République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministére de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique.

Université Mouloud Mammeri-Tizi ouzou .
Faculté du Génie de la Construction .
Département de Génie Civil.

Cours d'Analyse III

R. Benabidallah

Avant propos :

Ce cours est destiné aux étudiants des sciences techniques et plus généralement à tous ceux qui désirent se familiariser avec les méthodes mathématiques couramment utilisées dans l'étude des phénomèmes scientifiques abordés à ce niveau. Pour ceux-ci, en effet, les raffinements de la rigueur dans les démonstrations importent assez peu, tandis qu'une connaissance étendue et à caractère pratique des divers outils mathématiques dont ils auront à faire usage est essentielle

Il était hors de question de tout traiter dans ce cours destiné à des utilisateurs de mathématiques et certaines propriètées ont été admises sans démonstration. La rigueur et la logique n'en sont pas pour autant sacrifiées. Il est ainsi permis d'espèrer que ce cours atteindra les deux objectifs pour lesquels il a été réalisé :

- répondre aux préoccupations immédiates des étudiants,

- contribuer à leur culture mathématique.

L'auteur

Table des matières

Chapitre 1

Intégrale de Riemann

1.1 Rappels-Définition et propriétés

Soient $f(x)$ une fonction définie et bornée sur $I = [a, b]$, $\sigma = \{a, x_1, x_2, \cdots x_n, b\}$ une subdivision de l'intervalle I à l'aide des points $x_1, x_2, \cdots x_n$ et $\Pi = \{p_0, p_2, \cdots p_n\}$ un ensemble de points arbitraires tels que $p_k \in [x_{k+1}, x_k]$ $\forall k = 0, \cdots, n$ où $x_0 = a$ et $x_{n+1} = b$. Formons la somme

$$
\begin{aligned}
(1.1) \qquad S(f, \sigma, \Pi) &= \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) f(p_k) \\
&= (x_1 - a) f(p_0) + \cdots + (x_{k+1} - x_k) f(p_k) + \cdots + (b - x_n) f(p_n)
\end{aligned}
$$

et posons

$$\delta(\sigma) = \max_{k=0,\cdots,n} (x_{k+1} - x_k).$$

On admettre par ailleurs que la subdivision est choisie de sorte que si $n \to +\infty$, $\delta(\sigma) \to 0$.

Définition 1.2. *(**Intégrabilité**) Nous disons que $f(x)$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si la somme (1.1) tend vers une limite finie I lorsque $\delta(\sigma) \to 0$, c'est-à-dire quand le nombre de points de la subdivision croît indéfiniment. Le nombre I est l'intégrale de $f(x)$ sur $[a, b]$ et est noté $\int_a^b f(x)\, dx$.*

Propriétés de l'intégrale

1. Linéarité

Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions intégrales sur $[a, b]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La fonction $\lambda f(x) + \mu g(x)$

est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b \lambda(f(x) + \mu g(x))\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx + \mu \int_a^b g(x)\ dx$$

2. Relation de Chasles

Si la fonction $f(x)$ est intégrable sur $[a, b]$ alors pour tout $c \in [a, b]$, $f(x)$ est intégrable sur les intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$ et on a

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

3. Parité

Soit $f(x)$ une fonction intégrable sur $[-a, a]$ $(a \geq 0)$. Alors

$$\int_{-a}^a f(x)\ dx = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)\ dx \quad \text{si} \quad f(x) \quad \text{est paire} \\ 0 \quad \text{si} \quad f(x) \quad \text{est impaire.} \end{cases}$$

4. Périodicité

Soit $f(x)$ une fonction périodique, de période T, intégrable sur $[0, T]$. Alors, pour tout réel τ, $f(x)$ est intégrable sur $[\tau, \tau + T]$ et on a

$$\int_0^T f(x)\ dx = \int_\tau^{\tau+T} f(x)\ dx.$$

5. Croissance

Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions intégrales sur $[a, b]$. Si

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in [a, b] \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx.$$

6. Inégalité triangulaire

Soit $f(x)$ est une fonction définie sur $[a, b]$. Alors $f(x)$ est intégrable si et seulement si $|f(x)|$ l'est aussi, et on a

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

Définition 1.3. *(**Valeur moyenne**) On appelle valeur moyenne d'une fonction $f(x)$ intégrable sur $[a, b]$, le nombre réel*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ dx.$$

Exemple. Si $f(x)$ est constante par morceaux sur $[a, b]$, c'est-à-dire que

$$f(x) = C_k \quad \text{pour tous} \quad x \in [x_{k-1}, x_k] \quad \text{et} \quad k = 1, \cdots, n,$$

où les C_k sont des constantes, alors la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ coïncide avec la moyenne arithmétique des nombres C_k, c'est-à-dire

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} C_k.$$

Théorème 1.3.1. (**Formule de la moyenne**) *Si $f(x)$ et $g(x)$ sont intégrables sur $[a, b]$ et si $g(x)$ garde un signe constant, on a*

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = K \int_a^b g(x)\ dx,$$

le nombre $K \in [m, M]$ où m et M sont les bornes inférieure et supérieure de $f(x)$ dans l'intervalle $[a, b]$.

Cas particulier. *Si la fonction $f(x)$ est continue, il existe une valeur $c \in [a, b]$ pour la quelle $f(c) = K$ puisque $f(x)$ prend toutes les valeurs de l'intervalle $[m, M]$. On donc*

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(c) \int_a^b g(x)\ dx. \tag{1.2}$$

Si $g(x) = 1$ sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(c)(b-a).$$

Autrement dit, il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c)$ coïncide avec la valeur moyenne de $f(x)$ sur $[a, b]$.

Théorème 1.3.2. (**Deuxième formule de la moyenne**) *Si $f(x)$ est positive et décroissante sur $[a, b]$ et $g(x)$ intégrable , alors il existe un point $c \in [a, b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(c) \int_a^c g(x)\ dx.$$

1.4 Primitives

D'une façon générale, si $F(x)$ est une fonction dérivable, et si $F'(x) = f(x)$, $F(x)$ est dite primitive de la fonction $f(x)$. Si $G(x)$ est une autre primitive de $f(x)$, la fonction $F(x) - G(x)$ est donc dérivable à dérivée nulle, elle est constante d'après le théorème des accroissements finis. Ainsi, toutes les primitives de $f(x)$ sont de la forme $f(x) + C$, $F(x)$ étant l'une d'elles.

Théorème 1.4.1. (**Théorème fondamental de l'analyse**) *Soit $f(x)$ est une fonction sur $[a, b]$. On pose*

$$G(x) = \int_a^x f(t)\ dt \quad \textit{pour tout} \ \ x \in [a, b].$$

Alors $G(x)$ est l'unique primitive sur $[a, b]$ qui s'annule en a. Pour toute primitive $F(x)$ de $f(x)$, on a

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(b).$$

1.5 Méthodes d'intégration

Dans le cadre de l'intégration, aux régles de dérivation d'un produit de fonctions et d'une fonction composée, correspondent les deux régles d'intégration : l'intégration par parties et celle par changement de variables. Commençons par la première.

1.5.1 Intégration par parties

En partant de la formule de dérivation d'un produit

$$(uv)' = uv' + u'v,$$

en intégrant on obtient

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx. \tag{1.3}$$

La (1.3) est dite formule d'intégration par parties. Le sens que l'on lui attribue est le suivant. Supposns qu'on veuille calculer l'intégrale

$$\int f(x)dx \quad \text{où} \ \ f(x) = u(x)w(x).$$

Supposons en outre qu'on connaisse une primitive $v(x)$ de la fonction $w(x)$ ($v'(x) = w(x)$). Alors, à travers la (1.3), on peut ramener le calcul de l'intégrale

$$\int f(x)dx = \int u(x)w(x)\ dx = \int u(x)v'(x)\ dx$$

à celui de l'intégrale

$$\int u'(x)v(x)\ dx,$$

qui dans certains cas est plus facile que le précédent. Étant donné qu'une fonction $f(x)$ peut être écrite en produit de deux fonctions de plusieurs différentes manières, la formule (1.3) est un outil très puissant pour la transformation des intégrales. Dans le cas d'une intégrale définie la formule d'intégration par partie (1.3) s'écrit

$$\int_a^b u(x)v'(x)\ dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\ dx \tag{1.4}$$

$$= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\ dx. \tag{1.5}$$

Exemples.

1. $$I = \int x \sin x\ dx$$

En posant

$$\begin{cases} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{cases},$$

on a

$$I = -x\cos x + \int \cos x\ dx = -x\cos x + \sin x.$$

2. $$I = \int \operatorname{arctg} x\ dx$$

On pose

$$\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x & u' = \dfrac{1}{x^2+1} \\ v' = 1 & v = x \end{cases},$$

on a

$$I = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\ dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Application. Formule de Taylor

On peut généralise la formule (1.4), en supposant que les dérivées d'ordre $n+1$) existent et sont continues, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b u^{(n+1)}(x)v(x)\ dx &= u^{(n)}(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u^{(n)}(x)v'(x)\ dx \\
\int_a^b u^{(n)}(x)v'(x) &= u^{(n-1)}(x)v'(x)\Big|_a^b - \int_a^b u^{(n-1)}(x)v''(x)\ dx \\
&\ \ \vdots \\
\int_a^b u'(x)v^{(n)}(x) &= u(x)v^{(n)}(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v^{(n+1)}(x)\ dx.
\end{aligned}$$

Si on multiplie maintenant la seconde ligne par -1, la troisième par $(-1)^2$,$\cdots$, la $(n+1)^{\text{iéme}}$ par $(-1)^n$ et on ajoute, on obtient

$$\int_a^b u^{(n+1)}(x)v(x)\ dx =$$
$$= \left[u^{(n)}(x)v(x) - u^{(n-1)}(x)v'(x) + \cdots + (-1)^n u(x)v^{(n)}(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v^{(n+1)}(x)$$

En appliquant cette formule avec $v(x) = (b-x)^n/n!$, on obtient la formule de Taylor avec reste intégral

$$u(b) = u(a) + \frac{b-a}{1!}u'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}u^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}u^{(n+1)}(x)$$

et si on applique la première formule de la moyenne (voir (1.2)) à l'intégrale du second membre on retrouve le reste sous la forme habituelle (reste de Lagrange) :

$$u(b) = u(a) + \frac{b-a}{1!}u'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}u^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}u^{(n+1)}(c) \quad c \in]a,b[$$

1.5.2 Intégration par changement de variables

Une seconde méthode pour le calcul des intégrales est celui de l'intégration par changement variables. Comme l'intégration par parties, celle là aussi trouve son origine dans une formule de dérivation, exactement dans la formule de dérivation d'une fonction composée.

Soit $f(x)$ une fonction continue et $F(x)$ l'une de ses primitives :

$$F(x) = \int f(x)\ dx.$$

Si $\varphi(t)$ est une fonction dérivable et si on désigne par $G(t)$ la fonction composée $F \circ \varphi$, on a selon la formule de dérivation d'une fonction composée

$$G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

de sorte que $G(t)$ est une primitive de la fonction $f(\varphi(t))\varphi'(t)$:

$$G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt.$$

On a donc

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int f(x)\ dx \quad x = \varphi(t). \tag{1.6}$$

La formule (1.6) peut servir à réduire, moyennant un changement de variable adéquat $x = \varphi(t)$, l'intégrale

$$\int f(x)\ dx$$

à l'intégrale

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt.$$

En choisissant judicieusement la fonction $x = \varphi(t)$, il est possible que cette dernière intégrale soit plus simple que la précédente. Dans ce cas, si $G(t)$ est une primitive de $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, et si on a pris soin de choisir une fonction $\varphi(t)$ inversible, la primitive de $f(x)$ sera la fonction $G(\varphi^{-1}(x))$ de srote que

$$\int f(x)\ dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

Exemples.

1) Calculer

$$I = \int \sqrt{1-x^2}\ dx$$

la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ étant définie pour $x \in [-1, 1]$ on peut poser $x = \sin t$ avec $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ d'où $t =$ arcsin x

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \text{et} \quad dx = \cos t\ dt.$$

D'où

$$I = \int \cos^2 t\ dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\ dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t) + C = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t \cos t + C$$

et en revenant à la variable d'origine x

$$I = \frac{1}{2}\text{arcsin x} + \frac{1}{2}x\int\sqrt{1-x^2} + C.$$

2) Calculer

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}.$$

On peut écrire

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2 + 4}$$

en posant $x - 1 = 2t$

$$I = \int \frac{2dt}{4t^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\text{arctg } t + C = \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x-1}{2} \; + C.$$

Remarque. Dans certains cas il n'est même pas nécessaire d'expliciter le changement de variable :

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\ dx = \int \frac{d(u(x))}{u(x)} = \ln|u(x)| + C$$
$$\int u^{\alpha}(x)u'(x)dx = \int u^{\alpha}(x)d(u(x)) = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}(x) + C$$

en particulier

$$\text{tg } x\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\ dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$
$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \ln|ax^2+bx+c| + C$$
$$\int \sin^n x \cos x\ dx = \int \sin^n x d(\sin x) = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1} x + C \quad n \neq -1.$$

Dans le cas d'une intégrale définie on a la formule du changement de variable

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt \quad \text{avec} \;\; \varphi(\alpha) = a \;\; \text{et} \;\; \varphi(\beta) = b$$

formule qui montre qu'il est inutile de revenir à la variable x.

Exemple

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$$

en posant $x = \sin t$ avec $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$, on a

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ dt = \Big[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

1.6 Intégration des fractions rationnelles

1. Décomposition en éléments simples. Dans le cas général on rappelle que la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

contient :

1. Si dégré $= p\ P \geq q =$ dégré Q, un polynôme $E(x)$ de degré $p - q$ appelé *partie entière*, obtenu par division suivant les puissances décroissantes de $P(x)$ par $Q(x)$.

2. Une somme de *fractions dites de* 1^{er} *espèce* de la forme

$$\frac{A_j}{(x-a)^j}, \quad (j = n, n-1, \cdots, 1), \quad \frac{B_k}{(x-b)^k}, \quad (k = m, m-1, \cdots, 1),$$

relatifs aux pôles réels $a, b, \cdots$ d'ordre respectifs $j, k \cdots$

3. Une somme de *fractions dites de* 2^{e} *espèce* de la forme

$$\frac{A_l x + B_l}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^l}, \quad (l = p, p-1, \cdots, 1)$$

relatifs aux paires de pôles conjugués $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ d'ordre $l \cdots$

On a donc

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum \frac{A_j}{(x-a)^j} + \sum \frac{A_l x + B_l}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^l}.$$

Exemple

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)}$$

la fraction possède une partie entière de degré un et pour pôles simples $x = 1$ d'une part, $x = i$ et $x = -i$ d'autre part.

La décomposition s'écrit donc :

$$\frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)} = ax + b + \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2+1}.$$

Ici on trouve

$$a = 1, \quad b = -1, \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}.$$

2. Intégration.

1. Le pôlynome partie entière $E(x)$ s'intégre terme à terme sans difficulté.

2. Pour les fractions de 1er *espèce* :

$$\int \frac{A_j}{(x-a)^j}\ dx = \begin{cases} \dfrac{A_j}{1-j}(x-a)^{1-j} & \text{si} \quad j \neq 1 \\[2ex] A_j \ln|x-a| & \text{si} \quad j = 1 \end{cases}$$

3. Pour les intégrales des fractions de 2e *espèce* du type

$$\int \frac{A_l x + B_l}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^l}\ dx$$

il est commode de faire le changement de variables $x - \alpha = \beta t$. On obtient :

$$\int \frac{A_l(\alpha + \beta t) + B_l}{\beta^{2l}(t^2+1)^l}\ dt = \int \frac{C_l t + D_l}{(t^2+1)^l}\ dx$$

qui s'exprime au moyen de deux intégrales :

$$I_l = \int \frac{t}{(t^2+1)^l}\ dt = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^l}\ dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-l)}(t^2+1)^{1-l} & \text{si} \quad l \neq 1 \\[2ex] \dfrac{1}{2}\ln(t^2+1) & \text{si} \quad l = 1 \end{cases}$$

et l'intégrale

$$J_l = \int \frac{dt}{(1+t^2)^l}.$$

Cette dernière intégrale sera calculée le plus souvent au moyen du changement de variables

$$t = \operatorname{tg}\vartheta \qquad -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2} \qquad .$$

Ainsi par exemple :

$$J_2 = \int \frac{dt}{(1+t^2)^2}\ dt = \int \frac{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta}{(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)^2}\ d\vartheta$$

$$J_2 = \int \cos^2\vartheta\ d\vartheta = \int \frac{1+\cos(2\vartheta)}{2}\ d\vartheta = \frac{\vartheta}{2} + \frac{\sin(2\vartheta)}{4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{4}\frac{2t}{1+t^2}.$$

Plus généralement on vérifie que le même changement de variable donne

$$J_l = \int \frac{dt}{(1+t^2)^l} = \int \cos^{2l-2}\vartheta\ d\vartheta.$$

Exemples

1) Calculer

$$I = \int \frac{x^4}{(x-2)(x^2+4)}.$$

La décomposition en éléments simples s'écrit :

$$\frac{x^4}{(x-2)(x^2+4)} = ax + b + \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

On trouve

$$a = 1, \quad b = 2, \quad A = 2, \quad B = -2, \quad C = -4$$

d'où

$$I = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x-2| - \ln(x^2+4) - \int \frac{4}{x^2+4}\, dx$$

or

$$\int \frac{4}{x^2+4}\, dx = 2\int \frac{1}{(x/2)^2+1}\, d(x/2) = 2\text{arctg}(\frac{x}{2})$$

donc

$$I = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x-2| - \ln(x^2+4) + 2\text{arctg}(\frac{x}{2}).$$

2) Calculer

$$I = \int \frac{48}{(x+2)(x^3-8)}\, dx.$$

$$\frac{1}{(x+2)(x^3-8)} = \frac{1}{(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+4}$$

le calcul des coefficients donne

$$A = -3, \quad B = 1, \quad C = 2, \quad D = -4$$

$$I = -3\ln|x+2| + \ln|x-2| + \int \frac{2x-4}{x^2+2x+4}\, dx$$

or

$$\int \frac{2x-4}{x^2+2x+4} = \int \frac{2x+2-6}{x^2+2x+4}\, dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\, dx - 6\int \frac{1}{[(x+1)^2+3]}$$

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\, dx = \ln(x^2+2x+4)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+4}\, dx = \int \frac{1}{[(x+1)^2+3]} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{t^2+1} = \text{arctg}\ t = \text{arctg}\Big(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\Big)$$

où on a pose dans la dernière intégrale $x+1 = t\sqrt{3}$. Donc

$$I = -3\ln|x+2| + \ln|x-2| + \ln(x^2+2x+4) - \frac{6}{\sqrt{3}}\text{arctg}\Big(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\Big) + C$$

Exercices.

1) Calculer au moyen d'un changement de variables les intégrales indéfinies

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2},\quad \int \frac{\cos x}{(1-\sin x)^{\frac{2}{3}}}dx,\quad \int \mathrm{tg}\ x\ dx,\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}},\quad \int xe^{-x^2}dx,$$
$$\int \frac{x}{(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}}dx,\quad \int \frac{x}{1+x^4}dx,\quad \int \frac{dx}{x\ln x}dx,\quad \int \frac{dx}{x\ln^2 x}dx,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)},\quad \int \frac{\cos x}{1+\sin x},\quad \int \frac{dx}{x(ax^n+b)}\quad \text{(on posera } \ t=\frac{1}{x}\text{)}.$$

2) Mêmes question pour

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+e^{-x}},\quad I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\sin x}{1+\sin^4 x}dx,\quad I=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\ dx,\quad I=\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^p x}{x}\ dx$$

3) Soit $f(x)$ une fonction continue sur $[0,a]$ $(a>0)$ telle que $f(x)f(a-x)=1$ (une telle fonction existe, par exemple $f(x)=e^{x-\frac{a}{2}}$). Montrer au moyen d'un changement de variable que

$$I=\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}=\frac{a}{2}$$

4) Soit $f(x)$ une fonction continue sur $[0,a]$ $(a>0)$ telle que $f(x)+f(a-x)\neq 0$ pour tout $x\in[0,a]$. Montrer au moyen d'un changement de variable que

$$I=\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\ dx=\frac{a}{2}$$

5) Moyennant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^n\ln x\ dx,\quad \int_0^1 x^2\mathrm{arctg}\ x\ dx,\quad \int_0^1 e^x\cos(\pi x)\ dx,\quad \int_0^1 e^x\sin(\pi x)\ dx.$$

6) Intégrer les fractions rationnelles suivantes :

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\ dx,\quad \int \frac{dx}{x^5+x^3},\quad \int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}\ dx,\quad \int \frac{x+1}{x^3-8}\ dx$$
$$\int \frac{1}{1+x^3}\ dx,\quad \int \frac{1}{1-x^4}\ dx.$$

Chapitre 2

Intégrales Impropres

2.1 Introduction

La notion d'intégrale de Riemann a été introduite sous l'hypothèse que l'intervalle d'intégration aussi bien que la fonction intégrande soient bornés. Dans ce chapitre, nous allons voir comment, dans certains cas, on peut s'affranchir de ces restrictions en étendant de manière appropriée la définition de l'intégrale.

Commençons par examiner le cas où la fonction à intégrer ne reste pas borné au voisinage de l'un des deux points de l'intervalle d'intégration. A titre d'exemple, considérons la fonction $f(x) = 1/x^s$ sur l'intervalle $]0,1]$. Si $s > 0$, notre fonction n'est pas bornée au voisinage du point $x = 0$, mais si on se place dans l'intervalle $[\varepsilon, 1]$, avec $\varepsilon > 0$, la fonction $f(x) = 1/x^s$ est bornée et continue dans cet intervalle, donc intégrable et

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-s}(1-\varepsilon^{1-s}) & \text{si } \; s \neq 1 \\ -\ln \varepsilon \;\; \text{si } s \geq 1. \end{cases}$$

Si on fait tendre maintenant ε vers zéro, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-s} & \text{si } \; s < 1 \\ +\infty \;\; \text{si } \; s = 1. \end{cases}$$

À ce point nous dirons que la fonction $f(x) = 1/x^s$ avec $0 < s < 1$ est intégrable sur $]0,1[$

dans un sens impropre ou généralisé, et on pose

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} \qquad 0 < s < 1,$$

tandis que, si $s \geq 1$, la fonction ne sera pa intégrable.

Cas où la fonction à intégrer n'est pas bornée. Soit $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

1) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$,

2) Pour tout $\alpha \in]a, b[$, la fonction f est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle fermé borné $[\alpha, b]$.

On pose alors

$$F(\alpha) = \int_\alpha^b f(x)dx.$$

Remarque. La fonction f ne peut pas être intégrable au sens de Riemann sur $]a, b[$. Si non, elle serait bornée, ce qui contredit la condition première condition i). Toutefois, il est possible que la limite

$$\lim_{\alpha \to a} F(\alpha) = \lim_{\alpha \to a} \int_\alpha^b f(x)dx \quad \text{existe.} \tag{2.1}$$

Définition 2.2. *Si la limite (2.1) existe et est finie, on dira que la fonction est intégrable au sens généralisé sur $]a, b]$, ou que l'intégrale*

$$\int_a^b f(x)dx$$

est convergente, et on écrit

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to a} \int_\alpha^b f(x)dx.$$

Par contre, si la limite (2.1) est infinie ou n'existe pas , on dira que l'intégrale est divergente.

Exemple. Nature de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^s} \qquad s > 0.$$

Soit $\alpha \in]a, b[$. On a

$$F(\alpha) = \int_\alpha^b \frac{dx}{(x-a)^s} = \begin{cases} \frac{1}{1-s}\left[(b-a)^{1-s} - (\alpha - a)^{1-s}\right] & \text{si} \quad s \neq 1 \\ \ln(b-a) - \ln(\alpha - a) \quad \text{si} \quad s = 1. \end{cases}$$

et donc,

$$\lim_{\alpha \to a} F(\alpha) = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^s} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-s}}{1-s} & \text{si } \ 0 < s < 1 \\ +\infty \ \text{ si } \ s \geq 1. \end{cases}$$

En résumé

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^s} \quad \text{est} \quad \begin{cases} \text{convergente} \ \text{ si } \ 0 < s < 1 \\ \text{divergente} \ \text{ si } \ s \geq 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Remarque. La définition 2.2 est appropriée pour les fonctions qui ne sont pas bornées au voisinage de la borne inférieure a de l'intervalle d'intégration $]a, b[$. Si la fonction f n'est pas bornée au voisinage du point b, mais intégrable sur $[a, \beta]$ pour tout $\beta \in]a, b[$, on posera

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \to b} \int_a^\beta f(x)dx,$$

dès lors que la limite au second membre existe et soit finie.

Remarque. Si la fonction f n'est pas bornée au voisinage d'un point $x_0 \in]a, b[$, on dira que la fonction f est intégrable au sens généralisée sur $[a, b]$ si elle l'est sur les deux intervalles $[a, x_0[$ et $]x_0, b]$. Dans ce cas on écrit

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx.$$

Dune manière générale, si la fonction $f(x)$ n'est pas bornée au voisinage des points $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ de l'intervalle $[a, b]$. Dans ce cas il faudra diviser l'intervalle $[a, b]$ en plusieurs intervalles partiels $I_1, I_2; \cdots, I_n$ de telle sorte que dans chacun des intervalles I_k la fonction soit non bornée dans un voisinage d'une de ses extrémités $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. L'intégrale impropre de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[a, b]$ sera définie comme la somme des intégrales impropres de $f(x)$ dans les intervalles $I_1, I_2; \cdots, I_n$ (dans le cas évidemment que toutes ces intégrales existent de manière finie).

Cas où l'intervalle d'intégration n'est pas borné. De manière similaire à ce que nous avons vu ci-dessus, nous définirons l'intégrale impropre d'une fonction $f(x)$ dans l'intervalle non borné $[a, +\infty[$.

Définition 2.3. *Soit $f(x)$ une fonction définie sur $[a, +\infty[$. Supposons que pour tout $X > a$ la fonction $f(x)$ est intégrable sur $[a, X]$ et la limite*

$$\lim_{X \to +\infty} \int_a^X f(x)dx$$

existe et est finie. Dans ce cas, nous dirons que $f(x)$ est intégrable au sens généralisé sur $[a, +\infty[$ et nous posons

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X \to +\infty} \int_a^X f(x)dx.$$

Exemple. Nous voulons calculer l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s} dx, \quad s > 0.$$

On a pour tout $X > 1$

$$\int_1^X \frac{1}{x^s} dx = \begin{cases} \frac{1}{s-1}(1 - \frac{1}{X^{s-1}}) & \text{si} \quad s \neq 1 \\ \ln X \quad \text{si} \quad s = 1, \end{cases}$$

et donc

$$\lim_{X \to +\infty} \int_1^X \frac{1}{x^s} dx = \begin{cases} \frac{1}{s-1} & \text{si} \quad s > 1 \\ +\infty \quad \text{si } s \leq 1. \end{cases}$$

Il s'ensuit que la fonction $f(x) = 1/x^s$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si $s > 1$, et elle ne l'est pas si $s \leq 1$. (Comparez ce résultat avec celui de l'exemple d'introduction.)

Remarque. Si la fonction $f(x)$ est bornée et intégrable sur tout intervalle $[-X, b]$, on définit comme ci-dessus

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx.$$

D'ailleurs, en faisant le changement de variable $x = -t$, on retombe sur le cas précédent. Lorsque on écrira

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

il sera entendu que l'intégrale prise de 0 à $+\infty$ a un sens ainsi que l'intégrale prise de $-\infty$ à 0, et que l'on fait la somme des deux, ou encore, ce qui est équivalent, que l'intégrale

$$\int_{-X}^{X'} f(x)dx$$

a une limite lorsque X et X' tendent vers $+\infty$ d'une manière indépendante.

Exercice. Calculer, si elles existent, les intégrales impropres suivantes

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} dx, \quad \int_0^a \frac{dx}{a^2 - x^2}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1-\sin x)^{\frac{2}{3}}} dx, \quad \int_0^1 x \ln x dx$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x) dx, \quad \int_0^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx, \quad \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(1-x)^2}, \quad \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}}{x} dx, \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} dx$$

Remarque. Si l'on connaît une primitive $F(x)$ de $f(x)$, l'étude et le calcul d'une intégrale généralisée se réduisent à des calculs de limite ordinaires (comme le cas des intégrales ci-dessus.) Mais il arrive souvent dans les applications que la primitive $F(x)$ soit difficile, voir impossible, à trouver. Il faut donc démontrer la convergence ou la divergence de l'intégrale sans en connître d'avance une valeur presumée. Nous donnerons dans les paragraphes qui suivent quelques critères utiles de convergence.

2.3.1 Critères de convergence des intégrales généralisées

Soit $f(x)$ une fonction définie sur $]a, b]$ (ou sur $[a, +\infty[$) continue sur $[\alpha, b]$ pour tout $\alpha \in]a, b[$ (ou continue sur $[a, X]$ pour tout $X > a$). Les deux théorèmes qui suivent ne sont autre chose que l'application du théorème de Cauchy à l'existence des limites

$$\lim_{\alpha \to a} \int_\alpha^b f(x) dx \quad \text{et} \quad \lim_{X \to +\infty} \int_a^X f(x) dx.$$

Il sont d'un usage commode, employés en conjugaison avec le second théorème de la moyenne. Nous en verrons des exemples

Théorème 2.3.2. (**critére de Cauchy**) *Pour que l'intégrale*

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

soit convergente, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, on puisse trouver un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que, si α et $\beta < \delta(\varepsilon)$, on ait

$$\Big| \int_\alpha^\beta f(x) dx \Big| \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

tende vers zéro lorsque α et β tendent, indépendamment l'un de l'autre, vers a.

Pour que l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$$

soit convergente, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, on puisse trouver un $T(\varepsilon)$ tel pour tout X et $Y \geq T(\varepsilon)$, on ait

$$\Big|\int_X^Y f(x)dx\Big| \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int_X^Y f(x)dx$$

tende vers zéro lorsque X et Y tendent, indépendamment l'un de l'autre, vers $+\infty$

Exemples. Considérons les intégrales

1. $$I = \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\ dx \quad 0 < s < 1.$$

On a

$$\Big|\int_\alpha^\beta x^{s-1}e^{-x}\ dx\Big| \leq e^{-\alpha}\Big|\int_\alpha^\beta x^{s-1}\ dx\Big| = \frac{e^{-\alpha}}{s}|\beta^s - \alpha^s| \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad \alpha, \beta \to 0$$

par conséquent l'intégrale I est convergente.

2. $$J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ dx.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int_X^Y \frac{\sin x}{x}\ dx = \frac{\cos X}{X} - \frac{\cos Y}{Y} - \int_X^Y \frac{\cos x}{x^2}\ dx.$$

D'où

$$\Big|\int_X^Y \frac{\sin x}{x}\ dx\Big| \leq \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \Big|\int_X^Y \frac{|\cos x|}{x^2}\ dx\Big|$$

$$\leq \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \Big|\int_X^Y \frac{1}{x^2}\ dx\Big| \leq \frac{2}{X} + \frac{2}{Y} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad X, Y \to +\infty$$

donc l'intégrale J est convergente.

Théorème 2.3.3. (**critére d'Abel**) *Soit $f(x)$ une fonction continue sur $[a,+\infty[$ telle que*

$$f(x)=\alpha(x)g(x) \quad \forall x\geq a.$$

Si

1) la fonction $\alpha(x)$ est positive, décroissante et tendant vers zéro lorque $x\to+\infty$

2) Il existe un nombre M ne dépendant que de x_0 tel que

$$\Big|\int_X^{X'} g(x)dx\Big|\leq M \quad \forall X'\geq X\geq x_0\geq a$$

alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ est convergente.

Démonstration. La fonction $\alpha(x)$ étant poisitive et décroissante, on peut appliquer le second théorème de la moyenne (voir théorème 1.3.2) à l'intégrale

$$I=\int_X^Y \alpha(x)g(x)\ dx$$

de sorte que

$$I=\alpha(X)\int_X^Z g(x)\ dx \quad \text{avec} \quad Z\in]X,Y[.$$

Compte tenu de la seconde condition sur la fonction $g(x)$, il vient

$$\Big|\int_X^Y \alpha(x)g(x)\ dx\Big|=\alpha(X)\Big|\int_X^Z g(x)\ dx\Big|\leq M\alpha(X)$$

et comme $\alpha(X)$ tend vers zéro lorsque X tend vers l'infini, le théorème de Cauchy montre que I est convergente. ∎

Cas des fonctions positives. Soit donc $f:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction positive. Supposons que pour tout $X>a$ la fonction $f(x)$ est intégrable sur $[a,X]$, et posons

$$F(X)=\int_a^X f(x)dx.$$

La fonction $F(X)$ est croissante (car $F'(X)=f(X)\geq 0$) donc

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\sup_{x\geq a} F(x).$$

Par conséquent, l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

est convergente si et seulement si $F(x)$ est majoré. On a donc le critère de convergence suivant

Théorème 2.3.4. **(critére de comparaison)** *Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions définies sur $[a,+\infty[$. Supposons qu'il existe x_0 tel que*

$$0 \le f(x) \le g(x) \quad \forall x \ge x_0. \tag{2.3}$$

Alors

$$\text{si} \int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ converge}, \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ converge}$$
$$\text{si} \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ diverge}, \int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ diverge.}$$

Démonstration. Pour tout $X > x_0$, on a grâce à (2.3)

$$0 \le \int_{x_0}^{X} f(x)dx \le \int_{x_0}^{X} g(x)dx,$$

et, puisque la fonction $g(x)$ est positive pour $x \ge x_0$ et intégrable sur $[a,+\infty[$, alors

$$0 \le \int_{x_0}^{X} f(x)dx \le \int_{x_0}^{+\infty} g(x)dx.$$

Il s'ensuite que

$$0 \le \lim_{X\to+\infty} \int_{x_0}^{X} f(x)dx \le \int_{x_0}^{+\infty} g(x)dx \tag{2.4}$$

et comme

$$\int_a^{X} f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{X} f(x)dx$$

de (2.4) il en découle que

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{est convergent.}$$

Si, par contre, l'intégrale de $f(x)$ sur $[a,+\infty[$ est divergente, de l'inégalité

$$\int_a^{X} g(x)dx \ge \int_{x_0}^{X} g(x)dx \ge \int_{x_0}^{X} f(x)dx,$$

il en découle facilement que

$$\lim_{X\to+\infty} \int_a^{X} g(x)dx = +\infty$$

ce qui signifie que l'intégrale de $g(x)$ sur $[a,+\infty[$ est divergente. ∎

Exemples.

1. $$I = \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

Pour $x \geq 1$, il est clair que $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ est convergente, il en est donc de même de I.

2.
$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2 + |\cos x|}dx$$

Pour tout $x \geq 0$ on a

$$\frac{x}{x^2 + |\cos x|} \geq \frac{x}{x^2+1}$$

et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$ est divergente, donc J aussi.

Corollaire 2.3.5. *Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive. S'il existe un $\alpha > 1$ tel que*

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = 0, \tag{2.5}$$

alors l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{est convergente.}$$

Démonstration.En effet, de (2.5) il s'ensuit qu'il existe $x_0 > 0$ tel que, pour $x \geq x_0$, on a $x^\alpha f(x) \leq 1$, et donc

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^\alpha} \quad \forall x \geq x_0$$

Puisque la fonction $g(x) = 1/x^\alpha$ $(\alpha > 1)$ est intégrable sur $[x_0, +\infty[$, grâce au théorème 2.3.4, la fonction $f(x)$ est intégrable sur $[x_0, +\infty[$, ce qui signifie que son intégrale est convergente. ■

Exemple. L'intégrale

$$I = \int_1^{+\infty} f(x)\ dx, \qquad f(x) = \frac{x}{\cos^2 x + x^4}$$

est convergente car, comme on peut le voir facilement, $\lim_{x \to +\infty} x^2 f(x) = 0$.

Cas des fonctions de signe quelconque. Soit $f(x)$ une fonction définie sur $[a, +\infty[$. On dit que l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

est absolument convergente, ou que la fonction $f(x)$ est absolument intégrable sur $[a, +\infty[$, si l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

est convergente. On a alors le

Théorème 2.3.6. *Soit $f(x)$ une fonction définie sur $[a, +\infty[$, si la fonction $f(x)$ est absolument intégrale sur $[a, +\infty[$, alors la fonction $f(x)$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ et on a*

$$\Big|\int_a^{+\infty} f(x)dx\Big| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Démonstration.Soient $f^+(x) = \max(0, f(x))$ et $f^+(x) = \min(0, -f(x))$ la partie positive et négative de la fonction $f(x)$. Il est clair que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ et $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ et donc

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \quad \text{et} \quad f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Ceci étant, soit maintenant $X > a$. Puisque

$$\Big|\int_a^{X} f(x)dx\Big| \leq \int_a^{X} |f(x)|dx$$

et $|f(x)|$ est intégrale sur $[a, X]$ donc $f(x)$ l'est aussi et, compte tenu des relations ci-dessus, les fonctions $f^+(x)$ et $f^-(x)$ sont aussi intégrales sur $[a, X]$. En outre, on a

$$0 \leq f^+(x) \leq |f(x)|, \quad \text{et} \quad 0 \leq f^-(x) \leq |f(x)|$$

et donc $f^+(x)$ et $f^-(x)$ sont intégrable sur $[a, +\infty[$ et, comme $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, alors $f(x)$ est intégrable sur $[a, +\infty[$. Pour finir, notons que

$$\begin{aligned} \Big|\int_a^{+\infty} f(x)dx\Big| &= \Big|\int_a^{+\infty} f^+(x)dx - \int_a^{+\infty} f^-(x)dx\Big| \\ &\leq \int_a^{+\infty} (f^+(x) + f^-(x))dx = \int_a^{+\infty} |f(x)|dx. \end{aligned}$$

■

Du théorème 2.3.6 et du corollaire 2.3.5 découle immédiatement le

Corollaire 2.3.7. *Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive. S'il existe un $\alpha > 1$ tel que*

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha}|f(x)| = 0, \tag{2.6}$$

alors l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \textit{est convergente.}$$

Remarque. Il peut arriver qu'une fonction $f(x)$ soit inégrable sur $[a, +\infty[$ sans l'être absolument, contrairement à ce qui se passe pour l'intégrale de Riemann. Un exemple est donné par la fonction

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

qui est intégrable sur $[1, +\infty[$, alors que $|f(x)|$ ne l'est pas.

1. Montrons que $f(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. En effet, on a

$$\int_1^X \frac{\sin x}{x}\, dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\, dx. \tag{2.7}$$

Par ailleurs, notons que

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{pour tout} \quad x \geq 1$$

et donc l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

est convergente car absolument convergent, il s'ensuit en passant à la limite dans (2.7) lorsque X tend vers l'infini

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

Montrons maintenant que $|f(x)|$ n'est pas est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Commençons par noter que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$$

$$\geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\, dx = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin(t + n\pi)|\, dt = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

car $|\sin(t + n\pi)| = |\sin t| = \sin t$ pour $t \in [0, \pi]$, et en sommant sur $n = 1, 2, \cdots N - 1$, on obtient

$$\int_{\pi}^{N\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1}.$$

Puisque (voir chapitre 3 sur les séries numérique)

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} = +\infty$$

on a

$$\lim_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty.$$

Remarque. au fait on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

En effet, pour tout $t \geq 0$, considérons l'intégrale

$$f(t) = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-tx})\frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{2.8}$$

Par dérivation sous le signe intégale, on obtient

$$f'(t) == \int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x\,dx$$

Cette intégrale est facile à calculer. Deux intégrationx par parties nous donnent

$$\int_0^X e^{-tx}\sin x\,dx = \frac{1 - e^{tX}(\cos X + t\sin X)}{1+t^2}$$

et en faisant tendre X vers $+\infty$, on aura

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{donc} \quad f(t) = \operatorname{arctg}(t) + C.$$

En donnant à t la valeur zéro dans l'intégrale (9.5), on obtient $f(0) = 0$ donc $C = 0$, et

$$f(t) = \operatorname{arctg}(t) = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-tx})\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Si maintenant nous faisant tendre t vers $+\infty$ dans cette égalité, nous obtenons

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{2.9}$$

ce qui donne la valeur cherchée.

Mais ce calcul est purement formel et chaque étape exige une justification si l'on veut être assuré de l'exactitude de la formule (2.9). ∎

Théorème 2.3.8. **(critére de Weierestrass)** *Soit $f(x)$ une fonction définie sur $[a, +\infty[$ et soit $x_0 > a$. Supposons qu'il existe une fonction positive continue $\alpha(x)$ telle que $|f(x)| \leq \alpha(x)$ pour tout $x \geq x_0$ et telle que l'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} \alpha(x)\,dx$ soit convergente. Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente.*

Exemples

1. l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\ dx$$

est convergente car

$$\left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx \quad \text{est} \quad \textit{convergente.}$$

2. l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{2x^2 - \cos x}\ dx$$

est convergente car

$$\left|\frac{\sin x}{2x^2 - \cos x}\right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall x \geq 1 \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx \quad \text{est} \quad \textit{convergente.}$$

Exercices

1. Étudier la convergence éventuelle des intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^6+1}} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+1} dx$$
$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^\alpha} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+x^2)^{\frac{1}{3}}}$$

2. Montrer que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x - 1}{x^2+1} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos x dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1-e^{-x}} dx$$

3. Soit

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx.$$

Au moyen d'un changement de variable montrer que

$$I_n = (-1)^n e^{-n\pi} I_0 \quad I_0 = \int_0 \pi e^{-x} \sin x dx$$

En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx = \frac{I_0}{1+e^{-\pi}}.$$

4. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) e^{-px} = 0$. On appelle transformée de Laplace de f la fonction F définie par

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-px}\ dx$$

On admettra que cette intégrale est absolument convergente. Trouver les transformées des fonctions suivantes

$$f(x) = k \text{ (constante)}, \quad f(x) = e^{\alpha x}, \quad f(x) = \sin(\omega x), \quad f(x) = \cos(\omega x), \quad f(x) = x^n.$$

Si f est dérivable à l'ordre 2 et si

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)e^{-px} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f''(x)e^{-px} = 0$$

trouver les transformées de f' et f''.

5. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ est absolument convergente. En déduire que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ converge. (On utilisera une intégration par parties de I.)

6. On veut calculer l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$. Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{si} \quad 0 < x \leq \pi, \qquad f(0) = 0.$$

1) Montrer que f est continûment dérivable.

2) Soit n un entier positif ou nul. On considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} dx.$$

Montrer que I_n est indépendante de n et calculer I_n.

3) Soit φ une fonction continûment dérivable sur $[0, \pi]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) dx = 0$$

et déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

7. Soit

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}$$

1) Montrer que $\Gamma(n)$ converge pour tout $n > 0$.

2) En intégrant par parties, établir une relation entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$. Calculer $\Gamma(n)$ pour tout entier n non nul.

3) Montrer que

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi}.$$

Chapitre 3

Intégrales Multiples

3.1 Intégrales doubles

Dans ce chapitre, nous étendrons le concept de l'intégrale simple aux fonctions de plusieurs variables. Comme les intégrales simples, les intégrales multiples seront définies comme limite de sommes de Riemman et peuvent être déterminées en calculant successivement l'une après l'autre des intégrales simples. Plusieurs intégrales multiples sont utilisées pour représenter et calculer des quantités s'exprimant en fonction d'une densité attribuée à des régions du plan ou de l'espace. Dans le cas le plus simple, le volume d'un solide tridimensionnel, ayant une hauteur variable sur une région plane bidimensionnelle qui forme sa base, est donné par une double intégrale.

La définition de l'intégrale simple d'une fonction continue f sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est motivée par le problème de l'aire, c'est-à-dire par le problème de la détermination de l'aire de la region plan délimitée par la courbe $y = f(x)$, par l'axe des x et des droites verticales $x = a$ et $x = b$. Comme on le sait (voir chap.1), l'intégrale de f sur $[a, b]$ est définie par

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(c_i) \quad x_i \leq c_i \leq x_{i+1} \tag{3.1}$$

la suite des x_i constitue une subdivision de $[a, b]$.

D'une manière analogue l'intégrale double d'une fonction de deux variables sur un domaine Ω du plan peut être motivée par le problème de la détermination du volume d'une region de l'espace delimitée par la surface $z = f(x, y)$, du plan xy et du cylindre parallèle à l'axe des z passant par le contour de Ω. On commencera par le cas où Ω est un rectangle dont les côtés sont paralléles aux axes de coordonnées du plan xy. Soit $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ un tel rectangle. A un couple de subdivisions des intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b, \quad c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m < y_{m+1} = d$$

on peut associer un partage de Ω en rectangles élémentaires $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ et la double somme

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j, \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_j = y_{j+1} - y_j.$$

On démontre que si f est continue sur Ω la double somme précédente admet une limite qaund le nombre de rectangles augmente indéfiniment c'est-à-dire lorsque i et j tendent vers l'infini avec $\lim\limits_{i,j \to \infty} \sup(\Delta x_i, \Delta y_j) = 0$.

Par définition cette limite est appelée intégrale double de la fonction f sur le domaine d'intégration Ω. On note

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{n,m \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j. \tag{3.2}$$

Cette définition s'étend au cas où Ω n'est plus rectangulaire mais est limité par une courbe fermée Γ.

Interprétation graphique. Soit S la surface d'équation $z = f(x, y)$ représentant la fonction f dans le plan et $p_{i,j}$ le point de S de coordonnées (x_i, y_j). La quantité

$$\Delta V_{i,j} = f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

peut s'interpréter comme le volume du parallélépipède de base le rectangle élémentaire $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ et de hauteur égale à $f(x_i, y_j)$. L'intégrale double apparaît donc comme la *mesure du volume* limité par la surface S le plan xy et le cylindre de section droite Ω. En désignant par dA l'aire élémentaire dans Ω, on a

$$\iint_{\Omega} f(M) dA = V$$

3.1.1 Proprités de l'intégrale double

Par définition même l'intégrale double constitue une généralisation de l'intégrale simple, elle en posséde donc toutes les propriétés.

$$\iint_\Omega (\lambda f(x,y) + \mu g(x,y))dxdy = \lambda \iint_\Omega f(x,y)dxdy + \mu \iint_\Omega g(x,y)dxdy, \tag{3.3}$$

pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy \geq 0 \quad \text{si} \quad f(x,y) \geq 0 \ \text{ sur } \Omega, \tag{3.4}$$

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy \leq \iint_\Omega g(x,y)dxdy \quad \text{si} \quad f(x,y) \leq g(x,y) \ \text{ sur } \Omega, \tag{3.5}$$

$$\Big| \iint_\Omega f(x,y)dxdy \Big| \leq \iint_\Omega |f(x,y)|dxdy. \tag{3.6}$$

En particulier si la fonction f est bornée sur Ω, $|f(x,y)| \leq M$ pour tout $(x,y) \in \Omega$, on a

$$\Big| \iint_\Omega f(x,y)dxdy \Big| \leq M \iint_\Omega dxdy = M\text{aire}(D).$$

Si $\Omega_1, \Omega_2 \cdots, \Omega_n$ sont des domaines de Ω deux à deux disjoints, on a

$$\iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2 \cdots \cup \Omega_n} f(x,y)\ dxdy = \sum_{k=1}^{n} \iint_{\Omega_k} f(x,y)\ dxdy. \tag{3.7}$$

En particulier si $f(x,y) = 1$ sur $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cdots \cup \Omega_n$ cette propriété signifie que

$$\text{aire}(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cdots \cup \Omega_n) = \text{aire}(\Omega_1) + \text{aire}(\Omega_1) + \cdots \text{aire}(\Omega_n).$$

3.1.2 Calcul des intégrales doubles en coordonnées cartésiennes

Soit Ω un domaine d'intégration du plan $\mathbb{R}^2$ limité par une courbe fermée Γ. Ici est dans toute la suite, on supposera que toute parallèle aux axes coupe Γ en deux points au maximum. On pose pour tout i fixé

$$S_m(i) = \sum_{j=0}^{m} f(x_i, y_j)\Delta y_j.$$

Par définition (voir (3.1)) de l'intégrale simple, on a

$$\lim_{m\to\infty} S_m(i) = I(x_i) = \int_{y_1(x_i)}^{y_2(x_i)} f(x_i, y)\ dy \tag{3.8}$$

où y_1 et y_2 représentent les ordonnées des points d'intersection de la courbe Γ avec la droite d'équation $x = x_i$. En rappelant maintenant (3.2) et (3.1), on a

$$\iint_\Omega f(x,y)\ dxdy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} I(x_i)\Delta x_i = \int_a^b I(x)\ dx$$

et compte tenu de (3.8), on a

$$\iint_\Omega f(x,y)\ dxdy = \int_a^b \Big[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\ dy\Big]\ dx \tag{3.9}$$

Cette formule fait apparaître l'intégrale double comme une succession d'intégrales simples et en formit le mode de calcul. En échangeant les rôles de x et y on obtient

$$\iint_\Omega f(x,y)\ dxdy = \int_c^d \Big[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\ dx\Big]\ dy \tag{3.10}$$

Cas d'un domaine rectangulaire

Si Ω est le domaine rectangulaire $[a,b]\times[c,d]$, les formules précédentes deviennent

$$\iint_\Omega f(x,y)\ dxdy = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\ dx\Big]\ dy = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y)\ dx\Big]\ dy$$

et dans le cas particulier où la fonction f est à variables séparables $f(x,y) = h(x)g(y)$

$$\iint_\Omega f(x,y)\ dxdy = \int_a^b h(x)\ dx \int_c^d g(y)\ dy$$

et comme on le constate, dans ce cas seulement, l'intégrale double se réduit au produit de deux intégrales.

Exemples

1. Calculer pour tout $n \geq 1$ et $m \geq 1$

$$I = \iint_\Omega x^n y^m\ dx\ dy$$

avec successivement

$$\Omega = [0,1]\times[0,1], \quad \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ y - x \leq 0\}.$$

Dans le premier cas d'après ce qui précéde,

$$I = \int_0^1 x^n\ dx \int_0^1 y^m\ dy = \frac{1}{(n+1)(m+1)}.$$

Quant au second cas, on a selon la formule (3.9)

$$I = \int_0^1 x^n \Big[\int_0^x y^m\ dy\Big] dx$$
$$= \int_0^1 x^n \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1}\ dx = \frac{1}{m+1}\int_0^1 x^{n+m+1}\ dx = \frac{1}{(n+m+2)(m+1)}.$$

L'intégration selon la formule (3.10) nous conduit bien entendu au même résultat, à savoir

$$\begin{aligned} I_2 = \int_0^1 y^m \Big[\int_y^1 x^n \; dx \Big] dy = \int_0^1 y^m \cdot \Big[\frac{x^{n+1}}{n+1} \Big]_y^1 \; dy = \frac{1}{n+1} \int_0^1 y^m (1 - y^{n+1}) \; dy \\ = \frac{1}{n+1} \big(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{(n+m+2)} \big) = \frac{1}{(n+m+2)(m+1)}. \end{aligned}$$

2. Calculer

$$I = \iint_\Omega (4y - 2x) \; dx \; dy$$

où D est le triangle de sommets l'origine 0 et les points $A(1,1)$ et $B(0,1)$. On a

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \Big[\int_x^1 (4y - 2x) \; dy \Big] dx = \int_0^1 \Big[2y^2 - 2xy \Big]_{y=x}^{y=1} dx \\ = \int_0^1 (2 - 2x) dx = 1. \end{aligned}$$

Comme précédemment, en intervertissant le rôle d'intégration, on obtient

$$\begin{aligned} I == \int_0^1 \Big[\int_0^y (4y - 2x) \; dx \Big] dy = \int_0^1 \Big[4xy - x^2 \Big]_{x=0}^{x=y} dx \\ = \int_0^1 3y^2 dy = 1. \end{aligned}$$

Dans les deux exemples précédents, la double intégrale peut être calculée facilement en choisissant l'un des deux ordres d'intégration possibles (voir (3.9) ou (3.10) et les deux procédures de calcul ont été considérées uniquement pour illustrer cette possibilité. Cependant, il arrive souvent que le calcul d'une intégrale double puisse se faire facilement par rapport à un ordre, alors qu'il est difficile, voir impossible, par rapport à l'autre.

Exemple. Calculer

$$I = \iint_\Omega e^{y^2} \; dx \; dy \quad \text{avec} \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq x \leq 1, \; y - x \geq 0\}$$

D'après (3.9), on a

$$I = \int_0^1 \Big[\int_x^1 e^{y^2} \; dy \Big] \; dx$$

Puisqu'on ne peut pas déterminer une primitive de la fonction e^{y^2}, le calcul de l'intégrale par rapport à y est impossible. Par contre, en utilisant (3.10), on obtient facilement

$$I = \int_0^1 \Big[\int_0^y e^{y^2} \; dx \Big] \; dy = \int_0^1 y e^{y^2} dy = \frac{1}{2} e^{y^2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

3.1.3 Changement de variables

1. *Jacobien d'une transformation ponctuelle* : Soient Ω et Δ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$. On considère l'application bijective φ de Δ sur Ω définie par :

$$\varphi : \Delta \longrightarrow \Omega \quad (u,v) \longrightarrow \varphi(u,v) = (x,y) = (x(u,v), y(u,v)). \tag{3.11}$$

On peut considérer qu'à tout point $m(u,v)$ de Δ l'application ponctuelle φ associe le point $M(x,y)$ de Ω, c'est-à-dire $\varphi(m) = M$. Si les fonctions $x(u,v)$ et $y(u,v)$ des deux variables u et v admettent des dérivées partielles premières continues sur Δ, on appelle *déterminant fonctionnel* ou *jacobien* de l'application φ le déterminant noté $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ défini par

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \tag{3.12}$$

Exemple. Soit

$$x = au, \quad y = by$$

où a et b sont deux constantes non nulles. On a

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab \tag{3.13}$$

2. *Formule de changement de variables*. Soit donc le changement de variables défini par

$$x = x(u,v), \quad y = x(u,v), \quad (u,v) \in \Delta$$

où (voir (3.11)) $\Delta = \varphi^{-1}(\Omega)$. On admettra que si (voir (3.12)) le jacobien de l'application φ ne s'annule pas sur Δ, on a

$$\iint_\Omega f(x,y)\ dx\ dy = \iint_\Delta f(x(u,v), y(u,v)) \Big|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big|\ dudv \tag{3.14}$$

Remarque. Si $f(x,y) = 1$, on a

$$\iint_\Omega\ dxdy = \iint_\Delta \Big|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big|\ dudv \tag{3.15}$$

formule qui nous suggère à considérer $\Big|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big| dudv$ comme l'élément d'aire $dxdy$ dans le plan des xy.

Application.

Coordonnées polaires :

$$x = x(r,\vartheta) = r\cos\vartheta, \quad y = y(r,\vartheta) = r\sin\vartheta$$

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\vartheta)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\vartheta \\ y'_r & y'_\vartheta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{vmatrix} = r$$

donc d'après (3.15)

$$\iint_\Omega f(x,y)\ dx\ dy = \iint_\Delta f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) r\ drd\vartheta$$

Exemples

1. Calculer

$$I = \iint_\Omega xydxdy, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

En posant

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta$$

on obtient pour nouveau domaine

$$\Delta = \{(r,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

donc

$$I = \iint_\Delta r^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\ drd\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\sin\vartheta\ d\vartheta \int_0^R r^3\ dr = \frac{R^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\sin\vartheta\ d\vartheta$$
$$\frac{R^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\vartheta)\ d\vartheta = \frac{R^4}{8}$$

2. Calculer

$$I(a,b) = \iint_\Omega xydxdy, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq R^2, x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

où a et b sont nombres réels strictement positifs. En posant

$$x = au, \quad y = bv$$

on obtient pour nouveau domaine

$$\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le u^2 + v^2 \le R^2, \ u \ge 0, \ v \ge 0\}$$

donc, compte tenu de (3.13) et de l'exemple 1, on a

$$I(a,b) = ab \iint_\Delta uv du dv == \frac{abR^4}{8}.$$

Notons qu'on arrive au même résultat en effectuant le changement de variables

$$x = ar\cos\vartheta, \quad y = br\sin\vartheta$$

3. Calculer

$$I = \iint_\Omega \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2-y}}, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2-y \le 0, \ x \ge 0\} \tag{3.16}$$

En posant

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta$$

on obtient pour nouveau domaine

$$\Delta = \{(r,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le r \le \sin\vartheta, \ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\}$$

donc

$$I = \iint_\Delta \frac{rdrd\vartheta}{\sqrt{1-r^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{\sin\vartheta} \frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \big[-\sqrt{1-r^2}\big]_0^{\sin\vartheta}$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos\vartheta)d\vartheta = \frac{\pi}{2} + 1$$

4. Calculer

$$I_R = \iint_{\Omega_R} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \Omega_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2 + y \le R^2\}$$

En passant aux coordonnées polaires, on a

$$I_R = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R \frac{dr}{r^2} = 2\pi(1 - \frac{1}{R})$$

Notons qu'en passant à la limite dans I_R lorsque R tends vers l'infini, on obtient

$$\iint_\Omega \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y \ge 1\}. \tag{3.17}$$

Remarque. Les deux exemples (3.16) et (3.17) nous montrent que l'intégrale double d'une fonction étendue à un domaine Ω peut être finie dans le cas où Ω est borné mais la fonction n'est pas définie à l'intérieur de celui-ci (ou sur sa frontière), ou bien Ω n'est pas borné.

3.1.4 Extension de la notion d'intégrale double

On a supposé dans la définition de l'intégrale double que la fonction était continue et que le domaine d'intégration était borné. Deux extension sont donc à envisager soit :

1. le domaine d'intégration est borné mais la fonction à intégrer devient infinie,
2. le domaine d'intégration n'est pas borné.

Dans les deux cas il s'agit d'une intégrale impropre (ou généralisée).

Premier cas. Soit $f(x, y)$ une fonction continue dans un domaine borné Ω à l'exception d'un point P au voisimage duquel elle n'est pas bornée. Soit $V_N \subset \Omega$ une quelconque suite décroissante de voisinages du points P et soit l'intégrale

$$I_N = \iint_{\Omega_N} f(x, y) dx dy, \quad \Omega_N = \Omega - V_N. \tag{3.18}$$

Si I_N admet une limite finie I quand $N \to +\infty$ on dit que l'intégrale impropre

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \quad \text{est convergente}$$

et l'on pose

$$\lim_{N \to +\infty} I_N = I = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale impropre est divergente.

Intégrale impropre de fonctions positives. Si la fonction f est positive dans le domaine Ω, alors une telle intégrale impropre doit être finie (c'est-à-dire convergente) ou infinie (divergente). En effet, la suite numérique I_N étant croissante, on a alors

$$\lim_{N \to +\infty} I_N = I < +\infty \quad \text{ou bien} \quad \lim_{N \to +\infty} I_N = +\infty.$$

indépendamment des $\Omega_N \subset \Omega$ tendant vers Ω (voir (3.18)) , et donc de la suite décroissante de voisinages V_N. On dispose dans ce cas d'une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité, à savoir le

Lemme 3.1.1. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ et soit $f : \ \Omega \longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue sur Ω à l'exception d'un point au voisinage duquel f n'est pas borné. Supposons qu'il existe une suite croissante de domaines $\Omega_N \subset \Omega$ tendant vers Ω tel que*

$$\lim_{N \to +\infty} \iint_{\Omega_N} f(x, y) dx dy = I \in]0, +\infty]$$

alors

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = I$$

de sorte que si I est fini l'intégrale est convergente et divergente sinon.

Exemples. Considérons l'intégrale

$$I_\alpha = \iint_{\Omega} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y \leq 1\}. \tag{3.19}$$

Ici la fonction f n'est pas bornée au voisinage de l'origine. Etant positive, Comme suite de voisinages de l'origine V_N prenant des disques se rétrécissant vers l'origine, c'est-à-dire $V_N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y \leq \varepsilon_N\}$ où ε_N est une suite décroissante tendant vers zéro, et considérons

$$I_N = \iint_{\Omega_N} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} \quad \Omega_N = \Omega - V_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; \varepsilon_N \leq x^2 + y \leq 1\}.$$

En passant aux coordonnées polaires, on a

$$I_N = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\varepsilon_N}^1 r^{1-2\alpha} dr = \begin{cases} \dfrac{\pi}{1-\alpha}(1 - \varepsilon_N^{2(1-\alpha)}) & \text{si} \;\; \alpha \neq 1 \\ -\, 2\pi \ln(\varepsilon_N) \;\; \text{si} \;\; \alpha = 1. \end{cases}$$

donc

$$\lim_{N \to +\infty} I_N = \begin{cases} \dfrac{\pi}{1-\alpha} & \text{si} \;\; \alpha < 1 \\ +\infty \;\; \text{si} \;\; \alpha \geq 1. \end{cases} \tag{3.20}$$

donc l'intégrale (3.19) est convergente si $\alpha < 1$ et divergente si $\alpha \geq 1$.

Notons que l'hypothèse de positivité de la fonction f est essentielle comme le montre l'exemple suivant. Soit en effet l'intégrale

$$\iint_{\Omega} \frac{\cos\left[\pi(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right]}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dxdy, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

et soit la suite croissante

$$\Omega_N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; \frac{1}{N} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

qui tend lorsque vers Ω. En passant aux coordonnées polaires, on a

$$I_N = \iint_{\Omega_N} \frac{\cos\left[\pi(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right]}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\frac{1}{N}}^1 \frac{\cos(\pi r^{-1})}{r^2} dr = -2\pi \int_{\frac{1}{N}}^1 \cos\left(\frac{\pi}{r}\right) d\left(\frac{1}{r}\right)$$
$$= 2\pi \int_1^N \cos(\pi\alpha) d\alpha = 2\sin(\pi\alpha)\Big|_1^N = 0.$$

Mais si on considére une autre suite croissante $\Omega_N \subset \Omega$ recouvrant Ω, par exemple

$$\Omega_N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{2}{4N+1} \leq x^2+y^2 \leq 1\},$$

on obtient avec les mêmes calculs

$$I_N = 2\pi \int_1^{\frac{4N+1}{2}} \cos(\alpha\pi) d\alpha = 2\sin(\alpha\pi)\Big|_1^{\frac{4N+1}{2}} = -2(-1)^{2N} = -2$$

Deuxième cas. Le domaine d'intégration Ω n'est pas borné. Soit alors une quelconque suite croissante Ω_N ($N \geq 1$) de domaines bornés de $\mathbb{R}^2$ qui tend vers Ω. On considère

$$I_N = \iint_{\Omega_N} f(x,y) dxdy.$$

Si I_N admet une limite finie I quand $N \to +\infty$ on dit que l'intégrale impropre

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy \quad \text{est convergente}$$

et l'on pose

$$\lim_{N\to+\infty} I_N = I = \iint_\Omega f(x,y)dxdy$$

sinon on dit que l'intégrale est divergente. Dans ce cas, on dispose aussi du même lemme 3.1.1, à savoir

Lemme 3.1.2. *Soit Ω un domaine non borné et soit $f : \ \Omega \longrightarrow [0,+\infty[$ une fonction continue. Supposons qu'il existe une suite croissante de domaines $\Omega_N \subset \Omega$ tendant vers Ω tel que*

$$\lim_{N\to+\infty} \iint_{\Omega_N} f(x,y)dxdy = I \in \,]0,+\infty]$$

alors

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = I$$

de sorte que si I est fini l'intégrale est convergente et divergente sinon.

Exemple. Convergence de l'intégrale

$$I = \iint_{\Omega} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} dxdy, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0\}. \tag{3.21}$$

Siot R_N une suite croissante de nombres réels positifs et soit Ω_N les disques centrés à l'origine de rayon R_N, considérons la suite des intégrales

$$I_N = \iint_{\Omega_N} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} dxdy,$$

En passant aux coordonnées polaires, on obtient

$$I_N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{R_N} re^{-r} dr = \pi \int_0^{R_N} re^{-r} dr$$

et une intégration par parties nous donne facilement

$$I_R = \pi(1 - (1 + R_N))e^{-R_N}), \quad \lim_{R_N \to +\infty} I_N = \pi$$

donc l'intégrale (3.21) est convergente et $I = \pi$.

Notons que si la fonction f change de signe dans Ω l'existence d'une limite fine de la suite

$$I_N = \iint_{\Omega_N} f(x,y) dxdy$$

pour une certaine suite croissante de domaine Ω_N tendant ver Ω m'implique pas que

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dxdy \ \text{ converge.}$$

En effet, posons

$$\Omega_N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 1, \ y \geq 1, \ x^2 + y^2 \leq 2N^2\},$$
$$\omega_N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 1, \ y \geq 1, \ x^2 + y^2 \leq \frac{(2N+1)^2}{8}\},$$

alors les suites Ω_N et ω_N sont croissantes et

$$\lim_{N \to +\infty} \Omega_N = \lim_{N \to +\infty} \omega_N = \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 1, \ y \geq 1\}.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$I = \iint_{\Omega} f(x,y) \ dxdy, \quad f(x,y) = \frac{\sin(\pi\sqrt{2(x^2+y^2)}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 1, \ y \geq 1\}.$$

Par passage aux coordonnées polaires, on obtient

$$\iint_{\Omega_N} f(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_{\sqrt{2}}^{N\sqrt{2}} \sin(\pi r\sqrt{2})dr = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos(2N\pi) - \cos(2\pi)) = 0$$

tandis que

$$\iint_{\omega_N} f(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_{\sqrt{2}}^{\frac{2N+1}{2\sqrt{2}}} \sin(\pi r\sqrt{2})dr = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos{(2N{+}1)\frac{\pi}{2}}) - \cos(2\pi)) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

D'où

$$\lim_{N\to+\infty} \iint_{\Omega_N} f(x,y)dxdy \neq \lim_{N\to+\infty} \iint_{\omega_N} f(x,y)dxdy$$

donc l'intégrale en question est divergente.

3.1.5 Exercices

1. Calculer les intégrales

$$\int_0^1 dx \int_0^x (yx^2 + 2y^3)dy, \quad \int_0^1 \int_0^y (yx^2 + 2y^3)dxdy,$$

$$\int_0^1 \int_0^x x^4 e^{yx^2} dxdy, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-y}^{y} \sin|x|dxdy, \quad \int_0^1 dy \int_0^y \frac{y^\alpha}{x^2+y^2}dx \quad \alpha \geq 0.$$

2. Calculer

$$I = \int_0^1 dy \int_{-y}^{y} \sin{(\frac{\pi x}{2y})}\ dx$$

Interpréter I comme une intégrale double étendue à un domaine Ω que l'on précisera.

3. Calculer les intégrales

$$\iint_\Omega \frac{dxdy}{(x+y)^2}, \quad \Omega = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 :\ 3 \leq x \leq 4,\ 1 \leq y \leq 2\}$$

$$\iint_\Omega (x+2y)^2\ dxdy, \quad \Omega = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 :\ |y| \leq 4,\ y^2 - 4 \leq x \leq 5\}$$

$$\iint_\Omega r^2 \sin^2\vartheta\ drd\vartheta, \quad \Delta = \{(r,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ |\vartheta| \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq \cos\vartheta\}$$

4. Calculer

$$\iint_\Omega x\cos(\pi y)dxdy \text{ où } \begin{cases} \Omega \text{ est le triangle de sommets } A(-1,0), B(1,0), (0,1) \\ \Omega \text{ le trapèze de sommets } O(0,0), A(2,0), B(1,1), C(0,1). \end{cases}$$

5. Calculer

$$\iint_{\Omega} \frac{y^n}{1-x}\, dxdy, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$$

en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 y^n \ln y\ dy.$$

6. Calculer les intégrales

$$\iint_{\Omega} (x+y)e^{x+y}\, dxdy,\ \iint_{\Omega} (y+x)\ln(y+x)\, dxdy,\ \ \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}.$$

Retrouver le résultats précédents en réalisant un découpage du domaine Ω à l'aides des droites d'équations $x + y = \lambda$.

7. Calculer

$$\iint_{\Omega} \sin(\pi(x^2+y^2))\ dxdy,\ \ \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$\iint_{\Omega} xy\ dxdy, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2-2y \leq 0\}$$

$$\iint_{\Omega} \frac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}}\ dxdy,\ \ \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0, y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

8. Calculer

$$\iint_{\Omega} (x^2+y^2)\ dxdy,\ \ \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0, y \geq 0,\ x^2+y^2-y \leq 0,\ x^2+y^2-x \geq 0\}$$

$$\iint_{\Omega}\ dxdy, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq R^2,\ x^2+y^2-2Ry \leq 0\}.$$

9. Calculer

$$\iint_{\Omega} \frac{ye^x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dxdy, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$$

en déduire la valeur de l'intégrale impropre

$$\int_0^1 \frac{te^t - e^t + 1}{t^2} dt$$

10. Calculer

$$\iint_{\Omega} xye^{-x^2-y^2} dxdy, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

$$\iint_{\Omega} \ln(x^2+y^2) dxdy, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$\iint_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2} dxdy,\ \ \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1;\ y \leq |x|\}.$$

11. Calculer si elles existent les intégrales imopropres suivantes

$$\iint_\Omega e^{-x-y}dxdy, \quad \iint_\Omega \frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}, \quad \iint_\Omega \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy$$

où $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$

12. Calculer à l'aide du changement de variable

$$x+y=u \quad y=uv$$

l'intégrale

$$\iint_\Omega e^{\frac{y}{x+y}}dxdy \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x+y \leq 1\}$$

13 En posant

$$x-y=u \quad x+y=v$$

calculer

$$\iint_\Omega \cos\Big(\frac{x-y}{x+y}\Big)dxdy \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x_geq0, \ y \geq 0, \ x+y \leq 1\}.$$

14. Même question pour les intégrales suivantes

$$\iint_\Omega \frac{y}{1+x^2}dxdy, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R}, \ 0 \leq y \leq 1\}$$

$$\iint_\Omega \frac{1}{x\sqrt{y}}dxdy, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \ y \leq x, \ y \geq 2x\}$$

$$\iint_\Omega \frac{1}{1+x+y}dxdy, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ 0 \leq y \leq 1\}$$

$$\iint_\Omega \frac{1}{x^3}e^{-\frac{y}{x}}dxdy, \quad \iint_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}dxdy, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 1, \ 0 \leq y \leq x\}$$

$$\iint_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}dxdy, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 1, \ y \geq 1\}$$

$$\iint_\Omega \frac{1}{x^4+y^2}dxdy, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 1, \ 0 \leq y \geq x^2\}$$

$$\iint_\Omega \frac{1}{x}\sin\big(\frac{1}{x}\big)dxdy, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq \frac{2}{\pi}, \ 0 \leq y \geq \frac{1}{x}\}.$$

3.2 Intégrales triples

3.2.1 Définition et propriétés

. Soit f une fonction de trois variavles x, y, et z continue sur un domaine Ω de l'espace $\mathbb{R}^3$. Comme dans le cas d'une intégrale double on peut envisage un partage de Ω

en parallélilépipèdes élémentaires

$$[x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}] \times [z_i, z_{i+1}]$$

et on considère la somme

$$S = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{p} f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k,$$
$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_j = y_{j+1} - y_j, \quad \Delta z_k = z_{k+1} - z_k.$$

On admettra encore que si f est continue sur Ω la somme précédente admet une limite finie I quand le nombre de parallélilépipèdes augmente indéfiniment. Cette limite est appelée intégrale triple de f sur Ω et se note

$$I = \iint_\Omega f(x, y, z) dxdydz$$

Remarque. Si $f(x, y, z) = 1$ sur Ω la définition précédente montre que l'intégrale triple représente le *volume* du domaine Ω de $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \iint_\Omega dxdydz.$$

Si $f(x, y, z) \neq 1$ son intégrale triple peut être interpréter comme un "ipervolume" (c'est-à-dire un volume quadridimentionnel) d'une région d'un espace à quatre dimensions ayant le domaine Ω comme "base" tridimentionnel et comme "couvercle" l'ipersurface $w = f(x, y, z)$. Cette interprétation n'est pas particulièrement utile, mais dans les applications on rencontre d'autres plus convenientes. Par exemple si $f(x, y, z)$ représente la densité (masse par unité de volume) non homogème d'une substance occupant tout le solide Ω, la masse élémentaire dM d'un élément de volume dV est : $dm = f(x, y, z)dV$ donc la masse totale du solide Ω est donnée par l'intégrale triple

$$\mathrm{Masse}(\Omega) = \iiint_\Omega f(x, y, z) dV.$$

D'autres interprétations seront données par la suite.

Les proriétées de l'intégrale triple sont les mêmes que celle de l'intégrale double. Ainsi par exemple si f et g sont continues sur Ω alors

$$\iint_\Omega (f(x, y, z) + g(x, y, z)) dxdydz = \iiint_\Omega (f(x, y, z) dxdydz + \iiint_\Omega g(x, y, z) dxdydz,$$
$$\iiint_\Omega \lambda f(x, y, z) dxdydz = \lambda \iint_\Omega f(x, y, z) dxdydz, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si Ω_1 et Ω_2 sont disjoints :

$$\iiint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x,y,z) =$$

$$= \iiint_{\Omega_1} (f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{\Omega_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

Si f est poisitive sur Ω

$$\iiint_{\Omega} (f(x,y,z)dxdydz \geq 0.$$

2. Calcul des intégrales triples. Soit S la surface limitant le domaine Ω, surface que nous supposons coupée par toute parallèle aux axes en deux points au plus. Par définition

$$I = \iiint_{\Omega} f(x,y)\ dxdydz = \lim_{n,m,p\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{p} f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Soit la somme

$$S_p(i,j) = \sum_{k=0}^{p} f(x_i, y_j, z_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{p} f(x_i, y_j, z_k) \Delta z_k$$

dans laquelle i et j sont fixés, et soit $P_1(x_i, y_j, z_1(x_i, y_j))$ et $P_2(x_i, y_j, z_2(x_i, y_j))$ les points de la surface S se projetant sur le plan xy en $M(x_i, y_j)$. Par définition (voir (3.1)) de l'intégrale simple, on a

$$\lim_{p\to\infty} S_p(i,j) = I(x_i, y_j) = \int_{z_1(x_i,y_j)}^{z_2(x_i,y_j)} f(x_i, y_j, z)\ dz \tag{3.22}$$

donc

$$I = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} I(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

c'est-à-dire, en revenant à la définition de l'intégrale double

$$I = \iint_{\Omega'} I(x,y) dxdy$$

où $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ est la projection de Ω sur le plan xy. On a donc

$$I = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\ dxdydz = \iint_{\Omega'} \Big[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\ dz \Big] dxdy.$$

Puisque, comme on l'a déjà vu, l'intégrale double peut être décomposée en deux intégrales simples, finalement on a

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\ dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\ dz.$$

tout en tenant compte que les rôles joués par x et y dans l'intégrale double étendue à Ω' peuvent être échangés.

Remarque. Dans le cas particulier où Ω est un parallélépipéde et f est variables séparables, c'est-à-dire

$$\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \quad \text{et} \quad f(x, y, z) = h(x)g(y)k(z),$$

on a

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\ dxdydz = \int_{a_1}^{b_1} h(x)\ dx \int_{a_2}^{b_2} g(y)\ dy \int_{a_3}^{b_3} k(z)\ dz.$$

Exemple. Calculer

$$I = \iiint_\Omega xyz\ dxdydz, \quad \Omega = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

0n a

$$I = \int_0^1 x\ dx \int_0^1 y\ dy \int_0^1 z\ dz = \frac{1}{8}.$$

3.2.2 Intégration par tranches

Soit $\Omega(z)$ le domaine plan obtenu en sectionnant Ω par un plan de côte $z \in [h, H]$, c'est-à-dire

$$\Omega(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x, y, z) \in \Omega\} \quad \forall\ z \in [h, H].$$

Si f est une fonction continue sur Ω, alors

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\ dxdydz = \int_{h_0}^{h} dz \iint_{\Omega(z)} f(x, y, z)\ dxdy.$$

Exemple. Soit Ω l'intérieur du tétraèdre de sommets $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 0, 1)$, calculer le volume de Ω, soit

$$\text{Vol}(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz, \quad \Omega = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0,\ x + y + z \leq 1\}.$$

D'après la remarque précédente, on a

$$\text{Vol}(\Omega) = \int_0^1 dz \iint_{\Omega(z)} dxdy, \quad \Omega(z) = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1 - z, 0 \leq y + x \leq 1 - z\}$$

ce qui donne

$$I = \int_0^1 dz \iint_{\Omega(z)} dxdy = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_0^{1-z-x} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - z)^2 dz.$$

donc $\text{Vol}(\Omega) = \dfrac{1}{6}$.

3.2.3 Changement de variables.

Soit le changement de variables

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

Si le point $m(u, v, w)$ décrit la regione de l'esoace Δ son image $M(x, y, z)$ décrit la régione Ω. On suppose que l'application ainsi définie entre les régions Δ et Ω de $\mathbb{R}^3$ est bijective et de Jacobien non nul :

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_w & z'_w & z'_w \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{sur} \quad \Omega$$

On admettra la formule suivante

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega f(x, y, z) dxdydz &= \\ &= \iiint_\Omega f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| dudvdw. \end{aligned}$$

application.

1). Coordonnées cylindriques. Le passage aux coordonnées cylindriques est défini par :

$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta \\ z = z \end{cases}$$

donc

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \vartheta, z)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\vartheta & x'_z \\ y'_r & y'_\vartheta & y'_z \\ z'_r & z'_\vartheta & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

exemple. Calculer

$$I = \iiint_\Omega \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdydz, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < x^2 + y^2 \leq R^2, \ 0 < z \leq h\}.$$

En passant aux coordonnées cylindriques, on a

$$I = \iiint_{\Delta} z dr d\vartheta dz \quad \Delta = \{(r, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq r \leq R, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \ 0 \leq z \leq h\}$$

d'ou

$$I = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R dr \int_0^h z dz = h\pi R.$$

2). Coordonnées sphériques. Le formules de passage s'écrivent

$$\begin{cases} x = r \cos\varphi \cos\vartheta & 0 \leq \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1 \leq 2\pi \\ y = r \cos\varphi \sin\vartheta & -\frac{\pi}{2}\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2} \\ z = r \sin\varphi & 0 \leq \varrho \leq r \leq R \end{cases}$$

On vérifie aisément que

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \vartheta, \varphi)} = r^2 \cos\varphi$$

Exemple. Calculer

$$\iiint_{\Omega} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dxdydz, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \varrho^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

En passant aux coordonnées sphériques, on a

$$\iiint_{\Delta} \frac{r^2 \cos\varphi}{r} dr d\vartheta d\varphi \quad \Delta = \{(r, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \varrho \leq r \leq R, \ 0 \leq \vartheta \leq 2, \ -\frac{\pi}{2}\varphi\frac{\pi}{2}\}$$

d'ou

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_{\varrho}^{R} r dr = 2\pi(R^2 - \varrho^2).$$

Exercices. 1. Calculer les intégrales suivantes

$$\iiint_{\Omega} (1 + 4x + 2y^3) dxdydz \quad \Omega = [-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c]$$

$$\iiint_{\Omega} xyz dxdydz \quad \Omega = [0, 1] \times [-2, 0] \times [1, 4]$$

$$\iiint_{\Omega} (3 + 2xy) dxdydz \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \ z \geq 0\}$$

$$\iiint_{\Omega} x dxdydz \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0, \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1\}$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{(x + y + z)^3} dxdydz$$

où Ω est la région délimitée par les plans $z = 1, z = 2, y = 0, y = z, x = 0, x = y + z$

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 \text{à} dxdydz$$

où Ω est la région délimitée par les surfaces $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = 4$ et par les plans $z = 0, z = 1, x = y$ avec $x \geq 0$

2. Calculer le volume des domaines

$$\Omega = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$$
$$\Omega = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le R^2\}$$
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le 4, \ x^2 + y^2 + z^2 \le 16\},$$
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2 \ge x^2 + y^2, \ x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\},$$
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le 2z \le x^2 + y^2, \ x^2 + y^2 \le 2y\},$$
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \ge 0, \ x^2 + y^2 \le z^2, \ x - 2z + 2 \le 0\},$$
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \le 2az, \ x^2 + y^2 - ay \le 0\},$$
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le 4, \ x^2 + y^2 + z^2 \le 16\},$$
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (1 - z)^2 \le x^2 + y^2 \le (1 - z)\},$$
$$\Omega = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, \ 1 \le xy \le 9, \ 4 \le xy \le 36, \ 25 \le yz \le 49\}$$

indication : poser $u = xy, \quad v = xz, \quad w = yz.$

3. Calculer

$$\iiint_\Omega z(x^2 + y^2) dxdydz, \quad \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz,$$
où $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le a^2, \ 0 \le z \le h\}$
$$\iiint_\Omega z(x^2 + y^2) dxdydz, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 + z^2 \le a^2, \ 0 \le x \le 1\}$$
$$\iiint_\Omega x^2 dxdydz, \quad \iiint_\Omega (x^2 - y^2) dxdydz, \quad \iiint_\Omega (x^2 - z^2) dxdydz, \quad \iiint_\Omega y^2 \ln z dxdydz$$
où $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \ge 0, \ x^2 + y^2 + 1 \le z^2 \le 4\}$
$$\iiint_\Omega z dxdydz, \quad \iiint_\Omega z e^{x^2+y^2} dxdydz, \quad \iiint_\Omega x^2 \sin(\frac{\pi z}{2}) dxdydz, \quad \iiint_\Omega \frac{|x|}{1 + \sqrt{x}} dxdydz$$
où $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \ge 0, \ x^2 + y^{\le} z \le 1\}$

4. Calculer

$$\iiint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dxdydz, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ a^2 \le x^2 + y^2 + r^2 \le b^2\},$$
$$\iiint_\Omega \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} dxdydz \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$$
$$\iiint_\Omega \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dxdydz \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \le 1\}$$

5. Calculer

$$\iiint_\Omega \ln(x^2+y^2+z^2)dxdydz, \quad \Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ z\leq 0,\ x^2+y^2+z^2\leq 1,\ x^2+y^2\leq z^2\}$$

$$\iiint_\Omega x^2dxdydz,\ \iiint_\Omega zy^2dxdydz,$$

où $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ z\leq 0,\ x^2+y^2+z^2\leq 1,\ 3(x^2+y^2)\leq z^2\}$

$$\iiint_\Omega e^z dxdydz,\ \iiint_\Omega zlnzdxdydz,$$

où $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ z\leq 0,\ x^2+y^2+z^2\leq 1,\ x^2+y^2\leq 3z^2\}$.

6. Soit

$$I(r,s) = \int_0^1 u^r(1-u)^s du \quad r\in\mathbb{N}, s\in N.$$

A l'aide d'une intégrantion par parties, établir une relation entre $I(r,s)$ et $I(r+1,s-1)$. En déduire la valeur de $I(r,s)$.

Soit

$$J = \iiint_\Omega x^n y^m z^p (1-x-y-z)^q dxdydz \quad ,; m,p,q\in\mathbb{N}.$$

où $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z\leq 1\}$. On pose

$$x = w,\quad y=(1-w)v,\quad z=(1-v)(1-w)u.$$

Calculer le Jacobien de ce changement de variables et monter qu'il transforme Ω en Δ défini par

$$\Delta = \{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 :\ 0\leq u\leq 1,\ 0\leq v\leq 1,\ 0\leq w\leq 1\}.$$

Exprimer J a l'aide de $I(r,s)$ et en déduire la valeur de J.

Chapitre 4

Séries numériques

4.1 Rappels sur les suites numériques

Définition. *Soit* $\{u_n\}$ *suite une suite numérique et soit* l *un nombre réel. On dit que la suite* $\{u_n\}$ *tend vers* l *lorsque* n *tend vers l'infini, et on écrit* $\lim_{n\to\infty} u_n = l$, *si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall n \geq N_\varepsilon \quad |u_n - l| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un rang $N = N_\varepsilon$, à partir duquel tous le termes u_n restent dans l'intervalle $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.

Exemple. La suite $\frac{1}{n}$ tend vers zéro car si on fixe ε on aura $1/n \leq \varepsilon$ dès que $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ donc pour tous les $n \geq N_\varepsilon$ où $N_\varepsilon = [1/\varepsilon] + 1$ ($[x]$ désigne la partie entière de x).

Proposition 4.1.1. *La limite d'une suite est unique.*

Démonstration. Supposons qu'une suite $\{u_n\}$ posséde deux limites distinctes l et l' ; par définition, ε étant fixé, il existe N_ε et N'_ε tel que $\forall n \geq N_\varepsilon$ on a $|u_n - l| \leq \varepsilon/2$ et $\forall n \geq N'_\varepsilon$ $|u_n - l'| \leq \varepsilon/2$. Donc, si $n \geq \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$ on a

$$|l - l'| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| \leq \varepsilon.$$

ceci étant vrai quelque soit $\varepsilon > 0$, on a nécessairement $l = l'$. ■

Notons qu'il est indispensable de revenir à l'écriture (4.1) si l'on veut exprimer que la suite $\{u_n\}$ ne converge pas vers l, celà s'écrit

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \text{tel que } \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \exists n \geq N \ \text{ tel que } \ |u_n - l| \geq \varepsilon. \tag{4.2}$$

Par exemple, la suite

$$u_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

ne tends pas vers 0. En effet, si l'on prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$, de l'inégalité

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n \geq \frac{1}{n+1}$$

valable pour tout $n \geq 1$, s'ensuit que

$$|u_n| \geq \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}.$$

Une suite qui posséde une limite finie est dite aussi suite convergente.

4.2 Suites Extraites

Définition. *Soient $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ deux suites. On dit que $\{v_n\}$ est une sous-suite de $\{u_n\}$, ou une suite extraite de $\{u_n\}$, s'il existe une suite strictement croissante d'indices $\{k_n\}$ telle que $v_n = u_{k_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

L'idée intuitive qui sous-tend la définition précédente est de ne prendre que quelques termes de la suite $\{u_n\}$, précisément les termes d'indices $k_1, k_2, k_3, \cdots$ pour former une nouvelle suite $\{v_n\}$ soit :

$$v_1 = u_{k_1}, \quad v_1 = u_{k_1}, \quad \cdots \quad v_n = u_{k_n}.$$

Si on suppose que la suite $\{k_n\}$ est croissante est pour éviter les répétitions et s'assurer que les termes choisis conservent dans $\{v_n\}$ le même ordre qu'ils avaient dans $\{u_n\}$.

Par exemple, si $u_n = 1/n$, $v_n = 1/2n$ $(k_n = 2n)$, $v_n = 1/(n+1)^2$ $(k_n = (n+1)^2)$, $v_n = 1/2n+1$ $(k_n = 2n+1)$ et $v_n = 1/2^n$ $(k_n = 2^n)$ sont des suites extraites de u_n

Théorème 4.2.1. *Si $\{u_n\}$ a pour limite l, alors chaque suite extraite a même limite l.*

Démonstration. Soit $v_n = u_{k_n}$ une de ses sous suite. Puisque $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_\varepsilon$ $|u_n - l| < \varepsilon$. Comme $k_n \geq n$ alors Comme $k_n \geq N_\varepsilon$ dès que $n \geq N_\varepsilon$ donc $|v_n - l| = |u_{k_n} - l| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N_\varepsilon$, ce qui signifie que la suite v_n a pour limite l. ■

Remarque. Si on veut montrer qu'une suite donnée ne converge pas vers une limite l, on a vu qu'il etait indispensable de revenir à la définition, plus précisément à la negation (4.2) de celle-ci. Plus délicat est de montrer qu'une suite $\{u_n\}$ ne posséde aucune limite l, ce qui s'écrit

$$\forall l \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0 \ \text{ tel que } \ \forall n \geq N\ \exists n \geq N \ \text{ pour lequel } \ |u_n - l| \geq \varepsilon.$$

Mais heureusement, la vérification de la non existence d'aucune limite est rendue plus simple grâce à la proposition 4.1.1 (l'unicité de la limite) et le théorème 4.2.1.

Exemple. La suite $u_n = \sin(n\pi/2)$ ne posséde pas de limite. Si non, les deux suites extraites $u_{2n} = 0$ et $u_{4n+1} = 1$ pour tout n auront la même limite, ce qui n'est pas le cas.

4.3 Suites bornées

Définition.

i) Une suite $\{u_n\}$ est dite bornée supérieurement s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$

ii) Une suite $\{u_n\}$ est dite bornée inférieurement s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m.$$

iii) Une suite est dite bornée si elle bornée supérieurement et inférieurement

Théorème 4.3.1. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soient $\{u_n\}$ une suite convergente et l sa limite. Pour $\varepsilon = 1$ dans (1), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - l| \leq 1$ d'où $|u_n| \leq 1 + |l|$, et donc

$$|u_n| \leq M = \max(|u_1|, |u_2|, \cdots, |u_{N-1}|, 1 + |l|),$$

c'est-à-dire que la suite est bornée. ■

Remarque. La récirpoque est évidemment fausse car la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée mais diverge.

Il est souvent important de savoir si une suite donnée a une limite. Le théorème suivant fournit un critère très simple pour l'existence de la limite d'une suite.

Théorème 4.3.2. *Soit $\{u_n\}$ une suite croissante. Alors elle posséde une limite et on a*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n.$$

Démonstration. Soit $l = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$. Commençons par considérer le cas où l est un nombre fini. Par définition de la borne supérieure, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que $l-\varepsilon < u_N \leq l$. La suite étant croissante, on a évidemment

$$l - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq l < l + \varepsilon \quad \forall n \geq N,$$

ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.

Si par contre $l = +\infty$, la suite n'est pas bornée supérieurement, c'est-à-dire pour tout $M \in \mathbb{R}$ fixé, il existe N tel que $u_N > M$, et donc, en rappelant que la suite est croissante, on a $u_n \geq u_N > M, \quad \forall n \geq N$, ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$. ■

D'une manière tout à fait analogue, on démontre que si $\{u_n\}$ une suite décroissante, on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

Exemple. La progression géométrique $u_n = q^n$.

Considérons d'abord le cas $0 < q < 1$. Puisque $0 < q^{n+1} \leq q^n$ pour tout n, la suite q^n est décroissante et minorée donc convergente. Si $l = \lim\limits_{n\to\infty} q^n$, on a aussi $l = \lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1}$ d'où $l = lq$ ce qui nous donne $l = 0$ car $q \neq 1$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ si $0 < q < 1$ et la même conclusion vaut pour $-1 < q < 0$ étant donné que $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = 0$.

Si $q > 1$, dans ce cas la suite est croissante mais n'est pas majprée si non, en posant $q = 1 + \alpha$ on aurait

$$n\alpha < 1 + n\alpha \leq q^n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ce qui est impossible, donc $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$ si $q > 1$.

Si $q = 1$ il est évident que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$ car $q^n = 1$ pour tout n. Si $q = -1$, la suite q^n ne tend vers aucune limite, dans la mesure où elle prend alternativement les valeurs ± 1.

De même, si $q < -1$ les termes de la suite q^n seront alternativement positifs et negatifs, tandis que $|q|^n$ tendra vers $+\infty$, si bien que la limite de q^n n'existera pas. En résumé, on a

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad |q| < 1 \\ 1 \quad \text{si} \quad q = 1 \\ +\infty \quad \text{si} \quad q > 1 \\ \nexists \quad \text{si} \quad q \leq -1. \end{cases} \tag{4.3}$$

Exemple. La série géométrique. Soit $q \in \mathbb{R}$ et soit

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdot q^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison q. En rappelant que

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$$

et $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ si $-1 < q < 1$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$

La limite des sommes S_n est aussi désignée par la notation plus suggestive

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{si} \quad -1 < q < 1.$$

4.4 Critère de convergence de Cauchy

Si l'on veut montrer qu'une suite $\{u_n\}$ est convergente, ce qu'il faut (sauf dans le cas des suites monotones, où la limite coïncide avec la borne supérieure ou inférieure) est, d'abord, se faire une idée sur la limite possible de la suite, puis utiliser la définition ou quelques théorèmes sur les limites pour démontrer que la limite de la suite $\{u_n\}$ est effectivement celle qu'on avait individualisée.

En d'autres termes, la définition de limite n'est utile, dans un certain sens, qu'a posteriori, si l'on sait déjà, ou du moins si l'on peut raisonnablement conjecturer, quelle est la limite de la suite .

Cependant, il est souvent utile de pouvoir démontrer qu'une certaine suite converge sans connaître dès le départ sa limite, qui reste d'ailleurs souvent inconnue, même lorsque sa convergence est établie. Cette exigence est satisfaite par le critère dit de Cauchy.

Définition 4.5. *On dit qu'une suite* $\{u_n\}$ *est dite de Cauchy si pour tout* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver un rang* $N = N(\varepsilon)$ *tel que pour tout* $n, m > N$ *on ait*

$$|u_n - u_m| \leq \varepsilon.$$

Si l'on compare cette définition avec celle de la limite d'une suite, on constate qu'elles ne diffèrent que par le fait que, dans la définition d'une suite de Cauchy, aucune mention n'est faite sur la limite possible de la suite, à la place de laquelle un deuxième terme u_m apparaît.

Théorème 4.5.1. (**critére de convergence de Cauchy**) *Une suite de nombres réels* $\{u_n\}$ *est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

On remarquera que dans la définition 4.5 les entiers n et m interviennent symétriquement, on pourrait alors supposer par exemple que $m > n$, donc $m = n+p$, pour un certain $p \in \mathbb{N}$. Une suite est alors de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \quad \text{tel que} \quad \forall n > N \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \text{on a} \quad |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon. \tag{4.4}$$

Cette dernière formulation est plus commode pour les séries.

4.6 Suites récurrentes

Résolution approchée des équations. Un grand nombre d'équations rencontrées en physique ne peuvent être résolues que de façon approchée. Un procédé commode consiste à introduire une suite récurrente

$$\begin{cases} x_n = \varphi(x_{n-1}) \\ x_0 \quad \text{donné} \end{cases}$$

qui converge vers la racine cherchée r.

On a sait que pour cela il est nécessaire que $|\varphi'(x)| \leq k < 1$, x_0 étant choisi (si possible proche de la racine r, préalablement encadrée) on calcule donc les termes successifs de la suite : $x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \cdots$, jusqu'à ce que la différence $|x_n - x_{n-1}|$ soit inférieure à la précision demandée.

On se propose ici de donner un aperçu des méthodes de résolution approchée s'appuyant sur cette notion fondamentale de suite récurrente.

1. Méthode d'itération.

Soit $f(x) = 0$ une équation admettant sur $[a, b]$ une seule racine r. Il est toujours possible de construire une suite récurrente convergente vers r. En effet, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont aussi celles de l'équation

$$x = x + \lambda f(x) \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Soit la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = x + \lambda f(x)$$

Comme $\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x)$, Il suffit de choisir le rnombre réel λ tel que

$$|\varphi'(x)| = |1 + \lambda f'(x)| \leq k < 1 \quad \text{pour tout} \quad x \in [a, b].$$

Dans ces conditions on sait que la suite récurrente

$$\begin{cases} x_n = \varphi(x_{n-1}) \\ x_0 \in [a, b] \end{cases}$$

converge vers la racine de l'équation $x = \varphi(x)$, c'est-à-dire $f(x) = 0$.
Dans la pratique on s'éfforce de choisir λ de sorte à se trouver dans le cas de l'itération en spirale (c'est-à-dire tel que $-1 < \varphi'(x) < 0$) qui donne à n'importe quel stade des calculs un encadrement de r. L'inégalité $|x_n - r| < k^{n-1}|x_0 - r|$ permet, si l'on connaît un majorant de $|x_0 - r|$, de déterminer le nombre de termes nécessaires pour obtenir la précision demandée.

Exemple. Soit l'équation $f(x) = x^3 - x + 1 = 0$. Elle admet d'après le théorème des valeurs intermediaires une racine $r \in]-2, -1[$

L'équation $f(x) = 0$ peut s'écrire :

$$x = \varphi(x) = x + \lambda(x^3 - x + 1) \quad \text{d'où} \quad \varphi'(x) = 1 + \lambda(3x^2 + 1).$$

Sachant que $r \in]-2, -1[$, il faut que $|\varphi'(x)| < 1$ pour $x \in [-2, -1]$. D'où $\lambda \in]-\frac{2}{11}, 0[$. En choisissant par exemple $\lambda = -\frac{1}{7}$ on vérifie que la condition de convergence est remplie. La suite

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} - \dfrac{1}{7}(x_{n-1}^3 - x_{n-1} + 1) \\ \\ x_0 = -1 \end{cases}$$

est alors convergente vers la racine cherchée. Des calculs effectués sur machine ont donné au bout de la quinzième itération $r = 1,32471$ à 10^{-5} près.

Méthode de Newton

Soit l'équation $f(x) = 0$ admettant sur $[a, b]$ la racine r. Le principe de la méthode de Newton est de remplacer, au voisinage de la recine r, l'arc de courbe d'extrémitées les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ par la tangente en un de ses points. L'équation de la tangente au point $M_1(x_0, f(x_0))$ s'écrit

$$y - f(x_0) = (x - x_0)f'(x_0).$$

Elle coupe l'axe des x au point d'abscisse x_1 donné par

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

En itérant le procédé, on obtient la suite récurrente

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad x_0 \in [a, b] \text{ donné.}$$

On démontre que si f' et f'' gardent un signe constant sur $[a, b]$ et, si de plus $f(x_0)$ et $f''(x_0)$ sont de même signe, la suite précédente est monotone et converge vers la racine de l'équation $f(x) = 0$.

Exemple. Soit l'équation $f(x) = x^3 - x + 1 = 0$. On vérifie qu'au voisinage de la racine les conditions précédentes sont remplies. La racine cherchée est donc la limite de la suite

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - x_{n-1} + 1}{3x^2 - n - 1 - 1}$$

soit encore

$$x_n = \frac{2x_{n-1}^3 - 1}{3x^2 - n - 1 - 1}$$

En choisissant comme précédemment $x_0 = -1$, cinq itérations suffisent pour obtenir $r = 1,32471$.

Méthode de Lagrange.

On remplace cette fois l'arc de courbe d'extrémitées les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ par la corde AB. L'équation de la corde s'écrit :

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Elle coupe laxe des x au point b'abscisse x_1 donné par

$$x_0 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a)$$

en itérant le procédé on obtient la suite récurrente

$$x_n = x_{n-1} - \frac{b - x_{n-1}}{f(b) - f(x_{n-1})} f(x_{n-1}), \quad x_0 = a$$

Exerices.

1. Vérifier que l'équation $x^2 = a$ ($a > 0$ peut s'écrire

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}).$$

En déduire que la suite récurrente

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}})$$

converge vers $\sqrt{a}$. Application : calculer $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près.

2. Vérifier de même que l'équation $x^2 = a$ ($a > 0$ peut s'écrire

$$x = \frac{2}{3}x + \frac{a}{3x^2}).$$

Calculer $\sqrt[3]{2}$ à 10^{-3} près.

4.7 Séries Numériques

Définition. Soit $\{u_n\}$ une suite de nombres réels. *On appelle série numérique de terme général u_n la suite dont les termes successifs sont*

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 \\ S_2 &= u_1 + u_2 \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &\cdots\cdots \\ S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Si la suite $\{S_n\}$ posséde une limte somme S, on dira que la série de terme général u_n est convergente et a pour somme S.

On écrit dans ce cas

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n\geq 1} u_n.$$

Par contre, si la suite $\{S_n\}$ tends vers $\pm\infty$ ou n'a pas de limite, on dira que la série de terme général u_n est *divergente*.

Exemple. soit $\{a_n\}$ une suite numérique. Alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{la suite} \quad \{a_n\} \quad \text{converge.}$$

Dans ce cas, si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - a. \tag{4.5}$$

En effet, puisque

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1},$$

donc la suite des sommes partielles $\{S_n\}$ converge si et seulemnt si la suite $\{a_n\}$ converge et dans ce cas $\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a_1 - a$.

Applications

1. la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Le terme général peut s'écrire

$$\frac{1}{n(n+1)} = a_n - a_{n+1}, \quad a_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Comme $a_1 = 1$ et que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

2. Soit la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

On a

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = a_n - a_{n+1}, \quad a_n = \ln n$$

et puisque $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ dans ce cas la série est divergente.

4.8 Série géométrique

On appelle série géométrique la série de terme général $u_n = q^n$ où q est un nombre réel (ou complexe) appelé raison de la série géométrique. Si $|q| \geq 1$ $\lim_{n\to\infty} q^n \neq 0$ (voir (4.3)), la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

est donc divergente. Puisque

$$S_n == 1 + +q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

et $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ car $|q| < 1$, on a $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$, la série est donc convergente.
En résumé, on retiendra que

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \text{est} \quad \begin{cases} \text{convergente si} \quad |q| < 1 \\ \text{divergente si} \quad |q| \geq 1. \end{cases}$$

De plus, on a

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad \text{pour tout} \quad -1 < q < 1.$$

Par exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}) = \frac{2}{3}.$$

4.9 Série de Riemann

On appelle série de Riemann la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, soit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

où α un nombre réel donné. Si $\alpha \leq 0$, le terme général u_n ne tends pas vers zéro, donc la série diverge. Supposons $\alpha > 0$ et formons la somme partielle :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}.$$

Plutôt que le calcul explicite de S_n très difficile, cherchons un encadrement de la suite S_n à l'aide d'une interprétation graphique du terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. Soit alors la fonction décroissante définie sur $]0,\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. On peut alors écrire le terme général u_n sous la forme

$$u_n = (n-(n-1))f(n)$$

qui peut être interprété comme l'air du rectangle de base l'intervalle $[n-1,n]$ et de hauteur $f(n)$. Si on représente graphiquement la fonction $f(x)$, on peut voir facilement que

$$\int_1^2 f(x)dx \leq u_1 \leq 1,$$
$$\int_k^{k+1} f(x)dx \leq u_k \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx, \quad k = 2,3,\cdots,n.$$

En faisant la somme sur $k = 1,3,\cdots,n$ de ces inégalités, on obtient l'encadrement suivant de S_n,

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n \leq 1 + \int_1^n f(x)dx. \tag{4.6}$$

Un calcul simple nous donne

$$\int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - 1) & \text{si} \quad \alpha \neq 1 \\ \log n \quad \text{si} \quad \alpha = 1, \end{cases}$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} +\infty \quad \text{si} \quad \alpha \leq 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} \quad \text{si} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

Donc, si $\alpha \leq 1$, de la première inegalité de (4.6), on déduit facilement que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, la série de Riemann est alors divergente. Si $\alpha > 1$, de la seconde inégalité de (4.6), il vient

$$S_n \leq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = 1 + \frac{1}{\alpha-1}, \quad \forall n \geq 1,$$

la suite $\{S_n\}$ est donc majorée. Comme elle est croissante car $S_n - S_{n-1} = \dfrac{1}{n^\alpha} > 0$, elle est donc convergente, c'est-à-dire que la série de Riemann est convergente.

En résumé, on retiendra que

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{est} \quad \begin{cases} \text{convergente si} \quad \alpha > 1 \\ \text{divergente si} \quad \alpha \leq 1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Si $\alpha > 1$, la série de Riemann est dans ce cas convergente. Sa somme dépendera naturellement de α, on la note $S(\alpha)$. On a alors l'encadrement suivant

$$\forall \alpha > 1, \quad \frac{1}{\alpha - 1} \leq S(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \quad S(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

qui découle de l'encadrement (4.6) en faisant tendre n vers l'infini.

Théorème 4.9.1. *Soit $a \geq 0$ donné et soit $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction définie décroissante tendant vers zéro lorsque $x \to \infty$. On considére la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

De la même maniére que la série de Riemann, on peut montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \textit{et l'intégrale} \quad \int_a^{\infty} f(x)dx$$

sont de même nature.

4.10 Propriétés des séries convergentes

4.10.1 Sommation par tranches

Nous avons introduit la notion de série convergente pour généraliser la notion de somme finie. Si $a_0, a_1, \cdots, a_n$ sont des nombres réels (ou complexes), si $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_{p-1} < n_p = n$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_i &= \underbrace{a_0 + a_1 + \cdots a_{n_1 - 1}} + \underbrace{a_{n_1} + \cdots a_{n_2 - 1}} + \cdots + \underbrace{a_{n_{p-1}} + \cdots + a_{n_p}} \\
&= \sum_{i=0}^{n_1 - 1} a_i \quad + \quad \sum_{i=n_1}^{n_2 - 1} a_i \quad + \cdots + \quad \sum_{i=n_{p-1}}^{n_p} a_i.
\end{aligned}$$

Nous allons voir que les séries numériques *convergentes* jouissent d'une propriété analogue. soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente de somme S et $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une bijection stictement croissante telle que $\sigma(0) = 0$ (par exemples $\sigma(n) = 2n$, $\sigma(n) = n^2$). Posons

$$v_0 = \sum_{i=0}^{\sigma(0)} u_i, \qquad v_n = \sum_{i=\sigma(n-1)+1}^{\sigma(n)} u_i \quad \text{pour} \quad n \geq 1$$

Si S_n et s_n sont les sommes partielles des séries des termes généraux u_n et v_n, on a

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} \Big[\sum_{i=\sigma(k-1)+1}^{\sigma(k)} u_i \Big] = \sum_{k=0}^{\sigma(n)} u_i = S_{\sigma(n)}.$$

Par récurrence, on constate que $\sigma(n) \geq n$ pour tout n, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(n) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{\sigma(n)} = S$, ce qui signifie que la série de terme général v_n converge et a pour somme S. On dit que l'on obtient la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ en sommant par tranches la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$. Il faut prendre garde à l'ordre des termes. Dans une sommation par tranches, l'ordre des termes n'est pas modifié.

Remarque. *la suppression d'un nombre fini de termes ne modifie pas la nature (convergence ou divergence) d'une série.*

En effet, soit un entier $m \geq 1$ et considérons les deux séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=m}^{\infty} u_n.$$

Notons S_n et s_n les sommes partielles de la première et la seconde série. Si $n \geq m$, on a

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{m-1} + u_m + \cdots u_n = \sum_{n=1}^{m-1} u_n + \sum_{n=m}^{n} u_n$$

c'est-à-dire $S_n = S_{m-1} + s_n$ ce qui montre que les suites $\{S_n\}$ et $\{s_n\}$ sont de même nature, et donc leurs séries respectives aussi. Cependant, dans le cas d'une convergence, si

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{et} \quad s = \sum_{n=m}^{\infty} u_n$$

alors $S = S_{m-1} + s$. Comme on le constate, la suppression d'un nombre fini de termes d'une série convergente ne modifie pas sa nature, mais modifie sa somme.

Exemple. Considérons la série de terme général $u_n = 1/n(n+1)$. On déjà vu que sa somme $S = 1$ et de la même manière on peut également voir que la somme s de la série obtenue en retranchant les cinq premiers termes $u_1, u_2, \cdots, u_5$ est égale $1/6$.

Nous dirons que la nature d'une série est une propriété asymptotique pour traduire que la suppression d'un nombre fini de termes ne modifie pas sa nature.

4.11 Condition nécessaire de convergence

Soit une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ et soit S_n la suite de ses sommes partielles. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} u_k,$$

d'où $S_n - S_{n-1} = u_n$. Si la série est convergente, la suite S_n posséde une limte S, et donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0.$$

Donc, si une série est convergente son terme général u_n tends vers zéro. Notons que la réciproque est fausse, c'est-à-dire, une série dont le terme général tends vers zéro peut diverger. Par exemple on a vu que la série de terme général $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ est divergente.

Remarque 4.11.1. *En pratique la condition nécessaire de convergence est souvent utilisée sous la forme*

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} u_n \;\; \textit{est divergente.}$$

Exercice. vérifier la convergence des séries suivantes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\log(1+\frac{1}{n}).$$

4.12 Critère de Cauchy pour les séries

Pour qu'une suite soit convergente il faut et il suffit (voir Définition 4.5 et Théorème 4.5.1) qu'elle soit de Cauchy. Dans le cas où la suite en question est définie par la suite $\{S_n\}$ des sommes partielles d'une série de terme général donné u_n, en vertu du thèorème 4.5.1 découle le

Théorème 4.12.1. *Une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente si et seulement si,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \;\; \forall m > n \geq N \;\; \textit{on a} \;\; |S_m - S_n| = |\sum_{k=n+1}^{m} u_k| \leq \varepsilon. \tag{4.8}$$

En particulier, on peut prendre $m = n + 1$ dans (4.8), de sorte que, si une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que $|u_{n+1}| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. On retrouve ainsi la condition nécessaire de la convergence d'une série.

Exemple. La série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est divergente. En effet, montrons qu'elle ne vérifie pas le critéere de Cauchy, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout N, on puisse trouver $m > n \geq N$ vérifiant

$$|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k}| \geq \varepsilon.$$

Prenons $m = 2N$ et $n = N$, alors

$$|\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k}| = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots \frac{1}{2N} \geq \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \cdots \frac{1}{2N} = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Comme première application du critère de Cauchy pour les série, nous démontrerons le critère de convergence d'Abel sous la forme

Théorème 4.12.2. (**critére de convergence d'Abel**) *La série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \varepsilon_n \tag{4.9}$$

converge pourvu que :

i) il existe $A > 0$ tel que pour tout $m > n$ la somme $|\sum_{k=n}^{m} v_k| \leq A$

ii) la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}| \tag{4.10}$$

converge, et

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \tag{4.11}$$

Démonstration. En posant

$$V_{n,m} = v_n + v_{n+1} + \cdots + v_m \quad m \geq n,$$

on a

$$v_k = V_{n,k+1} - V_{n,k} \quad \forall k = n+1, n+2, \cdots, m-1.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_n v_n + \varepsilon_{n+1} v_{n+1} + \varepsilon_{n+2} v_{n+2} + \cdots + \varepsilon_m v_m \\
= \; &\varepsilon_n V_{n,n} + \varepsilon_{n+1}(V_{n,n+1} - V_{n,n}) + \varepsilon_{n+2}(V_{n,n+2} - V_{n,n+1}) + \cdots + \varepsilon_m (V_{n,m} - V_{n,m-1})
\end{aligned}$$

et, en regroupant les termes $V_{n,k}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_n V_{n,n} + \varepsilon_{n+1}(V_{n,n+1} - V_{n,n}) + \varepsilon_{n+2}(V_{n,n+2} - V_{n,n+1}) + \cdots + \varepsilon_m (V_{n,m} - V_{n,m-1}) \\
= \; &V_{n,n+1}(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2}) + V_{n,n+2}(\varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{n+3}) + \cdots + V_{n,m-1}(\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) + \varepsilon_m V_{n,m};
\end{aligned}$$

c'est la *transformation d'Abel*. Il s'ensuit que

$$\sum_{k=n}^{m} \varepsilon_k v_k = \sum_{k=n+1}^{m-1} V_{n,k}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) + \varepsilon_m V_{n,m}$$

D'après la première hypothèse de l'énoncé, on a

$$|V_{n,m}| \leq A \quad \text{quel que soient} \;\; n, m$$

donc, pour tout $m > n$

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} \varepsilon_k v_k\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{m-1} |V_{n,k}||\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}| + |\varepsilon_m||V_{n,m}| \leq A\Big(\sum_{k=n+1}^{m-1} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}| + |\varepsilon_m|\Big). \tag{4.12}$$

Puisque la série (4.10) est convergente, elle vérifie le critère de Cauchy ; donc

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists N_1 \quad \text{tel que} \;\; \forall m > n > N_1 \;\; \text{on a} \;\; \sum_{k=n+1} m|\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}| \leq \frac{\varepsilon}{2A} \tag{4.13}$$

et, puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists N_2 \quad \text{tel que} \;\; \forall m > N_2 \;\; \text{on a} \;\; \varepsilon_m| \leq \frac{\varepsilon}{2A}. \tag{4.14}$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$, compte tenu (4.12)-(4.13), pour tout $mm > n > N$, on a

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} \varepsilon_k v_k\Big| \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire que la série (1) vérifie le critère de Cauchy donc elle converge. ∎

Cas particulier. Si les ε_n sont des nombres positifs, décroissants et tendant vers zéro, la série (2) converge. en effet $|\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}| = \varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}$ et grâce à (4.5), on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}| = \varepsilon_1.$$

Si l'on prend $v_n = (-1)^{n+1}$, la première condition est satisfaite avec $A = 1$ ainsi les séries du type

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\varepsilon_n$$

avec $\{\varepsilon_n\}$ une suite de nombres positifs décroissante et tendant vers zéro sont convergentes.

Application aux séries trigonométriques. Prenons

$$v_n = e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx), \quad x \text{ réel donné.}$$

Nous aurons

$$\begin{aligned} v_n + v_{n+1} + \cdots v_m = e^{inx} + e^{i(n+1)x} + \cdots + e^{imx} &= e^{inx}(1 + e^{inx} + \cdots + e^{i(m-1)x} \\ &= e^{inx}\frac{1 - e^{i(m-n+1)x}}{1 - e^{ix}} \end{aligned}$$

donc

$$|v_n + v_{n+1} + \cdots + v_m| \leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|} = \frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

La première condition aux v_n est réalisée

4.13 Opérations sur les séries

Soient deux séries de terme général u_n et v_n convergentes. Leur somme est la série de terme général $u_n + v_n$, c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$$

Le produit d'une série de terme général u_n par un nombre λ est une série de terme général λu_n, c'est -à-dire

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n.$$

4.14 Séries à termes positifs

les séries considérées au cours de ce paragraphe sont à termes u_n réels positifs (ou positifs partir d'un certain rang). Si $u_n < 0$, on considére la série de terme $v_n = -u_n$. Soit alors une série de terme $u_n \geq 0$. Notons que la suite des sommes partielles

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

est une suite croissante car $S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$, donc convergente si elle est majorée. Il en résulte

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ est convergente} \Leftrightarrow \quad S_n = \sum_{n=k}^{n} u_k \text{ est majorée.}$$

Cette condition nécessaire est suffisante nous permet de comparer deux séries à termes positifs. En effet, on a le théorème suivant.

Théorème 1. (**de comparaison**) *soient deux séries de termes réels positifs vérifiant :*

$$0 \leq u_n \leq v_n \quad \forall n \geq 1.$$

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *converge, alors la série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge et*

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *diverge alors la série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *diverge et ici*

$$\forall\ N \geq 1 \qquad 0 \leq \sum_{n=1}^{N} u_n \leq \sum_{n=1}^{N} v_n.$$

Démonstration. Montrons la permière implication. Soient

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad S'_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$$

les suites croissantes des sommes partielles. Puisque $u_n \leq v_n$, on a $S_n \leq S'_n$. Si la série de terme général v_n est convergente, la suite S'_n de ses sommes partielle converge vers une limite finie S'. D'où $S_n \leq S'_n \leq S'$ donc la suite S_n est majorée. Etant croissante, elle est donc convergente. Ce qui signifie que la série de terme général u_n est convergente.

Quant à la second implication, si la série de terme général u_n est divergente, on a alors $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ et puisque $S'_n \geq S_n$ donc $\lim_{n\to\infty} S'_n = +\infty$. La série de treme général v_n est alors divergente. ■

Remarque. *La nature d'une série étant propriété asymptotique, pour applique le théorème 5.3.1, au lieu de supposer que :* $\forall n \geq 1\ u_n \leq v_n$, *on peut se contenter de la condition moins forte*

$$\exists N \in \ \mathbb{N} \quad \text{tel que} \ \ \forall n \geq N \ \ u_n \leq v_n.$$

Eexemples.

1. On considére la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$. Puisque $\frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$ et la série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $(\alpha = 1)$ est divergente, la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ est alors divergente grâce au théorème de comparaison.

2. Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ où $x > 0$. Puisque $\frac{x^n}{n} \leq x^n$ et la série géométrique $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ est convergente si $|x| < 1$, la série en question est donc convergente grâce au théorème de comparaison.

Corollaire 4.14.1. *Soient deux séries à termes positifs u_n et v_n. Supposons qu'il existe un rang N tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad \forall n \geq N.$$

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge

2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ diverge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ diverge.

Démonstration. Posons $u_N/v_N = k$; pour $n \geq N$ on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad \text{donc} \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$$

d'où :

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \leq \cdots \leq \frac{u_N}{v_N} = k$$
$$u_n \leq kv_n \quad \forall\ n \geq N.$$

En vertu du théorème de comparaison, si la série de terme général v_n converge, il en est de même de la série de terme général u_n, et si cette dernière diverge la série de terme général u_n aussi.

Remarque. En pratique, si l'on veut appliquer le lemme ci-dessus pour étudier la nature d'une série de terme général positif u_n, on chosit, parmi les séries dont on connaît la nature une série de terme général v_n telle que l'expression

$$d_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

soit facile à exprimer et l'on étudie son signe.

Exemple. Soit la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}.$$

On applique le corollaire en prenant $v_n = 1/n$, on a alors

$$d_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n+1}{2n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} > 0$$

Puisque la série la série de Riemann de terme v_n diverge et que $d_n > 0$, la série de terme général u_n diverge.

En utilisant la série géométrique comme série de comparaison , on obtient les deux critères sur la nature d'une série à termes positifs. En effet, soit une serie de terme général $u_n > 0$ au moins à partir d'un certain rang. On a

Critère de Cauchy. *Soit N un entier assez grand. Si pour tout $n \geq N$*

$$\sqrt[n]{u_n} \leq a < 1, \quad \text{la série} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{est convergente}$$

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1, \quad \text{la série} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{est divergente}$$

Démonstration. En effet, Si $\sqrt[n]{u_n} \leq a$, alors $u_n \leq a^n$ avec $a < 1$ donc la série de terme général u_n est convergente d'après le théorème de comparaison 5.3.1. Par contre, si $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ on a $u_n \geq 1$ donc $u_n \nrightarrow 0$ et la série est divergente. ■

Si $\sqrt[n]{u_n} < 1$ à partir d'un certain rang N, on ne peut pas affirmer que la série de terme u_n converge. Par exemple la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge alors que $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1$ pour tout $n \geq 2$.

Critère de d'Alembert. *Soit N un entier assez grand. Si pour tout $n \geq N$*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq a < 1, \quad \text{la série} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{est convergente}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \quad \text{la série} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{est divergente}$$

Démonstration. En effet, Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq a$, donc $u_{n+1} \leq a u_n$ et par suite $u_n \leq u_1 a^{n-1}$ avec $a < 1$ donc la série de terme général u_n est convergente. Par contre, si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ on a $u_{n+1} \geq u_n$ donc $u_n \nrightarrow 0$ et la série est divergente. ■

Ici aussi, si $u_{n+1}/u_n < 1$ à partir d'un certain rang, il n'est pas dit que la série de terme u_n converge. Un contrexemple est foruni par la série de Riemann de terme $u_n = 1/n$.

En pratique ces deux critères sont utilisés dans les formes équivalentes dites régles de Cauchy et de d'Alembert.

Régle de Cauchy et de d'Alembert. *Supposons que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \quad ou \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

alors si

$$l < 1, \quad \text{la série } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ converge}$$

$$l > 1, \quad \text{la série } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ diverge.}$$

Si $l = 1$ on ne peut pas conclure sauf si la limite $l = 1$ est atteinte par valeurs supérieure auquel cas la série est divergente. On dit que le cas $l = 1$ est un cas douteux.

Démonstration. En effet, si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l < 1$, par définition de la limite, pour tout $\varepsilon \in]0, 1-l[$, il existe un ragn N (dépendant de ε) tel que $\sqrt[n]{u_n} \leq l + \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. D'où $\sqrt[n]{u_n} \leq a$ pour tout $n \geq N$ avec $a = l + \varepsilon < 1$, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est, d'après le critère de Cauchy, convergente. Si la limite $l > 1$, pour tout $\varepsilon \in]0, l-1[$, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, $\sqrt[n]{u_n} \geq l - \varepsilon > 1$. D'où $u_n > 1$ pour tout $n \geq N$, donc $u_n \nrightarrow 0$, la série est divergente. La même démonstration s'applique pour l'autre cas. ■

Remarque. Etant donnée une série à termes réels positifs u_n, si u_n comporte des factorielles, on applique de préférence la régle de d'Alembert ; si u_n comporte des puissance $n-$ ièmes, on applique plutôt celle de Cauchy.

Exemples.

1. Soit la série de terme général $u_n = \left(\frac{n}{1+2n}\right)^n$. On a

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{1+2n} \to \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

la série est donc convergente.

2. Soit la série de terme $u_n = \frac{n^n}{n!}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \to \quad e \quad \text{si} \quad n \to \infty,$$

la série est alors divergente.

3. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad u_n = \left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^{2n}$. On a

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^2 \to 1$$

Nous somme en présence d'un cas douteux, on ne peut pas donc conclure. Il faut faire une étude directe, commençons d'abord par examiner le comportement du terme général u_n lorsque n devient infini. En effet, on a

$$\ln u_n = 2n \ln \frac{2n-1}{2n+2} = 2n \ln \big(1 - \frac{3}{2n+2}\big) \sim 2n \frac{-3}{2n+2} \sim -3$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} = e^{-3}$, la série considérée diverge d'après la remarque 4.11.1.

Comparaison entre les régles de Cauchy et de d'Alembert.

Le résultat suivant que l'on admettra montre que la régle de d'Alembert, bien qu'elle soit d'une certaine importance dans les applications, elle est moins général que celle de Cauchy. En effet, on le

Lemme 4.14.1. *Soit u_n une suite de termes réels positifs. Alors si*

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$$

et les limites sont égales.

Comme pour la régle de Cauchy, la régle de d'Alembert ne permet pas de conclure si $l = 1$; on dit qu'il y a cas douteux. Si la régle de d'Alembert donne un cas douteux, d'après le lemme 4.14.1 la régle de Cauchy donnera le même cas douteux. Inversement, ou bien le rapport u_{n+1}/u_n n'admet pas de limite lorsque n tends vers l'infini, ou bien cette limite vaut un. Par conséquent, si l'une des deux régles de Cauchy ou de d'Alembert donne un cas douteux, il est pratiquement inutile d'appliquer l'autre régle. Toutefois, si u_{n+1}/u_n ne posséde pas de limite à l'infini, il est possible que la régle de Cauchy permette de conclure.

Exemple. Soient a et b deux réels strictement positifs. On considère

$$u_n = \begin{cases} a^k b^k & \text{si} \quad n = 2k \\ a^{k+1} b^k & \text{si} \quad n = 2k+1. \end{cases}$$

Comme on peut facilement le voir

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a \quad \text{si} \quad = 2k, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = b \quad \text{si} \quad n = 2k+1.$$

Donc u_{n+1}/u_n n'admet de limite lorsque n devient infini ; par contre

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt{ab} \quad \text{si} \quad = 2k, \quad \sqrt[n]{u_n} = \sqrt{ab} \quad \text{si} \quad n = 2k+1,$$

par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \sqrt{ab}$$

et si $0 < ab < 1$ la série est convergente d'après la régle de Cauchy.

Remarque. Le lemme 4.14.1 peut permettre d'étudier certaines suites. C'est ainsi qu'ayant à étudier la suite réelle de terme générale

$$v_u = \left(\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^{\frac{1}{n}},$$

nous écrirons $v_n =^n\sqrt{u_n}$; nous constatons $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n = 1/4$ et nous déduirons que la suite donnée v_n admet $1/4$ pour limite.

On donne encore un critère de convergence utile dû à Cauchy .

Théorème 4.14.2. (**de Cauchy**) *Si la suite $\{u_n\}$ est décroissante et positive alors les séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \textit{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n} \quad \textit{sont de même nature.}$$

Démonstration. En effet, considérons la suite $\{S_m\}$ des sommes partielles de la série de termes général u_n, à savoir

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_+u_2, \quad S_m = \sum_{n=1}^{m} u_n = u_1 + u_2 + \cdots u_m,$$

et soit un entier n tel que $2^n > m$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m} u_n = u_1 + u_2 + \cdots u_m \leq u_1 + u_2 + \cdots u_{2^n} \\ = \ u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + u_5 + u_6 + u_7) + \cdots + (u_{2^{n-1}} + \cdots u_{2^n-1}) \\ \leq \ u_1 + 2u_2 + 2^2 u_{2^2} + \cdots + 2^{n-1} u_{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Si la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$ converge la suite $\{S_m\}$ est donc majorée car $S_m \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$. Puisque elle est croissante elle converge et donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ aussi. D'autre part si m est tel que

$2^n < m$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m} u_n = u_1 + u_2 + \cdots u_m &\geq u_1 + u_2 + \cdots u_{2^n} \\ = \ u_1 + u_2 + (u_3 + u_4) + (u_5 + u_6 + u_7 + u_8) &+ \cdots + (u_{2^{n-1}+1} + \cdots u_{2^n}) \\ &\geq \ \frac{1}{2}u_1 + u_2 + 2u_4 + 4u_8 + \cdots + 2^{n-1}u_{2^{n-1}} \\ &= \ \frac{1}{2}(u_1 + 2u_2 + 2^2u_{2^2} + \cdots + 2^n u_{2^n}) \end{aligned}$$

et la divergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$ implique celle de la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. ■

Exemple. La série de Bertrand

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_n, \quad u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \tag{4.15}$$

est convergente si $(\alpha, \beta) \in]1, +\infty[\times\mathbb{R}$, divergente si $(\alpha, \beta) \in]-\infty, 1[\times\mathbb{R}$ et si $\alpha = 1$, elle converge pour $\beta > 1$ et diverge pour $\beta \leq 1$. En effet, puisque la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$$

est positive et décroissante sur $]x_0, +\infty[$ où $x_0 = \max(2, e^{-\frac{\beta}{\alpha}})$, alors la suite $f(n) = u_n$ et positive décroissante à partir d'un rang n_0. Donc d'après le théorème 4.14.2 la série (4.15) et la série

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^n u_{2^n} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n\alpha}\ln^\beta(2^n)} = \frac{1}{\ln^\beta 2}\sum_{n=n_0}^{\infty} v_n, \quad v_n = \frac{1}{2^{(\alpha-1)n}n^\beta}$$

sont de même nature. En appliquant la régle de d'Alembert à la série ci-dessus, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$$

ainsi la série de Bertrand (4.15) converge pour tout $(\alpha, \beta) \in]1, +\infty[\times\mathbb{R}$ et diverge pour tout $(\alpha, \beta) \in]-\infty, 1[\times\mathbb{R}$. Si $\alpha = 1$, $v_n = 1/n^\beta$ série de Riemann qui converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta \leq 1$. ■

Remarque *En applicant le théorème 4.9.1 à la fonction $f(x) = 1/x^\alpha \ln^\beta x$ on retrouve le résultat (4.7).*

Soit maintenant deux séries de termes positifs u_n et v_n. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0,$$

on dira que u_n et équivalent à v_n et on écrit $u_n \sim kv_n$.

Théorème 2. (d'équivalence) *Si*

$$u_n \sim v_n \quad \textit{alors} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \;\; \text{et} \;\; \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

sont de même nature.

Démonstration. Par définition de la limite

$$\forall \varepsilon \in \,]0, k[\;\; \exists N = N(\varepsilon) \;\; \text{tel que} \;\; \forall \, n \geq N \;\; k - \varepsilon \leq \frac{u_n}{v_n} \leq k + \varepsilon$$

en particulier pour $\varepsilon = k/2$, on peut trouver un entier N_0 tel que

$$\frac{k}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3k}{2} v_n \quad \text{pour tout} \;\; n \geq N_0$$

de sorte que le théorème découle du théorème de comparaison 5.3.1. ■

Exemples.

1. Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, avec $u_n = \dfrac{n^2}{1 + n^2 + n^4}$. On a $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ terme géneral d'une série de Riemann convergente ($\alpha = 2$). La série est donc converge.

2. Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ avec $u_n = \dfrac{3^n}{n + 2^n}$. On a $u_n \sim (\dfrac{3}{2})^n$ terme géneral d'une série géométrique de raison $\dfrac{3}{2}$ donc divergente. Par conséquent la série est divergente.

En utilisant comme série équivalente celle de Riemann, on obtient le

Corollaire 4.14.3. *Soit une série de terme général positif u_n tel que*

$$\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha} u_n = L \in \,]0, +\infty[.$$

Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergent si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$. Si $L = 0$ et $\alpha > 1$, la série de terme général u_n est convergente, et si $L = +\infty$ et $\alpha \leq 1$ la série diverge.

la convergence ou la divergence de plusieurs types de séries pour lesquelles le critère de D'Alembert ou le critère de Cauchy sont inefficaces peut être établie en comparant une telle série avec la série de Riemann ou celle de Bertrand (4.15).

Théorème 3. (**critère de Raabe**) *Soit une série de terme général u_n positif tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \lambda \frac{\varepsilon_n}{n} \quad \text{avec} \quad \lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 1$$

alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente pour $\lambda > 1$ et divergente pour $\lambda < 1$.

démonstration. Posons $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, alors

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^\alpha = 1 - \frac{\alpha}{n}\varepsilon_n, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 1$$

Si $\lambda > 1$, considérons $\alpha \in]1, \lambda[$; alors, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \lambda\frac{\varepsilon_n}{n} < 1 - \alpha\frac{\varepsilon_n}{n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Puisque la

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

est convergente car $\alpha > 1$, on conclut par le corollaire 4.14.1. ■

4.15 Séries à termes de signe quelconque

Soit une série de terme général u_n non nécessairement de signe constant. On lui associe la série de terme positif $v_n = |u_n|$ à laquelle s'applique les critères du paragraphe précédent. Si la série des valeurs absolues

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

converge, on dira que la série converge absolument.

Théorème 4. *Toute série absolument convergente est convergente et on a*

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} u_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

Démonstration. En effet, soit une série de terme général u_n. On pose

$$u_n^+ = \sup(u_n, 0), \quad u_n^- = \sup(-u_n, 0).$$

On peut vérifier facilement que, pour tout n

$$u_n^+ \geq 0, \quad u_n^- \geq 0, \quad u_n = u_n^+ - u_n^-, \quad |u_n| = |u_n^+| + |u_n^-|.$$

D'où $u_n^+ \leq |u_n|$ et $u_n^- \leq |u_n|$. D'après le th'eorème de comparaison, si la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ converge, les séries de termes généraux positifs u_n^+ et u_n^- convergent, donc leur différence $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ aussi. Quant à l'inégalité entre les sommes, elle résulte de l'inégalité triangulaire

$$|u_1 + u_2 + \cdots + u_n| \leq |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|,$$

en faisant $n \to \infty$. ∎

Ce résultat nous montre l'intérêt des séries à termes positifs dans l'étude des séries à termes de signe quelconque. Toutefois, l'étude de la série $\sum |u_n|$ ne permet toujours de connaître la nature de la série $\sum u_n$ car il existe des séries convergente qui ne sont pas absolument

Exemple.

1. La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

est, comme on le verra, convergente mais la série des valeurs absolues

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

est une série de Riemann divergente.

Régles de convergence absolue de Cauchy et de d'Alembert.

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ une série à termes de signe quelconque. Supposons que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l \quad ou \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l.$$

alors si

$$l < 1, \quad \text{la série} \quad \sum u_n \quad \text{est absolument convergente}$$

$$l > 1, \quad \text{la série} \quad \sum u_n \quad \text{est divergente.}$$

Démonstration. Elle est identique à celle qui a été faite dans le cas des séries à termes positifs. ∎

Exemple. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument. En effet, on applique la régle de convergence absolue de d'Alembert

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

la série est donc absolument onvergente. Nous verrons par la suite que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

Proposition 4.15.1. *Supposons qu'il existe un rang N tel que*

$$0 \leq |u_n| \leq v_n \quad \forall\, n \geq N.$$

Alors si la série $\sum v_n$ converge la série $\sum u_n$ est absolument convergente

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème de comparaison 5.3.1. ■

Exemples. Les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\alpha}}{n^2} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

sont absolument convergentes. Par exemple, puisque

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2},$$

et la série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ est absolument convergente grâce au théorème de comparaison.

4.16 Séries alternées

Une série numérique est alternée si son terme général est de la forme

$$u_n = (-1)^n a_n \ \text{ avec } \ a_n > 0.$$

Théorème 5. *Soit*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

une série alternée. Si

$$a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \geq 1 \ \text{ et } \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

alors la série alternée est convergente. En posant

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k, \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

on a, pour tout n

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}, \quad \text{et} \quad |S - S_n| \leq a_{n+1}. \tag{4.16}$$

Démonstration. Soit les sommes partielles

$$S_n = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n.$$

On considére les deux sous suites $\{S_{2n}\}$ et $\{S_{2n+1}\}$ $(n \geq 0)$. En rappelant que la suite $\{a_n\}$ est décroissante, on a

$$S_{2n} - S_{2(n-1)} = S_{2n} - S_{2n-2} = -a_{2n-1} + a_{2n} < 0,$$

donc la suite d'indices pairs $\{S_{2n}\}$ est décroissante. Quant à la suite d'indices impairs $\{S_{2n+1}\}$ elle est croissante car

$$S_{2n+1} - S_{2(n-1)+1} = S_{2n+1} - S_{2n-1} = -a_{2n} - a_{2n+1} > 0.$$

Puisque

$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty,$$

les deux suites $\{S_{2n}\}$ et $\{S_{2n+1}\}$ sont adjacentes, elles admettent donc une limite commune S, somme de la série alternée. La première inégalité dans (4.16) s'obtient facilement. Quant à la seconde, en utilisant l'inégalité

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n},$$

pour tout $n \geq 0$, on a

$$|S - S_{2n}| \leq S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1} \quad \text{et} \quad |S - S_{2n+1}| \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2}.$$

Donc, pour tout ≥ 0, on a $|S - S_n| \leq a_{n+1}$. ∎

Exemple fondamental. C'est la série alternée

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Elle est dite série harmonique alternée et elle constitue l'exemple type d'une série convergente dont la série des valeurs absolues $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est la série de Riemann divergente $(\alpha = 1)$.

Exercices.

1. Etudier la nature des séries numériques de terme général

$$u_n = \frac{n}{1 + n^2 + n^3}, \quad u_n = ne^{-n}, \quad u_n = e^{-\sqrt{n}}, \quad u_n = a^n \log n, \ |a| < 1$$
$$u_n = \sin \frac{1}{n^2}, \quad u_n = \cos \frac{1}{2^n} - 1, \quad u_n = \frac{n!}{n^\alpha}, \quad u_n = \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right), \ \alpha \in \mathbb{R},$$
$$u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \quad u_n = \left(l + \frac{1}{n}\right)^n, \ l \in \mathbb{R}, \quad u_n = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n}}.$$

2. Soit les séries de terme général

$$u_n = (1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} - 1, \quad u_n = \log\left(1-\cos\frac{1}{n}\right), \quad u_n = 1 - e^{\frac{1}{n^\alpha}}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Etudier à l'aide d'un développement limité du terme général u_n la nature de ces séries.

3. Soient α et β des nombres réels. On considére la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n} + \alpha\sqrt{n+1} + \beta\sqrt{n+2}.$$

Déterminer α et β pour que la série converge. Calculer alors sa somme.

4. Soient α, β et γ des nombres réels non nuls. Trouver une relation entre α, β et γ pour que la série

$$\sum_{n=2} \left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{\beta}{2n-1} + \frac{\gamma}{2n-2}\right)$$

converge.

5. Démontrer le théorème 4.9.1. Comme application, étudier les séries de terme général

$$u_n = \frac{\log n}{n}, \quad u_n = \frac{\log n}{n^2}, \quad u_n = \frac{1}{n^2\log n}, \quad u_n = \frac{1}{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

6. Etudier les séries de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad u_n = (-1)^n\frac{6n^2-9n+4}{n^3}, \quad u_n = (-1)^n\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$$

$$u_n = (-1)^n\frac{1}{(n+1)\log^2(n+1)}.$$

Dire s'il y a convergence ou divergence absolue de ces séries.

7. On pose

$$u_0 = \int_0^\pi e^{-x}\sin x dx.$$

A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que $u_0 = \frac{1}{2}(1+e^{-\pi})$. Soit la suite numerique

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x dx.$$

A l'aide d'un changement de variables, montrer que u_n est le terme général d'une série alternée. Vérifier que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

8. Pour quelles valeurs de $x \in R$ sont-elles absolument convergentes les séries de termes

$$u_n = \frac{x^n}{\sqrt{n}}, \quad u_n = \frac{1}{n+1}\frac{x^n}{(1+x)^n}, \quad u_n = \frac{nx^n}{1+e^n}, \quad u_n = \frac{x^{2n}}{n^2+x^{2n}},$$

$$u_n = (n^2+2)\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n, u_n = \frac{(x+1)^n}{n^2n^n}, \quad u_n = n^2 2^{-n}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$$

4.17 Calcul approché de la somme d'une série

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ une série convergente et soit S sa somme. En dehors d'un certain nombre de cas particuliers, le calcul exact de la somme S est très difficile, voir impossible . On se contentera alors d'une valeur approchée de S. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad S - S_n = R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots .$$

Le terme R_n est appelé reste de la série au rang n, il tends évidemment vers zéro car la série est convergente. Il représente l'erreur commise en remplaçant la somme S par la somme partielle S_n. Dans la pratique on cherche une majoration du reste R_n.

Exemples

1. Série absolument convergente à l'aide du critère de d'Alembert. Supposons connu $a < 1$ tel que

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq a < 1.$$

On a alors

$$|u_{n+1}| \leq a|u_n-, \quad |u_{n+2}| \leq a|u_{n+1}| \leq a^2|u_n|, \cdots, |u_k| \leq a^k|u_n| \quad \forall k \geq n+1,$$

donc

$$|R_n| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_k| + \cdots \leq a|u_n|(1 + a + \cdots + a^k + \cdots).$$

D'où la majoration du reste R_n

$$0 < |R_n| \leq |u_n| \frac{a}{1-a},$$

qui, comme on le voit est très petit si a assez petit. On a donc intérêt à obtenir a assez petit que possible.

2. Série absolument convergente à l'aide du critère de Cauchy. Supposons connu $a < 1$ tel que

$$\sqrt[n]{|u_n|} \leq a < 1.$$

On a alors $|u_n| \leq a^n$, donc

$$|R_n| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots \leq a^{n+1}(1 + a + a^2 + \cdots) = \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

3. Soit $\alpha > 1$ donné et soit une série de terme général u_n positif. On suppose que

$$u_n \leq \frac{A}{n^\alpha}$$

avec une constante positive A. Grâce au théorème de comparaison, la série est convergente . On a évidemment

$$R_n \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \cdots ,$$

en outre, on peut voir facilement que

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{pour tout} \quad k > 1.$$

En sommant sur $k = n+1, n+2, \cdots$ ces inégalités, on obtient

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \cdots \leq \int_n^\infty \frac{dx}{x^\alpha},$$

et en combinant ces relations, on obtient

$$\int_n^\infty \frac{dx}{x^\alpha} - u_n \leq R_n \leq \int_n^\infty \frac{dx}{x^\alpha}.$$

En rappelant que $R_n = S - S_n$, en posant

$$\sigma_n = S_n + \int_n^\infty \frac{dx}{x^\alpha},$$

de l'inégalité précédente, il vient $\sigma - u_n \leq S \leq \sigma_n$, c'est-à-dire que σ_n est une valeur approchée de S par excès.

4. Série alternée. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ une série alternée. Grâce au théorème 5, on sait que la série est convergente et $|S - S_n| \leq a_{n+1}$. On peut adopter $R_n = a_{n+1}$ et l'erreur commise en approximant la somme S par S_n reste inférieure au terme négligeable a_{n+1}. Comme application, cherchant par exemple une valeur approchée par excès à 10^{-3} de la série alternée $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$. On a $|S - S_5| \leq \frac{1}{7^4} \leq \frac{1}{1000}$, d'où $S \simeq -0,9475$.

Exercices.

1. Etudier la nature des séries numériques de terme général

$$u_n = \frac{n}{1+n^2+n^3}, \quad u_n = ne^{-n}, \quad u_n = e^{-\sqrt{n}}, \quad u_n = a^n \log n, \ |a| < 1$$
$$u_n = \sin \frac{1}{n^2}, \quad u_n = \cos \frac{1}{2^n} - 1, \quad u_n = \frac{n!}{n^\alpha}, \quad u_n = \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right), \ \alpha \in \mathbb{R},$$
$$u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \quad u_n = \left(l + \frac{1}{n}\right)^n, \ l \in \mathbb{R}, \quad u_n = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n}}.$$

2. Soit les séries de terme général

$$u_n = (1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} - 1, \quad u_n = \log(1-\cos\frac{1}{n}), \quad u_n = 1 - e^{\frac{1}{n^\alpha}}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Etudier à l'aide d'un développement limité du terme général u_n la nature de ces séries.

3. Soient α et β des nombres réels. On considére la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n} + \alpha\sqrt{n+1} + \beta\sqrt{n+2}.$$

Déterminer α et β pour que la série converge. Calculer alors sa somme.

4. Soient α, β et γ des nombres réels non nuls. Trouver une relation entre α, β et γ pour que la série

$$\sum_{n=2} (\frac{\alpha}{2n} + \frac{\beta}{2n-1} + \frac{\gamma}{2n-2})$$

converge.

5. Démontrer la remarque 4.9.1 de la page 7. Comme application, étudier les séries de terme général

$$u_n = \frac{\log n}{n}, \quad u_n = \frac{\log n}{n^2}, \quad u_n = \frac{1}{n^2 \log n}, \quad u_n = \frac{1}{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

6. Etudier les séries de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad u_n = (-1)^n \frac{6n^2 - 9n + 4}{n^3}, \quad u_n = (-1)^n \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$$
$$u_n = (-1)^n \frac{1}{(n+1)\log^2(n+1)}.$$

Dire s'il y a convergence ou divergence absolue de ces séries.

7. On pose

$$u_0 = \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx.$$

A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que $u_0 = \dfrac{1}{2}(1 + e^{-\pi})$. Soit la suite numerique

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx.$$

A l'aide d'un changement de variables, montrer que u_n est le terme général d'une série alternée. Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

8. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ les séries de terme généraux

$$u_n = \frac{x^n}{n}, \quad u_n = \frac{\sin nx}{n^2}, \quad u_n = x^n \cos(n\alpha), \quad u_n = \frac{x^n}{n!}$$

sont absolument convergentes.

Chapitre 5

Suites et Séries de fonctions

5.1 Suites de fonctions

Soit $\{f_n\}$, $n = 1, 2 \cdots$, une suite de fonctions :

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$$

toutes définies dans un même intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exemples.

1. $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, +\infty[$, soit

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \cdots, f_n(x) = x^n, \cdots$$

2. $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, soit

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \frac{\cos 2x}{2}, \cdots, f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}, \cdots .$$

On se propose d'étendre aux suites de fonctions les notions de convergence et de limite introduite à propos des suites numériques. Pour cela il est nécessaire de distinguer la convergence pour chaque point $x \in I$ de la suite numérique de terme général $f_n(x)$, et la convergence sur tout l'intervalle I de la suite $\{f_n\}$.

Définition 5.2. ***(convergence simple)*** *On dit que la suite de fonctions $\{f_n\}$ converge simplement sur l'inervalle I vers la fonction f si,*

$$\forall x \in I, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

En termes de symbole, on écrit

(1) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall x \in I, \;\; \exists N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

Exemples.

1. La suite définie par $f_n(x) = x^n$ converge simplement sur $]-1,1]$ vers la fonction f telle que

$$f(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in]-1,1[, \quad f(1) = 1.$$

En effet $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ et $f_n(1) = 1$ pour tout n.

2. Quant à la suite $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n}$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Big|\frac{\cos nx}{n}\Big| \leq \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad \to 0,$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Soit $\{f_n\}$ la suite de fonctions définies sur l'intervalle $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n & \text{si} \;\; \dfrac{1}{2n} \leq x \leq \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{si} \;\; 0 \leq x < \dfrac{1}{2n} \;\; \text{et} \;\; \dfrac{1}{n} < x < 1. \end{cases}$$

La suite f_n converge simplement vers la fonction nulle sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En effet, pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$ et, pour $x > 0$, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq \dfrac{1}{x}$. Pour tout $n \geq N$, on a alors $f_n(x) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Observation. La notation $N(\varepsilon, x)$ figurant dans (1) indique que le rang N dépendant évidemment de ε peut être différent d'un point $x \in I$ à l'autre. Sauf si, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, l'ensemble des entiers naturels $N(\varepsilon, x)$ décrit par $x \in I$, soit $E(\varepsilon) = \{N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}, \;\; x \in I\}$, admet une borne supèrieure finie $N(\varepsilon)$, au quel cas, on aura pour tout $n \geq N(\varepsilon)$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in I$. Seulement, en pratique, il n'est pas facile de montrer que $E(\varepsilon)$, admet une borne supérieure finie. On a alors la définition.

Définition 5.3. ***(convergence uniforme)*** *On dit que la suite de fonctions $\{f_n\}$ converge uniformément sur I vers la fonction f si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0 \quad \textit{où} \quad M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

Soit en détaillant :

(2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon)$ tel que $\forall n \geq N \;\; \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$

Dans le cas de la convergence uniforme le rang N ne dépend que de ε, non de x. On peut donner une interprètation graphique de la convergence uniforme. En effet, si C_n $(n \geq N(\varepsilon))$ sont les courbes représentatives des $f_n(x)$ et C la courbe représentative de $f(x)$, des inégalités

$$f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) - \varepsilon \quad \forall x \in I \ \text{ et } \quad \forall n \geq N$$

il en résulte que les courbes C_n se trouvent toutes entières comprises entre les courbes $C - \varepsilon$ et $C + \varepsilon$. Autrement dit, toutes les courbes C_n $(n \geq N(\varepsilon))$ sont distantes de ε de la courbe C.

Exemples.

1. Soit la suite de fonctions $f_n(x) = ne^{-n^2 x}$, $x \in [1, +\infty[$. On peut facilement vérifier que la suite de fonction $\{f_n\}$ converge ponctuellement vers la fonction $f(x) = 0$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. La convergence est aussi uniforme car

$$M_n = f_n\Big(\frac{1}{n^2}\Big) = \frac{1}{n} \to 0 \ \text{ lorsque } \ n \to \infty.$$

En pratique, souvent le calcul explicite des nombres M_n figurant dans (2) est impossible. En effet, pour prouver que M_n tend vers zéro lorsque n devient infini, il suffit de trouver une suite ε_n convergeant vers zéro telle que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n \quad \text{pour tous } \ x \in I, \ \ \forall n = 1, 2, \cdots \tag{1}$$

et pour montrer que M_n ne tend vers zéro, il suffit de trouver une suite de points $x_n \in I$ telle que $f_n(x_n)$ ne tend pas vers zéro. Dans ce cas la suite f_n ne converge pas uniformément.

Exemples.

2. soit $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n + x}$, $x \in [0, +\infty[$. Pour tout $x \geq 0$ la suite $f_n(x)$ tend vers zéro. Puisque

$$\Big|\frac{\sin nx}{n + x}\Big| \leq \frac{1}{n} \quad \text{pour tous } \ x \geq 0 \ \text{ et } \ n \geq 1,$$

il en résulte

$$M_n \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

ce qui montre que f_n converge uniformèment vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.

2. Soit $f_n(x) = \dfrac{\ln(nx + 1)}{n^2 x^2 + 1}$. La suite f_n converge simplement vers zéro sur $[0, +\infty]$; mais au point

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad f_n\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{\ln 2}{2}.$$

La convergence de la suite n'est donc pas uniforme.

En pratique si on veut montrer qu'une suite $\{f_n\}$ converge uniformément vers une fonction f, il suffit de chercher une majoration de $|f_n(x) - f(x)|$ de la forme (1), et si on veur prouver que la suite f_n ne converge pas uniformèment vers f, on cherchera une suite de points x_n telle que $f_n(x_n)$ ne tende pas vers zéro.

Critère de Cauchy pour la convergence uniforme.

Juqu'ici nous avons étudié que le cas d'une suite de fonctions f_n convergeant vers une fonction connue. Quelquefois, la valeur de la limite peut se prévoir avant qu'on ait établie son existence, par exemple la suite définie par :

$$f_0(x) = 0, \quad f_n(x) = \frac{e^{-x}}{2 + f_{n-1}(x)} \quad x \in [0, +\infty[. \tag{3}$$

En effet si $f_n(x)$ converge simplement vers une fonction $f(x)$, alors en passant à la limite sur n dans les formules ci-dessus, on obtient

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{2 + f(x)} \text{ ce qui implique } f(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + e^{-x}}}{2}$$

toutefois, il rest à établir la convergence de la suite. En général, le mode de définition de la suite f_n ne permet pas de deviner quelle est sa limte. On peut cependant prouver la convergence à l'aide du critère suivant.

Théorème 5.3.1. (**de convergence uniforme de Cauchy**) *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I. Pour que la suite $\{f_n\}$ converge uniformément il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, on peut trouver un entier N tel que*

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in I \quad \textit{et} \quad \forall p > q \geq N. \tag{4}$$

Application. Reprenant la suite donnée dans (3). Notons d'abord qu'il est facile de montrer par récurrence que $f_n(x) \geq 0$ pour tout $n \in N$. Par ailleurs, on a

$$|f_n(x) - f_{n-1}(x)| = e^{-x} \frac{|f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x)|}{(2 + f_{n-1}(x))(2 + f_{n-2}(x))} \leq \frac{1}{4} |f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x)|$$

pour tous $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ car $e^{-x} \leq 1$ et le dénominateur est minoré par 4 car $f_n(x) \geq 0$. Donc par récurrence on obtient

$$|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |f_1(x) - f_0(x)|.$$

Puisque $f_0(x) = 0$ et $f_1(x) = e^{-x}/2 \leq 1$ pour tout $x \geq 0$, il vient

$$|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq \Big(\frac{1}{4}\Big)^{n-1}.$$

Soit alors $p > q$ deux entiers naturels ; on a

$$|f_p(x) - f_q(x)| = |\sum_{n=q+1}^{p} (f_n(x) - f_{n-1}(x))| \leq \sum_{n=q+1}^{p} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|$$

$$\leq \sum_{n=q+1}^{p} \Big(\frac{1}{4}\Big)^{n-1} \leq R_q \quad \text{où} \quad R_q = \sum_{n=q+1}^{\infty} \Big(\frac{1}{4}\Big)^{n-1}$$

Puisque $\lim_{q\to\infty} R_q = 0$ comme étant le reste d'une série numérique convergente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N = N(\varepsilon)$ tel que

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in I \quad \text{et} \quad \forall p > q \geq N$$

ce qui signifie que notre suite de fonctions $\{f_n\}$ converge uniformément sur $[0, \infty[$ vers la fonction f donnée dans (3).

Remarque 5.3.1. *1. Des définitions 5.2 et 5.3, il en résule que la convergence uniforme implique la convergence simple. Mais la réciproque est fausse. Par exemple, si $f_n(x) = x^n$ où $x \in [0, 1]$, on a vu que cette suite de fonction converge ponctuellement vers la fonction f définie par : $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ et $f(x) = 1$ si $x = 1$. Comme on peut le constater facilement*

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} x^n = 1 \nrightarrow 0 \quad \textit{lorsque} \quad n \to \infty,$$

donc la suite de fonctions ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

2. La limite simple d'une suite de fonctions continues $f_n(x)$ n'est pas nécessairement continue. Par exemple

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx} \quad 0 \leq x \leq 1$$

converge simplement vers la fonction $f(x) = 1$ sur $]0, 1]$ et $f(0) = 0$, donc discontinue au point $x = 0$.

Le théorème qui suit nous donne une condition suffisante pour que la limite simple d'une suite de fonctions continues est elle même continue. On a

Théorème 5.3.2. (**convergence uniforme**) *La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue.*

Démonstration. Soit $f_n(x)$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément sur un intervalle I. Soit $f(x)$ sa fonction limite. Montrons qu'elle est continue sur I_{cu}. Soit alors x_0 un point quelconque appartenant à I. On a

$$f(x) - f(x_0) = (f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(x_0)) + (f_n(x_0) - f(x_0)),$$

d'où

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2 \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)|. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. Puisque la suite de fonction $f_n(x)$ converge uniformément, on peut trouver un rang $N(\varepsilon)$ tel que

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Par ailleurs, les fonctions $f_n(x)$ étant continues, il existe alors $\delta > 0$ tel que, $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \in]x - x_0, x + x_0[$. Donc de l'inégalité (5.1), on tire

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x - x_0| < \delta,$$

c'est-à-dire la fonction f est continue en tout point $x_0 \in I$, donc sur I. ■

Remarque.

1. Si une suite de fonctions continues converge ponctuellement vers une fonction non continue la convergence n'est pas uniforme. Cette remarque est très utile dans la pratique, par exemple la suite de fonctions continues $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$ ne converge pas uniformément car sa limite simple est discontinue.

2. Le théorème 5.3.2 n'est qu'une une condition suffisante : une limite ponctuelle de fonctions continues peut être continue sans qu'il y ait convergence uniforme. En effet, la suite de fonctions continues $f_n(x) = nxe^{-nx}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction identiquement nulle, mais la convergence n'est pas uniforme car

$$\sup_{x \geq 0} |f_n(x)| = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{e} \nrightarrow 0.$$

Toutefois on le

Théorème 5.3.3. (**Théorème de Dini**) *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle $I = [a, b]$. Si elle converge simplement et si pour tout $x \in I$ fixé, la suite numérique $f_n(x)$ est croissante, alors la convergence est uniforme sur I.*

Exemple.

1. Considérons la suite de fonctions $\{f_n\}$ définies sur $I = [-1, 1]$ par :

$$f_0(x) = 2x, \quad f_n(x) = \sqrt{2 + f_{n-1}(x)} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \cdots .$$

Par récurrence, on peut facilement montrer que les fonctions f_n sont continues et pour tout $x \in I$ fixé la suite numérique est croissante, c'est-à-dire $f_n(x) \geq f_{n-1}(x)$ pour tout $n \geq 1$. Si la suite numérique $f_n(x)$ est majorée, étant croissante donc convergente et la convergence est uniforme sur I (d'après le théorème de Dini). En outre si $f(x)$ est sa limite alors $f(x) = \sqrt{2 + f(x)}$ ce qui entraîne que $f(x) = 2$. Pour finir, il nous reste à montrer que la suite numérique $f_n(x)$ est majorée. En effet, comme on peut facilement le vérifier, par récurrence on a

$$0 \leq f_n(x) \leq 2 \quad \text{pour tout} \quad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

2. Soit $\{p_n\}$ la suite de fonctions polynomiale définies sur $[0, 1]$ par :

$$p_0(x) = x, \quad p_n(x) = p_{n-1}(x) + \frac{1}{2}(x - p_{n-1}^2(x)) \quad \forall x \in [0, 1] \quad \text{et} \quad n = 1, 2, \cdots .$$

i) Montrer par récurrence que

$$0 \leq p_n(x) \leq \sqrt{x} \quad \forall x \in [0, 1].$$

ii) En déduire que la suite numérique $p_n(x)$ est croissante et qu'elle est simplement convergente, donc uniformément convergente (d'après le théorème de Dini).

On verra dans les théorèmes qui suivent toute l'importance de la notion de la convergence uniforme.

Théorème 5.3.4. *Si une suite de fonctions continues converge uniformément sur un intervalle $[a, b]$ vers une fonction $f(x)$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{5.2}$$

Dans le cas de la convergence uniforme l'intégration et le passage à la limite sont permutables.

Démonstration. Notons d'abord que la limite uniforme $f(x)$ est continue sur $[a,b]$, donc intégrable. Il s'agit de montrer que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \ \text{ tel que } \ \Big|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\Big| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

En effet, grâce à la convergence uniforme, il existe un rang $N(\varepsilon)$ tel que, pour tout $n > N(\varepsilon)$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall x \in [a,b].$$

En intégrant, on obtient

$$\Big|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\Big| < (b-a)\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Notons que dans la permutation des opérations intégration et passage à la limite, la convergence uniforme est une condition suffisante mais pas nécéssaire. En effet l'exemple qui suit nous montre que la formule (5.2) reste vraie dans le cas où la suite de fonctions continues est seulement ponctuellement convergente.

En effet, soit la suite de fonctions continues sur $x \in [0,1]$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$ $f_n(x)$ converge vers la fonction $f(x) = 0$. Elle ne converge pas uniformément car

$$\sup_{0\leq x\leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0\leq x\leq 1} \frac{1}{1+n^2x^2} = f_n(0) = 1 \nrightarrow 0 \ \text{ lorsque } \ n \to \infty,$$

pourtant (vérifier le) on a l'égalité (5.2).

Théorème 5.3.5. *Soit $f_n(x)$ une suite de fonctions toutes dérivables avec continuité sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si*

i) La suite des fonctions dérivées $f_n'(x)$ converge uniformément sur I vers $g(x)$;

ii) la suite de fonctions $f_n(x)$ est ponctuellement convergente sur I.

Alors la suite de fonctions $f_n(x)$ converge uniformément sur I vers une fonction $f(x)$ continument dérivable et on a $f'(x) = g(x)$ sur I, c'est-à-dire

$$\big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

La convergence uniforme de la suite $f'_n(x)$ nous permet donc de permuter les opérations de dérivation et de passage à la limite.

Exercices.

1. i) Etudier la convergence ponctuelle et uniforme des suites de fonctions

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx},\ x \geq 0, \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$f_n(x) = \frac{1}{1+(n+x)^2},\ x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^n},\ x \in [0,1] \ \text{ ou } \ x \in [1,+\infty[,$$
$$f_n(x) = n^2x^n(1+x^n),\ x \in [0,1], \quad f_n(x) = \frac{n^2}{x^3}\exp\big(-\frac{n^2}{x^2}\big) \ \text{ si } \ x \in \mathbb{R}^*, \quad f_n(0) = 0.$$

ii) Trouver les intervalles I de convergence uniforme de ces suites.

iii) Vérifier dans chaque cas si

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

2. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions

$$f_n(x) = n\cos^n x \sin x,\ x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}} \ x > 0 \ \text{ et } \ f_n(0) = 0$$
$$f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{n\sin x} \ \text{ si } \ x \neq k\pi, \quad f_n(k\pi) = 0 \ \text{ pour } \ k \in \mathbb{Z},$$
$$f_n(x) = n^\alpha x\exp(-nx),\ x \in [0,+\infty[, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
$$f_n(x) = \Big(\frac{n}{1+n^2x^2}\Big)^n, \quad f_n(x) = \Big(\frac{n^2}{1+n^2x^2}\Big)^{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $f_n(x) = n^2x(1-x)^n$ et comparer

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

4. On pose

$$f_0(x) = 2x, \quad f_n(x) = \sqrt{2+f_{n-1}(x)} \quad -1 \leq x \leq 1, \quad n = 1,2,\cdots$$

Montrer que la suite f_n converge uniformèment sur $[-1,1]$. Calculer les limites des suites

$$I_n = \int_{-1}^1 f_n(x)dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{f_n(x)}dx, \quad K_n = \int_{-1}^1 \frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)}dx.$$

5. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq x < \dfrac{1}{n} \\ 0 \text{ si } \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}(1 - n^2x^2) \text{ si } 0 \leq |x| < \dfrac{1}{n} \\ 0 \text{ si } x = 0 \text{ et } \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} n\sin(nx) \text{ si } 0 \leq x < \dfrac{\pi}{n} \\ 0 \text{ si } \dfrac{\pi}{n} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n}, \\ 2 - nx & \text{si } \dfrac{1}{n} < x \leq \dfrac{2}{n}, \\ 0 & \text{si } x > \dfrac{2}{n}. \end{cases} \qquad f_n(x) = \begin{cases} 4nx^2 & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2n}, \\ 4n^2(\dfrac{1}{n} - x) & \text{si } \dfrac{1}{2n} < x \leq \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } x > \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

6. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions f_n définie par récurrence par :

$$f_0(x) = x, \quad f_n(x) = \frac{1}{2 + f_{n-1}^2(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

7. Etudier sur $[0,1]$ la convergence ponctuelle et uniforme de $f_n(x) = e^{-nx^2}$. Verifier si

$$\big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

8. Soit $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et soit $M = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |g(x)|$. On définit une suite de fonctions f_n en posant

$$f_0(x) = 1, \quad f_n(x) = 1 + \int_0^x f_{n-1}(t)g(t)dt \quad \forall x \in \ [0,1], \quad \forall n = 1, 2, \cdots .$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ on a

$$|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq \frac{(Mx)^n}{n!} \quad \text{pour tout } \ x \in \ [0,1]$$

et en déduire que f_n est uniformément convergente sur $[0,1]$. On note f sa limite.

Établir que, pour tout n, f_n est dérivable et que la suite f_n' converge vers f' la dérivée de f. En déduire que $f(x)$ est solution de l'équation intégrale

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(t)g(t)dt$$

et que $f(x)$ est donnée par l'expression

$$f(x) = \exp(\int_0^x g(t)dt).$$

9. Le but de cet exercice est de montrer que tout fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes. Quitte à remplacer $x \in [a, b]$ par $x - a/b - a$, on peut se ramener à l'intervalle $[0, 1]$.

i) On note Q_k le polynôme à deux variables

$$Q_k(x, y) = C_n^k y^k (1 - x)^{n-k}, \quad x, y \in [0, 1]$$

et P_k le polynôme à une variable

$$P_k(x) = C_n^k x^k (1 - x)^{n-k}.$$

En utilisant la formule du binôme, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} Q_k, \quad \sum_{k=0}^{n} kQ_k, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 Q_k$$

et en déduire

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 P_k = nx(1 - x), \quad x \in [0, 1].$$

ii) Soit $\alpha \in]0, 1[$. On pose $N = \{0, 1, \cdots, n\}$ et on considère les deux sous-ensembles disjoints de N

$$I_n = \{k \in N : |\frac{k}{n} - x| \geq \alpha\}, \quad J_n = \{k \in N : |\frac{k}{n} - x| < \alpha\}.$$

En utilisant l'égalité (1), montrer que

$$\sum_{k \in I_n} P_k(x) < \frac{1}{n\alpha^2} x(1 - x) < \frac{1}{4n\alpha^2}$$

et par suite

$$\sum_{k \in I_n} P_k(x) \leq 1 - \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

iii) Soit maintenant une fonction réelle continue sur $[0, 1]$ et soit le polynôme

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) P_k(x).$$

Montrer que

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{M}{2n\alpha^2} + \varepsilon(1 - \frac{1}{4n\alpha^2})$$

où $M = \sup_{0_l eqx \leq 1} |f(x)|$ et ε et un réel positif arbirairement petit. En deduire que $S_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

10. soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $|f'(x)| \leq T$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit une suite de fonctions $x_n(t)$ par les relations

$$x_0(t) = 0, \quad x_n(t) = a + tf(x_{n-1}(t)) \quad \forall t \in J_\delta = [-\frac{\delta}{T}, \frac{\delta}{T}], \quad \forall\ n = 1, 2, \cdots$$

où a est une constante et $\delta \in]0, 1[$.

i) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq \delta^{n-1}(|a| + \frac{\delta}{k}|f(0)) \quad \text{pour tout} \quad t \in J_\delta$$

et en déduire que f_n est uniformément convergente sur J_δ. On note $x(t)$ sa limite. Vérifier que.

$$x(t) = a + tf(x(t)) \quad \text{pour tout} \quad t \in J_\delta.$$

5.4 Séries de fonctions

Soit une suite de fonctions $f_n(x)$ toutes définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$. On lui associe la suite de fonctions $S_n(x)$ de ses sommes partielles, soit

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

On dit que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge simplement sur I lorsque la suite de fonctions $S_n(x)$ converge simplement . Le cas échéant, la fonction limite $S(x)$ de la suite $S_n(x)$ est appelé somme de la série, et on note

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in I.$$

On dit que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est uniformément convergente sur I lorsque la suite de fonctions $S_n(x)$ converge unifromément sur I, c'est-à-dire lorque

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |R_n(x)| = 0, \quad R_n(x) = S_n(x) - S(x).$$

l'expression

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots,$$

s'appelle reste d'ordre n de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Un critère pratique très commode pour démontrer la convergence uniforme est donnée par le théorème suivant

Théorème 6. *Soit* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *une série de fonctions simplement convergente sur* I. *S'il existe une suite numérique* u_n *positive telle que*

$$|f_n(x)| \leq u_n \quad \forall x \in J \subseteq I \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \;\; \text{convergente}$$

alors la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *est uniformémente convergente sur* J.

Démonstration. On évidemment

$$\sup_{x\in J} |R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n \to 0 \;\; \text{lorsque} \;\; n \to \infty$$

comme reste d'une série numerique convergente.

Par exemple les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{1+n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$$

sont unifornément convergentes sur $\mathbb{R}$.

Les théorèmes de continuité, dérivabilité et intégarbilité de la somme d'une série de fonctions qui suivent découlent immediatement des théorèmes 5.3.2, 5.3.4 et 5.3.5 relatifs aux suites de fonctions.

Théorème 5.4.1. *Si une série de fonctions continues* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *convergente uniformément sur* I_{cu}, *alors sa fonction somme*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

est une fonction continue sur I_{cu}.

Théorème 5.4.2. *Si une série de fonctions continues* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformément sur un intervalle* $[a,b]$*, on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx. \tag{5.3}$$

Théorème 5.4.3. *Soit* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *une série de fonctions continûment dérivables sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$*. Si*

i) La série des fonctions dérivées $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ *converge uniformément sur* I *vers* $s(x)$*,*

ii) la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *est ponctuellement convergente sur* I*.*

Alors la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformément sur* I *vers une fonction* $S(x)$ *continûment dérivable et on a* $S'(x) = s(x)$ *sur* I*, c'est-à-dire*

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Exercices. Etudier la convergence ponctuelle, absolue et uniforme des séries de fonctions de termes généraux

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}, \quad f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2+x^2}, \quad f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \quad f_n(x) = \frac{2^n x^{2n}}{1+x^{2n}}$$
$$f_n(x) = \Big|1-\frac{1}{x}\Big|^{nx}, \quad f_n(x) = \frac{1}{2n-1}\Big(\frac{x+2}{x-1}\Big)^n, \quad f_n(x) = \frac{x^n+2^n}{(2x)^n+1}, \quad x \geq 0.$$

5.5 Séries entières

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit a_n une suite numérique. On appelle série entière la série de fonctions particulière de terme général $f_n(x) = a_n x^n$, $n = 0, 1, \cdots$, c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots .$$

La somme partielle S_n de rang n est le polynôme de dégré n

$$S_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

On peut considérer que la série entière généralise la notion bien connue de polynôme. Un exemple simple est fourni par la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Comme on le sait, cette série géométrique converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| \geq 1$. En, outre si $x \in]-1, 1[$, on a

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Dans la suite, on verra d'abord comment déterminer l'intervalle I_c $(=]-1,1[$ dans l'exemple précédent) de convergence ponctuelle d'une série entière. Ensuite, on étudiera sur I_c les propriétés de la fonction somme $S(x)$. On commencera par cette remarquable propriété des séries entières, soit le thèorème suivant.

Théorème 5.5.1. (**Théorème d'Abel**) *Si une série entière converge en un point x_0 elle converge absolument pour tout $x \in]-r_0, r_0[$ où $r_0 = |x_0|$.*

Démonstration. Le série est évidemment convergente pour $x_0 = 0$. Supposons qu'elle convergente pour $x = x_0 \neq 0$. En vertu de la condition nécessaire de convergence, on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Il existe alors un rang N_1 tel que $|a_n x_0^n| < 1$ pour tout $n \geq N_1$. On a alors

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \frac{|x^n|}{|x_0^n|} \leq \Big|\frac{x}{x_0}\Big|^n.$$

Puisque $|\frac{x}{x_0}| < 1$ car $|x| < r_0 = |x_0|$, la série géométrique de raison $|\frac{x}{x_0}|$ est convergente. Grâce au théorème de comparaison la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est absolument convergente donc convergente pour tout $x \in]-r_0, r_0[$.

On introduit l'ensemble E des nombres réels positifis ou nuls pour lesquels la série numérique $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ est convergente. Cet ensemble est non vide car il contient $r = 0$. D'après ce qui précéde, si $r_0 \in E$ alors $[0, r_0] \subset E$. Soit R la borne supérieure de E. Alors

1. Si l'ensemble E est majoré, $R \in [0, +\infty[$ est caractérisé par la double condition

$$\sum_{n=0}^{\infty} a x_n^n \text{ est } \begin{cases} \text{absolument convergente si } |x| < R \\ \text{divergente si } |x| > R. \end{cases}$$

Le nombre $R \in [0, +\infty]$ est appelé *Rayon de convergence* de la série entière et l'ouvert $I_c =]-R, R[$ *intervalle de convergence*. Aux extrémités de l'intervalle de convergence c'est-à-dire aux pints $x = \pm R$, on peut rien dire sur la convergence de la série entière. Une étude est nécessire dans chaque cas.

2. Si E n'est pas majoré, donc $R = +\infty$ et, dans ce cas, la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$, son intervalle de convergence est $\mathbb{R}$ tout entier .

Détermination pratique du rayon de convergence. Puisque il s'agit de la convergence absolue, pour déterminer R, on utilisera le critère de d'Alembert ou de Cauchy pour la série des valeurs absolues $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ où $u_n = a_n x^n$.

1. Critère de d'Alembert. En effet on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x|.$$

si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = l|x|.$$

D'après la régle de d'Alembert la série de terme général $u_n = a_n x^n$ est convergente si $l|x| < 1$, donc si $|x| < \frac{1}{l}$. Par contre, elle diverge si $l|x| > 1$, donc si $|x| > \frac{1}{l}$. Il en résulte que $R = \frac{1}{l}$ est le rayon de convergence (si $l = 0$, $R = +\infty$).

2. Critère de Cauchy. De la même façon, on a

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x|,$$

et si

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l|x|$$

et le rayon de convergence $R = \frac{1}{l}$.

Exemples

1. Intervalle de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n+1}{n}|x| \to |x| \quad \text{si} \quad n \to 0.$$

Donc $R = 1$, la série converge absolument sur $]-1,1[$. Pour $x = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est une série divergente, pour $x = -1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée convergente. Finalement la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ est convergente pour tout $x \in [-1,1[$.

2. Intervalle de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{1}{n+1}|x| \to 0 \quad \text{si} \quad n \to 0.$$

Donc $R = +\infty$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Intervalle de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = (n+1)|x| \to +\infty \quad \text{si} \quad n \to 0,$$

la série est divergente dans $\mathbb{R}^*$, son rayon de convergence est nul.

5.6 Propriétés de la fonction somme d'une série entière

Supposons que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pout tout $x \in]-R,R[$ vers la fonction somme $S(x)$, soit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \forall x \in]-R,R[.$$

Puisque la convergence est uniforme sur tout intervalle $]-r,r[\subset]-R,R[$, d'après le théorème 5.4.1, la fonction $S(x)$ est continue sur $]-R,R[$.
Soit maintenant la série entière de terme général $na_n x^{n-1} = (a_n x^n)'$, c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}.$$

Elle a même rayon de convergence R, donc uniformément convergente sur $[-r,r]$ pour tout $r < R$. D'après le théorème 5.4.3, elle converge vers $S'(x)$, c'est-à-dire

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}, \quad \forall x \in]-R,R[.$$

On retiendra : *Une série entière est dérivable terme à terme sur l'intervalle de convergence ouvert* $]-R,R[$. On en déduit d'ailleurs qu'elle est infiniment dérivable terme à terme. En effet, si

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots ,$$

alors

$$S'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots ,$$
$$S''(x) = 2a_2 + 6a_3x \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S^{(p)}(x) = p!a_p + \cdots + n(n-1)\ldots(n-p+1)x^{n-p} + \cdots .$$

Pour $x = 0$, on a $a_p = \dfrac{S^{(p)}(0)}{p!}$ et donc

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!}x^n = S(0) + S'(0)x + \cdots \frac{S^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots .$$

D'une manière analogue, on peut voir qu'une série entière est intégrable sur tout intervalle fermé strictement contenu dans son intervalle de convergence $]-R,R[$, en particulier, pour tout $x \in]-R,R[$, on a

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_nt^ndt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t a_nt^ndt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

On retiendra qu'une série entière peut être intégrable terme à terme sur tout fermé $[0,x]$.

Exemples

1. On sait que la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ est convergente pour tout $x]-1,1[$ et que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots .$$

En dérivant deux fois, on obtient

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} + \cdots ,$$
$$\frac{-2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = 2 + 6x \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots .$$

2. Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$, c'est une série géométrique convergente si $|-x| = |x| < 1$ et

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

En intégrant, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} = \log(1+x), \tag{5.4}$$

d'ou

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \log 2.$$

5.7 Développement en série entière d'une fonction

Soit $f(x)$ une fonction définie sur un intervalle contenant zéro. On veut savoir sous qu'elles conditions, on peut trouver une série entière de rayon de convergence R telle que sa somme $S(x) = f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$. La fonction $f(x)$ doit être indéfiniment dérivalble car égale à la fonction somme $S(x)$ d'une série entière donc indéfiniment dérivalble sur son intervalle de convergence $]-R, R[$.
On peut donc applique à $f(x)$ la formule de Mac Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \tag{5.5}$$

où θ est un certain nombre appartenant à l'intervalle $]0,1[$ (et dépendant d'aiileurs de n et de x). En posant

$$S_n(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0), \tag{5.6}$$

l'égalité précédente s'écrit

$$f(x) = S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

d'où

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(\theta x)|.$$

Une Condition nécessaire et suffisante pour que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(\theta x)| = 0$$

est difficile à obtenir. Toutefois, on peut donner sur la fonction f une condition suffisante en supposant les dérivées $f^{(n)}(x)$ bornées. En effet, s'il existe un nombre positif M tel que

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in]-R, R[\quad \text{et} \quad \forall n \geq 0$$

alors

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}M \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow +\infty$$

car c'est le terme général de la série convergente $\sum_{n \geq 0} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$. Donc, compte tenu de (5.5) et (5.6), on a

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

Ainsi, on a le résultat suivant

Théorème 5.7.1. *Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]-R, R[$. S'il existe $M > 0$ tel que*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in]-R, R[\quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \tag{5.7}$$

alors la fonction f est développable en série entière sur $]-R, R[$ et on a

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \cdots .$$

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$ est appelée série de Mac Laurin.

Remarque. Si la fonction $f(x)$ est toujours supposée indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]-R, R[$ et, si au lieu de (5.7), on suppose

$$|f^{(n)}(x)| \leq M_n \quad \forall x \in]-R, R[,$$

de sorte que

$$\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} M_n \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow +\infty,$$

on voit encore que la fonction $f(x)$ est égale sur l'intervalle $)-R, R[$ à la somme de sa série de MacLaurin.

Exemples.

Un bon nombre de dévelopements en série entière peuvent être obtenus en utilisant le théorème précédent.

1. La fonction $f(x) = e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ satisfait aux hypothèses du théorème 5.7.1 car

$$f^{(n)}(x) = e^x \leq e^R \quad \text{pour tout} \quad x \in]-R, R[.$$

La série de Mac Laurin de $f(x) = e^x$ est donc convergente sur $]-\infty, +\infty[$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

d'ou

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

En faisant la somme et la différence des deux précédentes série convergentes sur $\mathbb{R}$, on obtient les développements des fonctions sinus et cosinus hyperboliques, soient

$$\mathrm{sh}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdots$$

$$\mathrm{ch}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdots.$$

On peut voir facilement que $\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x = e^x$.

2. Fonctions circulaires. Les fonctions $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$ sont indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2}), \quad g^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2}).$$

Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ et $|g^{(n)}(x)| \leq 1$, donc les fonctions circulaires sont développables en série entières de Mac Laurin, et on a

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdots \tag{5.8}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdots. \tag{5.9}$$

3. Développements obtenus à l'aide d'une intégration

i) soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$, c'est une série géométrique qui converge si $|x| < 1$ et

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}.$$

En intégrant, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \operatorname{arctg} x.$$

ii) Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n$, c'est une série géométrique qui converge si $|x| < 1$ et

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}.$$

En intégrant, on obtient pour tout $x \in]-1,1[$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Exercices.

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières de termes généraux

$$u_n = \frac{x^n}{n+1}, \quad u_n = \frac{x^n}{\sqrt{n}}, \quad \frac{x^n}{n^n}, \quad u_n = n^2 x^n,$$
$$u_n = n! x^n, \quad u_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n x^n, \quad u_n = x^n \sin \frac{1}{n},$$
$$u_n = \frac{n!}{n^n} x^n, \quad u_n = x^n \log n, \quad u_n = x^n n^2 \log(1 + \frac{1}{n}), \quad u_n = \frac{(nx)^n}{n!}.$$

Etudier la nature de ces séries aux extrémités de l'intervalle de convergence.

2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières de termes généraux

$$u_n = \frac{x^n}{2^n}, \quad u_n = \frac{x^n}{(n-1)!}, \quad (-1)^n \frac{x^n}{(2n+1)!}, \quad u_n = (-1)^n \frac{x^n}{n+1}.$$

Calculer leur somme.

3. Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ convergente sur $\mathbb{R}$. Soit $S(x)$ sa somme. Montrer que $S'(x) = S(x)$, en déduire la valeur de $S(x)$.

4. Montrer que, pour tout $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x^2)}.$$

En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

5. Soit la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad u_n(x) = \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

Trouver son rayon de convergence et étudier la nature de la série aux extrémités de son intervalle de convergence. Etudier les séries dérivées de termes général $u'_n(x)$ et $u''_n(x)$. En déduire la somme de la série donnée.

6. Développer en série entière les fonctions

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Déterminer l'intervalle de convergence. En déduire le développement en série entière des fonctions $\arcsin x$ et $\arg \mathrm{sh} x$.

7 - Application au calcul approché d'une intégrale. On veut calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \cos x^2 dx.$$

Puisque une primitive de la fonction $f(x) = \cos x^2$ n'est pas connue, on se contentera d'une valeur approchée de cette intégrale à 10^{-3} près par exemple. En effet, du développement en série entière (voir (5.9)) de $\cos x$, on a pour tout $|x| < 1$

$$\cos x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{12}}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!} + \cdots .$$

En arrêtant le développement à l'ordre 3 et en rappelant qu'il s'agit d'une série alternée si $0 \leq x < 1$, on a (voir (1.7.1))

$$|\cos x^2 - (1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!})| \leq \frac{x^{12}}{6!},$$

d'où

$$\Big|\int_0^1 (\cos x^2 - (1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!}))dx\Big| \leq \int_0^1 |\cos x^2 - (1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!})| \leq \int_0^1 \frac{x^{12}}{6!} dx = \frac{1}{9360}.$$

Comme

$$\int_0^1 (1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!})dx = 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{246},$$

on a alors

$$\int_0^1 \cos x^2 dx \simeq 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{246}$$

avec une erreur de $\frac{1}{9360}$.

8. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près des intégrales

$$\int_0^1 \sin x^2 dx, \quad \int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{arctg} x}{x} dx.$$

Chapitre 6

Equations différentielles ordinaires

6.1 Equations différentielles du premier ordre

D'une manière générale une équation différentielle du premier ordre est une relation entre une fonction y, sa dérivée et la variable x dont dépend y (supposée inconnue). Ici nous nous intérésserons qu'aux équations de la forme particulière

$$y' = f(x, y), \tag{6.1}$$

où $f(x, y)$ une fonction définie continue sur un domaine Ω du plan.
On appelle solution de l'équation (6.1) toute fonction $y = u(x)$ définie continue et dérivable sur un intervalle I telle que

$$\forall x \in I \quad (x, u(x)) \in \Omega \quad \text{et} \quad u'(x) = f(x, u(x)).$$

La condition $(x, u(x)) \in \Omega$ est certainement nécessaire pour que l'on puisse calculer f au point $(x, u(x))$. Le plus simple problème de ce type est celui de la recherche des primitives d'une fonction donnée $g(x)$, c'est-à-dire de la détermination d'une fonction $y(x)$ telle que

$$y'(x) = g(x). \tag{6.2}$$

On sait que si g est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, la solution de l'équation (6.2) est la fonction intégrale

$$y(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

où $x_0 \in I$ et c une constante arbitraire en fonction de laquelle s'obtiennent toutes les solutions de (6.2). Si on impose la condition supplémentaire

$$y(x_0) = y_0 \tag{6.3}$$

où y_0 est donné, la solution de de (6.2) est complètement déterminée. Comme, on vient de le constater sur cet exemple simple, en général les solutions de l'équation (6.1) dépendent d'une constante arbitraire. Le problème principal consiste à déterminer s'il existe des solutions de l'équation (6.1) vérifiant la condition (6.3). Toutefois la condition supplémentaire (6.3) peut ne pas suffire pour que y soit complétement déterminée. En effet, comme on peut facilement le vérifier sur cet exemple

$$y' = 3|y|^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0$$

les deux fonctions distinctes

$$y_1(x) = 0 \;\text{ et }\; y_2(x) = x^3$$

sont solutions. Il est important de noter que dans cet exemple la fonction $f(x,y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ n'est pa dérivable par rapport à la seconde variable y car

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y^{-\frac{1}{3}} & \text{si } \; y > 0, \\ -2y^{-\frac{1}{3}} & \text{si } \; y < 0 \end{cases}$$

et c'est pour cette raison qu'on a pu trouver deux solutions distinctes. Ceci explique pourquoi dans la suite on supposera que la fonction f est continûment dérivable (ou lipschitzienne) par rapport à la seconde variable y si on désire que la solution de l'équation (6.1) vérifiant la condition (6.3) soit unique.

Définition 6.2. *Soit f une fonction définie sur Ω et soit $(x_0, y_0) \in \Omega$. On appelle problème de Cauchy, le problème de la recherche des solutions de l'équation différentielle (6.1) qui vérifient la condition (6.3).*

Si on se limite à chercher une solution $y(x)$ avec $y(x_0) = y_0$ dans un opportun intervalle contenant x_0, on pose le problème de Cauchy local ; si par contre on se propose de vérifier si la solution $y(x)$ est définie dans un intervalle fixé contenant x_0, on pose le problème de Cauchy global.

6.2.1 Existence locale et unicité

On se propose de chercher une solution du problème de Cauchy

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{6.4}$$

dans un intervalle I contenant x_0. Soient alors δ_0 et r_0 deux nombres réels positifs et soit Q le rectangle

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\} = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]. \tag{6.5}$$

Considérons une fonction $f : Q \to \mathbb{R}$ continue, donc bornée sur Q. Soit

$$\sup_{(x,y)\in Q} |f(x, y)| = M. \tag{6.6}$$

Nous supposons en outre que la fonction f est lipschitzienne par rapport à la seconde variable, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive K telle que pour tout $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in [y_0 - b, y_0 + b]. \tag{6.7}$$

On pose

$$\delta = \min\,(a, \frac{b}{M}). \tag{6.8}$$

Remarque 6.2.1. *La condition (6.7), qui semble être difficile à vérifier, est automatiquement satisfaite si f posséde une dérivée partielle par rapport à la seconde variable y continue sur Q.*

En effet, si tel est le cas, Q étant compact, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)| \leq K \quad \text{pour tout} \quad (x, y) \in Q.$$

Grâce au théorème des accroissements finis, pour tout $x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$ fixé et pour tout y_1 et y_2 dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$, on a

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = (y_1 - y_2)\frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y})$$

avec $\bar{y}$ compris strictement entre y_1 et y_2. D'où, pour tout $x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$, on a

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0].$$

Remarque 6.2.2. *Une fonction $y(x)$ est une solution du problème de Cauchy (6.47) si et seulement si elle est continue est vérifie l'équation intégrale*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{6.9}$$

En effet, si $y(x)$ est une solution du problème de Cauchy (6.47), en intégrant par rapport à x, on obtient (6.9). Inversement si $y(x)$ est une fonction continue vérifiant (6.9), alors $y(x_0) = y_0$ et $y(x)$ est une primitive de la fonction $x \to f(x, y(x))$, donc elle est continument dérivable et vérifie l'équation $y'(x) = f(x, y(x))$. Ainsi, on vient de voir que la fonction $y(x)$ est solution du problème de Cauchy (6.4) si et seulement si est une solution continue de (6.9).

Ceci étant, on est maintenant en mesure d'énoncer le théorème d'existence et d'unicitè locale d'une solution du problème de Cauchy. En effet, on a

Théorème 6.2.2. (de Cauchy-Lipschitz) *Supposons que la fonction f vérifie les hypothèses (6.6) et (6.7). Alors le problème de Cauchy (6.4) admet une et une seule solution $y(x)$ définie sur l'intervalle $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ avec $\delta = \min(a, \frac{b}{M})$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $(x, y(x)) \in Q$ pour tout $x \in I$.*

Observation. Les conditions du théorème 6.2.2 nécessitent quelques précisions. Puisque M est la valeur absolue maximale que peut assumer dans le rectangle Q (voir (6.5)) la dérivée d'une solution $y(x)$, b/M est alors la distance minimale qu'il faut entre x et x_0 pour que $y(x) \in]y_0 - b, y_0 + b[$. Donc, si $b/M > a$, on peut être sûr que la solution $y(x)$ prendra pour tout $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ des valeurs comprises entre $y_0 \pm b$, son graphe doit donc rester dans le rectangle Q dans lequel les propriétés de $f(x, y)$ sont connues. Par contre, si $b/M < a$, le graphe de la solution peut quitter le rectangle Q pour $b/M < |x - x_0| < a$, et dans ce cas les proprietés de la fonction f dans Q ne nous renseignent plus sur le comportement de la solution, qui pourrait par exemple devenir infinie lorsque x se rapporche d'une certaine valeur $\bar{x} \in]x_0 - a, x_0 + a[$, voilà pourquoi on impose des restrictions sur l'intervalle sur lequel est assuré l'existence de la solution.

Démonstration du théorème 6.2.2. Grâce à la remarque 10.13, il suffit de montrer que l'équation intégrale (6.9) admet dans l'intervalle $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ une et une seule solution $y(x)$. Cette solution sera obtenu par un procédé d'approximations successives.

On pose alors, pour tout $x \in I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$,

$$y_0(x) = y_0, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt, \quad n \geq 1. \tag{6.10}$$

La suite de fonctions continues $y_n(x)$ est bien définie car

$$(x, y_n(x)) \in Q \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{et pour tout} \quad x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]. \tag{6.11}$$

En effet, la (6.11) est banalement vérifiée pour $n = 0$. Supposons que $(x, y_{n-1}(x)) \in Q$ pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Compte tenu de l'hypothèse (6.6), de la relation (6.10) on déduit que

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_0| = \Big| \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt \Big| &\leq \Big| \int_{t_0}^{t} |f(t, y_{n-1}(t))|dt \Big| \\ &\leq M|x - x_0| \leq M\delta \leq M\frac{r_0}{M} = r_0, \end{aligned} \tag{6.12}$$

c'est-à-dire que $y_n(x) \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, et donc $(x, y_n(x)) \in Q$ pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi la la (6.11) est démontrée.

Existence : Montrons que pour tout $n \geq 1$ on a

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq MK^{n-1}\frac{|x - x_0|^n}{n!} \quad \text{pour tout} \quad x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]. \tag{6.13}$$

Observons d'abord que grâce à l'hypothèse (6.7), de la relation (6.10) on tire

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| &= \Big| \int_{x_0}^{x} [f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-2}(t))]dt \Big| \\ \leq \Big| \int_{x_0}^{x} |[f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-2}(t))]|dt \Big| &\leq K \Big| \int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)|dt \Big|. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Montrons maintenant par récurrence l'inégalité (6.13). En effet, grâce à (6.12), la (6.13) est vérifiée pour $n = 1$. Supposons que cette dernière est vraie pour $n-1$. Alors à l'aide de (6.14) et à l'hypothèse de récurrence, on a

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq K\Big|\int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)|dt\Big|$$
$$\leq K\Big|\int_{x_0}^{x} MK^{n-2}\frac{|t-x_0|^{n-1}}{(n-1)!}dt\Big| = MK^{n-1}\frac{|x-x_0|^n}{n!}.$$

Compte tenu de (6.13), on montre facilement que pour tout $m < n$, on a,

$$|y_n(x) - y_m(x)| \leq \sum_{k=m}^{n} |y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq \frac{M}{K}\sum_{k=m}^{n}\frac{(K\delta)^k}{k!} \leq \frac{M}{K}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(K\delta)^k}{k!}. \tag{6.15}$$

Puisque la série numérique $\sum_{k\geq 0}\frac{(K\bar{t})^k}{k!}$ est convergente, son reste $R_m = \sum_{k\geq m}\frac{(K\delta)^k}{k!}$ tend vers zéro lorsque $m \to \infty$, ce qui signifie que la suite de fonctions $y_n(x)$ est, pour tout x fixe, une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc convergente. Soit $y(x)$ sa limite. Si on passe maintenant à la limite sur $n \to \infty$ dans l'inegalité (6.15), on obtient $|y(x) - y_m(x)| \leq R_m$. Comme $R_m \to 0$ lorsque $m \to \infty$, alors la suite de fonction $y_m(x)$ converge uniformément sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ vers la fonction continue $y(x)$ telle que (voir (6.12)) $|y(x) - y_0| \leq r_0$. Compte tenu de l'hypothèse (6.7), on a pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$$|f(x, y_n(x) - f(x, y(x)| \leq K|y_n(x) - y(x)|,$$

et donc $f(x, y_n(x)$ converge uniformément vers $f(x, y(x))$ sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Ceci étant, nous pouvons maintenant passer à la limite dans (6.9) pour obtenir

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \tag{6.16}$$

et compte tenu de la remarque 10.13, ceci équivaut au fait que $y(x)$ est solution du problème de Cauchy. Ainsi l'existence d'une solution du problème de Cauchy est établie, il nous reste à montrer que celle ci est unique.

Unicité : En effet, si z est une autre solution dans $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ du problème de Cauchy (6.47) telle que $z(x_0) = y_0$, on a

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,$$

et en considérant (6.16), on a

$$y(x) - z(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) - f(t, z(t))dt,$$

d'où, compte tenu de (6.7)

$$|y(x) - z(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, z(t))|dt \leq K \int_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)|dt. \tag{6.17}$$

On pose

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)|dt.$$

Puisque $u'(x) = |y(x) - z(x)|$, de (6.17), on tire $u'(x) \leq Ku(x)$ et à fortiori $u'(x) \leq Ku(x) + \varepsilon$, pour tout ε assez petit. Donc

$$\frac{d}{dx} \ln(Ku(x) + \varepsilon) \leq K$$

et, en intégrant, on obtient, compte tenu de $u(x_0) = 0$,

$$0 \leq u(x) \leq \frac{\varepsilon}{K}(e^{K(x-x_0)} - 1)$$

pour tout ε positif. En faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient, $u(x) \leq 0$, et donc $u(x) = 0$, ce qui signifie que $y(x) = z(x)$. Donc la solution est unique. ∎

Remarque 6.2.3. *Sous les hypothèses du théorème 6.2.2, la suite y_n, $n \geq 1$ définies par les identités (6.10) vérifie l'inégalité*

$$|y(x) - y_n(x)| \leq MK^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{6.18}$$

Démonstration. Compte tenu de (6.16) et (6.10), on a

$$|y(x) - y_n(x)| = \Big| \int_{x_0}^{x} (f(t_1, y(t_1)) - f(t_1, y_{n-1}(t_1)))dt_1 \Big|$$
$$\leq \int_{x_0}^{x} |f(t_1, y(t_1)) - f(t_1, y_{n-1}(t_1))|dt_1$$

et grâce à (6.7)

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \ K \int_{x_0}^{x} |y(t_1) - y_{n-1}(t_1)|dt_1 \ \text{ pour tout } \ n = 1, 2, \cdots$$

donc,

$$|y(t_1) - y_{n-1}(t_1)| \leq K \int_{x_0}^{t_1} |y(t_2) - y_{n-2}(t_2)|dt_2$$

et à l'aide de l'inégalité précédente

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \; K^2 \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} |y(t_2) - y_{n-2}(t_2)| dt_2.$$

Ainsi en réitérant ce procédé, on obtient

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \; K^n \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} dt_2 \int_{x_0}^{t_2} dt_3 \cdots \int_{x_0}^{t_{n-1}} |y(t_n) - y_0| dt_n \tag{6.19}$$

où, compte tenu de (6.6)

$$|y(t_n) - y_0| = \Big| \int_{x_0}^{t_n} f(t, y(t)) dt \Big| \leq \int_{x_0}^{t_n} |f(t, y(t))| dt \leq M(t_n - x_0).$$

En intégrant successivement dans (6.19) par rapport à t_n, t_{n_1} jusqu'à t_1 on obtient l'inégalité (6.18)

Cete inégalité permet de majorer l'erreur faite en remplaçant la vraie solution y de l'équation différentielle considérée par la solution approchée y_n forunie par la méthode des approximation successives au rang n. Ceci est est utile lorsque la fonction f est trop compliquée pour qu'on puisse résoudre explicitement l'équation différentielle $y' = f(x, y)$

Remarque 6.2.4. *La démonstration du théorème 6.2.2 dans le cas général des systémes d'équations différentiels reste la même à la seule différence que dans ce cas le symbole* $|\cdot|$ *désigne la norme euclidienne de* $\mathbb{R}^n$*, c'est-à-dire que si*

$$x = (x_1, x_2, \cdots x_n), \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}$$

Le théorème 6.2.2 qui assure l'existence et l'unicité de la solution du problème de cauchy n'aide cependant pas beaucoup pour le calcul de cette solution, et généralement le calcul explicite des solutions d'une équation différentielle $y' = f(x, y)$ est impossible. Cependant il existe bon nombre d'équations de types particuliers pour lesquels l'intégration est possible à l'aide de méthode de résolution pratiques. Parmis les équations différentielles du premier ordre on distingue trois classes principales.

6.2.3 Equations à variables séparables

Ce sont les équations qu'on peut écrire sous la forme

$$y' = h(x) g(y),$$

où g est une fonction de la variable y et h une fonction de la variable x. En utilisant la notation différentielle $dy = y'dx$, l'équation s'écrit sous la forme

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x)dx$$

Soit $G(y)$ et $H(x)$ des primitives des fonctions $\frac{1}{g(y)}$ et $h(x)$, en intégrant les deux membres séparément, on obtient $G(y) = H(x) + k$, où k est tune constante. D'où

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + k) \tag{6.20}$$

pour tout $x \in I$ un intervalle où la fonction G est inversible. Mais certaines précautions doivent être prises lors de l'inversion de la fonction G, si l'on veut éviter de mauvaises surprises (voir exemple 3)

Exemple 1. Intégrer l'équation différentielle différentielle

$$y' = -\frac{2xy^2}{1+x^2}.$$

En procédant ci-dessus, on obtient

$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{2x}{1+x^2}dx.$$

En intégrant, il vient

$$\frac{1}{y} = \ln(1+x^2) + k,$$

où k est une constante. Soit

$$y(x) = \frac{1}{\ln(1+x^2)+k}.$$

Exemple 1. Intégrer l'équation

$$y' = y(y-1)(2x+1).$$

En écartant les solutions banales $y = 0$ et $y = 1$, on peut diviser les deux membres par $y(y-1)$ on obtient

$$\frac{dy}{y(y-1)} = (2x+1)$$

et en intégrant, il vient

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int (\frac{1}{(y-1)} - \frac{1}{y}) = x^2 + x + C$$

d'où
$$\ln\frac{|y-|}{|y|}=\ln\Big|\frac{y-1}{y}\Big|=x^2+x+C \quad\Longrightarrow\quad \Big|\frac{y-1}{y}\Big|=e^Ce^{x^2+x}.$$
Donc
$$\frac{y-1}{y}=\lambda e^{x^2+x}\quad \lambda=\pm e^C$$
ce qui donne
$$y(x)=\frac{1}{1-\lambda e^{x^2+x}}.$$
où λ est une quelconque constante.

Exemple 3. Déterminer la solution du problème de Cauchy

$$y'=(1+2x)\cos^2 y,\quad y(0)=\pi.$$

La solution générale de l'équation différentielle s'obtient en divisant les deux membres par $\cos^2 y$ et en intégrant
$$\mathrm{tg}(y)=x^2+x+C.$$
La constante C est déterminée en imposant la condition $y(0)=\pi$: on obtient $C=0$, et donc
$$\mathrm{tg}(y)=x^2+x.$$
À ce stade, on pourrait être tenté d'écrire $y(x)=\mathrm{arctg}(x^2+x)$ d'où $y(0)=0$ et la condition initiale ne serait pas satisfaite. Le fait est que la fonction tangente n'est pas globalement inversible , et que la fonction arctg est l'inverse de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Au lieu de cela, il faut plutôt inverser la fonction tg au voisinage du point π. Pour cela considérons la fonction $z=y-\pi$, on a $z(0)=0$

$$\mathrm{tg}(z)=\mathrm{tg}(y)=x^2+x \quad\Longrightarrow\quad z=\mathrm{arctg}(x^2+x)$$

et donc
$$y(x)=\mathrm{arctg}(x^2+x)+\pi.$$

6.2.4 Exercices

1. Intégrer les équations différentielles suivantes

$$_xy' + \sqrt{1+y^2} = 0, \quad (x+1)y' + xy = 0 \quad (1+y')e^{-y} = 1, \quad y' = 2x(y^2+2y+2)$$
$$y' = y^2 \ln x, \quad y' = ^3\sqrt{y(x+2)}, \quad xy' = (1-x^4)y, \quad y'(x^2y^2 - y^2) = 2x^2y^2 - 8x^2$$
$$y'\sqrt{1+x^2} = y'\sqrt{1+y^2}, \quad xyy' = (1+x^2)e^{-y^2}.$$

2. Intégrer l'équation différentielle

$$2y' = x(y^2 - 4)$$

Déterminer la solution vérifiant la condition $y(0) = 2$ et tracer son graphe.

Aux équations à variables séparables peuvent être réduites facilement les équations du type

$$y' = f(ax + by + c). \tag{6.21}$$

où a, $b \neq 0$ et c sont des constantes. En effet, en introduisant la nouvelle fonction inconnue

$$z = ax + by + c, \quad z' = a + by'$$

l'équation devient

$$z' = a + bf(z)$$

où bien

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx.$$

Exemples

1. Résoudre l'équation

$$y' = e^{-y-x}$$

On pose $z = x + y$ donc $z' = 1 + y'$ ainsi l'équation devient $z' = 1 + e^{-z}$ ou encore

$$\frac{dz}{1 + e^{-z}} = dx$$

En intégrant, on obtient

$$\int \frac{dz}{1 + e^{-z}} = \int \frac{e^z}{1 + e^z} dz = \int dx$$

d'où

$$\ln(1+e^z) = x + c \implies e^z = -1 + \lambda e^x, \quad \lambda = e^c$$

de sorte que

$$z = \ln(\lambda e^x - 1) \implies y(x) = -1 + \ln(\lambda e^x - 1)$$

2. Résoudre l'équation

$$y' = \frac{1}{x-y} + 1$$

En posant $x - y = z$, on a

$$1 - y' = \frac{1}{z} + 1, \quad z' = -\frac{1}{z}, \quad zdz = -dx, \quad z^2 = -2x + c, \quad z = \pm\sqrt{c - 2x}$$

d'où les solutions de l'equation considérée

$$y = x \pm \sqrt{c - 2x}$$

6.2.5 Les équations homogènes

Ce sont les équations qui s'expriment sous la forme

$$y' = f(\frac{y}{x}). \tag{6.22}$$

Ces équations se résolvent en posant $y = xz$, avec z la nouvelle fonction inconnue. Il en résulte $y' = z + xz' = f(z)$, et donc si y est une solution de l'équation (6.22), la fonction z est solution de l'équation

$$\lambda(x) + x\lambda'(x) = f(\lambda(x)).$$

Comme on peut facilement le vérifier, cette équation se ramène à l'équation à variable séparables

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}. \tag{6.23}$$

En posant,

$$F(z) = \int \frac{dz}{f(z) - z},$$

on obtient en intégrant

$$F(z) = \log|x| + c = \log|x| - \ln|\lambda| = \log|\frac{x}{\lambda}| \tag{6.24}$$

où λ est une constante, et si F est inversible alors

$$z(x) = F^{-1}(\log|\frac{x}{\lambda}|),$$

et puisque $y(x) = xz(x)$, on a

$$y(x) = xF^{-1}(\log|\frac{x}{\lambda}|),$$

.

Exemples.

1 Résoudre l'équation différentielle

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{yx}.$$

Trouver la solution $y(x)$ telle que $y(1) = 1$.

On peut écrire l'équation sous la forme

$$y' = f(\frac{y}{x}) \quad \text{avec} \quad f(z) = \frac{z^2 - 1}{z}, \quad y = xz.$$

On a

$$F(z) = \int \frac{dz}{f(z) - z} = -\int z dz = -\frac{1}{2}z^2,$$

et compte tenu de (6.24)

$$-\frac{1}{2}z^2 = \log|\frac{x}{\lambda}|$$

d'où

$$y(x) = \pm x\sqrt{-2\ln|\frac{x}{\lambda}|}.$$

Quant à la solution qui vérifie la condition $y(1) = 1$, elle est donnée par

$$y(x) = x\sqrt{1 - \frac{1}{2}\log|x|}.$$

2. Résoudre l'équation

$$y'(y - x) - (y + x) = 0$$

Comme on peut facilement le vérifier l'équation peut se mettre sous la forme

$$y' = f(\frac{y}{x}) \quad \text{avec} \quad f(z) = \frac{z + 1}{z - 1}$$

Ici

$$F(z) = \int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{1-z}{1+2z-z^2} dz = -\frac{1}{2} \ln |1+2z-z^2|,$$

et en vertu de (6.24), on a

$$-\frac{1}{2} \ln |1+2z-z^2| = \log |\frac{x}{\lambda}| \quad \Longrightarrow x^2(1+2z-z^2) = k, \quad k = \pm\lambda^2.$$

En revenant à l'inconnue $y = xz$, on obtient

$$y^2 + 2xy - x^2 = k.$$

Comme on peut le voir, dans ce cas il n'est pas possible d'inverser élémentairement la fonction F, et donc la solution sera donnée implicitement par la relation ci-dessus.

6.2.6 Exercices

Intégrer les equations differentielles suivantes

$$(x+2y) - xy' = 0, \quad (y^2 - 2xy) + x^2 y' = 0, \quad y^2 + x^2 y' = xyy', \quad 2y'\sqrt{x} = \sqrt{x+y}$$
$$y'y(y-x) - (y-x)^2 - xy = 0, \quad xy' = (\ln y - \ln x), \quad 4xyy' - (x-y)^2 = 0,$$
$$2yy' = 3\sqrt{x^2+y^2}, \quad xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y, \quad x^2 + y^2 + xyy' = 0,$$
$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2}, \quad xy' = \sqrt{x^2+y^2}, \quad y' = \frac{y(1+\ln x - \ln y)}{x(1+\ln y - \ln x)}.$$

Équations se ramenant à des équations homogènes. Elle sont du type

$$y' = f\Big(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\Big). \tag{6.25}$$

Supposant que les droites d'équations

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \tag{6.26}$$

ne sont pas parallèles et soit (x_0, y_0) leur point d'intersestion. En posant $X = x - x_0$ et $Y = y - y_0$ et en notons que

$$a_i x + b_i y + c_i = a_i X + b_i Y \quad i = 1, 2 \quad \text{et} \quad y' = Y'$$

l'équation (6.25) devient

$$Y' = f\Big(\frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}\Big)$$

et puisque

$$\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y} = \frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}$$

l'équation considérée est réduite à l'équation homogène

$$Y' = F\Big(\frac{Y}{X}\Big), \quad F(Z) = f\Big(\frac{a_1 + b_1Z}{a_2 + b_2Z}\Big).$$

Si par contre les droites d'équations (6.26) sont parallèles, donc

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_1}{b_2} = \alpha,$$

l'equation (6.25) peut être écrite :

$$y' = f\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\alpha(a_1x + b_1y) + c_2}\Big) = F(a_1x + b_1y)$$

c'est-à-dire de la forme (11.9) qu'on a déjà traité.

Exemple.

1. Intégrer l'équation

$$y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

Notons d'abord que les droites d'équations $x - y + 1 = 0$ et $x + y - 3 = 0$ se coupent au point $(1, 2)$ de sorte que, en posant $X = x - 1$ et $Y = y - 2$, on a

$$Y' = \frac{X - Y}{X + Y} = F(\frac{Y}{X}) \quad \text{avec} \quad F(Z) = \frac{1 - Z}{1 + Z} \quad \text{et} \quad Z = \frac{Y}{X}.$$

Comme $Y' = Z + XZ$, on obtient

$$Z + XZ' = \frac{1 - Z}{1 + Z} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1 + Z}{1 - 2Z - Z^2}dZ = \frac{dX}{X}$$

et en intégrant, il vient

$$-\frac{1}{2}\ln|1 - 2Z - Z^2| = \ln|X| + c = \ln|X| - \frac{1}{2}\ln\lambda \quad c = -\frac{1}{2}\ln\lambda$$

d'où

$$X^2(1 - 2Z - Z^2) = \lambda \quad \Longrightarrow X^2 - 2XY - Y^2 = \lambda$$

et enfin la solution sous forme implicite de notre équation

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = k$$

où k est une quelconque constante.

Equations homogènès de forme générale. En comparaison avec (6.22), nous considérons une équation plus générale

$$y' = x^{\alpha-1} f(\frac{y}{x^\alpha}) \quad \alpha \neq 1. \tag{6.27}$$

Elle peut être résolue au moyen de la substitution

$$y = x^\alpha z, \quad y' = \alpha x^{\alpha-1} z + x^\alpha z',$$

donc

$$\alpha x^{\alpha-1} z + x^\alpha z' = x^{\alpha-1} f(z), \quad x^\alpha z' = x^{\alpha-1}(f(z) - \alpha z)$$

d'où

$$\frac{dz}{f(z) - \alpha z} = \frac{dx}{x} \tag{6.28}$$

equation qu'on a déjà rencontrée (voir (6.23) dont la résolution est identique.

Exemple

1. Intégrer l'équation

$$xyy' - (x^4 + y^2) = 0$$

On a

$$y' = \frac{x^4 + y^2}{xy} = \frac{x^3(1 + (\frac{y}{x^2})^2)}{x^2 \frac{y}{x^2}} = x\frac{1 + (\frac{y}{x^2})^2}{\frac{y}{x^2}} = xf(\frac{y}{x^2})$$

Cette equation est un cas particulier de l'équation (6.22) avec $\alpha = 2$ et $f(z) = z + z^{-1}$. Donc

$$\frac{dz}{f(z) - \alpha z} = \frac{z}{1 - z^2} dz = \frac{dx}{x}$$

d'où

$$-\frac{1}{2} \ln |1 - z^2| = \ln |\frac{x}{\lambda}| \quad \Longrightarrow x^2(1 - z^2) = k$$

et en revenant à la variable $y = x^2 z$, on obtient

$$y = \pm x\sqrt{x^2 - k}.$$

2. Les equations du type

$$y' = ax^r + by^s$$

où a et $b \neq 0$ sont des constantes, se ramènent aux equations du type (6.22) grâce un choix opportun des exposants r et s. En effet, on peut écrire

$$y' = x^r\Big(a + b\Big(\frac{y}{x^{\frac{r}{s}}}\Big)^s\Big)$$

et en choisissant r et s de sorte que

$$r + 1 = \frac{r}{s}$$

on obtient

$$y' = x^r f\Big(\frac{y}{x^{r+1}}\Big) \quad f(z) = a + bz^s$$

equation du type (6.22) avec $\alpha = r - 2$.

Exercices.

Intégrer les équations

$$y' = \frac{2y - x - 4}{2x - y + 5}, \quad y' = \frac{x + y - 3}{y - x + 1}, \quad y' = \frac{2x + 2y - 1}{y + x - 2}, \quad y' = \frac{3x - 4y - 2}{3x - 4y - 3}$$
$$y'x^3 - y^2 = 0, \quad y'x^4 - (y^2 + x^5) \quad 3xy^2y'y^3 - 2x = 0, \quad 2y(y^2 - 3x)y' + (3y^2 - x) = 0$$

6.2.7 Equations linéaires

Ces équations sont de loin les plus importantes, car on les rencontre souvent en physique. Une équation linéaire du premier ordre est une équation de la forme

$$y' + ay = f, \tag{6.29}$$

où $a(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions définies continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Lorsque le second membre $f(x)$ est nul, on dit que l'équation différentielle linéaire (6.29) est homogène où sans second membre. Nous allons d'abord étudier le cas des équations sans second membre.

Comme on peut le constater facilement, l'équation sans second membre

$$y' + ay = 0, \tag{6.30}$$

est à variable séparables, et s'écrit sous la forme

$$\frac{dy}{y} = -adx.$$

En intégrant, on obtient

$$\ln |y(x)| = -\int a(x)dx + C,$$

où C est une constante d'intégration. D'où

$$y(x) = \lambda e^{-A(x)}, \quad A(x) = \int a(x)dx$$

avec une constante arbiraire λ. Donc toutes les solutions de l'équations (6.30) sont de la forme

$$y(x) = \lambda y_0(x), \quad y_0(x) = e^{-A(x)}.$$

Ce résultat montre que l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est un espace vectoriel de dimension 1. On revient maintenant à l'équation avec second membre (6.29). Soit $z(x)$ une solution particulière de l'équation (6.29), donc

$$z' + az = f.$$

Alors toute solution y de (6.29) s'écrit sous la forme

$$y(x) = \lambda e^{-A(x)} + z(x). \tag{6.31}$$

En effet, si y est une solution de (6.29), alors $y - z$ vérifie l'équation sans second membre (6.30), donc

$$y - z = \lambda e^{-A(x)}.$$

D'où (6.31).

Exemple. Intégrer l'équation différentielle

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}. \tag{6.32}$$

On a

$$A(x) = \int a(x)dx = -\int \frac{x}{1+x^2}dx = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Et donc la solution y de l'équation sans second membre est $y(x) = \lambda\sqrt{1+x^2}$. Il est facile de noter que $z(x) = x$ est une solution particulière de (6.32), et donc toutes les solutions de l'équation (6.32) s'expriment par

$$y(x) = \lambda\sqrt{1+x^2} + x.$$

Dans le cas où la détermination de la solution particulière n'est pas immédiate, on utilise la méthode dite de variation de la constante.

Méthode de la variation de la constante. On déterminera (si elles existent) des solutions de l'équation avec second membre (6.29) sous la forme

$$z(x) = \lambda(x)y_0(x), \quad y_0(x) = e^{-A(x)}$$

dans la quelle λ est une fonction dérivable de la variable x (et non plus une constante arbitraire). On a alors

$$z'(x) = \lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)y_0'(x) = \lambda'(x)y_0(x) - \lambda(x)a(x)y_0(x)$$
$$z' + a(x)z = \lambda'(x)a(x)y_0(x) = f(x),$$

d'où

$$\lambda'(x) = \frac{f(x)}{a(x)y_0(x)} = \frac{f(x)}{a(x)}e^{A(x)},$$

et en intégrant, on obtient

$$\lambda(x) = u(x) + C, \quad u(x) = \int \frac{f(x)}{a(x)y_0(x)}dx.$$

On pose

$$z(x) = y_0(x)u(x) = e^{-A(x)}u(x), \tag{6.33}$$

on obtient ainsi une solution particulière de l'équation avec second membre (6.29).

Exemple Soit l'équation différentielle

$$y' + \frac{\sin x}{\cos x}y = \frac{1}{\cos x}. \tag{6.34}$$

L'équation sans second membre peut s'écrire

$$\frac{dy}{y} = -\frac{\sin x}{\cos x}dx,$$

d'où

$$y(x) = \lambda y_0(x), \quad y_0(x) = \cos x.$$

Ici

$$u(x) = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \mathrm{tg} x,$$

donc la solution particulière

$$z(x) = y_0(x)u(x) = (\cos x)\mathrm{tg}x = \sin x,$$

et la solution générale de l'équation (6.34) est :

$$y(x) = \lambda \cos x + \sin x.$$

Remarque 6.2.5. *Dans le cas particulier où sont connues deux solutions particulières z_1 et z_2 de l'équation (6.29), vérifier que toute solution de (6.29) est donnée par*

$$y(x) = \lambda(z_1(x) - z_2(x)) + z_1(x).$$

Remarque 6.2.6. *Si*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \tag{6.35}$$

vérifier que toute solution de l'équation (6.29, s'écrit sous la forme

$$y(x) = \lambda e^{-A(x)} + \sum_{k=1}^{n} z_k(x),$$

où z_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ est une solution particulière de chacune des équations

$$y' + ay = f_k.$$

Exercice. Résoudre les équations suivantes

$$(1 + x^2)y' - 2xy = 0, \quad y' = xe^{x-y} \quad y' + y^2 + 1 = 0$$
$$(1 + x^2)y' + 2xy = 2x^{-3}, \quad xy' - y = -2/x - \ln x.$$

6.3 Application à la physique

6.3.1 Croissance d'une population

Considérons à l'instant t une population d'effectif $N = N(t)$. Pour décrire au cours du temps l'évolution de la population, on considére les deux modèles suivants.

Modèle Malthus. Dans ce cas, on suppose, en première approximation, que *l'accroissement à chaque instant t de la population est proportionnel à sa valeur à cet instant*. Autrement dit, si on désigne par $N(t)$ le nombre de la population à l'instant t et par $\Delta N(t)$ l'ccroissement de la population dans l'intervalle de temps $[t, t+\Delta t]$, par hypothèse, on a

$$\Delta N = N(t + \Delta t) - N(\Delta t) = kN(t)\Delta t,$$

où le taux d'accroisement k de la population est supposé constant dans ce cas. Si Δt est sensiblement petit, on peut écrire l'équation différentielle

$$N'(t) = kN(t). \tag{6.36}$$

En séparant les variables et en intégrant, on trouve

$$N(t) = \lambda e^{kt},$$

c'est une croissance exponentielle. Si à l'instant initiale $t = 0$ on connait l'effectif N_0 de la population, c'est-à-dire

$$N(0) = N_0, \tag{6.37}$$

alors l'effectif $N(t)$ de la population à l'instant t, est donné par

$$N(t) = N_0 e^{kt}, \tag{6.38}$$

Application. *Supposons que, à $t = 0$ l'effectif de la population est de N_0. Si la population est doublée en 50 ans, dans combien de temps sera-t-elle triplée, sachant que la vitesse d'accroissement est proportionnelle au nombre d'habitants ?*

La croissance de N est exponentielle, on a $N(t) = N_0 e^{kt}$. Puisque la population est doublée en 50 ans, à l'instant $t_0 = 50$ on a alors $N(t_0) = 2N_0 = N_0 e^{50k}$ ou $e^{50k} = 2$, c'est-à dire $k = \dfrac{1}{50} \ln 2$. D'autre part, si au bout d'un temps t_1, la population est triplée, on doit avoir $N(t_1) = N_0 e^{kt_1} = 3N_0$; donc $e^{kt_1} = 3$. Ainsi

$$t_1 = \frac{1}{k} \ln 3 = 50 \frac{\ln 3}{\ln 2} = 50 \frac{0,476}{0,3} = 79.$$

Le temps cherché est égal à 79 ans.

Modèle de Verhulst. L'expérience montre que le taux de croissance k n'est, en général, pas constant. Il dépend de l'effectif $N(t)$ de la population. Le modèle le plus simple est une fonction affine, que l'expérience conduit à choisir décroissante. C'est la loi de Verhulst. On pose alors

$$k = k(N) = a(b - N),$$

où a et b sont des constantes positives. Dans ce cas l'équation (10.27) devient

$$N'(t) = a(b - N(t))N(t). \tag{6.39}$$

En écartant les solutions constantes $N(t) = 0$ et $N(t) = b$ pour tout $t \geq 0$, on peur écrire cette équation sous la forme

$$\frac{dN}{(b - N)N} = adt,$$

ou encore

$$(\frac{1}{N} - \frac{1}{b - N})dN = abdt,$$

En intégrant, on obtient

$$\ln|\frac{N}{N - b}| = abt + C,$$

où C est une constante arbitraire. Nous en déduisons que

$$\frac{N}{N - b} = \lambda e^{abt}, \quad \lambda = \pm e^C.$$

Soit

$$N(t) = \frac{\lambda b}{\lambda - e^{-abt}}.$$

Si à l'instant initial $t = 0$, on connait l'effectif N_0 de la population, c'est-à-dire $N(0) = N_0$, alors l'effectif $N(t)$, à l'instant t, de la population est

$$N(t) = \frac{bN_0}{N_0 - (N_0 - b)e^{-abt}}. \tag{6.40}$$

Si $N_0 < b$, la fonction $N(t)$ est alors définie pour tout $t \in [0, \infty[$, elle est croissante et tend vers b lorsque $t \to +\infty$. Cette condition n'est pas restrictive, voir naturelle, car à l'instant initial $t = 0$, les ressouces du milieu sont assez grand relativement è l'effectif initial N_0 de la population.

6.3.2 Chute d'un corps dans l'air

. Soit un corps qu'on assimile à un point matériel de masse m soumis à l'accélération g de la pesanteur et à la force de résistence de l'air. On distinguera deux cas, le premier correspond aux faibles vitesses.

Cas 1. On suppose que la résistence de l'air R au mouvement est proportionnelle à la vitesse v, c'est-à-dire, $R = \mu v$, où μ est une constante ne dépendant que de la forme du corps. L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$mv' = mg - \mu v,$$

ou

$$v' + \frac{\mu}{m}v = g,$$

équation différentielle linéaire à coefficient constant et à second membre constant. En séparant les variables, on obtient

$$\frac{dv}{g - \nu v} = dt, \quad \nu = \frac{\mu}{m}.$$

En intégrant, on obtient

$$v(t) = \frac{1}{\nu}(g - ke^{-\nu t}), \quad \nu = \frac{\mu}{m}$$

où k est une constante arbitraire qui sera déterminer par la donnée de vitesse à l'instant initial $t = 0$. Si nous supposons $v(0) = 0$, nous voyons que $k = g$; et donc

$$v(t) = \frac{mg}{\mu}(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}).$$

Lorsque t tend vers l'infini, l'exponentielle tend vers zéro, et la vitesse v tend vers sa valeur limite égale à $\frac{mg}{\mu}$. Exprimons maintenant l'espace parcouru x en fonction du temps. Puisque $x' = v$, donc

$$x(t) = \int v(t)dt = \frac{mg}{\mu}\int(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t})dt + C,$$

soit encore

$$x(t) = \frac{mg}{\mu}(1 + \frac{m}{\mu}e^{-\frac{\mu}{m}t}) + C.$$

Si nous supposons que l'origine des abscisses est la position initiale, c'est-à-dire $x(0) = 0$, on obtient

$$c = -\frac{mg^2}{\mu^2},$$

et donc

$$x(t) = \frac{mg}{\mu}t - \frac{mg^2}{\mu^2}(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}).$$

Si t est asez grand, $x \simeq \dfrac{mg}{\mu}t$, le movement tend à devenir uniforme, de vitesse $\dfrac{mg}{\mu}$.

Cas 2. La résistence R est proportionnelle au carré de la vitesse v, c'est-à-dire, $R = \mu v^2$ avec une constante μ positive. Dans ce cas l'équation du mouvement s'écrit

$$v' + \frac{\mu}{m}v^2 = g.$$

On pose $a^2 = \dfrac{\mu}{mg}$. Alors

$$\frac{dv}{dt} = g(1 - a^2 v)$$

et en séparant les variables, on obtient

$$\frac{dv}{1 - a^2 v} = gdt.$$

En intégrant, il vient

$$\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1+av}{1-av}\right| = gt + C.$$

On suppose que $v(0) = 0$ en sorte que la constante d'intégration C soit nulle. D'où la solution

$$v(t) = \sqrt{\frac{m}{\mu}}\frac{e^{2t\sqrt{\frac{\mu g}{m}}} - 1}{e^{2t\sqrt{\frac{\mu g}{m}}} - 1}.$$

Déterminer l'espace parcouru x sachant que $x(0) = 0$.

6.3.3 Variation de la pression atmosphérique

Soit P la pression de l'air à l'altitude h comptée au-dessus du niveau de la mer. L'équation différentielle de l'hydrostatique permet d'écrire

$$dP + g\varrho dh = 0, \tag{6.41}$$

où ϱ est la densité de l'air à la pression P et à la température absolue T, et g l'accélération de la pesanteur. Considérons l'air comme un gar parfait, alors

$$PV = \frac{P}{\varrho} = RT,$$

et l'equation (6.41) s'écrit sous la forme

$$dP + g\frac{P}{RT}dh = 0. \tag{6.42}$$

Supposons que la température T soit constante (cas isotherme), c'est-à-dire $T = \bar{T}$ constante. Dans ce cas l'équation (6.42) donne

$$dP = \frac{g}{R\bar{T}}Pdh,$$

et en séparant les variables

$$\frac{dP}{P} = \frac{g}{R\bar{T}}dh. \tag{6.43}$$

En intégrant, on obtient

$$P = Ce^{-kh}, \quad k = \frac{g}{R\bar{T}}$$

avec une constante C. Si P_0 est la pression au niveau de la mer $h = 0$, alors

$$P = P_0 e^{-kh}.$$

6.4 Equations différentielles ordinaires du second ordre

Une équation différentielle du second ordre est une équation de la forme

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{6.44}$$

où l'inconnue $y = y(x)$ est une fonction de la variable réelle x, y' et y'' ses dérivées premières et secondes et f une fonction définie continue sur une partie Ω de $\mathbb{R}^3$.
Si on pose

$$Y(x) = (y(x), z(x)), \quad F(x, Y(x)) = (z(x), f(x, Y(x))),$$

alors l'équation (6.44) est équivalente au système d'équations différentiel du premier ordre

$$Y' = F(x, Y).$$

Compte tenu du thèorème 6.2.2 et de la remarque 6.2.4, l'équation (6.44) admet une est une seule solution locale correspondante aux données initiale

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,$$

La résolution effective d'une équation différentielle est en général un problème difficile, qui n'admet que rarement une solution explicite en termes de fonctions simples. Il faut bien souvent recourir à des approximations numériques ou analytiques. Dans la suite, nous nous bornerons à considérer des cas suffisamment simples pour être complètement solubles et en même temps suffisamment intéressants pour la physique. Nous distinguerons deux classes principales d'équations différentielles du second ordre.

6.5 Les équations incomplètes

Elles sont de la forme

$$y'' = f(x, y').$$

En posant $y' = z$, l'équation devient une équation du premier ordre en l'inconnue z, c'est-à-dire

$$z' = f(x, z).$$

Exercices Résoudre les équations incomplètes suivantes

$$(1+x^2)y'' - 2xy' = 0, \quad y'' = xe^{x-y'} \quad y'' + y'^2 + 1 = 0$$
$$(1+x^2)y'' + 2xy' = 2x^{-3}, \quad xy'' - y' = -\frac{2}{x} - \ln x, \quad y''' + y'' = x^2.$$

6.6 Les équations linéaires à coefficients constants .

Elles sont de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{6.45}$$

où a, b, c sont des constantes réelles et f est une fonction continue donnée. Ces équations sont d'une grande importance en physique car elle régissent de nombreux phénomènes physiques (chute des corps avec résistence, mouvement amorti d'un solide autour d'un axe, propagation de la chaleur le long d'une barre,...).

6.6.1 Equations linéaires sans second membre.

Nous commençons par étudier le cas des équations différentielles dont le second membre $f = 0$, c'est-à-dire les équations

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{6.46}$$

avec $a \neq 0$. Nous chercherons une solution de (6.46) sous la forme

$$y(x) = e^{rx},$$

où r est un nombre complexe. En effet, si $y = e^{rx}$, on a $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2 e^{rx}$. Par conséquent, si une telle fonction est solution de l'équation (6.46), on a

$$ay'' + by' + cy = e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0,$$

et comme e^{rx} ne s'annule pas, il faut et il suffit que $ar^2 + br + c = 0$. Autrement dit, r doit être une racine du polynôme caractéristique

$$P(r) = ar^2 + br + c. \tag{6.47}$$

On sait que le polynôme caractéristique $P(r)$ admet toujours au moins une racine sur le corps des nombres complexes. On distinguera trois cas, selon que $P(r)$ admette deux racines réelles distinctes, une racine double réelle ou deux racines complexes conjuguées.

1. Cas de deux racines réelles dinstinctes. Soitent r_1 et r_2 ces racines. On montrera que toutes les solutions de l'équation homogène (6.46) sont de la forme

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \tag{6.48}$$

avec λ et μ deux constantes réelles.

En effet, soit y une solution de l'équation (6.46). On pose $z = e^{-r_1 x} y$ et donc $y = e^{r_1 x} z$. On a $y' = e^{r_1 x}(r_1 z + z')$, $y'' = e^{r_1 x}(r_1^2 z + 2r_1 z' + z'')$. il vient en reportant dans l'équation (6.46)

$$az'' + (2ar_1 + b)z' = 0.$$

Comme r_1 et r_2 sont racine du polynôme (6.47), on a $r_1 + r_2 = -b/a$, et donc

$$2ar_1 + b = a(2r_1 + \frac{b}{a}) = a(2r_1 - (r_1 + r_2)) = a(r_1 - r_2),$$

et

$$z'' + (r_1 - r_2)z' = 0.$$

D'où $z' = Ce^{(r_1-r_2)x}$ où C est une constante, et donc

$$z = \lambda + \mu e^{(r_1-r_2)x}, \quad \mu = \frac{C}{r_1 - r_2}.$$

Puisque $y = e^{r_1 x} z$, la formule (6.48) s'en déduit facilement.

exemple. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 5y' + 4y = 0.$$

Le polynôme caractéristique $r^2 - 5r + 4$, possède deux racines $r_1 = 1$ et $r_2 = 4$. Les solutions sont donc de la forme

$$y(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{4x}.$$

2. Cas d'une racine double. Dans ce cas toutes les solutions de l'équation (2) sont de la forme

$$y(x) = e^{rx}(\lambda x + \mu), \tag{6.49}$$

où r est la racine double du polynôme caractéristique (6.47). En effet, en reprenant le calcul développé ci-dessus, on arrive à montrer que toutes les solutions de l'équation (6.46) sont données par la formule (6.49).

Exemple. soit l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Dans ce cas le polynôme caractéristique $r^2 + 4r + 4$ admet une racine double $r = -2$, et donc les solutions de (6.46) sont de la forme

$$y(x) = e^{-2x}(\lambda x + \mu).$$

3. Cas de deux racines complexes conjuguées. C'est le cas où

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

Les racines du polynôme caractéristique sont

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

On pose

$$p = -\frac{b}{2a}, \quad q = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Alors toutes les solutions réelles de l'équation (6.46) sont de la forme

$$y(x) = e^{px}(\lambda \cos(qx) + \mu \sin(qx))$$

avec deux constantes λ et μ réelles ou encore

$$y(x) = Ae^{px} \sin(qx + \varphi)$$

avec

$$A = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{\mu}{\lambda}.$$

Exemple. Résoudre l'équation

$$y'' - 2y' + 3y = 0.$$

Les racines du polynôme caractéristique sont $r_1 = 1 + i\sqrt{2}$ et $r_2 = 1 - i\sqrt{2}$, et donc les solutions sont

$$y(x) = e^x(\lambda \cos(x\sqrt{2}) + \mu \sin(x\sqrt{2})).$$

Exercice. Résoudre les equations linéaires à coefficients constants

$$2y'' - 5y' - y = 0, \quad y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y'' + 6y' + 9y = 0,$$
$$2y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y'' + 2y' + 3y = 0.$$
$$y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0, \quad y'''' + 6y''' + 5y'' - 24y' - 36y = 0,$$
$$y'''' + y''' + 2y'' + 3y = 0.$$

6.6.2 Equations différentielles linéaires avec second membre

Comme dans le cas des équations différentielles linéaires du premier ordre et, plus généralement, de toutes les équations linéaires, on obtient les solutions de l'equation avec second membre (6.45) en ajoutant à la solution générale de l'équation homogème (6.46) une solution particulière de l'équation non homogène (6.45). Autrement dit, si $z(x)$ est une solution particulière de (6.45), alors la solution générale $y(x)$ de l'équation (6.45) s'écrit sous la forme

$$y(x) = y_0(x) + z(x)$$

où $y_0(x)$ est la solution générale de (6.46) qui dépend de deux constantes λ et μ et $z(x)$ est la solution particulière qui ne dépend que de la force extérieure. Pour déterminer ces constantes il faut connaître la position et la vitesse au point $x = x_0$, c'est-à-dire

$$y(x_0) = p_0 \quad y'(x_0) = v_0. \tag{6.50}$$

On appelle problème de Cauchy l'équation (6.45) avec les conditions initiales (6.50). Nous commencerons par étudier le cas où la force extérieure est de la forme

$$f(x) = Q(x)e^{mx} \tag{6.51}$$

où m est un nombre complexe et Q une fonction polynomiale.

Remarque. Notons que la forme (6.51) contient les cas trois cas suivants

1) le second membre f est constant,
2) le second membre f est une fonction polynomiale,
3) le second membre f est une fonction exponentielle.

En effet, le cas 1) correspond à $m = 0$ et Q un polynôme constant, le second cas à $m = 0$ et le troisième cas à Q constant et $m \neq 0$.

On cherchera maintenant une solution particulière $z(x)$ de l'équation (6.45) dans le cas où $f(x)$ est de la forme (6.51). Il existe dans ce cas une solution particulière $z(x)$ de l'équation (6.45) de la forme

$$z(x) = R(x)e^{mx},$$

où $R(x)$ est un polynôme de degré $d(R)$ donné par

$$d(R) = \begin{cases} d(Q) & \text{si } m \text{ n'est pas racine du polyñome caractéristique} \\ d(Q)+1 & \text{si } m \text{ est racine simple du polyñome caractéristique} \\ d(Q)+2 & \text{si } m \text{ est racine double du polyñome caractéristique} \end{cases} \tag{6.52}$$

Exemple. Résoudre le problème de Cauchy

$$y'' - 2y' - y = -3 \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

L'équation sans second membre associée est

$$y'' - 2y' - y = 0.$$

Le polynome caractéristique $r^2 - 2r - 1$ admet deux racines distinctes $r_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $r_2 = 1 - \sqrt{2}$. La solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_0(x) = \lambda e^{(1+\sqrt{2})x} + \mu e^{(1-\sqrt{2})x}.$$

Ici le second membre $f(x) = -3$ est constant, on cherchera donc une solution particulière $z(x)$ constante. On vérifie facilement que $z(x) = 1$ est une solution particulière, et donc la solution générale de notre équation est donnée par

$$y(x) = \lambda e^{(1+\sqrt{2})x} + \mu e^{(1-\sqrt{2})x} + 1.$$

Il nous reste à déterminer les constantes λ et μ. En effet, on a $y(0) = 0 = \lambda + \mu + 1$, et si on dérive la solution, on obtient $y'(0) = 0 = (1 + \sqrt{2})\lambda + (1 - \sqrt{2})\mu = 0$. On trouve alors $\lambda = -\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$ et $\mu = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$, et l'unique solution du problème de Cauchy est

$$y(x) = -\frac{3+\sqrt{2}}{2}e^{(1+\sqrt{2})x} + \frac{1+\sqrt{2}}{2}e^{(1-\sqrt{2})x} + 1.$$

Exemple Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy

$$2y'' - y' - 6y = 6x^2 - 4x + 1 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

L'équation sans second membre $2y'' - y' - 6y = 0$ a pour polynôme caractéristique $2r^2 - r - 6$. Ses racines sont $r_1 = 2$ et $r_2 = -\dfrac{3}{2}$, et donc la solution générale de l'équation sans second membre est $y_0(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{-\frac{3}{2}x}$. Le second membre $f(x)$ est de la forme (6.51) avec $m = 0$ et $Q(x) = 6x^2 - 4x + 1$. Comme $m = 0$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, nous chercherons donc la solution particulière (voir (6.52)) de la forme $z(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. D'où $z'(x) = 2\alpha x + \beta$ et $z''(x) = 2\alpha$. En remplaçant ces expressions dans l'équation, on trouve

$$4\alpha - (2\alpha x + \beta) - 6(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 6x^2 - 4x + 1.$$

En identifiant, il vient

$$-6\alpha = 6, \quad 2\alpha + 6\beta = 4, \quad 4\alpha - \beta - 6\gamma = 1.$$

Ce qui nous donne $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et $\gamma = -1$. Finalement la solution générale de l'équation est

$$y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{-\frac{3}{2}x} - x^2 + x - 1.$$

En utilisant les conditions initiales, déterminer les constantes λ et μ et écrire la solution du problème de Cauchy.

Exemple. Résoudre l'équation

$$y'' - y' = 3x^2 + 2x - 4.$$

L'équation sans second membre a pour polynôme caractéristique $r^2 - r$ dont les racines sont $r_1 = 0$ et $r_2 = 1$. La solution de l'équation sans second membre est donc

$$y_0(x) = \lambda + \mu e^x.$$

Dans ce cas, le second membre $f(x) = e^{mx}Q(x)$ avec $m = 0$ et $Q(x) = 3x^2 + 2x - 4$. Comme $m = 0$ est racine simple du polynôme caractéristique, on cherchera donc une solution particulière z sous la forme d'un polynôme de degré $3 = 1 + 2$ (voir (6.52)). On pose alors $z(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \vartheta$. On alors $z'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ et $z''(x) = 6\alpha x + 2\beta$ et en remplaçant dans l'équation, on obtient

$$6\alpha x + 2\beta - (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma) = 3x^2 + 2x - 4.$$

D'où

$$-3\alpha = 3, \quad 6\alpha - 2\beta = 2, \quad 2\beta - \gamma = -4,$$

et donc $\alpha = -1$, $\beta = \gamma = -4$ et ϑ est quelconque qu'on peut choisir nul. Ainsi, la solution générale avec second membre est

$$y(x) = \lambda + \mu e^x - x^3 - 4x^2 - 4.$$

Expemle. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 13y = (5x + 9)e^x.$$

L'équation du second membre a pour polynôme caractéristique $r^2 - 4r + 13$ dont les racines complexes sont $r_1 = 2 + 3i$ et $r_2 = 2 - 3i$. Donc la solution générale de l'équation sans second membre est de la forme

$$y_0(x) = e^{2x}(\lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x)).$$

Comme $m = 1$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, on peut chercher une solution particulière z de la forme $z(x) = (\alpha x + \beta)e^x$. On alors $z'(x) = (\alpha x + \alpha + \beta)e^x$ et $z''(x) = (\alpha x + 2\alpha + \beta)e^x$. D'où

$$e^x(\alpha x + 2\alpha + \beta) - 4e^x(\alpha x + \alpha + \beta) + 13e^x(\alpha x + \beta) = (5x + 9)e^x,$$

et en identifiant, il vient $10\alpha = 5$ et $-2\alpha + 10\beta = 9$, ce qui donne $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 1$. Par conséquent, la solution générale de l'équation avec second membre est donnée par

$$y(x) = e^{2x}(\lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x)) + (\frac{1}{2}x + 1)e^x.$$

Exemple. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 7y' + 12y = 2e^{3x}.$$

La solution générale de l'équation sans second membre est de la forme

$$y_0(x) = \lambda e^{3x} + \mu e^{4x}.$$

Ici, $m = 3$ est racine simple du polynôme caractéristique. On cherchera donc une solution particulière sous la forme $z(x) = (\alpha x + \beta)e^{3x}$. On a alors $z'(x) = (3\alpha x + \alpha + 3\beta)e^{3x}$ et $z''(x) = (9\alpha x + 6\alpha + 9\beta)e^x$. En remplaçant les expressions de z, z' et z'' dans l'équation on trouve $\alpha = -2$ et β quelconque par exemple $\beta = 0$. Donc la solution générale de notre équation est de la forme

$$y(x) = (\lambda - 2x)e^{3x} + \mu e^{4x}.$$

Notons que le terme βe^{3x} s'élimine des calculs, car il s'agit d'une solution de l'équation sans second membre. On pourra donc cherche une solution particulière sous la forme $z(x) = \alpha x e^{3x}$ au lieu de $z(x) = (\alpha x + \beta)e^{3x}$.

Exemple. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x}.$$

Dans ce cas le polyôme caractéristique admet $r = -1$ pour racine double. On doit donc chercher une solution particulière de la forme $z(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Si on remarque que $(\beta x + \gamma)e^{-x}$ est une solution de l'équation sans second membre, il suffit alors de chercher une solution particulière de la forme $z(x) = \alpha x^2 e^{-x}$, car les coefficients β et γ s'éliminerons des calculs. D'où $z'(x) = \alpha(-x^2 + 2x)e^{-x}$, $z''(x) = \alpha(x^2 - 4x + 2)e^{-x}$. En remplaçant ces expressions dans l'équation, on obtient

$$\alpha(x^2 - 4x + 2)e^{-x} + 2\alpha(-x^2 + 2x)e^{-x} + \alpha x^2 e^{-x} = 2e^{-x},$$

ce qui nous donne $\alpha = 1$. Ainsi, la solution générale de notre équation est donnée par

$$y(x) = e^{-x}(x^2 + \lambda x + \mu).$$

Nous examinerons maintenant le cas où le second membre f est de la forme

$$f(x) = e^{mx}(Q(x)\cos(px) + K(x)\sin(px)), \tag{6.53}$$

où $Q(x)$, $K(x)$ sont des polynômes et m, p des nombres réels donnés. Dans ce cas on cherchera une solution particulière de l'équation (6.45) de la même forme que f. Soit alors

$$z(x) = e^{mx}(Q_1(x)\cos(px) + K_1(x)\sin(px)),$$

où $Q_1(x)$ et $K_1(x)$ sont des polynônes de même dégré d donné par

$$d = \begin{cases} \max(d(Q), d(K)) & \text{si } m \pm ip \text{ ne sont pas racines du polynôme caractéristique} \\ \max(d(Q), d(K)) + 1 & \text{si } m \pm ip \text{ sont racines du polynôme caractéristique.} \end{cases}$$

Exemple. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y' - 2y = 2\cos x.$$

Le polynôme caractéristique est $r^2 + r - 2$ dont les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -2$. La solution générale de l'équation sans second membre est $y_0(x) = \lambda e^x + \mu e^{-2x}$. Pour trouver une solution particulière, notons que le second membre $f(x) = 2\cos x$ est de la forme (6.53) avec $m = 0, p = 1$, $Q(x) = 2$ et $K(x) = 0$. Puisque $m \pm ip = \pm i$ ne sont pas racines du ploynôme caractéristique, on cherchera une solution particulière de la forme $z(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$. On alors $z'(x) = -\alpha\sin x + \beta\cos x$ et $z''(x) = -\alpha\cos x - \beta\sin x$, et en remplaçant dans l'équation, il vient

$$-\alpha\cos x - \beta\sin x + (-\alpha\sin x + \beta\cos x) - 2(\alpha\cos x + \beta\sin x) = 2\cos x.$$

En identifiant, on obtient

$$-3\alpha + \beta = 2, \quad -3\beta - \alpha = 0,$$

et donc $\alpha = -\frac{3}{5}$ et $\beta = -\frac{1}{5}$, et $z(x) = -\frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$. Ainsi, la solution générale de notre équation est donnée par

$$y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-2x} - \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

Expemle. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y = \sin(2x).$$

Cet exemple se traite comme le précédent. La solution sans second membre est donnée par $y_0(x) = \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)$. Puisque $\pm 2i$ sont racines du polynôme caractéristique, on cherchera donc une solution particulière de la forme $z(x) = (\alpha x + \beta)\cos(2x) + (\gamma x + \delta)\sin(2x)$. On trouvera (faites les calculs) $\alpha = -\frac{1}{4}$, $\gamma = 0$ et β et δ sont quelconques qu'on peut choisir nuls. Donc $z(x) = -\frac{1}{4}x\cos(2x)$. Ainsi la solution de l'équation avec second membre est donnée par

$$y(x) = \Big(-\frac{1}{4}x + \lambda\Big)\cos(2x) + \mu\sin(2x)$$

où λ et μ sont des constantes.

Exercice. Résoudre les équations linéaires à coefficients constants

$$2y'' - 5y' - y = x^2 + 2x - 1, \quad y'' - 5y' + 6y = (x+1)e^{-x},$$
$$y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x},$$
$$2y'' - 2y' + 5y = (1-2x)e^{-x}, \quad y'' + 2y' + 3y = (x^2+1)e^{3x}$$
$$2y'' + y' - 1 = \cos x + \sin x, \quad y'' + y = \cos x - \sin x.$$

Remarque. Si

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \tag{6.54}$$

vérifier que toute solution de l'équation

$$ay'' + by' + cy = f$$

s'écrit sous la forme

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{k=1}^{n} z_k(x),$$

où z_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ est une solution particulière de chacune des équations

$$ay'' + by' + cy = f_k.$$

Exercice. Résoudre les équations suivantes

$$y''(x) - 4y(x) = 3xe^x + \cos x + \sin x, \qquad y'' - 5y' + 6y = (x+1)e^{-x} + \cos(2x)$$
$$y'' + y = xe^{2x} + \cos x - \sin x.$$

6.7 Applications - phénomènes oscillatoires.

Oscillations libres. On appliquera cette théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants à l'étude des phénomènes oscillatoires.
On commencera par l'étude des oscillations verticales autour de la position d'équilibre d'un corps de masse m suspendu à un ressort. Il est bien entendu que dans cette position d'équilibre le poids du corps et la réaction du ressort s'équilibrent.

Soit $x(t)$ la distance verticale séparant le corps de sa position d'équlibre (faites un schéma). On suppose que le mouvement s'effectue dans un milieu dont la résistence R_1 est proportionnelle à la vitesse, c'est-à-dire $R_1 = -\beta x'$ avec une constante $\beta > 0$. On suppose aussi que la réaction R_2 du ressort tendant à ramener le corps à sa postion d'équilibre est proportionnelle à la distance x du corps de sa postion d'équilibre, c'est-à-dire $R_2 = -\alpha x$ avec une constante positive α. La loi fondamentale de Newton nous donne l'équation du mouvement

$$mx'' = R_1 + R_2 = -\beta x' - \alpha x.$$

Donc

$$x'' + 2\nu x' + \mu^2 x = 0 \tag{6.55}$$

où $\nu = \dfrac{\beta}{2m}$ est le coefficient de résistance au mouvement et $\mu = \sqrt{\dfrac{\alpha}{m}}$ est le coefficient de réaction au mouvement.
Comme second exemple, on considére le mouvement libre d'un pendule simple de longueur l, dans un milieu de résistance proportionnelle à la vitese. De la même manière, on montre

que l'equation du mouvement sera donnée par

$$ml\vartheta'' + \beta\vartheta' + mg\sin\vartheta = 0, \tag{6.56}$$

où ϑ est l'angle du pendule par rapport à sa position d'équilibre. Dans le cas de petites oscillations du pendule autour de sa position d'équilibre, on peut remplacer $\sin\vartheta$ par ϑ ($\sin\vartheta \simeq \vartheta$ si ϑ est assez peiti). Dans ce cas l'équation (6.56) devient

$$\vartheta'' + 2\nu\vartheta' + \mu^2\vartheta = 0 \tag{6.57}$$

où $\nu = \dfrac{\beta}{2ml}$, $\mu = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$.
On considére maintenant l'équation homogène (6.55) dont la solution détermine les oscillations libres

Oscillations libres amorties. Dans la plupart des cas le coefficient de résistance ν est petit devant le coefficient de réaction μ, c'est-à-dire $\nu < \mu$. Dans ce cas $\nu^2 - \mu^2 = -k^2 < 0$ et le polynôme caractérisque

$$r^2 + 2\nu r + \mu^2 = 0 \tag{6.58}$$

admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = -\nu + ik$ et $r_2 = -\nu - ik$. La solution générale de l'équation (6.55) est donnée par

$$x_0(t) = e^{-\nu t}(C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt)) \tag{6.59}$$

avec deux constantes réelles C_1 et C_2. On pose $C_1 = A\cos\psi$ et $C_2 = A\sin\psi$ et on met la solution (6.59) à sous la forme :

$$x_0(t) = Ae^{-\nu t}\sin(kt + \psi) \tag{6.60}$$

ou bien, en posant $k = \dfrac{2\pi}{T}$,

$$x_0(t) = Ae^{-\nu t}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \psi\right). \tag{6.61}$$

Ici T est la période des oscillations libres, A leur amplitude initiale et ψ leur phase initiale. Si on néglige la résistance du milieu, et donc $\nu = 0$, le polynôme caratéristique (6.58) admettra les racines $r = \pm ik$, et au lieu de (6.60) on obtiendra

$$x_0(t) = A\sin(kt + \psi). \tag{6.62}$$

On aura un mouvement sinusoïdale de période $T = \dfrac{2\pi}{k}$. La formule (6.61) donne la vibration amortie et le facteur $e^{-\nu t}$ caractérise la vitesse de l'amortissement. Dans un intervalle de temps égal à une période, l'amplitude diminue dans un rapport de $e^{-\nu T}$. Les valeurs des constantes C_1 et C_2 dans la formule (6.59) ou, ce qui revient au même, des constantes A et ψ dans la formule (6.60) dépendent des conditions initiales. Si à $t = 0$ on se donne la position intiale et la vitesse intiales, c'est-à-dire

$$x(0) = p_0, \quad x'(0) = v_0 \tag{6.63}$$

un calcul simple nous donne

$$C_1 = p_0, \quad C_2 = \frac{v_0 + \nu p_0}{k},$$

et la solution de l'équation (6.55) avec les conditions initiales (6.63) est donnée par la formule

$$x_0(t) = e^{-\nu t}(p_0 \cos(kt) + \frac{v_0 + \nu p_0}{k} \sin(kt)). \tag{6.64}$$

On remarque que, dans la solution (6.64), le coefficient d'amortissement ν et la fréquence des vibrations $k = \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ sont déterminées par les coefficients de l'équation (6.55). Quant à l'amplitude A et la pahse initiale ψ, elles dépendent des conditions initiales et, elles sont déterminées par les relations

$$A \sin\psi = p_0, \quad A\cos\psi = \frac{v_0 + \nu p_0}{k}.$$

Mouvement apériodique. Si la différence $\nu^2 - \mu^2$ est positive, on pose $\nu^2 - \mu^2 = q^2$. Les racines du polynôme caratéristique (6.58) seront $r_1 = -\nu + q$, $r_2 = -\nu - q$, et la solution s'écrit dans ce cas

$$x_0(t) = C_1 e^{(q-\nu)t} + C_2 e^{-(q+\nu)t} \tag{6.65}$$

avec deux constantes C_1 et C_2 qu'on détreminera en fonction des données initiales (6.63). En effet, en faisant $t = 0$ dans la solution (6.65), on trouve $C_1 + C_2 = p_0$, et si on dérive la solution (6.65) et on fait $t = 0$ dans l'expression obtenue, on trouve $(q-\nu)C_1 - (q+\nu)C_2 = v_0$. On obtient alors facilement

$$C_1 = \frac{(q+\nu)p_0 + v_0}{2q}, \quad C_2 = \frac{(q-\nu)p_0 - v_0}{2q},$$

et la solution de l'équation (6.55) avec les conditions initiales (6.63) est donnée par la formule

$$x_0(t) = \frac{(q+\nu)p_0 + v_0}{2q} e^{(q-\nu)t} + \frac{(q-\nu)p_0 - v_0}{2q} e^{-(q+\nu)t}. \tag{6.66}$$

Puisque $q < \nu$ et les deux racines r_1 et r_2 sont négatives, on a alors $x(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$.

Oscillations forcées. Si une force extérieure $f(t)$ agit sur le corps, on aura, au lieu de l'équation (6.55), une équation différentielle avec second membre

$$x'' + 2\nu x' + \mu^2 x = f(t). \tag{6.67}$$

On examinera le cas où la force extérieure est de la forme

$$f(t) = A_0 \cos(\omega t) + B_0 \sin(\omega t)$$

avec deux constantes A_0 et B_0 données. On peut mettre $f(t)$ sous la forme sinusoidale

$$f(t) = \Omega_0 \sin(\omega t + \psi_0)$$

où ω est la pulsation, Ω_0 l'amplitude et ψ_0 la phase. On supposera que $\nu < \mu$ (cas des oscillations amorties forcées). On aura donc $\nu^2 - \mu^2 = -k^2 < 0$, et par conséquent le polynôme caractéristique (6.58) admettra deux racines complexes conjuguées $r_1 = -\nu + ik$ et $r_2 = -\nu - ik$. La solution générale de l'équation homogène (6.55) est donnée par

$$x_0(t) = e^{-\nu t}(C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt)) \tag{6.68}$$

avec deux constantes réelles C_1 et C_2, et la solution de l'équation (6.67) est, comme on le sait déjà, donnée par la formule

$$x(t) = e^{-\nu t}(C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt)) + \varphi(t) \tag{6.69}$$

où $\varphi(t)$ est une solution particulière de l'équation (6.67). Puisque $\pm i\omega$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, on cherchera cette solution particulière de la même forme que la force extérieure. On pose alors, $\varphi(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ avec deux constantes a et b. Pour déterminer a et b on utilise l'équation

$$\varphi'' + 2\nu\varphi' + k^2\varphi = A_0 \cos(\omega t) + B_0 \sin(\omega t).$$

Une simple indentification (faites les calculs) nous donne les valeurs de a et b en fonction de A_0, B_0 et ω. On désigne par a_0 et b_0 ces valeurs de a et b en sorte que $\varphi(t) = a_0 \cos(\omega t) + b_0 \sin(\omega t)$. Donc d'après (6.69) la solution de l'équation (6.67) est donnée par

$$x(t) = e^{-\nu t}(C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt)) + a_0 \cos(\omega t) + b_0 \sin(\omega t). \tag{6.70}$$

Remarque. Puisque $\nu > 0$ le premier terme de la solution (6.70) décroît rapidement lorsque t croît, ainsi ce terme n'influe sensiblement sur la solution $x(t)$ que pour des temps t proches de zéro (régime transitoire). Donc la solution x est presque entiérement déterminée par le second terme sinusoidale qui ne dépend pas des données initiales (régime stationnaire).

6.8 Applications - Flexions des poutres.

Equations différentielles des poutres soumises à des efforts latéraux et normaux. Soit une poutre de longueur l qu'on assimile au segment $[0, l]$ soumise à une force axiale de compression P et une force latérale $Q(x)$ répartie sur $[0, l]$. On considére dans le plan xy une section rectangulaire de la poutre de longueur dx. On désigne par T l'effort tranchant dû à la charge latérale Q et par M le moment de flexion agissant sur les faces de la section. L'équilibre des forces parallèles à l'axe y qui sont l'effort tranchant et la force latérale Q, nous donne si on dirigé vers le bas l'axe de y

$$\frac{dT}{dx} = -Q. \tag{6.71}$$

Le long de l'axe des x, en prenant les moments et en supposant que l'angle entre l'axe de la poutre et l'horizontale soit petit, on obtient

$$\frac{dM}{dx} = T + P\frac{dy}{dx}. \tag{6.72}$$

Si on néglige les effets des efforts tranchants et le raccourcissement de la poutre, l'équation de la courbure de la ligne moyenne de la poutre est

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M. \tag{6.73}$$

La quantité EI représente la rigidité à la flexion dans le plan considéré xy, supposé être un plan de symétrie. La combinaison des équations (10.28), (6.72) et (6.71) nous donne l'équation différentielle de la ligne élastique sous deux formes

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} + P\frac{dy}{dx} = -T \tag{6.74}$$

et

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} + P\frac{d^2y}{dx^2} = Q. \tag{6.75}$$

Les équations (6.71)-(6.75) sont les équations de base pour la flexion des poutres soumises à des forces latérales et axiales. Si la force axiale P est nulle, ces équations se ramènent aux équations habituelles de courbure d'une poutre sur laquelle s'exercent seulement des forces latérales.

Exemple d'application - charge latérale concentrée. Comme exemple on examinera en détails le cas où la charge Q est concentrée en un point de la poutre. En effet considérons une poutre de longueur l reposant sur les appuis d'abcisses $x = 0$ et $x = l$ et soumise à une charge latérale Q situé à une distance r de l et une force axiale P. Notons que, les moments de flexion dus uniquement à l'effet de la charge Q peuvent être déterminés par la statique. Mais, dans ce cas, la force axiale produit des moments de flexion qui ne peuvent être connus avant que les déplacements ne soient déterminés. La poutre est donc statiquement indéterminée. Il faut donc commencer par résoudre l'équation différentielle (10.28) de la ligne élastique. Calculons alors le moment de flexion M dû à la charge Q et la force P. A gauche de la charge, on trouve

$$M = \frac{rQ}{l}x + Py, \tag{6.76}$$

et à droite, on a

$$M = \frac{(l-r)Q}{l}(l-x) + Py. \tag{6.77}$$

En utilisant l'équation (10.28), on obtient les équations de la ligne élastique à gauche et à droite respectivement

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = -\frac{rQ}{l}x, \quad 0 < x < l-r, \tag{6.78}$$

et

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = -\frac{(l-r)Q}{l}(l-x), \quad l-r < x < l,. \tag{6.79}$$

On pose

$$k^2 = \frac{P}{EI}. \tag{6.80}$$

L'équation (6.79) devient

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = -\frac{rQ}{EIl}x. \quad 0 < x < l-r, \tag{6.81}$$

Notons que $\varphi(x) = -\frac{rQ}{Pl}x$ est une solution particulière de (6.81), et donc sa solution générale est donnée par

$$y(x) = \lambda\cos(kx) + \mu\sin(kx) - \frac{rQ}{Pl}x. \tag{6.82}$$

De même la solution générale de l'équation (6.81) est

$$y(x) = \lambda'\cos(kx) + \mu'\sin(kx) - \frac{(l-r)Q}{Pl}(l-x). \tag{6.83}$$

Les constantes λ, μ, λ' et μ' sont déterminés par les conditions aux extrémités de la poutre et au point d'application de la charge Q. Puisque les déplacements aux extrémités de la barre sont nuls, c'est-à-dire $y(0) = y(l) = 0$. En uitilisant (6.82) et (6.83), on trouve

$$\lambda = 0, \quad \lambda' = -\mu'\mathrm{tg}(kl),$$

et donc

$$y(x) = \mu\sin(kx) - \frac{rQ}{Pl}x, \quad 0 < x < l-r \tag{6.84}$$

$$y(x) = \mu'(-\mathrm{tg}(kl)\cos(kx) + \sin(kx)) - \frac{(l-r)Q}{PL}(l-x), \quad l-r < x < l. \tag{6.85}$$

Pour finir, il nous reste à déterminer les constantes μ et μ' en utilisant la condition au point d'application de la charge Q. Cette condition se traduit par la continuité de y et de sa dérivée au point d'application, soit $x = l - r$. On doit avoir alors

$$\begin{aligned}
&\mu \sin((k(l-r)) - \frac{rQ}{Pl}(l-r) = \\
&\qquad = \mu'(\sin((k(l-r)) - \mathrm{tg}(kl)\cos(k(l-r) - \frac{rQ}{Pl}(l-r)) \\
&\mu k \cos((k(l-r)) - \frac{rQ}{Pl} = \\
&\qquad = \mu' k(\cos((k(l-r)) + \mathrm{tg}(kL)\sin(k(l-r)) + \frac{(l-r)Q}{Pl}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\mu = \frac{Q\sin(kr)}{Pk\sin(kl)}, \quad \lambda' = \frac{Q\sin(k(l-r))}{Pk\mathrm{tg}(kl)}. \tag{6.86}$$

En remplaçant dans les équations (6.84) et (6.85) les constantes μ et μ' par leurs valeurs, on obtient les deux expressions suivantes pour les deux parties de la courbe $y(x)$ sur $[0, l]$.

$$y(x) = \frac{Q\sin(kr)}{Pk\sin(kl)}\sin(kx) - \frac{rQ}{Pl}x, \quad 0 < x < l - r \tag{6.87}$$

$$y(x) = \frac{Q\sin(k(l-r))}{Pk\sin(kl)}\sin(k(l-x)) - \frac{(l-r)Q}{Pl}(l-x), \quad l - r < x < l. \tag{6.88}$$

Comme cas particulier, on considére celui où la charge est appliquée au milieu de la poutre, donc $r = l/2$. Dans ce cas, la ligne élastique de la poutre est symétrique et on peut donc considérer que la partie gauche de la courbe (6.87) . Le déplacement maximun dans ce cas est obtenu en remplacant $x = r = l/2$ dans (6.87), ceci nous donne

$$d_{max} = y(l/2) = \frac{Q}{2Pk}(\mathrm{tg}(\frac{kl}{2}) - \frac{kl}{2}).$$

On pose (voir (6.80))

$$u = \frac{kl}{2} = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}, \tag{6.89}$$

où, rappelons le, EI désigne le coefficient de rigidité de la flexion. On peut alors voir aisément que

$$\frac{Q}{2Pk} = \frac{Ql^3}{48EI},$$

et donc la déformation maximale est

$$d_{max} = \frac{Ql^3}{48EI}\frac{3(\mathrm{tg}u - u)}{u^3} = \frac{Ql^3}{48EI}\chi(u). \tag{6.90}$$

Remarque. Le premier facteur de (6.90) représente la déformation obtenue si la force latérale agit seule. Le second facteur $\chi(u)$, mesure l'influence de la force longitudinale P sur la déformation d_{max}.

Si la force de compression P est petite donc (voir (6.89)) u aussi, on a $\chi(u) \simeq 1$ (car $\mathrm{tg}(u) \simeq u + \frac{1}{3}u^3$ si u est petit), ainsi

$$d_{max} \simeq \frac{QL^3}{48EI}.$$

Par contre si u tend vers la valeur $\frac{\pi}{2}$, alors $\chi(u)$ tend vers l'infini. Si $u = \frac{\pi}{2}$, (6.89) nous conduit à

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \tag{6.91}$$

On en déduit donc que lorsque la force compressive axiale est voisine de la valeur limite donnée par (6.91), la plus faible charge transversale produit une déformation latérale considérable. Cette valeur limite de la force de compression est appelée *charge critique* et on la note P_{cr}. En utilisant (6.89), on obtient

$$u = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}.$$

Donc u ne dépend que du rapport P/P_{cr}.

Ceci étant, déterminant maintenant la pente de la courbe de déplacement à l'extérieur de la poutre, c'est à-dire au point d'appui $x = 0$. En dérivant (6.87), on obtient

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \frac{Q\sin(kr)}{P\sin(kl)}\cos(kx) - \frac{rQ}{Pl}, \quad 0 < x < l - r. \tag{6.92}$$

En rappelant que $r = \frac{l}{2}$, trouve

$$\begin{aligned} y'(0) &= \frac{Q\sin(kl/2)}{P\sin(kl)} - \frac{rQ}{Pl} = \frac{Q\sin(kl/2)}{2P\sin(kl/2)\cos(kl/2)} - \frac{Q}{2P} \\ &= \frac{Q}{2P}\Big(\frac{1}{\cos(kl/2)} - 1\Big). \end{aligned}$$

En rappelant (6.80), on obtient

$$y'(0) = \frac{Ql^2}{16EI}\frac{2(1-\cos u)}{u^2\cos u} = \frac{Ql^2}{16EI}\eta(u). \tag{6.93}$$

Comme dans le remarque **??**, le premier facteur dans (6.93) représente la pente produite par la force latérale Q agissant seule au centre de la poutre. Quant au second facteur $\eta(u)$, il représente l'effet de la charge axiale P.

Pour finir calculons le moment de flexion maximale. on a

$$M_{max} = -EIy''(l/2). \tag{6.94}$$

Or (voir (6.92)), on a

$$y''(x) = -\frac{kQ\sin(kl/2)}{P\sin(kl)}\sin(kx), \tag{6.95}$$

d'ou

$$M_{max} = \frac{kQ\sin^2(kl/2)}{P\sin(kl)} = \frac{kQ\sin^2(kl/2)}{2P\sin(kl/2)\cos(kl/2)} = \frac{kQEI}{2P}\mathrm{tg}u. \tag{6.96}$$

On voit que ce moment est obtenu en multipliant le moment produit par la charge latérale par le facteur $\mathrm{tg}u/u$ qui, comme $\eta(u)$ et $\chi(u)$, tend vers 1 lorsque les forces de compression tendent zéro et tend vers l'infini quand ces forces tendent vers la valeur critique P_{cr}.

6.9 Exercices - Poutres horizontales

Exercice 1. Une poutre horizontale de longueur l s'appuie librement à ses deux extrémités. Ecrire l'équation de la ligne élastique et déterminée la flèche maximal (déformation maximale) dans les deux cas suivants

1) Lorsque la charge est de q par unité de longueur

2) S'il y a en plus une chargée Q concentrée au milieu de la poutre.

Exercice 2. On considére une poutre horizontale de longueur l fixée à une extrimité, l'autre étant libre. Ecrire l'équation de la ligne élastique et déterminée la flèche maximale dans les deux cas suivants

1) Si la poutre est soumise à une charge uniforme q par unité de longueur

2) S'il y a en plus deux charges égales situées aux points $\dfrac{l}{3}$ et $\dfrac{2l}{3}$.

Exercice 3. Soit une poutre horizontale de longueur l encastrée aux deux extrémités. Ecrire l'équation de la ligne élastique et déterminée la flèche maximale dans les deux cas suivants

1) Si la poutre est soumise à une charge uniforme q par unité de longueur

2) S'il y a en plus une charge Q située au milieu de la poutre.

Exercice 4. On considére une poutre horizontale de longueur l encastrée aux deux extrémités. Ecrire l'équation de la ligne élastique

1) Si la poutre est soumise à une charge uniforme q par mètre et à une charge Q concentrée en son au milieu

2) Déterminer le point où la flèche est maximale pour $l = 10$ et $Q = 10q$.

Exercice 5. On considère une poutre de longueur l assmilée au segment $[A, B]$ reposant sur deux appuis simples. On suppose que la poutre est soumise à une seule charge latérale constante q située à une distance d de l'extrémité droite B de la poutre et à une force axiale constante p. On sait que sa déformation $y(x)$ à partir de sa position d'équilibre est donnée par l'équation différentielle

$$\alpha y'' + py = f(x), \quad 0 < x < l$$

avec les conditions aux limites

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0$$

où $\alpha > 0$ est le coefficient de rigidité à la flexion de la poutre et

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{qd}{l}x & \text{si } \ 0 < x < l - d \\ \dfrac{q(l-d)}{l}(l-x) & \text{si } \ l - d < x < l, \end{cases}$$

Calculer le déplacement maximal $y_{\max}$ et le moment de flexion maximal $M_{\max}$.

Exercice 6. Soit une poutre de longueur $2l$ que l'on assimile au segment $]0, 2l[$ soumise une force latérale q(x) répartie sur $[0, 2l]$. On supposant que la poutre est encastrée en ses deux extrémitées. Sa déformation $y(x)$ à partir de la position d'équilibre sous l'action de la force $q(x)$ est donnée par l'équation différentielle

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \alpha q(x) \quad 0 < x < 2l \tag{6.97}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} y(0) = y(2l) = 0 \\ y'(0) = y'(2l) = 0. \end{cases} \tag{6.98}$$

où α est une constante positive. Déterminer la déformation maximale ainsi que le moment de flexion maximal dans les cas où la charge $q(x)$ est définie par

$$q(x) = \begin{cases} q_0 \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq l \\ 0 \quad \text{si} \quad l \leq x \leq 2l \end{cases} \qquad q(x) = \begin{cases} q_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{l}\right) \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2l \\ q_0 \delta(x-l) \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2l \end{cases}$$

$$q(x) \begin{cases} \dfrac{x}{l} \quad \text{si} \quad 0 < x < l \\ \dfrac{1}{l}(2l - x) \quad \text{si} \quad l < x < 2l, \end{cases}$$

Chapitre 7

Equations différentielles linéaires à coefficients non constants

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants est une équation de la forme :

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x), \tag{7.1}$$

où $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions données, appelées coefficients de l'équation et $f(x)$ le second membre. Une solution de (7.1) est une fonction $y(x)$ deux fois continûment dérivable sur un intervalle I vérifiant (7.1) pour tout $x \in I$. A cette équation on associe l'équation sans second membre

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0. \tag{7.2}$$

Si les coefficients $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont constants l'équation (7.1) peut se résoudre par les méthodes de la section 6.4. Dans le cas contraire, on ne connaît pas de méthode générale. Toutefois, notons que si on connaît deux solutions y_1 et y_2 linéairement indépendantes de l'équation homogène (7.2), alors la solution générale de l'équation (7.1) est donnée par

$$y(x) = \lambda_0 y_1(x) + \mu_0 y_2(x) + \varphi(x), \tag{7.3}$$

où λ_0 et μ_0 sont des constantes réelles arbitraires et $\varphi(x)$ est une solution particulière de (7.1). *La méthode de variation des constantes* λ_0 et μ_0, dèjà rencontrée dans le cas du premier ordre, permet de trouver la solution particulière $\varphi(x)$.

7.1 Méthode de variation des constantes

Une fois trouvée la solution générale de l'équation homogène de la forme

$$y(x) = \lambda_0 y_1(x) + \mu_0 y_2(x),$$

cette méthode consiste à chercher une solution particulière $\varphi(x)$ de l'équation (7.1) sous la forme

$$\varphi(x) = \lambda(x)y_1(x) + \mu(x)y_2(x),$$

où $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ sont deux fonctions inconnues à déteminer. On a alors

$$\varphi' = \lambda' y_1 + \lambda y_1' + \mu' y_2 + \mu y_2'.$$

Puisque on cherche une solution particulière, on peut imposer aux fonctions inconnues λ et μ de vérifier la condition

$$\lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0, \tag{7.4}$$

d'où

$$\varphi' = \lambda y_1' + \mu y_2', \quad \varphi'' = \lambda' y_1' + \lambda' y_1'' + \mu y_2' + \mu' y_2''.$$

En reportant les expressions de φ et ses dérivées dans (7.1), on trouve

$$a(\lambda' y_1' + \mu' y_2') = f. \tag{7.5}$$

Le système d'équations (7.4) et (7.5) nous permet de déterminer λ' et μ' puis λ et μ par un calcul de primitives.

Tout revient donc à la recherche de deux solutions linérairement indépendantes de l'équation homogène (7.2).

7.2 Intégration de l'équation homogène

Dans ce chapitre, on donnera des procédés qui conduisent quelquefois à la résolution de l'équation (7.2). Notons que, si on connaît deux solutions particulières y_1 et y_2 alors, dans ce cas, toutes les solutions sont de la forme $y(x) = \lambda_0 y(x) + \mu_0 y_2(x)$ avec deux constantes réelles λ_0 et μ_0. Par exemple, comme on peut le voir, $y_1(x) = x$ et $y_2 = e^x$ sont deux solutions de l'équation

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0$$

d'où sa solution générale $y(x) = \lambda_0 x + \mu_0 e^x$.

7.3 Intégration à l'aide d'une solution particulière connue

Si on connaît une solution particulière $y_1(x)$ de (7.2) alors on cherche une autre solution de la forme

$$y_2(x) = y_1(x)z(x),$$

où $z(x)$ est une fonction à déterminer. On a

$$y_2' = y_1'z + y_1z', \quad y_2'' = y_1''z + 2y_1'z' + y_1z''.$$

En reportant dans (7.2), il vient

$$ay_1z'' + (2ay_1' + by_1)z' + (ay_1'' + by_1' + cy_1)z = 0.$$

Puisque $ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0$ car $y_1(x)$ est une solution particulière, on obtient

$$ay_1z'' + (2ay_1' + by_1)z' = 0.$$

Ainsi, on est ramené à résoudre une équation différentielle du premier degré par rapport à la fonction $u(x) = z'(x)$, c'est-à-dire

$$ay_1u' + (2ay_1' + by_1)u = 0. \tag{7.6}$$

Après intégration on en déduit $u(x)$ donc $z(x)$ puis $y_2(x) = y_1(x)z(x)$ et enfin $y(x) = \lambda_0 y_(x) + \mu_0 y_2(x)$ la solution générale de (7.2).

Exemple. Résoudre l'équation

$$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0. \tag{7.7}$$

Notons que $y_1(x) = x$ est une solution particulière de l'équation sans second membre. Si on pose $y_2(x) = y_1(x)z(x)$, avec un calcul similaire on se ramène à la résolution de l'équation différentielle du premier ordre en z'

$$x(1+x^2)(z')' + 2z' = 0.$$

On trouve

$$z'(x) = c_0(1+\frac{1}{x^2}), \quad z(x) = c_0(x-\frac{1}{x}), \quad \text{et} \quad y_2(x) = xz(x),$$

d'où la solution de l'équation (7.7)

$$y(x) = \lambda_0 x + \mu_0(x^2-1).$$

Exercice. En utilisant les résultats des deux exemples précédents, résoudre les équations avec second membre

$$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 1, \qquad (1-x)y'' + xy' - y = 1 - 2x + x^2.$$

Remarque. On vient de voir que la connaissance d'une solution particulière de l'équation homogène nous permet de résoudre l'équation (7.2). Voilà quelques conditions suffisantes sur les coefficients $a(x)$, $b(x$ et $c(x)$ de l'équation qui nous facilitent la recherche d'une solution particulière de (7.2). En effet, si pour tout x, on a

1) $b(x) + xc(x) = 0$, alors $y_1(x) = x$ est une solution particulière,

2) $a(x) + b(x) + c(x) = 0$, alors $y_1(x) = e^x$ est une solution particulière,

3) $a(x) - b(x) + c(x) = 0$, alors $y_1(x) = e^{-x}$ est une solution particulière,

4) $\alpha^2 a(x) + \alpha b(x) + c(x) = 0$ pour un certain réel α, alors $y_1(x) = e^{\alpha x}$ est une solution particulière (si $\alpha = \pm 1$, on retrouve les cas 2) et 3)).

Exercice. En utilisant la remarque précédente, déterminer pour chaque équation suivante une solution particulière de l'équation homogène et résoudre

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = x^2(2x-1), \quad x^2 \log xy'' - xy' + y = 0,$$

$$xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = xe^{-x}, \quad xy'' + (1-2x)y' + 2y = (1-x)e^x.$$

7.4 Intégration par changement de variable

On se ramène à une équation différentielle linéaire à coefficients constants par changement de variables.

En effet, soit $h(t)$ une fonction de la variable réelle t définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que $h(t)$ est deux fois continûment dérivable et inversible sur I. on pose

$$x = h(t) \Leftrightarrow t = h^{-1}(x), \quad y(x) = y(h(t)) = Y(t).$$

on a alors

$$y'(x) = Y'(t)t'(x), \quad y''(x) = Y'(t)t''(x) + Y''(t)(t'(x))^2.$$

Si $y(x)$ est solution de l'équation (7.2), la fonction $Y(t)$ vérifie l'équation

$$Y''(t) + B(t)Y'(t) + C(t)Y(t) = 0, \tag{7.8}$$

où

$$B(t) = \frac{a(x)t''(x) + b(x)t'(x)}{a(x)(t'(x))^2}, \quad C(t) = \frac{c(x)}{a(x)(t'(x))^2}, \quad x = h(t). \tag{7.9}$$

S'il existe un chagement de variable $x = h(t)$ ou $t = h^{-1}(x)$ de sorte que

$$B(t) = B_0 \ \text{ et } \ C(t) = C_0,$$

où B_0 et C_0 sont des constantes indépendentes de la nouvelle variable t, alors l'équation (7.8) devient à une équation à coefficients constants

$$Y''(t) + B_0Y'(t) + C_0Y(t) = 0, \tag{7.10}$$

qu'on sait résoudre par les méthodes de la section 6.4. Une fois $Y(t)$ déterminée, la solution cherchée de (7.2) est

$$y(x) = Y(t) = Y(h^{-1}(x)).$$

Exemple. Résoudre ladite équation d'Euler de la forme

$$x^2y'' + a_0xy' + b_0y = 0, \quad x > 0, \tag{7.11}$$

où a_0 et b_0 sont des constantes. On verra dans ce cas qu'il est possible de trouver un changement de variable $x = h(t)$ qui transformera (7.11) en une équation à coefficients constants. Il suffit de choisir $h(t)$ tels que que les conditions (7.9) soient satisfaites. En effet, en prenant $C_0 = b_0$, on aura

$$C(t) = \frac{c(x)}{a(x)(t'(x))^2} = \frac{b_0}{x^2(t'(x))^2} = b_0 \quad \Leftrightarrow \quad (t'(x))^2 = \frac{1}{x^2},$$

et donc $t'(x) = \pm\frac{1}{x}$ puis par intégration $t = t(x) = \pm \log x$ où $x = e^{\pm t}$. Comme changement de variables, on peut choisir par exemple

$$x = h(t) = e^t \Leftrightarrow t = \log x$$

($x = e^{-t}$ et donc $t = -\log x$ nous conduira au même résultat). On a alors $B(t) = a_0 - 1$ et (7.11) devient

$$Y''(t) + (a_0 - 1)Y'(t) + b_0 Y(t) = 0.$$

C'est une équation à coefficient constants. Discuter selon le signe du polynôme caractéristique les solutions $Y(t)$ et en déduire, dans chaque cas, les solutions de l'équation (7.11).

Exercices 1. En utilisant les considérations précédentes, trouver un changement de variables $x = h(t)$ qui ramènera l'équation

$$y'' \sin x - y' \cos x - y \sin^3 x = \cos x \tag{7.12}$$

à l'équation à coefficient constants

$$Y''(t) - Y(t) = t.$$

Résoudre cette équation et en déduire toutes les solutions $y(x)$ de l'équation (7.12).

Exercice 2. Mêmes questions pour les équations suivantes

$$xy'' + 2y' + \frac{1}{x^3}y = \frac{1}{x^2}, \quad xy'' + (4x^2 - 1)y' + 4x^3 y = e^{-x^2}.$$

7.5 Intégration à l'aide des séries entières

Cette méthode est valable dans le cas fréquent où les coefficients de l'équation sont des fonctions polynomiales. Dans ce cas, on cherchera (si elle existe) une solution $y(x)$ de l'équation homogène

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{7.13}$$

développable en série entière autour d'un point x_0 donné. On distinguera deux cas selon que $a(x_0)$ est nul ou non. Si $a(x_0) = 0$ le point x_0 est dit point ordinaire sinon il est dit point singulier. Quitte à remplacer x par $x - x_0$ et $y(x)$ par $y(x - x_0)$, on peut supposer que $x_0 = 0$.

Commençons par le cas $a(0) \neq 0$. Dans ce cas, il existe une série entière dont la somme $y(x)$ est solution de (7.13) sur son intervalle de convergence $]-R, R[$. En effet, supposons qu'il existe une telle solution, on a alors

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ y'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots, \\ y''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots. \end{aligned}$$

Si nous reportons les développements de $y(x)$ et de ses dérivées dans l'équation (7.13), on trouvera le développementt en série entière de la fonction nulle

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n = 0,$$

et donc

$$b_n = 0 \text{ pour tout } n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Ces égalités donnent une relation de récurrence entre les coefficients a_n et donc leurs expressions explicites. On peut donc former la série entière ainsi obtenue et calculer son rayon de convergence R. Sur l'inetrvalle $]-R, R[$ sa somme est une solution particulière de notre équation. Au fait, cette méthode résout complétement l'équation (7.13), c'est-à-dire que toutes les solutions de (7.13) seront de la forme

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

a_0 et a_1 sont deux constantes réelles et $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont les sommes de deux séries entières convergentes dans $]-R, R[$.

Exemple 1. Soit l'équation

$$(1 + x^2) y'' + x y' - y = 0. \tag{7.14}$$

Ici $a(x) = (1 + x^2)$, $a(0) = 1 \neq 0$, cherchons alors une solution $y(x)$ développable en série entière autour de zéro. La méthode précédente conduit au développement en série entière de la fonction nulle, soit

$$2a_2 - a_0 + 6a_3 x + \cdots + ((n+2)(n+1) a_{n+2} + (n^2 - 1) a_n) x^n + \cdots = 0.$$

D'où

$$2a_2 - a_0 = 0, \quad a_3 = 0 \quad \text{et} \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2-1)a_n = 0, \quad n = 2, 3 \cdots$$

et donc

$$a_2 = \frac{1}{2}a_0, \quad a_3 = 0 \quad \text{et} \qquad a_{n+2} = -\frac{n-1}{n+2}a_n, \quad n = 2, 3 \cdots$$

ou

$$a_3 = 0, \quad a_n = -\frac{n-3}{n}a_{n-2} \quad n = 2, 3 \cdots . \tag{7.15}$$

On distinguera deux cas selon que n est pair ou impair. Puisque $a_3 = 0$ de la relation de récurrence (7.15), on tire $a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = 0$, c'est-à-dire

$$a_{2p+1} = 0 \quad p = 1, 2, \cdots \tag{7.16}$$

et le coefficient a_1 est arbitraire.

Si $n = 2p$, en posant $a_{2p} = b_p$, de (7.15) il vient, pour tout $p = 1, 2, \cdots$

$$b_p = -\frac{2p-3}{2p}b_{p-1} = (-1)^2\frac{(2p-3)(2p-5)}{2p(2p-2)}b_{p-2} = \cdots = (-1)^{p+1}\frac{(2p-3)(2p-5)\cdots 3}{2p(2p-2)\cdots 2}b_0,$$

et donc

$$a_{2p} = (-1)^{p-1}\frac{1.3.5\cdots(2p-3)}{2^p p!}a_0, \quad p = 2, 3, \cdots . \tag{7.17}$$

Puisque

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1}x^{2p+1} + \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p}x^{2p},$$

compte tenu de (7.16) et (7.17), la solution de l'équation (7.14) est

$$y(x) = a_1 x + a_0\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \sum_{p=2}^{\infty}(-1)^p\frac{1.3.5\cdots(2p-3)}{2^p p!}x^{2p}\right) \quad \text{pour tout} \quad x \in]-1, 1[.$$

La série est convergente sur l'intervalle $]-R, R[$ avec $R = 1$ est le rayon de convergence car

$$\lim_{p\to\infty}\frac{b_{p+1}}{b_p} = \lim_{p\to\infty}\frac{a_{2(p+1)}}{a_{2p}} = \lim_{p\to\infty}\frac{2(p+1)-3}{2p} = R = 1.$$

Ce n'est pas exactement la limite du rapport $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ mais pour une série dont les termes d'indice impair (ou pair) sont nuls, c'est bien ainsi que cela marche.

Exemple 2. Soit l'équation

$$y'' + 2xy' + 2y = 0. \tag{7.18}$$

Ici $a(x) = 1$, $a(0) = 1 \neq 0$, cherchons alors une solution $y(x)$ développable en série entière autour de zéro, soit

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots .$$

En reprotant dans l'équation la série éntiére $y(x)$ et ses dérivéees première er seconde, on trouve

$$a_0 + a_2 + (4a_1 + 6a_3)x + \cdots + ((n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_n)x^n + \cdots = 0.$$

D'ou

$$2a_0 + a_2 = 0, \quad 4a_1 + 6a_3 = 0 \ \text{ et } \ (n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_n = 0, \quad n = 2, 3\cdots$$

soit,

$$a_2 = -a_0, \quad a_3 = -\frac{2}{3}a_1 \ \text{ et } \quad a_{n+2} = -\frac{2}{n+2}a_n, \quad n = 2, 3\cdots$$

ou

$$a_3 = -\frac{2}{3}a_1, \quad a_n = -\frac{2}{n}a_{n-2} \quad n = 2, 3\cdots . \tag{7.19}$$

On distinguera deux cas selon que n est pair ou impair. Si $n = 2p$, en posant $a_{2p} = b_p$, de (7.19) il vient, pour tout $p = 1, 3, \cdots$

$$b_p = -\frac{2}{p}b_{p-1} = \frac{(-2)^2}{2p(2p-2)}b_{p-2} = \cdots = \frac{(-2)^p}{2p(2p-2)\cdots 2}b_0 = \frac{(-1)^p}{p!}b_0,$$

et donc

$$a_{2p} = (-1)^p \frac{(-1)^p}{p!}a_0, \quad p = 2, 3, \cdots . \tag{7.20}$$

Si $n = 2p+1$, en posant $a_{2p+1} = c_p$, de (7.19) il vient, pour tout $p = 1, 2, \cdots$

$$c_p = \frac{-2}{2p+1}c_{p-1} = \frac{(-2)^2}{(2p+3)(2p+1)}c_{p-1} = \cdots = \frac{(-2)^p}{(2p+3)(2p+1)\cdots 3}c_0,$$

et donc

$$a_{2p+1} = \frac{(-2)^p}{3.5\cdots(2p+3)} a_1. \tag{7.21}$$

Puisque

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p} x^{2p} + \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1} x^{2p+1}$$

compte tenu de (7.20) et (7.21), on a

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

où a_0 et a_1 sont deux constantes et

$$y_1(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p} x^{2p} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} x^{2p} = e^{-x^2}$$

$$y_2(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-2)^p}{3.5\cdots(2p+3)} x^{2p+1}.$$

La série entière $y_2(x)$ est convergente sur $\mathbb{R}$ car

$$\lim_{p\to\infty} \frac{c_{p+1}}{c_p} = \lim_{p\to\infty} \frac{a_{2(p+1)+1}}{a_{2p+1}} = -\lim_{p\to\infty} \frac{2}{2p+5} = 0.$$

Donc la solution de l'équation (7.18) est donnée par

$$y(x) = a_0 e^{-x^2} + a_1 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-2)^p}{3.5\cdots(2p+3)} x^{2p+1} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}$$

Exercices 7.5.1. *Résoudre à l'aide de séries entières autour de l'origine les équations suivantes*

$$y'' + xy = 0, \quad y'' - xy' + x^2 y = 0, \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + y = 0, \quad (1+x^2)y'' + xy' - y = 0.$$

Revenons à l'équation homogène

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{7.22}$$

et supposons que $x_0 = 0$ est un point singulier donc $a(0) = 0$. Dans ce cas l'équation peut ne pas posséder de solution $y(x)$ non identiquement nulle développable en série entière autour de l'origine. Par exemple, soit l'équation

$$x^2 y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0.$$

Ici $a(x) = x^2$ et donc $a(0) = 0$. Supposons qu'il existe une solution $y(x)$ développable en série entière autour de l'origine, c'est-à-dire

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots .$$

En reportant les expressions de $y(x)$ et de ses dérivées première et seconde dans l'équation, on obtient

$$2a_0 + a_1 x + (2a_2 + a_1)x^2 + \cdots + (n(n-1)a_n + (n-1)a_{n-1} + (2-n)a_n)x^n + \cdots = 0.$$

Donc

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad 2a_2 + a_1 = 0, \quad [n(n-1) - (n-2)]a_n + (n-1)a_{n-1} = 0 \quad \forall n \geq 3,$$

d'où $a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$ et par suite $y(x) = 0$.

Si $x_0 = 0$ est un point singulier de l'équation (7.22), on cherchera des solutions de la forme

$$y_r(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

où r est un nombre réel à déterminer. Pour cela, on supposera que $a_0 \neq 0$.

Exemple 1. Résoudre à l'aide d'une série entière l'équation

$$2xy'' + (x+1)y' + 3y = 0 \quad x \geq 0. \tag{7.23}$$

Ici $x = 0$ est un point singulier. On cherchera une solution de la forme

$$y_r(x) = x^r(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + \cdots a_n x^n + \cdots).$$

En dérivant, on a

$$\begin{aligned} y_r'(x) &= ra_0 x^{r-1} + (r+1)a_1 x^r + (r+2)x^{r+1}a_2 + \cdots (r+n)a_n x^{r+n-1} + \cdots \\ y_r''(x) &= (r-1)ra_0 x^{r-2} + r(r+1)a_1 x^{r-1} + (r+1)(r+2)a_2 x^r + \\ &\quad + \ \cdots (r+n-1)(r+n)a_n x^{r+n-2} + \cdots , \end{aligned}$$

et en reportant dans l'équation les expression de y_r et de ses dérivées, on obtient

$$\begin{aligned} r(2r-1)a_0 x^{r-1} + [(r+1)(2r+1)a_1 + (r+3)a_0]x^r + [(r+2)(2r+3)a_2 + (r+4)a_1]x^{r+1} + \\ + \ \cdots [(r+n)(2r+2n-1)a_n + (r+n+2)a_{n-1}]x^{r+n-1} + \cdots = 0. \end{aligned}$$

En annulant tous les coefficients, on obtient

$$r(2r-1)a_0 = 0, \qquad (r+n)(2r+2n-1)a_n + (r+n+2)a_{n-1} \quad \forall n \geq 1,$$

et donc

$$r(2r-1)a_0 = 0, \quad a_n = -\frac{r+n+2}{(r+n)(2r+2n-1)}a_{n-1} \quad \forall n \geq 1.$$

D'où

$$r(2r-1)a_0 = 0, \quad a_n = \frac{(-1)^n(r+n+1)(r+n+2)}{(r+1)(r+2)(2r+2n-1)(2r+2n-3)\cdots(2r+1)}a_0. \tag{7.24}$$

Puisque $a_0 \neq 0$ donc $r = 0$ ou $r = \frac{1}{2}$. Si $r = 0$, on a

$$a_n = \frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2(2n-1)(2n-3)\cdots 1}a_0 \quad \forall n \geq 1$$

et

$$y_0(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + \cdots a_nx^n + \cdots =$$
$$a_0(1 - 3x^2 + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \cdots \frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2(2n-1)(2n-3)\cdots 1}x^n + \cdots)$$

vérifie l'équation (7.23). Si $r = \frac{1}{2}$, on a

$$a_n = \frac{(-1)^n(2n+3)(2n+5)}{152^n n!}a_0 \quad \forall n \geq 1$$

et

$$y_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{x}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + \cdots a_nx^n + \cdots) =$$
$$a_0\sqrt{x}(1 - \frac{7}{6}x + \frac{21}{40}x^2 - \frac{11}{80}x^3 + \cdots \frac{(-1)^n(2n+3)(2n+5)}{152^n n!}x^n + \cdots)$$

vérifie aussi l'équation (7.23). Donc la solution générale est

$$y(x) = \lambda y_0(x) + \mu y_{\frac{1}{2}}(x)$$

où λ et μ sont deux constantes réelles.

7.6 Fonctions Spéciales

Bien souvent, la résolution de problèmes fonctionnels conduit à introduire des fonctions importantes qui ne sont définies explicitement que grâce à leur développent en série entière et dont on ne peut pas donner une expression plus simple au moyen des fonctions usuelles. Tel est le cas des fonctions dites spéciales qui jouent un rôle important en analyse et en physique. Dans la pratique, elle interviennent généralement comme solutions d'équations différentielles linéaire homogènès du second ordre de la forme

$$x^2y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes. Une attention particulière sera accordée aux fonctions de Bessel qui sont solution de l'équation de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{7.25}$$

où ν est une constante. Cette équation se rencontre dans un grand nombre de problèmes de mécanique et de physique mathématique. Le problème des oscillations libres d'une membrane circulaire, sur lequel on reviendra en détails, donne un exemple de développement d'une fonction donnée en fonctions de Bessel.

On cherchera des solutions de (7.25) de la forme

$$y_r(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

avec $a_0 \neq 0$ et r est un nombre réel à déterminer. En raisonnant tout comme dans l'exemple ci-dessus, on arrive au développement nul

$$a_0(r^2 - \nu^2) + ((r+1)^2 - \nu^2)a_1 x + \cdots [a_{n-2} + ((r+n)^2 - \nu^2)a_n]x^{r+n} + \cdots = 0.$$

En annulant les coefficients, on obtient

$$a_0(r^2 - \nu^2) = 0, \quad ((r+1)^2 - \nu^2)a_1 = 0, \quad a_{n-2} + ((r+n)^2 - \nu^2)a_n = 0 \quad \forall n \geq 2,$$

et puisque $a_0 \neq 0$, on a

$$r = \pm\nu, \quad a_1 = 0, \quad a_n = -\frac{1}{(r+n)^2 - \nu^2} a_{n-2} \quad \forall n \geq 2.$$

Si $r = \nu$ alors

$$a_1 = 0, \quad a_n = -\frac{1}{n(2\nu + n)} a_{n-2} \quad \forall n \geq 2.$$

On distingue deux cas selon que n est pair où impair. Si $n = 2k + 1$, $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \geq 0$ car $a_1 = 0$. Si $n = 2k$, en posant $a_{2k} = b_k$, on a

$$b_k = -\frac{1}{2k(2\nu + 2k)} b_{k-1} \quad \forall k \geq 1.$$

D'où

$$a_{2k} = b_k = \frac{(-1)^k a_0}{2.4 \cdots 2k(2\nu + 2k)(2\nu + 2k - 2) \cdots (2\nu + 4)(2\nu + 2)},$$

soit

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{a_0}{p!(\nu + k)(\nu + k - 1) \cdots (\nu + 2)(\nu + 1)}.$$

Ainsi, si $r = \nu$, on obtient la solution

$$y_\nu(x) = a_0 x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(\nu + 1)(\nu + 2) \cdots (\nu + k)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k}. \tag{7.26}$$

Si ν n'est pas entier, en prenant $r = -\nu$, on obtient une autre solution de l'équation de bessel. Elle est obtenue en remplaçant ν par $-\nu$ dans (7.26) car l'équation reste la même, donc

$$y_{-\nu}(x) = a_0 x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(1 - \nu)(2 - \nu) \cdots (k - \nu)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k}. \tag{7.27}$$

On peut vérifier à l'aide de la régle de d'Alembert que les deux séries ont un rayon de convergence infini et qu'elles sont linéairement indépendantes . La solution générale de l'équation de bessel s'écrit alors

$$y(x) = \lambda y_\nu(x) + \mu y_{-\nu}(x)$$

avec deux constantes réelles λ et μ.

Soit $\nu = n$ un entier positif. La solution (7.26) reste valable tandsi que la solution (7.27) ne l'est plus, car à partir d'un certain rang, un des facteurs du dénominateur des termes du développement (7.27) sera nul. Avec un entier positif $\nu = n$, la fonction de Bessel $J_n(x)$ est déterminée à partir de la formule (7.26) dans laquelle en choisissant le terme arbitaire $a_0 = 1/n!2^n$. On obtient ainsi

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n + k)!} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k}. \tag{7.28}$$

En particulier, pour $n = 0$ on a

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{7.29}$$

Si ν est entier, l'équation de bessel (7.25) a en plus de la solution (7.28) une deuxième solution de la forme

$$K_n(x) = \alpha J_n(x) \ln x + \frac{1}{x^n} \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k$$

qui devient infinie pour $x = 0$. La solution générale de l'équation de Bessel pour $\nu = n$ entier ets donnée par :

$$y_n(x) = \lambda J_n(x) + \mu K_n(x).$$

Si on s'intéresse à des solution bornées au voisinage de $x = 0$, il faut prendre une constante $\mu = 0$, c'est-à-dire ne considérer la solution (7.28).

Si $\nu = 0$ l'équation (7.25) devient

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0 \tag{7.30}$$

et une des solutions est donnée par (7.29). La deuxième solution doit être cherchée sous la forme

$$K_0(x) = \alpha_0 J_0(x) \ln x + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots .$$

En portant cette expression dans le second membre de l'équation (7.30), par identification des coefficients, on obtient

$$K_0(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{(k!)^2} (1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{k}) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \qquad \gamma_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{k}$$

cette fonction K_0 est dite fonction de Bessel d'ordre zéro de deuxième espèce.

7.7 Applications. - Membranes vibrantes circulaires

Soit une membrane circulaire qui à l'état de repos coïncide avec le disque unité D et dont le bord Γ est fixe. La position de la membrane à l'instant t est définie par la côte

$$z = u(x, y, t) \quad (x, y) \in D$$

on doit avoir l'égalité

$$u(x,y,t)=0 \quad \forall\ (x,y)\in\Gamma \quad \forall\ t>0 \tag{7.31}$$

et l'on montre que u vérifie l'équation

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=0 \quad \text{où} \quad \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{7.32}$$

avec les conditions intiales

$$u(x,y,0)=u_0(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0)=u_1(x,y). \tag{7.33}$$

En introduisant à la place des coordonnées catésiennes (x,y), les coordonnées polaires (r,ϑ), on est amené à chercher une solution $u(r,\vartheta,t)$ périodique, de période 2π telle que

$$u(1,\vartheta,t)=0 \quad \forall\ \vartheta\in]0,2\pi[\ \text{ et } \ \forall\ t>0 \tag{7.34}$$

et vérifiant l'équation

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}=0. \tag{7.35}$$

Enfin, il faut donner les conditions initiales, c'est-à-dire le déplacemenr et la vitesse de tous les points de la membrabe à l'instant initial $t=0$:

$$u(r,\vartheta,0)=u_0(r,\vartheta) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r,\vartheta,0)=u_1(r,\vartheta). \tag{7.36}$$

En cherchant de solutions $u(r,\vartheta,t)$ de la forme

$$u(r,\vartheta,t)=v(r,\vartheta)s(t) \tag{7.37}$$

(solutions séparées), on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2}+\lambda^2 v=0 \\ v(1,\vartheta)=0 \quad \forall\vartheta\in]0,2\pi[\\ v(r,\vartheta+2\pi)=v(r,\vartheta) \end{cases} \tag{7.38}$$

et

$$s''(t)+c^2\lambda^2 s(t)=0$$

donc

$$s(t) = A\cos(c\lambda t) + B\sin((c\lambda t). \tag{7.39}$$

Nous nous bornerons à l'étude des vibrations propres isotropes, c'est-à-dire au cas où la fonction $v(r,\vartheta)$ ne dépendant que de la distance r à l'origine :

$$v(r,\vartheta) = w(r)$$

ce qui nous conduit à chercher des solutions de la forme (voir (7.37) et (7.39))

$$u(r,t) = w(r)(A\cos(c\lambda t) + B\sin((c\lambda t). \tag{7.40}$$

Le système (7.38) devient

$$w''(r) + \frac{1}{r}w(r) + \lambda^2 w(r) = 0, \qquad w(1) = 0. \tag{7.41}$$

Effectuant le changement de variable

$$\varrho = \lambda r, \qquad w(r) = w(\frac{\varrho}{\lambda}) = y(\varrho),$$

il vient

$$y''(\varrho) + \frac{1}{\varrho}y'(\varrho) + y(\varrho) = 0. \tag{7.42}$$

On reconnaît en (7.42) l'équation de Bessel d'ordre zéro. Les solutions de (7.42) bornées en $\varrho = 0$ donc en $r = 0$, sont données par

$$y(\varrho) = dJ_0(\varrho) \quad \text{donc} \quad w(r) = dJ_0(\lambda r)$$

où $d \neq 0$ est une constante. La condition $w(1) = 0$ se traduit par

$$J_0(\lambda) = 0.$$

L'étude de la fonction J_0 montre qu'elle posséde une infinité de racines positives :

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \cdots$$

d'où les solutions w_n correspondantes aux valeurs propres λ_n

$$w_n(r) = dJ_0(\lambda_n r).$$

Considérons (7.40), on obtient les vibrations propres

$$u_n(r,t) = J_0(\lambda_n r)(a_n \cos(c\lambda_n t) + b_n \sin(c\lambda_n t)).$$

Pour chaque n, $u_n(r,t)$ est une solution de notre problème et par superposition

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(r,t)$$

est aussi une solution. Les constantes a_n et b_n sont déterminées par les conditions initiales qui s'écrivent

$$u(r,0) = u_0(r) \quad u'_t(r,0) = u_1(r) \quad 0 < r < 1.$$

On doit choisir a_n et b_n de sorte que

$$u_0(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n J_0(\lambda_n r) \quad \text{et} \quad u_1(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n c\lambda_n J_0(\lambda_n r) J_0(\lambda_n r).$$

Les relations d'orthogonalité

$$\int_0^1 r J_0(\lambda_n r) J_0(\lambda_m r)\ dr = 0 \quad \text{pour tout} \quad m \neq n$$

permettent d'obtenir les coefficients a_n et b_n de la même façon que les coefficients d'une série de Fourier :

$$a_n \int_0^1 r J_0^2(\lambda_n r)\ dr = \int_0^1 r u_0(r) J_0(\lambda_n r)\ dr$$

et

$$b_n \int_0^1 r J_0^2(\lambda_n r)\ dr = \frac{1}{c\lambda_n} \int_0^1 r u_1(r) J_0(\lambda_n r)\ dr$$

on montre que la série obtenu converge dans les mêmes conditions qu'une série de Fourier.

Chapitre 8

Séries de Fourier - Applications

Fonctions périodiques. Une fonction f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ est dite périodique de période T, ou T-périodique, si Tout

$$\forall x \in I, x + T \in I \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x).$$

Notons qu'une fonction T-périodique f est complétement déterminée si on la connaît sur un intervalle de longueur T, par exemple sur $[x_0, T + x_0]$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Inversemment, si $f(x)$ est définie sur l'intervalle $[x_0, T + x_0]$, elle peut être prolongée à une fonction périodique, de période T.

Exemples

1. L'exemple le plus simple de fonction périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ est la fonction

$$y = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x).$$

2. Des fonctions périodiques plus générales, de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, sont données par les sommes

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x))$$

Définition. On appelle *série de fourier* une série de fonctions de terme général de la forme

$$f_n(x) = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x), \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{8.1}$$

c'est-à-dire

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)), \tag{8.2}$$

où a_n et b_n sont des nombres réels. Le terme général $f_n(x)$ est appelé *harmonique d'ordre* n. C'est une fonction périodique, de période $T_n = \dfrac{2\pi}{n\omega}$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. L'harmonique d'ordre $n = 1$, est dit *harmonique fondamental*, sa période est $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Si la série (8.2) est convergente, sa somme $f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ est alors une fonction périodique, de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Dans ce cas les nombres réels a_n et b_n, dépendant naturellement de la fonction somme $f(x)$, sont dits coefficients de Fourier de la fonction somme $f(x)$.

8.1 Calcul des coefficients

Soit une série de Fourier unifromément convergente sur un quelconque intervalle de longueur T, et soit $f(x)$ sa somme, c'est-à-dire

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x).$$

On peut alors montrer que les coefficients a_n et b_n sont données par les formules suivantes

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx, \tag{8.3}$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx.$$

Remarque. Notons que grâce à la périodicité, on peut calculer ces intégrales en remplaçant l'intervalle d'intégration $[0, T]$ par tout autre intervalle de longueur T, par exemple l'intervalle $[x_0, x_0 + T]$. C'est-à-dire

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\cos(n\omega x)dx,$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\sin(n\omega x)dx.$$

Remarque. Si la fonction $f(x)$ est paire, alors on a

$$b_n = 0 \quad \forall n \geq 1, \tag{8.4}$$
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)dx, \quad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\omega x)dx.$$

Dans ce cas la série de Fourier est une série de cosinus :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x). \tag{8.5}$$

Si la fonction $f(x)$ est impaire, alors

$$a_n = 0 \ \ \forall n \geq 0, \quad b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\omega x)dx. \tag{8.6}$$

Dans ce cas la série de Fourier est une série de sinus :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x). \tag{8.7}$$

8.2 Développement d'une fonction en série de Fourier

1. Cas d'une fonction périodique. Soit $f(x)$ une fonction périodique, de période T, intégrable sur un quelconque intervalle de longueur T. On peut alors calculer les coefficients (8.3) a_n et b_n et former la série de Fourier de $f(x)$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x).$$

La question se pose de savoir si cette série est convergente et dans ce cas si sa somme est $f(x)$, c'est-à-dire

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x).$$

La reponse à cette question est affirmative. Elle est donnée par le théorème suivant dont on admettra la démonstration.

Théorème 7. *Soit $f(x)$ une fonction périodique, de période T. On suppose que la fonction $f(x)$ est continue et continûment dérivable sauf en un nombre fini de points par période. Alors sa série de Fourier est convergente sur $\mathbb{R}$ et a pour somme*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

et en tout point de continuité de la fonction $f(x)$, on a

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x).$$

Exemples

1. Développer en série de Fourier la fonction $f(x)$ de période $T = 2$ définie par

$$f(x) = 1 \quad \text{si} \ \ 0 < x < 1 \ \ \text{et} \ \ f(x) = -1 \quad \text{si} \ \ -1 < x < 0.$$

La fonction est impaire et se développe en série de Fourier de sinus avec

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\omega x)dx = 2\int_0^1 \sin(n\pi x)dx = 2\Big[-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big]_0^1 = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n).$$

D'où

$$b_n = 0 \ \text{ si } \ n = 2k, \quad b_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi},$$

et donc

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)\pi x)}{2k+1}, \quad -1 < x < 1.$$

pour $x = 0$ on vérifie que la série a pour somme $\frac{1}{2}(f(0+0)+f(0-0)) = 0$. Pour $x = \frac{1}{2}$ on obtient

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

d'où

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

2. Développer en série de Fourier la fonction paire $f(x)$ de période 2 définie par :

$$f(x) = 1 \quad \text{si} \ \ 0 < x < \frac{1}{2} \quad \text{ et } \ f(x) = 0 \quad \text{si} \ \ \frac{1}{2} < x < 1.$$

La fonction étant paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\cos(n\pi x)dx = \frac{2}{n\pi}\sin\big(\frac{n\pi}{2}\big).$$

D'où

$$a_n = 0 \ \text{ si } \ n = 2k \ \text{ et } \ a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}.$$

La fonction $f(x)$ vérifie les hypothèses du théorème 7, elle donc développable en série de Fourier et on a

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos((2k+1)\pi x).$$

3. Développer en série de Fourier la fonction de période 2 définie par $f(x) = x$ si $x \in]-1,1[$.
La fonction étant impaire, on a $a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$ et

$$\begin{aligned} b_n = 2\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx &= 2\Big[-x\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)dx \\ &= -\frac{2\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}. \end{aligned}$$

La fonction $f(x)$ vérifie les hypothèses du théorème 7, elle posséde donc un développement en série de Fourier donné par

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x), \quad -1 < x < 1. \tag{8.8}$$

4. Développer en série de fourier la fonction périodique $f(x)$, de période 2, définie par :

$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in]-1, 0[\quad \text{et} \quad f(x) = x \quad \text{si} \quad x \in]0, 1[.$$

Dans ce cas la fonction se développe en série de Fourier de cosinus et de sinus avec

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} xdx = \frac{1}{4},$$
$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx = \int_{0}^{1} x\cos(n\pi x)dx = \frac{1}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1),$$
$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)dx = \int_{0}^{1} x\sin(n\pi x)dx = -\frac{(-1)^n}{n\pi}.$$

D'où

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) - \frac{(-1)^n}{n\pi}\sin(n\pi x)], \quad -1 < x < 1. \tag{8.9}$$

Remarque. Notons que sur l'intervalle $[0, 1]$ les séries (8.8) et (8.9), bien que différentes, représente la même fonction $f(x) = x$. Donc sur un intervalle donné le développement d'une fonction en série de Fourier n'est pas unique.

2. Cas d'une fonction quelconque. Soit $f(x)$ une fonction définie et borné sur un intervalle $[a, b]$. Pour développer la fonction $f(x)$ en série de Fourier, il faut la prolonger en une fonction périodique. Soit alors $g(x)$ la fonction périodique, de période $T = b - a$, telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. La fonction périodique $g(x)$ vérifie les hypothèses du théorème 7, elle est donc développable en série de Fourier. Puisque $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{b-a}.$$

En Physique, il est parfois utile de développer une fonction défine et bornée sur un intervalle $[a, b]$ en série de Fourier de cosinus ou de sinus. Il suffit alors de la prolonger en une fonction périodique, de période $T > b - a$, paire ou impaire selon les cas. Pour tout $x \in [a, b]$, si $f(x)$ est pair on a

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x), \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

et si $f(x)$ est impair on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

On voit donc qu'il existe *une infinité de séries de Fourier repésentant une fonction donnée sur un intervalle borné donné.*

Exemples.

1. Développer en série de Fourier la fonction $f(x)$ définie par

$$f(x) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Soit $g(x)$ la fonction périodique, de période T=2, qui coïncide avec $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 2]$. Elle est développable en série de Fourier

$$g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3}, \quad a_n = 2\int_0^1 x^2 \cos(n\pi x) dt = \frac{2}{n^2\pi^2}, \quad b_n = 2\int_0^1 x^2 \sin(n\pi x) dt = -\frac{4}{n\pi}.$$

Puisque $f(x) = g(x)$ sur $[0, 2]$, on a

$$f(x) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{4}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) - \frac{4}{n\pi} \sin(n\pi x)).$$

2. Soit $l > 0$. Développer en série de Fourier la fonction définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, l]$.

Pour développer $f(x)$ en série de Fourier, on la prolonge en une fonction impaire et périodique, de période $T = 2l$. Soit alors la fonction $g(x)$ de période $2l$ définie par

$$g(x) = 1, \ \text{ si } x \in]0, l[\quad g(x) = -1, \ \text{ si } x \in]-l, 0[.$$

la fonction est développable en série de sinus (car impaire)

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}$$

avec

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l \sin(n\omega x)dx = \frac{2}{n\pi}(1-\cos(n\pi)) = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n).$$

D'où

$$b_{2k} = 0, \quad b_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi}.$$

Comme $g(x) = f(x)$ sur $[0,l]$, alors on a

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\sin((2k+1)\frac{\pi}{l}x)$$

8.3 Dérivation des séries de Fourier

Soit $f(x)$ une fonction périodique, de période T, développable en série de Fourier, on a alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad u_n(x) = a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x), \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

On suppose que $f(x)$ est continue et dérivable sur $[0,T]$ et sa dérivée $f'(x)$ qui est T-périodique est développable en série de Fourier. Alors

$$f'(x) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega a_n\cos(n\omega x) - n\omega a_n\sin(n\omega x). \tag{8.10}$$

En effet, la fonction $f'(x)$ étant T-périodique et développable en série de Fourier, on a

$$f'(x) = a_0' + \sum_{n=1}^{\infty} a_n'\cos(n\omega x) + b_n'\sin(n\omega x).$$

Montrer alors que

$$a_0' = 0, \quad a_n' = n\omega b_n, \quad b_n' = -n\omega a_n. \tag{8.11}$$

Puisque $f(x)$ est T-périodique, on a

$$a_0' = \frac{1}{T}\int_0^T f'(x)dx = \frac{1}{T}(f(T)-f(0)) = 0,$$

et en intégrant par parties, on obtient

$$a_n' = \frac{2}{T}\int_0^T f'(x)\cos(n\omega x)dx = n\omega\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx = n\omega b_n$$
$$b_n' = \frac{2}{T}\int_0^T f'(x)\sin(n\omega x)dx = -n\omega\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx = -n\omega a_n.$$

Donc
$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\omega a_n\cos(n\omega x)-n\omega a_n\sin(n\omega x).$$

Remarque. Si la fonction périodique f n'est pas continue les égalités (8.11) ne sont plus vraies. Supposons par exemple que la fonction f posséde un seul point de discontinuité x_0 dans l'intervalle $]0,T[$. On a dans ce cas
$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f'(x)\cos(n\omega x)dx=\frac{2}{T}\int_0^{x_0} f'(x)\cos(n\omega x)dx+\frac{2}{T}\int_{x_0}^T f'(x)\cos(n\omega x)dx\\ &=\frac{2}{T}f(x)\cos(n\omega x)\big|_0^{x_0}+\frac{2}{T}f(x)\cos(n\omega x)\big|_{x_0}^{T}+\frac{2n\omega}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx\\ &=\frac{2}{T}(f(x_0-0)\cos(n\omega x_0)-f(0+0))+\frac{2}{T}(f(T-0)-f(x_0+0)\cos(n\omega x_0))+n\omega b_n.\end{aligned}$$

Puisque $f(T-0)=f(0-0)$, on a finalement
$$a'_n=n\omega b_n-\frac{2}{T}s(0,f)-\frac{2}{T}s(x_0,f)\cos(n\omega x_0),$$
où, de manière générale, $s(a,f)=f(a+0)-f(a-0)$ est le saut de la fonction au point de discontinuité a. De manière analogue, on montre que
$$b'_n=-n\omega a_n-\frac{2}{T}s(x_0,f)\sin(n\omega x_0).$$

On peut voir facilement que, si $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, les sauts $s(0,f)$ et $s(x_0,f)$ sont nuls, de sorte que la formule de dérivation terme à terme devient valable.

Application : Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique $y(x)=|\pi-x|$ si $x\in]-\pi,\pi[$. Déduire de ce développement en série de Fourier celui de la fonction 2π-périodique définie par $z(x)=-1$ si $x\in]0,\pi[$ et $z(x)=1$ si $x\in]-\pi,0[$

8.4 Intégration des séries de Fourier

Soit $f(x)$ une fonction T-périodique continûment dérivable par morceaux sur $]0,T[$, et soit
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x),\quad u_n(x)=a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x),\quad n=0,1,2,\cdots.$$
son développement en série de Fourier. On considére

$$F(x) = \int_0^x f(y)dy$$

une primitive de la fonction $f(x)$. La fonction $F(x)$ est continue et dérivable, donc développable en série de Fourier. Soit

$$F(x) = a_0(F) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(F)\cos(n\omega x) + b_n(F)\sin(n\omega x)$$

son développement en série de Fourier. Il en résulte que la fonction $F(x)$ est T-périodique et donc nécessairement on a

$$\int_0^T f(x)dx = Ta_0 = 0.$$

Ainsi, une condition nécessaire pour que la primitive $F(x)$ d'une fonction périodique soit développable en série de Fourier est que sa valeur moyenne a_0 soit nulle. Par ailleurs, en intégrant par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
a_0(F) &= \frac{1}{T}\int_0^T F(x)dx = \frac{1}{T}\int_0^T x'F(x)dx = -\frac{1}{T}\int_0^T xf(x)dx \\
a(F)_n &= \frac{2}{T}\int_0^T F(x)\cos(n\omega x)dx = \frac{1}{n\omega}\frac{2}{T}\int_0^T F(x)(\sin(n\omega x))'dx \\
&= -\frac{1}{n\omega}\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx = -\frac{b_n}{n\omega} \\
b_n(F) &= \frac{2}{T}\int_0^T F(x)\sin(n\omega x)dx = -\frac{1}{n\omega}\frac{2}{T}\int_0^T f(x)(\cos(n\omega x))'dx \\
&= \frac{1}{n\omega}\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx = \frac{a_n}{n\omega}
\end{aligned}$$

et donc,

$$F(x) = \int_0^x f(y)dy = a_0(F) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{b_n}{n\omega}\cos(n\omega x) + \frac{a_n}{n\omega}\sin(n\omega x)\right].$$

Exemple : Soit f la fonction de période 2 définie par $f(x) = x$ si $x \in]-1, 1[$. On a (voir (8.8))

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x),$$

et donc

$$F(x) = \frac{1}{6} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(\cos(n\pi x).$$

Exercices. 1. - Développer en série de Fourier la fonction périodique, de période 2, définie par

$$y(x) = 1 - x, \quad \text{si} \quad x \in [0, 1] \quad y(x) = 1 + x, \quad \text{si} \quad x \in [-1, 0].$$

Déduire du développement obtenu la somme de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

2. - Développer en série de Fourier la fonction périodique y, de période 2, définie par

$$y(x) = 1 - x, \quad \text{si} \quad x \in [0, 1] \quad y(x) = -1 - x, \quad \text{si} \quad x \in [-1, 0].$$

Déduire du développement obtenu la somme de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}.$$

3. - Développer en série de sinus seulement et en série de cosinus seulement la fonction y définie sur $[0, 1]$ par

$$y(x) = 2x \quad \text{si} \quad 0 < x < \frac{1}{2} \quad y(x) = -2x + 2 \quad \text{si} \quad \frac{1}{2} < x < 1.$$

4. - Développer en série de Fourier la fonction périodique, de période 2π, définie par

$$y(x) = 1, \quad \text{si} \quad |x| \leq 1 \quad y(x) = 0, \quad \text{si} \quad 1 < x \leq \pi.$$

Déduire du développement obtenu la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

5. - Soit $\alpha \in]0, \pi]$. On considére la fonction périodique de période $T = 2\pi$ défini par

$$y_\alpha(x) = 1 - \frac{|x|}{\alpha}, \quad \text{si} \quad |x| \leq \alpha \quad y_\alpha(x) = 0, \quad \text{si} \quad \alpha < |x| \leq \pi.$$

i) Représenter la fonction $y_\alpha(x)$. ii) Développer en série de Fourier y_α. iii) En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\alpha}{n^2}.$$

6. - Soit $q \notin \mathbb{N}$ fixé. Développer en série de Fourier la fonction $y(x) = \sin(qx)$ si $x \in]-\pi, \pi[$.

7. - Développer en série de Fourier en sinus la fonction définie sur l'intervalle $[0, l]$ par

$$y(x) = \frac{2x}{l} \ \text{ si } \ 0 < x < \frac{l}{2}, \qquad y(x) = \frac{2(l-x)}{l} \ \text{ si } \ \frac{l}{2} < x < l.$$

8. - Développer en série de Fourier la fonction définie sur l'intervalle $[0, 2]$ par $y(x) = x^2$ (prolonger la fonction y en une fonction périodique). Vérifier que le terme général du développenemt en série de Fourier peut sécrire

$$u_n(x) = A_n \cos(n\pi x - \varphi_n).$$

Calculer l'amplitude A_n.

9. - Soit x_0 un nombre réel fixé. Représenter la fonction y de période 2 définie par

$$y(x) = 1 \ \text{ si } \ x_0 < x < x_0 + 1, \quad y(x) = -1 \ \text{ si } \ x_0 + 1 < x < x_0 + 2.$$

Calculer l'amplitude, la phase et l'énergie de y. Vérifier que seule la phase dépend de x_0. Choisir x_0 pour obtenir un développement en série de sinus, en série de cosinus.

10. - Soit $\alpha \in]0, 2\pi[$. Réprésenter la fonction de période $T = 2\pi$ définie par

$$y(x) = 1 \ \text{ si } \ 0 < x < \alpha, \quad y(x) = 0 \ \text{ si } \ \alpha < x < 2\pi.$$

Développer en série de Fourier $y(x)$. Calculer l'amplitude A_n et la phase φ_n. Représenter en fonction de n les variations de A_n (spectre de fréquences). Montrer qu'on peut choisir α de façon à supprimer un certain nombre d'harmoniques. Etudier les cas où $\alpha = \frac{2\pi}{2}$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

11. Même exercice avec la fonction de période $T = 2\pi$ définie par

$$y(x) = \frac{x}{\alpha} \text{ si } 0 < x < \alpha, \quad y(x) = \frac{1}{2\pi - \alpha}(2\pi - x) \text{ si } \alpha < x < 2\pi.$$

.

12. Même exercice avec la fonction de période $T = \frac{\pi}{\omega}$ définie par

$$y(x) = I_0 \sin(\omega x) \text{ si } 0 < x < \frac{T}{2}, \quad y(x) = 0 \text{ si } \frac{T}{2} < x < T$$

(courant alternatif redressé à une alternance).

8.5 Forme complexe d'une série de Fourier.

Soit $y(x)$ une fonction T-périodique développable en série de Fourier

$$y(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

En utilisant les formules d'Euler

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2}, \quad e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

on peut écrire le terme général $u_n(x) = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$ sous la forme

$$u_n(x) = \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega x}.$$

On pose

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}.$$

Compte tenu des expressions des a_n et b_n, il est facile de voir que

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{T}\int_0^T y(x)\cos(n\omega x)dx - i\frac{2}{T}\int_0^T y(x)\sin(n\omega x)dx\Big) \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T y(x)(\cos(n\omega x) - i\sin(n\omega x))dx, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T y(x)e^{-in\omega x}dx.$$

On a alors

$$u_n(x) = c_n e^{in\omega x} + \bar{c}_n e^{-in\omega x} = c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x}$$

car $\bar{c}_n = c_{-n}$, d'où

$$y(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x}).$$

Soit, en posant $c_0 = a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T y(x)dx$,

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}. \tag{8.12}$$

L'expression (8.12) donne le développement en série de Fourier d'une fonction T-périodique comme une combinaison linéaire de fonctions périodiques linéairement indépendants

$$\varphi_n(x) = e^{in\omega x}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

de périodes $T_n = \dfrac{T}{n}$. Ce développement en termes complexe est plus simple que le développement en termes réels. Le coefficient complexe c_n représente la composante de y relativement à φ_n. Il peut s'écrire

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-in\omega x} dx = \frac{1}{T}\int_0^T y(x)\overline{\varphi}_n(x)dx.$$

Si on pose

$$c_n = (y|\varphi_n) = \frac{1}{T}\int_0^T y(x)\overline{\varphi}_n(x)dx,$$

un calcul simple nous donne

$$(\varphi_n|\varphi_m) = 1 \quad \text{si} \quad n = m$$

$$(\varphi_n|\varphi_m) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{in\omega x} e^{-im\omega x} dx = \frac{1}{T}\Big[\frac{e^{i(n-m)\omega t}}{i(n-m)\omega}\Big] = 0 \quad \text{si} \quad n \neq m.$$

Si on défini le produit scalaire des fonctions T-périodiques y et z en posant

$$(y|z) = \frac{1}{T}\int_0^T y(x)\bar{z}(x)dx,$$

alors on peut dire que le système de fonctions $\varphi_n(x) = e^{in\omega x}$ ($x \in [0, T]$) forme une suite orthonormée relativement à ce produit scalaire (c'est-à-dire $(\varphi_n|\varphi_m) = 0$ si $n \neq m$ et $(\varphi_n|\varphi_m) = 1$ si $n = m$).

En calculant formellement le produit scalaire $(y|y)$, on arrive à l'égalite de Bessel-Parseval

$$\frac{1}{T}\int_0^T y^2(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Puisque

$$|c_n|^2 = |c_{-n}|^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{4},$$

on a

$$\frac{1}{T}\int_0^T y^2(x)dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}. \tag{8.13}$$

On définit maintenant la norme de y en posant

$$\|y\|^2 = (y|y) = \frac{1}{T}\int_0^T y^2(x)dx.$$

Un calcul simple nous donne

$$\|u_n\|^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}, \quad \|u_0\|^2 = a_0^2, \quad u_n(x) = a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x).$$

Ainsi on peut réécrire la formule (8.13) sous une forme plus simple

$$\|y\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|^2. \tag{8.14}$$

La formule (8.14) est dite égalité d'energie. Elle traduit que *l'énergie de y est égale à la somme des énergies de ses harmoniques u_n.*

Exercices.

1. - Soit y la fonction périodique, de période $T = 2$, définie sur $]0, 2[$ par $y(x) = e^x$. Calculer les coefficients de Fourier complexes de y. Écrire son dévelppement en série de Fourier, et e déduire la somme de la série

$$\sum_{n=0} \frac{1}{1 + n^2\pi^2}.$$

2. - Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction de période $T = \dfrac{\pi}{\omega}$ définie par $x(t) = I|\sin(\omega t)|$.

3. - Soit y une fonction T-périodique développable en série de Fourier. On définit la translatée z de y par $z(x) = y(x + x_0)$. Calculer les coefficients de Fourier complexes de z en fonction des coefficients de Fourier du signal y. Vérifier que l'amplitude de z est indépendante du nombre quelconque x_0.

8.6 Application à la Physique

En physique, beaucoup de phénomènes oscillatoires sont décrits au cours du temps t à l'aide de fonctions périodiques. Soit $x(t)$ un signal, on a vu que si $x(t)$ est périodique, de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, de classe C^1 par morceaux (c'est-à-dire continue et continûment dérivable sauf en un nombre fini de points par période), est développable en série de Fourier sous la forme

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)dt, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)dt.$$

Ainsi, tout signal T-périodique $x(t)$ de classe C^1 par morceaux peut s'écrire comme la somme

- d'un terme constant a_0, égale à la valeur moyenne de $x(t)$ sur une période ;
- d'un nombre infini de termes sinusoidaux de période T, $\dfrac{T}{2}, \cdots, \dfrac{T}{n}$.

Le terme de période T est appelé le **fondamental**, les termes suivants **harmoniques**. L'harmonique d'ordre n

$$u_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

peut s'écrire sous la frome

$$u_n(t) = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

et la série de Fourier s'écrit sous la forme

$$y(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

avec

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \mathrm{tg}\varphi_n = \frac{b_n}{a_n}.$$

A_n représente l'**amplitude**, $\dfrac{2\pi}{n\omega}$ la **période** de l'harmonique d'ordre n, $n\omega$ la **pulsation** et φ_n la **phase**.

La série étant convergente, on a $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$. Dans la pratique la somme des premiers hanomiques $u_n(t)$ suffit donc à représenter la fonction $x(t)$ de façon satsifaisante. Quant à la formule de Bessel-Parseval

$$\|x\|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

elle peut s'écire sous la forme

$$\|x\|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2.$$

Elle signifie que l'*énergie totale est égale à la somme des énergies des harmoniques*.

8.7 Application des séries de Fourier à l'analyse harmonique d'un signal

Soit x un signal périodique développable en série de Fourier

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n).$$

Si l'on représente l'amplitude A_n des différents harmoniques en fonction de leurs puilsation $n\omega$, on obtient un diagramme en batôns appelé **spectre de fréquences du signal**. Il met en évidence l'importance du fondamental ainsi que la décroissance plus ou moins rapide des amplitudes d'ordre élevé. Il peut aussi servire, à l'aide de la formule de Bessel-Parseval, à détreminer le nombre d'harmoniques nécessaires pour transmettre la quasi totalité d'un signal. En effet, si pour un certain entier N on a par exemple

$$\Big|\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt - (a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} A_n^2)\Big| \leq \frac{1}{100},$$

en arrêtant le développement en série de Fourier à l'ordre N, on aurait restituer 99 pour cent de l'energie.

Exemple. Soit le signal (en dents de scie) périodique, de période 2π défini par $x(t) = t$ si $t \in]-\pi, \pi[$. A l'aide la formule de Parseval appliquée au développement obtenu de $x(t)$, déterminer le nombre de termes nécessaires pour obtenir $\frac{90}{100}$ de l'intensité efficace du signal $x(t)$.

L'analyse harmonique d'un signal est nécessaire pour déterminer la réponse d'un système linéaire S, de nature électrique ou mécanique, à une excitation donnée. Soit en effet l'équation différentielle linéaire du système S

$$as'(t) + bs(t) = r(t)$$

où la fonction donnée $r(t)$ représente la grandeur d'entrée et la fonction inconnue $s(t)$ la grandeur de sortie. Si $r(t)$ est un signal développable en série de Fourier

$$r(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n),$$

on peut chercher une solution $s(t)$ sous la forme d'une série de Fourier

$$s(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega t + \psi_n).$$

Les coefficients b_n, B_n et ψ_n sont obtenus par identification. La réponse $s(t)$ du système est donc, en régime permanent, la fonction somme d'une série de Fourier.

8.8 Application à la résolution des équations aux dérivées partielles

Les séries de Fourier ont des applications multpiles dans la recherche des solutions d'une équation dont l'inconuue est une fonction. En effet, lorsqu'on cherche une fonction inconnue f qui est périodique de période T ou qui est définie sur un intervalle borné $]a, b[$, il est souvent commode de déterminer f par l'intermédiaire de son développement de Fourier. Montrons sur un exemple particulier concernant l'équation des cordes vibrantes comment, les séries de fourier nous permettent de résoudre le problème de la vibration d'une corde de longueur finie et dont les extrmitées sont fixes.

Considérons une corde finie de longueur L qu'on assimile au segment $[0, L]$ vibrant dans un plan de façon non entretenue et occupant à l'état de repos une position rectiligne que nous prondrons pour axe des x. Un axe des y étant choisi perpendiculairement à l'axe des x, nous désignerons par $y(x, t)$ la fonction de x dont le graphe coïncide avec la position de la corde à l'instant t. Ceci posé, on démontre que $y(t, x)$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles dite *équation des cordes vibrantes* :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{8.15}$$

où a est une constante, c'est la vitesse de propagation des perturbations ou oscillations transversales. Notons au passage que, d'après sa signification physique, la fonction $y(t,x)$ est nécéssairement une fonction continue de x.

Le fait que la corde est fixée aux extrémités se traduit par les conditions aux limites

$$y(0,t) = y(L,t) = 0. \tag{8.16}$$

On peut exprimer ces dernières condittions en considérant que $y(x, t$à est la restriction à $]0, L[$ d'une fonction continue de x, impaire et périodique de période $2L$. Elle sera donc de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L} \tag{8.17}$$

les fonctions b_n étant des fonctions (pour l'instant inconnues) de t. En dérivant deux fois par rapport à t et à x le développent précédent, on trouve les séries trogonométriques :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\omega x) \frac{\partial^2 b_n}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad -\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^2 \omega^2 \sin(n\omega x).$$

Pour que le développement satisfasse formellement à l'équation (8.15), il faut et il suffit donc que l'on ait :

$$\frac{\partial^2 b_n}{\partial t^2} = n^2 a^2 \omega^2 b_n = 0 \qquad \forall n \geq 1$$

c'est-à-dire que l'on ait

$$b_n = A_n \cos(na\omega t) + B_n \sin(na\omega t)$$

les coefficients A_n et B_n étant des constantes (c'est-à-dire ne dépendant ni de t ni de n). Nous sommes donc conduits à considérer les séries de la forme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(na\omega t) + B_n \sin(na\omega t)) \sin(n\omega x). \tag{8.18}$$

Ces séries satisfont formellement au problème posé, c'est-à-dire qu'elle converge vers 0 pour $x == L$ et que leurs séries dérivées (sans que l'on se préoccupe de questions de convergence) satisfont identiquement à l'équation (8.15).

Pour finir, il nous reste à déterminer Comment les coefficients A_n et B_n. Pour le faire, il faut avoir quelques informations supplémentaires sur la fonction $y(x,t)$. En général, on se donne

$$y(x,0) = y_0(x), \tag{8.19}$$

c'est-à-dire la position de la corde à l'instant initial $t = 0$ et la fonction

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = y_1(x), \tag{8.20}$$

c'est-à-dire la vitesse de la corde à l'instant initial $t = 0$. Les données (11.62) et (10.17) sont dites les *conditions initiales* du problème.

Considérons encore que $y_0(x)$ et $y_1(x)$ sont des fonctions impairesde période $2L$. D'après leurs significations physiques, elles sont continues et ont des développent en séries de fourier respectives de la forme :

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(n\omega x) \quad \text{et} \quad y_1(x) \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(n\omega x).$$

Si on veut que la série (8.18) soit la série de Fourier de la fonction $y(x,t)$, il faut donc que pour $t = 0$, cette série coïncide avce la série de Fourier de $y_0(x)$, c'est-à-dire que l'on ait

$$A_n = \alpha_n \quad \text{pour tout entier} \quad n \geq 1.$$

Pour déterminer les coefficients B_n, on considère la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} na\omega(-A_n \sin(na\omega t) + B_n \cos(na\omega t)) \sin(n\omega x)$$

obtenue en dérivant terme à terme la série (8.18) par rapport à t et on impose à cette dernière série de cïncide pour $t = 0$ avec la série de Fourier de $y_1(x)$, c'est-à-dire que l'on pose :

$$B_n = \frac{\beta_n}{na\omega} \quad \text{pour tout entier} \quad n \geq 1.$$

Nous sommes donc conduits à considérer la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(na\omega t) + \frac{\beta_n}{na\omega t} \sin(na\omega t)) \sin(n\omega x). \tag{8.21}$$

Si elle est convergente et si on peut la dérivée deux fois terme à terme par rapport àx et rapport à t, sa somme est alors une solution du problème proposé, c'est-à-dire satisfait à l'équation (8.15) et aux conditions initiales imposées.

Comme les nombres α_n et β_n sont les coefficientsde Fourier respectifs des fonctions y_0 et y_1, il est en général facile de montrer que la série (8.21) converge pour toute valeur de x, mais en général, cette série n'est pas deux fois dérivable terme à terme. Pour pouvoir le démontrer aisément, il faudrait que les nombres $n^2\alpha_n$ et $n\beta_n$ soient des infiniments petits d'ordre 2 par rapport à $1/n$. Il faudrait donc supposer que α_n et β_n soient des infiniments petits d'ordre 4 et 3 par rapport à $1/n$, ce que l'on peut affirmer *à priori* que dans le cas où les données initiales y_0 et y_1 admettent des dérivées continues jusqu'à l'ordre 3 et 2.

Chapitre 9

Transformation de Fourier

Dans le cas de fonctions définies sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, la transformation de Fourier rends à peu près les mêmes services que les séries de Fourier dans le cas des fonctions périodiques ou des fonctions définies sur un intervalle fini.

9.1 Définition

Soit $f(x)$ une fonction défini $\mathbb{R}$ à valeures réelles où complexes. On appelle transformée de Fourier (ou spectre) de la fonction f et on note $\mathcal{F}(f)$ la fonction $\hat{f}$ de la variable ξ définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\xi x}dx \quad . \tag{9.1}$$

Nous écrirons symboliquement :

$$\hat{f} = \mathcal{F}(f) \quad \text{ou} \quad \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f(x)).$$

La transformée de Fourier d'une fonction n'existe que si l'intégrale (9.1) est convergente. Si des conditions d'existence de la transformée de Fourier d'une fonction sont difficiles à écrire, on a en revanche la condition suffisante suivante :

Théorème 9.1.1. *Toute fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ possède une transformée de Fourier qui est une fonction continue, bornée et tendant vers zéro lorsque ξ tend vers l'infini.*

Exemples. Si

1.
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

alors

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi\xi x} dx = \frac{1}{\pi\xi} \frac{e^{i\pi\xi} - e^{-i\pi\xi}}{2i} = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}.$$

2. Si $f(x) = e^{-a|x|}$, on a

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} e^{-2i\pi\xi x}\ dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-ax} e^{-2i\pi\xi x}\ dx + \int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{-2i\pi\xi x}\ dx$$

en posant $x = -t$ dans la deuxième intégrale :

$$\int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{-2i\pi\xi x}\ dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{2i\pi\xi t}\ dt$$

donc

$$\hat{f}(\xi) = \int_{0}^{+\infty} e^{-ax} [e^{-2i\pi\xi x} + e^{2i\pi\xi x}]\ dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-ax} \cos(2\pi\xi x)\ dx$$

et une double intégration par parties donne

$$\hat{f}(\xi) == \frac{2a}{a^2 + 4a^2\xi^2}.$$

9.2 Transformation de Fourier inverse

Si f est une fonction continue et admettant une transformée de Fourier $\hat{f}$ absolument intégrable, on peut alors obtenir $f(x)$ à partir de $\hat{f}(\xi)$ par la transformation inverse de Fourier

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi\xi x}\ d\xi. \tag{9.2}$$

On écrit symboliquement :

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) \quad \text{ou} \quad f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi)).$$

Si f n'est pas continue en un point x, on a au lieu de (9.2)

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi\xi x}\ d\xi$$

9.3 Opération sur les transformées de Fourier

1. Linéarité. L'application qui à une fonction f fait correspondre sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est linéaire, c'est-à-dire que si les deux fonctions f et g ont des transformées de Fourier et si λ et μ sont des constantes, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet une transformée de Fourier qui est $\lambda\mathcal{F}(f) + \mu\mathcal{F}(g)$. Nous écrirons symboliquement :

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathcal{F}(f) + \mu\mathcal{F}(g) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. Homothétie. Soient $\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f(x))$ et $k \neq 0$ un nombre réel. Cherchons quelle est la transformée de la fonction $g(x) = f(kx)$. Par définition, on a :

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(kx)e^{-2i\pi\xi x}\, dx.$$

Prenons comme nouvelle variable $t = kx$. On a

$$\hat{g}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\frac{\xi}{k}t}\, dt = \dfrac{1}{k}\hat{f}\Big(\dfrac{\xi}{k}\Big) & \text{si } \; k > 0 \\ -\dfrac{1}{k}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\frac{\xi}{k}t}\, dt = -\dfrac{1}{k}\hat{f}\Big(\dfrac{\xi}{k}\Big) & \text{si } \; k < 0 \end{cases}$$

De toute façon :

$$\mathcal{F}(f(kx)) = \frac{1}{|k|}\hat{f}\Big(\frac{\xi}{k}\Big). \tag{9.3}$$

Donnous quelques exemples de ctee formule dans le cas $k = -1$. La formule (9.3) s'écrit alors :

$$\mathcal{F}(f(-x)) = \hat{f}(-\xi). \tag{9.4}$$

Si f est paire, c'est-à-dire $f(x) = f(-x)$, on a $\hat{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$ donc $\hat{f}$ est une fonction paire et *la transformée d'une fonction paire est encore paire*. Supposons de plus que la fonction paire soit réelle (c'est-à-dire qu'elle prenne des valeurs reélles lorsque la variable x est réelle) alors sa transformée de Fourier est à la fois paire et réelle. Dans ce cas on peut écrire symétriquement

$$\hat{f}(\xi) = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos(2\pi x\xi)\, dx, \quad f(x) = 2\int_{0}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\cos(2\pi x\xi)\, d\xi.$$

Exemple. Considérons la fonction paire qui égale à

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; |x| \leq \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \; |x| > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

D'après ce qui précéde

$$\hat{f}(\xi) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(2\pi x\xi)\ dx = \int_0^1 \cos(2\pi x\xi)\ dx = \frac{\sin(2\pi\xi}{2\pi\xi}$$

Inversement :

$$f(x) = 2\int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi)\cos(2\pi x\xi)\ d\xi = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi}\cos(2\pi x\xi)\ d\xi.$$

En particulier pour $x = 0$, $f(x) = 1/2$ d'où

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi}\ d\xi = \frac{1}{2}$$

et en posons $t = 2\pi\xi$ on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t})\ dt = \frac{\pi}{2}.$$

On montrerait, de la même manière, que la transformée de Fourier d'une fonction impaire est impaire et l'on peut écrire symétriquement

$$\hat{f}(\xi) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\sin(2\pi x\xi)\ dx, \quad f(x) = 2\int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi)\sin(2\pi x\xi)\ d\xi.$$

Exemple. Considérons la fonction paire qui égale à

$$g(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \ \ 0 < x < 1 \\ -1 \quad \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ 0 \quad \text{si} \ \ |x| > 1 \end{cases}$$

D'après ce qui précéde

$$\hat{g}(\xi) = 2\int_0^{+\infty} g(x)\sin(2\pi x\xi)\ dx = 2\int_0^1 \sin(2\pi x\xi)\ dx = \frac{1-\cos(2\pi\xi)}{\pi\xi} = 2\frac{\sin^2(\pi\xi)}{\pi\xi}.$$

3. Translation. Cherchons quelle est la transformée de la translatée $f(x-h)$ de la fonction $f(x)$ (h étant une constante). On a :

$$\mathcal{F}(f(x-h)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-h)e^{-2i\pi x\xi}\ dx$$

soit, en faisant le changement de variables $t = x - h$:

$$\mathcal{F}(f(x-h)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi(t+h)\xi}\ dt = e^{-2i\pi h}\mathcal{F}(f(x))$$

d'où l'égalité

$$\mathcal{F}(f(x-h)) = e^{-2i\pi h}\mathcal{F}(f(x)) \tag{9.5}$$

4. Dérivation par rapport à x. Soit f est une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Si f est dérivable et sa dérivée f' est absolument intégrable, alors on a la formule

$$\mathcal{F}(f'(x)) = 2i\pi\xi\mathcal{F}(f(x)). \tag{9.6}$$

En effet, en intégrant par parties, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-2i\pi x\xi}\ dx = f(x)e^{-2i\pi x\xi}\Big|_{-\infty}^{\infty} - 2i\pi\xi\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi x\xi}\ dx$$

Or $\lim\limits_{x\to\pm\infty}|f(x)e^{-2i\pi x\xi}| = \lim\limits_{x\to\pm\infty}|f(x)| = 0$ car f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-2i\pi x\xi}\ dx = 2i\pi\xi\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi x\xi}\ dx$$

d'où la formule (10.5). Plus généralement, par récurrence on a

$$\mathcal{F}(f^{(n)}(x)) = (2i\pi\xi)^n\mathcal{F}(f(x)) \quad n = 1, 2, \cdots . \tag{9.7}$$

5. Dérivation par rapport à ξ. En admettant que l'on peut dériver sous le signe intégrale, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{f}}{\partial\xi} &= \frac{\partial}{\partial\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi x\xi}\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{\partial}{\partial\xi}e^{-2i\pi x\xi}\ dx\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}(-2i\pi xf(x))e^{-2i\pi x\xi}\ dx = \mathcal{F}(-2i\pi xf(x)).\end{aligned}$$

De manière générale

$$\hat{f}^{(n)}(\xi) = \mathcal{F}((-2i\pi x)^n f(x).$$

6. Produit de convolution. On appelle produit de convolution de deux fonctions f et g la fonction notée $f\star g$ définie par

$$(f\star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\ dy$$

(l'intégrale étant supposée convergente). On montre que

$$\mathcal{F}((f\star g)(x)) = \mathcal{F}(f(x))\mathcal{F}(g(x)).$$

Exemple. Soit $f(x)$ la fonction définie par

$$f(x) = 1 \quad \text{si} \quad |x| < \frac{1}{2}, \quad f(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > \frac{1}{2}$$

On vérifie que

$$(f \star f)(x) \triangle(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ 1 - x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

donc

$$\mathcal{F}((f \star f)(x)) = (\hat{f}(\xi))^2 = \Big(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\Big)^2.$$

et inversement

$$(f \star f)(x) = 2 \int_0^{+\infty} \Big(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\Big)^2 \cos(2\pi x\xi)\ d\xi$$

(car la fonction $(f \star f)(x)$ est paire). En particulier pour $x = 0$, $(f \star f)(0) = 1$, d'où

$$2 \int_0^{+\infty} \Big(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\Big)^2\ d\xi = 1$$

et en posant $t = \pi x$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\ dx = \frac{\pi}{2}$$

9.4 Application au problème des cordes vibrantes

Reprenons l'équation des cordes vibrantes :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{9.8}$$

et supposons cette fois la corde infinie dans les deux sens, c'est-à-dire supposons la fonction $y(t, x)$ définie pour toute valeur de x. Donnons-nous les conditions initiales

$$y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y_1(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R} \tag{9.9}$$

et cherchons une solution $y(x, t)$ de l'équation (9.8) avec les conditions initiales (9.9). Nous supposons que nous pouvons prendre la transformée de Fourier de y et la dériver par rapport à la variable t considérer comme paramètre. Ces hypothèses sont souvent vérifiées dans la pratique, car la fonciton $y(x, t)$ et ses divers dérivées par rapport à x et t tendent en général vers zéro lorsque $x \to \pm\infty$, ce qui correspond au fait que le mouvement de la corde devient de plus en plus faible lorsqu'on s'éloigne de l'origine.

Posons donc

$$Y(x,t) = \mathcal{F}(y(x,t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(x,t)e^{-2i\pi x\xi}\, dx.$$

on a avec les conventions faites

$$\mathcal{F}\Big(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\Big) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{F}(y) = \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\Big(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big) = -4\pi^2\xi^2 Y.$$

L'équation (9.8) permet donc d'écrire :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + 4\pi^2\xi^2 Y = 0.$$

Ceci est une équation différentielle en Y considérée comme fonction de la variable t dont la solution générale est de la forme :

$$Y(\xi,t) = \lambda e^{2i\pi a\xi} + \mu e^{-2i\pi a\xi} \tag{9.10}$$

où λ et μ sont des constantes par rapport t mais peuvent dépendre de ξ que l'on déterminera en utilisant les conditions initiales (9.9). Posons alors

$$Y_0(\xi) = \mathcal{F}(y_0(x)), \quad Y_1(\xi) = \mathcal{F}(y_1(x)).$$

L'égalité $y(x,0) = y_0(x)$ entraîne :

$$Y(x,0) = \mathcal{F}(y(x,0)) = Y_0(\xi)$$

de même les égalités :

$$\mathcal{F}\Big(\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)\Big) = \frac{\partial Y}{\partial t}(\xi,t), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = y_1(x)$$

entraînent :

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(\xi,0) = y_1(\xi).$$

On doit donc déterminer les constantes $\lambda = \lambda(\xi)$ et $\mu = \mu(\xi)$ de telle sorte que la fonction Y donnée par (9.10) satisfasse aux égalités

$$Y(x,0) = \mathcal{F}(y(x,0)) = Y_0(\xi). \tag{9.11}$$

Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$Y_0(\xi) = \lambda(\xi) + \mu(\xi) \quad \text{et} \quad Y_1(\xi) = 2i\pi a\xi(\lambda(\xi) - \mu(\xi))$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \lambda(\xi) = \dfrac{1}{2}Y_0(\xi) + \dfrac{Y_1(\xi)}{4i\pi a\xi} \\ \mu(\xi) = \dfrac{1}{2}Y_0(\xi) - \dfrac{Y_1(\xi)}{4i\pi a\xi}. \end{cases}$$

D'où

$$Y(\xi,t) = \frac{1}{2}Y_0(\xi)[e^{2i\pi a\xi t} + e^{-2i\pi a\xi t}] + \frac{Y_1(\xi)}{4i\pi a\xi}[e^{2i\pi a\xi t} - e^{-2i\pi a\xi t}]$$

la transformée de Fourier de la fonction cherchée $y(x,t)$ présumée solution de l'équation (9.8) avec les conditions initiales (9.9). La tansformation inverse nous donne

$$y(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(Y(\xi,t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\xi,t)e^{2i\pi\xi x}\, d\xi$$

d'où

$$\begin{aligned} (9.12) \quad y(x,t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} & Y_0(\xi)[e^{2i\pi a\xi t} + e^{-2i\pi a\xi t}]e^{2i\pi\xi x}\, d\xi \\ & + \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y_1(\xi)}{2i\pi a\xi}[e^{2i\pi a\xi t} - e^{-2i\pi a\xi t}]e^{2i\pi\xi x}\, d\xi \\ & = I + J \end{aligned}$$

mais d'après (9.5) on a

$$e^{\pm 2i\pi a\xi t}Y_0(\xi) = e^{\pm 2i\pi a\xi t}\mathcal{F}(y_0(x)) = \mathcal{F}(y_0(x \pm at))$$

de sorte que

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(y_0(x+at) + y_0(x-at)))e^{2i\pi\xi x}\, d\xi = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(y_0(x+at) + y_0(x-at))]$$

c'est-à-dire

$$I = y_0(x+at) + y_0(x-at).$$

Quant au terme J, notons d'abord que comme précédemment, on a

$$(9.13) \qquad Y_1(\xi)[e^{2i\pi a\xi t} - e^{-2i\pi a\xi t}] = \mathcal{F}(y_1(x+at) - y_1(x-at)).$$

Ceci étant, considérons la fonction

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} (y_1(z+at) - y_1(z-at))dz.$$

Comme on peut le voir, la fonction $u(x)$ est dérivable

$$u'(x) = y_1(x+at) - y_1(x-at) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} h(x) = 0, \tag{9.14}$$

par ailleurs, puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y_1(x+at)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(x-at)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(z)dz,$$

on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0.$$

Ainsi on peut appliquer la formule (10.5) à la fonction $u(x)$ et, compte tenu de (9.13) et (9.14), on obtient

$$J = \frac{1}{a}u(x) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x}(y_1(z+at) - y_1(z-at))dz = \frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at} y_1(z)dz$$

Finalement l'égalité (9.12) permet d'écrire :

$$y(x,t) = \frac{1}{2}(y_0(x+at) + y_0(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} y_1(z)dz.$$

On vérifie facilement que si la fonction y_0 est deux fois différentiable et si la fonction y_1 l'est une fois, cette fonction y est bien une solution de notre problème et cela même si les divers hypothèses faites pour conduire le calcul par les transformation de Fourier ne sont pas vérifiées

9.5 Exercices

1. Calculer les transformées de Fourier des fonctions définies par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \qquad \text{avec } g(-x) = -g(x).$$

2. Déterminer la transformée de $f(x) = e^{-|x|}$. En déduire l'intégrale

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\, dt.$$

3. Trouver la transformée de Fourier de la fonction définie par

$$f(x) = 1 \ \text{ si } \ 0 < x < a \quad f(x) = 0 \ \text{ si } \ x < 0 \ \text{ ou } \ x > a$$

En déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi a\xi)}{\pi\xi}\, d\xi.$$

4. Soit $y(\xi)$ la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-\pi x^2}$. Calculer $y'(\xi)$ et en déduire que

$$y'(\xi) + 2\pi\xi y(\xi) = 0$$

Montrer que $y(\xi) = \lambda e^{-\pi\xi^2}$. En utilisant la transformée inverse de $y(\xi)$, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\, dt = 1, \quad \mathcal{F}(e^{-\pi x^2}) = e^{-\pi\xi^2}.$$

5. Déterminer la fonction f telle que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\cos(2\pi\xi x)dx = \begin{cases} 1-\xi^2 & \text{si } \ 0<\xi<1 \\ 0 & \text{si } \ xi>1 \end{cases}$$

6. On se propose trouver une solution $u(x,t)$ de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad x\in\mathbb{R}, \quad t>0$$

satisfaisant à la condition initiale :

$$u(x,0) = u_0(x)$$

où $u_0(x)$ est une fonction donnée. En posant

$$\hat{u}_0(\xi) = \mathcal{F}(u_0(x)) \quad \hat{u}(\xi,t) = \mathcal{F}(u(x,t))$$

Montrer que

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_0(\xi)e^{-4\pi^2a^2\xi^2 t}\mathcal{F}(u(x,t))$$

En admettant que l'on ait l'égalité (voir exrecice 4) :

$$\mathcal{F}(e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\xi^2} \qquad (\alpha\text{étant une constante})$$

montrer que l'on a la solution :

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\, u_0(y)\, dy.$$

Chapitre 10

Transformation de Laplace

La transformation de Laplace est un outil bien connu des physiciens. Elle trouve son intérêt dnas l'étude des régimes transitoires qui, justement, sont toujours nuls pout $t < 0$ en vertu du principe de causalité (l'instant zéro étant l'instant initial où apparaît l'excitation qui génère le régime transitoire) qui veut que l'effet ne puisse exister avant la cause.

10.1 Définition

Soit $f(x)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et supposée nulle pour $x < 0$. On appelle transformée de Laplace de f la fonction F de la variable (réelle ou éventuellement complexe) p définie par

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}dx. \tag{10.1}$$

Nous poserons alors :

$$\mathcal{L} : f \longrightarrow F \quad F(p) = \mathcal{L}(f(x)).$$

L'application $\mathcal{L}$ est dite transformation de Laplace, la fonction $F(p)$ est parfois dite *l'image* et la fonction f *l'original* de $F(p)$. La transformée de Laplace d'une fonction n'existe que si l'intégrale (10.1) est convergente.

Etant donnée une fonction f, nous allons maintenant chercher pour quelle valeur de p la fonction $F(p)$ est définie. On a alors le

Lemme 10.1.1. *Soit $f(x)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ nulle sur $]-\infty, 0[$ et supposée continue sur tout fermé $[0, A]$. Si l'intégrale $F(p) = \mathcal{L}(f)$ est convergente pour un certain q, alors elle reste convergente pour tout p tel que $\mathcal{R}(p) > \mathcal{R}(q)$.*

En vertu des hypothèses faites, on peut trouver un réel positif M tel que

$$\Big| \int_0^X f(x)e^{-qx}dx \Big| \leq M \quad \text{pour tout} \quad X \geq 0$$

donc la fonction

$$g(x) = \int_0^x f(t)e^{-qt}dt \quad \text{est continue et bornée sur} \quad]0, +\infty[.$$

Supposons que $\mathcal{R}(p) > \mathcal{R}(q)$. En intégrant par parties, on a

$$(10.2) \qquad \int_0^X f(x)e^{-px}dx = \int_0^X f(x)e^{-qx}e^{-(p-q)x}dx = \int_0^X g'(x)e^{-(p-q)x}dx$$
$$\Big[g(x)e^{-(p-q)x}\Big]_0^X + (p-q)\int_0^X g(x)e^{-(p-q)x}dx$$
$$= g(X)e^{-(p-q)X} + (p-q)\int_0^X g(x)e^{-(p-q)x}dx$$

car $g(0) = 0$. Puisque la fonction g est bornée et $e^{-(p-q)X}$ tend vers zéro, donc

$$\lim_{X \to +\infty} g(X)e^{-(p-q)X} = 0.$$

D'autre part,

$$\Big| \int_0^X g(x)e^{-(p-q)x}dx \Big| \leq \int_0^X |g(x)|e^{-\mathcal{R}(p-q)x}dx$$
$$\leq M\int_0^X e^{-\mathcal{R}(p-q)x}dx \leq M\int_0^{+\infty} e^{-\mathcal{R}(p-q)x}dx$$

donc l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}dx \quad \text{est convergente.}$$

D'où le lemme.

Ce résultat est à comparer au lemme d'Abel concernant la convergence des séries entières (chap.3, § 3.5). Des arguments analogues à ceux utilisés pour établir le lemme précédent montrent qu'étant donnée une fonction f continue sur tout fermé $[0, A]$ on a seulement les trois cas possibles

1) L'intégrale $F(p) = \mathcal{L}(f(x))$ converge pour toutes les valeurs de p.

2) L'intégrale $F(p)$ diverge pour toutes les valeurs de p.

3) Il existe un nombre réel p^* tel que l'intégrale $F(p)$ converge lorsque $p > p^*$ si p est un nombre réel, ou si p est complexe, $\mathcal{R}(p) > p^*$ et diverge si $p < p^*$ ou $\mathcal{R}(p) < p^*$.

Le nombre égal à $-\infty$ dans le premier cas, $+\infty$ dans le deuxième cas et à p^* dans le troisième est dit *l'abcisse de convergence* de l'intégrale $F(p)$. Par exemple l'abcisse de convergence de $F(p) = \mathcal{L}(e^{-x^2})$ est égal à $-\infty$, celui de $F(p) = \mathcal{L}(e^{x^2})$ est égal à $+\infty$ et celui de $F(p) = \mathcal{L}(e^x)$ $p^* = 1$.

Dans le cours de ce chapitre nous supposerons toujours que la fonction f remplit les conditions pour qu'il existe une image $F(p)$. Il suffit d'imposer à f les deux conditions suivantes

1) être continue sur tout fermé $[0, A]$

2) avoir un comportement exponentiel à l'infini, c'est-à-dire qu'il existe une constante $K > 0$ et un nombre p^* tels que

$$|f(x)| \leq Ke^{p^* x} \qquad \text{lorsque} \;\; x \to +\infty.$$

En voici quelques exemples dont le calcul de la transformation de Laplace est simple. Toutes le fonctions de la variable réelle $f(x)$ que nous considérons seront supposées nulles pour $x < 0$.

Exemples

1. Fonction de Heaviside.

Elle est définie par

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} 1 \;\text{ si }\; x > 0 \\ 0 \;\text{ si }\; x \leq 0. \end{cases} \tag{10.3}$$

On a

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \mathcal{U}(x)e^{-px}dx = \int_0^{+\infty} e^{-px}dx = \Big[\frac{e^{-px}}{-p}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{p} \qquad p > 0$$

donc

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}(x)) = \frac{1}{p} \qquad p > 0. \tag{10.4}$$

2. Fonction impulsion unité (ou distribution de Dirac).

Soit $\varepsilon > 0$ arbirairement petit. On considère la fonction δ_ε définie par

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} \text{ si } 0 < x < \varepsilon, \\ 0 \text{ si } x > \varepsilon \text{ et } x \leq 0 \end{cases} .$$

Pour ε fixé la fonction $\delta_\varepsilon(x)$ représente une impulsion (par exemple l'action soudaine d'une force) d'amplitude égale $1/\varepsilon$ assez grande. Notons que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = 1.$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) e^{-px} \, dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} e^{-px} \, dx = \frac{1 - e^{-p\varepsilon}}{\varepsilon}$$

donc

$$\mathcal{L}(\delta_\varepsilon(x)) = \frac{1 - e^{-p\varepsilon}}{\varepsilon}.$$

On a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x) = \delta(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ si } x \neq 0. \end{cases}$$

la limite $\delta(x)$ ainsi obtenue n'est pas à proprement parler une fonction. Elle définie la *distribution de Dirac*, appelée par commodité fonction impusion unité car elle sert à représenter en physique une action (force, impulsion) s'exerçcant durant un temps très court. Comme

$$\frac{1 - e^{-p\varepsilon}}{\varepsilon} \longrightarrow 0 \text{ si } \varepsilon \longrightarrow 0$$

on a alors

$$\mathcal{L}(\delta(x)) = 1. \qquad (10.5)$$

3. **Fonction puissance**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et

$$(x) = \begin{cases} x^n \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq= 0. \end{cases}$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-px} \, dx = I_n.$$

Soit $X > 0$. On pose

$$I_n(X) = \int_0^X x^n e^{-px}\, dx.$$

Une intégration par parties nous donne

$$I_n(X) = -\frac{1}{p} x^n e^{-px}\Big|_0^X + \frac{n}{p}\int_0^X x^n e^{-px}\, dx = -\frac{1}{p} X^n e^{-pX} + \frac{n}{p}\int_0^X x^{n-1} e^{-px}\, dx,$$

d'où

$$I_n(X) = -\frac{1}{p} X^n e^{-pX} + \frac{n}{p} I_{n-1}(X)$$

Si $p > 0$, $X^n e^{-pX} \longrightarrow 0$ lorsque X tend vers $+\infty$, d'où

$$I_n = \frac{n}{p} I_{n-1}$$

c'est-à-dire

$$I_n = \frac{n}{p} \times \frac{n-1 \times \cdots}{p} \frac{n}{p} I_0 \quad \text{avec} \quad I_0 = \int_0^{+\infty} e^{px}\, dx = \frac{1}{p}$$

donc

$$\mathcal{L}(x^n) = \frac{n!}{p^{n+1}} \qquad p > 0.$$

4. **Fonction exponentielle.**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } \; x > 0 \\ 0 & \text{si } \; x \leq 0 \end{cases} .$$

On a

$$\begin{aligned} F(p) = \int_0^{+\infty} e^{ax} e^{-px}\, dx &= \lim_{X \to +\infty} \int_0^X e^{-(p-a)x}\, dx = \lim_{X \to +\infty} \frac{-1}{p-a} e^{-(p-a)x}\Big|_0^X \\ &= \frac{1}{p-a}(1 - e^{-(p-a)X}). \end{aligned}$$

Puisque, si $p > a$, $e^{-(p-a)X} \longrightarrow 0$ lorsque X tend vers $+\infty$, on a

$$F(p) = \mathcal{L}(e^{ax}) = \frac{1}{p-a} \quad p > a. \tag{10.6}$$

5. **Fonctions trigonométriques**

Si dans (10.6) on pose $a = i\omega$ où $\omega \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\mathcal{L}(e^{i\omega x}) = \frac{1}{p - i\omega} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} + i\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad p > 0.$$

Or d'après la linéarité de l'intégrale

$$\mathcal{L}(e^{i\omega x}) = \mathcal{L}(\cos(\omega x) + i\sin(\omega x)) = \mathcal{L}(\cos(\omega x)) + i\mathcal{L}(\sin(\omega x))$$

on en déduit

$$\mathcal{L}(\cos(\omega x)) = \frac{p}{p^2+\omega^2}, \quad \mathcal{L}(\sin(\omega x)) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \quad p > 0.$$

10.2 Propriétés de la transformation de Laplace

1. Linéarité

Des propriétes de l'intégrale il en résulte que la transformation de Laplace $\mathcal{L} : f \longrightarrow F$ est linéaire. C'est-à-dire

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathcal{L}(f) + +\mu\mathcal{L}(g) \quad \text{pour tous} \quad \lambda, \mu \in C.$$

Exemples

1. $$\mathcal{L}(2x^2 - 4\cos(2x) + 3) = 2\mathcal{L}(x^2) - 4\mathcal{L}(\cos(2x)) + 3\mathcal{L}(1) = 2\frac{2}{p^3} - 4\frac{p}{p^2+4} + 3\frac{1}{p}$$

2. $$\mathcal{L}(\sin^2 x) = \mathcal{L}\Big(\frac{1-\cos(2x)}{2}\Big) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}(1) - \mathcal{L}(\cos(2x)) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\Big).$$

Dans le cas où la fonction $f(x)$ est définie par une série entière convergente

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

on a

$$\mathcal{L}(f(x)) = \mathcal{L}(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathcal{L}(x^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{n!}{p+1}$$

sous réserve de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{n!}{p+1}$.

Exemple

Soit $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Du développent en série entière de $\sin x$, on tire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

d'ou

$$\mathcal{L}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\frac{(2n)!}{p^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{1}{p^{2n+1}} = \operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{p}\Big).$$

2. Homothétie

Soit $F(p) = \mathcal{L}(f(x))$. λ étant un nombre réel strictement positif, proposons-nous de chercher l'image de la fonction $f(\lambda x)$. Dans l'intégrale

$$\mathcal{L}(f(\lambda x)) = \int_0^{+\infty} f(\lambda x) e^{-px}\, dx$$

faisons le changement de variable $y = \lambda x$. On a

$$\mathcal{L}(f(\lambda x)) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f(y) e^{-\frac{p}{\lambda} x}\, dx = \frac{1}{\lambda} F\Big(\frac{p}{\lambda}\Big)$$

d'où la relation

$$\mathcal{L}(f(\lambda x)) = \frac{1}{\lambda} F\Big(\frac{p}{\lambda}\Big).$$

3. Translation. Transformée de $f(x-a)$

Soit a un nombre réel positif ou nul et $f(x)$ une fonction nulle pour $x \leq 0$. Comparons les images de $f(x)$ et de sa translatée

$$g(x) = \begin{cases} f(x-a) & \text{si } \ x > a \\ 0 \quad \text{si } \ x \leq a. \end{cases}$$

On a

$$\mathcal{L}(f(x-a)) = \int_0^{+\infty} f(x-a) e^{-px}\, dx.$$

Posons $y = x - a$. On a alors

$$\mathcal{L}(f(x-a)) = \int_{-a}^{+\infty} f(y) e^{-p(y+a)}\, dy == e^{-pa} \int_0^{+\infty} f(y) e^{-py}\, dy = e^{-pa} F(p).$$

D'où la relation

$$\mathcal{L}(f(x-a)) = e^{-pa} \mathcal{L}(f(x)). \tag{10.7}$$

Remarque. Si on rappelle la fonction $\mathcal{U}$ définie par (10.3), on peut écrire la fonction $g(x)$ sous la forme

$$g(x) = f(x-a)\mathcal{U}(x-a)$$

d'où

$$\mathcal{L}(f(x-a)\mathcal{U}(x-a)) = e^{-pa}\mathcal{L}(f(x)\mathcal{U}(x)) = e^{-pa}\mathcal{L}(f(x)). \tag{10.8}$$

Ce résultat est habituellemnt appelé *théorème du retard* (le terme e^{-pa} est appelé *facteur de retard*).

Exemple.

soit

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x > 2 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ -1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

En rappelant (10.3), on peut écrire

$$f(x) = \mathcal{U}(x-2) + \mathcal{U}(x-1) - \mathcal{U}(\S))$$

et compte tenu de (10.4) et (10.7), on a

$$F(p) = e^{-2p}\frac{1}{p} + e^{-p}\frac{1}{p} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p}(e^{-2p} + e^{-p} - 1).$$

Application : Transformation d'une fonction périodique.

Soit $f(x)$ une fonction périodique pour $x > 0$, de période T. On pose

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in [0, T] \\ 0 & \text{si} \quad x \geq T \end{cases}$$

et on définit la suite de fonctions

$$f_n(x) = f_0(x - nT)$$

on peut donc écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

d'où en appliquant la linéarité et la relation (10.7)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(x)) = \mathcal{L}(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x))) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathcal{L} f_n(x))) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}(f(x-nT)) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-npT} \mathcal{L}(f_0(x-nT)) \end{aligned}$$

or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-npT} = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \qquad \text{série géométrique,}$$

d'où
$$\mathcal{L}(f(x)) = \frac{\mathcal{L}(f_0(x))}{1 - e^{-pT}}$$
c'est-à-dire
$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}, \qquad F_0(p) = \mathcal{L}(f_0(x)).$$
Exemple. Transformée de la fonction
$$f(x) = |\sin x| \quad \text{si} \quad x \geq 0, \quad f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < 0.$$
La fonction est périodique, de période π. Ici
$$f_0(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si} \quad x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{si} \quad x \geq \pi \end{cases}$$
On peut écrire
$$f_0(x) = \sin x \times \mathcal{U}(x) - \sin x \times \mathcal{U}(x - \pi) = \sin x \times \mathcal{U}(x) + \sin(x - \pi) \times \mathcal{U}(x - \pi)$$
D'où
$$F_0(p) = \frac{1}{1 + p^2} + e^{-p\pi} \frac{1}{1 + p^2} = \frac{1 + e^{-p\pi}}{1 + p^2}$$
et par conséquent
$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-p\pi}} = \frac{1}{1 + p^2} \frac{1 + e^{-p\pi}}{1 - e^{-p\pi}}$$
4. Multiplication par x. Si $F(p)$ est l'original de la fonction $f(x)$, alors on a

(10.9) $$\mathcal{L}(xf(x)) = -F'(p).$$

En effet, on a
$$\begin{aligned} \mathcal{L}(xf(x)) &= \int_0^{+\infty} xf(x)e^{-px}\,dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dp}(f(x))e^{-px})\,dx = \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} f(x))e^{-px}\,dx = \frac{dF}{dp}(p). \end{aligned}$$
d'où la relation (10.9). Mais ce calcul est purement formel et il exige que soit justifier la permutation des opérations intégration et dérivation si l'on veut être assuré de l'exactitude de la formule (10.9).

5. Multiplication par une exponentielle. Cherchons l'image de la fonction $e^{ax}f(x)$. En posons $\mathcal{L}(f(x)) = F(p)$, on a

$$\mathcal{L}(e^{ax}f(x)) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{ax}e^{-xp}\, dx = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-(p-a)x}\, dx = F(p-a).$$

Donc

$$\mathcal{L}(e^{ax}f(x)) = F(p-a), \quad \text{où} \;\; F(p) = \mathcal{L}(f(x)). \tag{10.10}$$

6. Transformée de la dérivée.

Notons d'abord qu'une fonction $f(x)$ peut admettre une transformée de Laplace sans que sa dérivée en admette une. Par exemple la fonction $f(x) = 1/\sqrt{x}$ admet une transformée de Laplace, mais il n'en est pas de même de sa dérivée $f'(x)$, car l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f'(x)e^{-px}\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}e^{-px}\, dx$$

est divergente au voisinage de $x = 0$

Ceci dit, si $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ admettent des transformées de Laplace, alors on a

$$\mathcal{L}(f'(x)) = pF(p) - f(0). \tag{10.11}$$

En effet

$$\int_0^{+\infty} f'(x)e^{-px}\, dx = \lim_{X\to+\infty}\int_0^{X} f'(x)e^{-px}\, dx \tag{10.12}$$

et en intégrant par parties on obtient

$$\int_0^{X} f'(x)e^{-px}\, dx = f(x)e^{-px}\Big|_0^X + p\int_0^{X} f(x)e^{-px}\, dx. \tag{10.13}$$

Comme

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{-px} = 0 \;\; \text{donc} \quad \lim_{X\to+\infty}\left[f(x)e^{-px}\Big|_0^X\right] = -f(0),$$

en passant à la limite lorsque X tend vers $+\infty$ dans l'égalité (10.13), on obtient compte tenu de (10.12)

$$\int_0^{+\infty} f'(x)e^{-px}\, dx = -f(0) + p\int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}\, dx.$$

D'où la formule (10.11). ■

$$\mathcal{L}(f'(x)) = pF(p) - f(0).$$

Généralisation. Si $f''(x)$ posséde à son tour une transformée de Laplace, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f''(x)) &= p\mathcal{L}(f'(x)) - f'(0) = p(p\mathcal{L}(f(x)) - f(0)) - f'(0)\\ &= p(pF(p) - f(0)) - f'(0).\end{aligned}$$

Par récurrence, on vérifie sans peine que

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(x)) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0). \tag{10.14}$$

Dans le cas particulier où $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, on a

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(x)) = p^nF(p).$$

Dériver f correspond alors à multiplier F par p. Cette propriété fondamentale, qui fait la richesse de la transformation de Laplace sera largement utilisée dans l'intégration des équations différentielles et de certaines équations aux dérivées partielles, bien entendu linéaires.

Remarque. Soit la relation

$$\mathcal{L}(f'(x)) = \int_0^{+\infty} f'(x)e^{-px}\, dx = pF(p) - f(0) \tag{10.15}$$

1. Si $p \to +\infty$, $e^{-px} \to 0$. En admettant que

$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^{+\infty} f'(x)e^{-px}\, dx = \int_0^{+\infty} f'(x) \lim_{p\to+\infty} e^{-px}\, dx = 0$$

on en déduit

$$\lim_{p\to+\infty} pF(p) = f(0). \tag{10.16}$$

Cette relation qu'on appelle *théorème de la valeur finale* nous renseigne sur le comportement pour p infini de l'image $F(p)$ de la fonction $f(x)$.

2. Si $p \to 0$, $e^{-px} \to 1$. En admettant que

$$\lim_{p\to 0} \int_0^{+\infty} f'(x)e^{-px}\, dx = \int_0^{+\infty} f'(x) \lim_{p\to 0} e^{-px}\, dx = \int_0^{+\infty} f'(x)\, dx = f(+\infty) - f(0),$$

de (10.15), on en déduit la relation

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = f(+\infty) \tag{10.17}$$

qu'on appelle *théorème de la valeur initiale.*

7. Transformation de la primitive.

Si $\mathcal{L}(f(x)) = F(p)$, alors

$$\mathcal{L}\Big(\int_0^x f(t)\ dt\Big) = \frac{F(p)}{p}. \tag{10.18}$$

En effet soit la fonction

$$G(x) = \int_0^x f(t)\ dt \quad \text{donc} \quad G'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad G(0) = 0.$$

En appliquant la formule (10.11) à la fonction $G'(x)$, on obtient

$$\mathcal{L}(G'(x)) = p\mathcal{L}(G(x))$$

par ailleurs

$$\mathcal{L}(G'(x)) = \mathcal{L}(f(x)) = F(p)$$

d'où la relation (10.18). ■

8. Transformation du produit de convolution.

Soient f et g deux fonctions continues et bornées sur $[0, +\infty[$ que l'on suppose nulles sur l'intervalle $]-\infty, 0[$. Le produit de convolution des fonctions f et g, est une fonction qu'on note $f \star g$ qui est définie par

$$(f\star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Puisque $f(x)$ et $g(x)$ sont nulles sur $]-\infty, 0[$,

$$(f\star g)(x) = \int_0^x f(y)g(x-y)dy.$$

On a la formule

$$\mathcal{L}((f\star g)(x)) = \mathcal{L}(f(x)) \times \mathcal{L}(g(x)). \tag{10.19}$$

En effet,

$$\mathcal{L}((f\star g)(x)) = \int_0^{+\infty} (f\star g)(x)e^{-px}\ dx = \int_0^{+\infty} \Big[\int_0^x f(y)(x-y)dy\Big]e^{-px}\ dx$$
$$= \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \Big[\int_0^x f(y)(x-y)dy\Big]e^{-px}\ dx = \lim_{R\to+\infty} \iint_{D_R} e^{-px} f(y)(x-y)\ dxdy$$

où Ω_R le domaine du plan défini par

$$\Omega_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq R,\ 0 \leq y \leq x\}.$$

En posant

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u \end{cases} \qquad \text{on a} \quad \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = 1$$

$$\iint_{D_R} e^{-px} f(y)(x-y)\ dxdy = \iint_{\Delta_R} e^{-p(u+v)} f(u)g(v)\ dudv,$$

where $\Omega_R = \{(v,u) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq v \leq R,\ 0 \leq u \leq v\}$. Comme

$$\Delta_R \to \mathbb{R}_+^2 = \{(v,u) \in \mathbb{R}^2 : v \geq 0,\ u \geq 0\} \ \text{ si } \ R \longrightarrow +\infty,$$

donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}((f \star g)(x)) &= \lim_{R \to +\infty} \iint_{\Delta_R} e^{-p(u+v)} f(u)g(v)\ dudv = \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{-p(u+v)} f(u)g(v)\ dudv \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u)\ du \int_0^{+\infty} e^{-pv} g(v)\ dv = \mathcal{L}(f(x))\mathcal{L}(g(x)) \end{aligned}$$

d'où la fornule (10.19). ■

10.3 Recherche des transformées de Laplace

· Il existe des tables donnant les transformées de Laplace d'un grand nombre de fonctions usuelles. Toutefois, les considérations du chapitre précédent, notamment les propriétés de la tarnsformation de Laplace, permettent de calculer sans se servir de tables les transformées de Laplace de beaucoup de fonctions simples.

Exemples

1. En utilisant la transformée du produit de convolution (voir (10.19)), montrons que

(10.20)
$$\mathcal{L}\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big) = \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

En effet, en posant $f(x) = 1/\sqrt{x}$ et en choisissant $g(x) = f(x)$, on a

$$\begin{aligned} (f \star g)(x) &= \int_0^x f(y)g(x-y)\ dy = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{x-y}}\ dy = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{xy - y^2}}\ dy \\ &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2/4 - (y - x/2)^2}}\ dy = \int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2/4 - t^2}}\ dt = 2\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2/4 - t^2}}\ dt. \end{aligned}$$

Posons $t = x/2 \sin\vartheta$. On a

$$(f \star g)(x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \,d\vartheta = \pi$$

donc, compte tenu de (10.3) et (10.4)

$$\mathcal{L}((f \star g)(x)) = \mathcal{L}(\pi) = \pi\mathcal{L}(\mathcal{U}(x)) = \frac{\pi}{p}$$

et puisque

$$\mathcal{L}((f \star g)(x)) = \mathcal{L}(f(x))\mathcal{L}(g(x)) = [\mathcal{L}(f(x))]^2$$

on en déduit

$$\frac{\pi}{p} = \Big[\mathcal{L}\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\Big]^2,$$

d'où la relation (10.20). ■

Notons au passage que

$$\mathcal{L}\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-px}\,dx = \frac{2}{\sqrt{p}}\int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{px})^2}\,d(\sqrt{p}x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. En désignant par $Si(x)$ la fonction "sinus intégral de x" définie par l'égalité

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

on a

$$\mathcal{L}(Si(x)) = \frac{1}{p}(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg} p). \tag{10.21}$$

En utilisant (10.18), on a

$$\mathcal{L}(Si(x)) = \frac{F(p)}{p} \qquad F(p) = \mathcal{L}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big).$$

La relation

$$\sin x = x\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)$$

entraîne, d'après (10.9)

$$\mathcal{L}(\sin x) = -F'(p).$$

et comme
$$\mathcal{L}(\sin x) = \frac{1}{1+p^2},$$
alors
$$F'(p) = -\frac{1}{1+p^2} \quad \Longrightarrow \quad F(p) = C - \mathrm{arctg} p.$$
Par ailleurs, de (10.16) il en découle que $F(p) \longrightarrow 0$ lorsque $p \to +\infty$ donc $C = \pi/2$, et
$$F(p) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg} p$$
d'où la relation (10.21). ■

Remarque. L'égalité (10.17) permet de déduire de (10.21) que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = F(0) = \frac{\pi}{2}.$$
On voit comment la transformation de Laplace et ses propriétés permettent de calculer très simplement l'intégrale ci-dessus que nous avons (voir (2.9)) obtenue à l'aide d'un raisonnement long et délicat.

10.4 Transformation de Laplace inverse

Un problème également très intéressant est celui qui consiste à trouver une fonction $f(x)$ connaissant sa transformée de Laplace $F(p)$, c'est-à-dire l'original de $F(p)$. Trois méthodes s'offrent à nous.

1) On peut chercher à déterminer directement $f(x)$ en utilisant la transformation inverse $\mathcal{L}^{-1}$ qui s'exprime comme $\mathcal{L}$ sous forme d'une intégrale, mais cette fois-çi dans le plan complexe. Ce calcul direct est parfois pénible et doit en tout cas être formellement déconseillé tant que l'on ne connaît pas la théorie des fonctions d'une variable complexe (intégrale de Cauchy et théorie des résidus).

2) On peut utiliser les tables de transformées de Laplace en cherchant si la fonction envisagée $F(p)$ ou si une fonction dont elle se déduit facilement figure dans la liste des images.

3) Dans le cas où $F(p)$ a une forme simple, on peut chercher à déterminer directement $f(x)$ en appliquant les résultats que nous avons indiqués et en particulier les formules dèjà vues.

Soit $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction $f(x)$. On appelle transformation de Laplace inverse, ou original, de $F(p)$, la fonction . On note

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(p).$$

Exemples

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{1}{p^2}\Big) = x \\ \mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{p}{p^2+4}\Big) = \cos(2x) \\ \mathcal{L}^{-1}\Big(e^{-ap}\dfrac{1}{p^2+1}\Big) = \sin(x-a) \end{cases} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \mathcal{L}(x) = \dfrac{1}{p^2} \\ \mathcal{L}(\cos(2x)) = (\dfrac{p}{p^2+4} \\ \mathcal{L}(\sin(x-a)) = e^{-ap}\mathcal{L}(\sin x) = \dfrac{e^{-ap}}{p^2+1} \end{cases}$$

10.5 Propriètès de la transformation de Laplace inverse

1. Linéarité

L'inverse d'une application linéaire étant linéaire

$$\mathcal{L}^{-1}(\lambda F + \mu G) = \lambda\mathcal{L}^{-1}(F) + \mu\mathcal{L}^{-1}(G) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{3}{p^2} + \frac{2}{p+2}\Big) = \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{2}{p^2}\Big) + 2\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p+2}\Big)$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{3}{p^2} + \frac{2}{p+2}\Big) = \frac{3}{2}x^2 + 2e^{-2x}.$$

D'une façon générale, si $F(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$ est une fraction rationnelle telle que le degré du dénominateur soit strictement supérieur à celui du numérateur (condition souvent realisée en vertu de (10.16)), on décompose $F(p)$ en une somme d'éléments simples

Exemples. Trouver l'original de

$$F(p) = \frac{p+1}{(p-1)^2(p^2+1)}.$$

La décomposition de $F(p)$ s'écrit

$$\frac{p+1}{(p-1)^2(p^2+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{A}{(p-1)^2} + \frac{Cp+D}{p^2+1}$$

Le calcule donne

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = 1, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = -\frac{1}{2}.$$

D'où

$$f(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p-1}\Big) + \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{(p-1)^2}\Big) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{p}{p^2+1}\Big) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p^2+1}\Big)$$

c'est-à-dire

$$f(x) = -\frac{1}{2}e^x + xe^x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x.$$

2. Original de $F(ap)$. On a

$$\mathcal{L}^{-1}(F(ap)) = \frac{1}{a}f(\frac{x}{a}) \quad \text{où} \quad f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)). \tag{10.22}$$

En effet

$$F(ap) = \int_0^{+\infty} e^{-apx}f(x)dx$$

et en posant $t = ax$, on obtient

$$F(ap) = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(\frac{t}{a})dt.$$

D'où

$$\mathcal{L}^{-1}(F(ap)) = \frac{1}{a}f(\frac{x}{a}).$$

Exemples. Cherchons l'original $f(x)$ de

$$G(p) = \frac{e^{\pi p}}{4p^2+1}.$$

On a

$$G(p) = \frac{e^{\pi p}}{2}\frac{2p}{(2p)^2+1} = e^{p\pi}F(2p), \quad F(p) = \frac{1}{2}\frac{p}{p^2+1}$$

et d'aprés (10.22)

$$\mathcal{L}^{-1}(F(2p)) = \frac{1}{2}f(\frac{x}{a}) \quad \text{avec} \quad f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2}\cos x$$

donc

$$\mathcal{L}^{-1}(F(2p)) = \frac{1}{4}\cos(\frac{x}{2}) \Longrightarrow \mathcal{L}^{-1}(G(p)) = \frac{1}{2}\cos(\frac{x+\pi}{2}).$$

D'où

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{pe^{\pi p}}{4p^2+1}\Big) = -\frac{1}{4}\sin(\frac{x}{2}).$$

3. Original de $F(p+a)$. On a

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p+a)) = e^{-ax}f(x)) \quad \text{où} \quad f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)). \tag{10.23}$$

En effet

$$F(p+a) = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)x} f(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-px}(e^{-ax} f(x))dx$$

$F(p+a)$ est donc l'image de la fonction $g(x) = e^{-ax} f(x)$. D'où (10.23).

Exemples.

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{p+a}{(p+a)^2+\alpha^2}\Big) = e^{-ax}\cos(\alpha x), \quad \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{\alpha}{(p+a)^2+\alpha^2}\Big) = e^{-ax}\sin(\alpha x)$$

d'où

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{p}{p^2+4p+8}\Big) = e^{-2x}(\cos(2x) - \sin(2x)).$$

En effet, il suffit d'écrire

$$\frac{p}{p^2+4p+8} = \frac{(p+2)-2}{(p+2)^2+4} = \frac{p+2}{(p+2)^2+4} - \frac{2}{(p+2)^2+4}$$

4. Originuax d'une dérivée et d'une primitive. Si $f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$ alors

$$\mathcal{L}^{-1}(F'(p)) = -xf(x), \quad \mathcal{L}^{-1}\Big(\int_p^{+\infty} F(q)\ dq\Big) = \frac{f(x)}{x}. \tag{10.24}$$

En effet, la première relation découle immediatement de (10.9). Quant à la seconde, on a

$$\int_p^{+\infty} F(q))\ dq = \int_p^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty} e^{-qx} f(x)\ dx\Big)\ dq = \int_0^{+\infty} f(x)\Big(\int_p^{+\infty} e^{-qx}\ dq\Big)\ dx.$$

Puisque

$$\int_p^{+\infty} e^{-qx}\ dq = \lim_{A\to+\infty}\int_p^{A} e^{-qx}\ dq = \lim_{A\to+\infty}\frac{e^{-px}-e^{-xA}}{x} = \frac{e^{-px}}{x},$$

car $e^{-xA} \to 0$ si $A \to +\infty$, on a

$$\int_p^{+\infty} F(q))\ dq = \int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{f(x)}{x}\ dx = \mathcal{L}\Big(\frac{f(x)}{x}\Big)$$

d'où la seconde relation de (10.24).

Remarque. En appliquant n fois la formule $\mathcal{L}^{-1}(F'(p)) = -xf(x)$), on obtient plus généralement

$$\mathcal{L}^{-1}(F^{(n)}(p)) = (-1)^n x^n f(x). \tag{10.25}$$

Exemples.

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p+1}\Big) = e^{-x} \quad \text{donc} \quad \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{2}{(p+1)^3}\Big) = x^2e^{-x}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p^2+1}\Big) = \sin x \quad \text{donc} \quad \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{-2p}{(p^2+1)^2}\Big) = x\sin x.$$

Montrons que
$$\mathcal{L}^{-1}\big(\text{arctg } \frac{1}{p})\big) = \frac{\sin x}{x}.$$
On a
$$\int_p^{+\infty} \frac{1}{1+q^2}\ dq = \frac{\pi}{2} - \text{arctg } p = \text{arctg } \frac{1}{p}$$
d'où
$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\int_p^{+\infty} \frac{1}{1+q^2}\ dq\Big) = \frac{\sin x}{x}$$
c'est-à-dire
$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{\sin x}{x}\ dx = \text{arctg } \frac{1}{p}$$
en particulier si $p \to 0$, on obtient
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ dx = \frac{\pi}{2}.$$

5. Original du produit. Si $f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$ et $g(x) = \mathcal{L}^{-1}(G(p))$ alors

(10.26) $$\mathcal{L}^{-1}(F(p) \times G(p)) = \int_0^x f(y)g(x-y)\ dy.$$

C'est une conséquence directe de (10.19).

exemples. Original de
$$F(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+1)}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p+1}\Big) = e^{-x} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{p}{p^2+1}\Big) = \cos x.$$
d'où
$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{p}{(p+1)(p^2+1)}\Big) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\Big) = \int_0^x \cos y e^{-(x-y)}\ dy = e^{-x}\int_0^x e^{-y}\cos y\ dy.$$
A l'aide d'une double intégration par parties, on obtient
$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{p}{(p+1)(p^2+1)}\Big) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x - e^{-x})$$
résultat que l'on pouvait également déduire de la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $F(p)$.

10.6 Application à l'intégration des equations différentielles

Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots a_0 y(x) = f(x). \tag{10.27}$$

On a vu que si $\mathcal{L}(y(x)) = Y(p)$

$$\mathcal{L}(y'(x)) = pY(p) - y(0), \quad \mathcal{L}(y''(x)) = p^2 Y(p) - py(0) - y'(0)$$

et plus généralement

$$\mathcal{L}(y^{(n)}(x)) = p^n Y(p) - p^{n-1} y(0) - p^{n-2} y'(0) - \cdots y^{(n-1)}(0).$$

En appliquant la transformation à l'équation différentielle (10.27), on obtient donc grâce à la linéarité

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots a_1 p + a_0) Y(p) + Z(p) = F(p)$$

où $F(p) = \mathcal{L}(f(x))$ et $Z(p)$ un polynôme de degré $n-1$ en p contenant $y(0), y'(0), \cdots, y^{(n-1)}(0)$. On en déduit

$$Y(p) = \frac{F(p) - Z(p)}{Q_n(p)}, \qquad Q_n(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots a_1 p + a_0$$

et par conséquent, en appliquant la transformation inverse

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}(Y(p)).$$

Le calcul précédent transforme l'équation différentielle (10.27) en une équation algébrique, la solution $y(x)$ est obtenue sans intégration en cherchant l'original de $Y(p)$.

Exemple 1. Résoudre le problème de Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = xe^x \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Posons $Y(p) = \mathcal{L}(y(x))$. En appliquant à l'équation la transformation de Laplace, compte tenu des conditions initiales, on obtient

$$\mathcal{L}(y'' - 3y' + 2y) = 2\mathcal{L}(y'') - 3\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = (p^2 - 3p + 2)Y(p) = \mathcal{L}(xe^x)$$

et, puisque

$$\mathcal{L}(xe^x) = \frac{1}{(p-1)^2}$$

grâce à (10.9), on a alors

$$(p^2-3p+2)Y(p)=\frac{1}{(p-1)^2}\Longrightarrow Y(p)=\frac{1}{(p-2)(p-1)^3}.$$

La décomposition de $Y(p)$ en éléments simples s'écrit

$$Y(p)=\frac{1}{(p-2)(p-1)^3}=\frac{A}{p-2}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{(p-1)^2}+\frac{D}{(p-1)^3}$$

et le calcul donne $A=1$ et $B=C=D=-1$. D'où

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(Y(p)) &= -\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p-2}\Big)+\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p-1}\Big)+\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{(p-1)^2}\Big)+\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{(p-1)^3}\Big)\\ &= -e^{2x}+e^x(1-x+\frac{x^2}{3})\end{aligned}$$

et par suite

$$y(x)=e^{2x}-e^x(1+x+\frac{x^2}{2}).$$

La méthode précédente se généralise d'ailleurs au cas des équations différentielles à coefficients non constants et des systèmes différentielles linéaires.

Exemple 2. Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$xy''-(1+x)y'+2y=0 \qquad y(0)=0,\ \ y'(0)=0.$$

Posons $\mathcal{L}(y(x))=Y(p)$. On utilise la propriété (10.9), on a

$$\mathcal{L}(xy''(x))=-(\mathcal{L}(y''(x)))'=-(p^2Y(p)-py(0)-y'(0))'=-p^2Y'(p)-2pY(p)+y(0)$$
$$\mathcal{L}((1+x)y'(x))=\mathcal{L}(y'(x))-(\mathcal{L}(y'(x)))'=pY(p)-y(0)-pY'(p)-Y(p).$$

Si on applique à l'équation la transformation de Laplace et en tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$(p-p^2)Y'(P)+(3-3p)Y(p)=0 \quad\Longrightarrow\quad pY'(P)+3Y(p)=0,$$

équation à variable séparables qui admet pour solution générale

$$Y(p)=\frac{\lambda}{p^3} \quad \lambda \text{ étant une constante}$$

D'où la forme générale des solutions cherchées

$$f(x)=\mu x^2 \quad \mu \text{ étant une constante.}$$

Exemple 3. Déformation d'une poutre. Soit une poutre de longueur $2l$ que l'on assimile au segment $]0,2l[$ soumise une force latérale q(x) répartie sur $[0,2l]$. On supposant que la poutre est encastrée en ses deux extrémitées. Sa déformation $y(x)$ à partir de la position d'équilibre sous l'action de la force $q(x)$ est donnée par l'équation différentielle

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \alpha q(x) \quad 0 < x < 2l \tag{10.28}$$

où α est une constante positive. Nous nous proposons de déterminer la fonction $y(x)$ dans le cas où la charge $q(x)$ est définie par

$$\begin{cases} q(x) = q & \text{si } \ 0 \leq x \leq l \\ q(x) = 0 & \text{si } \ L \leq x \leq 2l \end{cases} \tag{10.29}$$

Le fait que la poutre est encastrée aux extrémitées se traduit par les conditions limites

$$\begin{cases} y(0) = y(2l) = 0 \\ y'(0) = y'(2l) = 0. \end{cases} \tag{10.30}$$

Désignons par $Y(p)$ l'image de l'inconnue $y(x)$ et posons

$$y''(0) = \lambda \quad y'''(0) = \mu \tag{10.31}$$

(nous déterminerons plus tard ces deux constantes).

On a alors, en supposons $y(x)$ et ses trois premières dérivées continues sur $]0,2l[$

$$\mathcal{L}(y^{(4)}(x)) = p^4Y(p) - p^3y(0) - p^2y'(0) - py''(0) - y'''(0) = \alpha\mathcal{L}(q(x))$$

et, compte tenu de (11.28) et (10.31)

$$p^4Y(p) - \lambda p - \mu = Q(p)$$

où $Q(p)$ est l'original de $q(x)$. En rappelant (10.3), on peut écrire $q(x)$ sous la forme

$$q(x) = q\mathcal{U}(x) - q\mathcal{U}(x-l)$$

de sorte que (voir (**??**) et (10.7)), on a

$$Q(p) = \frac{\alpha q}{p}(1 - e^{lp}).$$

D'où
$$p^4 Y(p) - \lambda p - \mu = \frac{\alpha q}{p}(1 - e^{lp})$$
c'est-à-dire
$$Y(p) = \frac{\lambda}{p^3} + \frac{\mu}{p^4} + \frac{\alpha q}{p^5} - \alpha q \frac{e^{lp}}{p^5}.$$
En revenant à l'origine, on a
$$y(x) = \lambda \frac{x^2}{2} + \mu \frac{x^3}{6} + \alpha q \frac{x^4}{24} - \frac{\alpha q}{24}(x-l)^4 \mathcal{U}(x-l)$$
(pour le dernier terme on a uilisé la formule (10.8)).

La fonction inconnue y sera donc complètement déterminée quand nous connaîtrons les constantes λ et μ. Elles seront obtenues en utilisant les conditions $y(2l) = y'(2l) = 0$. En effet
$$\begin{aligned} y(2l) &= 2\lambda l^2 + \frac{8\mu}{6} l^3 + \frac{16\alpha q}{24} l^4 - \frac{\alpha q}{24} l^4 \\ y'(2l) &= 2\lambda l + 2\mu l^2 + \frac{4\alpha q}{3} l^3 - \frac{\alpha q}{6} l^3 \end{aligned} \quad .$$
On tire
$$\lambda = 11\alpha q \frac{l^2}{48} \quad \text{et} \quad \mu = -13\alpha q \frac{l}{16}.$$
On voit qu'elle se compose de deux polynômes du quatrième et du troisième degré qui, au pont d'abscisse l (milieu de la poutre), ont même valeur et mêmes dérivées perimière, seconde et troisième

Remarque. 1° En principe, la transformation de Laplace faisant intervenir que les valeurs de $y(x)$ correspondant à $x > 0$, la méthode que nous venons d'indiquer ne permet pas de déterminer la fonction inconnue $y(x)$ pour $x < 0$. En pratique, comme on l'a vu dans les exemples 1 et 2, on trouve une expression de $y(x)$ qui est définie également pour les $x < 0$ et satisfait à l'équation différentielle posée pour $x < 0$. Dans le cas où le second membre $f(x)$ de l'équation différentielle a une expression pour $x < 0$ différente de son expressionn pour $x > 0$, on pourraît chercher directement la forme de la solution $y(x)$ pour $x < 0$ en prenant comme nouvelle variable $t = -x$ et en cherchant la transformée de la Laplace de la fonction
$$z(t) = y(-x).$$

2° Nous savons (voir sectio 6.4) comment intégrer les équations différentielles linéaires à coefficients constants (on intégre d'abord l'équation homogène puis on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre). Toutefois, lorsque l'on cherche une solution dont on se donne par exemple les valeurs initiales $y(0), y'(0), \cdots, y^{(n-1)}(0)$ ou des valeurs aux limites comme dans les exemples 1 et 2, on a souvent intérêt à utiliser la transformation de Laplace qui donne directement la solution cherchée sans passer par la solution génrale. On remarquera en outre (voir l'exemple 3), l'avantage qu'il y a à utiliser la transformation de Laplace lorsque le second membre $f(x)$ de l'équation différentielle ne conserve pas la même expression pour toute valeur de x.

10.7 Application à la résolution des équations aux dérivées partielles.

Montrons sur un exemple particulier concernant l'équation de la chaleur comment, dans certains cas, la transformation de Laplace permet de ramener une equation aux dérivées partielles à une equation différentielle.

Imaginons une barre métallique semi infinie que l'on assimilera au segment $]0, +\infty[$ et supposons qu'à tout instant t les points de la barre situés à une même distance x de l'origine soient à la même température $u(x, t)$. On montre alors que cette fonction $u(x, t)$ satisfait à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \forall x > 0 \ \ \forall t > 0 \tag{10.32}$$

où $\kappa > 0$ est le coefficient de conductibilité thermique. Cherchons à déterminer $u(t, x)$ donnant la température de la barre sachant qu'à l'instant initial $t = 0$ tous les points de la barre ont même température nulle, que l'origine de la barre est maintenue à la température T et enfin que la température de la barre reste nulle à l'infini. Ceci revient donc à déterminer $u(t, x)$ définie pour $x > 0$ telle que

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \ \ \forall x > 0 \\ u(0, t) = T \ \ \forall t > 0 \\ u(x, t) \to 0 \ \text{ si } \ x \to +\infty \end{cases} \tag{10.33}$$

Soit

$$U(p,x) = \int_0^{+\infty} u(x,t)e^{-pt}dt$$

l'image de de la fonction $u(x,t)$ considérée comme fonction de t.

Appliquons sans précaution particulière les propriétés des transformées de Laplace. On a

$$\mathcal{L}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \mathcal{L}(\frac{\partial u}{\partial t}) = pU(p,x) - u(x,0) = pU(p,x).$$

L'équation (10.32) permet donc d'écrire

$$-\kappa \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + pU = 0 \quad \forall x > 0 \tag{10.34}$$

qui peut être considérée comme une équation différentielle, p jouant ici le rôle de paramètre que nous pouvons toujours supposé réel et positif.

L'équation (10.34) est une équation linèaire homogène du second degré à coefficients constants dont le polynôme caractétéristique s'écrit

$$\kappa r^2 - p = 0.$$

Les racines cette équations étant $\pm\sqrt{\frac{p}{\kappa}}$ la solution générale de l'équation (10.34) sécrit

$$U(p,x) = \lambda e^{\sqrt{\frac{p}{\kappa}}} + \mu e^{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}}$$

où λ et μ étant des constantes par rapport à la variable x mais elles dépendent de p. Nous écrirons donc

$$U(p,x) = \lambda(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\kappa}}} + \mu(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}}.$$

D'après les deux dernières conditions de (10.33), on a $U(0,p) = \mathcal{L}(T) = \dfrac{T}{p}$ et $U(p,x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. En exprimant ces deux conditions, nous aurons donc

$$\begin{cases} \lambda(p) + \mu(p) = 0 & \text{condition relative à } \ x = 0 \\ \lambda(p) = 0 & \text{condition relative à } \ x \to +\infty \end{cases}$$

d'où l'expression cherchée de $U(p,x)$

$$U(p,x) = \frac{T}{p}e^{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}}.$$

Il faut maintenant remonter à l'original de $u(x,t)$ connaissant sa transformée de Laplace. Un dictionnaire des images nous fournit l'égalité

$$\mathcal{L}\Big(\mathrm{Erf}\ \frac{a}{2\sqrt{t}}\Big) = \frac{1}{p}(1 - e^{-a\sqrt{p}})$$

la fonction Erf étant définie par

$$\mathrm{Erf}\ X = 2_over\sqrt{\pi}\int_0^X e^{-y^2}\ dy.$$

On en tire donc

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p} = \frac{1}{p} - \mathcal{L}\Big(\mathrm{Erf}\ \frac{a}{2\sqrt{t}}\Big) = \mathcal{L}\Big(1 - \mathrm{Erf}\ \frac{a}{2\sqrt{t}}\Big).$$

d'où, en posant $a = \dfrac{x}{\kappa}$, on tire

$$\frac{T}{p}e^{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}} = \mathcal{L}\Big(T - T\mathrm{Erf}\ \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\Big)$$

et enfin

$$u(x,t) = T\Big(1 - \mathrm{Erf}\ \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\Big).$$

Exercices

1. Calculer les transformées de Laplace $F(p)$, $H(p)$ et $G(p)$ des fonctions définies par

$$f(t) = 1 \ \text{ si } \ 0 < x < a, \quad f(x) = 0 \ \text{ si } \ x > a, \quad f(x) = 0 \ \text{ si } \ x < 0,$$
$$h(x) = x \ \text{ si } \ 0 < x < a, \quad f(x) = 0 \ \text{ si } \ x > a, \quad f(x) = 0 \ \text{ si } \ x < 0,$$
$$g(x) = a \ \text{ si } \ 0 < x < a, \quad f(x) = x \ \text{ si } \ x > a,, \quad f(x) = 0 \ \text{ si } \ x < 0.$$

2. Trouver les transformées de Laplace des fonctions $f(t)$ suivantes définies pour tout $t > 0$ par

$$f(x) = (x^3+1)^2, \quad f(x) = 2\sin(2x) - \cos(xt), \quad f(x) = \sin(2x+\alpha) + 2\cos(x-\alpha),$$
$$f(x) = e^{-2x}\sin(\pi x), \quad f(x) = (x^2+2x-1)e^{-x}, \quad f(x) = \cos^2 x, \quad f(x) = \sin^2 x,$$
$$f(x) = \cos(ax)\sin(bx), \quad f(t) = \mathrm{sh}(\alpha x), \quad f(x) = \mathrm{ch}(\alpha x).$$

3. Soient les fonctions $f_1(x) = x\cos(\omega x)$ et $f_2(x) = x\sin(\omega x)$ $(x > 0)$.

i) En utilisant les exponentielles complexes et la linéarité de la transfomation de Laplace, déterminer les images $F_1(p)$ et $F_2(p)$ des fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

1). Soit $f(x)$ une fonction définie pour $x > 0$ et $F(p) = \mathcal{L}(f(x))$ sa transformée de Laplace. Montrer que $\mathcal{L}(xf(x)) = -F'(p)$. Comme application, retrouver les expressions de $F_1(p)$ et $F_2(p)$.

4. Soit $f(t)$ une fonction périodique pour $x > 0$, de période T. On pose

$$f_0(x) = 0 \text{ si } x \leq 0, \quad f_0(x) = f(x) \text{ si } 0 \leq x \leq T, \quad f_0(x) = 0 \text{ si } x \geq T,$$
$$f_1(x) = f_0(x-T), \quad f_x(t) = f_0(x-2T), \ \cdots, \ f_N(x) = f_0(x-NT),$$
$$g_N(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_N(x).$$

1) En appliquant la linéarité et le théorème du retard, calculer $G_N(p) = \mathcal{L}(g_N(x))$.
2) Calculer la limite $G(p)$ de $G_N(p)$ lorsque N tends vers l'infini. On pose $F(p) = \mathcal{L}(f(x))$. Montrer que

$$F(p) = G(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{pT}}, \quad F_0(p) = \mathcal{L}(f(x)).$$

Donc pour calculer la transformée de Laplace d'une fonction périodique $f(x)$, il suffit de calculer l'image de la fonction $f_0(x)$ qui coincide avec $f(x)$ pour tout $x \in [0, T]$.

5. Comme application, calculer les transformées de Laplace des fonctions périodiques $f_1(x), \cdots, f_4(x)$, de période $T = 2\pi$, défin

$$f_1(x) = 1 \quad \text{si} \ 0 < x < \pi, \quad f_1(x) = -1 \quad \text{si} \ \pi < x < 2\pi,$$
$$f_2(x) = x \quad \text{si} \ 0 < x < 2\pi,$$
$$f_3(x) = \frac{1}{\pi}x \ \text{ si } \ 0 < t < \pi, \quad f_3(x) = -\frac{1}{\pi}x + 2 \ \text{ si } \ \pi < x < 2\pi,$$
$$f_4(x) = \sin x \quad \text{si} \ 0 < x < \pi, \quad f_4(x) = 0 \ \text{ si } \ \pi < x < 2\pi.$$

6. Trouver les originaux des fonctions rationnelles suivantes

$$\frac{1}{p^2-2}, \ \frac{p}{p^2-4}, \ \frac{1}{(p+\alpha)^2}, \ \frac{p^2}{(p-2)(p+1)},$$
$$\frac{p+1}{p(p+4)^2}, \ \frac{p+2}{p^2+2p+2}, \ \frac{2p+1}{p^2-3p+2}, \ \frac{p}{(p^2+1)^2}.$$

7. En utilisant le théorème du retard (voir (10.8)), déterminer les originaux de

$$\frac{e^{-3p}}{p+1}, \quad \frac{e^{-p\pi}}{p^2+2p+3}.$$

8. Soient $f(x)$ une fonction et $F(p) = \mathcal{L}(f(x))$ son image. Calculer $F'(p)$ (on admettra que l'on peut dériver sous le signe intégrale) et en déduire que $\mathcal{L}^{-1}(F'(p)) = -xf(x)$. Application

1) Déterminer l'original de $F(p) = \log(1 + \dfrac{1}{p^2})$.

2) Calculer les images de $f_1(x) = x\sin(\omega x)$ et $f_2(x) = x\cos(\omega x)$ (voir exercice 3).

9. Soit $F(p) = \mathcal{L}(f(x))$. Montrer que

$$\int_p^{+\infty} F(q)dq = \int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{f(x)}{x}dx,$$

et en déduire que $\mathcal{L}^{-1}(\tilde{F}(p)) = \dfrac{f(t)}{t}$ où $\tilde{F}(p)$ désigne l'intégrale à gauche de l'égalité précédente. Comme application, trouver les images des fonctions

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}.$$

10. Déterminer l'unique solution $y(x)$ des problèmes de Cauchy

$$y'' + y = \sin 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$

$$y'' + 4y + 4 = xe^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos(2x), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0.$$

11. Trouver la solution des problèmes aux limites

$$\begin{cases} y'' - \omega^2 y = f(x), \quad 0 < x < 1 \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} f_0\cos(\pi x) \\ \mathcal{U}(x) \\ f_0\delta(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = f(x), \quad 0 < x < l \\ y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} q_0 & \text{si } 0 < x < \dfrac{l}{2} \\ q_1 & \text{si } \dfrac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

où q_0 et q_1.

12. On considère une poutre de longueur l assmilée au segment $[A, B]$ reposant sur deux appuis simples. On suppose que la poutre est soumise à une seule charge latérale q située à une distance d de l'extrémité droite B et à une force axiale p. On sait que sa déformation $y(x)$ à partir de sa position d'équilibre est donnée par l'équation différentielle

$$\begin{cases} \alpha y'' + py = f(x), \quad 0 < x < l \\ y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{qd}{l}x \quad \text{si} \;\; 0 < x < l-d \\ \dfrac{q(l-d)}{l}(l-x) \quad \text{si} \;\; l-d < x < l \end{cases}$$

où $\alpha > 0$ est le coefficient de rigidité à la flexion de la poutre. Calculer le déplacement maximal $y_{\max}$ et le moment de flexion maximal $M_{\max}$

13. Montrer par récurrence que $\mathcal{L}(t^n f(x)) = (-1)^n F^{(n)}(p)$ où $F(p) = \mathcal{L}(f(x))$. En utilisant cette propriétè, résoudre les problèmes aux limites

$$x^2 y'' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

14. On sait que la déformation $y(x)$ d'une poutre de longueur L à partir de sa position d'équilibre est donnée par l'équation différentielle

$$\frac{d^4 y}{dx} = aq(x), \quad 0 < x < L, \tag{1}$$

où $q(x)$ est la charge à laquelle est soumise la poutre et $a >$ le coefficient de rigidité à la poutre. On suppose que la poutre est fixée à ses extrémités ; c'est-à-dire

$$y(0) = y(2L) = 0, \quad y'(0) = y'(2L) = 0. \tag{2}$$

Déterminer la solution de l'équation (1) avec les conditions aux limites (2) les cas où

1) la charge est uniforme donc $q(x) = q_0$ constante

2) la charge est concentrée au milieu de la poutre c'est-à-dire $q(x) = q_0\delta(x - L)$. 3) la charge est donnée par

$$q(x) = q_0 \quad \text{si} \quad 0 < x < L, \qquad q(x) = 0 \quad \text{si} \quad L < x < 2L$$

15. On considère l'équation des ondes qui modèlise au cours du temps les petites élongations transversales $u(x,t)$ d'une corde homogème de longueur l,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x) \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \tag{1}$$

avec les conditions aux limites et initiales

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \tag{3}$$

On pose tout x fixé $\mathcal{L}(u(t,x)) = U(p,x)$. En appliquant la transformation de Laplace à l'équation (1) et aux conditions aux limites (2), trouver la solution du problème (1)-(3) dans les cas

1) $f(t,x) = 0$, la position initiale $u_0(x) = \sin(\frac{\pi}{l}x)$ et la vitesse initiale $u_1(x) = 0$

2) $f(t,x) = \cos(\frac{\pi}{2l}x)$ et

$$u_0(x) = \frac{2x}{l} \quad \text{si} \quad 0 < x < \frac{l}{2}, \quad u_0(x) = -\frac{2x}{l} + 2 \quad \text{si} \quad \frac{l}{2} < x < l \quad \text{et} \quad u_1(x) = 0.$$

Chapitre 11

Intégration des équations aux dérivées partielles

Dans ce chapitre, on verra comment appliquer les séries de Fourier à l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles. Ces séries ont été introduites par Fourier en 1812 pour résoudre l'équation "dite de la chaleur".

11.1 Equation de la chaleur

1. Cas d'une barre métallique finie

Considérons une barre métallique de longueur l qu'on assimilera au segment $[0, l]$. On veut connaitre la température $T(x, t)$ de la barre en tout point $x \in]0, l[$ et à tout instant $t > 0$. En présence de source de chaleur extérieure $f(x, t)$, la température $T(x, t)$ qu'on cherche vérifie l'équation dite de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) \qquad \forall\ (x,t) \in]0, l[\times]0, +\infty[, \tag{11.1}$$

où $\kappa > 0$ est le coefficient de conductibilité thermique. Pour déterminer complètement la température T, on doit connaitre la température initiale et la température aux extrémités de la barre, puisque celle-ci est finie. Par exemple, si aux extrémités la barre est maintenue à une température qui peut varier avec le temps, on pose alors

$$T(0,t) = \varphi(t), \quad T(l,t) = \psi(t) \ \ \forall\ t \in\ ]0, +\infty[, \tag{11.2}$$

où $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont des fonctions données. Les conditions au limites (11.2) sont dites conditions non homogènes de Dirichlet .On doit connaître aussi à l'instant initiale la distribution de la température dans toute la barre. Si on désigne par T_0 cette température initiale, on pose

$$T(x,0) = T_0(x), \quad \forall\ x \in\ ]0,l[.$$

On supposera que la température initiale $T_0(x)$ est une fonction continue et continûment dérivable sur $]0,l[$ telle que $T_0(0) = \varphi(0)$ et $T_0(l) = \psi(l)$ (nécessaire à cause des conditions aux limites.) On commencera par examiner le cas où

$$\varphi(t) = \psi(t) = 0 \quad \forall\ t \geq 0, \quad f(x,t) = 0 \quad \forall\ (x,t) \in\ ]0,l[\times]0,\infty[,$$

c'est-à-dire, par résoudre le problème homogène suivant

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dans} \quad]0,l[\times]0,+\infty[\tag{11.3}$$

$$T(0,t) = 0, \quad T(l,t) = 0 \ \ \forall\ t \in\ ]0,+\infty[\tag{11.4}$$

$$T(x,0) = T_0(x), \quad \forall\ x \in\ ]0,l[. \tag{11.5}$$

L'idée de départ est de chercher une solution de l'équation (11.3) de la forme

$$T(x,t) = u(x)v(t) \tag{11.6}$$

(séparation des variables). Alors l'équation (11.3) est équivalente à

$$u(x)v'(t) = \kappa u''(x)v(t), \tag{11.7}$$

et, les conditions aux limites (11.4) sont équivalentes à

$$u(0) = u(l) = 0. \tag{11.8}$$

Nous chercherons une solution telle que $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0,l[$ et $v(t) \neq 0$ pour tout $t > 0$. Ainsi l'égalité (11.7) nous donne

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{v'(t)}{\kappa v(t)} \quad \forall\ x \in]0,l[\ \text{ et } \ \forall\ t > 0. \tag{11.9}$$

L'égalité (11.9) ne peut avoir lieu pour tout $(x,t) \in]0,l[\times]0,+\infty[$ que si les deux membres sont constants, c'est-à-dire s'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$u''(x) = \lambda u(x), \quad x \in]0,l[\tag{11.10}$$

$$v'(t) = \lambda \kappa v(t), \quad t \in]0,+\infty[. \tag{11.11}$$

Si $\lambda > 0$, la solution générale de l'équation (11.10) est $u(x) = Ae^{x\sqrt{\lambda}} + Be^{-x\sqrt{\lambda}}$ avec deux constantes A et B. Puisque $u(0) = u(l) = 0$, alors on obtient

$$A + B = 0 \quad \text{et} \quad Ae^{L\sqrt{\lambda}} + Be^{-L\sqrt{\lambda}} = 0.$$

D'où $A = B = 0$ et donc $T(x,t) = 0$, ce qui contredit la condition (11.5). De même si $\lambda = 0$ on a $u(x) = Ax + B$ et (11.8) implique que $u = 0$. Donc, seul le cas $\lambda < 0$ convient, on pose alors $\lambda = -\alpha^2$ avec α un nombre réel différent de zéro. Dans ce cas la solution de l'équation différentielle (11.10) est donnée par

$$u(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$$

où A,B et α sont des constantes à déterminer. En effet, en utilisant les conditions aux limites (11.8), on obtient pour $x = 0$, $A = 0$, et pour $x = l$, $B\sin(\alpha l) = 0$, d'où (puisque $B \neq 0$) $\alpha l = n\pi$, et donc

$$\alpha = \frac{n\pi}{l} \quad n = 1, 2, \cdots,$$

ainsi

$$u(x) = B\sin(\alpha x), \quad \alpha = \frac{n\pi}{l} \quad n \geq 1.$$

Quant à la solution de l'équation (11.49), elle est donnée par

$$v(t) = Ce^{-\alpha^2 \kappa t}.$$

Donc d'après (11.6), en posant $b = CB$, on obtient

$$T(x,t) = be^{-\alpha^2 \kappa t}\sin(\alpha x). \tag{11.12}$$

En remplaçant les valeurs de α dans (11.12), on obtient

$$T_n(x,t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\kappa t\right) \quad n \geq 1.$$

Pour chaque n, $T_n(x,t)$ est une solution de l'équation (11.3) vérifiant les conditions aux limites (11.4). Puisque, l'équation (11.3) est linéaire, une somme finie de telles solutions T_n est encore une solution. L'idée est de prendre comme solution une somme infinie, c'est-à-dire, sous réserve de convergence, on pose

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{l}x)\exp(-n^2\frac{\pi^2}{l^2}\kappa t). \tag{11.13}$$

Les constantes b_n sont déterminés par la donnée de la température initiale $T(x,0) = T_0(x)$. En effet, en faisant $t = 0$ dans (11.58), on obtient

$$T_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

Les constantes b_n sont donc les coefficients de Fourier du développement de la fonction T_0 en série de sinus obtenu en prolongeant T_0 en une fonction impaire périodique, de période $T = 2l$, c'est-à-dire

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l T_0(y)\sin(\frac{n\pi}{l}y)dy.$$

Anisi la solution cherchée $T(x,t)$ du problème de l'éqution de la chaleur (11.3)-(11.5) est donnée par la formule

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{2}{l}\int_0^l T_0(y)\sin(\frac{n\pi}{l}y)dy\Big]\sin(\frac{n\pi}{l}x)\exp(-n^2\frac{\pi^2}{l^2}\kappa t).$$

Remarque. Notons que la solution $T(t,x)$ peut s'écrire sous la forme

$$T(x,t) = \int_0^l T_0(y)\Big[\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}\kappa t}\sin(\frac{n\pi}{l}x)\sin(\frac{n\pi}{l}s)\Big]ds.$$

En posant

$$K(t,x,y) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}\kappa t}\sin(\frac{n\pi}{l}x)\sin(\frac{n\pi}{l}y) \quad t > 0, \quad x,y \in [0,l],$$

on peut mettre la solution $T(x,t)$ sous la forme

$$T(x,t) = \int_0^l K(t,x,y)T_0(y)dy. \tag{11.14}$$

Sous cette forme, on met en évidence la dépendance linéaire entre la solution $T(x,t)$ et sa donnée initiale T_0. Le noyau $K(t,x,y)$ défini pour tout $t > 0$ et pour tous $x,y \in [0,l]$ dépend de la forme de l'équation de la chaleur et des conditions aux limites.

Application. Si par exemple $T_0(x) = 1$ pour tout $x \in]0, l[$, en prolongeant T_0 en une fonction impaire périodique, de période $2l$, on a

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l \sin(\frac{n\pi}{l}x)dx = -\frac{2}{n\pi}(\cos(n\pi) - 1) = -\frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1),$$

et donc

$$b_{2k} = 0, \quad b_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi}.$$

D'où

$$T(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\exp(-(2k+1)^2\frac{\pi^2}{l^2}\kappa t)\sin((2k+1)\frac{\pi}{l}x).$$

bf Exercice 1. Résoudre le problème aux limtes et initial pour l'équation de la chaleur

$$\begin{gathered}\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dans} \quad]0, l[\times]0, +\infty[\\ T(0,t) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(l,t) = 0 \quad \forall\ t \geq 0\\ T(x,0) = x\end{gathered}$$

Exercice 2. Résoudre le problème aux limites et initial pour l'équation de la chaleur

$$\begin{gathered}\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dans} \quad]0, l[\times]0, +\infty[\\ \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial T}{\partial x}(l,t) = 0 \quad \forall\ t \geq 0\\ T(x,0) = x^2\end{gathered}$$

Exercice 3. Même question que les exercices précédents

$$\begin{gathered}\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dans} \quad]0, l[\times]0, +\infty[\\ T(0,t) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(l,t) + T(l,t) = 0 \quad \forall\ t \geq 0\\ T(x,0) = 1\end{gathered}$$

Exercice 4. Résoudre le problème aux limites non homogène et initial

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dans} \quad]0, l[\times]0, +\infty[\tag{11.15}$$

$$T(0,t) = a, \quad T(l,t) = b \quad \forall\ t \geq 0 \tag{11.16}$$

$$T(x,0) = \frac{b-a}{l}x \tag{11.17}$$

où a et b sont des constantes réelles. (Indication : Poser

$$S(x,t) = T(x,t) - \frac{b-a}{l}x + a$$

et vérifier que si T est solution du problème (11.16)-11.17), alors $S(x,t)$ vérifie un problème aux limites homogène et initial.) Déterminer $S(x,t)$ et en déduire la solution $T(x,t)$ du problème (11.15)-(11.16).

Exercice 5. On veut maintenant résoudre le problème non homogène pour l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f(x) \quad \text{dans} \quad]0,l[\times]0,+\infty[\tag{11.18}$$

$$T(0,t) = a, \quad T(l,t) = b \quad \forall\ t \geq 0 \tag{11.19}$$

$$T(x,0) = T_0(x) \tag{11.20}$$

où a et b sont des constantes réelles données et $f(x)$ la source de chaleur extérieure indépendante du temps t. On considére l'équation différentielle avec les conditions aux limites

$$\vartheta''(x) = -\frac{1}{\kappa} f(x), \quad \vartheta(0) = a, \quad \vartheta(l) = b. \tag{11.21}$$

On pose $S(x,t) = T(x,t) - \vartheta(x)$ où $\vartheta(x)$ est la solution du problème (11.21).

1) Si $T(x,t)$ est une solution du problème (11.18)-(11.20), démontrer que la fonction $S(x,t)$ vérifie un problème homogène pour l'équation de la chaleur.

2) Déterminer $S(x,t)$ et en déduire la solution $T(x,t)$ du problème (11.18)-(11.20).

3) Application : Calculer $T(x,t)$ dans le cas

$$a = b = 0, \quad f(x) = x, \quad T_0(x) = \frac{x^3}{6\kappa}.$$

iv) Calculer $\lim\limits_{t\to\infty} T(x,t)$ et interpréter physiquement le résultat trouvé.

11.2 Cas d'une plaque rectangulaire.

On veut déterminer la température $T(t,x,y)$ à l'intérieur d'une plaque rectangulaire Ω connaissant la température sur les quatres cotés Γ_i $(i = 1,\cdots,4)$ de la plaque et la température initiale. Soit alors

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x < L,\ 0 < y < l\}.$$

Comme on le sait bien, la température $T(t,x,y)$ qu'on cherche est solution du problème aux limites et initial

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \Delta T = f(t,x,y) \quad \text{dans} \quad]0,\infty[\times\Omega$$
$$T(t,x,y) = \vartheta_i(t,x,y) \quad \forall\ (t,x,y)\ ]0,\infty[\times\Gamma_i \quad i = 1,\cdots 4$$
$$T(0,x,y) = T_0(x,y) \quad \forall\ (x,y) \in \Omega,$$

où Δ est l'opérateur Laplacien défini par

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

et $T_0(x,y)$, $f(t,x,y)$ et $\vartheta_i(t,x,y)$ $(i = 1,\cdots,4)$ sont des fonctions données. On commence par l'étude du problème homogène, c'est-à-dire

$$\vartheta_i = 0 \quad \text{sur} \quad]0,\infty[\times\Gamma_i \quad (i = 1,\cdots,4), \qquad f = 0 \quad \text{dans} \quad]0,\infty[\times\Omega. \tag{11.22}$$

On se propose donc de chercher une solution du problème homgène pour l'équation de la chaleur suivant

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa\Delta T = 0 \quad \text{dans} \quad]0,\infty[\times\Omega \tag{11.23}$$
$$T(t,x,y) = 0 \quad \forall (t,x,y) \in]0,\infty[\times\Gamma_i \quad i = 1,\cdots 4 \tag{11.24}$$
$$T(0,x,y) = T_0(x,y) \quad \forall\ (x,y) \in \Omega. \tag{11.25}$$

Comme dans le cas d'une barre finie, on cherchera une solution de l'équation (11.23) de la forme (séparation des variables)

$$T(t,x,y) = \varphi(x,y)\psi(t), \quad (x,y) \in]0,L[\times]0,l[, \quad t \in]0,\infty[. \tag{11.26}$$

Donc l'équation (11.23) est équivalente à

$$\kappa\psi\Delta\varphi = \varphi(x,y)\psi'(t), \tag{11.27}$$

et les conditions aux limites (11.24) deviennent

$$\varphi(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \Gamma_i\ (i = 1,\cdots 4),$$

c'est-à-dire

$$\varphi(0,y) = \varphi(L,y) = 0 \quad \forall y \in]0,l[, \quad \varphi(x,0) = \varphi(x,l) = 0 \quad \forall x \in]0,L[. \tag{11.28}$$

En séparant les variables, (11.27) s'écrit

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\psi'}{\kappa\psi}.$$

Cette égalité ne peut avoir lieu pour tout $(x, y) \in \Omega$ et pour tout $t \in]0, +\infty[$ que si les deux membres sont constants. En désignant cette constante commune par λ, on obtient alors les deux équations suivantes

$$\Delta\varphi = \lambda\varphi \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{11.29}$$

$$\psi' = \lambda\psi. \tag{11.30}$$

Nous choisirons cette constante λ négative, soit $\lambda = -\alpha^2$. Car, comme le cas d'une barre finie, c'est de la sorte que nous pourront satisfaire les conditions aux limites (11.28). Ainsi, on est ramené à résoudre d'une part l'équation

$$\psi' = -\alpha^2\psi \tag{11.31}$$

et de l'autre part le problème aux limites

$$\Delta\varphi + \alpha^2\varphi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega =]0, L[\times]0, l[\tag{11.32}$$

$$\varphi(0, y) = \varphi(L, y) = 0 \;\; \forall y \in]0, l[, \quad \varphi(x, 0) = \varphi(x, l) = 0 \;\; \forall x \in]0, L[. \tag{11.33}$$

Comme on peut le vérifier facilement la solution de l'équation (11.31) est donnée par

$$\psi(t) = Ce^{-\kappa\alpha^2 t}, \tag{11.34}$$

où C est une constante. Quant à la solution du problème (11.32) et (11.33), en utilisant encore la méthode de séparation des variables, on la cherchera de la forme

$$\varphi(x, y) = u(x)v(y). \tag{11.35}$$

Ainsi, l'équation (11.32) devient

$$u''v + uv'' = -\alpha^2 uv \tag{11.36}$$

et les conditions aux limites (11.33) s'écrivent sous la forme

$$u(0) = u(L) = 0, \quad v(0) = v(l) = 0. \tag{11.37}$$

De (11.36), il vient

$$\frac{u''}{u} = -\frac{v''}{v} - \alpha^2.$$

De la même manière, cette égalité ne peut être vérifier pour tout $x \in]0, L[$ et pour tout $y \in]0, l[$ que si les deux membres sont constants. Soit μ cette constante commune. On alors

$$u'' - \mu u = 0, \quad v'' + (\mu + \alpha^2)v = 0.$$

Comme dans le cas de la barre finie, si $\mu \geq 0$ et $\mu + \alpha^2 \leq 0$, alors les seules solutions de ces équations avec les conditions aux limites (11.37) sont les solutions banales identiquement nulles. On pose alors $\mu = -\beta^2$ et $\mu + \alpha^2 = (\alpha^2 - \beta^2) = \gamma^2$ et on s'intéresse aux problèmes aux limites suivant

$$u'' + \beta^2 u = 0, \quad u(0) = u(L) = 0 \tag{11.38}$$

$$v'' + \gamma^2 v = 0, \quad v(0) = v(l) = 0. \tag{11.39}$$

La solution de l'équation différentielle (11.38) est donnée par

$$u(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$$

où A, B et β sont des constantes à déterminer. En effet, en utilisant les conditions aux limites sur u, on obtient pour $x = 0$, $A = 0$, et pour $x = L$, $B\sin(\beta L) = 0$, d'où (puisque $B \neq 0$) $\beta L = n\pi$, et donc

$$\beta = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, \cdots .$$

Ainsi

$$u(x) = B\sin(\beta x), \quad \beta = \frac{n\pi}{L} \quad n \geq 1.$$

D'une manière identique, la solution v du problème (11.39) est donnée par

$$v(y) = B'\sin(\gamma y), \quad \gamma = \frac{m\pi}{l} \quad m \geq 1.$$

Donc (voir (11.35)), on a

$$\varphi(x, y) = BB'\sin(\beta x)\sin(\gamma y), \tag{11.40}$$

et compte tenu de (11.34) et (11.26), on

$$T(t, x, y) = be^{-\alpha^2\kappa t}\sin(\beta x)\sin(\gamma y), \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

où $b = CBB'$. Si on remplace maintenant β, γ et par leurs valeurs, on obtient

$$T_{n,m}(x,t) = b_{n,m}\exp(-\alpha_{n,m}^2\kappa t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}y\right)$$
$$\alpha_{n,m}^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{l^2}, \quad n, m \geq 1.$$

Pour chaque n et m, $T_{n,m}(x,t)$ est une solution de l'équation (11.23) vérifiant les conditions aux limites (11.24) . Puisque, l'équation (11.23) est linéaire, une somme finie de telles solutions $T_{n,m}$ est encore une solution. L'idée est de prendre comme solution une double somme infinie, c'est-à-dire, sous réserve de convergence

$$T(t,x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m}\exp(-\alpha_{n,m}^2\kappa t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}y\right). \tag{11.41}$$

Les constantes $b_{n,m}$ sont déterminés par la donnée de la température initiale $T(0,x,y) = T_0(x,y)$. En effet, en faisant $t = 0$ dans (11.41), on obtient

$$T_0(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}y\right).$$

Les constantes $b_{n,m}$ sont donc les coefficients de Fourier de la fonction $T_0(x,y)$, ils sont donnés par la formule

$$b_{n,m} = \frac{4}{lL}\int_0^l\int_0^L T_0(x,y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}y\right)dxdy. \tag{11.42}$$

Anisi la solution cherchée $T(t,x,y)$ de l'éqution de la chaleur (11.23) avec les condtions intiale et aux limites (11.25) et (11.24) est donnée par la double série

$$T(t,x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m}\exp(\alpha_{n,m}^2\kappa t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}y\right), \quad \alpha_{n,m}^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{l^2},$$

où les coefficients $b_{n,m}$ sont donnés par la formule (11.42).

Application. Par exemple $l = L = 1$ et $T_0(x,y) = 1$ pour tout $(x,y) \in]0,1[\times]0,1[$. Dans ce cas,

$$b_{n,m} = 4\int_0^l\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi y)dxdy = 4\int_0^1 \sin(n\pi x)dx\int_0^1 \sin(m\pi y)dy$$
$$= \frac{4}{nm\pi^2}((-1)^n - 1)((-1)^m - 1).$$

Notons que $b_{n,m} = 0$ si l'un au moins des indices est pair, et

$$b_{2q+1,2p+1} = \frac{-16}{(2q+1)(2p+1)\pi^2}.$$

En rempalçant les valeurs des $b_{n,m}$ trouvées dans (11.41), on obtient

$$T(t,x,y) = -\frac{16}{\pi^2}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_{p,q}^2\kappa t}}{(2q+1)(2p+1)}\sin((2q+1)\pi x)\sin((2p+1)\pi y),$$

où $\alpha_{p,q} = (2q+1)^2\pi^2 + (2p+1)^2\pi^2$, $p, q \geq 0$.

Exercice 1. Trouver à tout instant $t > 0$ la température $T(t,x,y)$ de la plaque rectangulaire $\Omega =]0,l[\times]0,l[$ dans les deux cas des conditions aux limites et initiales suivantes

$$\begin{gathered} T(t,0,y) = \frac{\partial T}{\partial x}(t,l,y) = 0 \quad \forall t > 0,\ y \in]0,l[, \\ \frac{\partial T}{\partial y}(t,x,0) = \frac{\partial T}{\partial y}(t,x,l) = 0 \quad \forall t > 0,\ x \in]0,l[\\ T(0,x,y) = xy. \end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered} \frac{\partial T}{\partial x}(t,0,y) = \frac{\partial T}{\partial x}(t,l,y) = 0 \quad \forall t > 0,\ y \in]0,l[, \\ T(t,x,0) = T(t,x,l) = 0 \quad \forall t > 0,\ x \in]0,l[\\ T(0,x,y) = x + y \quad \forall (x,y) \in]0,l[\times]0,l[. \end{gathered}$$

11.3 Equations des ondes

11.3.1 Cas d'une corde vibrante.

On assimile une corde homogène tendue de longueur l au segment $[0,l]$. Si modèlise au cours du temps ses petites élongations transversales $u(x,t)$ on obtient, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nu^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad \text{dans} \quad]0,l[\times]0,+\infty[\tag{11.43}$$

où ν est une constante, c'est la vitesse de propagation des perturbations ou oscillations transversales. On suppose que la solution $u(x,t)$ vérifient les conditions aux limites

$$u(0,t) = 0 \quad u(l,t) = 0 \quad \forall\ t \geq 0 \tag{11.44}$$

et les conditions initiales (position et vitesse initiale)

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \quad \forall\ x \in\ [0,l]. \tag{11.45}$$

On supposera que u_0 posséde des dérivées continues jusqu' à l'ordre 2 et vérifie les conditions (dites de compatibilité)

$$u_0(0) = u_0''(0) = 0, \quad u_0(l) = u_0''(l) = 0.$$

Quant à la fonction u_1 on supposera qu'elle est continûment déribable et telle que $u_1(0) = u_1(l) = 0$.

Comme dans le cas de l'équation de la chaleur, on cherchera la solution de la forme

$$u(x,t) = v(x)w(t) \tag{11.46}$$

(méthode de la séparation des variables). Alors l'équation (11.43) est équivalente à

$$v(x)w''(t) = \nu^2 v''(x)w(t), \tag{11.47}$$

et compte tenu de (11.46), les conditions aux limites (11.44) sont équivalentes à

$$v(0) = v(l) = 0. \tag{11.48}$$

Nous chercherons une solution telle que $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0,l[$ et $w(t) \neq 0$ pour tout $t > 0$. Ainsi l'égalité (11.47) nous donne

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(t)}{\nu^2 w(t)} \quad \forall\ (x,t) \in]0,l[\times]0,+\infty[.$$

Cette égalité ne peut avoir lieu pour tout $(x,t) \in]0,l[\times]0,+\infty[$ que si les deux membres sont constants, c'est-à-dire s'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$v''(x) = \lambda v(x), \quad x \in]0,l[\tag{11.49}$$

$$w''(t) = \lambda \nu^2 w(t), \quad t \in]0,+\infty[. \tag{11.50}$$

On choisit pour les mêmes raisons que dans le cas de l'équation de la chaleur $\lambda < 0$. On pose alors $\lambda = -\alpha^2$. La solution de l'équation (11.49) est donnée par

$$v(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x)$$

avec des constantes C_1, C_2 et α à déterminer. En effet, en utilisant les conditions aux limites (11.48), pour $x = 0$ on a $C_1 = 0$, et donc

$$v(x) = C_2 \sin(\alpha x). \tag{11.51}$$

Pour $x = l$, on a $C_2 \sin(\alpha L) = 0$ d'où (puisque $C_2 \neq 0$) $\alpha l = n\pi$, et donc

$$\alpha = \frac{n\pi}{l} \quad n = 1, 2, \cdots . \tag{11.52}$$

Quant à la solution de l'équation (11.50), elle est donnée par

$$w(t) = C_1' \cos(\alpha\nu t) + C_2' \sin(\alpha\nu t) \tag{11.53}$$

avec deux constantes C_1' et C_2'. Compte tenu de (11.53), (11.51) et (11.46), en posant $a = C_1' C_2$ et $b = C_2 C_2'$, on obtient

$$u(x,t) = \sin(\alpha x)(a \cos(\alpha\nu t) + b \sin(\alpha\nu t)). \tag{11.54}$$

En remplaçant les valeurs de α dans (11.54), on obtient

$$u_n(x,t) = (a_n \cos(\frac{n\pi}{l}\nu t) + b_n \sin(\frac{n\pi}{l}\nu t)) \sin(\frac{n\pi}{l}x). \tag{11.55}$$

Ces solutions u_n vérifient aussi bien l'équation (11.43) que les conditions aux limites (11.44). Puisque l'équation (11.43) est linéaire, une somme finie de solutions u_n est encore une solution. L'idée est de prendre comme solution une somme infinie, c'est-à-dire de poser sous réserve de convergence

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\frac{n\pi}{l}\nu t) + b_n \sin(\frac{n\pi}{l}\nu t)) \sin(\frac{n\pi}{l}x). \tag{11.56}$$

Pour finir, il nous reste à déterminer les constantes a_n et b_n. On commencera par déterminer les constantes a_n en utilisant la condition initiale $u(x,0) = u_0(x)$ pour tout $x \in [0,l]$. En effet, en faisant $t = 0$ dans (11.56), on obtient

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

Les constantes a_n sont donc les coefficients de Fourier du développement de la fonction u_0 en série de sinus obtenu en prolongeant u_0 en une fonction impaire périodique, de période $T = 2l$, c'est-à-dire

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin(\frac{n\pi}{l}x) dx. \tag{11.57}$$

Quant aux constantes b_n, en dérivant d'abord par rapport à t la solution u (11.56), on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-n\nu\omega a_n \sin(\frac{n\pi}{l}\nu t) + \nu\frac{n\pi}{l} b_n \cos(\frac{n\pi}{l}\nu t)) \sin(\frac{n\pi}{l}x). \tag{11.58}$$

En faisant $t = 0$ dans l'egalité ci-dessus et en tenant compte de la deuxième condition initiale $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$, on obtient

$$u_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu \frac{n\pi}{l} b_n \sin(\frac{n\pi}{l} x).$$

Les constantes $\nu \frac{n\pi}{l} b_n$ sont donc les coefficients de Fourier du développement de la fonction u_1 en série de sinus obtenu en prolongeant u_1 en une fonction impaire périodique, de période $T = 2l$, c'est-à-dire

$$n\nu\omega b_n = \frac{2}{n\nu\pi} \int_0^l u_1(x) \sin(\frac{n\pi}{l} x) dx,$$

d'où

$$b_n = \frac{2}{n\nu\pi} \int_0^l u_1(x) \sin(\frac{n\pi}{l} x) dx. \tag{11.59}$$

En portant ces valeurs de a_n et b_n dans la formule (11.56), on obtient la solution $u(x, t)$ sous forme de série du problème (11.43)-(11.45). On voit que la solution $u(x, t)$ est, pour chaque point x fixé, une fonction périodique du temps, de période $T = \frac{2l}{\nu}$. Notons que, par rapport x, $u(x, t)$ est aussi périodique, de période $2l$, mais on ne s'intéresse qu'à un intervalle d'une demi période.

Remarque. Notons que

$$a_n \cos(\frac{n\pi}{l} \nu t) + b_n \sin(\frac{n\pi}{l} \nu t) = A_n \sin(\frac{n\pi}{l} \nu t + \varphi_n)$$

avec $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\varphi_n = \arctan b_n / a_n$. On pose

$$M_n(x) = A_n \sin(\frac{n\pi}{l} x).$$

Alors la solution (11.56) du problème (11.43)-(11.45) s'exprime sous la forme

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x), \quad u_n(t, x) = M_n(x) \sin(\frac{n\pi}{l} \nu t + \varphi_n). \tag{11.60}$$

Le terme u_n qu'on appelle harmonique d'ordre n décrit un mouvement oscillatoire de phase identitique φ_n et d'amplitude $M_n(x)$ qui dépend de la position du point x. L'harmonique d'ordre un est dit harmonique fondamental. Sous l'effet de cette oscillation, la corde émet un son dont la hauteur dépend de la fréquence des oscillations

$$\omega_n = \frac{n\nu\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{11.61}$$

et de l'amplitude maximale M_n des oscillations. Ainsi, la solution (11.56), c'est-à-dire le son emis par la corde, est la supperposition de ces harmoniques. L'amplitude $M_n(x)$ est nulle aux points

$$x_i = \frac{i}{n} l, \quad i = 0, 2, \cdots, n.$$

Les $n+1$ points x_i sont appelés les noeuds de l'harmonique d'ordre n. L'amplitude $M_n(x)$ des oscillations de l'harmonique u_n atteint en valeur absolue sa valeur maximale A_n aux points x tels que $|\sin(\frac{n\pi}{l}x)| = 1$, c'est-à-dire aux points

$$x_i = \frac{l}{2n}(2i+1), \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

qu'on appelle ventres de l'harmonique u_n. La corde oscille alors comme si elle était faite de n morceaux distincts, indépendants les uns des autres, mais fixés aux noeuds.

On examinera maintenant avec un peu plus de détails la forme de la corde à chaque instant dans un cas particulier. En effet, on pince la corde au milieu, c'est-à-dire au ventre de son harmonique fondamental, et on la lache sans vitesse initiale donc $u_1(x) = 0$ pour tout $x \in [0, l]$ et la position initiale est donnée par

$$u_0(x) = \frac{2x}{l}, \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \quad u_0(x) = \frac{2(l-x)}{l} \quad \text{si} \quad \frac{l}{2} < x < l. \tag{11.62}$$

Par conséquent (voir (11.57) et (11.59)) un calcul simple nous donne

$$b_n = 0, \quad a_{2p} = 0, \quad a_{2p+1} = \frac{8}{\pi^2} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}. \tag{11.63}$$

Alors la solution est, dans ce cas, donnée par la formule

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \sin((2p+1)\frac{\pi}{l}x) \cos(((2p+1)\frac{\pi}{l}\nu t). \tag{11.64}$$

Grâce à la formule

$$2 \sin\alpha \cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta),$$

on a

$$\sin((2p+1)\frac{\pi}{l}x) \cos(((2p+1)\frac{\pi}{l}\nu t) = \sin((2p+1)\frac{\pi}{l}(x+\nu t)) + \sin((2p+1)\frac{\pi}{l}(x-\nu t)),$$

et donc

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}\sin((2p+1)\frac{\pi}{l}(x+\nu t)) + \frac{1}{2}\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}\sin((2p+1)\frac{\pi}{l}(x-\nu t)). \tag{11.65}$$

Soit $\varphi_0(x)$ la fonction impaire et périodique, de période $2l$, coïncidant sur l'intervalle $]0,l[$ avec u_0 définie par (11.62). D'après l'expression (11.57) des coefficients a_n (voir aussi (11.63)), on peut écrire la solution (11.65) sous la forme

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi_0(x+\nu t) + \varphi_0(x-\nu t)). \tag{11.66}$$

On rappelle que la période des oscillations est $T = \frac{2\pi}{l}$ et on suppose que $t \in]0, \frac{T}{4}[$ (premier quart période) , c'est-à-dire

$$\nu t < \frac{l}{2}.$$

Alors, on peut vérifier que dans le premier quart de période, la forme de la corde est donnée par

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{2}{l}x & \text{si } 0 < x < \frac{l}{2} - \nu t, \\ \frac{2}{l}(\frac{l}{2} - \nu t) & \text{si } \frac{l}{2} - \nu t < x < \frac{l}{2} + \nu t, \\ \frac{2}{l}(l - x\nu t), & \text{si } \frac{l}{2} + \nu t < x < l. \end{cases} \tag{11.67}$$

On voit que la corde a pour forme une ligne brisée en trois parties. Les abscisses des points anguleux de cette lignes sont

$$\frac{l}{2} - \nu t, \quad \frac{l}{2} + \nu t, \quad (0 < t < \frac{l}{2\nu}).$$

Ces parties se déplacent à la vitesse de propagations des oscillation ν. Lorsque le temps t atteint la valeur $\frac{l}{2\nu}$ (quart de période), la corde traverse la position d'équilibre $u = 0$ pour prendre ensuite des valeurs négatives suivant des configuations symétriques par rapport à l'axe des x. Pour $t = \frac{l}{\nu}$ (demi de période), la corde se trouve dans une position symétrique de u_0 par rapport l'axe des x, autrement dit $u(x, l/\nu) = -u_0(x)$ pour tout $x \in [0, l]$. Puis la corde revient vers sa position initiale qu'elle atteint au bout d'une période et les oscilations continuent indéfiniment. On voit que la corde initialement perturbée revient vres sa position d'équlibre qu'elle dépasse et rejoint par une série d'oscillations successives.

On vérifie facilement que, si u_0 (donc φ_0) est une fonction deux fois dérivables, l'expression

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi_0(x+\nu t) + \varphi_0(x-\nu t)) \tag{11.68}$$

est bien une solution du problème de la cordante vibrante réalisant les conditions aux limites et initiales imposées. Notons que dans ce cas la fonction u_0 (voir (11.62)) n'est pas dérivable aux points anguleux. La série de Fourier (11.64) peut par suite être dérivable une fois terme à terme, mais elle ne peut l'être deux fois. Mathématiquement parlant, elle ne doit pas être considérée comme une solution de l'équation des cordes vibrantes. Mais on est conduit par extension à considérer que des fonctions $u(x,t)$ du type (11.68), sont des solutions possibles du problème de la corde vibrante, même si en certains points la fonction u n'est pas dérivable.

Exercice.

1) Ecrire l'équation des ondes d'une corde de longueur l lachée sans vitesse initiale de la position d'équilibre définie par la fonction $u_0(x)$.

2) Détreminer les fréquences des vibrations dans le cas où la fonction u_0 est donnée par

$$u_0(x) = \frac{2x}{l} \quad \text{si} \quad 0 < x < \frac{l}{2}, \qquad u_0(x) = \frac{2(l-x)}{l} \quad \text{si} \quad \frac{l}{2} < x < l.$$

11.4 Equation des membranes vibrantes

On assimille une membrane tendue à un rectangle $\Omega =]0,L[\times]0,l[$ du plan des xy. Dans cette position la membrane est en équilibre. A tout instant $t > 0$ et en tout point $(x,y) \in \Omega$, soit $u(t,x,y)$ l'écart de la membrane de sa position d'équilibre. Si ces écarts sont assez petits, pour modéliser le problème de propagations des ondes, on peut prendre l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nu^2 \Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad]0,L[\times]0,l[\times]0,+\infty[\tag{11.69}$$

où ν est la vitesse de propagation des perturbations ou oscillations. Outre l'équation (11.69), pour résoudre complétement le problème de la propagation des oscillations de la membrane, il faut imposer des *conditions aux limites*, par exemple on suppose que la membrane est fixée sur les quatres cotés Γ_i $(i = 1, \cdots, 4)$ de notre rectangle, c'est-à-dire

$$u(t, x, y) = 0 \ \ \forall t > 0, \ \ \forall (x, y) \in \Gamma_i \ \ i = 1, \cdots, 4,$$

ou plus explicitement

$$u(t, 0, y) = u(t, L, y) = 0 \ \ \forall y \in]0, l[> 0, \quad u(t, x, 0) = u(t, x, l) = 0 \ \ \forall x \in]0, L[, \tag{11.70}$$

et des *conditions initiales*

$$u(0, x, y) = u_0(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in]0, L[\times]0, l[. \tag{11.71}$$

Ces conditions initiales signifient qu'à l'instant initial $t = 0$ la membrane est lachée de la position décrite par la fonction u_0 sans vitese initiale.
Ainsi, on est ramené à chercher la solution du probl'eme aux limites et initiales (11.69)-(11.71). En procédant de la même manière (faire les calculs) que dans les cas de l'équation de la chaleur dans une plaque rectangulaire et de l'équation des cordes vibrantes, on montre que la solution cherchée est donnée par la double série

$$u(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \cos(\sqrt{n^2 + m^2}\frac{\pi}{l}\nu t) \sin(\frac{n\pi}{L}x) \sin(\frac{m\pi}{l}y), \tag{11.72}$$

où les coefficients $a_{n,m}$ sont donnés par la formule

$$a_{n,m} = \frac{4}{lL}\int_0^l \int_0^L u_0(x, y) \sin(\frac{n\pi}{L}x) \sin(\frac{m\pi}{l}y) dx dy.$$

La solution (11.72) est, par rapport à x, une série de Fourier ordinaire, dont les coefficients sont eux-mêmes des séries de Fourier en fonction de y. Par rapport t, ce n'est pas une série de Fourier périodique. Les fréquences des harmoniques sont de la forme

$$\omega_{n,m} = \frac{2l}{\nu}\sqrt{n^2 + m^2},$$

ce ne sont pas les multiples d'un même nombre comme dans le cas des cordes vibrantes. Il n' y a pas de fréquence fondamentale, et les harmoniques sont très mélangés. Par conséquent, le son rendu par une membrane carrée est plus voisin d'un bruit que d'un son musical.

Bibliographie

[1] Ayres Jr A. *Théorie et Application du Calcul Différentiel et Intégral* Mc Graw-Hill

[2] Ayres Jr A. *Théorie et applications des équations différentielles* Mc Graw-Hill

[3] Bouvier A. *Théorie élémentaire des séries.* Collection Hermann.

[4] Bass J. *Cours de Mathématiques*, tome I. Masson et C$^{\text{ie}}$

[5] Budak B.M, Fomin S.V. *Intégrales multiples et séries.* Edition Mir Moscou

[6] Hocquenghem A., Jaffard P., Chenon R. *Mathematiques*, tome II. Collection du conservatoire national des arts et métiers

[7] Spiegel M. R. *Analyse de Fourier et applications aux problèmes aux limites*

[8] Spiegel M.R. *Transformation de Laplace* Mc-Graw-Hill

[9] Thuillier P., Belloc J.C. *Mathematiques - Analyse*, tomes I et II. Masson et C$^{\text{ie}}$.