

**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mouloud MAMMERY, Tizi-Ouzou**



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique  
Département d'Automatique

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES**

En vue de l'obtention du diplôme

*de MASTER PROFESSIONNEL EN AUTOMATIQUE  
OPTION : Automatique et Informatique Industrielles*

**Thème**

***Modélisation, simulation et commande par zones d'un four de frittage de pastilles d'UO<sub>2</sub>***

Proposé par : *Mr M. KACI*

Présenté par : *DJEDDI Redouane*

Dirigé par : *Mr A. MAIDI*

*Mr S. DJENNOUNE*

Soutenu le : 30 / 06 /2013

Devant le jury : *Mr KARA*

***Promotion 2013***

*Mr MANSOURI*

*Mme NAIT ABDESLAM*

Ce travail a été préparé au : *Centre de Recherche Nucléaire de Draria ; BP 43 Sebala - El Achour - Alger, Algérie*

## *Remerciements*

---

*Mes remerciements s'adressent tout d'abord à Monsieur Kaci Mustapha, directeur de la Division des Services Techniques Spécialisés (DSTS) au sein du Centre de Recherche Nucléaire de Draria (CRND), pour m'avoir offert un sujet de mémoire et de m'avoir accordé sa confiance pour la réalisation de ce projet.*

*Je tiens également à remercier Monsieur Maidi Ahmed pour son encadrement, pour son aide et sa précieuse collaboration. Merci pour avoir su m'orienter, pour les remarques et conseils le long de ce travail.*

*J'exprime aussi ma gratitude pour Monsieur Djennoune Said pour son orientation et de m'avoir initié au début de ce travail. Ainsi qu'à tous les enseignants qui ont contribué à mes études, pour leurs conseils et encouragements.*

*Mes remerciements s'adressent aussi aux membres du jury qui ont accepté de lire ce travail avec soin et qui me feront l'honneur de l'évaluer.*

*Enfin j'adresse mes remerciements les plus tendres à toute ma famille pour leur soutien sans défaut notamment mon frère aîné pour ses encouragements le long de ce travail.*

## *Dédicaces*

---

*A la mémoire de ma grand-mère*

*A toute ma famille*

*A tous mes amis*

**Introduction générale.....01**

***Chapitre I : Description du four de frittage***

I.1	Introduction.....	03
I.2	Procédé d'obtention de pastilles d'UO <sub>2</sub> frittées.....	03
I.2.1	Définition du combustible nucléaire.....	04
I.2.2	Le cycle d'obtention des pastilles d'UO <sub>2</sub> frittées.....	04
I.3	Procédé du frittage.....	07
I.3.1	Histoire du frittage.....	07
I.3.2	Définition du frittage.....	07
I.3.3	L'atmosphère pour le traitement thermique.....	09
I.4	Le four de frittage.....	10
I.4.1	Définition.....	10
I.4.2	Architecture et différentes parties du four.....	11
I.4.3	Etablissement du profil de température.....	13
I.5	Conclusion.....	15

***Chapitre II : Généralités sur les systèmes à paramètres distribués***

II.1	Introduction.....	17
II.2	Définition.....	17
II.3	Description mathématique d'un système à paramètres distribués.....	17
II.4	Conditions aux limites.....	18
II.5	Classification des équations aux dérivées partielles.....	20
II.6	Représentation mathématique de quelques modèles classiques des SPD.....	20
II.6.1	Equation de la chaleur.....	21
II.6.2	Equation des ondes.....	21
II.6.3	Equation de Laplace.....	22

## *Table des matières*

---

II.7	Résolution des systèmes à paramètres distribués.....	23
II.8	Méthode d'approximation aux différences finies.....	23
II.9	Commande et observation d'un système à paramètres distribués.....	24
II.10	Conclusion.....	26

### ***Chapitre III : Modélisation du four de frittage***

III.1	Introduction.....	27
III.2	Equation de diffusion-convection-réaction.....	27
III.3	Modélisation du four de frittage.....	30
III.3.1	Modes de transfert de chaleur.....	30
III.3.2	Modélisation du four de frittage.....	31
III.4	Approximation du problème avec la méthode des différences finies.....	32
III.4.1	Choix du pas de discrétisation (maillage).....	32
III.4.2	Description mathématique de la méthode des différences finies.....	33
III.4.3	Discrétisation spatiale du modèle du four de frittage.....	34
III.5	Conclusion.....	36

### ***Chapitre IV : Simulation du modèle du four de frittage***

IV.1	Introduction.....	38
IV.2	Simulation du modèle discrétisé en boucle ouverte.....	38
IV.2.1	Simulation sur Matlab.....	38
IV.2.2	Interprétation des résultats de simulation.....	41
IV.3	Simulation du modèle discrétisé avec différentes distributions par zones.....	42
IV.3.1	Notion d'actionneur.....	42
IV.3.2	Distribution par zone.....	43
IV.3.3	Simulation sur Matlab.....	44
IV.3.4	Interprétation des résultats de simulation.....	50
IV.4	Conclusion.....	51

*Table des matières*

---

**Conclusion générale.....52**

## Table des illustrations

---

### Liste des tableaux :

<b>Tableau I.1</b> : Tableau représentatif des conceptions thermique de certains gaz.....	10
---	----

### Liste des figures :

<b>Figure I.1</b> : cycle d'obtention des pastilles d'UO <sub>2</sub> frittées.....	4
<b>Figure I.2</b> : principe de compression des pastilles.....	5
<b>Figure I.3</b> : Principe de la rectification des pastilles.....	6
<b>Figure I.4</b> : Evolution de la croissance des ponts durant le frittage.....	8
<b>Figure I.5</b> : Four de frittage à trois zones de chauffe.....	11
<b>Figure I.6</b> : Chambre de chauffage.....	12
<b>Figure I.7</b> : Coupe vue de face du four de frittage et profil de température désiré.....	14
<b>Figure III.1</b> : Maillage en différences finies.....	32
<b>Figure IV.1</b> : Evolution de la température en fonction du temps.....	39
<b>Figure IV.2</b> : Evolution de la température en fonction de la longueur L .....	40
<b>Figure IV.3</b> : Evolution spatio-temporelle de la température.....	41
<b>Figure IV.4</b> : Support et répartition spatiale de l'actionneur ( $\Omega_i$ , $b_i$ ).....	43
<b>Figure IV.5</b> : Evolution de la température en fonction du temps avec distribution de la commande.....	45
<b>Figure IV.6</b> : Evolution de la température en fonction de la longueur L avec distribution de la commande.....	46
<b>Figure IV.7</b> : Evolution spatio-temporelle de la température avec distribution de la commande.....	47

## *Table des illustrations*

---

**Figure IV.8 :** Evolution de la température en fonction du temps avec distribution de la commande pour  $C=100$ .....48

**Figure IV.9 :** Evolution de la température en fonction de la longueur  $L$  avec distribution de la commande pour  $C=100$ .....49

**Figure IV.10 :** Evolution spatio-temporelle de la température avec distribution de la commande pour  $C=100$ .....50

## Liste des symboles

---

$t$  : Variable temps (s).

$z$  : Variable d'espace (m).

$\Omega$  : Domaine spatial admissible.

$\partial\Omega$  : Ensemble de frontière de  $\Omega$ .

$T$  : Domaine temporel.

$x(z, t)$  : Variable d'état ( $^{\circ}\text{C}$ ).

$u(z, t)$  : Variable d'entrée.

$y(z, t)$  : Variable de sortie.

$A, B, C, \mathcal{L}$  et  $\mathcal{M}$  : Des opérateurs matriciels.

$\alpha, \beta$  et  $\gamma$  : Des coefficients.

$x_0(z)$  : Condition initiale.

$x_0(t)$  et  $x_L(t)$  : Conditions au bord de  $\Omega$ .

$u_{ei}(t)$  : Signal d'entrée relatif à la zone ou position  $i$ .

$g_i(t)$  : Structure géométrique du système d'actionneurs.

$C(t)$  : Structure géométrique de l'ensemble des capteurs.

$m$  : Dimension spatiale.

$c$  : Constante physique (chaleur spécifique).

$V$  : Volume élémentaire de  $\Omega$ .

$\partial\Omega$  : Bord du volume  $V$ .

$q$  : Vecteur flux de chaleur.

$n$  : Normale extérieur unité de  $V$ .

## Liste des symboles

---

$k$  : Constante positive (conductivité thermique).

$v(z, t)$  : Vitesse de déplacement de  $\Omega$ .

$L$  : Longueur du tube réfractaire (longueur d'espace de frittage).

$f(z, t)$  : Entrée de commande.

$b(z)$  : Entrée de commande spatiale.

$u(t)$  : Entrée de commande temporelle.

$\Delta z$  : Pas de discrétisation.

$N$  : Entier positif (nombre de points de discrétisation).

$z_i$  :  $i^{\text{ème}}$  position.

$x_i(t)$  : Approximation de  $x(z, t)$  qui décrit la valeur de la température à la position  $z = z_i$  .

$\nabla$  : Opérateur gradient.

$\Delta$  : Opérateur Laplacien.

$i$  : Indice général.

SPD : Système à paramètres distribués.

EDP : Equation aux dérivées partielles.

## *Introduction générale*

---

La quête d'obtention des crayons d'uranium plus résistants aux corrosions et inertes thermiquement est devenue l'une des priorités des chercheurs. La technique de frittage est l'une des méthodes permettant l'obtention des pastilles constituant ces crayons et qui tient compte des propriétés recherchées. Dans notre cas précis, le principe de cette technique repose sur le chauffage d'une poudre d'uranium à des températures jouxtant le point de fusion du matériau sans pour autant atteindre celui-ci. Sous l'effet de la chaleur, les particules se soudent entre elles ce qui assure l'obtention de pastilles denses et cohésives. L'obtention de telles pastilles est dépendante du temps de séjour à l'intérieur du four de frittage mais aussi du type de profil de température auquel elles sont soumises.

Le four de frittage est muni d'un système de chauffage avec régulation des températures. Il se compose d'une chambre de chauffe divisée en trois zones d'utilités différentes, un système d'entrée et un système d'avancement de barquettes (voir chapitre I). L'obtention d'un profil de température est difficile vu la forte dépendance des trois zones de chauffe (voir figure I.7). La modélisation par les systèmes à paramètres distribués est l'un des outils mathématiques les plus intéressants et utiles qui permet d'avoir un modèle mathématique qui décrit notre système physique.

Lors de la simulation numérique d'un modèle mathématique, il est nécessaire de passer d'un modèle continu à un modèle discret pour un maximum de données. On utilise donc la méthode des différences finies pour la discrétisation de notre modèle mathématique.

En effet, ce travail s'organise en quatre chapitres :

**Le premier chapitre :** pour une bonne connaissance du système à modéliser (four de frittage) j'ai pris l'initiative de décrire le procédé d'obtention des pastilles frittées, le procédé de frittage ainsi que le four de frittage notamment sa description ainsi que son architecture et la description du matériel, l'établissement du profil de température et enfin poser la problématique relative à l'obtention du profil de température désiré.

**Le deuxième chapitre :** les systèmes à paramètres distribués cités en haut, étant l'outil de la modélisation, feront l'objet d'étude dans ce chapitre et il est utile de décrire les

## *Introduction générale*

---

différents types de systèmes à paramètres distribués. Ce chapitre est consacré pour les généralités sur les systèmes à paramètres distribués, à savoir leur définition, quelques modèles mathématiques pour la physique et la notion de conditions aux limites. Quelques méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles ont été citées ainsi que quelques méthodes de commande et d'observation des systèmes à paramètres distribués.

**Le troisième chapitre** : est consacré à la modélisation du four de frittage par la méthode des systèmes à paramètres distribués afin d'aboutir à un modèle mathématique pour le four qui fera l'objet de discrétisation par la méthode des différences finies. La méthode des différences finies est une méthode numérique très utilisée pour la résolution des problèmes physiques principalement les modèles régissant les transferts de chaleur.

**Le quatrième chapitre** : le modèle abouti et discrétisé fera l'objet de simulation dans ce chapitre en boucle ouverte avec différents paramètres. Par ailleurs, on procède à la distribution par zone de la commande afin de résoudre la problématique posée dans le premier chapitre. La simulation est réalisée à l'aide du logiciel Matlab en programmant le modèle discrétisé obtenu dans le troisième chapitre.

Enfin, le mémoire est clôturé par une conclusion générale sur le travail réalisé.

## **I.1 Introduction**

Le traitement thermique est une étape importante pour l'élaboration et la production des matériaux pour le combustible nucléaire. Il vise à améliorer les caractéristiques mécaniques notamment la résistivité et la dureté du matériau. Les fours, outils de production destinés à l'élaboration ou à la transformation des matériaux, sont souvent classés sous deux catégories :

- ✓ les fours discontinus appelés aussi fours intermittents ou fours à charge ;
- ✓ les fours continus appelés aussi four tunnel ou four à passage ;

Le deuxième groupe de fours fera l'objet de notre étude, il s'agit plus précisément du four de frittage qui est utilisé pour le traitement thermique des pastilles d'oxyde d'uranium  $UO_2$ . Le four est à passage et permet de ramener la matière en question à une température avoisinant sa température de fusion sans perdre son état solide.

Dans ce chapitre, nous allons présenter le type du four étudié dans ce mémoire. On s'intéresse à sa structure globale et ses différents supports. Dans le but de cerner le problème abordé, une brève description de la technique de frittage est donnée et pour expliquer par la suite la solution proposée avec un maximum de connaissance théorique et pratique.

## **I.2 Procédé d'obtention des pastilles d' $UO_2$ frittées**

Avant d'entamer le cycle d'obtention des pastilles, une question se pose à priori, qu'est-ce qu'un combustible nucléaire ?

# Chapitre I : Description du four de frittage

## I.2.1 Définition du combustible nucléaire

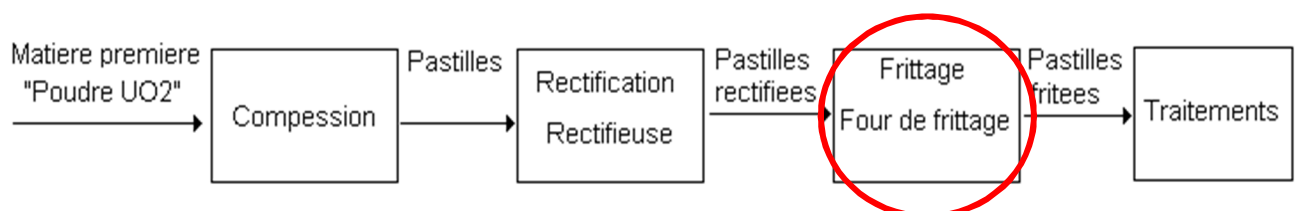
Le combustible nucléaire se présente généralement sous forme de pastilles frittées de forme cylindrique, constituées d'oxyde d'uranium enrichi en isotope 235 et/ou en plutonium. Ces pastilles sont empilées dans des gaines en alliage à base de zirconium pour constituer des crayons de combustibles.

Etant le siège de la fission des atomes lourds d'uranium ou de plutonium dans un réacteur nucléaire, le combustible constitue la source de chaleur utilisée pour la production d'électricité voire pour d'autres types d'énergie. Les noyaux d'Uranium235 (U235) du combustible sont cassés par des neutrons ; cette fission libère de l'énergie et de nouveaux neutrons qui, à leur tour, cassent d'autres noyaux d'U235 : c'est la réaction en chaîne. Le combustible reste dans le réacteur pour une durée de quatre ans environ.

## I.2.2 Le cycle d'obtention des pastilles d'UO<sub>2</sub> frittés

Pour que les noyaux lourds puissent être utilisés dans le réacteur, ils suivent un cycle qui comprend plusieurs étapes industrielles notamment l'extraction du minerai d'uranium, sa concentration puis sa conversion en hexafluorure d'uranium gazeux et son enrichissement isotopique pour augmenter la proportion des noyaux fissiles, et ce pour l'élaboration de la poudre d'oxyde d'uranium.

Une pastille frittée est obtenue à base de cette poudre selon le processus suivant :



**Figure I.1 :** Cycle d'obtention des pastilles d'UO<sub>2</sub> frittées.

- **La compression** : la matière première sous forme de poudre d' $\text{UO}_2$  (oxyde d'uranium) est comprimée dans une matrice dont la zone de compression possède au moins une fraction évasée, entre deux poinçons ayant des surfaces d'appui différentes et exerçant des pressions différentes. C'est en effet cette phase de compression qui permet la densification de la poudre et délimite ainsi ses caractéristiques techniques telles que l'élasticité ou la dureté.

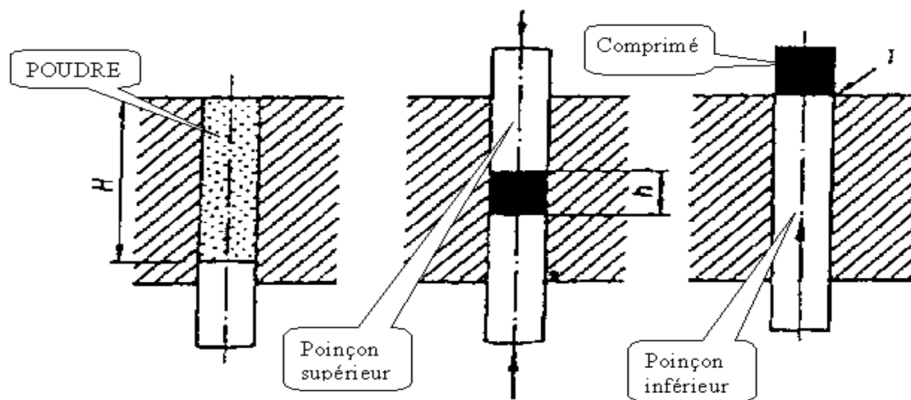
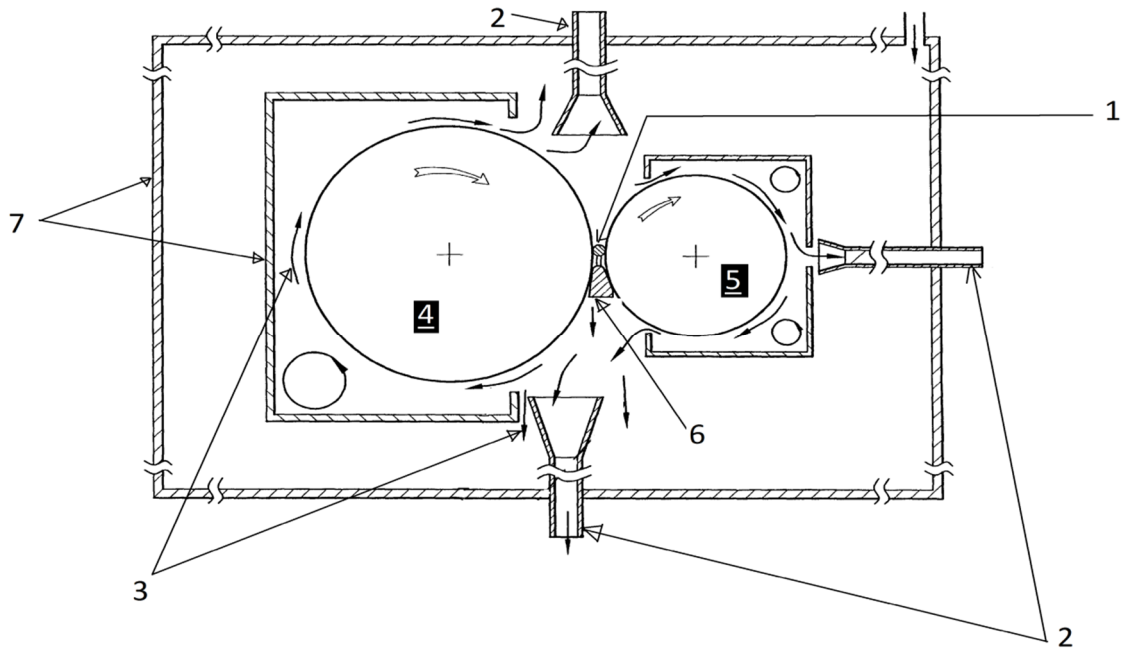


Figure I.2 : Principe de compression des pastilles.

- **La rectification** : la rectification s'effectue sur une rectifieuse pour atteindre des tolérances dimensionnelles requises.



**Figure I.3 :** Principe de la rectification des pastilles

Description des éléments du schéma :

- 1- la pastille à fritter ;
- 2- buses d'aspiration des poussières ;
- 3- sens d'évacuation ou d'aspiration ;
- 4 et 5- meules ;
- 6- réglette d'enfilade ;
- 7- dispositif de protection ;

Le cycle se clôture par l'étape de frittage, et on obtient à la fin des pastilles prêtes au traitement.

### I.3 Procédé du frittage

#### I.3.1 Histoire du frittage

Le frittage est une technique très ancienne. Certains pensent que cette technologie serait utilisée vers le début du 20<sup>ème</sup> siècle pour le frittage de filaments de tungstène durable. Cependant, la toute première utilisation remonte à 3000 ans avant notre ère, attribuée aux Incas qui s'en servaient pour la fabrication de bijoux en or platine fritté. Cette technique a trouvé également une application dans les colonnes de Delhi (il y a 1700 ans en Inde) composées d'environ 6,5 tonnes de fer fritté et forgé à partir de la poudre de magnétite réduite [9].

Dans les années 1940, la course à l'énergie nucléaire fait son entrée et devient possible grâce au frittage du dioxyde d'uranium. Ensuite, les percées technologiques du frittage ont été multipliées et diversifiées. Aujourd'hui, on les retrouve presque partout; dans les secteurs biomédical, dentaire, militaire, transport, construction, etc.

#### I.3.2 Définition du frittage

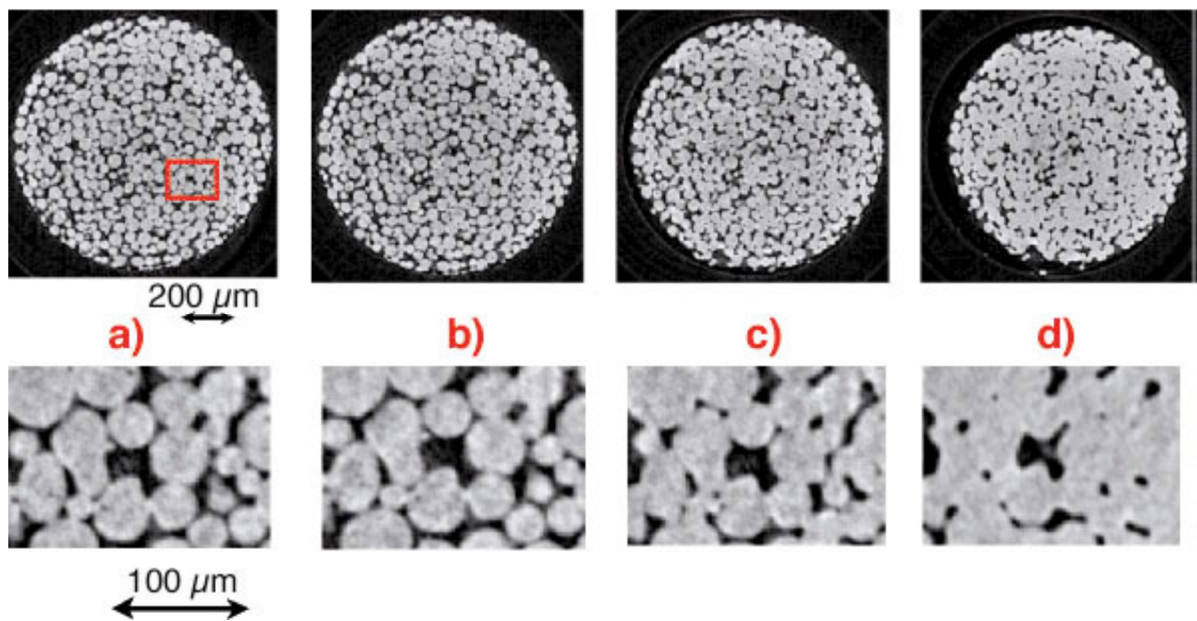
Le frittage est un traitement thermique pour souder des particules de poudres en un tout cohérent. Il consiste à chauffer un matériau à l'aide d'un four sous vide ou sous atmosphère protectrice, pour éviter l'oxydation par l'oxygène de l'air, et à une température limite de fusion qui permet de lier les grains de la poudre de façon suffisamment solide, on parle alors de *micro soudage* qui permet donc d'éliminer ou d'au moins, réduire la porosité.

Cette technique permet d'obtenir des matériaux durs, à porosité contrôlée, bonne tenue aux corrosions et inertes thermiquement.

## Chapitre I : Description du four de frittage

Une définition globale du frittage est celle de G. Cizeron de l'Institut de céramique française [4] :

« Le frittage est un processus faisant évoluer par traitement thermique un système constitué de particules individuelles (ou un aggloméré poreux), en l'absence de pression externe exercée ou sous l'effet d'une telle pression, de sorte qu'au moins certaines des propriétés du système (sinon toutes) soient modifiées dans le sens d'une réduction de l'énergie libre globale du système. Parallèlement, cette évolution entraîne une diminution importante (sinon complète) de la porosité initiale. Enfin, le processus suppose qu'au moins une phase solide existe constamment pendant tout le traitement thermique, de façon à conserver une certaine stabilité de forme et de dimension au système considéré. »



**Figure I.4 :** Evolution de la croissance des ponts durant le frittage [8].

Le procédé de frittage est régi par plusieurs paramètres, dont le temps de séjour des barquettes de pastilles dans le four, la température, la densité des comprimés de poudres et la composition de l'atmosphère protectrice du four de frittage, etc.

### **I.3.3 L'atmosphère pour le traitement thermique**

Le choix de l'atmosphère ambiante du four est l'une des étapes préliminaires dans le traitement thermique et ce choix est en fonction du type du traitement à effectuer ainsi que du type du matériau en question. En effet, dans certains ou tous les cas l'atmosphère doit protéger, la surface métallique, de toutes les réactions chimiques indésirables notamment l'oxydation. Par ailleurs, ce doit aussi servir d'objet pour la répartition de la chaleur entre les différentes parties du procédé en question ainsi que des parois du four pour assurer une certaine homogénéité est d'avoir un bon cycle de cuisson.

La conductivité thermique est l'aptitude à transférer de la chaleur lors des échanges thermiques. Parmi les principaux gaz ou mélanges, l'hydrogène et l'hélium possèdent une excellente conductivité thermique comme le montre le tableau ci-dessous ; par ailleurs, l'hydrogène sec est un gaz de protection très réducteur à partir de 300°C (en particulier, il réduit la plupart des oxydes métalliques en métaux).

## Chapitre I : Description du four de frittage

GAZ	Formule chimique	Conductivité thermique(1) $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
Air.....	.....	0,0242
Dioxyde de carbone .....	$\text{CO}_2$	0,0145
Ammoniac .....	$\text{NH}_3$	0,0221
Argon.....	Ar	0,0164
Azote.....	$\text{N}_2$	0,0242
Butane.....	$\text{C}_4\text{H}_{10}$	0,0136
Hélium.....	He	0,142
Hydrogène.....	$\text{H}_2$	0,168
Méthane.....	$\text{CH}_4$	0,0305
Monoxyde de carbone.....	CO	0,0232
Oxygène.....	$\text{O}_2$	0,0246

**Tableau I.1 :** Tableau représentatif des conceptions thermique de certains gaz.

### I.4 Four de frittage

#### I.4.1 Définition

Le four est l'outil majeur du frittage, c'est un équipement du type continu, conçu pour le frittage des pastilles d' $\text{UO}_2$  naturel. Il est muni d'un système de chauffage avec régulation des températures permettant de modifier les cycles thermiques de frittage, par variation du profil thermique et /ou de la vitesse de passage du train de barquettes transportant un ensemble de barquettes transportant un ensemble de pastilles sur une longueur de 15000mm (partie chauffée). Le four se pourvoit préparé pour fritter dans une atmosphère d'hydrogène. L'atmosphère protectrice doit remplir plusieurs fonctions pendant le frittage. Elle doit protéger les pièces à fritter de l'oxydation et réduire le plus possible la présence d'oxydes résiduels.

Il se compose de trois zones d'utilités différentes. La zone intermédiaire sous forme d'un pallier (température constante) est la zone chaude où les pastilles, en poudre d' $\text{UO}_2$ , sont

## Chapitre I : Description du four de frittage

---

frittées à 1700°C. Le chargement des barquettes est réalisé manuellement, et leurs défilement est automatique pour subir le traitement requis.

### I.4.2 Architecture et différentes parties du four

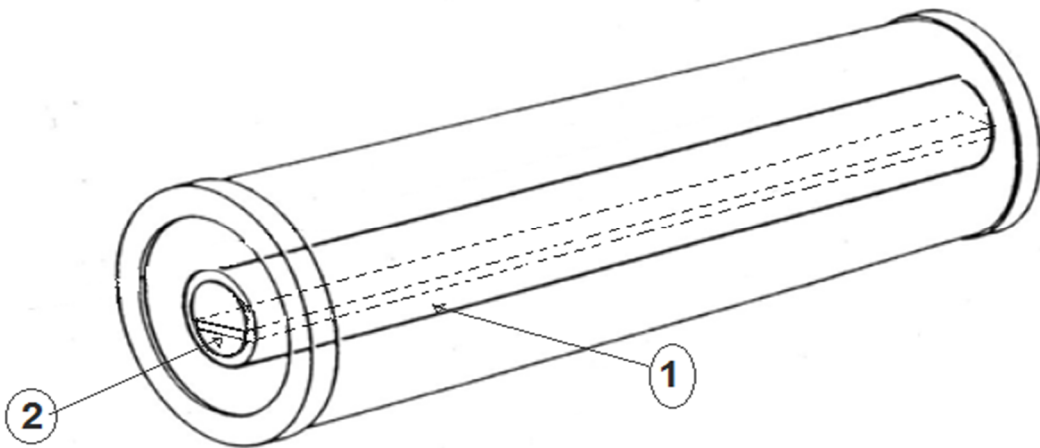
Le four est constitué des parties suivantes :

- ✓ Chambre de chauffage ;
- ✓ Système d'entrée ;
- ✓ Dispositif d'avancement des barquettes (poussoir) ;
- ✓ Carasse et isolation thermique ;
- ✓ Châssis ;
- ✓ Système de sortie ;
- ✓ Rack d'approvisionnement ;
- ✓ Contrôle de température ;



**Figure I.5 :** Four de frittage à trois zones de chauffe

- **Chambre de chauffage :** C'est un tube en alumine fritté (99,98 % de pureté) sur lequel trois résistances en molybdène sont boudinées. Le tube (1) comporte notamment, à l'intérieur, un segment (2) en alumine de forme circulaire (coupe transversale) pour le glissement des barquettes comportant les pastilles.



**Figure I.6 :** Chambre de chauffage

### Dimensions :

- ✓ Longitude : 1500 mm ;
  - ✓ Diamètre extérieur : 82 mm ;
  - ✓ Diamètre intérieur : 74 mm ;
- **Système d'entrée :** Le système est composé d'une bouche d'entrée pour l'insertion des barquettes, une boîte du poussoir et une bride réfrigérée.

## *Chapitre I : Description du four de frittage*

---

### **Dimensions :**

- ✓ Longueur : 353 mm ;
- ✓ Largeur : 470 mm ;
  
- **Système d'avancement des barquettes (poussoir) :** Comme son nom l'indique, il permet le défilement des barquettes à l'intérieur du four.

### **Dimensions :**

- ✓ Longueur : 725 mm ;
- ✓ Largeur : 470 mm ;
- ✓ Hauteur : 626 mm ;
  
- **Carcasse d'isolation thermique :** C'est une structure à haute résistance mécanique en tôle d'acier au carbone.

### **Dimensions :**

- ✓ Longueur : 1500 mm ;
- ✓ Largeur : 1035 mm ;
- ✓ Hauteur : 880 ou 927 mm ;

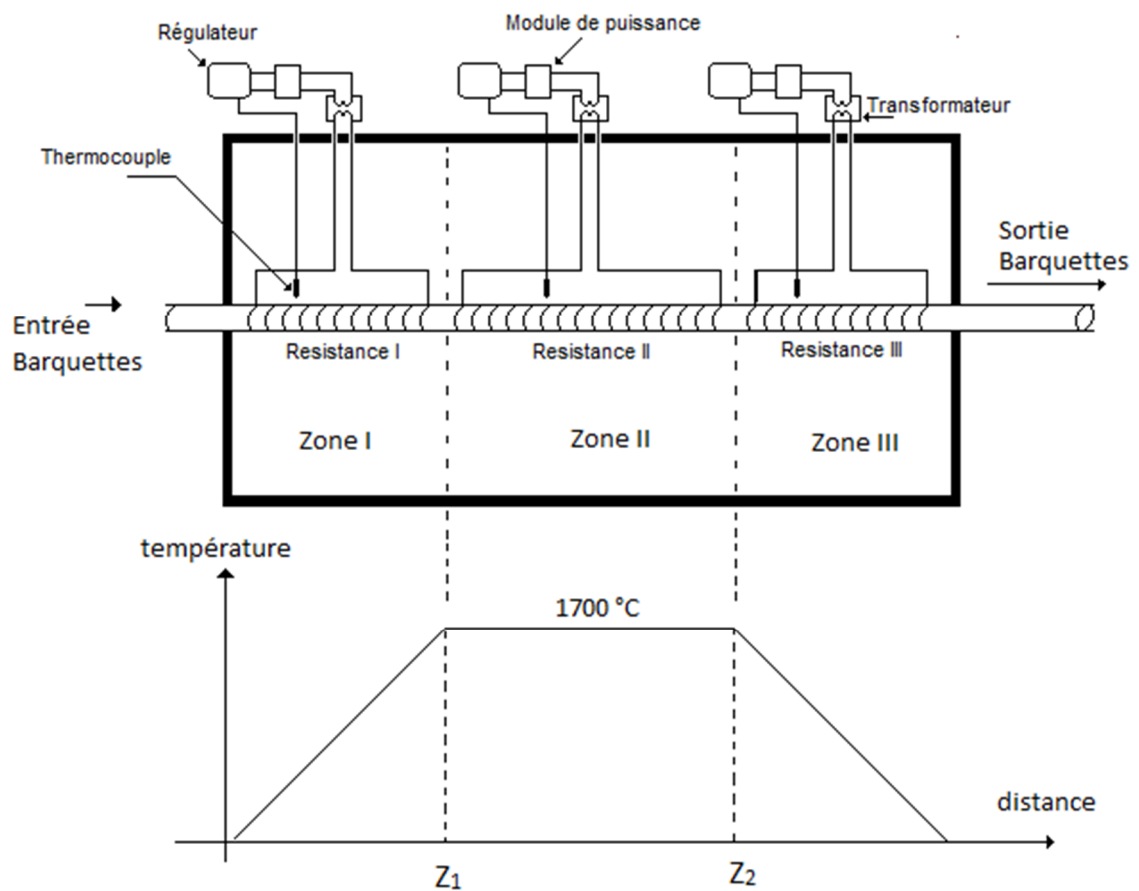
### **I.4.3 Etablissement du profil de température**

Avant le démarrage de l'opération de frittage des pastilles, il est procédé à la détermination du profil de température du four, pour cela on effectue un déplacement d'un thermocouple (à la place des barquettes des pastilles) d'une manière linéaire, discontinue tout

## Chapitre I : Description du four de frittage

au long du canal à l'intérieur du four (chambre de chauffage). Il sera positionné au fur et à mesure à des intervalles « segment » successifs préétablis appelés **stations** pour mesurer la température durant une temporisation régulière. En effet, du choix de l'intervalle et la temporisation pour effectuer les mesures dépendra la précision recherchée. Le résultat des mesures prélevées (température en fonction de la distance) reflétera le profil de température correspondant au séjour des pastilles tout au long du canal du four de frittage.

Une fois que le profil adéquat est déterminé, suite à plusieurs tests, il sera procédé à l'introduction des pastilles à travers les barquettes poussées par un système d'avancement constitué par un mécanisme et un moteur commandé par un variateur de vitesse.



**Figure I.7 :** Coupe vue de face du four de frittage et profil de température désiré.

### **Problématique:**

- La détermination du profil de température permettant le frittage des pastilles est rendu très difficile compte tenu de la forte dépendance des trois zones de chauffe au vu de l'influence de chacune sur l'autre en termes de température. En effet, malgré que chaque zone dispose d'un système de régulation indépendant, la montée en puissance (chauffages) exige une manipulation judicieuse de chaque régulateur permettant, d'une part, de respecter les exigences technologique (par exemple : chauffages des résistances à 100°C/h) et d'autre part, tenir compte de l'influence de chaque zone sur l'autre pour atteindre une stabilité de la température.
- Dans une perspective de modernisation technique du four, la difficulté de pilotage nous a conduit à penser à proposer un système de régulation plus performant en prenant en ligne de compte toutes les contraintes. Pour ce faire, une étude de simulation du four est à entreprendre, en premier lieu, en s'articulant sur un modèle théorique (thermique), et une distribution adéquate.

### **I.5 Conclusion**

La technique de frittage reste l'une des techniques du traitement thermique les plus intéressantes car elle permet de chauffer un élément sans changer son état physique et permet d'obtenir des résultats intéressants, c'est la technique utilisée dans notre système physique.

L'obtention de pastilles d'une structure microscopique moins poreuse et qui résiste à la corrosion dépend de la température appliquée ainsi que du temps de séjour des pastilles à l'intérieur du four. Par ailleurs, un profil est défini (voir Figure I.7) pour l'obtention de pastilles de très bonne qualité.

## *Chapitre I : Description du four de frittage*

---

Toutefois, l'aboutissement à un tel profil de température est rendu très difficile compte tenu de la forte dépendance des trois zones de chauffe au vu de l'influence de chacune sur l'autre en termes de température.

Pour cela on utilise les systèmes à paramètres distribués pour la modélisation du four de frittage qui est décrit par des équations aux dérivées partielles. La présentation de ce type de systèmes fera l'objet du deuxième chapitre.

### **II.1 Introduction**

La simulation numérique est une étape primordiale dans la commande des systèmes industriels réels, or il faut d'abord trouver un modèle mathématique qui décrit notre système physique, du moins le plus approché, afin de procéder à la simulation avec des calculateurs numériques. Ce ne relève pas de l'impossible dans nos jours tenant en compte de l'avancée mathématique appliquée aux sciences de l'ingénieur notamment les systèmes à paramètres distribués (SPD) qui touchent à un très large domaine d'application notamment celui des processus thermiques.

Les SPD appelés souvent systèmes à paramètres répartis ou encore de dimension infinie font l'objet de ce chapitre et dont on se servira pour la modélisation de notre système physique un peu plus loin dans le 3<sup>ème</sup> chapitre. On va notamment définir et décrire les SPD ainsi que les principaux types d'équations de la physique mathématique, les méthodes de résolution, puis on va exposer les différents types de commande des SPD.

### **II.2 Définition**

Un système à paramètres distribués est un système décrit par des équations aux dérivées partielles mettant en jeu des variables de type spatio-temporel ; les variables indépendantes sont le temps ainsi que l'espace qui peut être mono ou multidimensionnel.

### **II.3 Description mathématique d'un système à paramètres distribués**

On considère la classe des systèmes à deux variables indépendantes, monodimensionnel en espace avec une variable de temps, décrits par les données suivantes [2] :

## Chapitre II : Généralités sur les systèmes à paramètres distribués

---

- Un domaine  $\Omega = [0, L]$  de l'espace, borné de  $\mathbb{R}$  et de frontière  $\partial\Omega = \{0, L\}$ . On note  $z$  la variable d'espace ;
- Un domaine temporel  $T = [0, +\infty[$ ;
- Une équation d'état ou d'évolution à l'intérieur du domaine  $\Omega \times T$  :

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = A(x(z,t)) + B(u(z,t)), \quad t \in T \text{ et } 0 < z < L, \quad (\text{II.1})$$

- Une équation de sortie sur  $\Omega \times T$  :

$$y(z,t) = C(x(z,t)), \quad (\text{II.2})$$

- Des conditions aux limites (voir section II.4) :

$$\mathcal{L}(x(z,t)) = u(z,t), \quad z \in \partial\Omega, \quad (\text{II.3})$$

- Des conditions initiales ( $t=0$ ) sur  $\Omega$  :

$$\mathcal{M}(x(z,0)) = 0, \quad (\text{II.4})$$

$A, B, C, \mathcal{L}, \mathcal{M}$  sont des opérateurs matriciels différentiels agissant sur le vecteur d'état  $x$ .

### II.4 Conditions aux limites

On distingue plusieurs types de conditions aux limites qui décrivent le comportement d'un système au bord de ses frontières. Ces conditions aux limites doivent donc être satisfaites par les solutions du système en question [3] :

### ➤ Condition aux limites de Dirichlet

Ici le domaine est supposé baignant dans un thermostat à température constante, alors, quitte à modifier l'échelle des températures, la température vérifie la condition aux limites de Dirichlet.

$$x(t, z) = 0 \quad \text{pour tout } z \in \partial\Omega \text{ et } t > 0. \quad (\text{II.5})$$

### ➤ Condition aux limites de Neumann

Ici le domaine est supposé adiabatique ou thermiquement isolé de l'extérieur, alors le flux de chaleur sortant au bord est nul et la température vérifie la condition aux limites de Neumann.

$$\frac{\partial x}{\partial n}(t, z) \equiv n(z) * \nabla x(t, z) = 0 \quad \text{pour tout } z \in \partial\Omega \text{ et } t > 0. \quad (\text{II.6})$$

où  $n(z)$  est la normale extérieure unité de  $\Omega$ .

### ➤ Condition aux limites de Fourier

Une situation intermédiaire entre les deux conditions exposées précédemment peut avoir lieu ; le flux de chaleur sortant au bord est proportionnel au saut de température entre l'extérieur et l'intérieur, et la température vérifie la condition aux limites de Fourier.

$$\frac{\partial x}{\partial n}(t, z) + \alpha x(t, z) = 0 \quad \text{pour tout } z \in \partial\Omega \text{ et } t > 0. \quad (\text{II.7})$$

où  $\alpha$  est une constante positive.

### II.5 Classification des équations aux dérivées partielles

On appelle ordre d'une équation aux dérivées partielles l'ordre de la plus grande dérivée présente dans l'équation [3].

On se limite dans notre cas à des systèmes aux équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables de la forme :

$$\alpha \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t \partial z} + \gamma \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2} + [\dots] = 0 \quad (\text{II.8})$$

où le terme entre crochets dépend de  $x(z,t)$ ,  $t$ ,  $z$  et des dérivées premières de  $x(z,t)$ . Les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont supposés constants et indépendants de la variable d'espace  $z$ .

On dit que l'équation est :

- Elliptique, si  $\beta^2 - \alpha \gamma < 0$  ;
- Parabolique, si  $\beta^2 - \alpha \gamma = 0$  ;
- Hyperbolique, si  $\beta^2 - \alpha \gamma > 0$  ;

Si les trois coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont nuls, le type de l'équation dépend seulement des dérivées premières de  $x(z,t)$ , alors l'équation est de type hyperbolique et d'ordre un.

### II.6 Représentation mathématique de quelques modèles classiques des SPD

On va présenter quelques modèles classiques notamment celui de l'équation de chaleur qu'on va utiliser plus tard pour la modélisation du four de frittage. Le but est dégager les

## Chapitre II : Généralités sur les systèmes à paramètres distribués

---

principales classes d'équations aux dérivées partielles utiles pour la modélisation des systèmes physiques et on va se limiter aux équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables.

On appelle équations fondamentales de la physique mathématique (dans le cas d'une fonction de deux variables indépendantes) les équations différentielles aux dérivées partielles du second ordre suivantes [3] et [7] :

### II.6.1 Equation de la chaleur

Cette équation modélise les processus de diffusion de la chaleur, de la filtration de liquides ou de gaz dans un milieu poreux, etc. Il s'agit d'une équation d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace et de type parabolique (voir la section II.4).

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} - \Delta x = f & \text{pour } (z, t) \in \Omega \times ]0, +\infty[ \\ x(t, z) = 0 & \text{pour } (z, t) \in \partial\Omega \times ]0, +\infty[ \\ x(t = 0, z) = x_0(x) & \text{pour tout } z \in \Omega \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

### II.6.2 Equation des ondes

Cette équation modélise les phénomènes de propagation des ondes ou de vibration. Appelée aussi équation des cordes vibrantes dans le cas d'un système en une dimension en espace, le modèle est donné comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \Delta x = f & \text{pour } (z, t) \in \Omega \times ]0, +\infty[ \\ x(t, z) = 0 & \text{pour } (z, t) \in \partial\Omega \times ]0, +\infty[ \\ x(t = 0, z) = x_0(z) & \text{pour tout } z \in \Omega \\ \frac{\partial x}{\partial t}(t = 0) = x_1 & \text{pour tout } z \in \Omega \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Une deuxième condition initiale s'ajoute pour la fonction  $x$  puisqu'il s'agit d'une équation de deuxième ordre en temps, c'est une équation hyperbolique (voire section II.4).

### II.6.3 Equation de Laplace

On considère l'équation de Laplace suivant :

$$\begin{cases} -\Delta x = f & \text{dans } \Omega \\ x(t, z) = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

C'est une équation du type elliptique la plus simple (voir section II.4). On remarque que l'équation est aussi l'équation de chaleur qui modélise l'état stationnaire de chaleur (II.9), c'est aussi une version stationnaire de l'équation des ondes (II.10).

Il existe, par ailleurs, d'autres équations mathématiques qui servent à la modélisation pour d'autres systèmes et des différents domaines d'application, notamment [3] :

- Equation de Schrödinger ;
- Système de Lamé ;
- Système de Stokes ;
- Equation des plaques ;

### II.7 Résolution des systèmes à paramètres distribués

La résolution d'un système à paramètres distribués consiste à transformer le problème décrit par des équations aux dérivées partielles à un autre problème décrit par des équations aux dérivées ordinaires, donc d'arriver au problème de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = Ax(t) + B f(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

La résolution numérique des équations aux dérivées partielles passent toujours par des discrétisations des problèmes analytiques en des problèmes numériques. Pour cela on est amené à effectuer une transformation du modèle mathématique or il n'existe pas de méthodes générales d'étude de ce type d'équation, mais une infinité de méthodes se présentent dont on note les plus couramment utilisées :

- La méthode des différences finies,
- La méthode des éléments finis,
- La méthode des volumes finis,
- La méthode des caractéristiques.

### II.8 Méthode d'approximation aux différences finies

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.

Plusieurs méthodes d'approximation aux différences finies ou de discrétisation existent, on distingue, généralement deux grandes classes :

- La discrétisation totale : elle est appelée totale car la discrétisation se fait par rapport à toutes les variables dont notre système dépend ; variables de l'espace et du temps. Cette méthode conduit à une solution très précise du système considéré, mais de dimension relativement élevée du modèle approché.
- La semi-discrétisation : Ici la discrétisation se fait par rapport à l'un des domaines de l'espace ou du temps. Avec cette méthode, on obtient un système d'équations différentielles ordinaire d'ordre d'autant plus élevés que la discrétisation est plus fine.

### II.9 Commande et observation d'un système à paramètres distribués

Il est nécessaire de fixer, à priori, le type de commande ainsi que d'observation à appliquer au système en question avant de procéder à la simulation. Les différentes commandes et observations possibles sont [2] et [5]:

- **La commande distribuée :**

$$u(z, t) = g(z)u_e(t) \quad (\text{II.13})$$

$u(z, t)$  étant définie sur  $\Omega \times T$ , avec  $g(z)$  représente la structure géométrique du système d'actionneurs, et  $u_e(t)$  représente le signal d'entrée.

- **La commande par zones :** la commande est répartie sur plusieurs zones ou sous-ensembles, l'ensemble de ces zones constitue le système complet on définit alors, pour un système de  $p$  zones :

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^p g_i(z)u_{ei}(t) \quad (\text{II.14})$$

## Chapitre II : Généralités sur les systèmes à paramètres distribués

---

$u(z, t)$  étant définie sur  $\Omega \times T$ , avec  $g_i(z)$  représente la structure géométrique du système d'actionneurs, et  $u_{ei}(t)$  représente le signal d'entrée relatif à la zone  $i$ .

- **La commande ponctuelle** : agissant sur un ou plusieurs points de  $\Omega$ .
- **La commande par balayage** : pour laquelle les zones ou/et points d'action (actionneurs) sont mobiles sur  $\Omega$ .
- **La commande aux frontières** : définit sur  $\partial\Omega \times T$ .

Par ailleurs plusieurs classes d'observation existent dont :

- **L'observation distribuée** : sur  $\Omega \times T$  ou sur un sous-ensemble de  $\Omega \times T$ .

$$y(z, t) = C(z)x(z, t) \quad (\text{II.15})$$

$C(z)$  représente la structure géométrique du système d'observation.

- **L'observation ponctuelle** : agissant sur un ou plusieurs points  $z_i$  de  $\Omega$  ou/et de  $\partial\Omega$  (à titre d'exemple l'observation aux frontières).

$$y(z_i, t) = \int_{\Omega} x(z, t) \delta(z - z_i) dz = y_i(t) \quad (\text{II.16})$$

- **L'observation par balayage** : pour laquelle les points d'observation (capteurs) sont mobiles dans  $\Omega$ .

- **L'observation par moyennage spatial** : définie par l'intégrale :

$$y(t) = \int_{\Omega} C(z, t)y(z, t)dz \quad (\text{II.17})$$

où  $C(z)$  représente la structure géométrique de l'ensemble des capteurs.

### II.10 Conclusion

L'objectif de ce chapitre est de comprendre de manière générale les systèmes à paramètres distribués dont on se servira dans le chapitre suivant.

Par ailleurs, on a défini les SPD, puis une description mathématique a été présentée en plus des différents types de conditions aux limites. Par la suite, on a présenté quelques modèles mathématiques décrits par des équations aux dérivées partielles ainsi que les différentes méthodes de résolution de ces dernières ont été citées. A la fin, on a présenté quelques méthodes de commande et d'observation des systèmes à paramètres distribués.

On a cité trois types de classes des systèmes à paramètres distribués notamment les systèmes elliptiques, hyperboliques et paraboliques. Le modèle de l'équation de chaleur fait partie de cette dernière classe. Cette dernière sera utilisée pour modéliser notre système physique dans le chapitre qui suit et on utilisera la méthode d'approximation aux différences finies pour le discrétiser.

### III.1 Introduction

Dans le domaine de l'analyse numérique, on est souvent amené à chercher la solution d'une ou plusieurs équations aux dérivées partielles. Parmi les méthodes de résolution couramment pratiquées on retrouve la méthode des différences finies.

On s'intéresse dans ce chapitre à la modélisation de notre système physique qui est le four de frittage. Par la suite le modèle obtenu fera l'objet de discrétisation par approximation aux différences finies.

### III.2 Equation de diffusion-convection-réaction

On considère un domaine  $\Omega$  de l'espace à  $m$  dimensions (noté  $\mathbb{R}^m$ , avec en général  $m = 1, 2, \text{ ou } 3$ ) que l'on suppose occupé par un matériau homogène, isotrope et conducteur de chaleur. On note  $z$  la variable d'espace, c'est-à-dire un point de  $\Omega$ , et  $t$  la variable de temps. Dans  $\Omega$ , les sources de chaleur sont représentées par une fonction donnée  $f(z, t)$ , tandis que la température est une fonction inconnue  $x(z, t)$ . La quantité de chaleur est proportionnelle à la température  $x$  et vaut  $cx$  où  $c$  est une constante physique (qui dépend du type du matériau) appelée chaleur spécifique.

Pour déterminer la température  $x$ , nous écrivons la loi de conservation de l'énergie ou de la quantité de chaleur. Dans un volume élémentaire  $V$  inclus dans  $\Omega$ , la variation en temps de la quantité de chaleur est le bilan de ce qui est produit par les sources et de ce qui sort ou rentre à travers les parois. Autrement dit,

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V cx dz \right) = \int_V f dz - \int_{\partial V} q \cdot n ds \quad (\text{III.1})$$

### Chapitre III : Modélisation du four de frittage

---

où  $\partial V$  est le bord de  $V$  (d'élément de surface  $ds$ ),  $n$  est la normale extérieure unité de  $V$ , et  $q$  est le vecteur flux de chaleur. Si on applique le théorème de Gauss, on obtient :

$$\int_{\partial V} q \cdot n \, ds = \int_V \operatorname{div} q \, dz$$

Regroupant les différents termes de (III.1) et utilisant le fait que le volume élémentaire  $V$  est quelconque, indépendant du temps, on en déduit l'équation de conservation de l'énergie :

$$c \frac{\partial x}{\partial t} + \operatorname{div} q = f \tag{III.2}$$

qui a lieu en tout point  $z \in \Omega$  et à tout temps  $t$ . Rappelons que l'opérateur divergence est défini par :

$$\operatorname{div} q = \sum_{i=1}^N \frac{\partial q_i}{\partial z_i} \quad \text{avec} \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix}$$

On remplace  $q$  par sa valeur avec

$$q = -k \nabla x \tag{III.3}$$

c'est la loi constitutive de Fourier qui relie le flux de chaleur au gradient de température, où  $k$  est une constante positive (qui dépend du type de matériau) appelée conductivité thermique et l'opérateur gradient est défini:

$$\nabla x = \left( \frac{\partial x}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial z_N} \right)^t.$$

## Chapitre III : Modélisation du four de frittage

---

On combinant la loi conservation (III.2) et la loi constitutive (III.3), on obtient une équation pour la température  $x$  :

$$c \frac{\partial x}{\partial t}(z, t) - k \Delta x(z, t) = f(z, t) \quad (\text{III.4})$$

où  $\Delta = \text{div } \nabla$  est l'opérateur Laplacien donné par :

$$\Delta x = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 x}{\partial z_i^2}$$

L'équation (III.4) est aussi appelée équation de diffusion qui modélise la diffusion ou la migration d'une concentration ou une densité à travers le domaine  $\Omega$  immobile.

Considérons maintenant que le système est en mouvement et qu'il se déplace avec une vitesse  $v(z, t)$  alors il faut ajouter à l'équation (III.4) le terme de convection, on obtient :

$$c \frac{\partial x(z,t)}{\partial t} - k \Delta x(z, t) + cv \nabla x(z, t) = f(z, t)$$
$$\Leftrightarrow c \frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = k \Delta x(z, t) - cv \nabla x(z, t) + f(z, t) \quad (\text{III.5})$$

C'est l'équation de Diffusion-Convection-Réaction qui décrit le comportement dynamique à l'intérieur du domaine  $\Omega$ , avec :

$k$  : coefficient de diffusion qui est la conductivité thermique ;

$c v$  : coefficient de convection ;

$f(z, t)$  : réaction ;

## Chapitre III : Modélisation du four de frittage

---

L'équation (III.5) est valable dans tout le domaine  $\Omega$  mais ne suffit pas pour déterminer complètement l'évolution de la chaleur à l'intérieur du domaine même. La fonction  $x(t, z)$  doit encore satisfaire les conditions aux frontières indiquant ce qui se passe à la frontière ou au bord de  $\partial\Omega$  du domaine [7].

Par convention, on prend le temps  $t = 0$  comme temps initial, et on impose une **condition initiale**

$$x(z, t = 0) = x_0(z) \quad (\text{III.6})$$

On considère la condition aux limites de Dirichlet. Ainsi on peut constituer le problème aux limites régissant l'évolution de la température en fonction du temps et de l'espace :

$$\begin{cases} c \frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = k \Delta x(z,t) - cv \nabla x(z,t) + f(z,t) & \text{dans } \Omega \times ]0, +\infty[ \\ x(z,t) = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times ]0, +\infty[ \\ x(z,t = 0) = x_0(z) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

### III.3 Modélisation du four de frittage

Rappelons d'abord les modes de transfert de chaleur avant de passer à la modélisation de notre système physique.

#### III.3.1 Modes de transfert de chaleur :

Conformément aux lois de la thermodynamique il existe trois modes de transfert de chaleur, transfert par conduction, par convection et par rayonnement.

- **La conduction** : c'est le phénomène de transfert de chaleur avec support matériel et sans transfert de matière.
- **La convection** : c'est le phénomène de transfert de chaleur avec support matériel et avec transfert de matière.
- **Le rayonnement** : c'est le transfert de chaleur par phénomènes électromagnétiques même en absence de matière.

### III.3.2 Modélisation du four de frittage

On considère un tube en alumine de longueur  $L$  qui occupe l'intervalle  $[0; L]$  de l'axe  $oz$  et qu'au temps ( $t=0$ ) la température est connue en tout point  $z \in [0; L]$ . Le tube est chauffé par une source de chaleur répartie sur toute sa longueur de fonction  $f(z, t)$  ; le chauffage donc, est assuré par conduction.

Par ailleurs l'équation régissant le comportement de notre système physique s'écrit :

$$\begin{cases} c \frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z,t) + f(z,t) & \text{dans } ]0, L[ \times ]0, +\infty[ \\ x(0, t) = x(L, t) = 0^\circ C & \text{dans } \partial\Omega \times ]0, +\infty[ \\ x(z, t = 0) = 0^\circ C & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Avec :

$$\begin{cases} f(z, t) = b(z) u(t) \\ \text{et} \\ b(z) = \begin{cases} \alpha z & \text{pour } z \leq z_1 \\ \beta & \text{pour } z_1 \leq z \leq z_2 \\ -\alpha z + \gamma & \text{pour } z \geq z_2 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

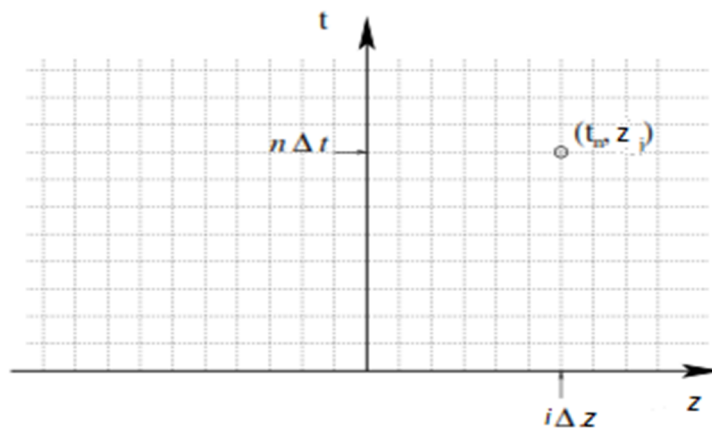
### III.4 Approximation du problème avec la méthode des différences finies

La méthode permet d'approcher la solution de l'équation aux dérivées partielles en un nombre fini de points du domaine considéré. Cependant il est demandé d'établir un maillage uniforme de l'espace et de choisir un pas de discrétisation  $\Delta z$ .

#### III.4.1 choix du pas de discrétisation (maillage)

On définit le maillage comme l'ensemble des points du domaine de définition sur lequel la méthode d'approximation est appliquée. Par ailleurs, le **pas** de maillage désigne la distance entre deux points de discrétisation successifs  $\Delta z$ , et on écrit [3] et [7] :

$$\Delta z = \frac{L}{N+1} ; \quad N \text{ est un entier positif.}$$



**Figure III.1** : Maillage en différences finies.

On se limite dans notre cas à la discrétisation par rapport à l'espace (la variable  $z$ ), la variable du temps n'est pas discrétisée.

### III.4.2 Description mathématique de la méthode des différences finies

Soit  $N$  un entier positif ; on pose  $\Delta z = \frac{L}{N+1}$  et on note  $z_i = i\Delta z$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, N+1\}$ , les points de discrétisation [3] et [6].  $x_i(t)$  est une approximation de  $x(z, t)$  au point  $z = z_i$  et on note :

$$x_i(t) \approx x(z_i, t) ; \quad (\text{III.10})$$

Avec les conditions au bord ainsi que la condition initiale :

$$x_0(t) = x_{N+1}(t) = 0 ;$$

$$x_i(0) = 0 \quad , \quad i = \{1, \dots, N\} ;$$

Le but de la méthode numérique consiste à calculer les valeurs les plus exactes possibles de  $x_i(t)$  pour  $i = \{1, \dots, N\}$ . La première étape consiste à trouver une formule qui permet d'approcher la dérivée seconde de  $x$  en chacun des points  $z_i$  à l'aide des valeurs  $x_i(t)$  pour  $i = \{1, \dots, N\}$ . Pour cela, on utilise des développements de Taylor de  $x$  [3] et [6] :

$$x(z + \Delta z) = x(z) + \Delta z x'(z) + \frac{\Delta z^2}{2} x''(z) + \frac{\Delta z^3}{6} x'''(\Theta_1) ; \quad \Theta_1 \in ]z, z + \Delta z[ \quad (\text{III.11})$$

$$x(z - \Delta z) = x(z) - \Delta z x'(z) + \frac{\Delta z^2}{2} x''(z) - \frac{\Delta z^3}{6} x'''(\Theta_2) ; \quad \Theta_2 \in ]z - \Delta z, z[ \quad (\text{III.12})$$

## Chapitre III : Modélisation du four de frittage

---

On additionne les deux équations (III.11) et (III.12), on obtient alors :

$$x''(z) \approx \frac{x(z+\Delta z) - 2x(z) + x(z-\Delta z)}{\Delta z^2} \quad (\text{III.13})$$

C'est l'approximation de deuxième dérivée par la formule de Taylor.

### III.4.3 Discrétisation spatiale du modèle du four de frittage

On considère le problème (III.8) modélisant notre système physique, on remplaçant la dérivée seconde par rapport à la variable d'espace  $z$  par leurs valeurs discrètes approchées par l'équation (III.13) on obtient :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{k}{c\Delta z^2} [x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)] + \frac{1}{c} b_i u(t) \quad (\text{III.14})$$

ce qui conduit au problème suivant :

$$\dot{x}(t) = A x + \frac{1}{c} b u(t) \quad (\text{III.15})$$

avec  $A$  une matrice qu'on va définir par la suite.

### Chapitre III : Modélisation du four de frittage

Ainsi on aura :

$$\dot{x}_1 = \frac{k}{c\Delta Z^2} [x_2(t) - 2x_1(t)] + \frac{1}{c} b_1 u(t)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{k}{c\Delta Z^2} [x_3(t) - 2x_2(t) + x_1(t)] + \frac{1}{c} b_2 u(t)$$

⋮  
⋮

$$\dot{x}_i = \frac{k}{c\Delta Z^2} [x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)] + \frac{1}{c} b_i u(t)$$

⋮  
⋮

$$\dot{x}_N = \frac{k}{c\Delta Z^2} [-2x_N(t) + x_{N-1}(t)] + \frac{1}{c} b_N u(t)$$

qu'on peut écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{N-1} \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \frac{k}{c\Delta Z^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} + \frac{1}{c} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{III.16})$$

## *Chapitre III : Modélisation du four de frittage*

---

L'équation (III.16) étant le modèle d'état approché de celui du four de frittage qui fera l'objet de simulation dans le chapitre qui suit.

### **III.5 Conclusion**

L'objectif de ce chapitre a été d'élaborer un modèle mathématique facilement simulable pour le four de frittage.

On a commencé par l'élaboration d'un modèle mathématique du four de frittage par l'écriture des lois de conservation de l'énergie, par la suite on a procédé à la discrétisation de ce dernier par une méthode facilement accessible qui est l'approximation par différences finies.

La méthode des différences finies est une méthode numérique très utilisée pour le traitement des problèmes physiques principalement les modèles régissant les transferts de chaleur. Les avantages de cette méthode résident dans sa simplicité de la méthode en termes d'utilisation et sa robustesse.

Ce modèle discrétisé auquel on a abouti fera l'objet de simulation dans le chapitre qui suit.

### IV.1 Introduction

La discrétisation du modèle du four de frittage réalisée dans le chapitre précédent nous a conduit à la simulation de ce dernier afin de visualiser les différents profils de température.

Par ailleurs plusieurs méthodes de simulation sont possibles. Dans un premier temps, on procède à la simulation en boucle ouverte, avec une entrée échelon, en considérant une distribution uniforme pour le signal de commande. Par la suite, une autre simulation sera réalisée avec une entrée du type échelon mais en imposant certaines distributions définies par zones. Ces distributions sont définies de manière à imposer le profil exigé (voir figure I.7).

### IV.2 Simulation du modèle discrétisé en boucle ouverte

A l'aide de Matlab on simule le modèle (III.16) obtenu après discrétisation du modèle du four de frittage avec les conditions au bord et la condition initiale. L'entrée  $u(t)$  étant un échelon unitaire dont la distribution est uniforme le long du four, c'est-à-dire  $b(z) = 1$ .

#### IV.2.1 Simulation sur Matlab

La simulation est réalisée en considérant un nombre de point de discrétisation  $N = 100$ . Les différents paramètres du four sont donnés comme suit :

Chaleur spécifique :  $c = 250 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  ;

Conductivité thermique :  $k = 6.2 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  ;

Longueur du four :  $L = 1.5 \text{ m}$  ;

## Chapitre IV : Simulation du modèle du four de frittage

---

Conditions aux limites :

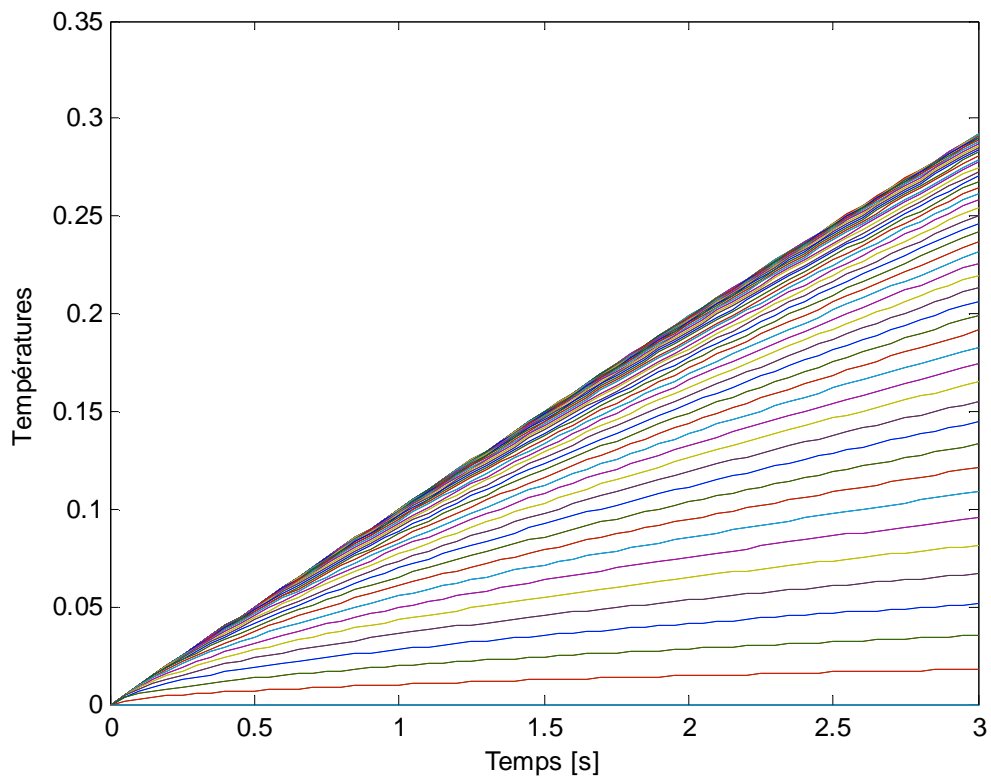
$$x(0, t) = 0;$$

$$x(L, t) = 0;$$

Conditions initiales :

$$x(z, t) = 0;$$

La simulation numérique des deux programmes permet d'obtenir les figures suivantes :



**Figure IV.1** : Evolution de la température en fonction du temps.

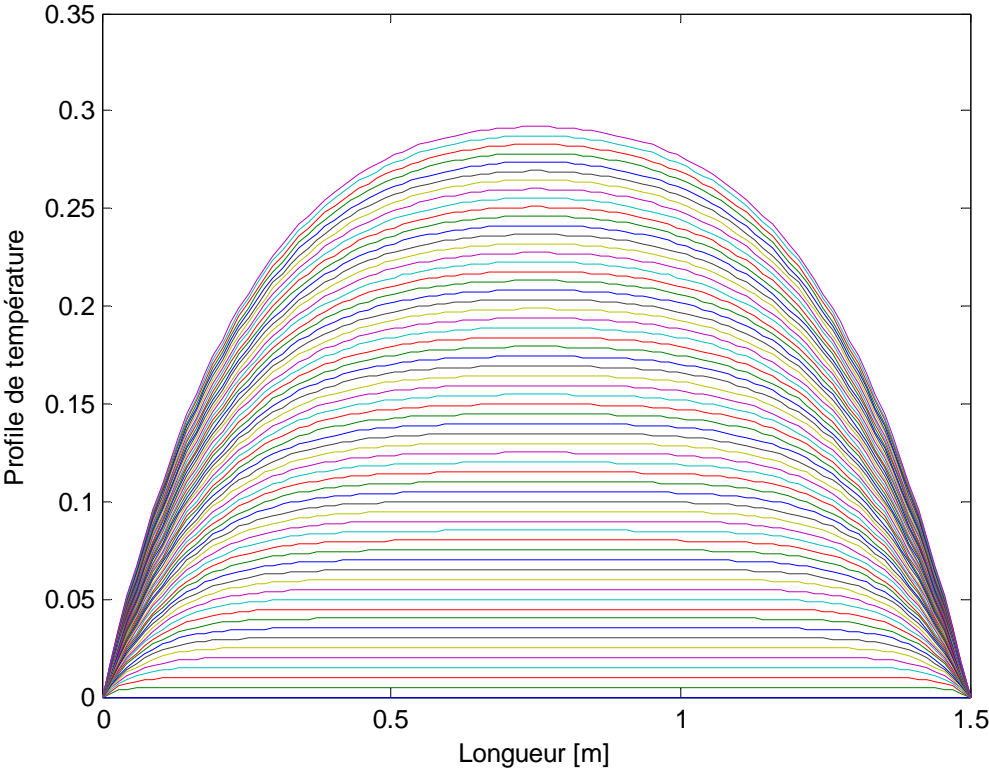
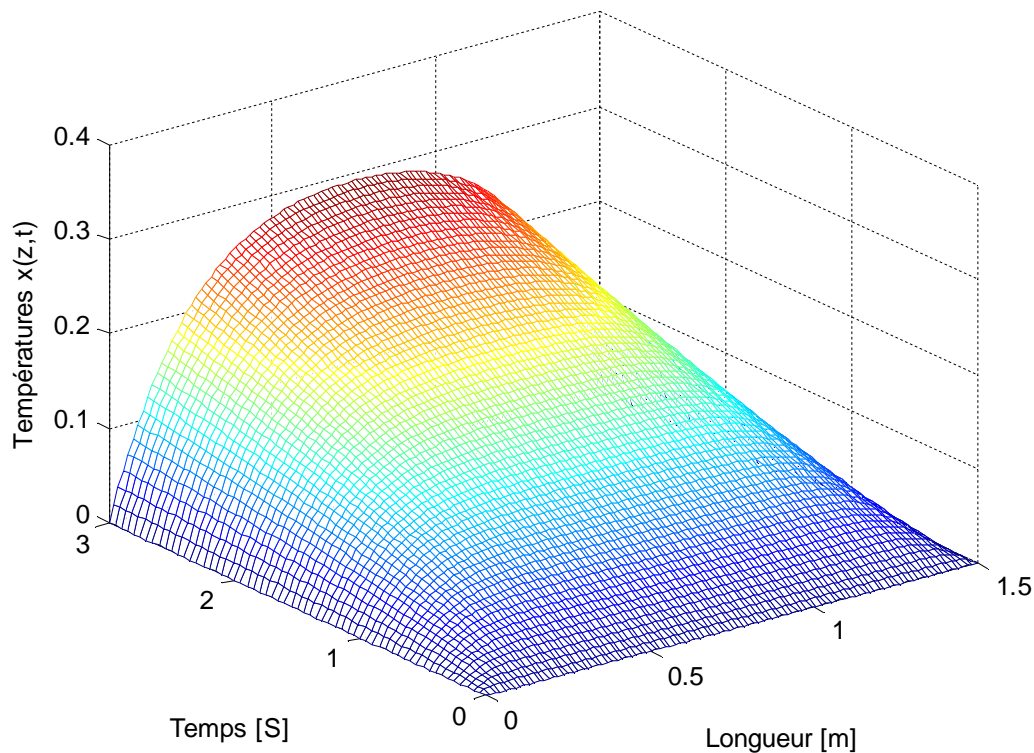


Figure IV.2 : Evolution de la température en fonction de la longueur L.



**Figure IV.3** : Evolution spatio-temporelle de la température.

### IV.2.2 Interprétation des résultats de simulation

D'après ces résultats de la simulation en boucle ouverte, on remarque que l'évolution de la température en fonction du temps est une courbe continûment croissante (Figure IV.1), alors que la deuxième courbe (Figure IV.2) qui représente l'évolution de la température en fonction de l'espace à l'intérieur du tube réfractaire est de type d'une parabole. Quant à la troisième courbe (Figure IV.3), elle représente l'évolution spatio-temporelle de la température du même système. On constate que le profil (Figure IV.2) en boucle ouverte est loin d'être le profil désiré (Figure I.7).

### IV.3 Simulation du modèle discrétisé avec des différentes distributions par zones

Avant de passer à la distribution de la commande il est utile de connaître les types d'actionneurs qui existent et de comparer avec le nôtre afin d'appliquer la distribution qui convient à notre système.

#### IV.3.1 Notion d'actionneur

Les échanges entre un système réel et son environnement se font par l'intermédiaire des capteurs et des actionneurs. Les capteurs sont des composants passif servent à recueillir des informations sur l'état du système. Par ailleurs, les actionneurs sont des composants actifs permettant l'excitation du système. Ils peuvent être de nature, de forme, de conceptions différentes et on cite le type [1] :

- Ponctuel fixe : exemple d'un brûleur dans un système de diffusion.
- Ponctuel mobile : exemple d'un système excité par un rayon laser en mouvement.
- Zone : dont l'exemple de chauffage par diffusion avec une zone de chauffe importante.
- Filament : tel un four chauffé par une résistance électrique.

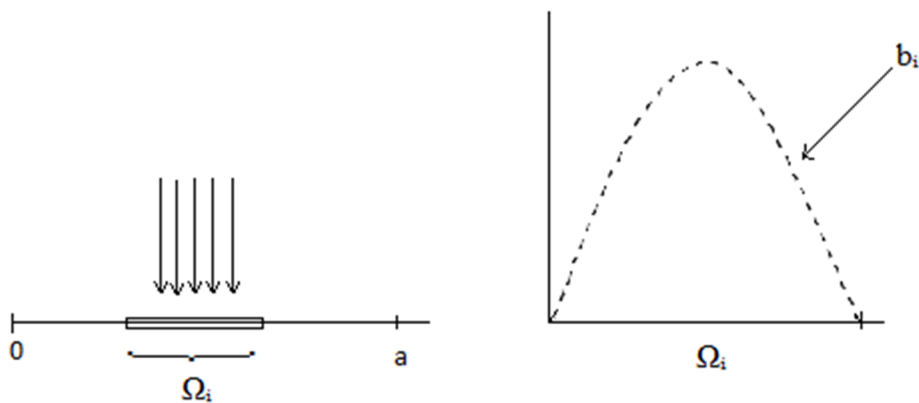
L'implémentation de ces actionneurs dans le système réel peut se présenter sous divers types, notamment à l'intérieur ou aux frontières de ce dernier.

Comme c'est précisé auparavant, le four de frittage est excité en trois zones différentes et on définit :

Soit  $\Omega_i$  (avec  $i=1, 2, 3$ ) fermé contenu dans  $\Omega$  et  $b_i \in \Omega_i$ . On appelle un actionneur zone le couple  $(\Omega_i, b_i)$ .

Avec :

- ✓  $\Omega_i$  représente le support de l'actionneur
- ✓  $b_i$  représente la répartition spatiale de l'actionneur



**Figure IV.4 :** Support et répartition spatiale de l'actionneur ( $\Omega_i$ ,  $b_i$ ).

### IV.3.2 Distribution par zone

D'après le profile imposé, on constate que la distribution de la commande dans la zone I est une droite avec une pente positive, dans la zone II la distribution est uniforme, et dans la zone III, la distribution est une droite mais avec une pente négative. Ainsi, les distributions sont définies comme suit :

$$b(z) = \begin{cases} \alpha z & \text{pour } z \leq z_1 \\ \beta & \text{pour } z_1 \leq z \leq z_2 \\ -\alpha z + \gamma & \text{pour } z \geq z_2 \end{cases}$$

## Chapitre IV : Simulation du modèle du four de frittage

---

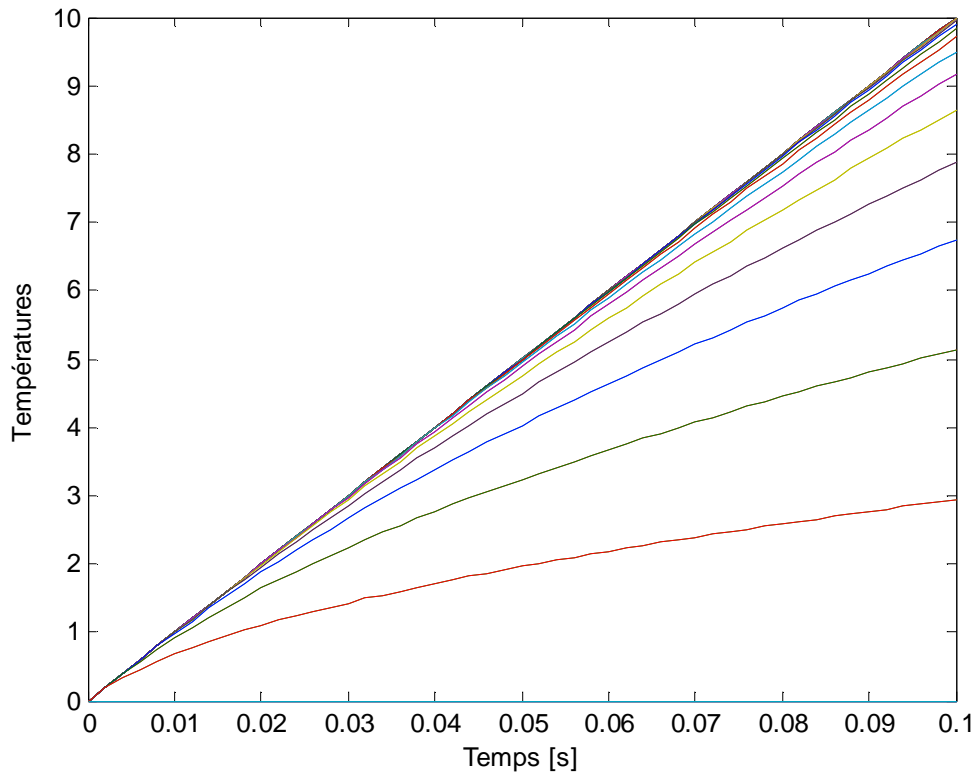
Le paramétrage de ces distributions (choix de  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ )  $b(z)$  est lié au profil désiré et les dimensions des zones. Ces distributions en fonction des données du problème peuvent s'écrire comme suit :

$$b(z) = \begin{cases} C \frac{z}{z_1} & \text{pour } z \leq z_1 \\ C & \text{pour } z_1 \leq z \leq z_2 \\ C \frac{z}{L - z_2} & \text{pour } z \geq z_2 \end{cases}$$

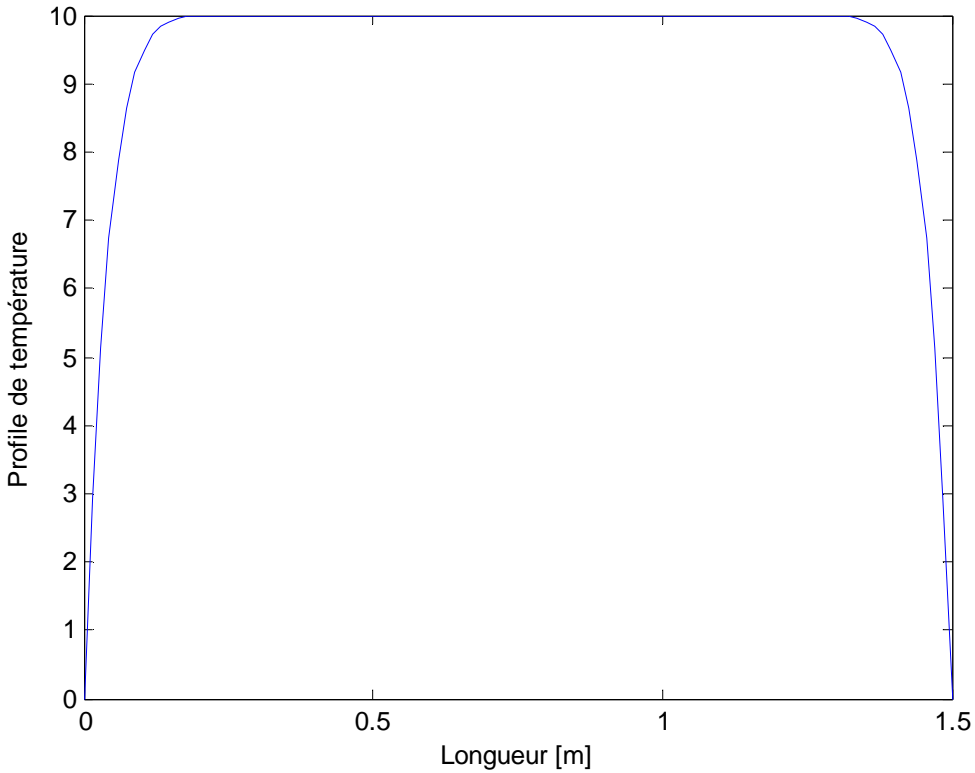
$z_1$  et  $z_2$  définissent les limites des trois zones. Le paramètre  $C$  est déterminé suivant la valeur maximale du profil désirée.

### IV.3.3 Simulation sur Matlab

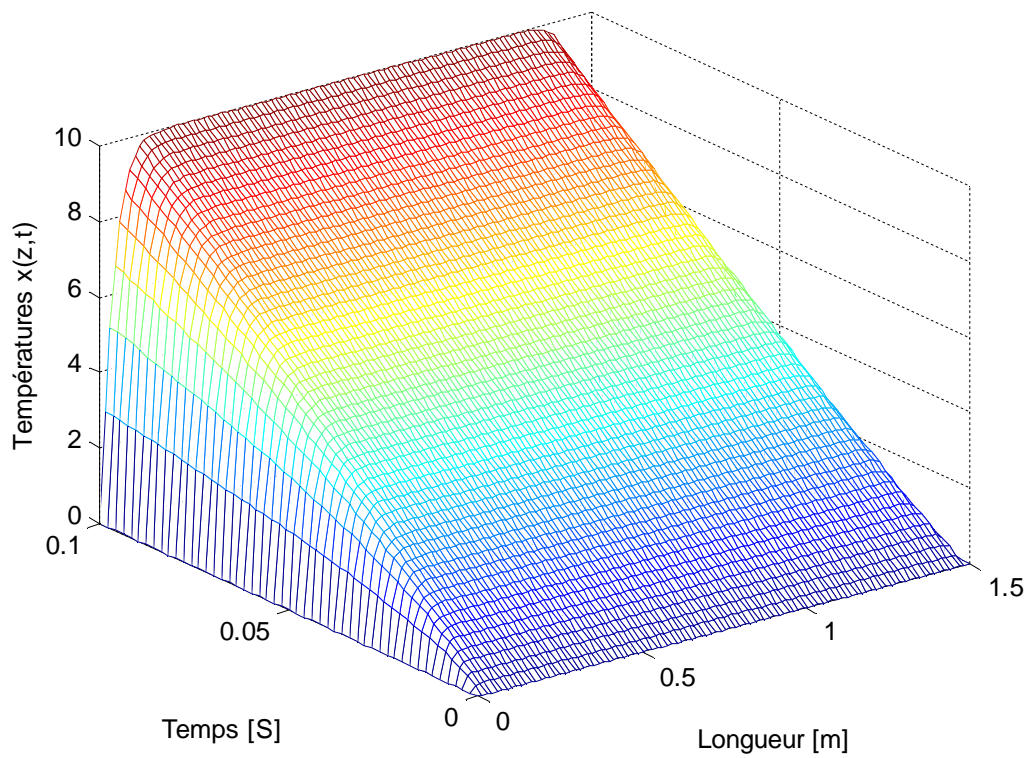
La simulation numérique des deux programmes permet d'obtenir les figures suivantes :



**Figure IV.5 :** Evolution de la température en fonction du temps avec distribution de la commande.

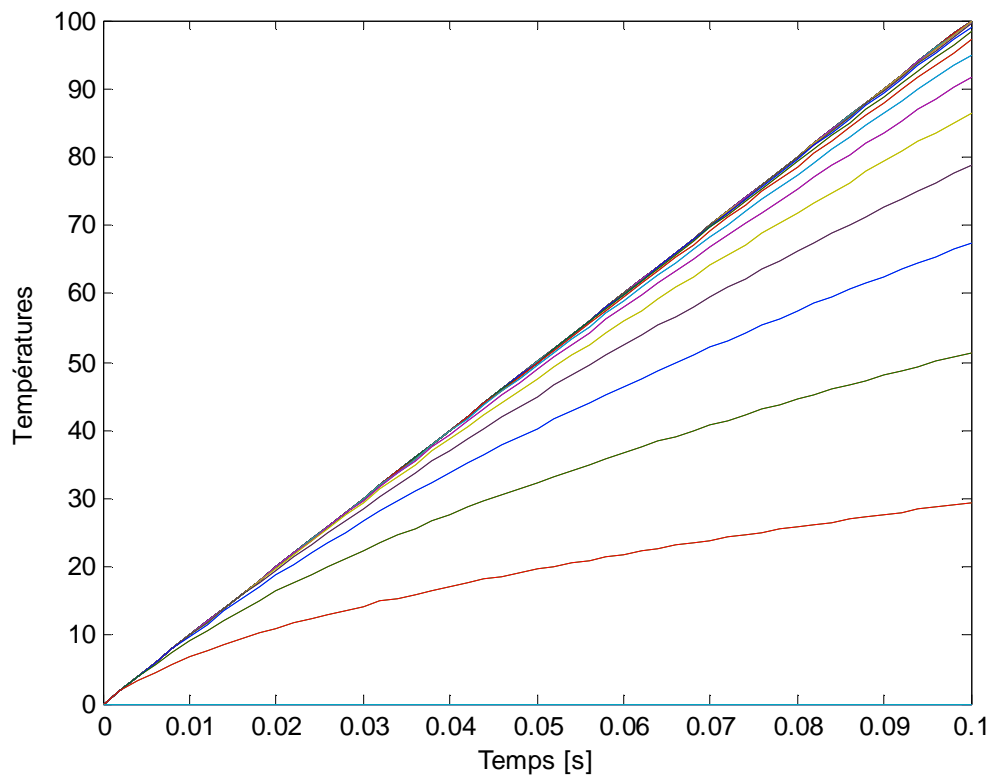


**Figure IV.6 :** Evolution de la température en fonction de la longueur L avec distribution de la commande.

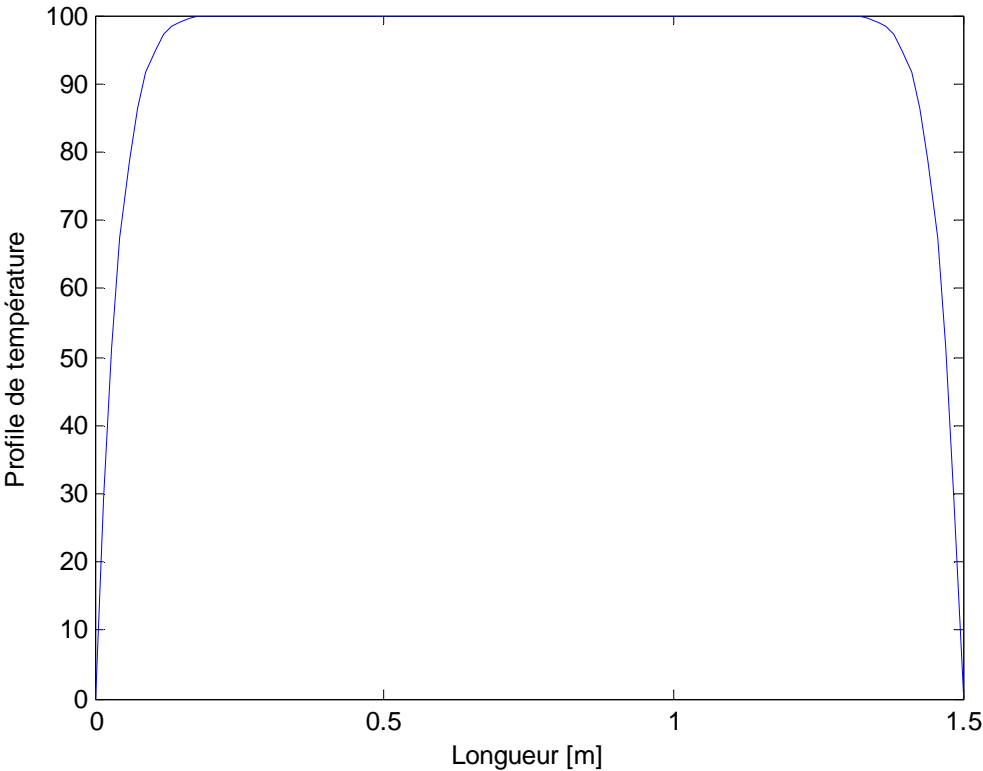


**Figure IV.7 :** Evolution spatio-temporelle de la température avec distribution de la commande.

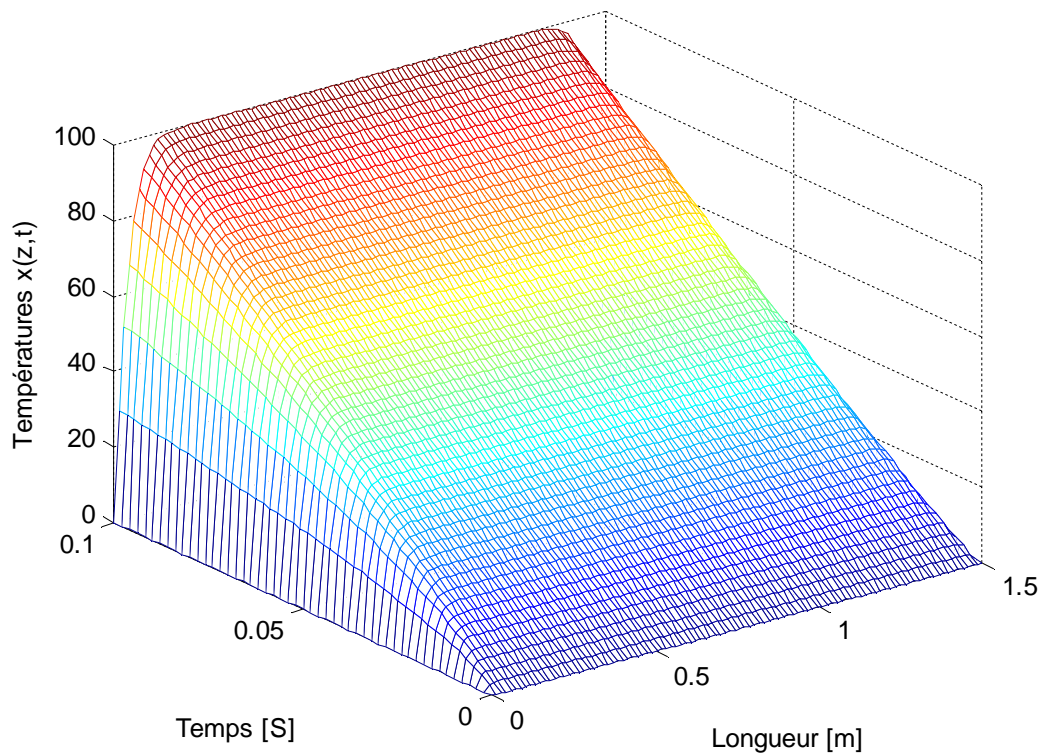
On simule par ailleurs le même programme pour une valeur de  $C = 100$ , on obtient :



**Figure IV.8 :** Evolution de la température en fonction du temps avec distribution de la commande pour C=100.



**Figure IV.9** : Evolution de la température en fonction de la longueur L avec distribution de la commande pour C=100.



**Figure IV.10 :** Evolution spatio-temporelle de la température avec distribution de la commande pour  $C=100$ .

### IV.3.3 Interprétation des résultats de simulation

On remarque que l'amplitude des figures (IV.5 à IV.7) diffère de celle des figures (IV.8 à IV.10) et cela est dû aux différentes valeurs de  $C$ . alors pour atteindre une amplitude max du profil désiré de  $1700^{\circ}\text{C}$  il suffit de fixer une valeur de  $C=1700$ .

D'après ces résultats, on constate que la valeur du paramètre  $C$  permet d'imposer un certain profil désiré. Il est choisi selon les températures exigées dans chaque zone.

En absence de perturbations, les distributions proposées permettent d'assurer le profil de température imposé le long du four mais dans le cas contraire une régulation est nécessaire.

D'après les résultats de simulation obtenus, on remarque que la solution proposée est intéressante. Néanmoins sur le plan pratique, l'implémentation nécessite une conception des actionneurs de chauffage dont les distributions sont celles proposées.

### **IV.4 Conclusion**

Dans ce chapitre, on a simulé le comportement dynamique du four en boucle ouverte. Dans le premier on a considéré que la distribution de commande est uniforme le long du four (système tel qu'il est conçu). Dans le deuxième cas, on a imposé des distributions pour la commande déterminées selon le profile exigé. Dans ces distributions, il y a un paramètre à fixer (paramètre C) permettant d'avoir les températures désirées dans chaque zone.

Les résultats obtenus dans ce chapitre montrent qu'on a bel et bien apporté une solution à la problématique posée dans le premier chapitre et ce sur le plan théorique comme le montre les différentes simulations avec distribution de la commande. Toutefois, il est nécessaire d'implémenter des actionneurs de chauffage dont les exigences technologiques répondent aux distributions imposées ci-dessus.

## *Conclusion générale*

---

L'objectif de ce travail a été de répondre à la problématique posée dans le premier chapitre et qui consiste à l'obtention d'un profil idéal pour le traitement des pastilles d'Oxyde d'Uranium ( $O_2$ ) dans un réacteur nucléaire. Le four de frittage est l'outil du traitement thermique qui fait l'objet d'étude dans ce mémoire.

Pour des raisons de simulation numérique de plusieurs solutions possibles, on a été amené à modéliser le four de frittage afin de procéder aux différents tests possibles. Les équations aux dérivées partielles étant l'outil de cette modélisation qui permet de décrire fidèlement le comportement dynamique du four. Par la suite, on a procédé à la discrétisation de ce modèle par la méthode des différences finies pour approcher la solution de ce système décrit par des équations aux dérivées partielles en un nombre fini, mais important, de points du domaine spatial considéré.

Après avoir procédé à la modélisation et l'approximation par des différences finies, nous avons simulé le modèle en considérant différentes distributions pour la température de chauffage. Le premier test consiste à programmer, sous Matlab, le problème tel que décrit (voir chapitre III) en boucle ouverte avec une consigne échelon unitaire mais avec une distribution uniforme de la température de chauffage (fonctionnement actuel du four). Les résultats de cette simulation montrent que le profil de température est loin d'être le profil désiré pour les différentes zones. Le deuxième test consiste à définir des fonctions de distribution pour la température de chauffage permettant d'assurer le profil imposé. Dans la zone I sous forme d'une droite avec une pente positive, la zone II où la distribution est uniforme et dans la zone III où la distribution est une droite mais avec une pente négative. Les résultats de simulation obtenus ont montrés que les distributions considérées permettent d'avoir le profil recherché. Ce profil peut être paramétré selon les températures désirées pour chaque zone.

## *Conclusion générale*

---

Sur le plan théorique, la solution proposée est intéressante et répond à la problématique posée. Toutefois, l'implémentation de la solution sur le plan pratique reste à répondre aux exigences technologiques de cette solution qui consiste en la conception des actionneurs de chauffage dont les distributions sont celles proposées.

## Références Bibliographie

---

- [1] **A. El Jai et A. J. Pritchard**, *Capteurs et actionneurs dans l'analyse numérique des systèmes distribués*. Editions Masson, Paris, New York, Barcelone, Milan, Mexico, Sao Paulo, 1986.
- [2] **A. Rachid**, *Systèmes de régulation*. Editions Masson, Paris, 1997.
- [3] **G. Allaire**, *Analyse numérique et optimisation, une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. 2<sup>ème</sup> édition. Editions de l'école polytechnique Paris, 2012.
- [4] **G. Cizeron**, *Le frittage sous son aspect physico-chimique*. Extrait de l'industrie céramique, vol. 611 n°10, 713-729. Institut de céramique française, 1968.
- [5] **J. P. Babary et W. Pelczewski**, *Commande optimale des systèmes continus déterministes*. Editions Masson, Paris, 1985.
- [6] **J. Rappaz et M. Picasso**, *Introduction à l'analyse numérique*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2004.
- [7] **N. Piskounov**, *Calcul différentiel et intégral*. Tome II 11<sup>ème</sup> édition. Editions Mir Moscou, 1987.
- [8] **O. Lame, D. Bellet, M. DI Michel et D. Bouvard**, *In situ micromography investigation of metal powder compacts during sintering*. European Materials Research Society, 2002.
- [9] **R. M. German**, *Sintering theory and practice*: A Wiley-Intersciences Publication, 1996.

## ***Résumé :***

L'objectif de ce travail a été de répondre à la problématique relative à l'obtention d'un profil de température idéal pour le frittage de pastilles d'Oxyde d'Uranium ( $UO_2$ ) dans un réacteur nucléaire tel que représenté dans le premier chapitre.

Le four de frittage fait l'objet d'étude dans ce mémoire. Par ailleurs, on a procédé à la modélisation de ce dernier à l'aide des systèmes à paramètres distribués ainsi qu'à la discrétisation du modèle obtenu par la méthode des différences finies pour approcher la solution de ce système.

Par la suite, le modèle discrétisé a fait l'objet de simulation, en premier lieu avec une entrée de commande uniformément distribuée (fonctionnement actuel du four). Les résultats de cette simulation ont montrés que le profil de température est loin d'être le profil désiré. Donc on a procédé, dans un deuxième lieu, à définir les fonctions de distribution pour la température de chauffage permettant d'assurer le profil imposé. Les résultats de simulation obtenus avec cette entrée de commande distribuée, ont montré que les distributions considérées permettent d'avoir le profil recherché. Ce profil peut être paramétré selon les températures désirées pour chaque zone.

## ***Mots clés :***

Combustible nucléaire, Pastilles d'Oxyde d'Uranium, Frittage, Four, Traitement thermique, Systèmes à paramètres distribués, Equations aux dérivées partielles, Equations aux dérivées ordinaires, Conditions aux limites, Méthode des différences finies, Equation de chaleur, Modélisation, Discrétisation, Approximation, Commande par zones, Distribution par zone.