REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI
TIZI-OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin de cycle
En vue d'obtention de diplôme de master en Mathématiques

Option : Probabilités-Statistique.

Thème Intitulé :

Inférence dans le modèle exponentiel généralisé

Présenté par

M^{elle}. **OUKACI Katia**

Devant le jury composé de :

Mr. FELLAG Hocine Professeur UMMTO Président

Mme. BELKACEM Cherifa MCB UMMTO Encadreur

Mme. ATIL Lynda MCA UMMTO Examinatrice

Remerciements

Je rends grace à Dieu pour m'avoir donné le savoir-faire, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à Madame BELKACEM Cherifa, qui par ses encouragements renouvlés, ses remarques pertinentes, ses conseils, sa disponibilité, et son soutien qui m'ont permis de surmonter mes difficultés et de progresser dans cette étude.

J'adresse mes sincères remerciements à toute l'équipe pédagogique du département mathématiques, spécialité probabilités-statistique.

Mes respectueux remerciements vont également aux membres de jury pour m'avoir honoré par leurs présences afin d'examiner et évaluer ce travail.

Je tiens aussi à remercier tous ceux qui ont contribué à ce modeste travail

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents source de mon éducation, mon savoir et mes principes qui ont beaucoup sacrifié pour que je puisse être là ou je suis.

Mes frères Manis et Amayes, et à ma soeur Lenissa.

Toute ma famille.

Tous ceux qui me sont chers.

Table des matières

Introduction générale

Les données de temps de défaillance (données de temps de survie) mesurent le temps de réalisation jusqu'à un certain événement, tel qu'une défaillance, un décès. Lors de l'analyse de ces données de survie, une distribution de probabilité est nécessaire. Plusieurs distributions de probabilité sont utilisées comme distributions de temps de défaillance (distributions de durée de vie) telles que la distribution exponentielle, Weibull et Gamma. Le choix de la distribution est souvent basé sur la forme de la fonction de risque.

La distribution exponentielle est la distribution la plus exploitée pour l'analyse des données de durée de vie, mais sa pertinence est limitée lorsque le taux de risque est constant. Pour les situations où le taux de risque augmente ou diminue de manière monotone, la distribution Weibull et Gamma à deux paramètres sont les distributions les plus populaires utilisées pour analyser les données de durée de vie. Les deux paramètres des modèles Gamma et de Weibull représentent les paramètres de forme et d'échelle qui jouent un rôle très important pour analyser différents types de données strictement positives. Par conséquent ces deux modèles (Gamma et Weibull) trouvent leurs applications dans divers domaines, comme par exemple, l'économie, l'industrie mécanique, la médecine, la biologie, la physique, etc.

La distribution Gamma a plusieurs propriétés souhaitables, (voir Johnson, Kotz et Balakrishnan [1994] pour les différentes propriétés de la distribution Gamma à deux paramètres). Elle a de nombreuses applications dans différents domaines autres que les distributions de durée de vie, comme références voir : Alexander [1962], Jackson [1963], Klinken [1961] et Masuyama et Kuroiwa [1952]. Cette distribution a un taux de défaillance croissant et décroissant en fonction du paramètre de forme, ce qui donne un avantage supplémentaire sur la distribution exponentielle, qui n'a qu'un taux de défaillance constant.

L'un des inconvénients majeurs de la distribution Gamma est que la fonction de distribution et la fonction de survie ne peuvent pas être exprimée sous une forme explicite, si le paramètre de forme n'est pas un entier. De plus, il existe des termes impliquant la fonction Gamma incomplète et, par conséquent, il faut obtenir une fonction de distribution, une fonction de survie ou une fonction de risque par intégration numérique. Cela rend la distribution Gamma impopulaire par rapport à la distribution de Weibull, qui a une forme explicite pour les fonctions de risque et de survie. D'un autre côté, la distribution de Weibull a ses propres inconvénients. Un des inconvénients qui peut être souligné, est la convergence en loi des estimateurs du maximum de vraisemblance vers la loi normale est très lente (voir Bain [1976]). Par conséquent, l'estimation par intervalle de confiance sont en général mauvais.

Récemment, une nouvelle distribution asymétrique des temps de défaillance nommée distribution exponentielle généralisée à deux paramètres a été introduite par Gupta et Kundu[1999] et étudiée par Gupta et Kundu [2001a] et Gupta et Kundu [2001b], voir aussi Raqab and Ahsanullah [2001], Raqab [2002] et Kundu and Gupta [2008]. Cette distribution était le résultat d'une transformation généralisée de la distribution exponentielle. Dans ce travail, nous nous intéressons essentiellement à cette nouvelle distribution.

Ce mémoire s'articule autour de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à un rappel détaillé sur le modèle exponentiel généralisé à deux paramètres.

Les estimateurs de la distribution exponentielle généralisée par l'inférence classique (maximum de vraisemblance et méthode des moments,...) et par l'inférence Bayésien (approximation de Lindley, procédure MCMC, erreur quadratique) ont été discutés dans le deuxième chapitre.

Le dérnier chapitre est consacré à l'estimation Bayésienne des paramètres d'une distribution exponentielle généralisée sous la fonction coût quadratique. Enfin, nous présentons des résultats numériques obtenus à partir de données simulées. Une étude comparative a été faite.

Ce mémoire se termine par une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre 1

Généralités sur le modèle exponentiel généralisé

Dans ce chapitre, nous donnons un rappel sur le modèle exponentiel, et nous présentons des définitions et quelques propriétés du modèle exponentiel généralisé, ainsi que quelques interprétations probabilistes de ce modèle.

1.1 Rappel sur le modèle exponentiel

La notion de famille exponentielle a été développée par Georges Darmois, E.J.G.Pitman et Bernard Koopman (1935/1936).
Plusieurs travaux ont montré que le modèle exponentiel est parmi les modèles paramètriques les plus importants dans la théorie moderne des statistiques.
Cette famille comprend les distributions Gaussiennes, Binomiale, Poisson, Gamma et Bêta ainsi que bien d'autres.
Dans la suite de cette section, nous citons quelques définitions concernant la famille exponentielle.

1.1.1 Famille exponentielle à un paramètre :

Définition 1.1. *On appelle famille exponentielle générale à un paramètre θ, toute loi de probabilité (discrète ou continue) dont la vraisemlance peut s'écrire sous la forme :*

$$f(x;\theta) = e^{\eta(\theta).T(x)-A(\theta)+B(x)}.I_A(x). \tag{1.1}$$

Où A ne dépend pas de θ.
$\eta(\theta) \in \mathbb{R}$: Paramètre naturel.
$T(x) \in \mathbb{R}$: statistique exhaustive.
B(x) : base de mesure.
$A(\theta)$: fonction qui ne dépend pas de x.
et I : la fonction indicatrice.

Remarque 1.1. *La formule (1.1) est équivalente à :*

$$f(x;\theta) = a(\theta).b(x).e^{\eta(\theta).T(x)}.I_A(x).$$

qui est équivalente à :

$$f(x;\theta) = b(x).e^{\eta(\theta).T(x)-A(\theta)}.I_A(x).$$

Proposition 1.1. *Dans la famille exponentielle, toute statistique de la forme $Z_n = \sum_{i=1}^{n} T(x_i)$ est exhaustive pour θ.*

Exemple 1.1. *Distribution de Poisson*
Si $X \sim P(\theta)$, alors :

$$f(x;\theta) = \frac{e^{-\theta}.\theta^x}{x!}.I_A(x); \theta > 0.$$

Où $A = \mathbb{N}$ ne dépend pas de θ.

On peut écrire $f(x;\theta)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x;\theta) &= e^{\ln \frac{e^{-\theta}.\theta^x}{x!}}.I_A(x) \\ &= e^{\ln e^{-\theta}+\ln \theta^x - \ln x!} \\ &= e^{x\ln\theta - \ln x! - \theta} \end{aligned}$$

Où $\eta(\theta) = \ln\theta$, $T(x) = x$, $B(x) = -\ln x!$ et $A(\theta) = \theta$.

Donc $f(x;\theta)$ appartient à la famille exponentielle à un paramètre θ.

Remarque 1.2. *La loi Uniforme $U[0,\theta]$, où $\theta > 0$ et θ inconnu, n'appartient pas à la famille exponentielle.*
En effet, soit $X \sim U[0,\theta]$,
alors :

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0<x<\theta \\ 0, & si\ non \end{cases}$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}.I_{[0,\theta]}$$

Comme le domaine de $f(x;\theta)$ dépend de θ ($A = [0,\theta]$), alors $f(x;\theta)$ n'appartient pas à la famille exponentielle.

Définition 1.2. *La famille exponentielle naturelle est un sous-ensemble de la famille exponentielle générale dans lequel le paramètre naturel η et la statistique exhaustive $T(x)$ sont à la fois l'identité.*
Une distribution dans une famille exponentielle naturelle de paramètre θ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x;\theta) = b(x)e^{\theta.x - A(\theta)}.I_A(x). \tag{1.2}$$

1.1.2 Généralisation : famille exponentielle à k-paramètres

Définition 1.3. *Une famille de densité de probabilité de la forme :*

$$f(x;\theta) = e^{\sum_{i=1}^{k} \eta_i(\theta).T_i(x) - A(\theta) + B(x)}.I_A(x). \tag{1.3}$$

est appelée famille exponentielle à k-paramètres,
ou A ne dépend pas de θ.

Exemple 1.2. *Loi Bêta*
Soit $X \sim B(\alpha, \beta)$, α, β inconnues
c-à-d : $\theta = (\alpha, \beta)$;
On a :

$$\begin{aligned} f(x;\theta) &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}.x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}.I_{[0,1]}(x). \\ &= e^{(\alpha-1)\ln x + (\beta-1)\ln(1-x) + \ln\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}}.I_{[0,1]}(x). \end{aligned}$$

D'ou $\eta_1(\theta) = \alpha - 1$, $\eta_2(\theta) = \beta - 1$, $T_1(x) = \ln x$, $T_2(x) = \ln(1-x)$, $B(x) = 0$ et $A(\theta) = -\ln\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}$.
Donc $f(x;\theta)$ appartient à la famille exponentielle à 2-paramètres (α, β).

1.1.3 Les lois de probabilités usuelles appartenant à la famille exponentielle :

Le tableau ci-dessous représente l'ensemble des distributions usuelles qui appartiennent à la famille exponentielle, écrite sous la forme générale :

$$f(x;\theta) = e^{\eta(\theta).T(x) - A(\theta) + B(x)}$$

Loi	Densité	Df	θ	η	T(x)	B(x)	$A(\theta)$
Poisson $P(\theta)$	$\frac{e^{-\theta}.\theta^x}{x!}$	$\mathbb{N}$	θ	$\ln\theta$	x	$-\ln x!$	θ
Bernoulli $B(\theta)$	$\theta^x.(1-\theta)^{1-x}$	$x=0,1$	θ	$\ln\frac{\theta}{1-\theta}$	x	0	$-\ln(1-\theta)$
Binomiale $B(n,\theta)$	$C_n^x.\theta^x.(1-\theta)^{1-x}$	$0,1,2,...,n$	$\theta(nconnu)$	$\ln\frac{\theta}{1-\theta}$	x	$\ln C_n^x$	$-n\ln(1-\theta)$
Exponentielle $E(\theta)$	$\theta.e^{-\theta.x}$	$\mathbb{R}_+$	θ	$-\theta$	x	0	$-\ln\theta$
$GE(\lambda,\theta)$	$\frac{\theta.\lambda.e^{-\lambda.x}}{(1-e^{-\lambda.x})^{-(\theta-1)}}$	$[0,+\infty[$	$\theta(\lambda \text{ connu})$	$\theta-1$	$\ln(1-e^{-\lambda.x})$	$-\lambda.x$	$-\ln\theta\lambda$
Pareto$P(x_m,\theta)$	$\frac{\theta.x_m^k}{x^{\theta+1}}$	$[x_m,+\infty[$	$\theta(x_m connu)$	$-(\theta+1)$	$\ln x$	0	$-\ln(\theta x_m^\theta)$
Normale $N(\theta,1)$	$\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}.e^{\frac{-1}{2}(x-\theta)^2}$	$\mathbb{R}$	θ	θ	x	$\frac{-x^2}{2}$	$\frac{1}{2}(\theta^2+\ln 2\Pi)$
Normale $N(0,\theta)$	$\frac{1}{\sqrt{2\Pi\theta}}.e^{\frac{-1}{2\theta}x^2}$	$\mathbb{R}$	θ	$\frac{-1}{2\theta}$	x^2	0	$\frac{1}{2}\ln(2\Pi\theta)$
Weibull $W(\alpha,\theta)$	$\frac{-\alpha.\theta.(\alpha.\theta)^{(\alpha-1)}}{e^{-(\theta.x)^\alpha}}$	$[0,+\infty[$	$\theta(\alpha connu)$	$-\theta^\alpha$	x^α	0	$\alpha(1-\alpha.\theta)\ln(\alpha.\theta)$
khi-carré	$\frac{(\frac{1}{2})^{\theta/2}}{\Gamma(\theta/2)}.x^{\frac{\theta}{2}-1}.e^{\frac{-x}{2}}$	$[0,+\infty[$	θ	$\frac{\theta}{2}-1$	$\ln x$	$-\frac{x}{2}$	$-\ln\frac{(\frac{1}{2})^{\theta/2}}{\Gamma(\theta/2)}$
Gamma $\Gamma(\alpha,\beta)$	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}.x^{\alpha-1}.e^{-\beta x}$	$[0,+\infty[$	α,β	$\begin{pmatrix}\alpha-1\\-\beta\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\ln x\\x\end{pmatrix}$	0	$-\ln\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$
Bêta $B(\alpha,\beta)$	$\frac{x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}$	$[0,1]$	α,β	$\begin{pmatrix}\alpha-1\\\beta-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\ln x\\\ln(1-x)\end{pmatrix}$	0	$\ln B(\alpha,\beta)$
Normale $N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}}{\sigma\sqrt{2\Pi}}$	$\mathbb{R}$	μ,σ^2	$\begin{pmatrix}\frac{\mu}{\sigma^2}\\\frac{-1}{2\sigma^2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x\\x^2\end{pmatrix}$	0	$\frac{1}{2}(\frac{\mu^2}{\sigma^2}+\ln(2\Pi\sigma^2))$

TABLE 1.1 : Les lois de probabilités usuelles appartenant à la famille exponentielle.

Parmi les distributions qui n'appartiennent pas à la famille exponentielle, on peut citer les lois : t de Student, Cauchy, hypergéométrique, Uniforme et la plupart des distributions mixtures.

1.2 Modèle exponentiel généralisé

Le modèle exponentiel généralisé à deux paramètres α et λ, est une extension de la loi exponentielle, il a été introduit et étudié de manière assez approfondie pour la première fois par Gupta et Kundu(1999). Ils ont étudié diverses propriétés du modèle et ils ont observé que de nombreuses propriétés sont assez similaires à celles de la famille Gamma et de la famille Weibull.

1.2.1 Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle généralisée de deux paramètres $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$,notée $GE(\alpha, \lambda)$, sa fonction de répartition F est donnée par :

$$F(x; \alpha, \lambda) = (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha}, x \geq 0, \alpha, \lambda > 0. \tag{1.4}$$

Où α et λ sont les paramètres de forme et d'échelle, respectivement.
Comme cas particulier, la distribution exponentielle généralisée se réduit à la distribution exponentielle à un paramètre(standard) dans le cas ou $\alpha = 1$.

De plus, on a :

$$F_{GE}(x; \alpha, \lambda) = (F_E(x; \lambda))^{\alpha}$$

La Figure ci-dessous représente les courbes de la fonction de répartition de la distribution exponentielle généralisée pour $\lambda = 1$ et différentes valeurs de $\alpha \in \{1, 2, 3\}$.

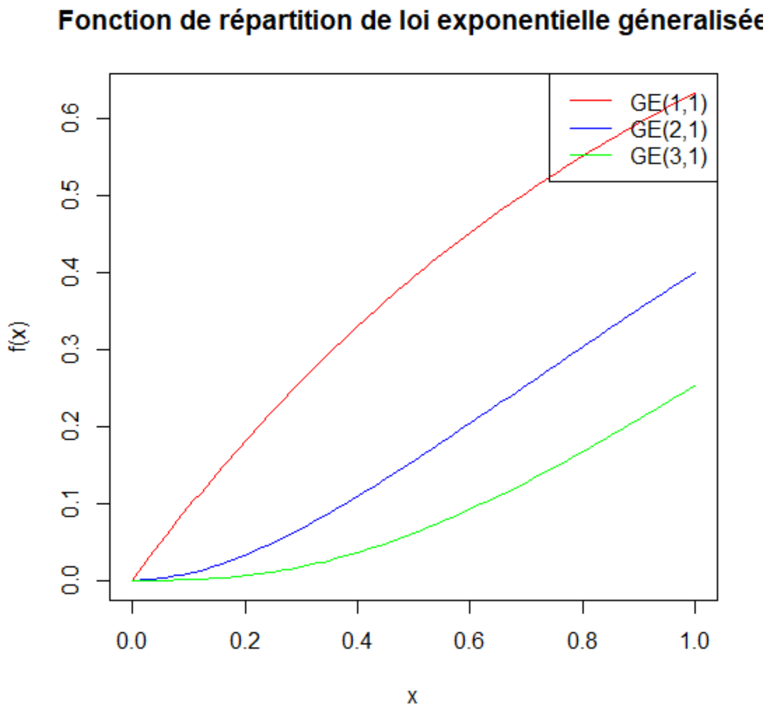

FIG. 1.1 – Fonction de répartition de la distribution exponentielle généralisée GE(1,1), GE(2,1), GE(3,1)

1.2.2 Fonction de densité

Une variable aléatoire X, suit la loi exponentielle généralisée de paramètres α, λ ;si elle est absolument continue, et admet pour densité de probabilité la fonction f, définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x;\alpha,\lambda) = \frac{dF(x;\alpha,\lambda)}{dx} = \alpha\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1}.e^{-\lambda x}, x \geq 0, \alpha, \lambda \geq 0. \tag{1.5}$$

Proposition 1.2. *La densité de probabilité de la distribution exponentielle généralisée est une densité unimodale si $\alpha = 1$. Elle est log-convexe si $\alpha < 1$, et log-concave si $\alpha > 1$.*

Propriétés 1.1. *La fonction de densité f de la loi exponentielle généralisée vérifie les propriétés suivantes :*

- *Si $\alpha = 1$, on a : la distribution exponentielle généralisée coincide avec la distribution exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité de probabilité :*

$$f(x,\lambda) = \lambda.e^{-\lambda.x},\ où\ x > 0, \lambda > 0$$

- *Si* $\lambda = 1$, $GE(\alpha,\lambda) = GE(\alpha)$ *de densité de probabilité donnée par :*
$$f(x,\alpha) = \alpha(1-e^{-x})^{\alpha-1}e^{-x}; \alpha, x > 0;$$
- *Si* $X \sim GE(\alpha)$, *alors* $\lambda.X \sim GE(\alpha,\lambda)$

- *Si* $X \sim GE(\alpha)$, *alors* $Y = e^{-X} \sim Beta(1,\alpha)$.

La Figure ci-dessous représente les courbes de la fonction de densité de la distribution exponentielle généralisée pour $\lambda = 1$ et différentes valeurs de $\alpha \in \{1, 2, 3\}$.

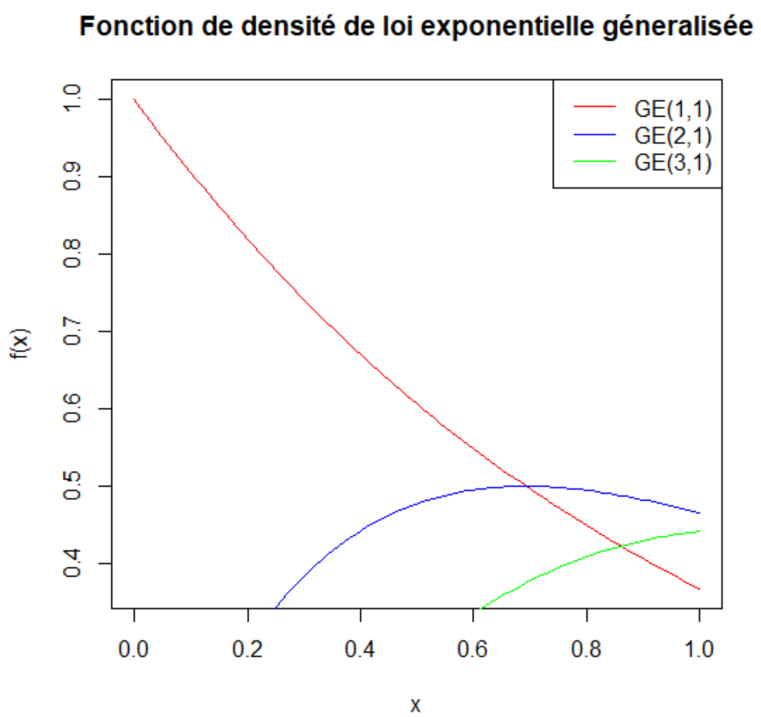

FIG. 1.2 – Fonction de densité de la distribution exponentielle généralisée GE(1,1),GE(2,1),GE(3,1)

1.2.3 Fonction de survie

La fonction de survie d'une variable aléatoire continue X, qui suit une loi exponentielle généralisée, est définie par :

$$S(x;\alpha,\lambda) = 1 - F(x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha}, x \geq 0, \alpha, \lambda \geq 0. \tag{1.6}$$

La fonction de survie S(t) est une fonction décroissante, telle que $S(0) = 0$ et $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$.

La Figure ci-dessous représente les courbes de la fonction de survie de la distribution exponentielle généralisée pour $\lambda = 1$ et différentes valeurs de $\alpha \in \{1, 2, 3\}$.

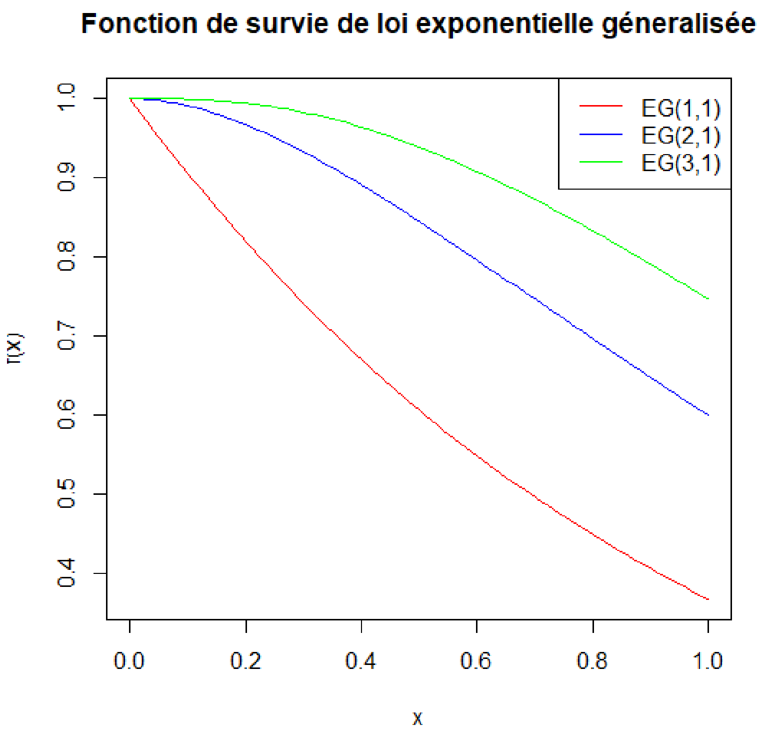

FIG. 1.3 – Fonction de survie de la distribution exponentielle généralisée GE(1,1),GE(2,1),GE(3,1)

Remarque 1.3. *Il est intéressant de noter qu'en raison de la structure simple des fonctions de distribution et de survie, l'exponentielle généralisée à deux paramètres peut être utilisée assez efficacement pour analyser de nombreuses données de durée de vie, en particulier à la place des distributions Gamma et Weibull à deux paramètres(voir Gupta et Kundu (1999), Raqab(2004)).*

1.2.4 Fonction de hasard

La fonction de hasard de la distribution exponentielle généralisée est donnée par :

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{\alpha\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1}.e^{-\lambda x}}{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}; x \geq 0, \alpha, \lambda \geq 0. \tag{1.7}$$

La Figure ci-dessous représente la courbe de la fonction de hasard de la distribution exponentielle généralisée pour $\lambda = 1$ et $\alpha = 2$.

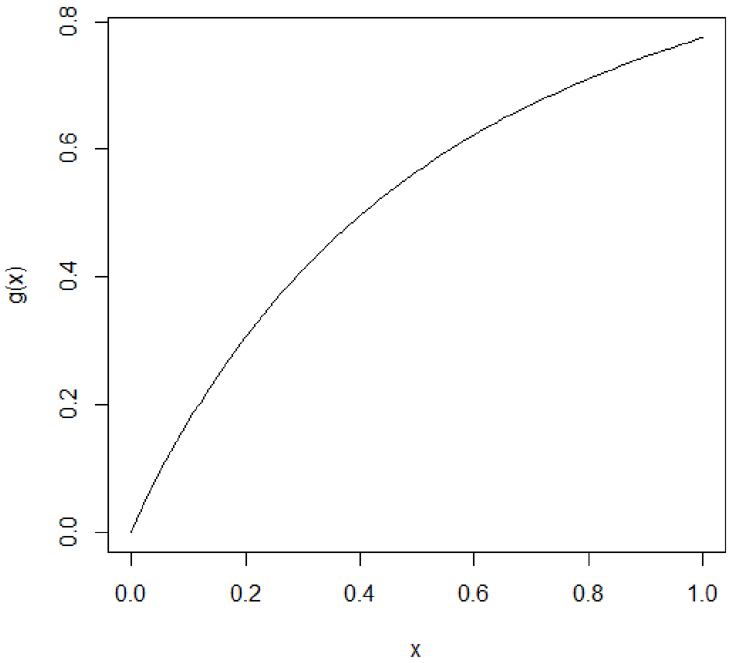

FIG. 1.4 – Fonction de hasard de la distribution exponentielle généralisée GE(2,1)

Proposition 1.3. *La distribution $GE(\alpha, \lambda)$ a une fonction de hasard croissante et décroissante en fonction du paramètre de forme.*
Pour tout $\lambda > 0$, la fonction de hasard est croissante pour $\alpha > 1$, décroissante pour $\alpha < 1$, et constante si $\alpha = 1$.
La fonction de hasard de la distribution exponontielle généralisée se comporte de la même manière que la distribution Gamma, qui est assez diffèrente de la fonction de hasard de la distribution Weibull.

Sachant que, la densité de la distribution Gamma :

$$f_G(x;\alpha,\lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}.x^{\alpha-1}.e^{-\lambda.x}; \alpha,\lambda,x > 0$$

et la densité de la distribution Weibull :

$$f_W(x;\alpha,\lambda) = \alpha\lambda.(\alpha\lambda)^{\alpha-1}.e^{(-\lambda.x)^\alpha}; \alpha,\lambda,x > 0$$

Les paramètres α et λ représentent respectivement les paramètres de forme et d'échelle dans les trois cas différents.
Une comparaison des trois fonctions de hasard différentes est présentée dans le tableau ci-dessous.

Paramètre	*Gamma*	*Weibull*	*GE*
$\alpha = 1$	λ	λ	λ
$\alpha < 1$	*diminue de* ∞ *à* λ	*diminue de* ∞ *à 0*	*diminue de* ∞ *à* λ
$\alpha > 1$	*augmente de 0 à*λ	*augmente de 0 à* ∞	*augmente de 0 à*λ

TABLE 1.2 : Comportement de la fonction de hasard des distribution Gamma, Weibull et exponentielle généralisée.

Remarque 1.4. *Si le paramètre de forme est un, alors les trois distributions se réduisent à la distribution exponentielle à un paramètre.*

1.2.5 Moments d'ordre k

Considérons maintenant les différents moments de la distribution exponentielle généralisée. Supposons que X désigne la variable aléatoire GE de paramètres α et λ, alors le moment d'ordre k est donné par :

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \int_0^\infty x^k.f(x)dx \\ &= \alpha\lambda \int_0^\infty x^k.(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1}.e^{-\lambda x}dx \end{aligned}$$

Puisque $0 < e^{-\lambda x} < 1$; pour $\lambda > 0$ et $x > 0$,
et en utilisant la représentation de la série de $(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1}$, On a :

$$(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1} = \Sigma_{i=0}^{\infty}(-1)^i.C_{\alpha-1}^i.e^{-i\lambda x}$$

Où : $C_{\alpha-1}^i = \frac{(\alpha-1)...(\alpha-i)}{i!}$
On obtient, donc :

$$E(X^k) = \frac{\alpha\Gamma(k+1)}{\lambda^k}.\Sigma_{i=0}^{\infty}(-1)^i.C_{\alpha-1}^i.\frac{1}{(i+1)^{k+1}} \tag{1.8}$$

Puisque (1.8) est une série convergente pour tout $k \geq 0$, donc tous les moments d'ordre k existent.
Par conséquent, pour $k = 1$, on obtient l'espérance de X :

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}.\Sigma_{i=0}^{\infty}(-1)^i.C_{\alpha-1}^i.\frac{1}{(i+1)^2}$$

Et pour $k = 2$, on obtient le moment d'ordre 2 de X :

$$E(X^2) = \frac{2\alpha}{\lambda^2}.\Sigma_{i=0}^{\infty}(-1)^i.C_{\alpha-1}^i.\frac{1}{(i+1)^3}$$

1.2.6 Fonction génératrice des moments

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $GE(\alpha, \lambda)$, la fonction génératrice des moments $M(t)$ est définie par :

$$\begin{aligned} M_x(t) &= E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx}.f(x)dx \\ &= \alpha\lambda \int_0^\infty e^{tx}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1}.e^{-\lambda x}dx \end{aligned}$$

$$= \alpha\lambda \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1}dx \tag{1.9}$$

On pose $y = e^{-\lambda x}$

(1.9) se réduit à :

$$M_X(t) = \alpha \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}.y^{\frac{-t}{\lambda}}.dy = \frac{\Gamma(\alpha+1).\Gamma(1-\frac{t}{\lambda})}{\Gamma(\alpha-\frac{t}{\lambda}+1)}$$

On a :

$$\frac{\partial^k M_X(t)}{\partial t^k}|_{t=0} = E(X^k)$$

On calcule la première dérivée de $M_X(t)$ et en évaluant à $t = 0$, on obtient l'espérance et la variance de X. Donc :

$$E(X) = \frac{\partial M(t)}{\partial t}\ |_{t=0} = \frac{\Gamma'(\alpha+1)\Gamma(1) - \Gamma'(1)\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(1)\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{\lambda}(\psi(\alpha+1) - \psi(1))$$

et

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}(\psi'(1) - \psi'(\alpha+1))$$

où $\psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ est la fonction digamma et $\psi'(\alpha)$ est sa dérivée.

1.2.7 Simulation de la loi exponentielle généralisée

Soit $X \sim GE(\alpha, \lambda)$,de fonction de répartition donnée par :

$$F(x; \alpha, \lambda) = (1-e^{-\lambda x})^\alpha, x \geq 0, \alpha, \lambda > 0.$$

Sa fonction inverse F^{-1} posséde une forme analytique simple,

$$F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U^{\frac{1}{\alpha}});$$

Donc on peut utiliser la méthode de la fonction inverse, en posant

$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U^{\frac{1}{\alpha}}). \tag{1.10}$$

Avec U suit une loi uniforme sur $[0,1]$.
Le programme R qui permet de simuler X de loi GE(α,λ) est donné dans l'annexe.

Exemple 1.3. *On veut simuler une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle généralisée.*
On sait que :

$$X \sim GE(\alpha,\lambda) \Leftrightarrow F(x;\alpha,\lambda) = (1-e^{-\lambda x})^{\alpha}, x \geq 0, \alpha, \lambda > 0.$$

On simule donc une variable de loi exponentielle généralisée de paramètres α et λ, en prenant :

$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U^{\frac{1}{\alpha}});$$

avec U suit la loi uniforme sur [0,1].
Cet algorithme est assez simple à programmer en donnant les valeurs pour α et λ.

Le programme R qui permet de simuler X de loi GE(2,1) est donné dans l'annexe.
Les résultats obtenus par la simulation sont :
1.3325858 0.6542416 1.8630888 0.9113982 2.8892281 0.4081414
1.5973727 1.0082926 0.2556855 0.6995132

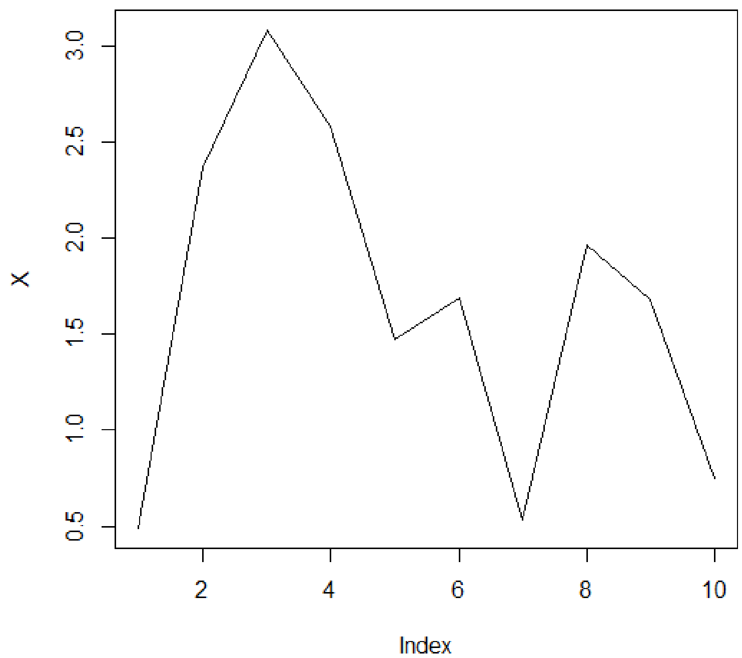

FIG. 1.5 – Simulation de X avec α=2 et λ=1

1.2.8 La distribution exponentielle généralisée à un paramètre α et à trois paramètres (α, λ, μ)

La loi exponentielle généralisée à un paramètre α notée $GE(\alpha)$ est définie par ses fonctions de : répartition, densité, survie et de hasard données respectivement par :

$$F(x; \alpha) = (1 - e^{-x})^{\alpha}$$

$$f(x; \alpha) = \alpha.e^{-x}(1 - e^{-x})^{\alpha-1}$$

$$S(x; \alpha) = 1 - (1 - e^{-x})^{\alpha}$$

$$h(x; \alpha) = \frac{\alpha.e^{-x}(1 - e^{-x})^{\alpha-1}}{1 - (1 - e^{-x})^{\alpha}}$$

De même pour la loi exponentielle généralisée à trois paramètres notée $GE(\alpha, \lambda, \mu)$, ses fonctions de : répartition, densité, survie et de hasard sont respectivement :

$$F(x; \alpha, \lambda, \mu) = (1 - e^{-\lambda(x-\mu)})^{\alpha}$$

$$f(x; \alpha, \lambda, \mu) = \alpha\lambda.e^{-\lambda(x-\mu)}(1 - e^{-\lambda(x-\mu)})^{\alpha-1}, x > \mu$$
$$S(x; \alpha, \lambda, \mu) = 1 - (1 - e^{-\lambda(x-\mu)})^{\alpha}$$
$$h(x; \alpha, \lambda, \mu) = \frac{\alpha\lambda.e^{-\lambda(x-\mu)}(1 - e^{-\lambda(x-\mu)})^{\alpha-1}}{1 - (1 - e^{-\lambda(x-\mu)})^{\alpha}}$$

μ est le paramètre de position.

Remarque 1.5. *Si $\mu = 0$, nous retrouvons la distribution exponentielle généralisée à deux paramètres α et λ.*

1.3 Conclusion

La distribution exponentielle généralisée à deux paramètres (Gupta et Kundu (1999)) a été utilisée comme alternative aux distributions Gamma et Weibull habituelles dans l'analyse des données de durée de vie.

Les trois distributions : Gamma, Weibull et Exponentielle généralisée représentent des généralisations de la distribution exponentielle de différentes manières.

Les propriétés de la distribution exponentielle généralisée ont été étudiées par Gupta et Kundu (2001). Ils ont observé que cette distribution peut être utilisée à la place des distributions Gamma et Weibull, puisque les deux paramètres des distributions Gamma, Weibull et exponentielle généralisée ont une fonction de risque croissante et décroissante en fonction de la valeur du paramètre de forme, elles ont également une fonction de hasard constante lorsque le paramètre de forme est égal à un.

Chapitre 2

Inférence dans le modèle exponentiel généralisé

Dans ce chapitre, nous présentons deux approches : classique et Bayésienne pour estimer les deux paramètres α et λ de la distribution exponentielle généralisée.

2.1 Inférence classique

La statistique fréquentiste désigne la théorie des statistiques largement enseignée et développée en grande partie par Neyman et Pearson, et reposant sur une vision déterministe des paramètres des modèles probabilistes qui sont les objets que l'inférence statistique cherche à estimer.
Dans cette section, on discute les différentes méthodes d'estimation des deux paramètres α et λ de la distribution exponentielle généralisée.

2.1.1 Méthode des moments

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ un échantillon d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle généralisée, de densité :

$$f_{X,\theta}(x; \alpha, \lambda) = \alpha\lambda(1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1}.e^{-\lambda x}$$

avec $\theta = (\alpha, \lambda)$,$\theta \in \mathbb{R}^*$.
Le but de cette méthode est de déterminer des estimateurs des paramètres de θ en fonction d'un echantillon $x_1, x_2, ..., x_n$ de X.
Soit $X \sim GE(\alpha, \lambda)$, alors :

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}(\psi(\alpha+1) - \psi(1)) \tag{2.1}$$

et :

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{-1}{\lambda^2}(\psi'(\alpha+1) - \psi'(1)) \tag{2.2}$$

(voir Gupta et Kundu[1999a])
Rappelons que ψ désigne la fonction digamma et ψ' est sa dérivée.
A partir de (2.1) et (2.2), on obtient le coefficient de variation (C.V) :

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{\psi'(1) - \psi'(\alpha+1)}}{\psi(\alpha+1) - \psi(1)} \tag{2.3}$$

D'après la méthode des moments nous avons :

$$\frac{S}{\overline{\overline{X}}} = \frac{\sqrt{\psi'(1) - \psi'(\alpha+1)}}{\psi(\alpha+1) - \psi(1)} \tag{2.4}$$

où $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ et $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ sont les estimateurs empiriques de σ^2 et μ, respectivement.

L'estimateur du moment de α peut être obtenu en résolvant l'équation non linéaire (2.4), qui n'admet pas de solution exacte, donc une procédure numérique (méthode itérative) est nécessaire pour approximer cette solution.

Une fois que, l'estimateur du moment de α est obtenu ($\widehat{\alpha}_{MM}$), l'estimateur de moment de $\lambda(\widehat{\lambda}_{MM})$ peut être facilement obtenu.
En utilisant l'équation (2.1), on obtient :

$$\widehat{\lambda}_{MM} = \frac{(\psi(\widehat{\alpha}_{MM}+1)-\psi(1))}{\overline{x}}$$

Les estimateurs de la distribution exponentielle généralisée $GE(\alpha, \lambda)$ obtenu par la méthode des moments, n'admettent pas de formule analytique.

2.1.2 Méthode du maximum de vraisemblance

Supposons un échantillon aléatoire $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ suivant la distribution exponentielle généralisée $GE(\alpha, \lambda)$, où α et λ sont supposés inconnus et nous cherchons à les estimer. Cette méthode a été développée par Gupta and Kundu [2001a]
La fonction de vraisemblance s'écrit :

$$\begin{aligned} L(x; \alpha, \lambda) &= \prod_{i=1}^{n} f(x; \alpha, \lambda) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \alpha.\lambda(1-e^{-\lambda.x_i})^{\alpha-1}.e^{-\lambda.x_i} \end{aligned}$$

$$= \alpha^n.\lambda^n.e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i}.e^{(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log(1-e^{-\lambda.x_i})}. \tag{2.5}$$

La fonction Log de vraisemblance notée l peut être exprimée comme suit :

$$l(x; \alpha, \lambda) = \log L(x; \alpha, \lambda)$$

$$= n\log\alpha + n\log\lambda - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log(1-e^{-\lambda.x_i}). \tag{2.6}$$

Les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres α et λ sont la solution simultanée des équations non linéaires suivantes :

$$\frac{\partial l(x; \alpha, \lambda)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n}\log(1-e^{-\lambda.x_i}) = 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial l(x; \alpha, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{xe^{-\lambda.x_i}}{1-e^{-\lambda.x_i}} = 0 \tag{2.8}$$

De (2.7), Gupta et Kundu [2001] donnent le MLE de α en fonction de λ par la formule suivante :

$$\widehat{\alpha}(\lambda) = \frac{-n}{T} \tag{2.9}$$

avec $T = \sum_{i=1}^{n} \log(1 - e^{-\lambda.x_i})$

On remplace (2.9) dans (2.6), on obtient :

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= l(x; \widehat{\alpha}(\lambda), \lambda) \\ &= C - n\log(-\sum_{i=1}^{n} \log(1 - e^{-\lambda.x_i})) + n\log\lambda - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \log(1 - e^{-\lambda.x_i}) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Où C est une constante indépendante de λ.

Par conséquent, le MLE de λ, peut être obtenu en maximisant (2.10) par rapport à λ. Il est observé dans Gupta et Kundu[1999b] que $g(\lambda)$ est une fonction unimodale et $\widehat{\lambda}_{MLE}$ qui maximise (2.10) peut être obtenu à partir de la méthode à point fixe de :

$$h(\lambda) = \lambda \tag{2.11}$$

telle que

$$h(\lambda) = g'(\lambda) = [\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{1-e^{-\lambda x_i}}}{\sum_{i=1}^{n} \lg(1 - e^{-\lambda x_i})} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 - e^{-\lambda x_i}}]^{-1}$$

$\widehat{\lambda}$ est une solution à point fixe de l'équation non linéaire (2.11), donc elle peut être obtenue en utilisant un schéma itératif simple comme suit :

$$h(\lambda_{(j)}) = \lambda_{(j+1)}$$

où $\lambda_{(j)}$ est la j^{eme} itération de $\widehat{\lambda}$.
La procédure d'itération doit être arrêtée lorsque $\mid \lambda_{(j)} - \lambda_{(j+1)} \mid$ est suffisament petit.

Une fois que $\widehat{\lambda}_{MLE}$ est obtenu, $\widehat{\alpha}_{MLE} = \widehat{\alpha}(\widehat{\lambda}_{MLE})$ se donne par l'équation (2.9).
Les estimateurs $\widehat{\alpha}_{MLE}$ et $\widehat{\lambda}_{MLE}$ obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance sont approximatifs.

2.1.3 Estimation par intervalle de confiance

Les estimateurs par intervalle de confiance peuvent être obtenus, en utilisant le résultat de la normalité asymptotique suivant :

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta) \longrightarrow N_2(0, I^{-1}(\theta)) \tag{2.12}$$

ou $I(\theta)$ est la matrice de l'information du Fisher, c'est-à-dire :

$$I(\theta) = \frac{-1}{n} \begin{pmatrix} E(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2}) & E(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \lambda}) \\ & \\ E(\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda \partial \alpha}) & E(\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda^2}) \end{pmatrix}$$

avec $\widehat{\theta} = (\widehat{\alpha}; \widehat{\lambda}), \theta = (\alpha, \lambda)$

Puisque pour $\alpha > 0$, la distribution exponentielle généralisée satisfait à toutes les conditions de régularité (voir Bain[1976]), donc (2.12) est vrai.

Maintenant, nous fournissons les éléments de la matrice d'information de Fisher.

Pour $\alpha > 2$, Les éléments de la matrice de l'information de Fisher sont les suivants :

$E(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2}) = \frac{-n}{\alpha^2}$,

$E(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \lambda}) = \frac{n}{\lambda}(\frac{\alpha}{\alpha-1}(\psi(\alpha) - \psi(1)) - (\psi(\alpha+1) - \psi(1))$,

$E(\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda^2}) = \frac{-n}{\lambda^2}[1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}(\psi'(1) - \psi'(\alpha-1)) + (\psi(\alpha-1) - \psi(1))^2] - \frac{n\alpha}{\lambda^2}[\psi'(1) - \psi(\alpha)) + (\psi(\alpha) - \psi(1))^2]$

Avec ψ désigne la fonction digamma, $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, et ψ' est sa dérivée.

et pour $0 < \alpha \leq 2$;

$E(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2}) = \frac{-n}{\alpha^2}$,

$E(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \lambda}) = \frac{n\alpha}{\lambda} \int_0^\infty x e^{-2x}(1-e^{-x})^{\alpha-2} dx$;

$E(\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda^2}) = \frac{-n}{\lambda^2} - \frac{n\alpha(\alpha-1)}{\lambda^2} \int_0^\infty x^2 e^{-2x}(1-e^{-x})^{\alpha-2} dx$.

Comme θ est inconnu dans (2.12), $I^{-1}(\theta)$ est estimé par $I^{-1}(\widehat{\theta})$ et cela peut être utilisé pour obtenir les intervalles de confiance asymptotiques de α et λ.

2.1.4 Estimateurs basés sur les quantiles

La distribution exponentielle a une fonction de répartition explicite, donc les estimateurs de α et λ peuvent être obtenu sur la base de quantiles.
Cette méthode a été initialement étudie par Kao[1958,1959] et par d'autres auteurs aussi comme Mann, Schafer et Sigpurwalla[1974].
Pour obtenir ces estimateurs de α et λ, Gupta et Kundu[1999] suivent les étapes suivantes :

$$F(x; \alpha, \lambda) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha$$

est la fonction de répartition de la distribution GE définie précédemment.
Ensuite

$$-\frac{1}{\lambda} \log[1 - (F(x; \alpha, \lambda))^{\frac{1}{\alpha}}] = x$$

Si p_i désigne une estimation de $F(x; \alpha, \lambda)$, alors les estimateurs de α et λ peuvent être obtenu en minimisant :

$$\sum_{i=1}^{n} [x_{(i)} + \lambda^{-1} \log(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}})]^2 \tag{2.13}$$

par rapport à α et λ.
Les $x_{(i)}$ sont des échantillons ordonnés.

(2.13) est une fonction non linéaire de α et λ.
Donc, pour obtenir les estimateur de α et λ, il faut utiliser des techniques numériques.

Remarque 2.1. *Les p_i sont définis par Mann,Schafer et Singpuwallah [1974] comme estimateurs des $F(x_i; \alpha, \lambda)$,(i=1,2,...,n). Par exemple : $p_i = \frac{i}{n+1}$ est l'estimateur le plus utilisé car c'est un estimateur sans biais de $F(x_i; \alpha, \lambda)$. D'autres choix de p_i sont :*

$$p_i = \frac{i - 3/8}{n + 1/4}; p_i = \frac{i - 1/2}{n}$$

2.1.5 Estimateurs des moindres carrés

Cette méthode a été proposé à l'origine par Swain, Venkatraman et Wilson[1988] pour estimer les paramètres d'une distribution.
Les auteurs ont supposés que $(X_1, X_2, ..., X_2)$ un échantillon aléatoire de taille n d'une distribution $GE(\alpha, \lambda)$ et $X_{(j)}$, j=1,...,n les statistiques d'ordre associés à cet échantillon.
La méthode proposée utilise la fonction de répartition $F(X_{(j)})$ pour obtenir les estimateurs de α et λ.
Pour un échantillon de taille, nous avons :

$$E(F(X_{(j)})) = \frac{j}{n+1}, V(F(X_{(j)})) = \frac{j(n-j+1)}{(n+1)^2(n+2)}$$

et

$$cov(F(X_{(j)}), F(X_{(k)})) = \frac{j(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)}; j < k$$

voir Johnson, Kotz et Balakrishnan[1995].
Les estimateurs des moindres carrés sont obtenus en minimisant :

$$\sum_{j=1}^{n}(F(X_{(j)}) - \frac{j}{n+1})^2 = \sum_{j=1}^{n}((1 - e^{-\lambda x_{(j)}})^\alpha - \frac{j}{n+1})^2$$

Pour les estimateurs des moindres carrés pondérés, les auteurs les obtient en minimisant :

$$\sum_{j=1}^{n} w_j(F(X_{(j)}) - \frac{j}{n+1})^2 = \sum_{j=1}^{n} w_j((1 - e^{-\lambda x_{(j)}})^\alpha - \frac{j}{n+1})^2 \qquad (2.14)$$

où $w_j = \frac{(n+1)^2(n+2)}{j(n-j+1)}$

2.2 Inférence Bayésienne

L'analyse Bayésienne est une approche d'analyse statistique qui est basée sur la loi de Bayes,

$$\frac{\mathbb{P}(E/A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(E)}$$

Le terme Bayésien provient du nom du révérend Thomas Bayes.

Le mathématicien français Laplace a également retrouvé ce résultat, de manière indépendante.

Bayes donne en réalité une version continue de ce résultat, à savoir, pour deux v.a. X et Y de distributions conditionnelle $f(x/y)$ et marginale $g(y)$, la distribution conditionnelle de Y sachant X est :

$$g(x/y) = \frac{f(y/x)g(x)}{\int f(y/x)g(x)dx}$$

Laplace et Bayes ont tous les deux poussé ces travaux en décrivant l'incertitude sur les paramètres θ d'un modèle $g(x/y)$par une distribution de probabilité π sur Θ appelée distribution a priori.

L'inférence est alors fondée sur la distribution de θ sachant y, $\pi(\theta/y)$, appelée distribution a posteriori et est définie par :

$$\pi(\theta/y) = \frac{f(y/\theta)\pi(\theta)}{\int f(y/\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

où $f(y/\theta)$ représente la fonction de vraisemblance et $\pi(\theta)$ la loi a priori.

2.2.1 Présentation du modèle

Supposons que $X = (X_1, ..., X_n)$ une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle généralisée $GE(\alpha, \lambda)$.

Dans notre cas, le paramètre d'intérêt est $\theta = (\alpha, \lambda)$

2.2.2 Lois a priori

Les lois a priori sur les paramètres inconnus α et λ sont respectivement données comme suit (voir Kundu and Gupta [2008]) :

$$\pi(\alpha) = \frac{b_0^{a_0}}{\Gamma(a_0)}.\alpha^{a_0-1}.e^{-b_0\alpha}.$$

$$\pi(\lambda) = \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)}.\lambda^{a_1-1}.e^{-b_1\lambda}.$$

Avec $a_0; b_0; a_1$et b_1 sont des hyper-paramètres non négatifs.

2.2.3 Loi a posteriori

La distribution a posteriori jointe est :

$$\pi(\alpha, \lambda/X) = \frac{L(\alpha, \lambda/X)\pi(\alpha; \lambda)}{\int_0^\infty \int_0^\infty L(\alpha, \lambda/X)\pi(\alpha; \lambda)d\alpha.d\lambda}$$

$$\pi(\alpha, \lambda/X) = \frac{\alpha^{n+a_0-1}.e^{-\alpha(-\sum_{i=1}^n log(1-e^{-\lambda.x_i})+b_0)}.\lambda^{n+a_1-1}.e^{-\lambda(n\overline{x}+b_1)}.e^{-\sum_{i=1}^n log(1-e^{-\lambda.x_i})}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{n+a_0-1}.e^{-\alpha(-\sum_{i=1}^n log(1-e^{-\lambda.x_i})+b_0)}.\lambda^{n+a_1-1}.e^{-\lambda(n\overline{x}+b_1)}.e^{-\sum_{i=1}^n log(1-e^{-\lambda.x_i})}d\alpha.d\lambda} \tag{2.15}$$

(2.15) prend une forme de ratio qui implique une intégration dans le dénominateur , donc il est impossible d'obtenir directement les estimateurs bayésiens de α et λ de la distribution exponentielle généralisée.

Parmi les différentes méthodes proposées pour approximer le ratio des intégrales de la forme (2.15) :
(a)- La méthode d'approximation de Lindley (1980).
(b)- La méthode MCMC.

2.2.3.1 La méthode d'approximation de Lindley

En 1980, Lindley a fourni une solution asymptotique pour le rapport d'intégrale généralement rencontrées dans l'estimation Bayésienne (Lindley, 1980). Il a été utilisé par plusieurs auteurs pour obtenir les estimateurs Bayésiens approximatifs. Pour plus de détails, voir Lindley (1980) ou Press (2001).

Le rapport des intégrales intervenant dans lanalyse Bayésienne est donné par :

$$I(x) = \frac{\int u(\Theta)\exp(L(\Theta)+g(\Theta))d\Theta}{\int \exp(L(\Theta)+g(\Theta))d\Theta},$$

Où
$u(\Theta)$ = est une fonction de Θ
$L(\Theta)$ = Log- fonction de vraisemblance
$g(\Theta)$ = Log-densité a priori
Selon D. V. Lindley (1980), si les estimations MLE des paramètres sont disponibles et n est suffisamment grand, alors le ratio ci-dessus de l'intégrale peut être approché comme suit :

$$I(x) \approx u + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}[(u_{ij}+2u_i\rho_j)\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} L_{ijk}u_l\sigma_{ij}\sigma_{kl}$$

Sur la base de l'approximation de Lindley (Kundu, Gupta [2008]), les estimateurs Bayésiens approximatifs de α et λ de la distribution expenentielle sont :

$$\widehat{\alpha}_B = \widehat{\alpha} + \frac{1}{2}[\frac{2n}{\widehat{\alpha}^3}\tau_{11^2} + (\frac{2n}{\widehat{\lambda}^3} + (\widehat{\alpha}-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^3 e^{-\widehat{\lambda}x_i}(1+e^{-\widehat{\lambda}x_i})}{(1-e^{-\widehat{\lambda}x_i})^3}\tau_{21})\tau_{22}$$
$$-(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2 e^{-\widehat{\lambda}x_i}}{(1-e^{-\widehat{\lambda}x_i})^2}(\tau_{22}\tau_{11}+2\tau_{21}^2)] + (\frac{d-1}{\widehat{\alpha}} - c)\tau_{11} + (\frac{b-1}{\widehat{\lambda}} - a)\tau_{12}$$

$$\widehat{\lambda}_B = \widehat{\lambda} + \frac{1}{2}[\frac{2n}{\widehat{\alpha}^3}\tau_{12}\tau_{11} + (\frac{2n}{\widehat{\lambda}^3} + (\widehat{\alpha}-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^3 e^{-\widehat{\lambda}x_i}(1+e^{-\widehat{\lambda}x_i})}{(1-e^{-\widehat{\lambda}x_i})^3})\tau_{22}^2$$

$$-(\sum_{i=1}^{n}\frac{3x_i^2e^{-\widehat{\lambda}x_i}}{(1-e^{-\widehat{\lambda}x_i})^2})(\tau_{22}\tau_{21})]+(\frac{d-1}{\widehat{\alpha}}-c)\tau_{21}+(\frac{b-1}{\widehat{\lambda}}-a)\tau_{22}$$

Où $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\lambda}$ sont les MLE de α et λ respectivement.
Avec,
$\tau_{11}=\frac{W}{UW-V^2}$, $\tau_{12}=\frac{V}{UW-V^2}=\tau_{21}$, $\tau_{22}=\frac{U}{UW-v^2}$,

et $U=\frac{n}{\widehat{\alpha}^2}$, $V=-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_ie^{-\widehat{\lambda}x_i}}{(1-e^{-\widehat{\lambda}x_i})}$, $W=\frac{n}{\widehat{\alpha}^2}+(\widehat{\alpha}-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2e^{-\widehat{\lambda}x_i}}{(1-e^{-\widehat{\lambda}x_i})^2}$

2.2.4 La méthode MCMC

Pour la méthode de Monté Carlo par Chaîne de Markov (MCMC) proposée par Metropolis et al. (1953) et Hastings (1970) , la stratégie de calcul consiste d'abord à dériver les lois a posteriori conditionnelles de $\alpha/\lambda, x$ et $\lambda/\alpha, x$ pour estimer les paramètres α et λ du modèle exponentiel généralisé sous différentes fonctions coûts .
De (2.15), la loi a posteriori de $\alpha/\lambda, x$ est donnée par :

$$\pi(\alpha/\lambda, x)\propto\alpha^{n+a_0}.e^{b_0-\sum_{i=1}^{n}log(1-e^{-\lambda.x_i})}$$

Donc, $\pi(\alpha/\lambda, x)$ est une loi gamma de paramètres $n+a_0$ et $b_0-\sum_{i=1}^{n}log(1-e^{-\lambda.x_i})$.

La loi a posteriori de $\lambda/\alpha, x$ s'écrit comme suit :

$$\pi(\lambda/\alpha, x)\propto\lambda^{n+a_1-1}.e^{-\lambda(n\overline{x}+b_1)}.e^{-\sum_{i=1}^{n}log(1-e^{-\lambda.x_i})}$$

Notons que la loi de $\alpha/\lambda, x$ est simulable facilement ($\alpha/\lambda, x\sim Gamma$). Cependant, la loi de $\lambda/\alpha, x$ n'est pas simulable directement. Pour simuler la loi de λ/X, nous utilisons l'algorithme de Metropolis-Hasting (M-H) à marche aléatoire. Nous utilisons donc l'échantillonneur de Gibbs pour construire une chaîne de Markov pour les paramètres α et λ, en utilisant des valeurs initiales $\alpha^{(0)}$ et $\lambda^{(0)}$.
Les étapes de l'algorithme qui permet de simuler les lois $\alpha/\lambda, x$ et $\lambda/\alpha, x$ sont résumées comme suit :
Step 1 :faire une estimation initiale de α et λ, disons $\alpha^{(0)}$ et $\lambda^{(0)}$, respectivement.

Step 2 : supposons qu'à la ième étape, α et λ prennent les valeurs α_i et λ_i, puis nous générons α_{i+1} et λ_{i+1}, à partir de $\pi(\alpha/X)$ et $\pi(\lambda/X)$, respectivement :

Step 3 :répéter l'étape 2, n fois.

Step 4 :Calculer les estimateurs bayésiens de α et λ, par :

$$\widehat{\alpha} = \frac{1}{N-M}\sum_{i=M+1}^{N}\alpha^{(t)}$$

et

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{N-M}\sum_{i=M+1}^{N}\lambda^{(t)}$$

Où M :burn-in period et N : le nombre total d'itérations.

Remarque 2.2. *Plusieurs auteurs utilisent le record statistique dans l'estimation Bayésienne des paramètres α et λ de la distribution exponentielle généralisée. Parmi eux : Ahsanullah[1978], Ahsanullah[1979] et Raqab[2002].*

Chapitre 3

Estimation Bayésienne du modèle exponentiel généralisé sous la fonction coût quadratique

3.1 Introduction

Raqab et Madi[2005], dans leur article intitulé "Bayesian inference for the generalized exponential distribution " ont étudié deux parties : estimation des paramètres α et λ du modèle exponentiel généralisé sous la fonction coût quadratique et la partie de la prédiction.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'estimation Bayésienne des paramètres α et λ du modèle exponentiel généralisé sous la fonction coût quadratique.

3.2 Présentation du modèle

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi GE de paramètres α et λ, dont la densité est donnée :

$$f(x;\alpha,\lambda) = \alpha\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1}.e^{-\lambda x}, x \geq 0, \alpha, \lambda \geq 0.$$

3.3 Estimation Bayésienne

3.3.1 La fonction de vraisemblance

La fonction de vraisemblance pour un échantillon aléatoire $x_1, x_2, ..., x_n$ tiré de la distribution exponentielle est :

$$\begin{aligned} L(x;\alpha,\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} f(x;\alpha,\lambda) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \alpha.\lambda(1-e^{-\lambda.x_i})^{\alpha-1}.e^{-\lambda.x_i} \\ &= \alpha^n.\lambda^n.e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i}.e^{(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log(1-e^{-\lambda.x_i})} \\ &= \alpha^n.\lambda^n.e^{-n\lambda\overline{x}-(\alpha-1)D_\lambda} \end{aligned} \tag{3.1}$$

avec $D_\lambda = -\sum_{i=1}^{n}\log(1-e^{-\lambda x_i})$.

3.3.2 Les lois a priori

Dans l'analyse bayésienne, nous devons spécifier une distribution préalable pour les paramètres α et λ, nous considérons deux distributions a priori Gamma indépendantes tels que, $\Gamma(a_0; b_0)$ comme loi a priori de α et $\Gamma(a_1; b_1)$ considérée comme loi a priori de λ.
Avec $a_0; b_0; a_1$et b_1 sont des hyper-paramètres non négatifs.
$\alpha \rightsquigarrow G(a_0, b_0)$

$$\Rightarrow \pi(\alpha) = \frac{b_0^{a_0}}{\Gamma(a_0)}.\alpha^{a_0-1}.e^{-b_0\alpha}. \tag{3.2}$$

$\lambda \rightsquigarrow G(a_1, b_1)$

$$\Rightarrow \pi(\lambda) = \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)}.\lambda^{a_1-1}.e^{-b_1\lambda}. \tag{3.3}$$

La distribution a priori jointe pour α et λ est donnée comme suit :

$$\pi(\alpha;\lambda) = \pi(\alpha).\pi(\lambda) \propto \alpha^{a_0-1}.\lambda^{a_1-1}.e^{-b_0\alpha-b_1\lambda}.a_0; b_0; a_1; b_1 > 0 \tag{3.4}$$

- Notons que lorsque $a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 0$, les lois a priori de α et λ sont des lois a priori de Jeffreys.

3.3.3 La densité a posteriori jointe

Soit $X = (X_1, ..., X_n)$ une variable aléatoire de loi $GE(\alpha, \lambda)$.
Après la spécification des lois a priori, par le théorème de Bayes, et en combinant les équations (3.1) et (3.4), la loi a posteriori de (α, λ) sachant X est donnée sous la forme :

$$\pi(\alpha, \lambda/X) = \frac{L(\alpha, \lambda/X)\pi(\alpha; \lambda)}{\int_0^\infty \int_0^\infty L(\alpha, \lambda/X)\pi(\alpha; \lambda) d\alpha.d\lambda} \tag{3.5}$$

$$= A^{-1}.\alpha^{n+a_0-1}.e^{-\alpha(D_\lambda+b_0)}.\lambda^{n+a_1-1}.e^{-\lambda(n\overline{x}+b_1)}.e^{D_\lambda}$$

Où A est interprété comme

$$A = \int_0^\infty \int_0^\infty L(\alpha, \lambda/X)\pi(\alpha)\pi(\lambda) d\alpha.d\lambda$$

Calculons A :

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^\infty \int_0^\infty L(\alpha, \lambda/X)\pi(\alpha)\pi(\lambda) d\alpha.d\lambda \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{n+a_0-1}.e^{-(\alpha-1)D_\lambda}.e^{-b_0\alpha}.\lambda^{n+a_1-1}.e^{-n\lambda\overline{x}}.e^{-b_1\lambda} d\alpha.d\lambda \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{n+a_0-1}.e^{-\alpha(D_\lambda+b_0)}.\lambda^{n+a_1-1}.e^{-\lambda(n\overline{x}+b_1)}.e^{D_\lambda} d\alpha.d\lambda \\
&= \int_0^\infty (D_\lambda + b_0)^{-(n+a_0)}.\lambda^{n+a_1-1}.e^{-\lambda(n\overline{x}+b_1)}.e^{D_\lambda} d\lambda \\
&= E[(D_\lambda + b_0)^{-(n+a_0)}.e^{D_\lambda}] \\
&= E^*(w(\lambda)).
\end{aligned}$$

Où E^* désigne l'espérance par rapport à $\Gamma(a_1 + n, b_1 + n\overline{x})$, et $w(\lambda) = (D_\lambda + b_0)^{-(n+a_0)}.e^{D_\lambda}$.
Donc,

$$\pi(\alpha, \lambda/X) = \frac{\alpha^{n+a_0-1}.e^{-\alpha(D_\lambda+b_0)}.\lambda^{n+a_1-1}.e^{-\lambda(n\overline{x}+b_1)}.e^{D_\lambda}}{E^*(w(\lambda))}$$

$$\pi(\alpha, \lambda/X) \propto g_\alpha(a_0 + n, D_\lambda + b_0) g_\lambda(a_1 + n, b_1 + n\overline{x}) \exp(D_\lambda)$$

Où g_α et g_λ sont les densités Gamma pour α et λ, respectivement.

3.3.4 Les densités a posteriori marginales

Densité a posteriori marginale de λ :

$$\begin{aligned}
\pi(\lambda/X) &= \int_0^\infty \pi(\alpha,\lambda/X)d\alpha \\
&= \frac{1}{E^*(w(\lambda))}.\lambda^{n+a_1-1}.e^{-\lambda(n\overline{x}+b_1)}.e^{D_\lambda}.\int_0^\infty \alpha^{n+a_0-1}.e^{-\alpha(D_\lambda+b_0)}d\alpha \\
&= \frac{1}{E^*(w(\lambda))}.\lambda^{n+a_1-1}.e^{-\lambda(n\overline{x}+b_1)}.e^{D_\lambda}.(D_\lambda+b_0)^{-(n+a_0)}
\end{aligned}$$

$$\pi(\lambda/X) = \frac{w(\lambda)}{E^*(w(\lambda))}.\lambda^{n+a_1-1}.e^{-\lambda(n\overline{x}+b_1)} \tag{3.6}$$

$$\pi(\lambda/X) \propto g_\lambda(a_1+n, b_1+n\overline{x})w(\lambda),$$

avec $w(\lambda) = (D_\lambda+b_0)^{-(n+a_0)}.e^{D_\lambda}$.

Densité a posteriori marginale de α :

$$\begin{aligned}
\pi(\alpha/X) &= \int_0^\infty \pi(\alpha,\lambda/X)d\lambda \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{E^*(w(\lambda))}.\alpha^{n+a_0-1}.e^{-\alpha(D_\lambda+b_0)}.\lambda^{n+a_1-1}.e^{-\lambda(n\overline{x}+b_1)}.e^{D_\lambda}d\lambda \\
&= \frac{1}{E^*(w(\lambda))}.\alpha^{n+a_0-1}\int_0^\infty e^{-\alpha(D_\lambda+b_0)}.\lambda^{n+a_1-1}.e^{-\lambda(n\overline{x}+b_1)}.e^{D_\lambda}d\lambda \\
&= \frac{E^*(w'(\lambda).\alpha^{n+a_0-1}.e^{-\alpha(D_\lambda+b_0)})}{E^*(w(\lambda))}
\end{aligned}$$

$$\pi(\alpha/X) = \frac{E^*(w'(\lambda).g_\alpha(n+a_0, D_\lambda+b_0))}{E^*(w(\lambda))} \tag{3.7}$$

avec, $w'(\lambda) = (n\overline{x} + b_1)^{-(n+a_1)}.e^{D_\lambda}$.

3.4 Estimateurs Bayésiens sous la fonction coût quadratique

Définition 3.1. *La fonction de perte quadratique a été proposée par Legendre (1805) et Gauss (1810), pour développer la théorie des moindres carrés. Elle est définie comme :*

$$L(\widehat{\theta}, \theta) = (\widehat{\theta} - \theta)^2;$$

Une variante de cette fonction de perte est une fonction de perte quadratique pondérée (fonction de perte quadratique généralisée) de la forme

$$L(\widehat{\theta}, \theta) = w(\widehat{\theta})(\widehat{\theta} - \theta)^2;$$

Proposition 3.1. *Sous l'hypothèse d'un coût quadratique, l'estimateur de Bayes $\widehat{\theta}$ de θ associé à la loi a priori π est la moyenne a posteriori de θ.*

$$\widehat{\theta} = E(\theta/x) = \int_{\theta \in \Theta} \theta.\pi(\theta/x) d\theta$$

Estimateur de λ

Selon la fonction quadratique, et à partir de l'équation (3.6) et en utilisant un échantillonnage d'importance, nous pouvons exprimer l'estimateur de Bayes correspondant pour le paramètre λ de la distribution exponentielle généralisée comme :

$$\begin{aligned} E_{\pi(./X)}(\lambda/X) &= \int_0^\infty \lambda.\pi(\lambda/X) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \lambda.\frac{w(\lambda)}{E^*(w(\lambda))}.\lambda^{n+a_1-1}.e^{-\lambda(n\overline{x}+b_1)} d\lambda \\ &= \frac{1}{E^*(w(\lambda))} \int_0^\infty \lambda.w(\lambda).\lambda^{n+a_1-1}.e^{-\lambda(n\overline{x}+b_1)} d\lambda \end{aligned}$$

$$\widehat{\lambda} = E_{\pi(./X)}(\lambda/X)$$

$$\widehat{\lambda} = \frac{E^*(\lambda.w(\lambda))}{E^*(w(\lambda))}$$

Où E^* désigne l'espérance par rapport à $\Gamma(a_1 + n, b_1 + n\overline{x})$, et $w(\lambda) = (D_\lambda + b_0)^{-(n+a_0)}.e^{D_\lambda}$.

Estimateur de α
L'estimateur de Bayes correspondant pour le paramètre α de la distribution exponentielle généralisée est obtenu, en utilisant le fait que $E(\alpha/\lambda, X) = \frac{n+a_0}{D_\lambda+b_0}$,
Donc :

$$\widehat{\alpha} = E_{\pi(./X)}(\alpha/X)$$

$$\widehat{\alpha} = \frac{E^*(w'(\lambda)\frac{n+a_0}{D_\lambda+b_0})}{E^*(w(\lambda)}$$

avec, $w'(\lambda) = (n\overline{x} + b_1)^{-(n+a_1)}.e^{D_\lambda}$.

3.5 Application

L'objectif de cette section est d'illustrer les méthodes d'estimation des paramètres α et λ d'une distribution exponentielle généralisée par deux méthodes : maximum de vraisemblance et l'approche Bayésienne.

Nous nous intéressons dans un premier temps à la simulation des données suivant le modèle exponentiel généralisé, en utilisant la relation (1.10) et en fixant les paramètres α et λ.

Nous passons ensuite à l'estimation de ces deux paramètres par les deux méthodes, en utilisant les observations retrouvées par la simulation.

3.5.1 Exemple 01 : Application Bayésienne

Simulation des données

Nous allons simulé, selon le modèle exponentiel généralisé des données $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de taille $n = \{10, 50, 100\}$ en fixant les paramètres de ce modèle par :

$$\alpha = 2 \text{ et } \lambda = 1$$

On applique le programme sous R de l'approche Bayésienne (voir l'annexe), pour estimer les paramètres α et λ du modèle exponentiel généralisé,et en utilisant les lois a priori (3.2) et (3.3)en fixant les hyper-paramètres $a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 1$

Résultats et Discussion

Nous avons estimé les paramètres du modèle exponentiel généralisé par l'approche Bayésienne.

Les résultats obtenus sont dans le tableau suivant :

paramètre	$\widehat{\alpha}$	$\widehat{\lambda}$
n=10	1.7673	1.014022
n=50	1.927768	0.9931297
n=90	1.932954	0.9423365

Nous remarquons que les estimateurs Bayésiens de α et λ sont plus proches des valeurs initiales de α et λ, lorsque la taille de l'échantillon augmente.

3.5.2 Exemple 02 : Étude comparative entre les estimateurs MLE et les estimateurs Bayésiens

Nous avons déjà observé dans l'exemple précédent, que les estimateurs Bayésiens approximatifs correspondent assez bien aux valeurs Bayésiennes exacts. Dans cette section, notre objectif principal est de comparer les estimateurs bayésiens avec les estimateurs classiques du maximum de vraisemblance en utilisant les erreurs quadratiques moyennes (MSE).

Simulation des données

Nous simulons, selon le modèle GE(α,λ), des données $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de taille n=100, en fixant les paramètres α et λ de ce modèle.
Les paramètres ont été choisis comme suit :

$$\alpha = 2.5,\ \lambda = 0.5$$

Estimation des paramètres

Cette partie contient une étude de simulation pour comparer les méthodes d'estimation : maximum de vraisemblance et l'approche Bayésienne, en utilisant les erreurs quadratiques moyennes (MSE) comme suit :

$$MSE(\alpha) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\widehat{\alpha}_i - \alpha)^2 \text{ et } MSE(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\widehat{\lambda}_i - \lambda)^2$$

Où α et λ sont les valeurs fixés, $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\lambda}$ sont les estimateurs par la méthode du maximum de vraisemblance ou l'approche Bayésienne obtenus à partir de l'échantillon numéro i et N est le nombre de répétition de simulation.

Nous avons généré un échantillon de taille n=100, pour retrouver les estimateurs de α et λ.

- Par une application du programme de l'approche Bayésienne sous R (voir l'annexe), et en utilisant les lois a priori (3.2) et (3.3) en fixant les hyper-paramètres $a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 1$, nous avons estimés les paramètres α et λ, du modèle exponentiel généralisé, en utilisant les observations simulées dans la première partie.

- Pour la méthode du maximum de vraisemblance, les résultats ont été retrouvés par une application du programme de la méthode du maximum de vraisemblance sous R (voir l'annexe).

Résultats et Discussion

Nous avons estimé les paramètres du modèle par deux méthodes : maximum de vraisemblance et l'approche Bayésienne.
Les résultats obtenus sont donnés sous forme de tableau.

paramètre	$\widehat{\alpha}$	$MSE(\alpha)$	$\widehat{\lambda}$	$MSE(\lambda)$
Estimateur MLE	3.689	0.0141	0.6057	0.0001
Estimateur Bayésien	2.104881	0.0015	0.4708366	0.0000084

Les résultats obtenus par les deux méthodes nous permet de constater que les estimations sont proches des valeurs attendues (valeurs des paramètres fixées $\alpha = 2.5$ et $\lambda = 0.5$).

Pour les estimateurs Bayésiens, la performance dépend de la forme de la distribution a priori et de la fonction de perte supposée. La plupart des auteurs ont utilisé l'erreur quadratique comme fonction de perte symétrique.

L'étude de simulation a révélé que les estimateurs Bayésiens des paramètres de la distribution exponentielle généralisée sous la fonction perte quadratique est plus efficace que les estimateurs du maximum de vraisemblance, au sens de l'erreur quadratique moyenne (MSE).

Conclusion et Perspectives

L'objet de ce travail est de faire le point sur les méthodes d'estimation des deux paramètres du modèle exponentiel généralisé. Dans un premier lieu, nous avons commencé par présenter un rappel sur la famille exponentielle, et nous avons donné quelques lois de probabilités usuelles appartenant à cette famille. Puis, nous avons présentés le modèle exponentiel généralisé, en déterminant sa fonction de répartition, de densité et sa fonction de survie et de hasard.

Par la suite, nous avons proposé les différentes méthodes d'estimation des paramètres α et λ. Premièrement, c'est par l'inférence classique, où nous avons détaillé le principe de la méthode du maximum de vraisemblance, la méthode des moments, estimation par intervalle de confiance, estimateurs basés sur les quantiles, estimateurs des moindres carrés.
La fonction nlm sous R a été utilisée pour estimer les paramètres α et λ par la méthode du maximum de vraisemblance car le système de la méthode n'admet pas de solution explicites. Dans un second temps, nous avons présenté l'approche Bayésienne. Dans cette approche, nous avons construit des estimateurs bayésiens de α et λ basés sur l'approximation de Lindley et la procédure MCMC et sous la fonction coût quadratique.
Des applications pratiques et comparatives selon les différentes méthodes sont établies.

Il serait intéressant d'étendre ce travail en utilisant d'autres fonctions coûts, comme la Linex, la fonction coût absolu et la quadratique généralisée.

Bibliographie

Abramowitz .M and Stegun.I.A. Handbook of Mathematical Functions. New York : Dover, 1972.

Ahsanullah. M. Characterization of the exponentiel distribution by record values. Sankhya : the indian journal of statistics, 41, 116-121, 1979.

Ahsanullah. M. Record values and the exponentiel distribution. Ann.Inst.statist.Math.30, 429-433, 1978.

Alexander.G.N. The use of gamma distribution in estimating regulated output from storages. Transactions in Civil Engineering, Institute of Engineers, Australia 4, $29 - 34$, 1962.

AL-Jammal Z.Y. Exponentiated Exponential Distribution as a Failure Time Distribution. Iraqi Journal of Statistical Science (14) ; 63-75, 2008.

Amos.D.E. A portable fortran subroutine for derivatives of the psi function. Algorithm 610, ACM Transactions on Mathematical Software, 9(4) :494-502, 1983.

Bain.L J. Statistical analysis of reliability and life testing model. Marceland Dekker Inc., New York, 1976.

Diaconis.P and Ylvisaker.D. Conjugate prior for exponential families, Annals of statistics 6, 268-281, 1979.

Gelman.A ,Roberts. G O, and Gilks.W R. Efficient metropolis jumping rules. Bayesian Statistics, 5 :599-608, 1996.

Gorski.A C. Beware of the weibull euphoria. Transactions of IEEE-Reliability, 17 : 202–203, 1968.

Gupta. R D. and Kundu. D. Generalized exponential distributions. Austr. New Zealand J. Statist, 41 : 173–188, 1999.

Gupta.R D. and Kundu.D. Generalized exponential distributions : different methods of estimation. J. Statist. Comput. Simulation, 69 :315–338, 2001a.

Gupta. R D. and Kundu.D . Exponentiated exponential family : An alternative to gamma and weibull distributions. Biometrical Journal, 43 :117–130, 2001b.

Hastings. W. Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. Biometrica, 75 :97-109, 1970.

Jackson. O A Y. Fitting a gamma or log normal distribution to fiber diameter measure ments of wooltops. Applied Statistics, 1 :161–166, 1963.

Jaheen. Z F. Empirical bayes inference for generalized exponential distribution based on records. Commun. Statist. Theory Methods, 33(8) :1851–1861, 2001.

Johnson. L G. The probabilistic basic of cumulative damage. Transactions of the 22nd. Technical Conference of the American Society of Quality Control, 133-140, 1968.

Johnson. N L, Kotz. S, and Balakrishnan. N. Continuous Univariate Distributions-1. 2nd edition. John Wiley and Sons, New York, 1994.

Johnson. N L, Kotz. S, and Balakrishnan. N. Continuous Univariate Distributions-2. 2nd edition. John Wiley and Sons, New York, 1995.

Kao. J.H.K. "Computer methods for estimating Weibull parameters in reliability studies", Transaction of IRE-Relability and Quality Control, 13, 15 ± 22, 1958.

Kao.J. H. K. "A graphical estimation of mixed Weibull parameters in life testing electron tubes", Technometrics, 1, 389 ± 407, 1959.

Klinken.J V. A method for inquiring whether the gamma distribution represents the frequency distribution of industrialaccident costs. Actuarlele Studien, 3 :83–92, 1961.

Kundu. D and Gupta.R D. Generalized exponential distribution : Bayesian estimations. Computational Statistics Data Analysis, 52 :1873–1883, 2008.

Lawless.J F. Statistical Models and Methods for Lifetime Data. Wiley, NewYork, 1982.

Legendre, A. Nouvelles méthodes pour la determination des orbites des comètes, Courcier, City Paris, 1805.

Lindley.D V. Approximate Bayesian method. Trabajos Estadist. 31, 223-237, 1980.

Linhart . H and Zucchini.W. Model Selection. Wiley, NewYork, 1986.

Mann.N. R , Schafer. R. E, and Singpurwalla.N. D. Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data, New York, Wiley, 1974.

Masuyama. M and Kuroiwa. Y. Tables for the likelihood solutions of gamma distribution and its medicalappl ications. Reports of Statistical Applications Research (JUSE) 1, 18-23, 1952.

Metropolis. N, Rosenbluth. A W, Rosenbluth. M N, Teller.A H and Teller. E. Equations of state calculations by fast computing machine. J. Chem. Phys, 21 :1087-1093, 1953.

Plait. A. The weibull distribution-with tables. Industrial Quality Control, 19 :17–26, 1962.

Pommeret. D. Bhattacharyya matrices and exponential families. Journal of multi variate analysis , 63, 1, page 105-118, 1997.

Pommeret. D. A Construction Of The UMVU Estimator for Simple Quadratic Natural Exponential Families. J. Multivar. Anal. 85, Pages 217-233, 2003.

Raqab. M Z. Inferences for generalized exponential distribution based on record statistics. J. Statist. Plann. Inference, 104 :339–350, 2002.

Raqab. M Z. and Ahsanullah. M. Estimation of the location and scale parameters of generalized exponential distribution based on order statistics. J. Statist. Comput. Si mulation, 69 :109–124, 2001.

Raqab. M Z and Madi. M T. Bayesian inference for the generalized exponential distribution. Journal of Statistical Computation and Simulation Vol. 75, No. 10, 841-852, October 2005.

Swain, J, Venkatraman. S, and Wilson. J. Least squares estimation of distribution function in Johnson's translation system, Journal of Statistical Computation and Simulation, 29, 271 ± 297, 1988.

Terbeche. M ,Oluyede. B.O and Barbour. E.A. Two stage design for estimation of mean with exponential family. Advances and Applications in statistics, Vol.5(3), 325-339, 2005.

Terbeche. M and Oluyede. B.O. Fixed and sequential designs for estimation in the exponentiel family with comparaisons and applications to binomial proportions using beta priors. Journal of Computational and Applied Mathematics, 151(1), 175-182, 2003.

Weibull. W. A statistical theory of the strength of material. Ingeniors Vetenskaps Akade miens, Stockholm 151, 1939.