REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI OUZOU

FACULTE DU GENIE DE LA CONSTRUCTION

Département de génie mécanique

MEMOIRE

Pour l'obtention du diplôme

De Master Académique en Génie Mécanique

Option : Comportement et Mise en Forme des Matériaux

ETUDE DE L'ECOULEMENT DE L'ENERGIE VIBRATOIRE DANS LES STRUCTURES COMPOSITES.
APPLICATION A LA DETECTION DES DEFAUTS DE PLAQUES MULTICOUCHES

Réalisé par : ***Melle HAMROUNI Ferroudja.***

Proposé et dirigé par : ***Mr AMZIANI Ahcene.***

Promotion : 2012 / 2013

A ma famille et à tous
mes amis …

Remerciements

Au terme de cette étude, je remercie DIEU de m'avoir donné la volonté et le courage d'achever ce travail dans de bonnes conditions.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et ma sincère reconnaissance à mon promoteur, monsieur Ahcene AMZIANI qui m'a proposé ce sujet. Je le remercie très chaleureusement pour sa disponibilité, son aide et ses orientations.

Merci aux membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait de juger ce travail.

Mes remerciements les plus chaleureux s'adressent à mes parents, à mon oncle, mes frères et sœurs qui m'ont soutenu et encouragé pour aller au bout de ce travail.

Je remercie également tous les enseignants qui ont contribué à ma formation durant mes études, mes amis et mes collègues, qui d'une manière ou d'une autre, ont contribué à l'accomplissement de ce travail.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE II : ETUDE SUR LES MATERIAUX COMPOSITES ET L'ENDOMMAGEMENT DE CES STRUCTURES

CHAPITRE III : PRINCIPE DE L'ECOULEMENT D'ENERGIE

CHAPITRE IV : METHODE DES ELEMENTS FINIS ASSOCIEE A L'ECOULEMENT DE L'ENERGIE

CHAPITRE V : ETUDE DE L'ECOULEMENT D'ENERGIE PAR LA METHODE DES ELEMENT FINIS

CHAPITRE VI : APPLICATION DU PRINCIPE DE L'ECOULEMENT D'ENERGIE POUR LA DETECTION DES DEFAUTS

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

Nomenclature

Gradeurs	Désignation	Unité
X	Déplacement de la masse m	[mm]
q	Déplacement généralisé	[mm]
$\dot{x}$	Vitesse de la masse m	[m/s]
$\dot{q}$	Vitesse généralisée.	[m/s]
$\ddot{x}$	accélération de la masse m.	[m/s^2]
$\ddot{q}$	accélération généralisée	[m/s^2]
E	Module d'élasticité de Young.	[N/mm^2]
F	Module de la force d'excitation.	[N]
I	Moment d'inertie d'une poutre.	[mm^4]
A	Aire de la section droite.	[mm^2]
T	Energie cinétique.	[N.m]
U	Energie potentielle.	[N.m]
h	Epaisseur d'une plaque.	[mm]
[C]	Matrice d'amortissement.	-
[K]	Matrice de rigidité.	[N/m]
[M]	Matrice de masse.	[Kg]
P	Puissance.	[Watt]
f	Fréquence d'excitation.	[Hz]
ν	Coefficient de Poisson.	-
τ	Taux d'amortissement.	-
ρ	Masse volumique.	[Kg/m^3]
σ	Tenseur des contraintes.	[$N.mm^2$]
ω	Pulsation d'excitation.	[rad/s]
ω_n	Pulsation naturelle.	[rad/s]
E_L	Module de Young longitudinal.	[N/mm^2]
E_T	Module de Young transversal.	[N/mm^2]
ν_{LT}	Coefficient de poisson longitudinal	-
$\nu_{TT'}$	Coefficient de poisson transversal.	-
G_{LT}	module de cisaillement longitudinal	[N/mm^2]
$G_{LT'}$	module de cisaillement transversal.	[N/mm^2]
$G_{TT'}$	module de cisaillement transversal.	[N/mm^2]

Abréviation.

$\mathrm{Re}\{\ \}$: Partie réelle d'une quantité complexe.

$<\ >$: Moyenne temporelle.

FEA : Finite Element Analysis.

MEF : Méthode des Eléments Finis.

ddl : degré de liberté.

CND : contrôle non destructif.

AC : courant alternatif.

CC : courant continu.

SHM : Structural Health Monitoring

PWAS: Piezoelectric Wafer Active Sensor.

Alphabet grec

Nom en lettres	Majuscules	Minuscules	Nom en lettres	Majuscules	Minuscules
Alpha	Α	α	Nu	Ν	ν
Bêta	Β	β	Xi	Ξ	ξ
Gamma	Γ	γ	Omicron	Ο	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Epsilon	Ε	ε	Rho	Ρ	ρ
Zêta	Ζ	ζ	Sigma	Σ	σ
Êta	Η	η	Tau	Τ	τ
Thêta	Θ	θ	Upsilon	Υ	υ
Iota	Ι	ι	Phi	Φ	φ
Kappa	Κ	κ	Khi	Χ	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mu	Μ	μ	Oméga	Ω	ω

Introduction

Introduction

L'énergie est un concept crée par les scientifiques pour quantifier les interactions entre des phénomènes en apparence très différents. Bien que quelque peu abstrait, l'énergie est un pilier de la science moderne. Elle est présente dans toutes les descriptions physiques et chimiques de la nature, même dans le vide, et se présente sous différentes formes.

Dans le domaine de la construction mécanique, l'étude de l'écoulement de l'énergie dans une structure nous permet de comprendre comment un élément individuel de poutre ou de plaque conduit l'énergie mécanique. Dans le cas de structures complexes, telles que les avions ou les constructions urbaines, la capacité de tracer comment le flux d'énergie les traverse, faciliterait énormément les efforts pour le contrôle des nuisances sonores et la protection des pièces fragiles ; en effet, en identifiant ces chemins et moyennant des traitements avec ajout d'amortisseurs ou de modifications structurales, ces structures peuvent être optimisées pour donner les meilleures réductions vibratoires et acoustiques. De plus, les structures complexes peuvent être modélisées par une combinaison de composants structuraux simples et interconnectés entre eux. Cette subdivision est la base de la méthode des éléments finis, que nous allons l'associée au principe de l'écoulement d'énergie dans les structures en matériaux composites.

Pour mener à bien ce travail, ce manuscrit est scindé en cinq chapitres ;

Une étude bibliographique effectuée dans le premier chapitre est destinée à la présentation de l'état de l'art de détection des défauts dans les matériaux composites.

Le deuxième chapitre sera consacré pour une étude générale sur les matériaux composites ainsi sur les mécanismes d'endommagement de ces structures.

Dans le chapitre trois nous allons présenter le principe de l'écoulement de l'énergie et de la puissance que nous allons associer à la méthode des éléments finis dans chapitre quatre, en évoquant les cas de structures mécaniques élémentaires, pour pouvoir les utilisées dans les calculs ultérieurs du chapitre cinq. Ce dernier, sera consacré à l'étude des chemins d'écoulement de certain cas test.

Le dernier chapitre sera orienté vers l'application des notions établies dans les chapitres précédents pour l'étude de l'écoulement de l'énergie dans une structure plaque multicouches et l'emploi de ces dernières dans la détection des défauts.

Chapitre I

Etat de l’art dans la détection des défauts dans les matériaux composites

1. INTRODUCTION

L'utilisation des composites est de plus en plus répandue et nécessite l'emploi de diverses techniques de contrôle, lorsque les structures composites sont soumises à des sollicitations pneumatiques, thermiques, mécaniques en régimes statique ou dynamique.

Le contrôle de santé institué de matériaux composites est actuellement un challenge que de nombre laboratoires tentent de relever. Les analyses et contrôles sans contact sont les plus courants. Parmi les techniques de contrôle, nous pouvons distinguer les méthodes de contrôle non destructif (CND) connus tel que les méthodes optique, magnétique, spectroscopie diélectrique, acoustique, thermique...etc. Ainsi des analyses sans contact sont largement développées de nos jours, et elles permettent de mesurer les champs de déplacements et de déformations et même de détecter les fissures.

2. METHODES DE CONTROLE DES COMPOSITES

2.1. METHODES SIMPLES [01]

2.1.1. Contrôle visuel

Ce premier moyen d'observation constitue le plus simple de tous les moyens d'analyse. Pourtant il permet de donner parfois des informations précises sur les zones endommagées.

2.1.2. Tap test

Ce test est fréquemment utilisé dans l'aéronautique pour déterminer les zones endommagées ou celles de défauts (délaminage). Ce test consiste à taper légèrement la structure en plusieurs endroits pour détecter les zones de variation de ton et qui sonnent creux. Ce test simple peut être utilisé directement par les techniciens chargés de la maintenance et donne des résultats relativement fiables pour certains types de dommage (ex : décollement d'interface).

2.2. METHODES THERMIQUES

2.2.1. Thermographie infrarouge

La thermographie infrarouge est une méthode optique sans contact et en temps réel. Elle peut être utilisée pour faire du suivi d'endommagement lors d'essais mécaniques mais également en contrôle non destructif. Dans ce cas, la thermographie infrarouge est basée sur l'application d'une sollicitation thermique à l'échantillon via une source de chaleur (lampes halogènes). Les ondes émises se propagent à l'intérieur de l'éprouvette et sont réfléchies en atteignant les bords libres de l'éprouvette. La présence d'un défaut crée un milieu hétérogène et modifie son indice. Lorsque les ondes rencontrent ce milieu, elles sont perturbées et un gradient de température est alors généré dans le matériau. En effet, les deux milieux ont une conductivité thermique différente et donc une émissivité différente qui est captée par le capteur infrarouge de la caméra. Ce dernier permet alors de convertir l'émissivité en température. La différence de température entre les différents milieux est mesurée. Une cartographie bidimensionnelle du champ thermique est créé et les inhomogénéités sont alors détectées .

Cette méthode permet la détection d'inclusions, de délaminage, de décohésions et de fissurations. Les composites sont bien adaptés à la thermographie infrarouge car ils possèdent une diffusion thermique moyenne et un échange d'énergie thermique faible avec l'extérieur ce qui permet de générer un signal infrarouge

2.3. METHODES OPTIQUES [02]

2.3.1. Photoélasticité

L'analyse expérimentale par photoélasticité permet d'obtenir des informations de plein champ relatives à la répartition des contraintes dans un échantillon. La différence des contraintes principales est obtenue par l'analyse des isochromes à partir d'un polariscope circulaire. L'orientation des contraintes principales est obtenue par l'analyse des isoclines. Avec le développement de la photoélasticité numérique combinée à des techniques d'imagerie numérique, il est possible de déterminer automatiquement l'ordre des franges isochromatiques en plein champ. L'analyse des isoclines peut être obtenue par des méthodes complémentaires, telles que le déphasage, la couleur du champ, la charge pas à pas…etc.

Yoneyama et al. ont utilisé un interféromètre combiné avec un polariscope circulaire pour la séparation des contraintes dans deux dimensions. On peut utiliser la méthode de photoélasticimétrie, pour déterminer les contraintes appliquées à l'aide de la biréfringence obtenue.

C. Bonnafous et al ont proposé une étude pour évaluer la liaison fil de chanvre imprégné/époxy. Des composites mono filamentaires contenant un fil de chanvre oriente à 0° ou 90° ont été spécifiquement développés. La contrainte critique de cisaillement inter facial est définie par des essais de fragmentation. L'évolution du champ de contrainte suivi par photoélasticimétrie a présenté des zones de redistribution des contraintes autour des fragmentations identifiées par des ellipses à 45° de la direction de sollicitation.

C. Bonnafous et al ont montré à partir des résultats obtenus que la déformation de cisaillement soit plus importante pour les points situés à l'interface fil/matrice. Ces mesures ont permis de reconstruire les lois de comportement de points situés dans le fil, dans la résine et à l'interface fil/matrice. [02]

2.3.2. Interférométrie Moiré

L.G. Melin a appliqué cette technique sur les composites carbone/époxy pour mesurer le champ des déplacements important autour des fissures de délaminage. Y. Min a déterminé les contraintes résiduelles par l'utilisation de l'interférométrie moirée avec décalage de phase. Le nombre important de franges obtenues pour de très faibles déplacements offre une grande précision. En utilisant une configuration sphérique à double faisceau optique, A. Martinez compare les ruptures détectées à l'aide d'interférométrie de Moiré et d'interférométrie de Speckle.

2.3.4. Interférométrie holographique

Cette méthode permet de restituer un objet en trois dimensions, en utilisant les interférences produites par une onde laser de référence envoyée directement sur le support d'enregistrement et une onde laser objet diffractée par l'objet testé. L'amplitude et le relief de l'objet sont codés par ces interférences. L'holographie analogique utilisant des plaques argentiques, a été inventée en 1947 par Dennis Gabor, physicien hongrois.

2.4. METHODES MAGNETIQUES

La magnétoscopie est une technique de contrôle non destructif qui consiste à créer un flux magnétique intense à l'intérieur d'un matériau. Si un défaut est présent cela entraine la création d'un champ de fuit.

Pour détecter le défaut, un produit révélateur (particules magnétiques colorées par exemple) est appliqué. Ainsi, le produit subissant le changement de flux magnétique prend une forme, une signature particulière caractéristique du défaut, Cette méthode, est fiable et facile d'utilisation pour détecter des défauts, aussi bien débouchant que sous-jacents jusqu'à quelques millimètres (1 à 2mm). De plus la méthode est rapide et dispose d'une bonne sensibilité pour détecter les défauts perpendiculaires à la ligne de champ. Par contre cette méthode est applicable aux seuls matériaux ferromagnétiques et les défauts profonds sont peu détectables. De plus elle comporte des risques électriques et s'avère peu applicable sur des pièces de grande taille [03].

2.5. METHODES ACOUSTIQUES [04]

2.5.1. Les ultrasons

Les ultrasons sont des vibrations mécaniques, d'origines électriques, qui se propagent dans un milieu solide ou liquide, le contrôle de matériaux composites peut s'avérer difficile pour des structures à géométries complexes.

Trétout [02] a montré le potentiel de cette méthode pour la détection de corrosion et de délaminages dans les matériaux composites. L'intérêt de la méthode réside dans sa capacité à détecter des défauts (fissures, délaminages, porosités…) dans des structures de forme irrégulière. Sa rapidité d'exécution, son application sans contact et sa maniabilité pour le contrôle de pièces à géométrie particulière en font ses principaux atouts. Mais dans l'industrie, lorsque le contrôle non destructif doit s'appliquer à de grandes plaques de faibles épaisseurs, l'utilisation points par points des ultrasons n'est pas pertinente.

Les ondes dites « de plaques » Rayleigh et Lamb qui se diffusent sur l'ensemble de l'échantillon sont plus adaptées à cette configuration géométrique. Lorsque ces ondes rencontrent un défaut leur propagation s'en trouve modifiée on en déduit alors la présence d'un défaut.

2.5.2. Ondes de Rayleigh [04]

Il existe des ondes ultrasonores qui se propagent à la surface des matériaux. Les ondes de surface, dites ondes de Rayleigh (qui sont un type d'ondes sismiques), sont le résultat de la superposition de deux ondes, l'une verticale et l'autre horizontale. Elles concernent une faible épaisseur du matériau, et présentent une très grande sensibilité à toute discontinuité de surface, quelque soit son orientation. Les ondes de Rayleigh sont ainsi utilisées pour le contrôle de surface.

2.5.3. Ondes de Lamb[04]

Les ondes de plaques ou ondes de Lamb correspondent à des ondes de surface qui se propagent dans des matériaux dont l'épaisseur est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde. Dans ce cas, l'onde vibratoire concerne toute l'épaisseur de la plaque. On distingue deux grandes familles d'ondes de Lamb, suivant que la plaque vibre en conservant un plan de symétrie (modes symétriques) ou non (modes antisymétriques). Les ondes de Lamb sont utilisées pour l'étude en profondeur de matériau.

Cette technique utilise le plus souvent des transducteurs piézoélectriques dont la taille et en particulier l'épaisseur est assez faible (inferieur a 500µm). Il existe deux modes d'excitations des capteurs piézoélectriques : mode épaisseur et mode radial.

L'excitation en mode épaisseur permet de suivre les propriétés viscoélastiques des composites par analyse de l'évolution de l'impédance électrique pour une application, par exemple, au suivi du cycle de cuisson d'un polymère.

L'excitation en mode radial permet de détecter et de caractériser les endommagements par l'excitation et la détection d'ondes guidées. Un mode guide particulier peut être préférentiellement excite par ajustement de la fréquence d'excitation de l'élément piézoélectrique et par la position de l'excitateur.

En utilisant uniquement les vitesses de propagation de chaque mode, Osmont est parvenu à localiser un trou dans une structure sandwich dissymétrique. Il a aussi étudié l'interaction de trous dans la mousse de structure composite sandwich. Cette interaction a comme conséquence de produire un écho qui peut être détecte dans ce cas par un disque piézoélectrique colle sur la peau du composite. Les ondes de Lamb peuvent également être généré par un impact ou l'agrandissement d'une fissure, l'objectif est alors de localiser la source en ≪écoutant ≫en permanence et à différents endroits de la structure surveillée.

Guy et al. ont étudié les différents modes d'excitations des capteurs piézoélectriques. Les signatures typiques obtenues sur des plaques impactées ne sont pas les mêmes que celles des plaques saines. La contribution dans la forme d'onde semble être amplifiée et d'une autre façon retardée. L'onde directe est atténuée et/ou retardée par la présence du défaut tandis que celle reflétée reste sans changement. Le mode de flexion s'est avéré plus sensible que le mode de compression au délaminage dans les composites. Il est possible de produire un mode de Lamb arbitraire en ajustant les conditions d'excitation des sondes collées ou intégrées. Pour une structure donnée, les formes d'ondes dépendent fortement de l'interaction du mode choisi avec les dommages induits mais aussi de la géométrie et de l'anisotropie de la structure puisque ces paramètres influenceront le nombre d'ondes qui peuvent se propager et interférer sur le récepteur.

Su à utilise le mode de flexion pour prédire la localisation des endommagements. Il a montré qu'il fallait au moins 4 capteurs pour obtenir une bonne localisation du délaminage pour une plaque de carbone de 480*480 mm2 (les capteurs sont places à 65 mm des bords).

Lemistre et al ont employé des disques piézoélectriques collés prés des bords d'une plaque composite. Certains sont employés comme émetteurs et d'autres comme récepteurs formant ainsi un certain nombre de chemins de propagation. L'analyse en ondelette a été exécuté pour extraire les mesures de temps-de-vol a partir des signaux acquis et donc pour localiser les dommages.

Wilcox et al. ont propose une approche différente, L'inspection de grandes plaques est effectuée en employant des rangées de capteurs, ou chaque capteur piézoélectrique agit en tant qu'émetteur et récepteur. Des signaux guides sont produits à différents angles autour du capteur des positions et le signal réfléchi des bords est traités pour la détection de dommages. Cette configuration est très prometteuse pour les matériaux isotropes, mais ont quelques limitations pour les structures composites (anisotrope) dues au changement des propriétés avec la direction.

Des Rangées linéaires, ont été études par D_az Valde's pour la détection et la localisation des dommages. En utilisant cette démarche, les chercheurs ont conduit une étude pour trouver le nombre et l'espacement optimum des rangées d'émetteurs. Une range linéaires d'émetteurs produit un front d'onde relativement uniforme permettant l'inspection de grande surface avec un nombre limite de capteurs. Des changements de la réponse du signal acquis sont induits par la présence des dommages et permettent l'évaluation de l'ampleur des dommages et de leurs localisations.

Diamanti a utilise le mode de compression à une fréquence très basse de 20 kHz en excitant les piézoélectrique en mode longitudinal avec une impulsion sinusoïdale. L'opération à basse fréquence réduit la résolution mais réduit aussi le cout d'équipement d'acquisition des données. En effet, à basse fréquence l'atténuation est moins importante et donc l'utilisation d'un amplificateur n'est pas obligatoire.

Todoroki a étudié la possibilité de détecter les endommagements dans les composites carbones en utilisant les propriétés électriques AC (courant alternatif) et DC (courant continu) ; la conduction électrique DC pour détecter les cassures de fibres et la mesure en AC pour contrôler les fissures de la matrice. Mais, les fibres de carbone ne sont pas parfaitement alignes dans le composite et la conduction électriques se produit non seulement dans la direction des fibres, mais aussi dans les directions transversales. Lorsqu'il se produit un délaminage ou une rupture de fibre, la conductivité décroit. Cette technique ne peut êtres utilisée, bien sur que pour des fibres conductrices, c'est-a-dire pour des fibres de carbone. [05]

2.6. SPECTROSCOPIE DIELECTRIQUE

De nombreux travaux ont été menés au cours de ces dernières années pour étudier l'adhérence inter faciale, la résistance à l'absorption d'humidité des matériaux par des méthodes diélectriques.

I.G. Matiss, en 1988 [02] a étudié les phénomènes de relaxation dans les diélectriques, ces phénomènes décrivent la réponse d'un matériau suite à l'application d'un champ électrique.

Le comportement mécanique et électrique des matériaux composites est conditionné par la microstructure qui dépend de la mise en œuvre et des caractéristiques du renfort, celle de la matrice, des propriétés de l'interface renfort/matrice. Les spectrométries mécanique et diélectrique sont deux techniques qui permettent d'étudier le comportement viscoélastique et diélectrique en considérant la relaxation mécanique et diélectrique selon le mode d'excitation externe et suivant la fréquence utilisée. La spectrométrie mécanique permet d'étudier les variations du module d'Young en fonction de la température. La spectrométrie diélectrique permet d'étudier l'évolution de la constante diélectrique complexe du matériau placé entre les plateaux d'un condensateur, en fonction de la température et de la fréquence.

Cette dernière technique donne des informations précieuses sur le comportement thermique et fréquentiel des composites polymères. La présence de charges spatiales dans les matériaux isolants tels que les polymères diminue leurs performances et pose par la suite de nombreux problèmes industriels.

2.7. TRAVAUX EXISTANTS TRAITANT DU CONTROLE SANTE INTEGRE PAR ONDES GUIDEES POUR DES MATERIAUX ANISOTROPES

Lemistre *et al* ont mis en place un système complet de contrôle, ayant la spécificité d'utiliser des traducteurs intégrés à la structure. Le diagnostic (localisation et caractérisation du défaut), basée sur l'étude des signaux émis et reçus, repose sur un procédé de multi résolution, utilisant une transformée en ondelette discrète. Ainsi, les différents modes présents dans le signal reçus sont isolés, et leurs temps de vol sont extraits. Des validations expérimentales ont été réalisées sur différents matériaux composites. Les traducteurs utilisés sont des SMART layer intégrées en tant que couche propre du composite. Les validations ont montré de bons résultats pour le premier mode antisymétrique et le premier mode SH. Il est intéressant de noter qu'ils ont montré que ce dernier est plus adapté à la détection d'un défaut situé près d'un bord de la plaque. En effet, ce mode est uniquement produit par la présence d'un défaut, il ne peut donc pas provenir d'une réflexion sur un bord. Enfin, une série de validation a été faite dans un laboratoire différent ce qui montre la portabilité du système.

Grondel *et al* ont développé un système de santé intégré destiné aux structures aéronautique de type plaque raidie.

Des études expérimentales, en mode passif ou actif, sont menées pour vérifier ces performances à la détection d'impact ou de décollement entre le raidisseur et la structure composite. Ils ont montré que le mode actif possède une grande sensibilité aux décollements, ainsi qu'à la présence d'un défaut à la suite d'un impact. Ils valident également l'utilisation du mode passif lors de l'apparition d'un endommagement lié à un impact. Ce système de contrôle santé intégré est donc viable et adapté au contrôle de structures aérospatiales, leur principale perspective étaient d'optimiser la sélection de modes de Lamb afin assurer une meilleure sensibilité aux ondes issues du défaut.

D'un autre point de vue, Mahadev Prasad et al ont démontré la faisabilité d'un système SHM basé sur des techniques de tomographie. Ils utilisent des modèles de reconstructions algébriques pour le post-traitement des données associées aux ondes de Lamb provenant de structures réalistes.

Pour améliorer la qualité des résultats dans des matériaux composites, ils ont mis en place une nouvelle configuration de traducteur. Contrairement aux configurations de tomographie par onde de Lamb classique, les traducteurs sont dorénavant placés tout autour de la plaque. Enfin, ils ont utilisé un nouveau paramètre de reconstruction sur les données dans une plaque saine et plaque avec défaut permettant de différentier le bruit plus facilement.

Matt *et al* ont étudié plus particulièrement les joints composite/composite se trouvant au niveau de la liaison peau-raidisseur. Trois défauts ont été simulés dans la structure, une zone où le décollement a été mal réparé et deux zones de décollement isolées de tailles différentes.

Le décollement est caractérisé par les variations du vecteur de Poynting le long de la plaque, ce qui correspond à l'étude du coefficient de transmission. Les résultats montrent que la sensibilité au défaut est meilleure lorsque les modes sont couplés (le couplage des modes à une certaine fréquence étant dI à l'amortissement ou aux effets géométriques pour les structures multicouches). Ils montrent également que le coefficient de transmission augmente lorsque la taille du défaut augmente. Ces résultats sont valables uniquement pour les joints examinés dans cet article. Ils réalisent également une étude qualitative pour le choix du mode le plus adapté à une détection dans les zones de collage.

Les modes possédant le plus de ressemblance avec la plaque seule à une fréquence donnée sont sélectionnés. Plus récemment de nombreux travaux ont été menés pour la détection de défaut par ondes guidées dans des structures composites dans une optique de SHM.

Staszewski *et al* présentent une méthode de contrôle passif. La localisation est basée sur une généralisation de la méthode de triangulation avec un algorithme génétique. Ils ont également mis en place une détection active utilisant un vibromètre laser pour localiser l'endommagement. Cette méthode ne nécessite aucun post-traitement complexe, mais ne paraît pas adapté pour des systèmes embarqués.

Vishnuvardhan *et al* ont étudié la validité d'un système de contrôle santé intégré utilisant des réseaux circulaires de traducteurs STMR. Ils ont utilisé un algorithme de reconstruction, basé sur une addition de phase, qui permet d'établir une cartographie précise aussi bien en champs proche qu'en champ lointain.

Des validations expérimentales ont été menées sur une plaque composite quasi-isotrope de graphite-époxy. Ils ont pris en compte l'atténuation du milieu de façon simple par une correction basée sur la distance de propagation. Cela permet d'obtenir des signaux significatifs loin du réseau de traducteur sans introduire d'artéfact à proximité de ce dernier.

Moll *et al* présentent une nouvelle approche de contrôle santé intégré pour la localisation de défaut dans des milieux possédant une anisotropie quelconque. La localisation est obtenue par une généralisation de la méthode de l'ellipse pour les milieux anisotropes, méthode basée sur un procédé géométrique utilisant le temps de vol et validée pour des matériaux isotropes. Toutes ces méthodes ont été validées de façon expérimentale, et montrent des résultats en accord avec l'expérience.

Dernièrement, Giurgiutiu *et al* s'intéressent à l'utilisation des PWAS pour le contrôle santé intégré de structure composite. Ils avaient déjà mené et validé leur utilisation pour des matériaux isotropes. Dans cet article, ils discutent de la validité de ces traducteurs pour la détection de défauts dans des matériaux plus complexes. Ils obtiennent des résultats en accord avec l'expérience et montrent notamment que le mode A_0 semble plus adapté la détection de défaut que le mode S_0. Cependant, ils soulignent le fait qu'en pratique les matériaux composites montrent beaucoup plus de variabilité lors de la fabrication que les matériaux isotropes. Il est donc nécessaire de mener de nombreuses séries d'expérimentation pour s'assurer de la validité de la méthode.

2.7.1. Les méthodes vibratoires

De nombreuses études sur la caractérisation des matériaux composites, synthétisées par Gibson, utilisent l'analyse modale comme outil d'investigation. En effet cette méthode permet d'obtenir, de manière rapide, précise et peu coûteuse, les propriétés mécaniques en termes de rigidité et d'amortissement de ces matériaux.

Kessler et Owolabi [06] proposent la mise en évidence de la présence d'un endommagement fissure ou délaminage) dans un matériau composite par l'étude des variations des fonctions de réponse fréquentielle. Ils notent des modifications des fréquences propres ainsi qu'une variation de l'amplitude de la fonction de transfert. Les différences observées sur ces paramètres semblent être de bons indicateurs pour la détection d'endommagements au sein du matériau.

H. Hu a travaillé sur la détection de fissures en surface de composites carbone-epoxy en utilisant l'analyse modale combinée aux énergies de déformation.

Hwang cherche à minimiser la différence entre FRF analytique et mesurée pour en constater la présence d'un endommagement. L'ensemble de ces travaux s'intéresse à la diminution globale ou locale de rigidité des structures étudiées comme des indicateurs d'endommagements, généralement locaux.

Selon Panteliou [06], le facteur d'amortissement ou facteur de perte est un bon indicateur de la sévérité des fissures. En effet, le facteur de perte dissipe une certaine partie de l'énergie (par frottements) lors de la sollicitation. Ce facteur d'amortissement augmente avec la longueur de la fissure pour une même géométrie. Il semblerait que ce facteur de perte soit sensible à la dissipation d'énergie due aux frottements au niveau de la fissure.

W. Gu [06] s'intéresse aux dissipations d'énergie (en termes de facteur de perte) pour rendre compte de la nature cohésive d'un matériau composite polymère-fibres de verre. Il met en évidence les effets du taux d'insertion de charge sur les efforts de cohésion inter faciale. Il compare le facteur de perte mesuré à celui déterminé par un modèle cohésif dissipatif (basé sur le modèle élastique et cohésif de Reuss) énoncé par Zorowski et Murayama, pour rendre compte de la dissipation d'énergie due aux interfaces.

Tracy et Pardoen [07] ont étudié l'effet du délaminage sur les fréquences propres d'une poutre en composite stratifié. Cette étude a été effectuée en utilisant une analyse modale expérimentale associée à une analyse par élément finis et un modèle analytique. Ils ont constaté que le délaminage affecte plus les modes pairs que les modes impairs. Les résultats obtenus par les trois approches sont en bon accords.

Valdes et Soutis [07] ont développé une méthode de surveillance de l'état de santé des matériaux composites. Elle consiste en l'étude de l'effet du délaminage sur les fréquences propres des poutres en composite stratifié. La poutre en configuration encastrée-libre est instrumentée par deux capteurs (un émetteur et l'autre récepteur) collés près de l'encastrement. La comparaison des fréquences modales des poutres saines à celles des poutres délaminées a donné une bonne indication sur le degré d'endommagement des matériaux. La méthode a été utilisée par la suite en vibration à hautes fréquences pour identifier le délaminage dans des poutres en matériau composite.

Shu et Della ont effectué une analyse analytique sur le comportement en vibration libre de poutres en composite en présence de délaminages multiples. La poutre est étudiée comme étant un ensemble de plusieurs poutres de Bernoulli qui sont interconnectées entre elles. Le couplage flexion-traction est pris en compte dans la mise en place du modèle.

Les résultats obtenus par cette analyse sont en bon accord avec les résultats de la littérature et ont permis de vérifier la validité du modèle. Ce modèle a été utilisé par la suite pour analyser l'influence des délaminages multiples sur les deux premiers modes de vibration sur les déformées modales des poutres. [07]

2.8. CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre les méthodes les plus importantes utilisées pour contrôler ces matériaux composites. Nous avons cité les méthodes simples, les méthodes thermiques, magnétiques, acoustiques, techniques optiques, techniques diélectriques ainsi que les méthodes vibratoires. L'analyse du comportement des structures composites par les méthodes optiques peut être menée soit en régime dynamique, soit en régime statique. Les techniques interférométriques sont sans contact et donnent une excellente précision.

Chapitre II

Etude sur les matériaux composites et l'endommagement de ces structures

1. GENERALITE SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

1.1. Introduction

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou acoustique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels,…), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes.

1.2. Définition

Un **matériau composite** est, au sens le plus courant du terme, tout alliage ou matière première comportant un **renfort** sous forme filamentaire. Il nécessite l'association intime d'au moins deux composants : le **renfort** et la **matrice**, qui doivent être compatibles entre eux et se solidariser, ce qui introduit la notion d'un agent de liaison, **l'interface** aussi dite « interphase ».

1.3. Les composants d'un matériau composite [08]

Comme cité dans la définition ci-dessus, les composites sont constitués de trois éléments suivants :

- matrice ;
- renfort ;
- interface.

1.3.1. Les matrices

Dans un grand nombre de cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. La matrice d'un composite a pour rôles :

– d'enrober les renforts, les protégeant ainsi du milieu extérieur;

– d'assurer une répartition spatiale homogène des renforts;

– de transmettre aux renforts les efforts extérieurs et de les répartir;
– de conférer la forme à la pièce de matériau composite : ce sont elles qui conditionnent l'aptitude à la mise en forme du composite.

a. Matrices organiques

Les matrices en polymère de synthèse sont les plus courantes dans les composites de grande diffusion, associées à des fibres de verre, d'aramide ou de carbone. Elles ont un faible module et une faible résistance à la traction, mais se prêtent facilement à l'imprégnation des renforts. Ces matrices ont pour avantages :

– faible masse volumique;
– coût-matière relativement faible;
– insensibilité à de nombreux agents chimiques;
– mise en œuvre aisée et rapide, compatible aussi bien avec du prototypage qu'avec une production en série. Et pour inconvénients :

– tenue en température médiocre;
– sensibilité à l'humidité.

Les matrices organiques les plus utilisées sont :

– les **résines polyester insaturées**, thermodurcissables, imprégnées à l'état liquide, avant réticulation;
– les **résines époxydes**, également thermodurcissables, mises en œuvre dans des conditions similaires; elles sont un peu plus coûteuses que les précédentes;
– des polymères thermoplastiques (polypropylène, polyamide), qui permettent un thermoformage d'ébauches planes et autorisent le recyclage. Parmi eux, certains permettent d'obtenir de relativement bonnes performances mécaniques (PEEK) ou en température (PI);
– des élastomères (polyuréthanes, silicones) sont également utilisés.

Certains polymères thermoplastiques courants (PE, PS, PVC…) sont souvent renforcés et rigidifiés par incorporation de fibres courtes, de paillettes ou de particules peu coûteuses (fibres de verre hachées, mica, talc, silice) pour la fabrication d'objets de grande diffusion.

La quasi-totalité des matériaux d'origine biologique sont des composites : élastine + collagène pour les tissus animaux, collagène + hydroxyapathite pour les os, fibres de cellulose + matrice de lignine et d'hémicellulose pour le bois et les textiles naturels.

b. Matrices minérales

Des composites à matrices céramiques (C, Al_2O_3, SiO_2, Cr_2O_3, MgO, SiC…) peuvent être obtenus par imprégnation de préformes de fibres (métaux, verres, aramides, carbone, céramique) soit par des suspensions liquides, ensuite frittées en température sous haute pression, soit par des gaz réactifs permettant un dépôt entre les fibres (notamment pour les composites carbone-carbone).

Principaux avantages :

– faible masse volumique;

– réfractaire;

– bonne résistance à la compression et haute rigidité, même en température;

– inertie chimique.

Principales limitations :

– sensibilité aux chocs;

– mise en œuvre délicate et coûteuse;

– pour les composites carbone-carbone, sensibilité à l'oxydation dès 400 °C.

c. Matrices métalliques

L'imprégnation de renforts par un alliage liquide étant une opération techniquement délicate, en pratique seuls les alliages d'aluminium sont utilisés dans ce type de technique, associés à des fibres ou particules de graphite ou de céramiques. Ils sont faciles à mettre en œuvre car leur température de fusion est relativement basse; leur masse volumique est faible et ils sont peu coûteux. Le compromis obtenu entre la ténacité de la matrice métallique et la rigidité des renforts donne au composite des caractéristiques mécaniques intéressantes par rapport à l'alliage seul, surtout au-dessus de 200 °C. Leur coût de mise en œuvre élevé réserve les composites à matrice métallique aux applications aéronautiques et spatiales.

Signalons également les tentatives d'obtention de composites par moulage et solidification dirigée d'alliages eutectiques, permettant d'obtenir simultanément une matrice et des fibres métalliques.

1.3.2. Les renforts

Les rôles des renforts consistent à :

– supporter les efforts appliqués;

– conférer au composite sa rigidité élastique et sa résistance à la rupture, éventuellement à haute température. Ils doivent également être compatibles avec la matrice du composite sur le plan chimique, c'est-à-dire assurer une adhérence interraciale renfort-matrice suffisante et stable dans le temps. Les principaux types de renforts se distinguent par leur géométrie (particules, billes, fibres courtes, fibres longues), par leur disposition notamment pour les fibres (aléatoire 3D, feutres, nappes de mat 2D, nappes unidirectionnelles, tissages 2D, tissages 3D) ou par leur nature.

a. Fibres de verre

Les fibres de verre de diverses qualités sont de loin les renforts les plus courants. Leur procédé d'élaboration par filage du verre en fusion permet d'obtenir des fibres de 5 à 15 μm de diamètre. Leur résistance à la rupture en traction ou flexion est d'autant plus élevée que leur diamètre est faible. Un diamètre de quelques microns autorise un rayon de courbure de quelques dixièmes de millimètres.

Les avantages des fibres de verre sont les suivants :

– bonne résistance thermique et électrique;
– bonne résistance aux agents chimiques et à l'humidité;
– bonne compatibilité avec les matrices organiques;
– faible coût.

Et leurs inconvénients sont :

– caractéristiques mécaniques moyennes, notamment la rigidité élastique;
– tenue au choc médiocre.

b. Fibres polymères

Malgré leur faible masse volumique, peu de polymères permettent d'obtenir des fibres de module suffisant pour présenter un intérêt comme renfort de composites. Les fibres aramides, en particulier, présentent d'excellentes caractéristiques de rigidité et de résistance en traction, une bonne tenue à la fatigue et à l'impact, mais un comportement médiocre en compression et cisaillement (donc en flexion). Elles sont le plus souvent utilisées en association avec des fibres de verre ou de carbone. Toutes les fibres organiques sont pénalisées par leur sensibilité à l'humidité et à la température et, paradoxalement, par une médiocre compatibilité avec les matrices organiques.

c. Fibres de carbone

Elles sont élaborées par pyrolyse en atmosphère contrôlée de fibres de polymère précurseur, ce qui permet d'obtenir sous diverses variantes un squelette d'atomes de carbone à structure graphitique à haut module et haute résistance malgré de nombreuses imperfections. Principaux avantages :

– grande résistance à la traction et grande rigidité longitudinale;

– très bonne tenue en température sans chute de propriétés (jusqu'à 1 500 °C en atmosphère non oxydante);
– inertie à la corrosion et aux agents chimiques;
– coefficient de dilatation longitudinal très faible, voire nul.

Principales limitations :
– fragilité au choc;
– fragilité à la courbure ou au pliage;
– coût élevé.

On doit également tenir compte dans leur utilisation du fait qu'elles sont **conductrices** électriques et thermiques. Elles sont employées sous formes de nappes unidirectionnelles ou de tissus pré-imprégnés pour la fabrication de matériel industriel ou sportif et sous forme de tissage 2D ou 3D dans l'industrie aéronautique et spatiale.

d. Autres types de fibres et renforts

Il existe d'autres types de fibres métalliques continues (bore, tungstène, acier…) ou de renforts minéraux (Al_2O_3, B_4C, SiC, Si_3N_4, BeO, TiO_2, TiC…) sous forme de filaments ou de particules. Ils sont compatibles avec des matrices métalliques imprégnées par fusion. Malgré leur résistance et leur rigidité, le diamètre élevé des fibres (la centaine de microns) les rend sensibles à la flexion et surtout, leur coût élevé restreint leur utilisation à quelques applications de haute technologie.

1.3.3. L'interface

L'interface ou l'interphase est créée lors de mise en œuvre des composites. Il s'agit d'une zone d'épaisseur non nulle où localement les propriétés commencent à être différentes de celles du renfort en masse et qui s'étend jusqu'à ce qu'elles deviennent identiques à celles de la matrice en masse.

La complexité de l'interphase est illustrée schématiquement par la figure 2.1. Cette zone de transition incorpore les effets de chimisorption et physisorption, les interactions chimiques, les gradients de densité de réticulation ou les modifications de textures cristallines, mais aussi les défauts (mouillages imparfaits, vides et autres anomalies locales) [13].

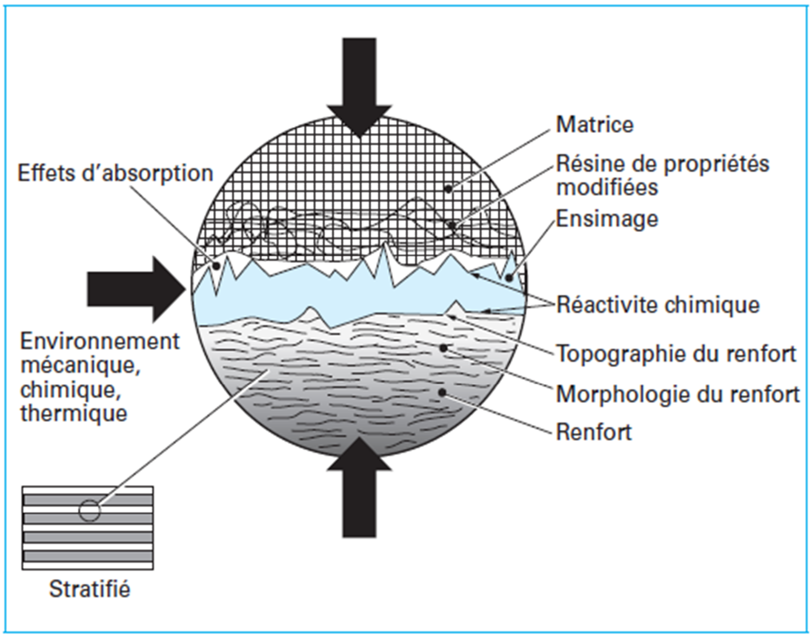


Figure (2.1) *: interphase renfort/ matrice dans un matériau composite*

1.4. Classification des composites

Les composites peuvent être classés suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants.

1.4.1. Classification suivant la forme des constituants

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres.

a. Composites à fibres [09]

Un matériau composite est un composite à fibres si le renfort se trouve sous forme de fibres. Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres continues, soit sous forme de fibres discontinues : fibres coupées, fibres courtes, etc. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de moduler à la carte les propriétés mécaniques des matériaux composites, pour obtenir des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan. Le concepteur possède donc là un type de matériau dont il peut modifier et moduler à volonté les comportements mécanique et physique en jouant sur :

— la nature des constituants ;
— la proportion des constituants ;
— l'orientation des fibres.

b. Composites à particules

Un matériau composite est un composite à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de particules. Une particule, par opposition aux fibres, ne possède pas de dimension privilégiée.

Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait, etc. Dans de nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour réduire le coût du matériau, sans en diminuer les caractéristiques. Le choix de l'association matrice-particules dépend des propriétés souhaitées. Par exemple, des inclusions de plomb dans des alliages de cuivre augmenteront leur facilité d'usinage.

Des particules de métaux fragiles tels le tungstène, le chrome et le molybdène, incorporé dans des métaux ductiles, augmenteront leurs propriétés à températures élevées, tout en conservant le caractère ductile à température ambiante. Les cermets sont également des exemples de composites métal-céramique à particules, adaptés à des utilisations à températures élevées.

Par exemple, les cermets à base d'oxydes sont utilisés pour les outils de coupe à vitesse élevée, et pour les protections à hautes températures. Également, des particules d'élastomère peuvent être incorporées dans des matrices polymères fragiles, de manière à améliorer leurs propriétés à la rupture et au choc, par diminution de la sensibilité à la fissuration.

Ainsi, les composites à particules recouvrent un domaine étendu dont le développement s'accroît sans cesse. Toutefois, compte tenu de leurs diversités.

1.4.2. Classification suivant la nature des constituants

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés suivant des composites à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale. Divers renforts sont associés à ces matrices. Seuls certains couples d'associations ont actuellement un usage industriel, d'autres faisant l'objet d'un développement dans les laboratoires de recherche.

1.4.3. Les matériaux composites structuraux [01]

1.4.3.1. Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

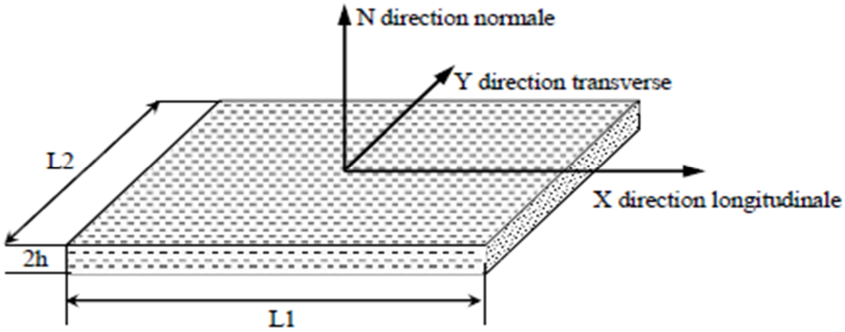


Figure (2.2) *: Monocouche d'un composite*

1.4.3.2. Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié.

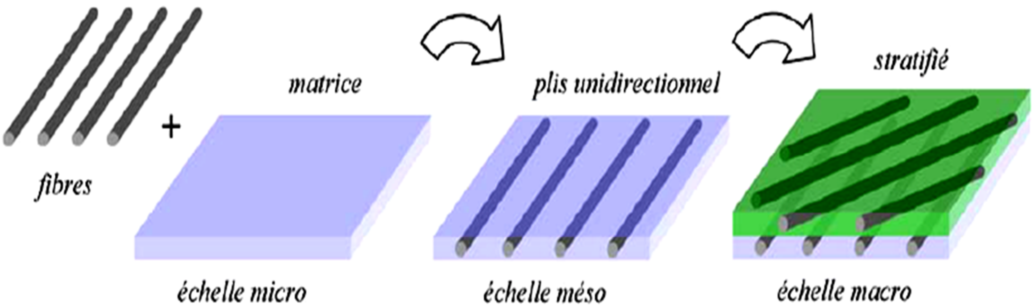


Figure (2.3) *: Les échelles des constituant d'un composite stratifié.*

- **Nomenclature des stratifiés**

On désigne les stratifiés par l'orientation des fibres de chaque pli par rapport à un repère global arbitraire (x ,y ,z), l'axe x correspondant le plus souvent à la direction du chargement. Un pli orienté à 0° présente des fibres dirigées selon l'axe x et un pli orienté à 90° des fibres selon y. Un stratifié quelconque de N plis est ainsi désigné par le N-uplet des orientations de ses plis dans le sens des z croissants.

Pour condenser l'écriture, on note sous forme d'indice le nombre de plis adjacents de même orientation ainsi que le nombre de répétitions d'une même séquence de plis. L'indice "s" correspond à un stratifié symétrique pour lequel on ne renseigne que la moitié de l'empilement, de la surface au plan de symétrie miroir. La Figure (2.3) présente l'exemple d'un empilement symétrique

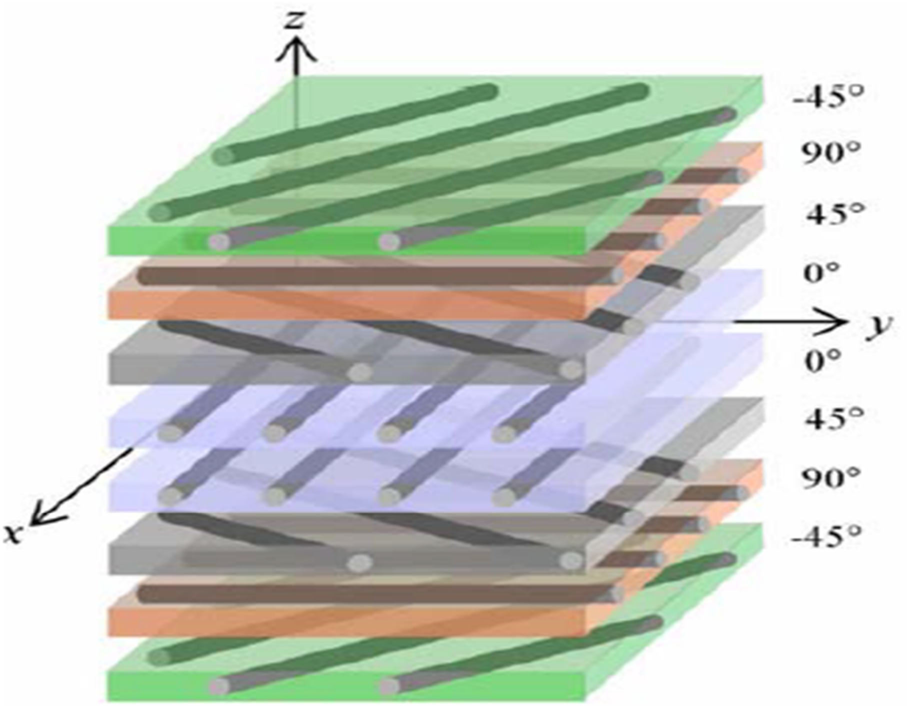


Figure (2.4) *: Désignation d'un stratifié*

On pourra avoir des stratifiés de type :

1. Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction positive que de couches orientées suivant la direction négative.

2. Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.

3. Orthogonal : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90°.

1.4.3.3. Sandwichs

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté.

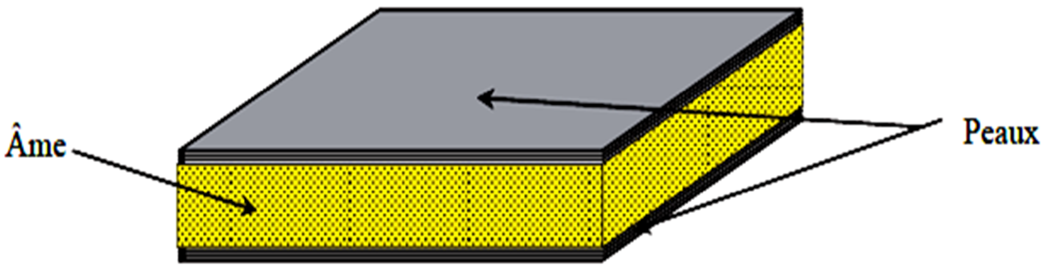


Figure (2.5) *: Constitution d'un composite Sandwichs*

1.5. Comportement mécanique des matériaux composites

1.5.1. Modules homogénéisés

Les propriétés mécaniques homogénéisées du matériau hétérogène sont déterminées sur un élément de volume V de dimension δ. Ces éléments de volume est appelé « élément de volume représentatif » du matériau. Des conditions de déformation étant imposées à la frontière de cet élément de volume, la contrainte moyenne sur le volume représentatif est définie par :

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{V}\int \bar{\sigma}_i\,(x_k)\,dV \quad , \qquad \mathrm{i} = 1:6 \tag{2.1}$$

La déformation moyenne par :

$$\bar{\varepsilon}_j = \frac{1}{V}\int \bar{\varepsilon}_j\;(x_k)\,dV \;\;,\;\; j = 1:6 \tag{2.2}$$

Avec

$\bar{\sigma}_i\ et \bar{\varepsilon}_j$ sont les éléments des matrices des contraintes de déformations au point x_k ;

dV est l'élément entourant le point x_k

Les relations précédentes sont générales et permettent d'expliquer les constantes de rigidité C_{ij} et S_{ij} par les expressions :

$$\bar{\sigma}_i = C_{ij}\bar{\varepsilon}_j \;\;,\;\; i,j = 1:6 \tag{2.3}$$

Et

$$\bar{\varepsilon}_i = S_{ij}\,\bar{\sigma}_j \;,\;\; i,j = 1:6 \tag{2.4}$$

- **Matrice de rigidité**

Le comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel peut être décrit en introduisant soit les constantes de rigidité C_{ij} , soit les constantes de souplesse S_{ij}. La loi de Hook s'écrit suivant l'une des deux formes matricielles, la forme directe :

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22}-C_{23}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix} \tag{2.5}$$

ou sous forme inverse :

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0\\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0\\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(S_{22}-S_{23}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

Les matrices de rigidité et de souplesse sont inverses l'une de l'autre, et le comportement élastique d'un composite est donc caractérisé par 5 coefficients indépendants :

C_{11}, C_{12}, $C_{22,}$ C_{23}, $C_{66,}$ ou: $S_{11,}$ S_{12}, $S_{22,}$ S_{23}, S_{66}

1.5.2. Modules de l'ingénieur

Les modules de l'ingénieur sont les modules d'Young, les coefficients de Poisson et les modules de cisaillement. Ces modules sont mesurés dans des essais simples tels que les essais de traction uniaxiale ou de cisaillement.

Ces modules correspondent donc à une utilisation usuelle plus pratique que les constantes de rigidité ou de souplesse. Ces essais sont réalisés en imposant un champ connu de contraintes, puis en mesurant le champ de déformation.

Il en résulte que les constantes de souplesse sont liées aux modules de l'ingénieur par des relations plus simples que celles exprimant les constantes de rigidité.

- **Traction longitudinale**

Dans un essai de traction longitudinale, toutes les contraintes sont nulles, excepté la contrainte σ_1 :

$$\sigma_1 \neq 0, \qquad (2.7)$$

$$\sigma_i = 0, \;\; i = 1{:}6\ . \qquad (2.8)$$

En fonction des constantes de rigidité, les équations d'élasticité (2.5) s'écrivent :

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3 \qquad (2.9)$$

$$0 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3 \qquad (2.10)$$

$$0 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_3 \qquad (2.11)$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \qquad (2.12)$$

De ces relations, nous tirons :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{C_{12}}{C_{22}+C_{23}}\varepsilon_1 \qquad (2.13)$$

Et

$$\sigma_1 = \left(C_{11} - 2\frac{C_{12}^2}{C_{22}+C_{23}}\right)\varepsilon_1 \qquad (2.14)$$

Nous en déduisons le module d'Young longitudinal E_{LT} et le coefficient de Poisson ν_{LT} dans une traction longitudinale :

$$E_L = C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22}+C_{23}} \qquad (2.15)$$

$$\nu_{LT} = \frac{C_{12}}{C_{22}+C_{23}} \qquad (2.16)$$

En fonction des constantes de souplesse, les équations d'élasticité (06) s'écrivent dans un essai de traction longitudinale :

$$\varepsilon_1 = S_{11}\sigma_1\ , \qquad (2.17)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = S_{12}\sigma_1\ , \qquad (2.18)$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0\ . \qquad (2.19)$$

D'où :

$$E_L = \frac{1}{S_{11}} \qquad (2.20)$$

$$\nu_{LT} = -\frac{S_{12}}{S_{11}} \qquad (2.21)$$

– **Traction transverse**

Dans un essai de traction transverse, par exemple selon la direction 2, le champ des contraintes imposé est :

$$\sigma_2 \neq 0, \qquad (2.22)$$

$$\sigma_i = 0,\ \ i \neq 2 \qquad (2.23)$$

Les équations d'élasticité, en fonction des constantes de rigidité, s'écrivent dans ce cas :

$$0 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3 \quad (2.24)$$

$$\sigma_2 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3 \quad (2.25)$$

$$0 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_3 \quad (2.26)$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \quad (2.27)$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{C_{12}(C_{23}-C_{22})}{C_{12}^2-C_{11}C_{22}}\varepsilon_2 \quad (2.28)$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{C_{12}^2-C_{11}C_{23}}{C_{12}^2-C_{11}C_{22}}\varepsilon_2 \quad (2.29)$$

$$\sigma_2 = \left(C_{22} + \frac{C_{12}^2(C_{22}-2C_{23})+C_{11}C_{23}^2}{C_{12}^2+C_{11}C_{22}}\right)\varepsilon_2 \quad (2.30)$$

Nous en déduisons le module d'Young transverse E_T et des coefficients de Poisson ν_{21} et ν_{23}, notés respectivement ν_{TL} et $\nu_{TT'}$:

$$E_T = C_{22} + \frac{C_{12}^2(C_{22}-2C_{23})+C_{11}C_{23}^2}{C_{12}^2-C_{11}C_{22}} \quad (2.31)$$

$$\nu_{TL} = \frac{C_{12}(C_{23}-C_{22})}{C_{12}^2-C_{11}C_{22}} \quad (2.32)$$

$$\nu_{TT'} = \frac{C_{12}^2-C_{11}C_{23}}{C_{12}^2-C_{11}C_{22}} \quad (2.33)$$

En introduisant les coefficients de souplesse, les équations d'élasticité en traction transverse s'écrivent :

$$\varepsilon_1 = S_{12}\sigma_2 \quad (2.34)$$

$$\varepsilon_2 = S_{22}\sigma_2 \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_3 = S_{23}\sigma_2 \quad (2.36)$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \quad (2.37)$$

– Cisaillement longitudinal

Un essai de cisaillement longitudinal correspond à l'un des états de contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_5 \neq 0 \\ \sigma_0 = 0 \quad \text{si } i \neq 5 \end{cases} \quad (2.38)$$

Ou

$$\begin{cases} \sigma_6 \neq 0 \\ \sigma_i = 0 \quad \text{si } i \neq 6 \end{cases} \quad (2.39)$$

Dans le deuxième cas, les équations d'élasticité s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0, \\ \sigma_6 = C_{66}\varepsilon_6 \end{cases} \tag{2.40}$$

Nous en déduisons le module de cisaillement longitudinal G_{LT} :

$$G_{LT} = C_{66} \tag{2.41}$$

$$\text{Ou } G_{LT} = \frac{1}{S_{66}} \tag{2.42}$$

2. MECANISMES D'ENDOMMAGEMENT DES MATERIAUX COMPOSITES

De manière générale, l'endommagement est défini comme un ensemble de changements microstructuraux au sein du matériau qui occasionnent une détérioration irréversible plus ou moins importante.[05].

L'hétérogénéité et l'anisotropie des matériaux composites rendent leurs mécanismes d'endommagement nombreux et complexes.

Ces endommagements peuvent apparaître très tôt dans la vie d'une structure et constituer des zones d'amorçage de rupture macroscopique fortement préjudiciables à son intégrité. [10]

2.1. Les mécanismes de rupture dans un composite unidirectionnel

La rupture finale d'un composite unidirectionnel est le résultat de l'accumulation de divers mécanismes élémentaires [09] :

- la rupture des fibres ;
- la rupture transverse de la matrice ;
- la rupture longitudinale de la matrice ;
- la rupture de l'interface fibre-matrice.

Généralement, un mécanisme n'est pas isolé, mais divers mécanismes coexistent.

Ces mécanismes se développent suivant la nature des matériaux et les conditions de sollicitations mécaniques imposées.

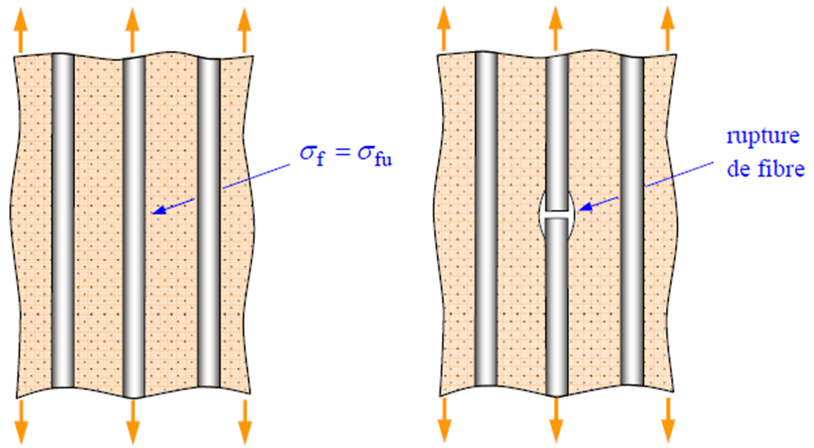


Figure (2.6) : *Rupture le fibre*

Dans un matériau composite unidirectionnel soumis à des sollicitations mécaniques, la rupture intervient lorsque la contrainte de traction σ_f dans une fibre atteint la contrainte à la rupture σ_{fu} de la fibre. (Figure 2.6).

La rupture de la fibre produit une concentration de contraintes au voisinage de la rupture. La redistribution de ces contraintes, et par conséquent le processus de rupture résultant, dépend principalement :

- de la contrainte à la rupture des fibres ;
- de la capacité de la matrice à absorber l'énergie libérée ;
- des propriétés de l'interface fibre-matrice, etc. .

Les figures (2.7) montrent les différents processus de rupture de la matrice associés à la rupture d'une fibre.

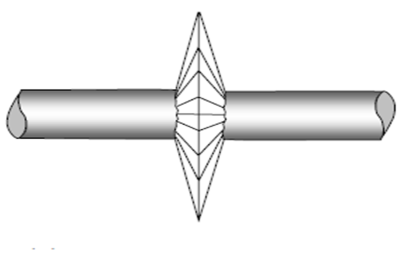
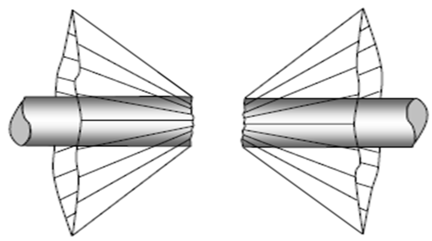
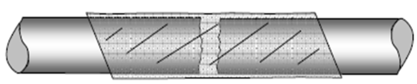
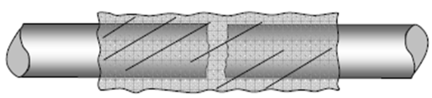
	
Rupture transverse de la matrice	Rupture en cisaillement de la matrice
	
Décohésion de l'interface fibre-matrice	Rupture longitudinale de la matrice

Figure (2.7) *: différents modes de rupture de la matrice associés à la rupture d'une fibre.*

La fissuration de la matrice peut se produire, soit par fissuration transverse (figure 2.8) lorsque la contrainte en traction σ_m dans la matrice atteint la contrainte à la rupture σ_{mu} de la matrice.

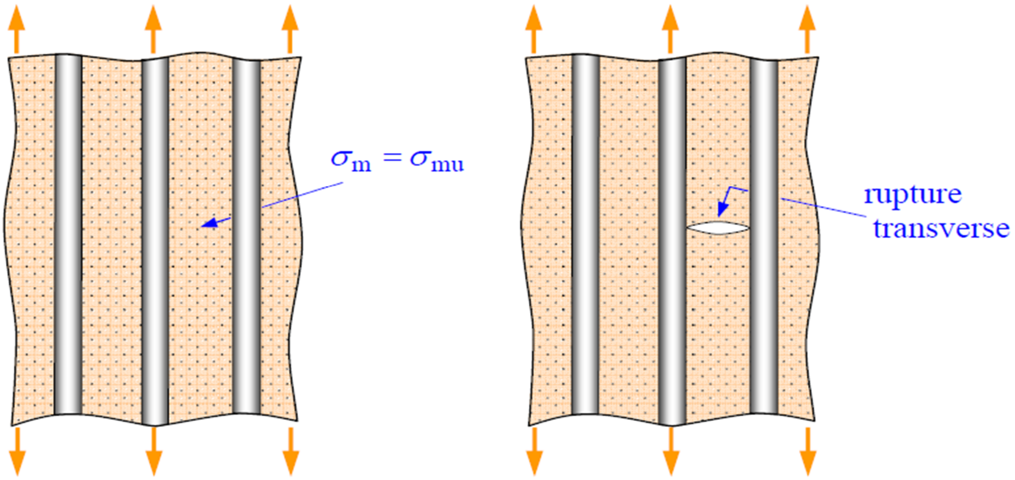


Figure (2.8) *: rupture transverse de la matrice*

Soit par fissuration longitudinale (figure 2.9) lorsque la contrainte de cisaillement τ_m dans la matrice atteint la contrainte en cisaillement à la rupture τ_{mu}, généralement au voisinage d'une fibre. Ce dernier mode de rupture, dit « splitting » par les anglo-saxons, se produit lorsque la contrainte de décohésion est supérieur à la contrainte en cisaillement à la rupture de la matrice : $\tau_d > \tau_{mu}$.

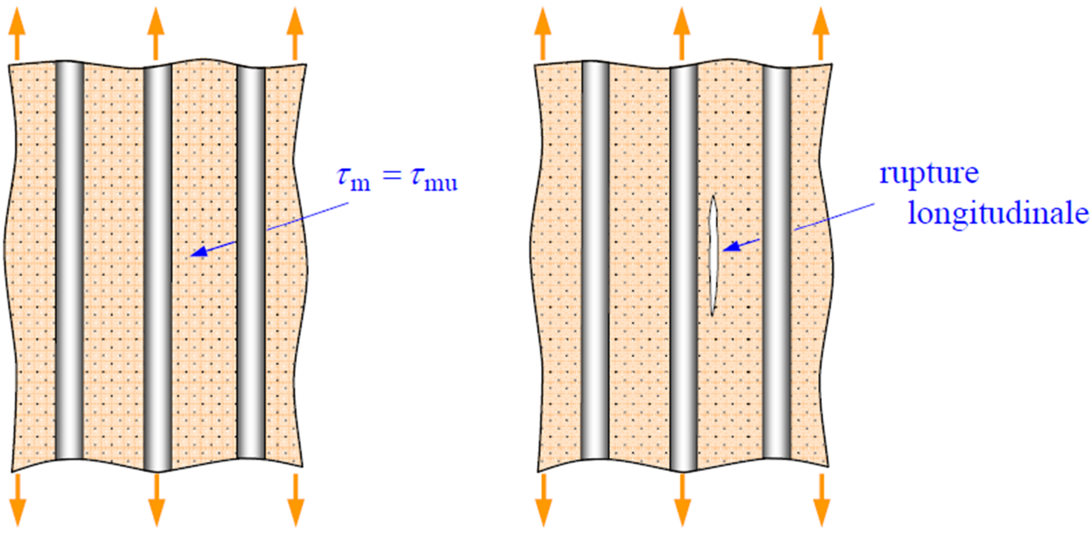


Figure (2.9) *: rupture longitudinale de la matrice.*

Dans le cas ou : $\tau_d < \tau_{mu}$, il se produit une rupture par décohésion de l'interface fibre-matrice (figure 2.10).

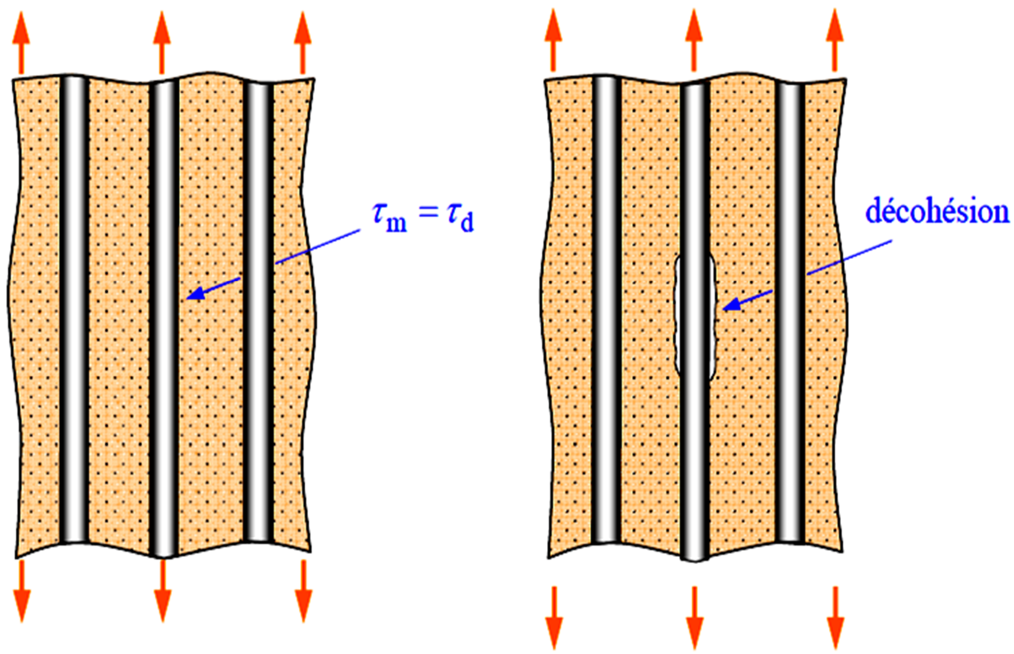


***Figure (2.10)** : décohésion fibre-matrice.*

La rupture finale d'un matériau composite unidirectionnel est le résultat de l'accumulation de ces divers mécanismes élémentaires.

L'initiation, puis la propagation de la rupture dépendent des propriétés des fibres et de la matrice, de l'interface fibre-matrice, de la fraction volumique des fibres, de l'état et condition de sollicitations mécaniques imposées.

2.2. Les mécanismes de rupture dans un composite multicouche (stratifie) [11]

Selon les études expérimentales nouvellement identifiées sur le mode de dégradation des stratifiés, une description précise de ces phénomènes dont on ne donne ici qu'une rapide énumération.

De façon générale, on distingue quatre phases dans le scénario d'endommagement d'une éprouvette lisse constituée de l'empilement de plis unidirectionnels (Figure 2.11) :

1. la décohésion entre les fibres et la matrice et la microfissuration matricielle ;
2. l'apparition de fissures transverses, parallèles aux fibres et traversant le pli, résultant de la coalescence de micro dommages ;
3. l'apparition et l'évolution de micro délaminages en pointe de fissure transverse au niveau des interfaces entre plis ;
4. la ruine finale du stratifié par rupture des fibres, délaminage macroscopique ou rupture matricielle suivant le type de sollicitations et la stratification.

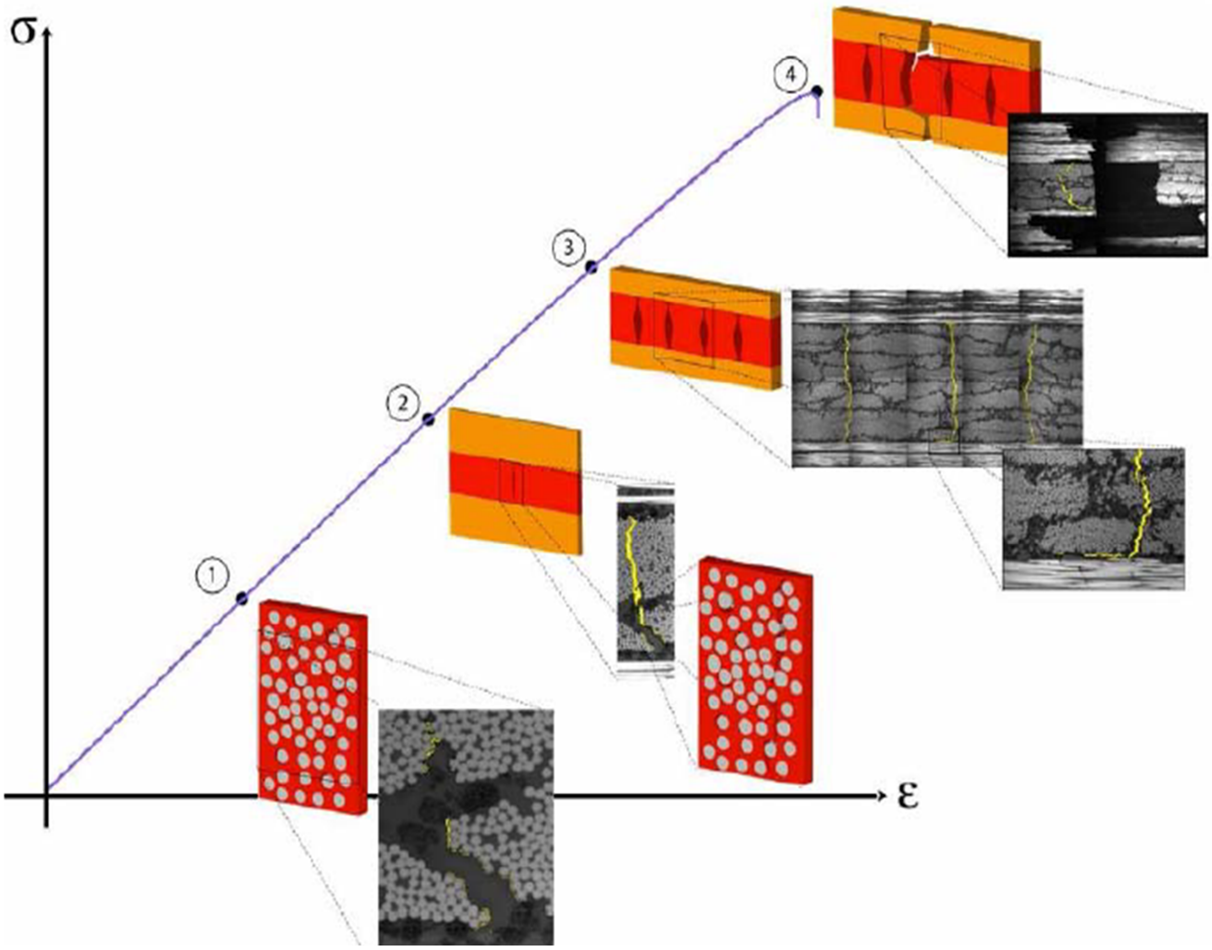


Figure (2.11) *: Un scénario d'endommagement au cours du chargement d'un composte stratifié.*

Remarque

La majorité des auteurs traite chaque mode de rupture par un critère. On distingue trois modes d'endommagement principaux : la fissuration de la matrice, la rupture des fibres et le délaminage.[11]

2.2.1. Fissuration matricielle

L'endommagement de la matrice est le premier mode de rupture induit par l'impact dans le sens transverse au stratifié. Souvent, il prend la forme de fissuration matricielle ou aussi de décohésion entre la fibre et la matrice. Les fissurations sont dues à la différence de propriétés entre la matrice et les fibres et sont en général parallèles à la direction des fibres dans les plis unidirectionnels. On distingue 2 types de fissuration de la matrice dans le cas d'impact sur plaque composite : les fissurations dues au cisaillement et les fissurations dues à la flexion (Figure 2.12). [12]

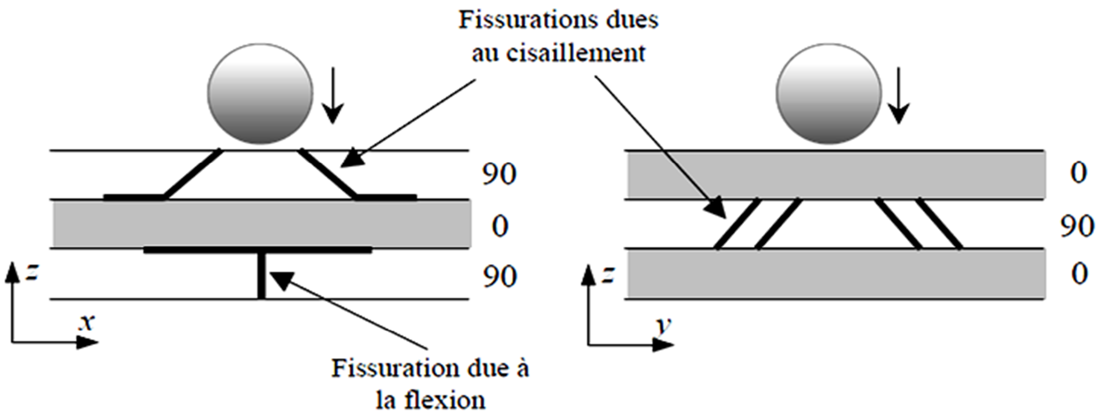


Figure (2.12) *: type de fissuration de la matrice*

Le type de fissuration de matrice est souvent associé à la forme globale de la structure impactée. Les structures longues et minces sont susceptibles de subir des fissurations dues à la flexion à cause d'une flèche importante. Les structures épaisses sont, quant à elles, plus rigides et par conséquent la force d'impact est plus importante ce qui induit des fissurations dues aux cisaillements.

2.2.2. Rupture de fibres

Dans l'ensemble du processus d'endommagement, la rupture de fibres intervient généralement après la fissuration de la matrice et après le délaminage. La rupture de fibres est due soit à une importante contrainte normale σ_{11} soit au cisaillement.

2.2.3. Délaminage

Le délaminage est l'un des modes d'endommagement primordiaux dans les structures composites. Il se caractérise par une séparation ou un manque de liaison entre deux plis d'un stratifié composite. Il est associé à une fissure qui se propage généralement dans une région riche en résine formant une interface entre deux plis adjacents. Dans le cas d'impact sur plaque composite, d'après LIU, le délaminage résulte de la différence entre les rigidités en flexion des plis adjacents : le long des fibres, la plaque à tendance à fléchir d'une façon différente que dans le sens travers. D'après les différentes études déjà effectuées, le délaminage pour structures impactées semble avoir lieu seulement en présence de fissurations dans la matrice, c'est-à-dire, lorsque les plis de part et d'autre de l'interface sont endommagés par fissuration et le pli inférieur à l'interface est localement saturé en fissures. A ce moment là, l'énergie due au choc passe dans l'ouverture d'une liaison moins forte : l'interface entre plis d'orientations différentes [BONINI (1995)]. En reprenant les types de fissurations de la matrice présentés au paragraphe précédent, la fissuration inclinée de cisaillement dans le pli supérieur est arrêtée par le changement de la direction des fibres lorsqu'elle arrive jusqu'à l'interface (Figure 2.13). Pour cela elle se propage entre les plis : c'est le délaminage. Ce délaminage est limité par les fissurations transverses du pli inférieur.

La fissuration verticale due à la flexion provoque, quant à elle, le délaminage dans l'interface la plus basse.

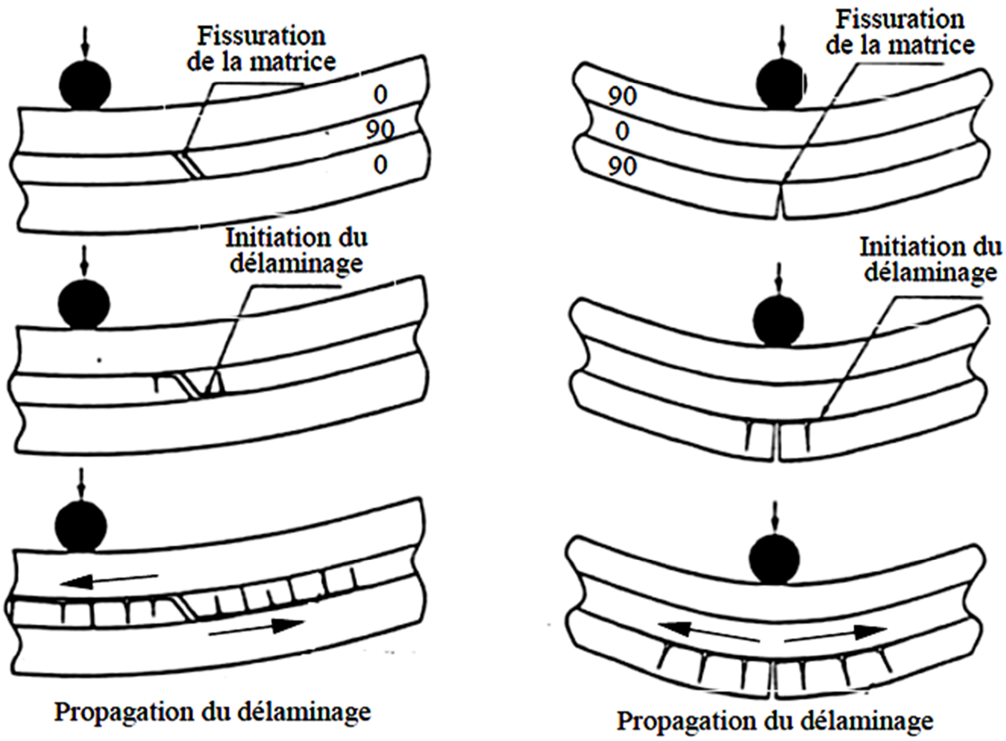


Figure (2.13) *: Délaminage sous impact*

3. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous nous sommes penchés sur les matériaux composites, nous avons vu les différents types de composites, leurs constituants, la loi de comportement.

Aussi nous avons introduit une brève aperçu sur le mécanisme d'endommagement des composites en général et des stratifiés en particulier.

Chapitre III

Principe de l'écoulement D'énergie

1. INTRODUCTION

Les systèmes mécaniques sont en général caractérisés par leurs énergies cinétique et potentielle (cas des systèmes discrets) et leurs densités d'énergies (cas des systèmes continues). Ces énergies sont le produit de deux grandeurs identiques (vitesse pour l'énergie cinétique et force pour une énergie potentielle d'origine élastique). Leur grandeur complexe associée se ramène donc à un réel qui est leur valeur moyenne dans le temps. La puissance est définie comme le produit de la force par la vitesse (dans le cas des systèmes discrets), et l'intensité (ou débit d'énergie) comme le produit de la contrainte par la vitesse (cas des systèmes continus).

Les vibrations mécaniques sont souvent symbolisées par un ensemble d'oscillateurs constitués de masses, ressorts et d'amortisseurs. Afin de comprendre les relations qui existent entre puissances, énergies et réponses dynamiques de ces systèmes, Un moyen simple existe, c'est celui de l'analyse vibratoire de ces systèmes.

Ces relations nécessitent bien une discussion que nous essayons d'introduire dans ce chapitre.

2. ENERGIES CINETIQUE ET ENERGIE POTENTIELLE

Comme citées en l'introduction, les énergies cinétique et potentielle sont le produit de deux grandeurs identiques (vitesse pour l'énergie cinétique et force pour une énergie potentielle).

En régime établi, la vitesse du système à un degré de liberté de la figure 3.1 soumis à une excitation harmonique, s'écrit [01] :

$$v(t) = |V| cos\omega t \tag{3 .1}$$

Avec,

$|V|$: Amplitude de la vitesse.

ω: Pulsation d'excitation.

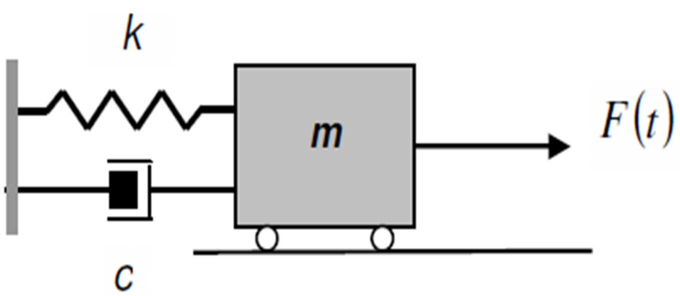


Figure (3.1) *: Système discret à 1 ddl.*

L'énergie cinétique T est alors donnée par l'expression :

$$T = \frac{1}{2} m v^2(t) = \frac{1}{2} m |V|^2 cos^2 \omega t \tag{3 .2}$$

Pouvant être réécrite sous la forme :

$$T = \frac{1}{4}m|V|^2(1 + cos2\omega t) \qquad (3 .3)$$

La moyenne temporelle de l'énergie cinétique est donc égale à:

$$< T >= \frac{1}{4}m|V|^2 \qquad (3 .4)$$

L'énergie cinétique varie de zéro à sa valeur maximale de $\frac{1}{4}m|V|^2$ avec une fréquence deux fois plus grande que celle de la vitesse $v(t)$. (Voir la figure 3.2)

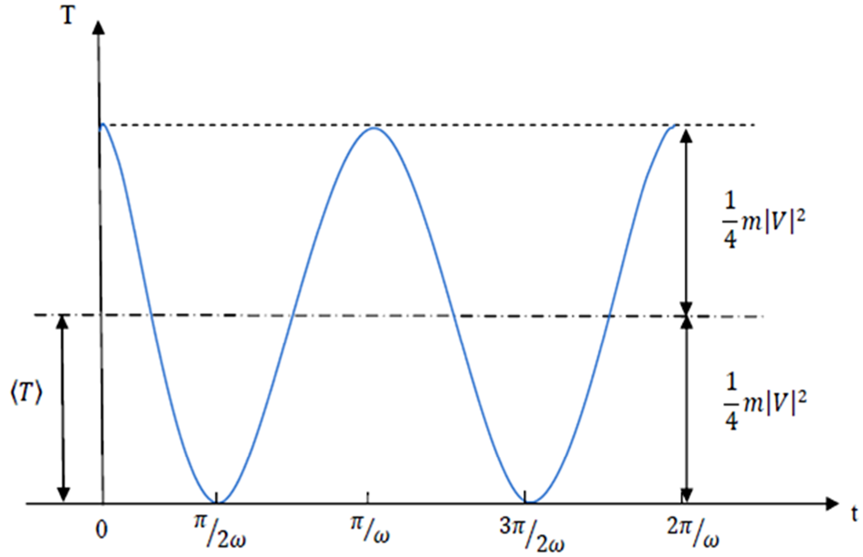


Figure (3.2) *: Energie cinétique pour le système à 1 ddl.*

La variation de l'énergie potentielle présente des similitudes avec celle de l'énergie cinétique. L'expression du déplacement en régime établi est donné par :

$$x(t) = |X|cos\omega t \qquad (4 .5)$$

$|X|$: Amplitude du déplacement.

ω: Fréquence d'excitation.

L'énergie potentielle est :

$$U = \frac{1}{2}kx^2(t) = \frac{1}{2}k|X|^2cos^2\omega t \qquad (3 .6)$$

$$\rightarrow U = \frac{1}{4}k|X|^2(1 + cos2\omega t) \qquad (3 .7)$$

L'énergie potentielle moyennée dans le temps est :

$$< U >= \frac{1}{4}k|X|^2 \qquad (3 .8)$$

3. ENERGIE ET PUISSANCE

La puissance est définie comme le produit de la force par la vitesse (dans le cas des systèmes discrets).

L'équation du mouvement du système à 1ddl représenté dans la figure (3.1), est :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \tag{3.9}$$

La multiplication des deux parties de cette égalité par la vitesse *v*(t) donne :

$$m\ddot{x}v + cv^2 + kxv = f(t)vv(t) \tag{3.10}$$

Avec :

$$m\ddot{x}v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{dT}{dt} \tag{3.11}$$

Et :

$$kvx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = \frac{dU}{dt} \tag{3.12}$$

L'équation de mouvement (3.10) devient :

$$cv^2 + \frac{d}{dt}(T + U) = f(t)v(t) \tag{3.13}$$

Cette équation représente l'expression du principe de la conservation de l'énergie mécanique du système forcé, où :

cv^2: taux énergie dissipée par l'amortissement.

$\frac{d}{dt}(T + U)$: taux énergie des éléments élastique et d'inertie.

et, $f(t)v(t)$: puissance fournie au système par la force d'excitation.

En régime établi et en supposant que la force d'excitation est sinusoïdale, nous pouvons écrire :

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(Fe^{j\omega t} + F^*e^{-j\omega t}\right) \tag{3.14}$$

et,

$$v(t) = \frac{1}{2}\left(Ve^{j\omega t} + V^*e^{-j\omega t}\right) \tag{3.15}$$

La force F et la vitesse V sont complexes, et l'astérisque " * " indique leurs complexes conjugués.

L'intégration de l'équation (3.15) donne le déplacement :

$$x(t) = \frac{1}{2j\omega}\left(Ve^{j\omega t} - V^*e^{-j\omega t}\right) \tag{3.16}$$

Les carrés de la vitesse et du déplacement sont donnés par :

$$v^2(t) = \frac{1}{4}V^2e^{2j\omega t} + \frac{1}{4}V^{*2}e^{-2j\omega t} + \frac{1}{2}VV^* \quad (3.17)$$

et, $$x^2(t) = -\frac{1}{4\omega^2}\left(V^2e^{2j\omega t} + \frac{1}{4}V^{*2}e^{-2j\omega t} - 2VV^*\right) \quad (3.18)$$

Ces équations peuvent être réécrites sous la forme complexe :

$$v^2(t) = \frac{1}{2}|V|^2 + \frac{1}{2}Re\{V^2e^{2j\omega t}\} \quad (3.19)$$

et,

$$x^2(t) = \frac{1}{2\omega^2}|V|^2 - \frac{1}{2\omega^2}Re\{V^2e^{2j\omega t}\} \quad (3.20)$$

Ainsi, les énergies potentielle et cinétique deviennent:

$$T = \frac{m}{4}|V|^2 + \frac{m}{4}Re\{V^2e^{2j\omega t}\} \quad (3.21)$$

$$U = \frac{k}{4\omega^2}|V|^2 - \frac{K}{4\omega^2}Re\{V^2e^{2j\omega t}\} \quad (3.22)$$

Les premiers termes de ces équations sont respectivement < T >, et < U >, donnés dans les équations (3.4) et (3.8).

Les dérivées par rapport au temps des expressions (3.21) et (3.22) sont :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}Re\{j\omega mV^2e^{2j\omega t}\} \quad (3.23)$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2}Re\left\{\frac{k}{j\omega}V^2e^{2j\omega t}\right\} \quad (3.24)$$

En remplaçant ces deux dernières équations et (3.19) dans l'équation (3.13), on obtient :

$$\frac{1}{2}c|V|^2 + \frac{1}{2}Re\left\{\left(\frac{K}{j\omega} + j\omega m + c\right)V^2e^{2j\omega t}\right\} = f(t)v(t) \quad (3.25)$$

Utilisant les expressions (3.14) et (3.15) pour développer le terme droit de l'égalité (3.25), ainsi :

$$f(t)v(t) = \frac{1}{2}Re\{F^*V\} + \frac{1}{2}Re\{FVe^{2j\omega t}\} \quad (3.26)$$

Comme, l'impédance du système est égale à $\left(\frac{K}{j\omega} + j\omega m + c\right)$ et le produit $\left(\frac{K}{j\omega} + j\omega m + c\right)V$ est égal à F, l'équation (3.25) peut alors être réécrite sous la forme :

$$\frac{1}{2}c|V|^2 + \frac{1}{2}Re\{FVe^{2j\omega t}\} = f(t)v(t) \quad (3.27)$$

Le produit $f(t)v(t)$ est la puissance instantanément fournie au système par la force d'excitation externe $f(t)$.

la moyenne temporelle de la puissance < P > admise par le système est alors égale à :

$$< P >= \frac{1}{2}Re\{F^*V\} = \frac{1}{2}c|V|^2 \quad (3.28)$$

L'équation précédente peut être réécrite sous la forme :

$$< P >= \frac{1}{2}|F||V|cos\emptyset_v \qquad (3.29)$$

$\emptyset_v$: angle de déphasage de la vitesse par rapport à la force d'excitation.

La courbe de cette expression est donnée par la figure 3.3.

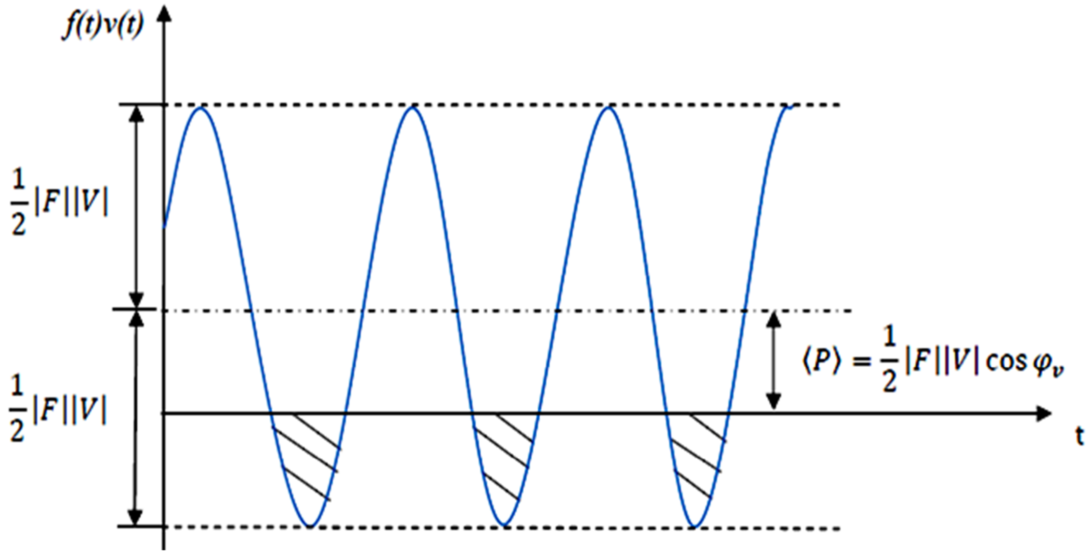


Figure (3.3) : *Courbe de la puissance en fonction du temps*

La partie hachurée de la courbe de la figure 3.3 indique la partie négative de la puissance durant chaque cycle.

L'aire de chacune des parties au dessous de l'axe du temps constitue la quantité d'énergie périodiquement remise à la source d'excitation par le système : cette énergie existe sous forme d'énergies cinétique et potentielle. Nous constatons que, malgré l'existence d'élément dissipatif dans le système, la quantité d'énergie restituée à la source reste appréciable.

Quand le système est excité à une fréquence égale à la fréquence naturelle $w = w_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$, Øv est égal à zéro, donc cos (Øv) est égal à l'unité ; dans ce cas la puissance fournie au système est limitée par l'amortissement seulement, donc la courbe de la puissance sera complètement au dessus de l'axe du temps ; ainsi, quand $w = w_n$, il n'y aura pas d'énergie remise à la source d'excitation par le système.

Si ce système est non amorti et excité à la fréquence naturelle, il y aura une quantité d'énergie gagnée durant chaque cycle par le système, puisque le système ne contient pas d'élément dissipatif, l'amplitude augmentera après chaque cycle, et le régime établi ne sera jamais atteint, ce qui provoquera la destruction du système. Toutefois, si la fréquence d'excitation est différente de celle de la résonance, cos (Øv) sera égal à zéro, et la courbe représentative de la puissance en fonction du temps sera une sinusoïde symétrique par rapport à l'axe du temps, et la valeur de la puissance moyenne admise par le système sera nulle, autrement dit l'énergie fournie au système sera aussitôt restituée à la source.

4. RELATION EXISTANT ENTRE LA MOYENNE TEMPORELLE DE LA PUISSANCE, LA FREQUENCE D'EXCITATION ET L'AMORTISSEMENT [19]

La puissance moyenne du système représenté dans la figure 3.1, sera exprimée en fonction des paramètres du système.

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}|F|^2 \frac{\omega^2 c}{(k-\omega^2 m)^2+\omega^2 c^2} \tag{3.30}$$

Posant $\lambda = \omega^2$,on aura l'expression de la puissance moyenne suivante :

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}|F|^2 \frac{\lambda c}{(k-\lambda m)^2+\lambda c^2} \tag{3.31}$$

La variation de puissance moyenne fournie au système en fonction de la fréquence d'excitation est représentée graphiquement dans la figure 3.4,

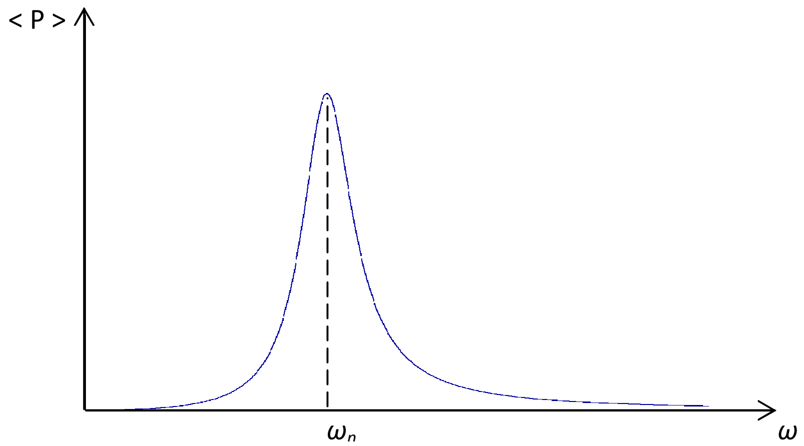


Figure (3.4) : *Variation de la puissance moyenne en fonction de la fréquence*

La valeur de λ pour laquelle la moyenne temporelle de la puissance fournie au système est maximale est obtenue en annulant la dérivée de $\langle P\rangle$ par rapport àλ,

$$\frac{d\langle P\rangle}{d\lambda} = \frac{|F|^2}{2} \frac{c\left[(k-\lambda m)^2+\lambda c^2\right]-c\left[\lambda c^2-2m\lambda(k-\lambda m)\right]}{[(k-\lambda m)^2+\lambda c^2]^2} = 0 \tag{3.32}$$

Le coefficient d'amortissement qui permet d'avoir la puissance maximale est obtenu par la résolution de l'équation précédente, qui donne le résultat suivant :

$$(K-\omega^2)^2 = \omega^2 c^2 \qquad (3.33)$$

Ainsi, quand la fréquence d'excitation est fixe, le maximum de la puissance est fourni quand le coefficient d'amortissement satisfait la condition suivante :

$$c = \left|\frac{K-\omega^2 m}{\omega}\right| \qquad (3.34)$$

Nous constatons d'après l'équation (3.32), que le coefficient d'amortissement pour la valeur maximale de la puissance dépend de la fréquence d'excitation. Si le système est excité à la fréquence naturelle $\omega = \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$, le maximum de la puissance a lieu quand l'amortissement est nul. En revanche si $\omega \neq \omega_n$, la valeur du coefficient d'amortissement est déterminée par l'expression (3.34)

Les variations de la puissance fournie au système en fonction de l'amortissement dans les deux cas d'excitation sont données dans la figure 3.5.

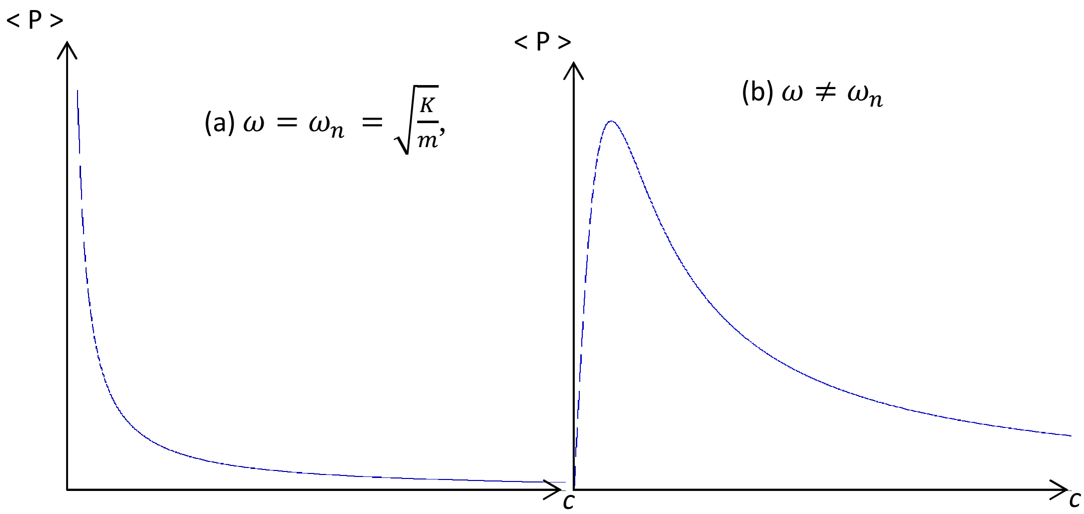


Figure (3.5) : *Variation de la puissance moyenne en fonction de l'amortissement.*

5. PUISSANCE FOURNIE AU SYSTEME

Les puissances fournies au système sont calculées en multipliant les forces d'entrée par les complexes conjugués des vitesses résultantes aux points d'excitations. La puissance totale d'entrée est calculée comme suit, [02]

$$P_{entrée} = \frac{1}{2}\, R_e\{\textstyle\sum_{i=1}^{n} F_i V_i^*\} \qquad (3.34)$$

Où,

i : point d'excitation.

n : nombre de points d'excitation.

Ce calcul est un calcul global qui est indépendant du type d'élément.

6. PUISSANCE EMISE PAR LE SYSTEME

La puissance de sortie est la puissance quittant le système par les supports vers un ou plusieurs autres systèmes couplés à celui-ci. Les systèmes externes peuvent être modélisés à l'aide des éléments massiques, ressort et amortisseur. Ces éléments scalaires doivent être reliés aux nœuds de la structure étudiée. Les forces dues à ces éléments sont combinées avec les vitesses des nœuds d'attaches pour calculer la puissance émise par cette structure. La puissance de sortie est égale à,[02]

$$P_{sortie} = \frac{1}{2} R_e\left\{\sum_{j=1}^{n} F_j V_j^*\right\} \qquad (3.34)$$

Où, j : nœud de jonction.

n : nombre de nœuds de jonction.

7. CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons fait un rappel des bases élémentaires sur les notions d'énergie et de puissance dans les systèmes vibratoires discrets, la compréhension de ces notions nous permettra de mieux appréhender l'étude de ces systèmes.

Chapitre IV

Méthode des éléments finis associée à l’écoulement de l’énergie

1. INTRODUCTION

Dans chacune des industries : automobile, navale, aéronautique, ferroviaire et le génie civil, le calcul est indispensable lorsque l'on cherche à obtenir une solution optimisée pour réduire les coûts et les délais de fabrication. Grâce au calcul, l'ingénieur peut tester plusieurs configurations pour améliorer le comportement d'un modèle à une prestation donnée. Cela évite de multiplier les prototypes et les essais tests réels, les supports physiques ne servent plus à chercher une solution, ils permettent de la valider.

La méthode des éléments finis fait partie des outils de mathématiques appliquées. Il s'agit de mettre en place, à l'aide des principes recueillis de la formulation variationnelle ou formulation faible, un algorithme discret mathématique permettant de rechercher une solution approchée d'une équation aux dérivées partielles sur un domaine compact avec conditions aux bords ou dans l'intérieur du compact. Il s'agit donc avant tout de la résolution approchée d'un problème, où, grâce à la formulation variationnelle ou de l'énergie, qui constitue une approche puissante et qui est très utilisée pour formuler les équations des éléments en mécanique des structures.

2. LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

De toutes les méthodes de discrétisation, la méthode des éléments finis est la plus utilisée car:

- elle peut traiter des problèmes de géométrie complexe ;
- elle couvre de nombreux domaines de la physique ;
- les moyens informatiques actuels (puissance des calculateurs, outils de visualisation) la rendent facile de mise en œuvre.

2.1. Principe de la méthode

La méthode des éléments finis est une méthode approchée de calcul numérique, permettant de déterminer l'équilibre élastique des structures continues à deux ou trois dimensions : structures planes, solides élastiques, plaques minces, membranes et coques.

Grâce au principe de d'Alembert, elle permet d'étudier les vibrations de ces structures. Elle peut également être étendue aux structures visco-élastiques ou plastiques. [14]

L'idée fondamentale de cette méthode est de discrétiser le problème en décomposant le domaine matériel à étudier en éléments de forme géométrique simple. Sur chacun de ces éléments il sera plus simple de définir une approximation nous permettant d'appliquer les méthodes présentées dans la première partie de ce chapitre. Il ne reste alors qu'à assembler les formes matricielles élémentaires pour obtenir les équations relatives à la structure à étudier. C'est sous cette forme rationaliste qu'elle est utilisée par les ingénieurs.

2.2. Démarche éléments finis [15]

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis sont les suivantes:

- discrétisation du milieu continu en sous domaines ;
- construction de l'approximation nodale par sous domaines ;
- calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème ;
- assemblage des matrices élémentaires - Prise en compte des conditions aux limites ;
- résolution du système d'équations.

2.2.1. Discrétisation géométrique

Cette opération consiste à procéder à un découpage du domaine continu en sous domaines :

$$D = \sum_{e=1}^{n_e} D_e \qquad (4.1)$$

Il faut donc pouvoir représenter au mieux la géométrie souvent complexe du domaine étudié par des éléments de forme géométrique simple. Il ne doit y avoir ni recouvrement ni trou entre deux éléments ayant une frontière commune. Lorsque la frontière du domaine est complexe, une erreur de discrétisation géométrique est inévitable. Cette erreur doit être estimée, et éventuellement réduite en modifiant la forme ou en diminuant la taille des éléments concernés comme proposé sur la figure (4.1). Sur chaque élément nous allons chercher à définir une approximation de la fonction solution

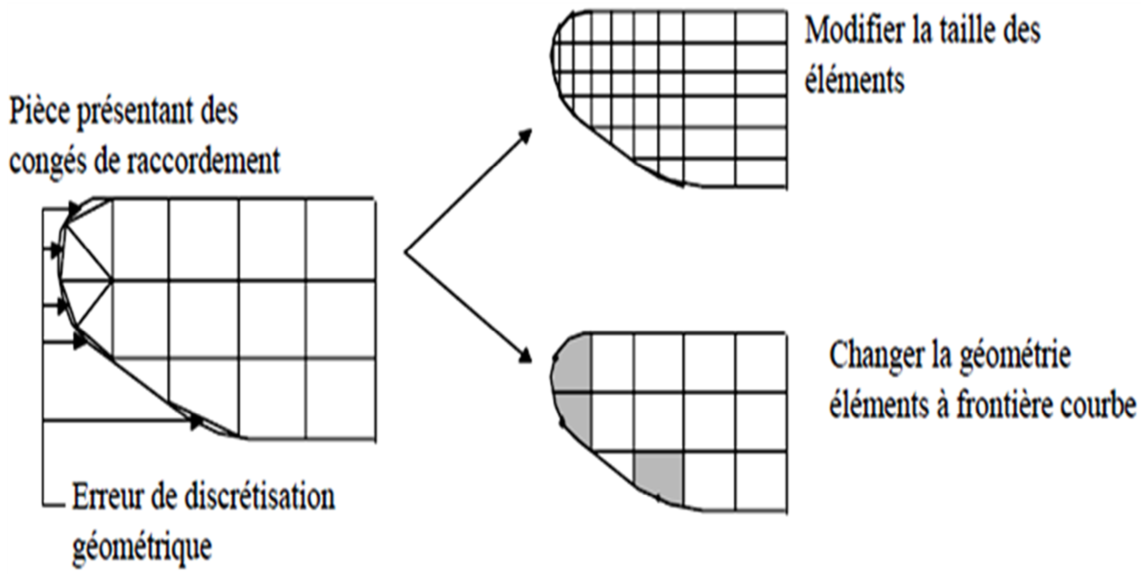


Figure (4.1) *: Erreur de discrétisation géométrique.*

2.2.2. Approximation nodale

L'approximation par éléments finis est une approximation nodale par sous domaines ne faisant intervenir que les variables nodales du domaine élémentaire De :

$$\forall M \in D_e , u^*(M) = [N(M)]\{u_n\} \tag{4.2}$$

$u^*(M)$: Valeur de la fonction approchée en tout point M de l'élément.

$[N(M)]$: Matrice ligne des fonctions d'interpolation de l'élément.

$\{u_n\}$: Variables nodales relatives aux nœuds d'interpolation de l'élément.

Notons que dans le cas général le champ à approcher est un champ vectoriel. Nous utilisons alors la notation matricielle suivante :

$$\{ u^*(M_i)\} = [N(M)]\{u_n\} \tag{4.3}$$

Les nœuds *Mi* sont des points de l'élément pour lesquels on choisi d'identifier l'approximation ***u**** à la valeur du champ de variables ***u***. Nous en déduisons que

$$\forall M_i , u^*(M_i) = u_i \tag{4.4}$$

Soit pour l'approximation nodale :

$$\forall M_i , N_j^*(M_i) = \begin{cases} 0 \ si \ i \neq j \\ 1 \ si \ i = j \end{cases} \tag{4.5}$$

Illustration 1 : construction d'une approximation nodale linéaire

Soit une fonction d'une variable définie sur un domaine discrétisé en trois éléments à deux nœuds. Construisons l'approximation nodale associée à ces éléments (figure 4.2).

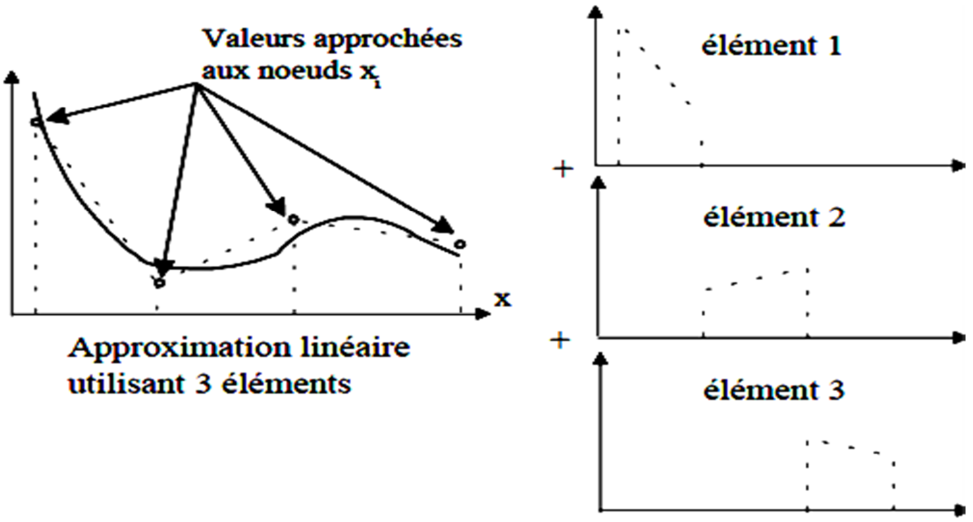


Figure (4.2) : *Approximation nodale à une dimension*

Pour chaque élément, nous avons deux variables nodales, nous cherchons donc une approximation à deux paramètres. Le plus simple est d'utiliser une base polynomiale, ce qui nous conduit à une approximation linéaire de la forme :

$$u^*(x) = [1, x]\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \tag{4.6}$$

Or pour $x = 0$ $\quad u^*(0) = u_i$

Pour $x = l_e$ $\quad u^*(l_e) = u_j$

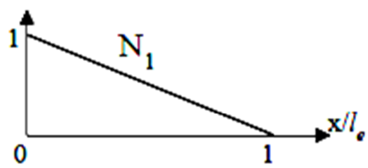
Nous en déduisons $\begin{cases} a_1 = u_i \\ a_2 = \frac{u_j - u_i}{l_e} \end{cases}$

Soit pour l'approximation

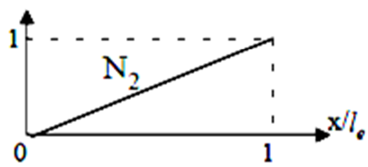
$$u^*(x,t) = [1 - \frac{x}{l_e}, \frac{x}{l_e}]\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \tag{4.7}$$

Nous venons de construire les deux fonctions d'interpolation de l'élément linéaire à deux nœuds :

$N_1(x) = 1 - \frac{x}{l_e}$ Nous vérifions que $\begin{cases} N_1(0) = 1 \\ N_1(l_e) = 0 \end{cases}$



$N_2(x) = \frac{x}{l_e}$ Nous vérifions que $\begin{cases} N_2(0) = 0 \\ N_2(l_e) = 1 \end{cases}$



➢ Construction de l'approximation nodale

L'interpolation nodale est construite à partir d'une approximation générale :

$$\forall M, \quad u^*(M) = [\Phi(M)]\{a\} \tag{4.8}$$

Avec : $[\Phi]$ Est une base de fonctions connues indépendantes (en générale une base polynomiale)

$\{a\}$ Vecteur des paramètres de l'approximation (paramètres généralisés), ils n'ont pas de signification physique.

Pour utiliser une base polynomiale complète, le nombre de termes doit être égal au nombre de variables nodales à identifier. Si l'on ne peut pas utiliser un polynôme complet le meilleur choix consiste à respecter la symétrie des monômes conservés.

En identifiant aux nœuds l'approximation u* à la valeur du champ de variables u, nous pouvons exprimer les paramètres généralisés {a} en fonction des variables nodales u_n

$$u_n = u^*(M_n) = [\Phi(M_n)]\{a\} \qquad (4.9)$$

$$soit\text{: } \{a\} = [\Phi(M_n)]^{-1}\{u_n\} \qquad (4.10)$$

Illustration 2 : construction des fonctions d'interpolation d'un élément triangulaire

Soit un élément triangulaire à trois nœuds (figure 4.3).

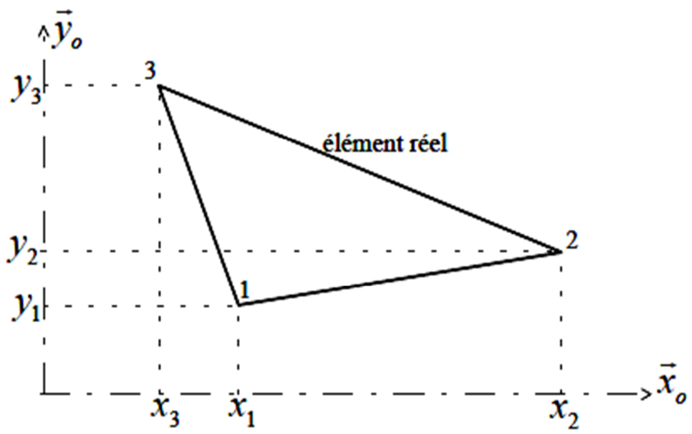


Figure (4.3) : *élément triangulaire à trois nœuds.*

Nous avons trois variables nodales, nous cherchons donc une approximation polynomiale linéaire de la forme :

$$u^*(x,y) = [1\ x\ y]\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (4.11)$$

Identifions les valeurs nodales :

$$u^*\left(x_i, y_j\right) = u_i \qquad (4.12)$$

Nous obtenons la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} \qquad (4.13)$$

Il est simple de vérifier que la relation inverse est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} \Delta_{24} & \Delta_{41} & \Delta_{12} \\ y_{24} & y_{41} & y_{12} \\ x_{42} & x_{14} & x_{21} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Avec $\begin{cases} A = aire\ du\ triangle \\ x_{ij} = x_i - x_j\ et\ y_{ij} = y_i - y_j \\ \Delta_{ij} = x_i y_j - x_j y_i \end{cases}$

Reportons ce résultat dans l'approximation, nous obtenons :

$$u^*(x,y) = [N_1\ N_2\ N_4]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Avec par permutation circulaire de ijk

$$N_i = \frac{1}{2N}(\Delta_{jk} + xy_{jk} - yx_{jk}) \quad (4.16)$$

Nous venons de construire les fonctions d'interpolation d'un élément triangulaire quelconque, si la démarche est simple les calculs le sont moins du fait de la forme quelconque de l'élément. En pratique les fonctions d'interpolation sont construites pour des éléments possédant des propriétés géométriques permettant de simplifier les calculs.

2.2.3. Matrices élémentaires

Nous présentons maintenant la démarche générale utilisée pour construire les formes matricielles sur chaque élément. Pour illustrer notre propos, nous utiliserons comme point de départ la forme intégrale du principe des travaux virtuels associée à un problème de mécanique des structures.

Soit la forme intégrale du PTV ;

$$\forall \delta\vec{u} \quad \int_D \rho\ddot{\vec{u}}.\delta\vec{u}\,dV = -\int_D \bar{\bar{\sigma}} : \overline{\overline{\delta\varepsilon}}\,dV + \int_D \vec{f}.\delta\vec{u}\,dV + \int_{\partial D} \vec{T}.\delta\vec{u}\,dS \quad (4.17)$$

Sur chaque élément nous utilisons l'approximation nodale pour exprimer le champ des déplacements $\vec{u}$ et le champ des déplacements virtuels $\delta\vec{u}$

Ainsi le produit scalaire :

$$\vec{\ddot{u}}(M).\delta\vec{u}(M) = \{\delta u_n\}^T[N(M)]^T[N(M)]\{\ddot{u}_n\} \tag{4.18}$$

D'où le premier terme de l'équation (4.15) s'écrit :

$$\int_D \rho\vec{\ddot{u}}.\delta\vec{u}\,dV = \{\delta u_n\}^T[M_e]\{\ddot{u}_n\} \tag{4.19}$$

Avec : $[M_e]$ matrice masse élémentaire égale à :

$$[M_e] = \int_{De}[N(M)]^T\rho[N(M)]dV \tag{4.20}$$

Pour exprimer le second terme les deux tenseurs sont représentés par des vecteurs nous permettant de remplacer le produit doublement contracté par un simple produit scalaire.

Pour un milieu 4D : $\bar{\bar{\varepsilon}} \to \{\varepsilon\}^T =< \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{xz}, 2\varepsilon_{yz} >$

$$\bar{\bar{\sigma}} \to \{\sigma\}^T =< \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz} >$$

De plus le vecteur des déformations s'exprime en fonction du champ des déplacements. Ces relations géométriques font apparaître des opérateurs différentiels appliqués à $\vec{u}$ .Que nous notons sous forme matricielle :

$$\{\varepsilon(M)\} = [L]\{\vec{u}(M)\} = [L][N(M)]\{u_n\} = [B(M)]\{u_n\} \tag{4.21}$$

$[B]$ Matrice d'opérateurs différentiels appliqués aux fonctions d'interpolation

Les lois de comportement permettent d'exprimer le vecteur des contraintes en fonction du vecteur des déformations, soit :

$$\{\sigma(M)\} = [D(M)]\{\varepsilon(M)\} = [D(M)][B(M)]\{u_n\} \tag{4.22}$$

D'où le second terme :

$$\int_{De} \bar{\bar{\sigma}} : \overline{\overline{\delta\varepsilon}}\, dV = \{\delta u_n\}^T[K_e]\{\ddot{u}_n\} \tag{4.23}$$

Avec : $[K_e]$ matrice raideur élémentaire égale à :

$$[K_e] = \int_{De}[B(M)]^T[D(M)][B(M)]dV \tag{4.24}$$

Il nous reste à exprimer le travail virtuel des efforts. En pratique, on considère d'une part les efforts donnés et d'autre part les efforts inconnus qui sont les efforts nécessaires pour assurer les liaisons cinématiques. Sur chaque élément, nous utilisons l'approximation du champ des déplacements pour exprimer le travail virtuel de ces efforts.

Efforts donnés :

$$\delta T_{de} = \int_{De} \vec{f}.\delta\vec{u}\,dV + \int_{\partial De} \vec{T}.\delta\vec{u}\,dS \qquad (4.25)$$

D'où $\delta T_{de} = \{\delta u_n\}^T \{F_{de}\}$ (4.26)

Avec :

$$\{F_{de}\} = \int_{De} < N(M) >^T \{\vec{f}_d\} dV + \int_{\partial De} < N(M) >^T \{\vec{T}_d\} dS \qquad (4.27)$$

Efforts inconnus :

$$\delta T_{di} = \int_{\partial De} \vec{T_\iota}.\delta\vec{u}\,dS \qquad (4.28)$$

D'où : $\delta T_{di} = \{\delta u_n\}^T \{F_{di}\}$ (4.29)

En pratique les efforts inconnus représentent les actions mécaniques extérieures à l'élément considéré. On y trouve les efforts de liaison entre les éléments, et éventuellement pour les éléments de frontière les efforts associés aux liaisons cinématiques de la structure.

Comme nous le verrons lors de l'assemblage, les nœuds internes non chargés sont des systèmes mécaniques en équilibre, ce qui entraîne que le torseur des actions mécaniques de tous les efforts élémentaires des éléments connectés à un même nœud est nul.

Reportons dans la forme intégrale (4.15) les résultats obtenus pour chaque élément, nous obtenons une équation matricielle de la forme :

$$\forall D_e \;:\; [M_e]\{\ddot{u}_n\} + [K_e]\{u_n\} = \{F_{de}\} + \{F_{ie}\} \qquad (4.30)$$

Remarque

Les expressions des matrices élémentaires que nous venons de voir, font apparaître des opérateurs différentiels et des intégrales sur le domaine élémentaire. Or, le calcul analytique des dérivations et de l'intégration n'est possible que pour des éléments très simples tels que la barre et la poutre. Un code éléments finis a recours au calcul numérique, ces calculs sont basés sur l'intégration numérique (définie sur des éléments de référence) et l'utilisation d'une transformation géométrique définissant les éléments réels à partir d'éléments de référence.

2.2.4. Assemblage et conditions aux limites

Les règles d'assemblage sont définies par la relation (4.1). L'assemblage des matrices élémentaires masse [Me] et raideur [Ke] s'effectue selon les mêmes règles. Ces règles sont définies par sommation des termes correspondant au travail virtuel calculé pour chaque élément :

$$\sum_{e=1}^{ne}\{\delta u_n\}^T[M_e]\{\ddot{u}_n\} = \{\delta U\}^T[M]\{\ddot{U}\} \tag{4.31}$$

$$\sum_{e=1}^{ne}\{\delta u_n\}^T[K_e]\{u_n\} = \{\delta U\}^T[K]\{U\} \tag{4.32}$$

Cette opération traduit simplement que la forme quadratique associée à l'ensemble du domaine est la somme des formes quadratiques des sous - domaines. Elle consiste à « ranger» dans une matrice globale, les termes des matrices élémentaires. La forme de cette matrice dépend bien évidemment de l'ordre dans lequel sont définies les variables globales de {U}.

Pour les efforts donnés l'assemblage ne pose pas de problème, il est défini par sommation des termes correspondant au travail virtuel calculé pour chaque élément.

$$\sum_{e=1}^{ne}\{\delta u_n\}^T\{F_{de}\} = \{\delta U\}^T\{F_d\} \tag{4.33}$$

Remarque

Si l'effort est appliqué à un nœud de la structure, il vient naturellement se placer sur la ligne correspondant au degré de liberté concerné du vecteur force généralisée. Pour les efforts inconnus l'assemblage peut être mené de façon identique. Cependant, si les liaisons entre les éléments sont parfaites, la somme des efforts inconnus aux nœuds internes de la structure est nulle. Nous pouvons en tenir compte pour simplifier l'expression du travail virtuel des efforts inconnus, en ne calculant que le travail virtuel des efforts correspondants aux liaisons cinématiques imposées à la structure, et à celui des liaisons non parfaites.

Après assemblage, nous obtenons la forme matricielle du principe des travaux virtuels :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{F_d\} + \{F_i\} \tag{4.34}$$

Sous cette forme, nous avons N équations pour N+P inconnues. Pour résoudre, il faut tenir compte des P conditions aux limites cinématiques associées aux P composantes inconnues du vecteur {Fi}.

3. CALCUL DES MATRICES ELEMENTAIRES CORRESPONDANT A LA FORME INTEGRALE DU PROBLEME

- **La méthode directe** [16]

La méthode directe de formulation des équations de rigidité d'un élément se compose des étapes suivantes :

1. on exprime le champ Δ des déplacements de l'élément en fonction d'un nombre fini de variables {a}, de préférence les degrés de liberté {Δ} aux nœuds de l'élément ;
2. on exprime le champ ε des déformations de l'élément en fonction des degrés de liberté {Δ} en dérivant le champ des déplacements conformément aux équations déformations-déplacements de l'élasticité :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (4.35)$$

3. on introduit la loi intrinsèque du matériau :

$$\sigma = [E]\varepsilon \qquad (4.36)$$

   pour établir la relation entre le champ σ et les degrés de liberté {Δ} ;
4. On construit les équations décrivant les forces {F} aux nœuds de l'élément.
   Puisque nous disposons d'équations donnant σ en fonction de {Δ}, il est alors possible de relier {F} et {Δ} : on obtient ainsi ce qui constitue, par définition, les équations de rigidité de l'élément.

Afin de bien comprendre cette méthode, nous allons la mettre en application pour les structures mécaniques élémentaires. Nous allons écrire dans ce qui suit les matrices ; raideur, masse et amortisseur pour les éléments de structures ; barre, poutre, plaque et coque

4. ELEMENTS DE STRUCTURES [17]

4.1. Elément fini de barre

On désigne par barre une poutre travaillant seulement en traction-compression. Typiquement, les treillis de poutres sont souvent approximés dans un premier temps comme un ensemble de barres rotulées entre elles.

Un élément de barre et représenté par un segment de droite reliant les deux extrémités de la barre (figure 4.4). La barre est caractérisée par sa longueur L, par l'aire de sa section S et par son module d'Young E. Les extrémités sont appelés les nœuds de la barre, ils ont pour abscisses $x_1 = 0$ et $x_2 = l$, et ils sont soumis aux forces F_1 et F_2.

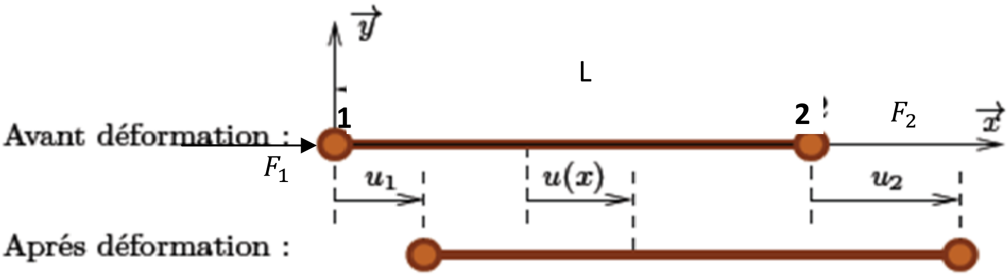


Figure (4.4) : *Elément barre à deux nœuds.*

Définissons le champ des déplacements $\Delta = u$ en fonction des déplacements généralisés {a} : il existe que deux ddl (les déplacements longitudinaux des nœuds 1 et 2) suffisent pour définir l'état déplacé de cet élément, de sorte que deux variables suffisent pour former {a} :

$$\{a\} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Pour décrire la variation unidimensionnelle de u entre les deux extrémités nous choisirons une représentation polynomiale, cette forme de représentation convient bien à la plupart des éléments à deux et à trois dimensions. Dans le cas présent, avec deux variables disponibles le choix est un polynôme linéaire en x :

$$x = a_1 + a_2 x = [1\ x] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

Dans le cas général, l'écriture sera la suivante :

$$\Delta = [P]\{a\} \quad (4.39)$$

Comme spécifié dans l'étape 1, nous cherchons à transformer cette représentation en une autre qui se rapporte aux degrés de liberté ''physique'' u_1 *et* u_2 ; pour cela on évalue l'équation (4.39) en $x = 0$ et $x = L$ pour obtenir :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

De manière générale :

$$\{\Delta\} = [B]\{a\} \quad (4.41)$$

En inversant la matrice [B] :

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad (4.42)$$

Soit :

$$\{a\} = [B]^{-1}\{\Delta\} \qquad (4.43)$$

La substitution dans l'équation (4.39) , nous donne :

$$u = \left[1 - \frac{x}{L}, \frac{x}{L}\right]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N_1, N_2]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad (4.44)$$

En notation générale :

$$\Delta = [P][B]^{-1}\{\Delta\} = [N]\{\Delta\} \qquad (4.45)$$

Ou les expressions $\begin{cases} N_1 = 1 - \frac{x}{L} \\ N_2 = \frac{x}{L} \end{cases}$ sont appelées fonctions de déformée du champ des déplacements, car ce sont ces fonctions qui permettent par leur combinaison d'exprimer l'état déformé de l'élément.

En appliquant l'étape 2(introduction de l'équation déformation-déplacements) nous obtenons

$$\varepsilon = \varepsilon_x = u' \qquad (4.46)$$

Ou u'représente la dérivée de u par rapport à x et qui s'obtient en dérivant les équations de formes N_1 et N_2.

$$\varepsilon = u' = \left[-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad (4.47)$$

En appliquant l'étape 3 (introduction de la loi de contrainte-déformation), nous obtenons :

$$\sigma_x = E\left[-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad (4.48)$$

Soit

$$\sigma = [E][\Delta]\{\Delta\} \qquad (4.49)$$

En ce qui concerne la dernière étape, c'est-à-dire transformation des contraintes en forces nodales, ces dernière sont $\{F\} = [F_1 \quad F_2]^T$ et obtient chaque composante en multipliant la contrainte par l'aire A de la section droite. Avec F_1 agissant dans la direction opposée au σ_x positifs, nous avons :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = A\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\sigma_x \qquad (4.50)$$

En remplaçant σ_x par sa formule trouvée en haut :

$$\{F\} = AE\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{L},\frac{1}{L}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix} \tag{4.51}$$

Ainsi l'équation de rigidité s'écrit :

$$[F] = [K]\{\Delta\} \tag{4.52}$$

Où la matrice de rigidité s'écrit :

$$[K] = [A][E][\Delta] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} \tag{4.53}$$

$[A]$: Transformation des contraintes aux forces.

$[E]$: Matrice de raideur élastique du matériau.

$[\Delta]$: Transformation des déplacements aux déformations.

La matrice de masse est l'intégration sur le volume avec S et ρ constants.

$$M = \rho A\int\begin{bmatrix}N_1^2(x) & N_1(x)N_2(x)\\N_1(x)N_2(x) & N_2^2(x)\end{bmatrix}dx \tag{4.54}$$

$$[M] = \frac{\rho Al}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix} \tag{4.55}$$

La matrice amortissement [C], s'écrit en fonction des matrices masse et raideur

$$[C] = \alpha[K] + \beta[M] \tag{4.56}$$

Avec $\propto$ et β sont des constantes dites de Rayleigh

L'énergie cinétique dans la barre s'écrit :

$$T = \frac{1}{2}\int \rho V^2\,(x,t)dv = \frac{1}{2}\int \rho\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 dv \tag{4.57}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \mathrm{N}\underline{\dot{q}} \tag{4.58}$$

Avec :

$\underline{\dot{q}}$ est la vitesse nodale.

$$T = \frac{1}{2}\underline{\dot{q}}^T[\mathrm{M}]\underline{\dot{q}} \tag{4.59}$$

➢ Ecoulement de la puissance dans la barre

Par définition, la puissance est le produit de la force par la vitesse,

$$P = \frac{1}{2}\{Force.Vitesse\} = \frac{1}{2}\{FV\} \quad (4.60)$$

Comme une barre est un élément unidimensionnel, son flux de puissance s'écoule seulement dans une seule direction : le long de sa longueur. Le flux total de puissance dans un élément barre s'écrit donc :

$$P_x = Re\{-(F_x v_x)\} \quad (4.61)$$

Avec,

F_x : force axiale.

v_x : vitesses de translation dans la direction x

4.2. Elément fini de poutre

Soit un élément de poutre de longueur l, de section S, de module d'Young E et de moment d'inertie de section I (Figure4.5). Les deux extrémités de la poutre sont les nœuds 1 et 2 d'abscisses respectives 0 et l.

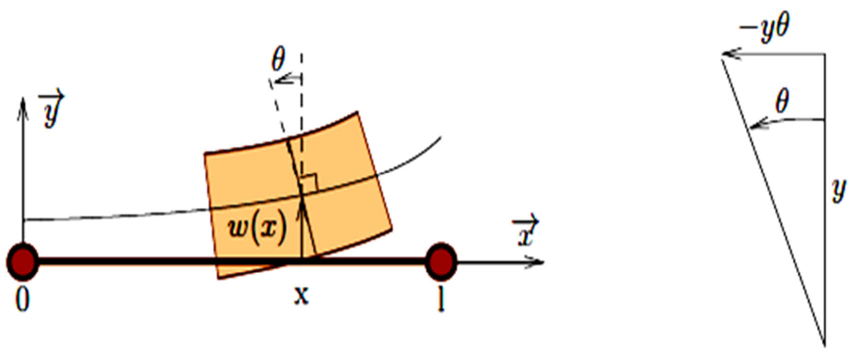


Figure (4.5) : *Elément de poutre en flexion*

Nous utiliserons les notations suivantes :

- $w(x)$: déplacement suivant $\vec{y}$ d'un point M d'abscisse x ;
- $\theta(x)$: rotation de la section en M ;
- $w_1(x)$: déplacement suivant $\vec{y}$ du nœud 1 ;
- $w_2(x)$: déplacement suivant $\vec{y}$ du nœud 2 ;

- θ_1 : rotation de la section au nœud 1 ;
- θ_2 : rotation de la section au nœud 2 ;
- F_1 : force extérieur suivant $\vec{y}$ du nœud 1 ;
- F_2 : force extérieur suivant $\vec{y}$ du nœud 2 ;
- M_1 : moment extérieur suivant $\vec{z}$ du nœud 1 ;
- M_2 : moment extérieur suivant $\vec{z}$ du nœud 2 ;

Hypothèse :

Nous négligeons la déformation d'effort tranchant. Il nous faut ici définir non seulement les déplacements transversaux des extrémités ω_1 et ω_2, mais encore les déplacements angulaires θ_1 et θ_2 ; ces derniers sont égaux la pente de la fibre neutre, donc :

$$\theta_1(x) = \theta_2(x) = \frac{d\omega(x)}{dx} = \omega'(x) \quad (4.62)$$

$\omega'(x)$ représente la pente de la déformée qui est assimilable à l'angle de rotation dans le cas de petites rotations.

Le déplacement d'un point situé à la cote *y* de la fibre neutre vaut alors :

$$\vec{u}(M) = -y\theta(x)\vec{x} = -y\omega'(x)\vec{x} \quad (4.63)$$

Comme dans le cas de la barre en traction-compression, nous choisissons un polynôme pour décrire le champ de des déplacements, ici défini par ω.

Nous avons 4ddl, il nous faudra donc une cubique :

$$\omega = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \quad (4.64)$$

Et en évaluant ω et θ aux points 1 et 2 ;

$$\begin{cases} x = 0\,;\ \omega_1 = a_4\,;\ \theta_1 = -a_3 \\ x = l\,;\ \omega_2 = a_1l^3 + a_2l^2 + a_3l + a_4\,; \\ \theta_2 = -a_1l^2 - 2a_2l - a_3. \end{cases} \quad (4.65)$$

$$\text{Donc :} \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \theta_1 \\ \omega_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ l^3 & l^2 & l & 1 \\ -3l^2 & -2l & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (4.66)$$

L'inverse de l'équation précédente, nous donne :

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} 2 & -l & -2 & -l \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ 0 & -l^3 & 0 & 0 \\ l^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \theta_1 \\ \omega_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{4.68}$$

Et en substituant cela dans (4.64)

$\omega = [N]\{\Delta\}$: $avec$ $\{\Delta\}$ est le champ de déplacement, et [N] est les vecteur de fonctions de formes. ($[N] = [N_1\ N_2\ N_3\ \ N_4]$)

$$\begin{cases} N_1 = 1 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 \\ N_2 = -\left(\frac{x}{l} - 1\right)^2 \\ N_3 = 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_4 = -x\left(\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{x}{l}\right) \end{cases} \tag{4.69}$$

En flexion, les déformations sont égales aux courbures ω'', d'où :

$$\omega'' = [N'']\{\Delta\} \tag{4.70}$$

Où :

$$\begin{cases} N\ _1 = -N\ _3 = \frac{6}{l^2}\left(2\frac{x}{l} - 1\right) \\ N\ _2 = -\frac{2}{l}\left(3\frac{x}{l} - 2\right) \\ N\ _4 = -\frac{2}{l}\left(3\frac{x}{l} - 1\right) \end{cases} \tag{4.80}$$

De même, les contraintes peuvent être assimilées à des moments internes de flexion M_f , pour lesquels l'équation intrinsèque du matériau peut s'écrire sous forme :

$$M = EI\omega \tag{4.81}$$

Comme les dérivées secondes varient linéairement au sein de l'élément, on peut définir la courbure à l'aide des seules valeurs de ω'' au point 1 et 2 :

$$\begin{Bmatrix} \omega\ _1 \\ \omega\ _2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} -6 & 4l & 6 & 2l \\ 6 & -2l & -6 & -4l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \theta_1 \\ \omega_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [D]\{\Delta\} \tag{4.82}$$

On peut examiner l'équilibre des moments pour écrire les forces

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \theta_1 \\ \omega_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{4.81}$$

Matrice raideur $[K]=\frac{2EI}{l^3}\begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -4l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix}$ (4.82)

Matrice masse

$$[M] = \rho A l \begin{bmatrix} {}^{14}/_{45} & {}^{11\ell_e}/_{210} & {}^{9}/_{70} & -{}^{14\ell_e}/_{420} \\ {}^{11\ell_e}/_{210} & {}^{\ell_e^2}/_{105} & {}^{14\ell_e}/_{420} & -{}^{\ell_e^2}/_{140} \\ {}^{9}/_{70} & {}^{14\ell_e}/_{420} & {}^{14}/_{45} & -{}^{11\ell_e}/_{210} \\ -{}^{14\ell_e}/_{420} & -{}^{\ell_e^2}/_{140} & -{}^{11\ell_e}/_{210} & {}^{\ell_e^2}/_{105} \end{bmatrix} \tag{4.83}$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}[M]V^2 = \frac{1}{2}\rho A l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \tag{4.84}$$

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 \tag{4.85}$$

- ***Ecoulement de l'énergie***

Comme une poutre est un élément unidimensionnel, son énergie s'écoule seulement dans une seule direction : le long de sa longueur. Le flux total de puissance dans un élément poutre s'écrit donc :

$$P_x = R_e\left\{-(F_x v_x^* + T\dot{\theta}_x^*)\right\} \tag{4.86}$$

Et si on ait en 3D on aura ; [19]

$$P_x = R_e\left\{-(F_x v_x^* + V_1 v_y^* + V_2 v_z^* + T\dot{\theta}_x^* - M_2\dot{\theta}_y^* + M_1\dot{\theta}_z^*)\right\} \tag{4.87}$$

F_x : force axiale.
V_1 : force de cisaillement dans la direction y_e.
V_2 : force de cisaillement dans la direction z_e.
T : moment de torsion selon x_e.
M_2 : moment de flexion selon la direction y_e.
M_1 : moment de flexion selon la direction z_e.
v_i : vitesses de translation dans la direction locale *i*.
$\dot{\theta}_i$: vitesses de rotation dans la direction locale *i*.

Le signe négatif dans la formule précédente, vient du fait que les forces et les moments sont tous dans les directions négatives des axes locaux sauf pour le moment M_2 qui est dans le sens positif de x_e. Les vitesses sont calculées pour chaque nœud de la structure, et les forces internes sont calculées pour chaque élément de poutre. Cette différence cause un problème, car le calcul du flux d'énergie est fait au niveau élémentaire. La solution est de déterminer le flux de puissance pour chaque nœud de cette structure et puis de prévoir la quantité moyenne pour chaque élément. Il existe aussi un autre problème ; les vitesses qui sont calculées dans le repère global, qui doivent être réécrites dans les repères locaux des poutres.

4.3. Elément fini de plaque et de coque

Une plaque est un domaine dont une dimension est plus petite que les deux autres (figure 4.6). Le plan moyen (noté S) de la plaque a pour repère $(\vec{x}, \vec{y})$. La troisième direction $\vec{z}$ est celle de l'épaisseur h. La différence géométrique entre une plaque et une coque est que la coque possède un rayon de courbure. Ce rayon de courbure provoque un couplage appelé membrane-flexion : si la coque est sollicitée avec un effort perpendiculaire au plan tangent, (plan moyen pour la plaque) elle travaille en flexion mais aussi en traction contrairement à la plaque (figure 4.7).

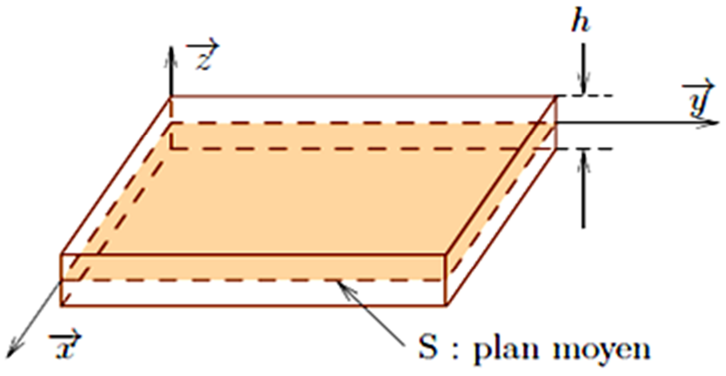


Figure (4.6) : *structure de type plaque*

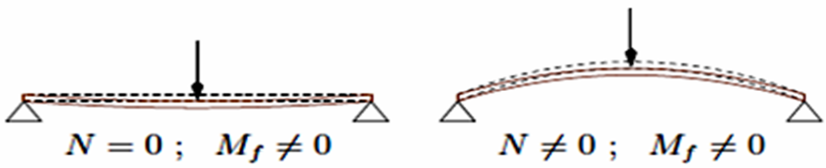


Figure (4.7) : *différence entre une plaque et une coque*

La première hypothèse suppose que la contrainte σ_{zz} est nulle dans toute la plaque. La loi de comportement s'écrit alors :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} \tag{4.88}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xz} \tag{4.89}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yz} \tag{4.90}$$

En inversant les relations, on montre que :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix} \tag{4.91}$$

Les effets peuvent être décomposés en deux parties : partie plane (*xx*, *yy*, *xy*) et partie hors plan (*xz*, *yz*). La partie dans le plan est due aux effets de membrane et de flexion tandis que la partie hors plan est appelée cisaillement transverse.

Hypothèses cinématiques

La cinématique peut être décomposée en 2 effets :

– flexion : rotation des segments perpendiculaires au plan moyen et déplacement suivant $\vec{z}$;

– membrane : déplacement suivant $\vec{x}$ et $\overrightarrow{y}$.

Un point de la plaque est noté $M(x, y, z)$, sa projection sur le plan moyen est notée $m(x, y)$. Le déplacement de *m* est noté :

$$\vec{u}(m) = u(x,y)\vec{x} + v(x,y)\vec{y} + w(x,y)\vec{z}\,. \tag{4.92}$$

Deux hypothèses sont classiquement utilisées pour les plaques ; Kirchhoff-Love et Reissner / Mindlin (ou Timoshenko) (figure 4.8) .

– L'hypothèse de **Kirchhoff-Love** est l'équivalent d'Euler-Bernoulli pour les poutres, on suppose que le cisaillement transverse est nul :

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \tag{4.93}$$

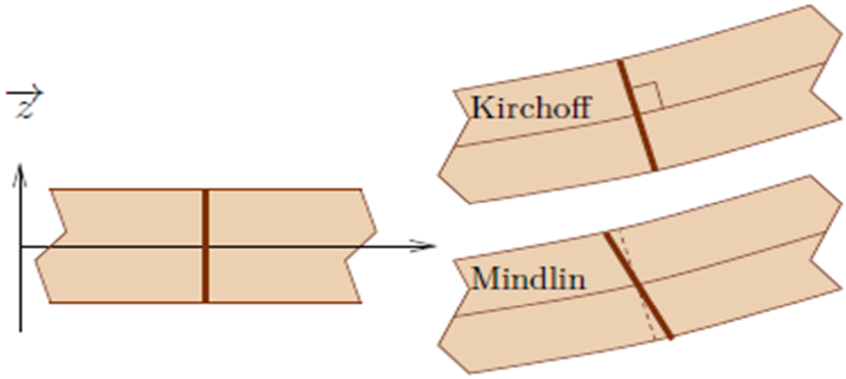


Figure (4.8) *: Différences entres les modèles cinématiques de Kirchoff-Love et Reissner-Mindlin*

D'un point de vue cinématique cela veut dire qu'une section initialement plane et perpendiculaire à la surface moyenne le reste après déformation. D'un point de vue interpolation par éléments finis, il faut alors qu'il y ait compatibilité entre w et les rotations βx et βy. L'interpolation de w est généralement d'ordre 4 et les fonctions de forme sont des polynômes d'Hermite. Ce modèle est adapté aux plaques élancées ;

– L'hypothèse de Reissner-Mindlin est l'équivalent de Timoshenko pour les poutres, on prend en compte le cisaillement transverse et aucune autre hypothèse n'est faite.
Les interpolations de w et des rotations peuvent être différentes. Ce modèle est adapté aux plaques dites épaisses.

Matrice de rigidité

L'élément de plaque développé ici prend en compte le cisaillement transverse. Les déplacements et les rotations sont interpolés dans un élément par les mêmes fonctions de formes :

$$u(x,y) = \sum_I N_I(x,y)u_I = \mathrm{N}\underline{U} \quad ; \quad v(x,y) = \sum_I N_I(x,y)v_I = \mathrm{N}\underline{V}$$

$$w(x,y) = \sum_I N_I(x,y)w_I = \mathrm{N}\underline{W} \quad ; \quad \beta_x(x,y) = \sum_I N_I(x,y)\beta_I^x = \mathrm{N}\underline{\beta_x}$$

$$\beta_y(x,y) = \sum_I N_I(x,y)\beta_I^y = \mathrm{N}\underline{\beta_y}$$

Ou U , V, W, β_x et β_y sont respectivement les déplacements en rotations aux nœuds du maillage. Le calcul au niveau élémentaire étant similaire aux autres éléments, il n'est pas détaillé ici. De même, aucune forme d'élément n'est imposée.

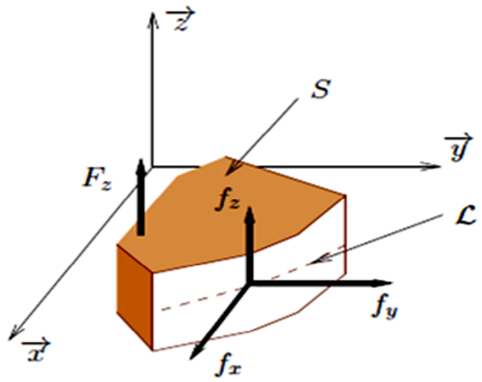


Figure (4.9) *: Forces extérieures appliquées sur la plaque.*

➢ Vecteur des forces extérieures généralisées

Les forces extérieures sont appliquées sur le contour de la plaque ainsi que sur une des faces (fig. 4.9). Sur le contour les forces surfaciques sont notées [*fx fy fz*]. On suppose que la force surfacique appliquée sur la plaque n'est portée que par −!*z* et vaut *Fz* . On note *s* l'abscisse curviligne sur la ligne moyenne L du contour de la plaque.

➢ Flux de l'énergie pour un élément de plaque

Comme dans le cas des poutres où tous les effets des efforts internes sont inclus dans le calcul du flux d'énergie, la puissance pour les éléments quadrilatéraux de plaque est calculé en prenant en considération les effets de flexion et de membrane. Sur la Figure 4.10, sont représentés les efforts appliqués sur l'élément de plaque. L'élément de plaque à deux dimensions, et l'énergie peut s'écouler dans les directions locales *Xe* et *Ye* de la plaque. Le flux d'énergie dans la direction *Xe* est :

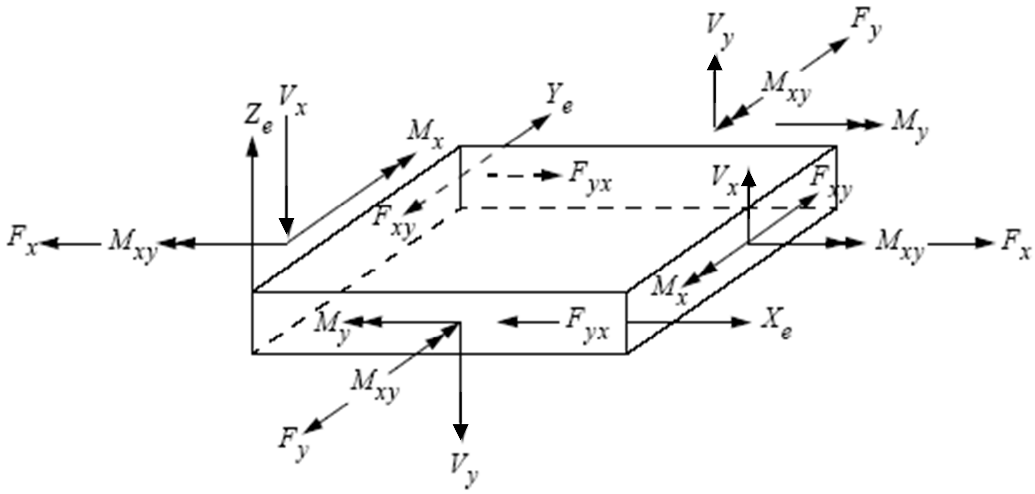


Figure (4.10) : *Diagramme des efforts internes de flexion et de membrane pour un élément plaque quadrilatéral.*

$$P_x = R_e\left\{-(V_x v_z^* - M_x \dot{\theta}_y^* + M_{xy}\dot{\theta}_x^* + F_x v_x^* + F_{xy} v_y^*)\right\} \quad (4.94)$$

Et le flux de puissance dans la direction Y est :

$$P_y = R_e\left\{-(V_y v_z^* + M_y \dot{\theta}_x^* - M_{yx}\dot{\theta}_y^* + F_y v_y^* + F_{yx} v_x^*)\right\} \quad (4.9()$$

avec,

V_x, V_y : Forces de cisaillement transversal.

M_x, M_y : Moments de flexion.

M_{xy}, M_{yx} : Bimoments selon *Xe* et *Ye*.

F_x, F_y : Forces de membranes.

F_{xy}, F_{yx} : Cisaillement de membrane.

v_i : Vitesses de translation dans la direction locale *i*.

$\dot{\theta}_i$: Vitesses de rotation dans la direction locale *i*.

4. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté brièvement la méthode des éléments finis et nous avons exploité le chapitre précédent afin d'associer la méthode à l'écoulement de l'énergie dans les structures mécaniques les plus utilisées.

Chapitre V

Etude de l'écoulement de l'énergie par la méthode des éléments finis

1. INTRODUCTION

L'écoulement de l'énergie est une conséquence des chocs et des vibrations subis par les structures et les machines. La puissance est employée pour décrire la transmission de l'énergie vibratoire dans les structures mécaniques. Cet écoulement aide à déterminer comment l'énergie est injectée par des excitations mécaniques et à identifier les chemins de transfert de la puissance.

Afin de tracer le flux d'énergie et/ou la densité mécanique dans une structure en vibration, beaucoup de méthodes de calcul et de mesure ont été mises au point, citons par exemple : la SEA (Statical Energiy Analysis), EFA (Energy Flow Analysis), et MEF (Méthode des Eléments Finis) que nous allons utiliser dans ce chapitre.

2. UTILISATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Nous avons vue précédemment que la méthode des éléments finis est de toutes les méthodes de discrétisation la plus utilisée en raison de son efficacité de traiter des problèmes de géométrie complexe, de couvrir de nombreux domaines de la physique, mais surtout grâce aux moyens informatiques actuels, elle est rendue facile à mettre en œuvre.

Afin d'illustrer l'utilisation et les fondements de la méthode proposée, nous allons analyser un certains nombres de structures. Pour chaque structure, on procède de la manière suivant :

1. Une modélisation et simulation complète sera effectuée en premier lieu avec le logiciel éléments finis PATRAN ;
2. Une analyse dynamique complète se fera par la suite à l'aide du logiciel complémentaire MSC.NASTRAN ; cette analyse permet de déterminer les quantités dynamiques utilisées dans les calculs ultérieurs ;
3. Ces quantités seront ensuite traités et réarrangés sous forme matricielle dans le logiciel Excel, pour pouvoir les utilisées dans les calculs ultérieurs ;
4. Puis vient l'étape du calcul de flux d'énergie et sa visualisation, cette partie est fait avec l'environnement MATLAB.

Les structures considérées dans cette simulation sont : portique simple, treillis et plaque.
Ces structures sont en Carbone Epoxy Métrique, les propriétés mécaniques de ce matériau sont représentées dans tableau (5.1).

Les modules de Young	$E_L = 93.5GPa$ $E_T = 6.74GPa$
Les modules de cisaillement	$G_{LT} = G_{LT} = G_{TT} = 4.07GPa$
Coefficients de Poisson	$\nu_{LT} = \gamma_{TT} = 0.34$
Coefficient d'amortissement structural	$\tau = 0.01$
La masse volumique	$\rho = 910Kg/m^3$

***Tableau (5.1)** : caractéristiques mécanique du Carbone Epoxy Métrique.*

3. ETUDE ET SIMULATION DE L'ECOULEMENT DE L'ENERGIE DANS LES STRUCTURES CONSIDEREES

3.1. Ecoulement de l'énergie dans un portique 2D

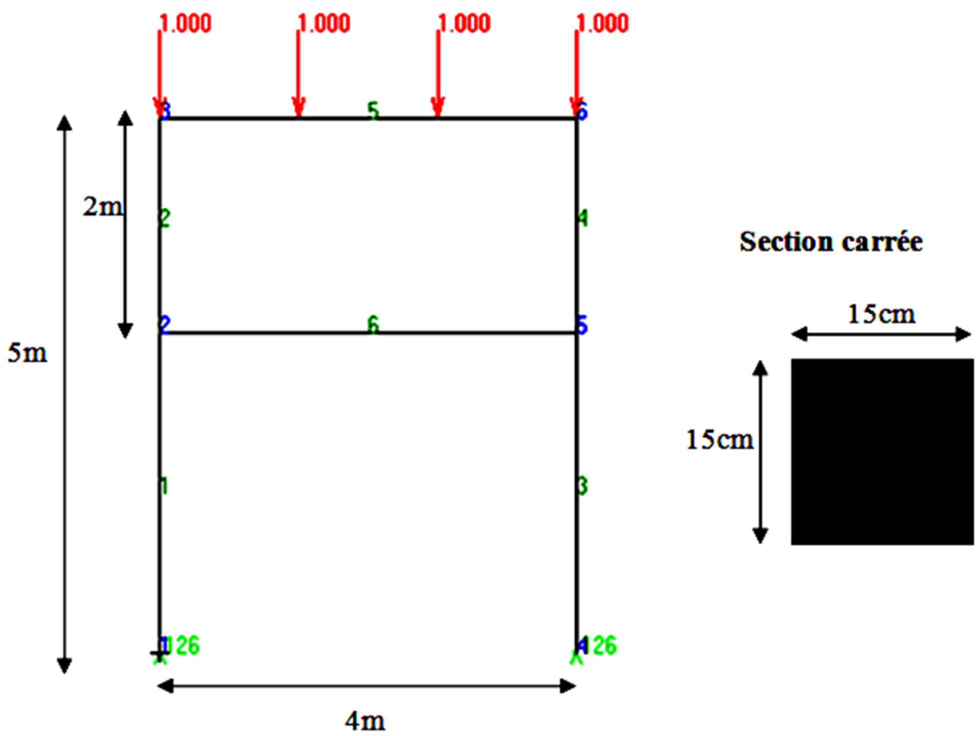


***Figure (5.1) :** représentation du modèle élément fini portique 2D*

Le portique est discrétisé en 36 éléments poutres réparties en 6 tronçons, la géométrie et les caractéristiques de la structure sont représentées par la figure (5.1).

La force d'excitation de module égal à l'unité est répartie sur le tronçon N°5. Les conditions aux limites sont appliquées au nœud 1 et au nœud 4.

Résultats

Les cinq premières fréquences naturelles de vibration de la structure sont regroupées dans le tableau suivant :

N°	Fréquences d'excitation (Hz)
1	6,38E+01
2	7,37E+01
3	1,39E+02
4	1,40E+02
5	1,86E+02

***Tableau (5.2)** : tableau des 5 premières fréquences propres de la structure portique 2D.*

L'ensemble des six courbes de la figure 5.3 montrent les amplitudes de flux d'énergie en dB relatif à 10^{-16} Watt à différents endroits de chacun des tronçons de poutre de la structure portique en 2D.

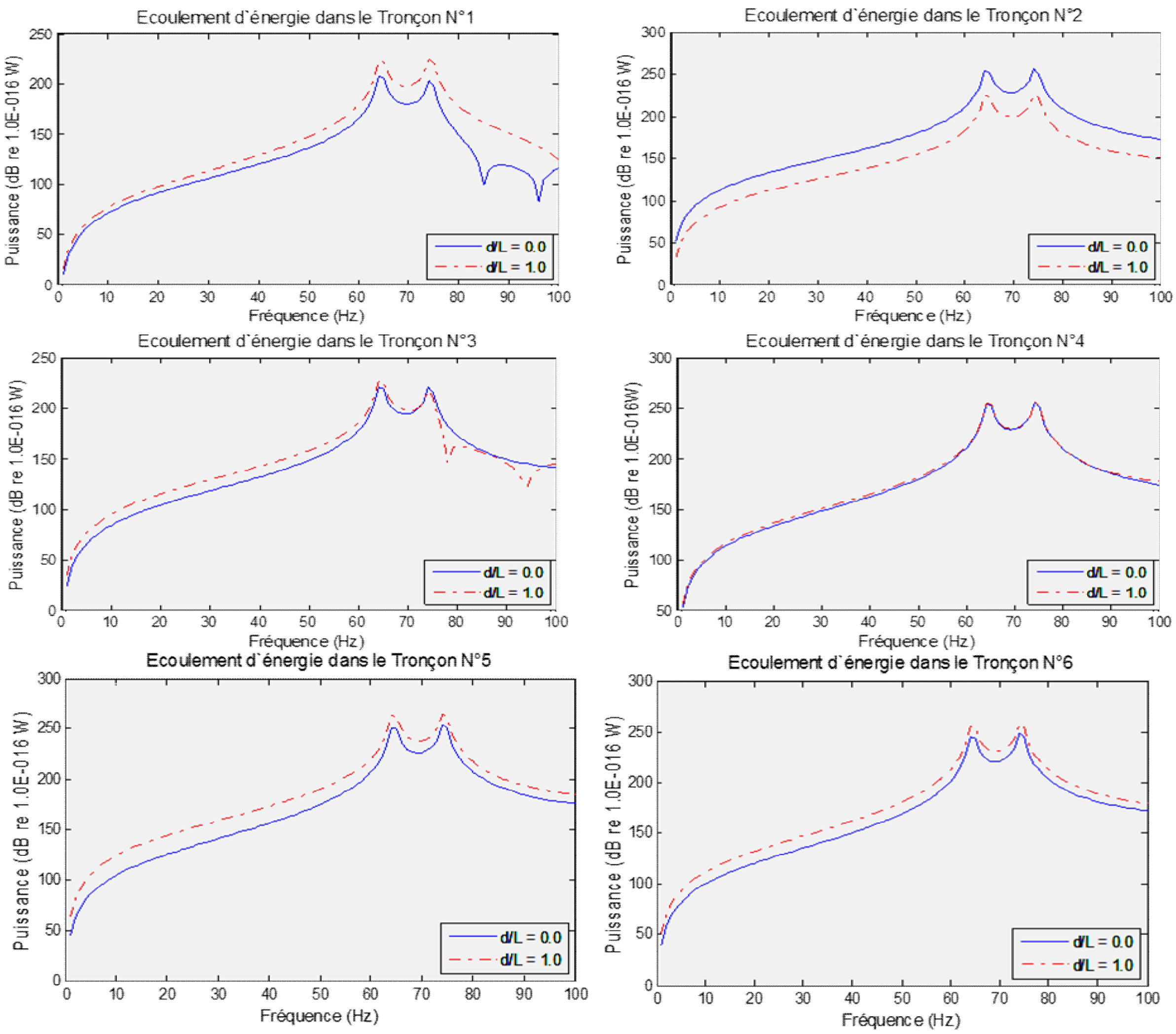


***Figure (5.2)** : Flux d'énergie des différents tronçons du Portique en 2D.*

Les diagrammes de figure (5.3) et figure (5.4) montrent l'écoulement de l'énergie dans structure portique en 2D aux fréquences d'excitation *f* = 25 Hz et *f* = 75 Hz ces diagramme sont établis à partir des courbes du flux d'énergie de la figure (5.2).

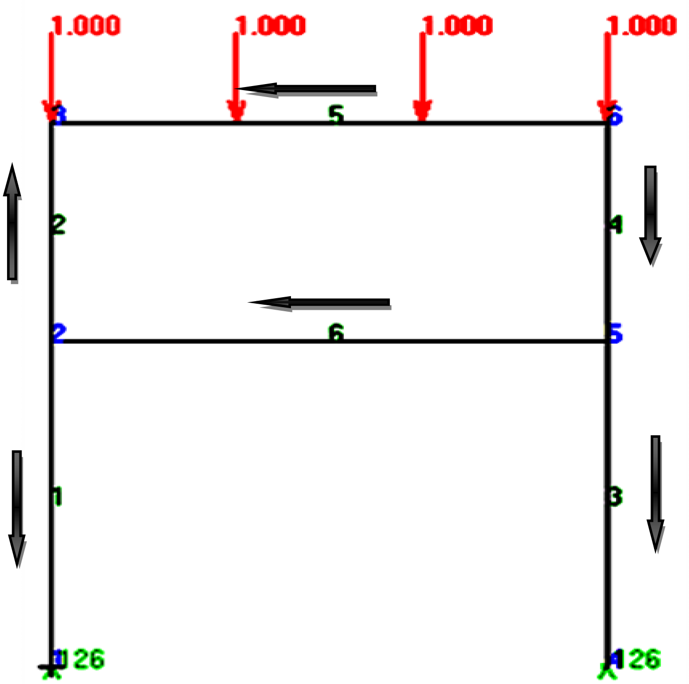


Figure (5.3) : *Diagramme du flux d'énergie dans la structure portique Pour la fréquence f=25Hz.*

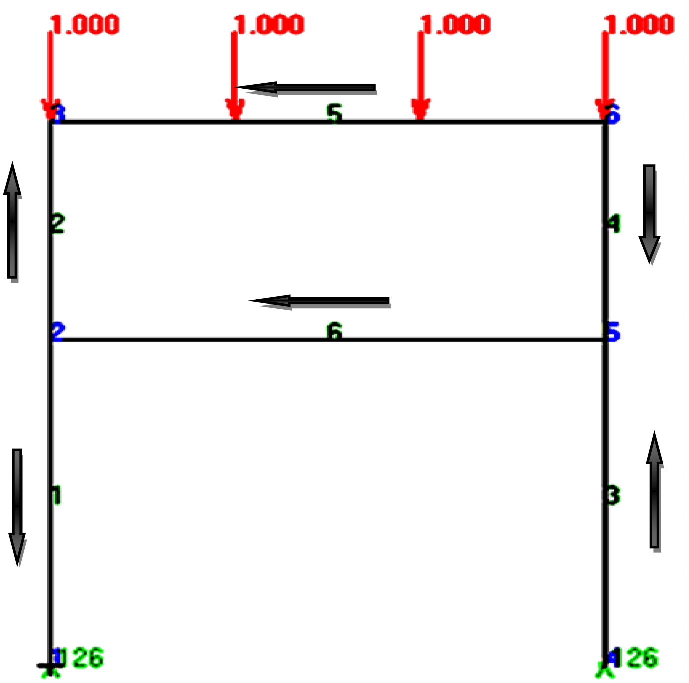


Figure (5.4) : *Diagramme du flux d'énergie dans la structure portique Pour la fréquence f=75Hz.*

En analysant les courbes de la figure (5.3), représentant le flux d'énergie dans la structure portique pour la fréquence f=25Hz, nous constatons que l'énergie se déplace du point d'application de la force d'excitation, donc de région de haute densité, vers les appuis, région de faible densité.

Concernant le flux de l'énergie dans la structure portique à la fréquence f=75 Hz (représenté dans la figure (5.4), l'écoulement de l'énergie dans cette structure est le même que le précèdent sauf dans le tronçon N° 3 du portique, nous remarquant que le chemin d'écoulement change. Ce changement est du au phénomène de résonnance.

3.2. Ecoulement de l'énergie dans un treillis

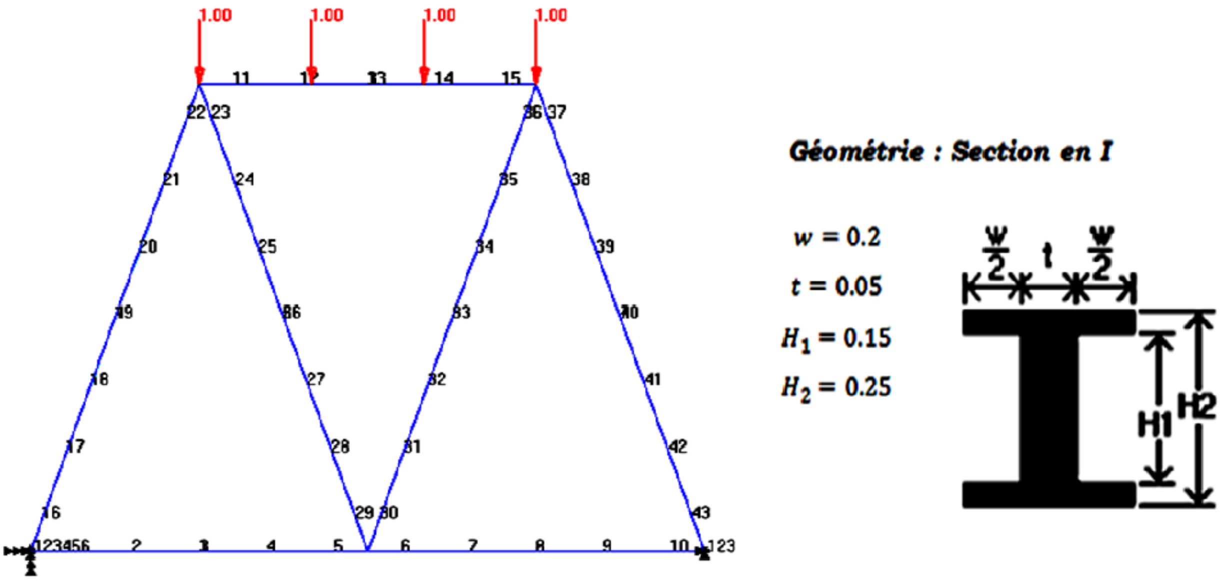


Figure (5.5) : *Modèle éléments finis de la structure en treillis.*

La structure représentée dans la figure (5.5) est discrétisée en 41éléments poutres.
Force d'excitation de module égal à l'unité répartie lui est appliquée sur le tronçon comportant les éléments 11, 12,13, 14 et 15. Appuis doubles au nœud 1. Appuis simple et au nœud 11.

Les cinq fréquences naturelles de la structure sont regroupées dans le tableau suivant :

N°	Fréquences d'excitation (Hz)
1	1,27E+02
2	1,29E+02
3	1,41E+02
4	1,51E+02
5	1,54E+02

Tableau (5.3) *: tableau des 5 premières fréquences de la structure en treillis.*

Résultats

La fréquence d'excitation du chargement considéré, varie de 1 à 100 Hz avec un pas de 1 Hz. Les sept courbes dans la figure 5.6, montrent les amplitudes de flux d'énergie en dB relatif à 10^{-20} Watt à deux endroits de chacun des tronçons de poutre de la structure treillis (début et fin du tronçon).

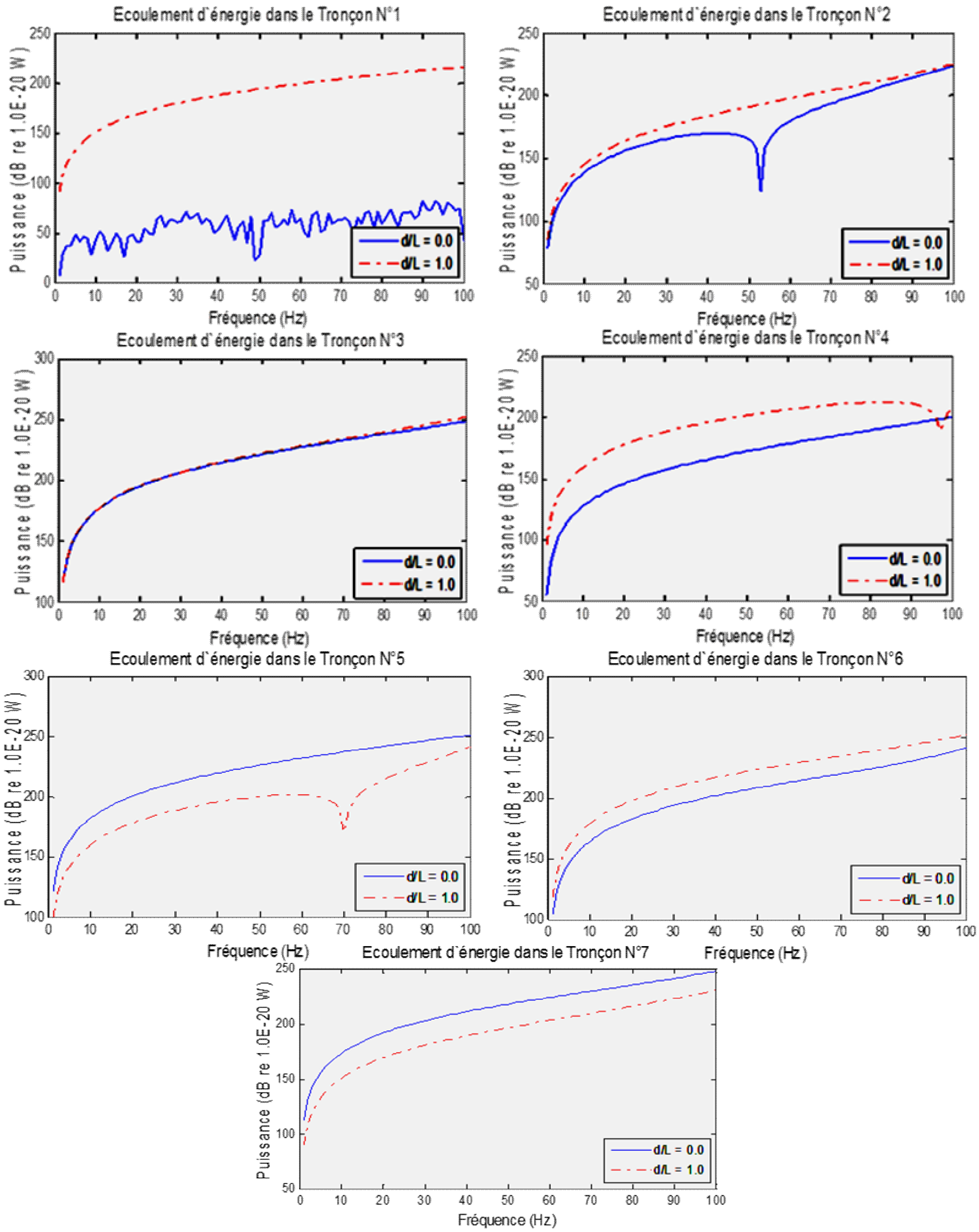


Figure (5.6) *: Flux d'énergie des tronçons de la structure treillis*

Les courbes précédentes seront par la suite exploiter pour tracer les diagrammes de l'écoulement de l'énergie dans la structure treillis aux fréquences d'excitation 25 Hz, 51 Hz et 90 Hz.

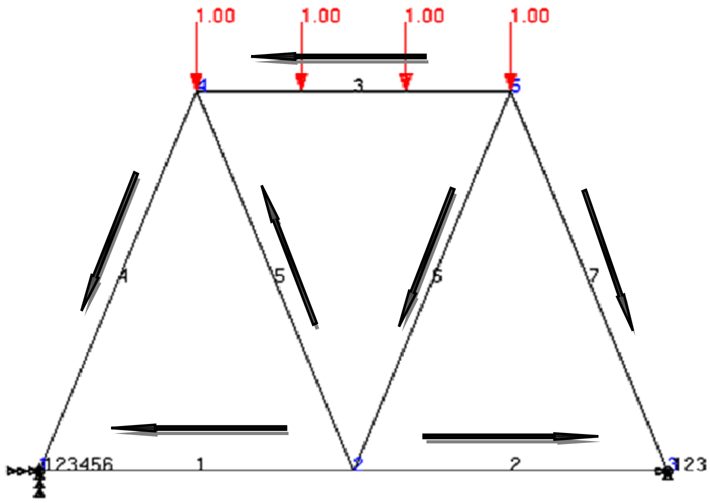


Figure (5.7) : *Diagramme du flux d'énergie dans la structure treillis Pour la fréquence f = 25 Hz.*

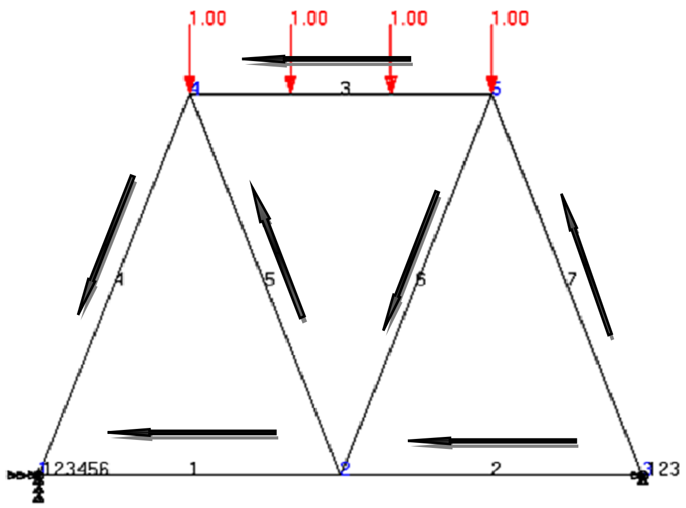


Figure (5.8) : *Diagramme du flux d'énergie dans la structure treillis Pour la fréquence f = 51 Hz.*

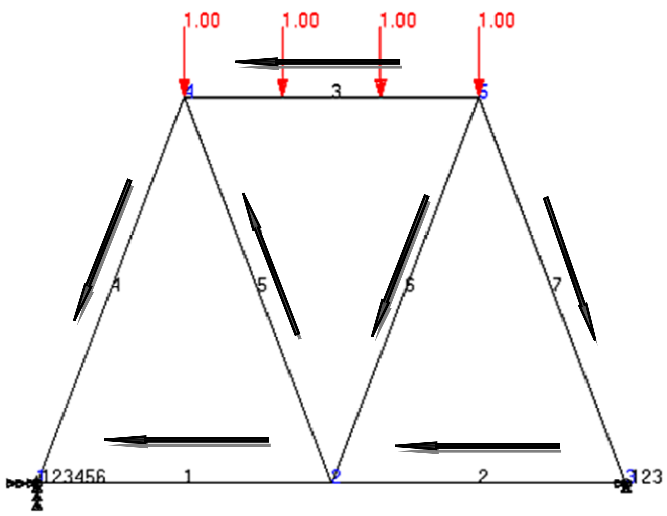


Figure (5.9) : *Diagramme du flux d'énergie dans la structure treillis Pour la fréquence f = 90Hz.*

Même constat que précédemment, l'analyse des diagrammes (5.7), (5.9) représentant respectivement le flux d'énergie dans la structure treillis pour les fréquences f25 =Hz et f= 90Hz confirme que l'énergie s'écoule de région de haute densité, vers la région de faible densité.

Et à une fréquence d'excitation f=51Hz choisie proche des fréquences de résonnance l'écoulement de l'énergie ne suis pas un chemin logique,

3.3. Ecoulement de l'énergie dans une plaque

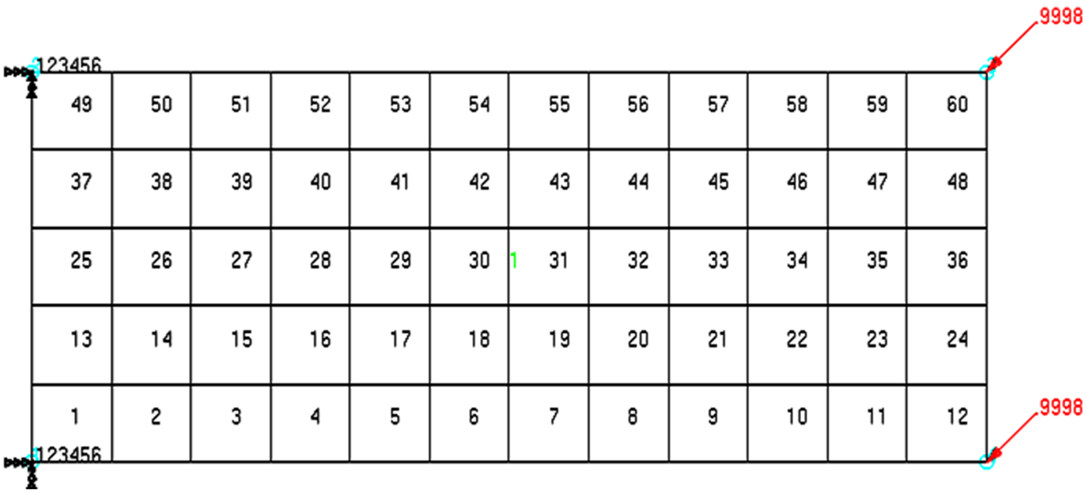


Figure (5.10) : *Modèle éléments finis du modèle plaque utilisé.*

➢ ***Caractéristiques de la structure***

Longueur = 1.2 m ; Largeur = 0.5m, Epaisseur = 0.02 m.

Le maillage de structure : 12 X 5 éléments Quadrilatéraux. Chargement : F=0.99N.

La plaque est en composite (Carbone Epoxy Métrique) multicouches [0/90/45/-45].

Résultats

La fréquence d'excitation du chargement considéré, varie de 1 à 100 Hz avec un pas de 1 Hz. Les cinq premières fréquences naturelles de vibration de la structure sont regroupées dans le tableau suivant :

N°	fréquences naturelles (Hz)
1	1,81E+01
2	5,45E+01
3	1,14E+02
4	1,89E+02
5	3,20E+02

Tableau (5.4) *: tableau des 5 premières fréquences de la structure.*

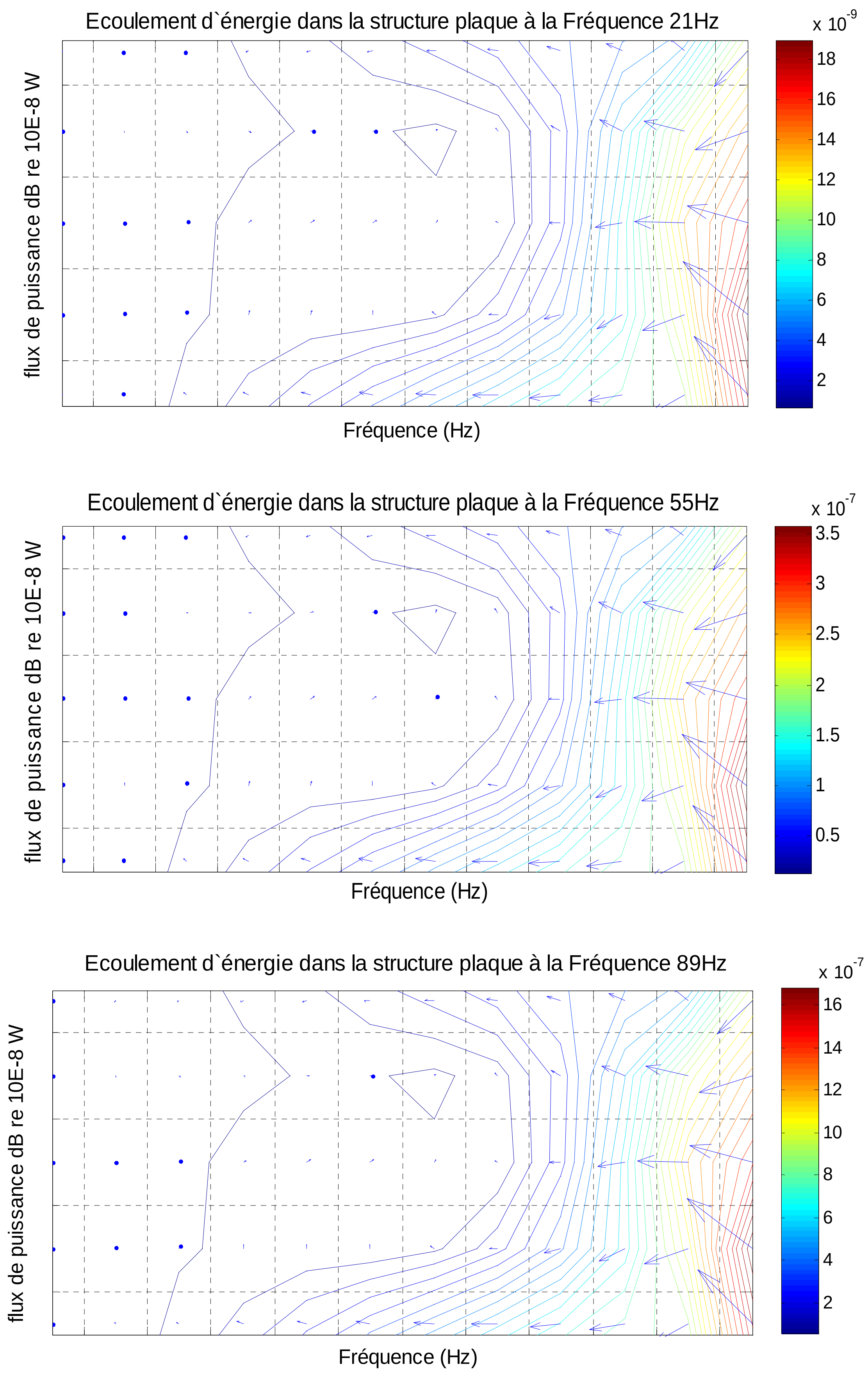


***Figure (5.11)** : Diagramme de l'écoulement du flux d'énergie dans la plaque seine à la fréquence d'excitation 21Hz, 55Hz et 89Hz.*

L'allure du flux d'énergie est visiblement presque uniforme sur la plaque saine aux différentes fréquences d'excitations, et ce d'après les diagrammes de la figure (5.11) précédente. En regardons attentivement la première courbe de la même figure, (figure 5.11), nous remarquons que la valeur la plus importante est proche de la source d'excitation et cette importance diminue en montant vers les conditions aux limites (encastrement).

Les flèches montrent les chemins d'écoulement de l'énergie, elles sont aussi importantes à la source, ce détail révèle que l'énergie s'écoule toujours de la partie de densité la lus élevée vers la moins élevée.

4. CONCLUSION

Dans ce chapitre, la méthode des éléments finis est utilisée pour le calcul de l'énergie s'écoulant dans les structures de type portique, treillis et plaque moyennant les logiciels de calcul MSC.NASTRAN, PATRAN, EXCEL et MATLAB.

Nous avons pu grâce à la MEF, savoir que l'énergie s'écoule toujours de la partie de densité la lus élevée vers la moins élevée.

Cette méthode de calcul de l'écoulement d'énergie est très efficace cependant elle n'est pas directe, donc pour évaluer les différentes quantités énergétiques il faut prévoir un programme afin de manipuler les quantités vibratoires (vitesses, forces, …), ces énormes manipulations ont l'inconvénient de ne pas être à l'abri d'erreur de transmission de données du logiciel calcul éléments finis vers le programme de calcul.

Chapitre VI

Application du principe de l'écoulement d'énergie pour la détection des défauts dans une plaque en composite multicouches

1. INTRODUCTION

L'utilisation des méthodes vibratoires, pour caractériser un type d'endommagement au sein d'un composite et pour suivre son évolution, est de plus en plus épandue. Les applications sont diverses et variées. Elles s'étendent du génie civil, détection d'endommagements de structures en béton, au suivi de la dégradation de matériaux composites soumis à des environnements agressifs. Aux vues des nombreux travaux réalisés sur la détection d'endommagements par analyse dynamique, ces méthodes vibratoires semblent être des outils très fiables. [19]

Le principe de base de la détection des défauts par vibration ou autrement dit, en utilisant le principe de l'écoulement de l'énergie, peut être expliqué comme suit : n'importe quelle structure peut être considérée comme système dynamique avec la rigidité, la masse et l'amortissement. Une fois que quelques dommages émergent dans les structures, les paramètres structuraux changeront, et les fonctions de réponse en fréquence et les paramètres modaux du système structural changeront également. L'objectif de ce chapitre est de mettre en évidence l'influence des endommagements structuraux sur la variation de l'écoulement de l'énergie, et d'essayer de l'exploiter pour détecter et localiser ces derniers.

2. LOCALISATION DES ENDOMMAGEMENTS

En plus de ce que nous avons vu dans le chapitre premier, il est possible de développer une procédure de localisation des endommagements en suivant les étapes suivantes [19] :

1. identification des mesures dynamiques qui sont touchés par l'endommagement au niveau global de la structure ;
2. modélisation de l'endommagement au niveau local ou élémentaire et définition de l'indicateur δ (changements locale de raideur ou d'amortissement, discontinuités géométriques) ;
3. choisir la relation qui lie les mesures globales Z au paramètre local d'endommagement δ,

$$Z = F(\delta) \tag{6.1}$$

4. calcul du paramètre local d'endommagement en résolvant l'équation (6.1),

$$\delta = F^{-1}(Z) \tag{6.2}$$

3. EXPLOITATION DU PRINCIPE DE L'ECOULEMENT DE L'ENERGIE DANS LA DETECTION ET LA LOCALISATION DES ENDOMMAGEMENTS

La présence d'un endommagement altère le mécanisme de dissipation d'énergie dans une structure à cause de l'augmentation du taux d'amortissement modal au voisinage de la position de ce défaut. Les changements des propriétés de dissipation sont en général dus aux modifications locales des caractéristiques des structures, donc on peut envisager l'utilisation des variations du flux de l'énergie de ces structures pour détecter et localiser les défauts, car le flux de l'énergie est directement affecté par la dissipation de l'énergie.

4. EFFET DE L'AMORTISSEMENT SUR LA DISSIPATION DE LA PUISSANCE [21]

La puissance peut être absorbée de plusieurs manières : par amortissement matériel, par des supports reliés à la structure et par rayonnement tel que le bruit. Les effets de l'amortissement sont significatifs, car à mesure que l'amortissement augmente, la puissance absorbée ou dissipée augmente aussi. S'il n'y à aucun élément dissipatif relié à la structure, et aucun rayonnement sonore, la dissipation de puissance sera nulle, ce qui entraînera l'absence du flux de puissance dans cette même structure. Cette absence du flux s'explique très bien mathématiquement, puisque sans amortissement les forces et les vitesses seront exactement de 90 degrés de déphasage, et la partie réelle du produit de la force par le complexe conjugué de la vitesse sera nulle. Bien que cette situation soit physiquement peu réaliste, elle peut cependant se produire dans une analyse par éléments finis.

5. SIMULATIONS NUMERIQUES

La simulation des structures endommagées se ferra en opérant des changements locaux sur les caractéristiques d'amortissement, donc le modèle éléments finis résultant est une structure avec un coefficient d'amortissement structural cinq fois plus grand dans les éléments supposés contenant les défauts que le reste des éléments.

L'analyse du flux de l'énergie de la structure saine et celle supposée endommagée, procure un moyen comparatif qui permettra en théorie de déceler les anomalies structurales, faute de produire une procédure directe qui calcule le paramètre local d'endommagement δ (voir équation 6.1).

Dans ce qui suit nous avons prévu une structure de type plaque (voir la figure 6.1), et nous avons délibérément modifié les taux d'amortissement de certains de leurs éléments pour simuler les endommagements.

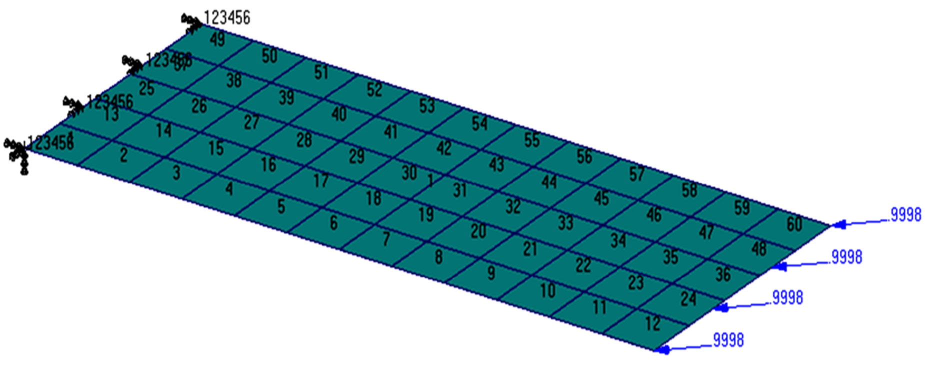


Figure (6.1) : *Modèle éléments finis du modèle utilisé.*

- ***Caractéristiques de la structure***

Longueur = 1.2 m ; Largeur = 0.5m, Epaisseur = 0.02 m.

Le maillage de structure : 12 X 5 éléments Quadrilatéraux. Chargement : F=1N.

Les modèles éléments finis de la plaque endommagée sont représentés par la figure (6.2) , la figure (6.3) et par la figure(6.4).

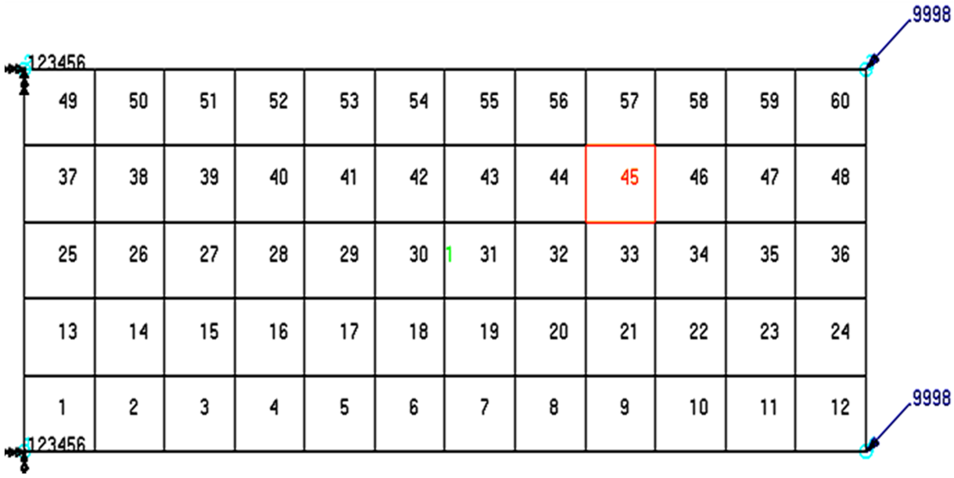


Figure (6.2) *: Modèle éléments finis de la plaque endommagée (élément 45 endommagé).*

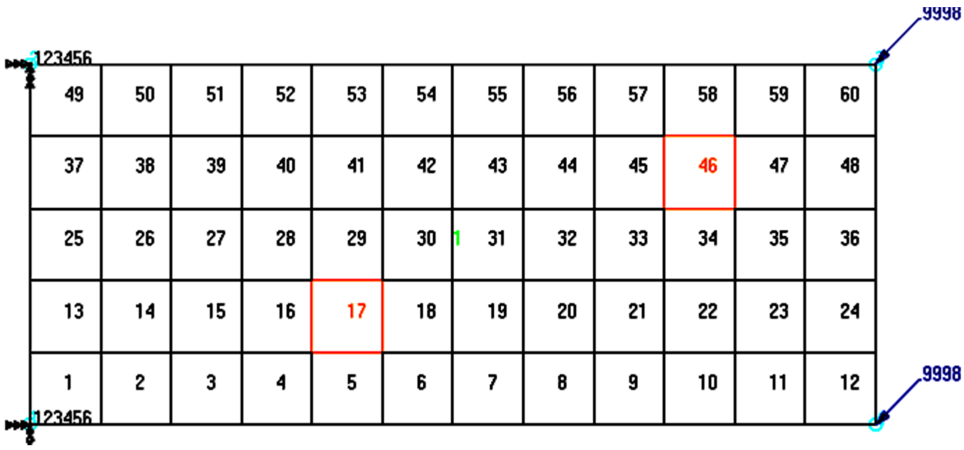


Figure (6.3) *: Modèle éléments finis de la plaque endommagée (éléments 17 et 46 endommagés).*

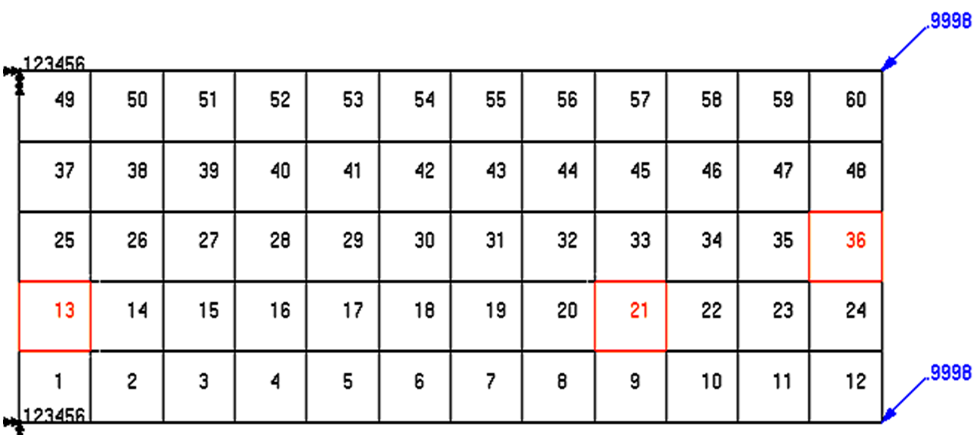


Figure (6.4) *: Modèle éléments finis de la plaque endommagée (éléments 13, 21 et 36 endommagés).*

Les fréquences naturelles de vibration de la structure sont regroupées dans le tableau suivant:

N°	fréquences naturelles (Hz)
1	1,81E+01
2	5,45E+01
3	1,14E+02
4	1,89E+02
5	3,20E+02

Tableau (6.1) *: tableau des 5 premières fréquences de la structure.*

6. RESULTATS

La fréquence varie de 1 à 100 Hz avec un pas de 1 Hz. Les courbes résultantes sont représentées par les figures suivantes :

Nous allons d'abord tracer ces différentes courbes, pour pouvoir les discuter et interpréter et par la suite d'en tirer les résultats.

Notes

- Avons d'entamer la comparaison, nous avons allons représenter les différents schémas de l'écoulement de l'énergie dans les structures plaques saine et endommagées.
- les carrés que nous avons encadrés en rouge sont les éléments auxquels nous avons affecté les endommagements;
- Les courbes schématisées par les figures (6.5), (6.6) et (6.7) illustrent la différence entre la plaque et les plaques à un élément, à deux et à trois éléments endommagés, aux fréquences 21Hz, 55Hz et 89Hz.

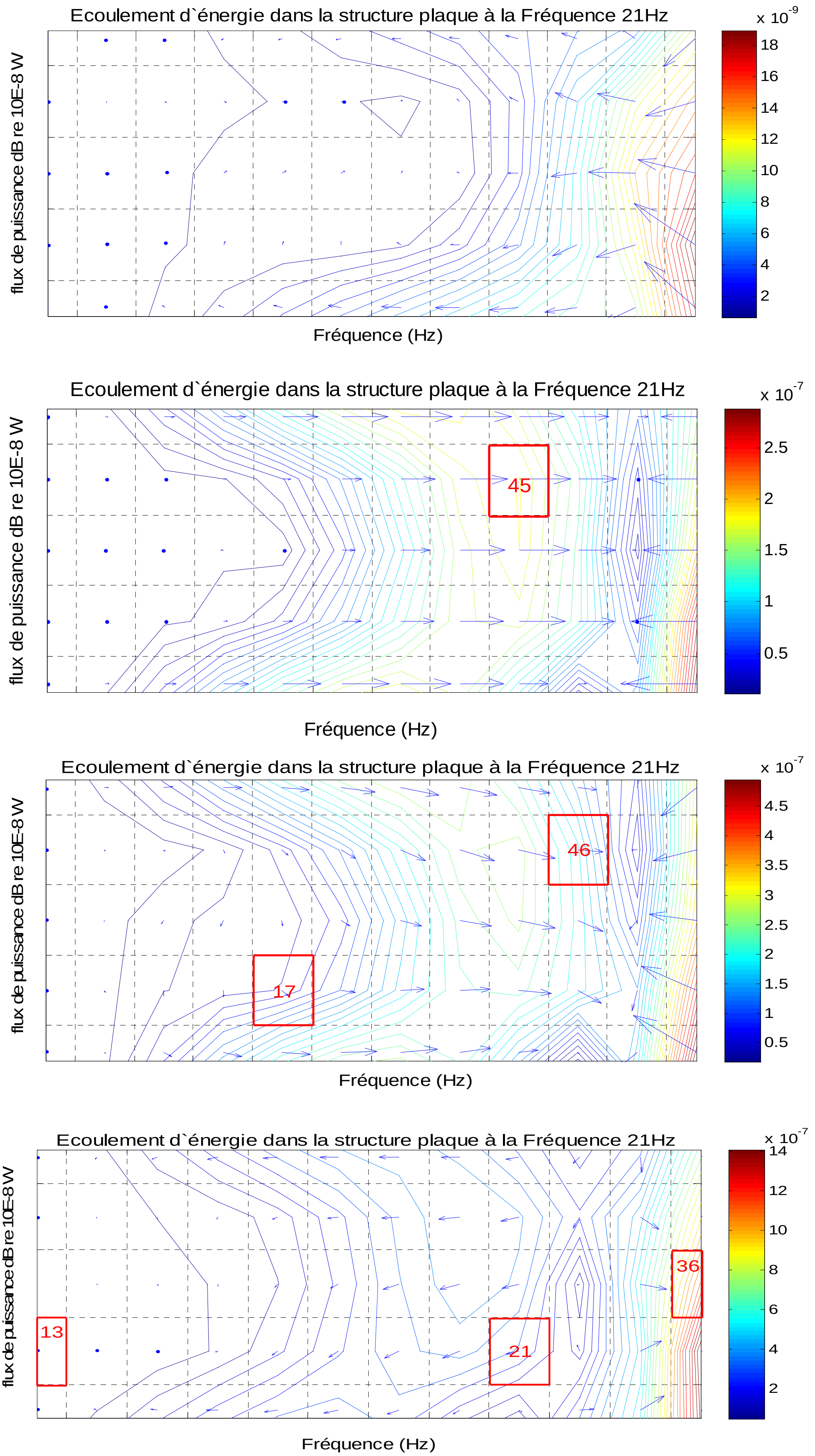


Figure (6.5) : *Diagramme de l'écoulement du flux d'énergie à la fréquence d'excitation 21Hz dans les plaques saine et endommagées.*

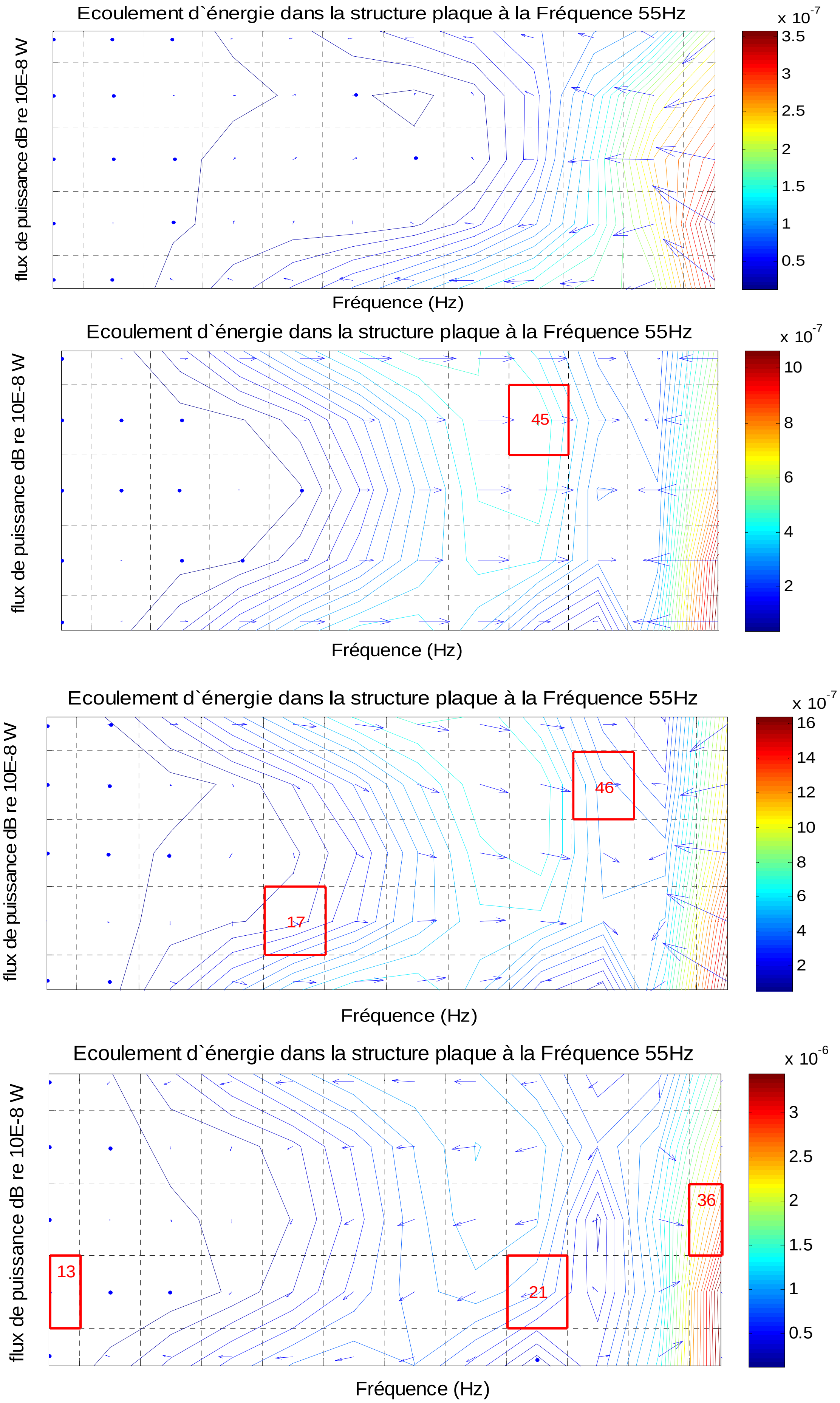


Figure (6.6) : *Diagramme de l'écoulement du flux d'énergie à la fréquence d'excitation 55Hz dans les plaques saine et endommagées.*

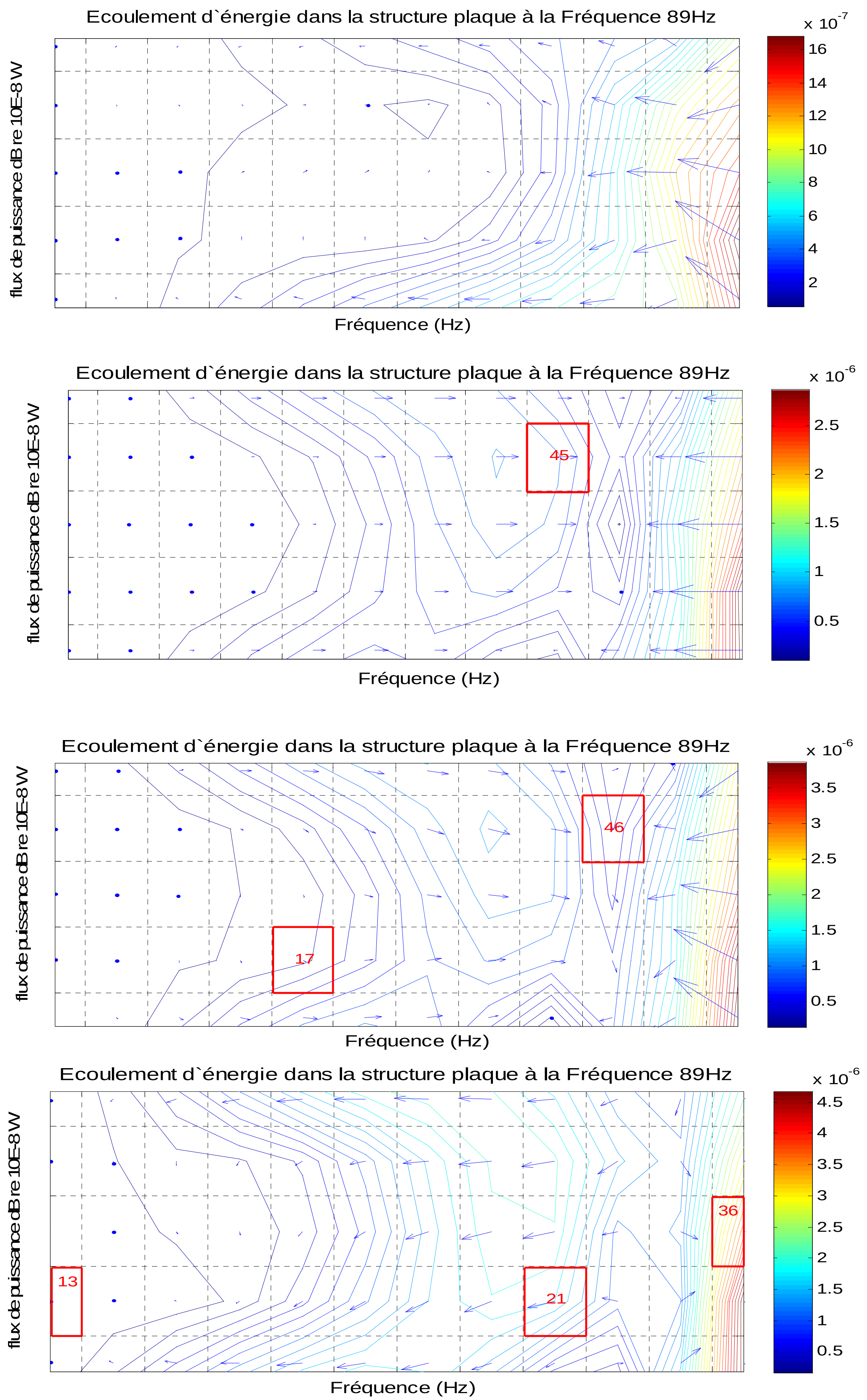


Figure (6.7) : *Diagramme de l'écoulement du flux d'énergie à la fréquence d'excitation 89Hz dans les plaques saine et endommagées.*

7. DISCUSSION ET INTERPRETATION DES RESULTATS

L'allure du flux d'énergie est visiblement presque uniforme sur la plaque saine aux différentes fréquences d'excitations. En regardons attentivement les courbes représentant la plaque saine, nous remarquons que la valeur la plus importante est proche de la source d'excitation et cette importance diminue en montant vers les conditions aux limites (encastrement).

Les flèches montrent les chemins d'écoulement de l'énergie, elles sont aussi importantes à la source, ce détail révèle que l'énergie s'écoule toujours de la partie de densité la lus élevée vers la moins élevée.

En analysant les schémas de l'écoulement de l'énergie dans les structures plaques endommagées à la fréquence 21Hz (figure 6.5), à la fréquence 55Hz (figure 6.6) et 89Hz (figure 6.7), nous constatons que :

- Des cercles sont crées aux voisinages des éléments endommagés, ce qui insiste de suspecter une anomalie dans les structures dans ces endroits à défauts dont la localisation précise n'est pas possible pour l'instant mais c'est déjà pas mal de savoir sont existence ;
- Les flèches changent de direction, et se dirigent vers les défauts (les cercles sur les figures) qui agissent donc sur le flux d'énergie comme des gouffres ou des trous noirs ;
- on voit bien qu'au voisinage des éléments endommagés, le flux d'énergie est aspiré vers ces éléments et que les flèches sont déviées et attirées vers les éléments considérés. Ce phénomène est visible dans les trois cas de figures (21Hz, 55Hz, et 89Hz).

8. CONCLUSION

Nous avons vue dans cette simulation, qu'un défaut augmente considérablement l'amortissement, par ailleurs, un défaut agit sur le flux d'énergie comme un puits.

On conclut donc que l'utilisation du principe de l'écoulement du flux d'énergie par élément finis est un outil performant pour la détection des zones endommagées.

Conclusion

Conclusion

Dans le présent travail, nous avons étudié le problème de la modélisation du comportement vibratoire des structures composites. Nous nous sommes intéressés à l'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'étude de l'écoulement de l'énergie et de la puissance dans ces structures.

Afin d'analyser le comportement dynamique des structures composites, nous avons utilisé une approche générale sur la théorie des matériaux composites unidirectionnels. L'étude théorique nous a permis de développer quelques connaissances sur les constituants de base ainsi que sur les équations physiques pour l'estimation des propriétés mécaniques équivalentes.

Avec l'utilisation de la méthode des éléments finis, l'évaluation des flux d'énergie est discutée pour divers exemples d'applications et a permis de déterminer les principaux chemins d'écoulement de l'énergie vibratoire. La connaissance des chemins de l'écoulement de cette énergie est un moyen de contrôle du comportement de la structure, elle s'avère sensible aux variations géométriques, dynamiques et matérielles.

Un domaine d'applications du principe de l'écoulement de l'énergie est discuté dans ce mémoire, qui est le domaine de la détection des endommagements. Cette investigation est basée sur le fait que la présence d'endommagement altère le mécanisme de dissipation d'énergie dans une structure à cause de l'augmentation du taux d'amortissement au voisinage de la position de ce défaut.

Les perspectives de recherches seront orientées vers le développement d'une méthode directe de localisation des défauts de structures utilisant les notions de l'écoulement de l'énergie vibratoire, puisque la sensibilité de ce moyen d'analyse a été prouvée.

En étudiant les résultats obtenus grâce cette technique, on peut aisément se prononcer sur son énorme potentiel dans le domaine de la détection des défauts, sauf qu'il va falloir exprimer un indicateur cohérant basé sur cette grandeur énergétique qui est le flux d'énergie.

Bibliographie

[01] : **NADIA BAHLOULI** / COURS MATERIAUX COMPOSITES / DESS MECANIQUE AVANCEE ET STRATEGIE

[02] : **MAYSSA KARRAY** / CARACTERISATION DES PROPRIETES MECANIQUES ET ELECTRIQUES DES MATERIAUX COMPOSITES PAR METHODE HOLOGRAPHIQUE NUMERIQUE 3D ET ANALYSE DIELECTRIQUE / THESE : GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES DE L'UNIVERSITE DU MAINE.

[03] : **ANTOINE CRINIERE** / IDENTIFICATION DES DEFAUTS DE STRUCTURES DANS DES MILIEUX COMPOSITES PAR METHODE THERMIQUES.

[04] : **ANTOINE CRINIERE**, MASTER 2 INGENIERIE DES SYSTEMES INDUSTRIELS ET DES PROJETS SPECIALITE : SYSTEMES DYNAMIQUES ET SIGNAUX ANNEE 2010/2011 RAPPORT INTERMEDIAIRE DE MASTER SDS.

[05] : **MATTHIEU GRESIL** / CONTRIBUTION A L'ETUDE D'UN CONTROLE DE SANTE INTEGRE ASSOCIE A UNE PROTECTION ELECTROMAGNETIQUE POUR LES MATERIAUX COMPOSITES/ THESE DE DOCTORAT DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN/ DECEMBRE 2009.

[06] **: JEAN-SEBASTIEN DUPUY**/ THÈSE DOCTORAT : « IDENTIFICATION DES PROPRIETES MECANIQUES DE MATERIAUX COMPOSITES PAR ANALYSE VIBRATOIRE », PRESENTEE ET SOUTENUE PUBLIQUEMENT LE 11 DECEMBRE 2008/ UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER II DISCIPLINE : MECANIQUE ET GENIE CIVIL / ÉCOLE DOCTORALE : INFORMATION, STRUCTURES, SYSTEMES.

[07] : **MOUSTAPHA IDRISS** / THESE DOCTORAT : « ANALYSE EXPERIMENTALE ET PAR ELEMENTS FINIS DU COMPORTEMENT STATIQUE ET VIBRATOIRE DES MATERIAUX COMPOSITES SANDWICHS SAINS ET ENDOMMAGES » SOUTENUE LE 12 MARS 2013/ UNIVERSITE DU MAINE, SPECIALITE : ACOUSTIQUE.

[08] **: MICHEL DUPEUX** PROFESSEUR A L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER DE GRENOBLE/ AIDE-MEMOIRE SCIENCE DES MATERIAUX/IUT • 1ER CYCLE/LICENCE • 2E CYCLE/MASTER • ÉCOLES D'INGENIEURS/ DUNOD, PARIS, 2004.

[09] **: JEAN-MARIE BERTHELOT,** 4eme EDITION/ MATERIAUX COMPOSITES, COMPORTEMENT MECANIQUE ET ANALYSE DES STRUCTURE/ LAVOISIER, 2005.

[10] : **CRISTINA GOIDESCU**/ THESE DOCTORAT : CARACTERISATION ET MODELISATION DE L'ENDOMMAGEMENT PAR MICROFISSURATION DES COMPOSITES STRATIFIES - APPORTS DES MESURES DE CHAMPS ET DE L'HOMOGENEISATION/JEUDI 22 SEPTEMBRE 2011/ UNIVERSITE DE TOULOUSE

[11] : **THOMAS VANDELLOS**/ THESE DOC: « DEVELOPPEMENT D'UNE STRATEGIE DE MODELISATION DU DELAMINAGE DANS LES STRUCTURES COMPOSITES STRATIFIEES »/ SOUTENUE LE 06 DECEMBRE 2011/ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGENIEUR.

[12] : **ELIE ABDULLAH**/ THESE DOCTORAT : « DEVELOPPEMENT D'UN ELEMENT FINI POUR LA MODELISATION DU DELAMINAGE DANS LES STRUCTURES COMPOSITES » / SOUTENUE LE 14 DECEMBRE 2005/ ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE ECOLE DOCTORALE / MATERIAUX - STRUCTURES – MECANIQUE

[13] : **ANNE BERGERET**, DOCTEUR INGENIEUR, MAITRE-ASSISTANT A L'ÉCOLE DES MINES D'ALES, RESPONSABLE DE L'EQUIPE FORMULATION DES MATERIAUX DU CENTRE DES MATERIAUX DE GRANDE DIFFUSION DE L'ÉCOLE DES MINES D'ALES.

[14][: **JEAN COURBON**/ METHODES DE CALCUL DES STRUCTURES ELASTIQUES / TECHNIQUES DE L'INGENIEUR A 330.

[15]: **HERVE OUDIN** /«METHODE DES ELEMENTS FINIS » LABORATOIRE MECANIQUE ET MATERIAUX/ DIVISION MECANIQUE DES STRUCTURES, ECOLE CENTRALE DE NANTES.

[16] : **ANTOINE LEGAY,** MAITRE DE CONFERENCE / « CALCUL DES STRUCTURES PAR ELEMENTS FINIS »/ 2011-2012/ CNAM-PARIS.

[17]: **ANTOINE LEGAY**, MAITRE DE CONFERENCE / « CALCUL DES STRUCTURES PAR ELEMENTS FINIS »/ 2011-2012/ CNAM-PARIS.

[18] : **LAURENT BAILLET / «** METHODE DES ELEMENTS FINIS APPLIQUEE AUX STRUCTURES DISCRETES »/ LABORATOIRE DE GEOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE UFR MECANIQUE / UNIVERSITE JOSEPH FOURIER GRENOBLE.

[19] : **AMZIANI AHCENE** / « ECOULEMENT D'ENERGIE ET CALCUL D'INTENSITE MECANIQUE DANS LES STRUCTURES MECANIQUES LINEAIRES», MEMOIRE DE MAGISTERE / DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE, UMMTO. NOVEMBRE 2005.

[20]: **S.A.HAMBRIC**/«POWER FLOW AND MECHANICAL INTENSITY CALCULATIONS IN STRUCTURAL FINITE ELEMENT ANALYSIS» JOURNAL OF VIBRATIONS AND ACOUSTICS, AVRIL1989.