait au moins une des $|N|+1$ (stricte) inégalités :

$$r_J < s_J \quad \text{pour } J \in N \quad \text{ou} \quad r_i > s_i.$$

formulations analogues pour sup-sous-treillis peut être trouver en inversant à la fois ces inégalités.

En d'autre terme, le théorème précédent implique que chaque inf (resp, sup) sous-treillis d'un produit fini des chaines a une représentation irréductible de coordonnées libre comme une intersection des ensembles de $D^c \cup I^c$ où D est l'idéal dual principal (resp, dual principal) et I est un idéal primal (resp, *idalprincipal*)⁸.

3.4 Représentation et reconnaissance des sous-demi-treillis polyédraux

Par la suite, nous appliquons le théorème précédent des sous-treillis pour donner des représentations irréductibles des éléments polyédraux d'un treillis de inf (resp, sup) demi-treillis convexe fermé de R^n .

Théorème 3.6. (*Les représentations irréductibles des sous-demi treillis polyédraux comme polyèdre de substitution de pré-leontief dual*)

Les points suivants sont équivalents :

- (a) L est inf (resp, sup) sous-treillis polyédral de R
- (b) $L = \{ s \in R^n, As \leq b \}$ Pour une matrice (Ab) avec $-A$ (resp A) ayant une transposée pré-leontief.
- (c) L est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés, chaque'un d'eux est un élément irréductible d'un treillis d'un inf (resp, sup) sous-treillis convexe fermé de R^n .

Preuve.

Par dualité, il suffit de montrer le résultat suivant

- (a) \Rightarrow (c), puisque L est un polyèdre, il s'ensuit de (1) que L_i^\downarrow est la projection d'un ensemble polyédral et donc lui même polyédral. Donc, il existe

une matrice $(A^i b^i)$ avec L_i^\downarrow est i-desincrémenté, chaque colonne de A^i , sauf i^{me} est positif. maintenant, soit $A = (A_i)$ et $b = (b_i)$. Par le théorème(1) des représentations des sous-demi-treillis, $L = \bigcap_i^n L_i^\downarrow = \{s \in R^n : As \leq b\}$ et $-A$ a une transposée pré-leontief.

(b) \Rightarrow (c) : soit $(a_J b_J)$ noté la j^{me} ligne de $(A b)$ et faire $H_J = \{s \in R^n : a_J s \leq b_J\}$. de(2), il existe un i, dépendant de J, tel que chaque élément de a_J , sauf i est non négatif. Donc, H_J est i-desincrémenté et ainsi par le théorème (1), est un inf-sous treillis de R^n . Autrement, le demi espace H_J est ainsi irréductible, puisque c'est les espaces fermés dans le treillis des sous-ensembles de R^n . Donc, puisque $L = \bigcap_J H_J$ (c) vérifié.

(c) \Rightarrow (a)(un nombre fini) d'intersection de sous-treillis polyédraux sont des inf-sous-treillis polyédraux.

Un devoir de souligner que le théorème 3 n'affirme pas que chaque demi-espace dans chaque représentation irréductible non redondante d'un inf(resp, sup) sous-treillis, mais il y'a d'autre représentations simples (simplement représentées)

10-Ailleurs, nous établissons des représentations similaires (mais dénombrables) pour éléments arbitraires des treillis des inf-sous-treillis convexe fermé, sup-sous-treillis, et sous-treillis .

La preuve du théorème précédent suggère une méthode constructive pour trouver une représentation finie d'un inf(resp, sup) sous-treillis L polyédral dont des demi-espaces fermés, dans chacun est un inf (resp, sup) sous-treillis. La méthode consiste à utiliser (1) (resp, (2)) pour calculer la projection L_i^\downarrow (resp, L_i^\uparrow) dite, la procédure d'élimination Fourier-Motzkin. Comme la preuve que (a) implique (b) du théorème(3), montre, ce qui produit la représentation désirées de L comme un système de substitution pré-leontief dual comme on peut le voir a partir de l'exemple ci-dessus, la représentation donnée dans le théorème (3) n'est pas généralement unique. Cependant, comme nous montrons maintenant, la représentation est unique ou le polyèdre a plein dimension. Pour voir ceci, nous avons besoin d'une définition, un demi espace fermé H dans R^n est dit tangent pour un sous ensemble convexe fermé L à un point $s \in L$ si $L \subseteq H$ et si l'hyperplan borné H est l'unique hyperplan de support pour L à s. Il est connu que si la dimension d'un polyèdre L dans R^n est n, alors L a une unique représentation irréductible non redondante, à

savoir leurs demi espaces tangent.

si L est un demi espace fermé $\{s \in R^n, as \leq b\}$ est un inf (resp, sup) sous-treillis de R^n . Alors chaque représentation non redondante finie de L dans les demi-espaces fermé consiste seulement aux demi espaces tangents fermés L lui même. Donc par théorème 3, -a (resp a) a au plus un élément positif.

Corollaire 3.4. *(l'unique représentation irréductible non redondante des sous-demi-treillis polyédraux de plein dimension)*

Si L est un inf (resp, sup) sous-treillis polyédraux de R^n , Alors chaque demi espace tangent fermé de L est inf (resp, sup) sous-treillis de R^n . Si la dimension de L est n, alors L a une unique représentation irréductible non redondante à savoir, ses demi espaces fermé tangents.

Preuve. Du théorème 3 on trouve que L a une représentation irréductible non redondante finie dans les demi espaces finis qui sont à la fois inf (resp, sup) sous-treillis. En outre, cette représentation doit contenir tous les demi espaces fermés. Également, si la dimension de L est n, cette représentation ne contient que les demi espaces tangent fermés.

Caractérisation des sous-demi-treillis polyédraux par les (inéquations) inégalités linéaires

Le résultat suivant est caractérisé lorsqu'un ensemble polyédral est un sous-demi treillis par les moyens des inégalités linéaires.

Théorème 3.7. *(Caractérisation des sous-demi treillis polyédraux par les inégalités linéaires)*

Si $L = \{s \in R^n : As \leq b\}$ (resp, $\{s \in R^n : -As \leq b\}$) est un polyèdre non-vide. Pour une matrice $(A \ b)$, $m \times (n+1)$, les points suivants sont équivalent :

- (a) L est un inf (resp, sup) sous-treillis de R^n*
- (b) il existe $(m \times m)$ matrice λ^i et $(m \times n)$ matrices $u^i = (u^i_{jk})$ pour $i=1, \dots, n$ qui satisfait les inégalités suivante :*

$$\begin{aligned}
 -u^i + \lambda^i A &= 0, \quad i=1, \dots, n \\
 \sum_1^n u^I &= A \\
 \sum_1^n \lambda^I b &\leq b \\
 u^i_{jk} \geq 0, \lambda^i &\geq 0 \quad \text{pour tout } i, j, k \text{ avec } i \neq k
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Preuve. Par dualité, il suffit de montrer juste le résultat qui est entre les parenthèses et par le théorème(1) des représentations des sous-demi-treillis L est inf-sous-treillis de R^n si et seulement si $L \supseteq \cap_i^n L_i^\downarrow$ c'est-à-dire, si et seulement si chaque sequence $s, r^1, \dots, r^n \in R^n$ qui satisfait le système :

$$\begin{aligned} Ar^i &\leq b \\ r^i &\geq s \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned} \tag{5}$$

$$r_i^i = s_i$$

La propriété que $As \leq b.$, est verifées uniquement dans le cas $1 \leq J \leq n$, le maximum de (A b).

Par le théorème de dualité de programmation linéaire, ceci est le cas si et seulement si le dual de ce programme linéaire possède une solution réalisable dont la fonction objectif ne repasse pas b_J pour chaque J, le système (4) exactement ça.

Représentation polynomiale(En temps polynomial) des sous-demi-treillis polyédraux :

Une immédiate implication du théorème (6) est le suivant :

Corollaire 3.5. *(Reconnaissance polynomiale des sous-demi-treillis des sous-demi-treillis polyédraux)*

Il existe un algorithme polynomial pour tester si un polyèdre est un inf(resp, sup) sous-treillis.

Preuve.

Cela est la suite du théorème(6), en fait que la taille du système (4) des inégalités linéaires est polynomial dans qui de système $As \leq b$, et le fait qu'il existe d'algorithme pour la résolution des systèmes des inégalités linéaire qui s'exécutent en temps polynomial qui est polynomial de la taille de ceci, par exemple ceux de Khachiyan et Karmarkar.

D'après le corollaire 5 si le polyèdre L est de dimension n alors L n'est pas un inf-sous-treillis. Si les inégalités double ne sont pas redondantes et le polyèdre L est de dimension inférieure a n, alors vérifier si ou pas les inégalités $As \leq b$ sont impliquées par les inégalités (5). Ceci est le cas si et seulement si les inégalité (4) ont une solution, ou par le théorème 6, si et seulement si L est un inf sous-treillis.

Dans chaque des cas au dessus existence d'une solution a un système des inégalités peut être vérifié en utilisant des algorithmes pour la résolution des programmes linéaires, c-à-d la méthode du simplexe. Ainsi on peut vérifier si L est un sup-sous-treillis en remplaçant A par -A en le développement au dessus.

3.5 Représentation des sous-treillis

Soit $S = \times_N S_K$ un produit des treillis $S_K, k \in N$. Chaque ensemble J-incrémenté de S est évidemment un cylindre avec une base dans $S_i \times S_J$ pour $i \neq J$ et une base dans S_i pour $i=J$. Puis, pour chaque i,J fixes $i, J \in N$, l'ensemble des sous ensemble i-desincrémenté, J-incrémenté de S, chaque sous-ensemble L de S à un i-desincrémenté, J-incrémenté enveloppant, notés par $L_{i,J}^{\uparrow\downarrow}$. Évidemment, pour chaque $i, J \in N$ $L_{i,J}^{\downarrow\uparrow} \equiv L_{i,J}^{\uparrow\downarrow}$ à une représentation interne comme une projection d'un sous ensemble de $L \times S$ sur S.

$$L_{i,J}^{\downarrow\uparrow} = \Pi_s \{ (r, s) \in L \times S : r_i \leq s_i, r_i \geq s_J \} \tag{6}$$

Le résultat suivant montre que le i-desincrémenté et J-incrémenté enveloppe peuvent être fermés en deux façons, soit prenant le J-incrémenté(h) après le i-desincrémenté(h) ou i-desincrémenté enveloppant après J-incrémenté enveloppant.

Lemme 3.3. *(i-desincrémenté, J-incrémenté enveloppant)*

Si L est un sous-ensemble d'un produit $S = \times_N S_K$ des treillis, alors $(L_i^\downarrow)_J^\uparrow = L_{i,J}^{\downarrow\uparrow} = (L_J^\uparrow)_i^\downarrow$ pour tout $i, J \in N$.

Preuve.

$$\begin{aligned} (L_i^\downarrow)_J^\uparrow &= \Pi_T \{ (s, t) \in L_i^\downarrow \times T : s \leq t, s_J = t_J \} \\ \Pi_T \{ (r, s, t) \in L \times S \times T : s \leq r, s_i = r_i, s \leq t, s_J \leq t_J \} \\ \Pi_T \{ (r, t) \in L \times T : r_i \leq t_i, r_J \geq t_J \} &= L_{i,J}^{\downarrow\uparrow} \end{aligned}$$

Théorème 3.8. *(Représentation des sous-treillis de produits de chaines)*

Les propriétés suivantes d'un sous-ensemble L d'un produit fini¹² $S = \times_N S_K$ des chaines¹³ sont équivalentes :

- (a) L est un sous-treillis de S.
- (b) L est l'intersection de $|N|^2$ i-desincrémenté J-incrémenté enveloppant pour tout $i, J \in N$

(c) L est l'intersection des sous-ensemble i -desincrémenté J -incrémenté de S pour tout $i, J \in N$.

Preuve.

(a) \Rightarrow (b) : par (1), L_i^\downarrow est la projection d'un sous-treillis d'un treillis $L \times S$ sur S et il est sous-treillis de S . Donc, par le théorème 1 des Représentation des sous-treillis et lemme 8, $L = \bigcap_i L_i^\downarrow = \bigcap_i [\bigcap_J (L_i^\downarrow)_J^\uparrow] = \bigcap_{iJ} L_{iJ}^{\downarrow\uparrow}$.

(b) \Rightarrow (c) : les i -desincrémenté, J -incrémenté enveloppant de L sont i -desincrémentés J -incrémentés sous-ensembles de S pour tout i, J .

(c) \Rightarrow (a) : par le théorème (1) de la représentation des sous-demi-treillis i -desincrémenté, J -incrémenté sous-ensembles sont des sous-treillis et les intersections des sous-treillis sont des sous-treillis.

Nous illustrons la représentation dans le théorème 9 pour le sous-treillis L d'un produit $S = S_1 \times S_2$ de deux chaines données dans la figure 3. Nous exhibons le i -incrémenté J -desincrémenté enveloppant $L_{iJ}^{\downarrow\uparrow}$ de L pour chaque $i, J = 1, 2$. On peut affirmer via le théorème 9 la formule suivante, $L = L_{11}^{\downarrow\uparrow} \cap L_{22}^{\downarrow\uparrow} \cap L_{12}^{\downarrow\uparrow} \cap L_{21}^{\downarrow\uparrow}$
 Représentation des sous-treillis d'un produit finies des chaines de leurs projection

Il est possible de donner des représentations de sous-treillis de S en leurs projections. les deux résultats suivants accomplissent cette tache.

Corollaire 3.6. (*Représentation des projections des sous-treillis des produit finis des chaines*)

Si L est un sous-treillis d'un produit fini $S = \times_N S_K$ des chaines et $Q \subseteq N$, alors le cylindre est la base de la projection de L sur $\times_Q S_K$ est $\bigcap_{iJ \in Q} L_{iJ}^{\downarrow\uparrow}$.

Preuve.

Soit $\Pi_Q K$ une projection de $K \subseteq S$ sur $\times_Q S_K$. Puis chaque sous ensemble i -desincrémenté J -incrémenté de S avec $i, J \in Q$ est un cylindre avec la base dans $X_Q S_K$, il s'ensuit que $\Pi_Q L_{iJ}^{\downarrow\uparrow}$ est i -desincrémenté J -incrémenté enveloppant de sous-treillis $\Pi_Q L$ de $\times_Q S_K$. Donc, par le théorème 9 de représentation de sous-treillis, $\Pi_Q^{-1} \Pi_Q L = \Pi_Q^{-1} (\bigcap_{iJ \in Q} \Pi_Q L_{iJ}^{\downarrow\uparrow}) = \bigcap_{iJ \in Q} L_{iJ}^{\downarrow\uparrow}$

Le résultat suivant été découvert indépendamment par G.M.Bergman en 1967 et par D.M.Taphis en 1967.

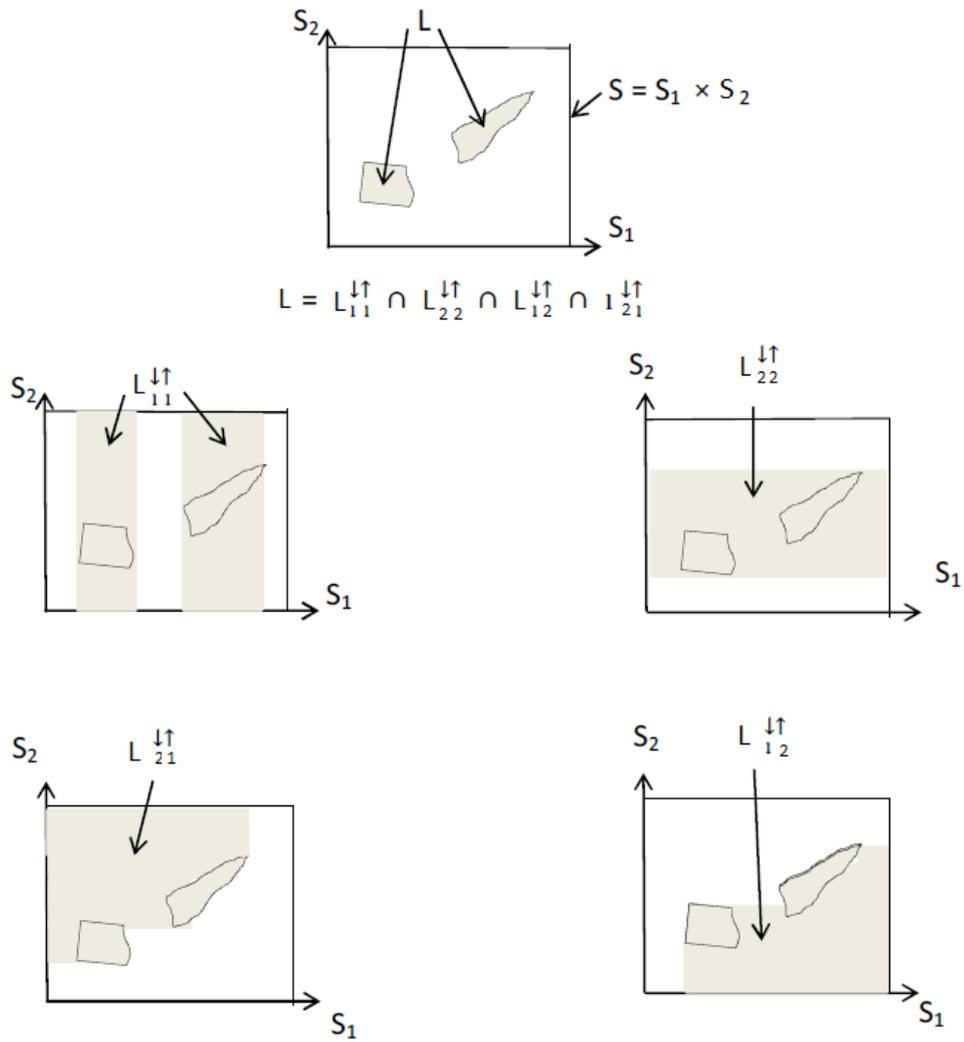


FIGURE 3.3 – Représentation des sous-treillis L d'un produit $S_1 \times S_2$ de deux chaînes

Corollaire 3.7. (*Représentation des sous-treillis des produits finis des chaînes dans les cylindres dont les bases sont des projections à deux dimensions*).
 si L est un sous-treillis d'un produit fini $S = X_N S_K$ des chaînes, Alors L est l'intersection dont les bases sont les projections de L sur $S_i \times S_j$ pour tout $i, j \in N, i \neq j$.

Preuve.

Ceci est immédiat du théorème précédent de la représentation des sous-treillis et le corollaire précédent, ou Q les régions au-dessus de la paire ij avec $i \neq j$.

Représentation des sous-treillis enveloppant de sous-ensembles des produits finis des chaines

Pour chaque sous ensemble L d'un produit fini $S = \times_N S_K$ des chaines. Soit $L^{\wedge \vee}$ est le sous-treillis enveloppant de L. Clairement, $L^{\wedge \vee}$ est l'ensemble de inf et sups des éléments de L. Une application simple de distributivité montre que le sous-treillis enveloppant peut être généré séquentiellement, ça veut dire $(L^{\wedge})^{\vee} = L^{\wedge \wedge} = (L^{\vee})^{\wedge}$.

Corollaire 3.8. (*Représentation des sous-treillis enveloppant des sous-ensembles des produits finis des chaines*).

Si L est un sous-ensemble d'un produit fini $S = \times_N S_K$ des chaines, alors le sous treillis enveloppant de L est l'intersection de leurs i-desincrémenté, j-incrémenté enveloppant pour tout $i, j \in N$.

Théorème 3.9. (*représentation irréductible des sous treillis des produits fini des chaines*)

Chaque sous treillis non-vide d'un produit fini $S = \times_N S_K$ des chaines à une représentation comme une intersection des ensembles, dont chacune est le complément d'un i-incrémenté j-desincrémenté enveloppant d'un ensemble singleton $\{s\}$ pour certains $i, j \in N$ et $s \in S$ est non réductible (irréductible)¹⁴, le dernier c'est le cas si seulement si, $s_i \neq \vee S_i$ et $s_j \neq \wedge S_j$ où (s_i, s_j) est l'élément petit ou grand de $S_i \times S_j$.

Preuve.

Observons que, si (a) ou (b) n'est pas vérifié pour certains $i, j \in N$ et $s \in S$, alors soit (c) $s_i = \vee S_i$ et $s_j \neq \vee S_j$ ou (d) $s_i \neq \wedge S_i$ et $s_j = \wedge S_j$. Ainsi, $\{s\}_{ij}^{\uparrow \downarrow c}$ pour tout $i, j \in N$ et $S \in s$. Maintenant L est un sous-treillis non-vide de S.

Nous exigeons d'abord, que pour chaque $s \in S \setminus L$, il existe $i, j \in N$ pour que $\{s\}_{ij}^{\uparrow \downarrow c}$ contient L, et soit (a) ou (b) vérifié dual. pour cette fin, constatons du théorème 9 des représentations des sous-treillis qu'il existe $k, l \in N$ tel que $L_{kl}^{\downarrow \uparrow}$. puisque $L_{kl}^{\downarrow \uparrow}$ est k-desincrémenté l-incrémenté, $(L_{kl}^{\uparrow \downarrow c})$ est k-incrémenté l-desincrémenté, comme $\{s\}_{kl}^{\uparrow \downarrow} \subseteq L_{kl}^{\uparrow \downarrow c} \subseteq S \setminus L$. puisque $\{s\}_{kl}^{\downarrow \uparrow c}$ contient L. Maintenant, pour $i=k$ et $j=l$, il s'ensuit que une des (a),(b),(c)ou(d) est vérifiée. si (c) vérifiée alors, $\{s\}_{kl}^{\downarrow \uparrow c} \supseteq \{s\}_{kl}^{\downarrow \uparrow c} \supseteq L$, et pour $i=j=l$, nous voyons que (a) ou (b) vérifie. Également, si (d) vérifié, alors $\{s\}_{kl}^{\downarrow \uparrow c} \supseteq \{s\}_{kl}^{\downarrow \uparrow c} \supseteq L$, et pour $i=j=k$, Nous voyons ainsi que (a) ou (b) vérifie qui satisfait l'exigence.

Il reste a montré que $\{s\}_{ij}^{\downarrow\uparrow c}$ est irréductible si (a) ou (b) vérifie et réductible si (c) ou (d) vérifier.

En fin, si (a) est vérifie, alors puisque $s \in \{s\}_{ij}^{\downarrow\uparrow c}$, $\{s\}_{ij}^{\uparrow\downarrow c}$ est irréductible si chaque sous-treillis $p \supset \{s\}_{ij}^{\downarrow\uparrow c}$ contient s . pour voir ça $s \in p$, observons d'abord qu'il existe un $r \in p \cap \{s\}_{ij}^{\downarrow\uparrow c}$, alors $r_i \leq s_i$ et $r_j \geq s_j$. maintenant il existe $t_i > s_i$ dans S_i et $u_j < s_j$ dans S_j . Mettant $t_k = s_k$ pour $k \neq i$, $u_k = s_k$ pour $k \neq j$, $t=(t_l)$, et $u=(u_l)$. alors $t, u \in \{s\}_{ij}^{\downarrow\uparrow c} \subset p$, comme $s = (r \wedge t) \vee u \in p$.

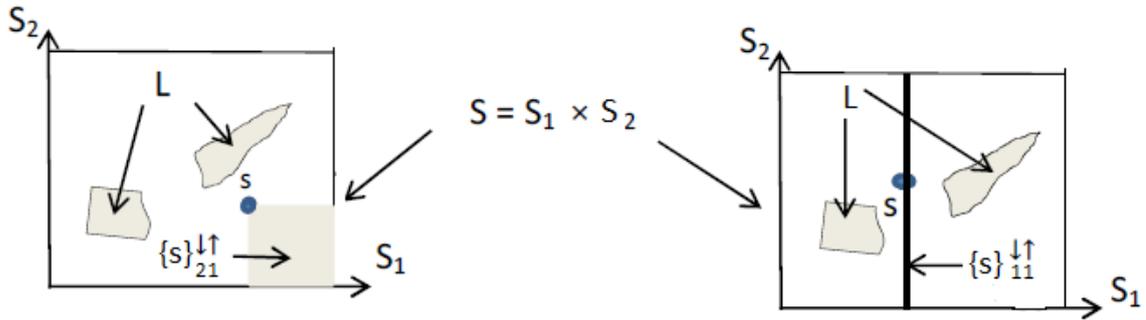


FIGURE 3.4 – élément de la représentation irréductible d'un sous-treillis L d'un produit $S_1 \times S_2$ de deux chaines

Si (b) est vérifie, alors soit $(s_i, s_j) = (\wedge s_i, \wedge s_j)$ ou $(s_i, s_j) = (\vee s_i, \vee s_j)$. Dont la preuve précédente nous montrons que $\{s\}_{ij}^{\downarrow\uparrow c}$ est irréductible par absurde. Donc supposons que $\{s\}_{ij}^{\downarrow\uparrow c}$ est réductible, ou $\{s\}_{ij}^{\downarrow\uparrow c} = P \cap Q$ pour les sous-treillis P,Q distinct de $\{s\}_{ij}^{\downarrow\uparrow c}$.

alors il existe $r \in P \cap \{s\}_{ij}^{\downarrow\uparrow c}$ et $t \in Q \cap \{s\}_{ij}^{\downarrow\uparrow c}$. donc $r_i = t_i = s_i$ et $r_j, t_j \geq s_j$, mettons $u_k = r_k \wedge t_k$ pour $k \neq i$, et choisissons $u_i > s_i$ dans S_i . le dernier est possible, car sinon, ou $\{s\}_{ij}^{\downarrow\uparrow c} = Q \subset L \subseteq \{s\}_{ij}^{\downarrow\uparrow c}$, qui est contradictoire.

maintenant $u_j \geq s_j$, $u=(u_l) \in \{s\}_{ij}^{\downarrow\uparrow c} = P \cap Q$ et $r = (r_1) = r \wedge u = t \wedge u \subset P \wedge Q = \{s\}_{ij}^{\downarrow\uparrow c}$
 $= \{v \in s : v_i > s_i\}$ contradiction, le faite que $r_i = s_i$. si a la place, $(s_i, s_j) = (\vee s_i, \vee s_j)$, alors $\{s\}_{ij}^{\downarrow\uparrow c}$ est irréductible par dualité, en inter-changeons les rôles de i et j en appliquant dans ce qui suit en le montrant. Si (c) vérifie, il existe un $r_j > s_j$ dans S_j . Alors $P = \{t \in S : t_j \neq r_j\}$ et $Q = \{t \in S : t_j < s_j \text{ out } j = r_j\}$ sont des sous-treillis distincts de $\{s\}_{kl}^{\downarrow\uparrow c}$, et $\{s\}_{kl}^{\uparrow\downarrow c} = P \cap Q$. si a la place (d) vérifié, il existe un $r_i < s_i$ dans S_i . Alors $P = \{t \in S : t_i \neq r_i\}$ et $Q = \{t \in S \text{ out } i = r_i\}$ sont des sous treillis distinct de $\{s\}_{ij}^{\downarrow\uparrow c}$ est réductible

Nous remarquons que si $\vee S_i$ et $\wedge S_j$ n'existent pas alors $\{s\}_{ij}^{\downarrow\uparrow c}$ est un sous-treillis irréductible pour chaque $s \in S$ alors trivialement $s_i \neq \vee S_i$ et $s_j \neq \wedge S_j$.

Dans la figure 4 nous illustrons deux éléments de la représentation irréductible du théorème 9 pour le sous-treillis L d'un produit $S_1 \times S_2$ de deux chaînes données en figure 3. Observons que le 2-incrémenté 1-desincrémenté enveloppant de l'élément $s \in S \setminus L$ dans le côté gauche de la figure est contenu dans $S \setminus L$, comme le complément de $\{s\}_{21}^{\downarrow\uparrow}$ contient L mais non S et comme se sépare S de L. également le 1-incrémenté 2-desincrémenté enveloppant de l'élément $s \in S \setminus L$ dans le côté gauche de la figure comme se sépare L de S. cependant il est évident des deux côtés gauche et droite de la figure que le complément si aucun autre i-incrémenté j-desincrémenté enveloppant de S contient L dans tout les cas. Observons que le théorème 9 assure que chaque sous-treillis non vide de S peut être exprimé comme une intersection des ensembles, dont chacun est un ensemble de $r \in S$ et ne satisfait pas à la fois ces deux égalités :

$$r_j \geq s_j \quad \text{et} \quad r_i \leq s_j$$

Pour certains $s \in S$ fixés et $i, j \in N$. une formulation équivalente pour cette condition est que r satisfait au moins une de ces conditions d'égalités strictes :

$$r_i > s_i \quad \text{ou} \quad r_j < s_j \tag{7}$$

Cependant, le théorème 9 implique que chaque sous treillis d'un produit fini des chaînes à une présentation sous coordonnées libres comme une intersection des ensembles de la forme $D \cup I$ ou D est dual du primal idéal et I est un primal idéal. Pour voir ceci, soit D le premier des ensembles en (7) et I le second. ceci est le résultat de Hashimoto car un produit des chaînes est un treillis distributif.

A la fin, notons que le théorème 09 implique que l'affirmation principale du théorème 05, car les compléments des i-incrémenté j-des-incrémenté enveloppants des ensembles singleton sont des i-incrémentés j-incrémentés.

3.5.1 Représentation et Reconnaissance des treillis Polyédraux

Nous appliquons maintenant le théorème 04 de la représentation des sous-treillis pour donner des représentations irréductibles des éléments polyédraux des treillis des sous-treillis convexes fermés de R^n . Pour cela, rappelons qu'une matrice d'incidence nœud-arc généralisée est une matrice dont chaque colonne au plus un élément positif et un élément négatif.

Théorème 3.10. *(Représentations irréductible de sous-treillis polyédraux comme un dual généralisé de polyèdre de réseau flot)*
 les propositions suivantes sont équivalents :

- (a) L est un sous treillis polyédral de R^n .
- (b) $L = \{s \in R^n : As \leq b\}$ pour la matrice $(A \ b)$ avec A la transposée de la matrice d'incidence nœud-arc généralisée.
- (c) L est l'intersection d'un nombre fini de demi espace fermée, dont chacun est un élément irréductible des sous treillis convexes fermés de R^n .

Preuve.

(a) \Rightarrow (b) : puisque L est polyédral, $L_{ij}^{\downarrow\uparrow}$ est polyédral car par (6) il est une projection d'un ensemble polyédral. Donc il existe une matrice $(A^{ij}b^{ij})$ avec $L_{ij}^{\downarrow\uparrow} = \{s \in R^n; A^{ij}s \leq b^{ij}\}$, Puisque $L_{ij}^{\downarrow\uparrow}$ est i-desincrémenté j-incrémenté, la i^{eme} et j^{eme} colonne de A^{ij} sont non positive et non négative respectivement, et les colonnes restantes disparaissent. Soit $A = (A^{ij})$ et $b = (b^{ij})$. Alors par le théorème 04 de représentation des sous treillis, $L = \cap_{ij} L_{ij}^{\downarrow\uparrow} = \{s \in R^n : As \leq b\}$ et A est la transposée de la matrice d'incidence nœud-arc généralisée.

(b) \Rightarrow (c) : soit (a_k, b_k) de note la k^{me} ligne de $(A \ b)$ et mettons $H_k = \{s \in R^n : a_k s \leq b_k\}$. De (b), il existe une paire i, j tel que la i^{eme} et j^{eme} éléments de a_k sont respectivement non positive et non négative, et les éléments restants disparaissent. Donc H_k est i-desincrémenté j-incrémenté, et comme par le théorème 9, est un sous treillis de R^n . En outre, le demi espace H_k est ainsi irréductible, puisque il est comme les demi espaces fermés dans le treillis des sous ensembles convexes fermés de R^n . Donc $L = \cap_k H_k$, (c) vérifie.

(c) \Rightarrow (a) : les intersections finies des sous treillis polyédraux sont des sous treillis polyédraux.

Corollaire 3.9. : (l'unique représentation irréductible non redondante des sous treillis polyédraux de plein dimension)

Si L est un sous treillis polyédral de R^n , alors chaque demi espace tangent fermé de L est un sous treillis de R^n . Si ainsi la dimension de L est n alors L a une unique représentation irréductible non redondante, à savoir leurs demi espace tangent.

Preuve. :

il s'ensuit du théorème 10 que L a une représentation irréductible non redondante finie dans les demi espaces fermés qui sont des sous treillis.

En outre cette représentation doit contenir tous les demi espaces tangents. Si ainsi la dimension de L est n , cette représentation contient seulement les demis espaces tangents fermés.

Corollaire 3.10. (caractérisation de sous demi treillis affines et sous treillis), les points suivant équivalents :

- (a) L est un inf sous treillis affine de R^n .
- (b) L est un sup sous treillis affine de R^n .
- (c) L est sous treillis affine de R^n .
- (d) $L = \{s \in R^n : As = b\}$ pour quelque matrices (Ab) avec A la transposé de la matrice d'incidence arc-nœud généralisée.
- (e) L est l'intersection d'un nombres finis d'hyperplan dont chacun est sous treillis de R^n .

Preuve. :

(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) : par dualité, il suffit de montrer que (a) implique (b). supposons $r, s \in L$ alors $r \wedge s \in L$ car L est un inf sous treillis, puisque L est affine $r \vee s = r + s - r \wedge s \in L$ vérifie (b).

(c) \Rightarrow (d) : par le théorème 10 L a une représentation irréductible non redondante H_1, \dots, H_m avec $H_1 = \{s \in R^n : a_i s \leq b\}$ pour certain vecteur $(a_i b_i)$ avec $a_i \neq 0$ ayant au plus un élément positif, et un négatif pour chaque i .

Supposons $s \in L$ nous montrons que s est la borne de H_i pour chaque i , sinon s est l'intérieure de H_i pour certain i , mais H_i est non redondant, comme il existe un $r \in L$ qui est une borne de H_i . Donc L est affine, $2r - s \in L = \bigcap_j R^n \subseteq H_i$, une contradiction. Puisque L est l'intersection des hyperplan

bornés H_1, \dots, H_m .

(d) \Rightarrow (e) : pour chaque i , la i^{me} ligne $(a_i b_i)$ de (Ab) est négative, et a aux plus un élément positif et un élément positif. Donc les demi espaces $\{s \in R^n : a_i s \leq b_i\}$ et $\{s \in R^n : -a_i s \leq -b_i\}$ sont des sous treillis, comme est leur intersection, hyperplan borné $\{s \in R^n : a_i s = b_i\}$.

(e) \Rightarrow (a) intersection de sous treillis affines sont des sous treillis affines.

Caractérisation des sous-treillis polyédraux par les inégalités linéaires

Le résultat suivant dit qu'un ensemble polyédral est un sous treillis par plusieurs inégalités linéaires.

Théorème 3.11. *:(caractérisation des sous treillis polyédraux par les inégalités linéaires)*

si $L = \{s \in R^n : As \leq b\}$ est un polyèdre non vide pour certaines matrices $m \times (n+1)$ $(A \ b)$, les suivants sont équivalents :

(a) L est un sous treillis de R^n .

(b) Il existe $m \times m$ matrice λ^i et $m \times n$ matrices μ^i , $i=1, \dots, m$ qui satisfait (u), et $m \times m$ matrices $\bar{\lambda}^i$ et $m \times n$ matrices $\bar{\mu}^i$, $i=1, \dots, m$ qui satisfont (4) avec $-A$ remplaçant A .

(c) Il existent $m \times m$ matrices λ^{ij} et m -vecteurs colonnes μ^{ij}, v^{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ qui satisfont les inégalités linéaires.

$$\begin{aligned} \mu^{ij} I_i - v^{ij} I_j + \lambda^{ij} A &= 0, \text{ pour tout } ij \\ \sum_{k,k=1}^n (-\mu^{kl} I_k + v^{kl} I_l) &= A, \\ \sum_{k,k=1}^n \lambda^{kl} b &\leq b \end{aligned}$$

$$\mu^{ij} \leq 0, v_{ij} \geq 0, \lambda^{ij} \geq 0, \text{ tout } ij,$$

(8)

ou I est la i^{me} n -vecteur ligne unitaire pour tout i .

Preuve.

(a) \Rightarrow (b) : appliquant les deux parties de théorème 07

(a) \Rightarrow (c) : par le théorème 08 , de représentation des sous-treillis, L est un sous-treillis de R^n ssi chaque sequence $s, r^{ij} \in R^n, i, j = 1, \dots, n$ qui satisfait

$$\begin{aligned} Ar^{ij} &\leq b \\ r^{ij} &\leq s_i \quad (i, j = 1, \dots, n) \end{aligned} \tag{9}$$

$$r_j^{ij} \geq s_j$$

Ainsi satisfait $A s \leq b$. C'est le cas ssi pour chaque $1 \leq k \leq n$ le maximum de $a_k s$ soumis a (9) ne peut pas dépasser b_k , où $(a_k b_k)$ est la k^{eme} ligne de $(A b)$. par le théorème de dualité de programmation linéaire, c'est le cas ssi le dual de se programme linéaire possède une solution réalisable dont la fonction objectif ne dépasse pas b_k quelque soit k . le système (8) est exprimé en effet. Reconnaissance en temps polynomial des sous treillis polyédraux : Une application immédiate de théorème 11 est le suivant :

Corollaire 3.11. :(*Reconnaissance en temps polynomial des sous treillis polyédraux*)

Il existe un algorithme a temps polynomial pour tester si un polyèdre en R^n est un sous treillis de R^n .

Preuve.

le résultat de théorème 11, le fait que la taille de système (8) des inégalités linéaire est polynomial dans le système $As \leq b$, et le fait qu'il existe d'algorithme pour la résolution des inégalités linéaire qui s'exécutent en temps polynomial.

3.6 Polyèdre Network-flot dual

Le théorème 10 donne une caractérisation de sous treillis de polyèdre de réseau-Network dual généralisé, le résultat suivant fait de même pour polyèdre de réseau-flot dual. Une matrice d'incidence nœud-arc est une matrice dans la quelle chaque colonne possède un 1, un -1 et 0 pour autre, soit I le n-vecteur de 1.

Corollaire 3.12. (*caractérisation de polyèdre réseau-flot dual*) les suivants sont équivalents :

- (a) L est un sous treillis polyédral de R^n , et $L + \lambda 1 = L$ pour tout $\lambda \in R^n$.
- (b) $L = \{s \in R^n : As \leq b\}$ pour certaine matrice $(A b)$ avec A la transposée de la matrice d'incidence nœud-arc.

Preuve.

(a) \Rightarrow (b) : par le théorème 10, $L = \{s \in R^n : As \leq b\}$ pour certaines matrice $(A b)$ pour laquelle A est le transposée de la matrice d'incidence nœud-arc généralisée. Nous pouvons bien sûr supposer sans perdre de généralités pas de ligne pour A vide ou une telle ligne peut être retirée (éliminée). Maintenant, nous devons avoir $A I = 0$, sinon $A I \neq 0$. Alors nous trouvons pour chaque $s \in L$ fixé, en choisissant $|\lambda|$ assez large que $A(s + \lambda I) = As + \lambda AI > b$ qui contredit le fait que $L + \lambda I = L$. Puisque $A I = 0$, chaque ligne de A a deux éléments non nuls de signe différent. Donc on multipliant chaque ligne de $(A b)$ par le réciproque de l'élément positif dans la ligne correspondante de A , nous pouvons supposer sans perdre de généralités que chaque ligne de A à +1, un -1 et des zéros partout.

(b) \Rightarrow (a) : par le théorème 10, L est un sous treillis polyédral de R^n , ainsi pour chaque $s \in L$ et $\lambda \in R$ nous avons $A(s + \lambda I) = As \leq b$, il s'ensuit que $L + \lambda I = L$

Conclusion

L'objet principal de notre travail est de présenter et donner les structures des treillis, les produits de sous-treillis généraux et polyédraux présentés à la fois par Topkis[5], et par Veinott[4].

Aujourd'hui, plusieurs chercheurs s'intéressent à cette approche de recherche, surtout pour la représentation de nombreux problèmes de flots cités dans l'article de Veinott . En ce qui concerne les problèmes de substitution pré-leontief, nous avons utilisés les ensembles, les polyèdres et les treillis .

Afin de donner la représentation et la structure des treillis généraux et polyédraux, cette étude nous a amené à orienter nos travaux de recherches à un esprit théorique concernant la mise en œuvre des flots et les modèles de substitution pré-leontief.

Notre travail, nous a donc permis de proposer une telle approche, et perspective théorique importante pour la structure des sous-treillis polyédraux et dans le but de la résolution des problèmes de flots ou exactement de ces sous-treillis polyédraux et la structure de ces solutions dans \mathbb{R} , afin d'exploiter au maximum les problèmes d'optimisation.

Bibliographie

1. C. BERGE. Graphes et hypergraphes, France : DUNOD, 1970 p. (M0550)
2. A. BELHADJ. Génération de treillis et propriétés algébriques, Mémoire Magister, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou.
3. M. QUEYRANNE F. TARDELLA. Sublattices of product spaces : hulls, representations and counting..
4. D.M. Topkis. The structure of sublattices of product of n lattices Pacific J. Math. 65 : 625-532(1976).
5. D.M. Topkis and A.F. Veinott, JR, Meet-representation of subsemilattices and sublattices of product spaces (Abstract) in VIII international symposium on mathematical.
6. I. ADLER, S. COSARES, A STRONGLY polynomial algorithm for A Special Class of linear Programs, California (1990).
7. R. FAVRE et E. HEURGON, structure ordonnées et algèbres de boole Villars-Gauthier (1971).
8. A.F. VEINOTT, Jr, (Representation of General and Polyhedral Subsemilattices and Sublattices of Product Spaces) Linear Algebra and Lts application 114/115 :681-704 (1989) 9. B. SADI et L. NOURINE, Optimisation Combinatoire