REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université **M**ouloud **M**ammeri **T**izi-**O**uzou

Faculté des sciences

Département de mathématique

MEMOIRE

De fin d'études

Application des jeux coopératifs dans un réseau de distributeurs de billets de banques.

.

Proposé et dirigé par :

Melle FAHEM Karima.

Réalisé par :

Melle. BOUZIANE Samiha.

Melle. MOHAMMEDI Baya.

2013/2014

❧ Remerciements ☙

Nos remerciements vont tout premièrement au bon dieu tout puissant de nous avoir donné le courage, la volonté et la patience pour réaliser ce travail.

Nous tenons à témoigner notre profonde gratitude et remerciements les plus sincères à Melle FAHEM pour avoir dirigé notre travail pour son soutien et pour le temps qu'elle nous a consacré.

Nous remercions également le président et les membres de Jury pour nous avoir fait l'immense privilège d'évaluer équitablement notre travail.

On souhaite remercier toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

A tous merci.

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi et à qui je ne pourrais jamais assez exprimer l'amour que je leur porte,

A mes chères sœurs, Mina et Imène

A mes chers frères Moumouh, Ahcene, Hocine et Azouaou,

A ma très cher cousine et copine Nabila qui m'a toujours soutenu,

A tous mes chers amis

A ma chère copine Samiha et toute sa famille,

A un ami exceptionnel qui nous a quitté trop tôt IMMOUN Malik paix à son âme.

Zohra

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi et à qui je ne pourrais jamais assez exprimer l'amour que je leur porte,

A mes chères sœurs, Fahima, Sylia, Lydia et Liza

A mes chers frères Sofiane et Rabeh

A mes très cher neveux Yacine, Ilyes et ma nièce Nihel

A mon très cher ami M'hamed

A ma chère et adorable copine Zohra et toute sa famille,

Samiha

Table des matières

Introduction générale

Un peu d'histoire

La théorie des jeux a fait l'objet de résultats assez anciens, à partir des travaux de Blaise Pascal sur le " problème des partis ", donnant une première intuition des probabilités et de l'espérance mathématique, et de son étonnant pari. Elle n'est devenue une branche importante des mathématiques qu'à partir des années 40. Surtout après la publication de *la Théorie des jeux et le comportement économique* (Theory of Games and Economic Behavior) par John von Neumann et Oskar Morgenstern, en 1944. Cet ouvrage fondateur détaillait la méthode de résolution des jeux à somme nulle.
Lors de sa présentation, la théorie rencontra une vive opposition de la part des états-majors. Ceux-ci acceptaient volontiers l'usage de tirages au hasard dans les jeux de Kriegspiel des écoles militaires. Mais l'idée de remettre au sort, le fait d'escorter réellement ou non tel ou tel convoi, au nom des stratégies mixtes, ne les enthousiasmait guère. Issus du terrain et sachant ce qu'étaient des pertes humaines, ils jugeaient le procédé, pour le moins, cavalier.
Vers 1950, John Nash a présenté une définition d'une stratégie optimale, pour un jeu à plusieurs joueurs, dite équilibre de Nash. Ce résultat tardif1 génial a été raffiné par Reinhard Selten; cela leur a valu le " prix Nobel d'économie " en 1994, pour leurs travaux sur la théorie des jeux, avec John Harsanyi qui avait travaillé sur les jeux en information incomplète.

Introduction

La théorie des jeux est un ensemble d'outils qui sert à analyser formellement des problèmes posés par l'interaction stratégique d'un groupe d'agents rationnels poursuivant des buts qui leurs sont propre. Elle traite aussi des situations dans lesquelles l'action optimale pour un agent dépend des anticipations qu'il forme sur la décision d'un autre agent. Cet

agent peut être aussi bien une personne physique, une entreprise ou un animal.
L'objectif de la théorie des jeux est de modéliser ces situations, de déterminer une stratégie optimale pour chacun des agents, de prédire l'équilibre du jeu et de trouver comment aboutir à une situation optimale. La théorie des jeux est très souvent utilisée en économie, en sciences politiques, en biologie ou encore en philosophie.
Les questions principales posées en théorie des jeux sont de plusieurs ordres:

– Comment modéliser mathématiquement des interactions "réelles"?

– Que peut on dire mathématiquement de ces modèles? Quels sont les bons concepts de "solutions" et sous quelle hypothèse ces solutions ont elles de bonne propriété (existence, unicité, etc...)?

– Discussion de la pertinence de ces concepts mathématiques de "solutions" dans le monde réel.

L'accent sera mis ici principalement sur le deuxième point.
Ci dessous quelques exemples de situations rencontrées dans la vie de tous les jours qui correspondent à la définition d'un "jeu":

– Un couple qui se rend au cinéma et doit décider du film à aller voir, sachant qu'ils préfèrent assister à la même séance mais n'ont pas les mêmes préférences sur le film. Par contre si un célibataire se rend au cinéma et doit décider du film, ce n'est pas un jeu (pas d'interaction) mais un problème d'optimisation; et si 2 personnes inconnues l'une de l'autre se demandent au même moment quel film aller voir ce'est pas non plus un jeu (toujours pas d'interaction) mais deux problèmes d'optimisation en parallèle.

– Lors d'un départ en vacances, le temps de trajet dépend de votre stratégie (choix de la route, heure de départ) mais surtout de ce que font les autres! Pour cette raison pour un trajet donné vous ne prenez pas forcément le même chemin un jour de semaine et le week end.

– Quand un piéton pressé traverse une rue, son utilité (réussir à traverser vite en un seul morceau) dépend de sa stratégie (prudente ou non) mais également de ce que font les automobilistes. Pour cette raison, le piéton va chercher à anticiper le comportement des automobilistes (quelle est la probabilité qu'ils soient ivres, est-on dans un pays ou les gens respectent le code de la route, etc...)

– Lors d'enchères, le fait que l'on gagne ou non un objet (et le prix à payer) dépend aussi des enchères des autres. Cela entraîne là encore des considérations stratégiques.

On voit dans ces exemples apparaître plusieurs concepts centraux de la théorie des jeux: caractère simultané ou non des décisions des joueurs, importance de l'information, anticipation des stratégies que vont utiliser les autres joueurs,...

Notre travail est basé sur l'article de Gow [3] qui traite les frais d'interchange dans un réseau de quatre banque et pour faire nous avons élaboré le plan suivant: la première partie intitulé "généralités", consiste en la présentation des définitions de base de la théorie des jeux, qu'on a illustré avec quelques exemples de jeux célèbres. Dans la seconde partie nous étudierons les jeux dits "coopératifs" dans lesquels les joueurs ont la possibilité de coopérer pour améliorer leurs utilitées respectivent. On introduira dans cette partie différents concepte de solutions tel que le coeur, la valeur de shapley et le nucléole. Dans la troisième partie, on traite un exemple réel appliquer sur un réseau de quatre banques.

Chapitre 1

Notions générales sur la théorie des jeux

1.1 Introduction

La théorie des jeu est une branche des mathématiques, de recherche opérationnelle et de l'économie qui traite les situations de *conflit*. Elle consiste à analyser *l'interaction* dans un *groupe d'agents rationnels* qui ont un comportement *stratégique*.
On appelle un jeu, une situation où des individus "les joueurs" sont conduit à faire des choix parmi un certain nombre d'actions possible appelées "stratégies ",où chaque stratégie est une description complète de la façon dont un joueur entend jouer du début à la fin du jeu et dans un cadre défini à l'avance "règles du jeu". Le résultat de ces choix constituant une issue du jeu à laquelle est associé un gain positif ou négatif pour chacun des participants

1.2 Définitions de base de la théorie des jeux

L'introduction comporte certains mots qui méritent d'être précisés.

Définition 1.1. ***Conflit:***
Un conflit est une situation où les questions suivantes ont un sens

1. *Qui participe à cette situation?*
2. *Quel sont les résultat possibles de cette situation?*
3. *Qui est intéressé par ces résultat? comment?*

Définition 1.2. ***Joueur:***
Toute personne qui participe au conflit (jeu) et capable de prendre une

décision qu'il envisage de prendre.

Définition 1.3. ***Stratégie:***
Une stratégie d'un joueur est un choix parmi la liste de décision qu'il envisage de prendre. Le résultat des choix de tous les joueurs constitue une (issue) ou profil d'action du jeu.

Définition 1.4. ***Interaction:***
Toute action choisie par un joueur aura une influence sur celle des autres joueurs.

Définition 1.5. ***Gains(profit)*** *Le gain d'un joueur est le bénéfice négatif (perte) ou positif qui résulte des choix de tous les joueurs.*

Définition 1.6. ***Rationalité individuelle:***
La rationalité individuelle d'un joueur est une règle de maximisation du profit individuel.

Définition 1.7. ***Coalition*** *Une coalition est une partie de l'ensemble des participants (joueurs), qui s'organise d'une certaine façon.*

Définition 1.8. ***Accord contraignant:***
Un accord entre les joueurs est dit contraignant s'il existe un organe de côntrole qui peut garantir son application, par exemple, un état, un gouvernement,...

Définition 1.9. ***Allocation:***
Une allocation est une fonction $x : N \to \mathbb{R}$ *qui associe un gain* $x(i) \in \mathbb{R}$ *à chaque joueur* $i \in N$*. Par soucis de simplicité, pour chaque allocation* x *et chaque coalition non vide* S*, on note* $x(S) = \sum\limits_{i \in S} x(i)$*.*

1.3 Classification générale des jeux

La diversité des situations conflictuelles qu'on peut rencontrer en pratique engendre différents types de jeux et des méthodes spécifiques de résolution. Il existe plusieurs classifications des jeux selon les critères suivants:
Nombre de joueurs; nombre de stratégies; types de relation entre les joueurs; types des gains; la fome des fonctions des gains; le nombre de pas du jeu; l'état d'information.

– Selon **le comportement** des joueurs, on peut distinguer deux types de jeux.

1.3.1 Jeux coopératifs

Définition 1.10. *On dit qu'un jeu est coopératif, si les joueurs peuvent se grouper dans des coalitions, où le choix de leurs stratégies est décidé en commun, afin d'améliorer les gains de tous les joueurs coalisés. Notons que les coalitions sont formées ou définies au début du jeu, ainsi donc on ne parlera pas de coalitions se formant durant le jeu, ou devenant interdites. Les jeux coopératifs se divisent en deux catégories: les jeux sans paiements latéraux et les jeux avec paiement latéraux. Ces derniers feront l'objet du chapitre 2.*

1.3.2 Jeux non coopératifs

Définition 1.11. *On appelle jeu non coopératif, un jeu où les joueurs ne peuvent pas former de coalitions, par contre ils peuvent communiquer entre eux et échanger les informations, se mettre d'accord sur telle ou telle issue sans jamais contracter d'accord contraignant. Les raisons essentielles d'un tel comportement peuvent être l'impossibilité de communication, les intêrets des joueurs sont opposés, la perte de confiance entre les joueurs, ou bien il y a interdiction de former des coalitions.*

– Selon **l'information** que possèdent les joueurs:

1.3.3 Jeu à information complète

Définition 1.12. *Un jeu est dit à information complète si chacun des joueurs connaît la structure du jeu, c'est-à-dire: l'ensemble des joueurs, les préférences des joueurs, les règles du jeu et le type d'information qu'à chaque moment du jeu chaque joueur possède sur les actions entreprises par les autres joueurs au cours des phases précédentes. Donc, chaque joueur peut se mettre à la place de tous les autres joueurs et du modélisateur. Si au moins un joueurs ne connaît pas entièrement la structure du jeu, le jeu est dit à information incomplète.*

1.3.4 Jeu à information parfaite

Définition 1.13. *Un jeu est dit à information parfaite si chacun des joueurs, au moment de choisir son action, a une connaissance parfaite de l'ensemble des décisions prises antérieurement par les autres joueurs. Un jeu est à information imparfaite si un des joueurs ne connaît pas, à un moment du déroulement du jeu, ce qu'à joué un autre joueur. Ceci peut arriver dans le cas ou on cache l'information aux joueurs ou par ce que les joueurs jouent simultanément.*

- **Autres classes de jeux**
  Jeux à *deux personnes*, Jeux à n personnes, Jeux à *somme nulle.*

Définition 1.14. *On dit qu'un jeu est* ***à somme nulle*** *si le montant total des gains à la fin de la partie est à somme nulle, en d'autres termes si le montant total gagné par un joueur est égal au montant perdu par l'autre, les échecs ou le poker sont des jeux à somme nulle.*

Définition 1.15. ***Jeux monocritères et multicritères:*** *selon le nombre de critères pris en considération par chaque joueur, on peut distinguer les jeux monocritères (chaque joueur possède une fonction gain) et les jeux multicritères (chaque joueur s'intéresse à plus d'un critère).*

1.4 Présentation d'un jeu non coopératif

Un jeu non coopératif peut être défini de deux manières différente (qui sont toutefois équivalente): stratégique (ou normale) et extensive.

1. Forme extensive (arborescente).
2. Forme stratégique (normale).

1.4.1 La forme stratégique ou normale

Un jeu sous forme normale est la donnée de trois éléments:

$N = \{1,2,...,n\} \qquad n \in \mathbb{N}^*$ fini non vide

X_i l'ensemble des stratégies du joueur i, $X_i \subseteq \mathbb{R}^{ni}$

$X = \prod_{i \in N} X_i$ est l'ensemble des issues.

$$f_i : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to \mathbb{R}$$

$$x = (x_1,x_2,...,x_n) \to f_i(x)$$

f_i: fonction de gain, d'utilité ou de paiement du joueur $i \in N$.
On note $x = (x_1,...,x_n) = (x_i,x_{-i})$ où $x_{-i} \in \prod_{i \in N, j \neq i} X_i$.
Cette forme est la plus appropriée lorsque le jeu est à un seul coup et lorsque les coups sont simultanés. Dans la forme stratégique, toute la structure coups et information, ce qu'on appelle habituellement les règle du jeu, est perdue de vue. On se contente donc d'une énumération de toutes les stratégies avec les issues et les gains qu'elles engendrent.
-On parlera de jeu fini si X_i fini $\forall i \in N$.
-Le gain du joueur dépend de sa stratégie et celles des autres joueurs.

Remarque 1.1. Dans la définition, il n'est pas nécessaire que les choix d'actions soient simultanées, il suffit en fait qu'au moment de choisir, chaque joueur ne soit pas au courant des choix éventuellement déjà effectuées par les autres joueurs. C'est le cas par exemple lorsque chaque joueurs écrit l'action qu'il choisit dans une enveloppe cachetée, et qu'ensuite toutes les enveloppes soient récoltées et ouvertes par un arbitre.
Par ailleurs, tous les joueurs savent que tous les joueurs connaissent le jeu, mais aussi que tous les joueurs savent que tous les joueurs savent que tous les joueurs le connaissent ,...
On peut continuer comme cela jusqu'à l'infini, et l'on dit alors que le jeu est *connaissance commune* de la part des joueurs. Cela arrive par exemple si un arbitre explique publiquement aux joueurs les règles du jeu (i.e les données du jeu)avant de jouer. De même, on a souvant en tête l'idée que les joueurs sont des individus intelligents ou rationnels, et que tous les joueurs savent que les joueurs sont rationnels, et qu'ils savent que tous les joueurs savent que les joueurs sont rationnels,...etc.
On peut aller jusqu'à la connaissance commune de la rationalité.

Exemple 1.1.

1,0	1,2	0,1
0,3	0,1	2,0

On appelle le joueurs 1, le joueur ligne et le joueur 2 joueur colonne.
$X_1 = \{T,B\}$ $\quad$ $X_2 = \{L,M,R\}$

Dans les six cases du tableau:
Le premier chiffre =gain du joueur 1
Le deuxième chiffre=gain du joueur 2
$f_1(T,L) = 1$ $f_2(T,L) = 0$
$f_1(T,M) = 1$ $f_2(T,M) = 2$
$f_1(T,R) = 0$ $f_2(T,R) = 1$

$< N,X,f >$,$N = \{1,2\}$,$X = X_1 \times X_2$, $f = (f_1,f_2)$.

Pour un jeu à deux personnes cette représsentation (tableau)est dite *matricielle*, et le jeu est dit *bimatriciel* s'il n'est pas à somme nulle.
Un jeu est à somme nulle si et seulement si:$\Sigma_{i=1}^{n} f_i = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ Gain du joueur1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ Gain du joueur2}$$

1.4.2 La forme extensive

Dans ce cas, le jeu se déroule en plusieurs coups; les joueurs peuvent intervenirs plusieurs fois. On détaille chaque coup possible et l'état d'information durant le déroulement du jeu. La représentation d'un tel jeu se fait par l'arbre de Kuhn[1]. Dans ce cas, chaque sommet de l'arbre spécifie le (ou les)joueur(s)qui doit(doivent)choisir une action à ce moment du jeu ainsi que l'information dont chaque joueur dispose lors de la prise de décision. Les gains que chaque joueurs peut réaliser aprés avoir suivi un des chemins possibles au sein de l'arbre sont donnés aux sommets terminaux de l'arbre.

Exemple 1.2.

Dans le jeu représenté dans la figure (1.4.2), la racine x_0 est le noeud 0 qui est un noeud d'action du joueur I.

– le joueur I, au départ peut choisir entre deux actions 1 et 2.
– l'action 1 va le mener à la fin du jeu avec le resultat (1,2).

Dans le résultat (1,2):

– Le joueur I reçoit 1 unité.

1. Kuhn fut l'un des fondateur de la théorie des jeux avec Tucker(1950,1953)

– Le joueur II reçoit 2 unité.

Le résultat (3,7) est atteint lorsque le joueur 1 choisit l'action 2, puis le joueur II choisit l'action 3 et pour finir le joueur I choisit l'action 6.

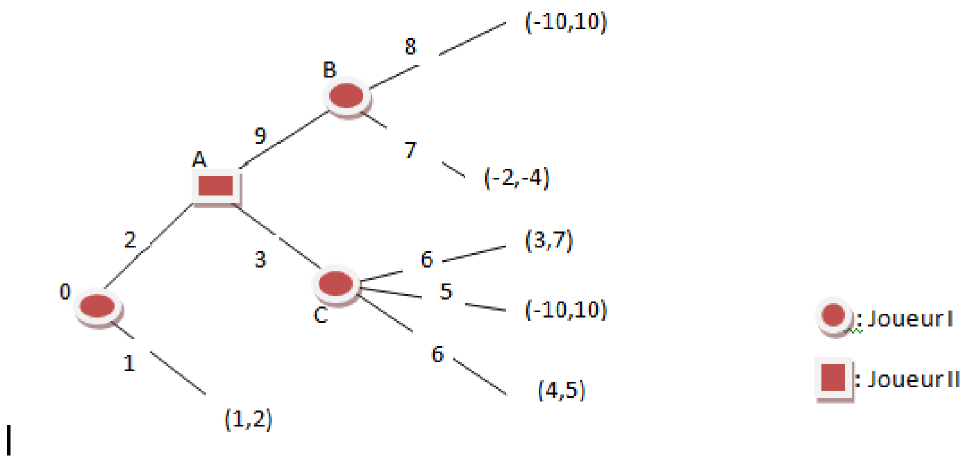


FIG. 1.1 – *Arbre du jeu*

1.5 Quelques concepts de solutions pour un jeu non coopératif sous forme normale

On peut définir un concept de solution comme un ensemble de lois (aboutissant à des équations mathématiques) qui permettent de selectionner parmis toutes les issues possibles, un sous ensemble d'issue satisafaisant certaines propriétés, jugées désirables si les joueurs possèdent certaines facultés de raisonnement (rationalité, prudence, connaissance...)

1.5.1 Equilibre de Nash

L'équilibre de Nash est un concept fondamental en théorie des jeux. Il doit son nom au mathématicien économiste John Nash (prix nobel d'économie en 1994) qui l'a introduit en 1951 dans sa thése de doctorat. Il décrit une issue dans laquelle aucun joueur ne souhaite modifier sa stratégie étant données les stratégies de ses adversaires.

On considère le jeu

$$J =< N,X,f > \tag{1.1}$$

sous forme normale.

Définition 1.16. *Un profit de stratégie (solution,issue) $x^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*)$ est un equilibre de Nash pour le jeu J si et seulement si:*

$$\forall i \in N, f_i(x_i,x_{-i}^*) \leq f_i(x_i^*,x_{-i}^*) \quad \forall x_i \in X_i$$

Interprétation:

1. L'équilibre de Nash décrit une propriété de stabilité de l'issue x^*, dans le sens où, aucun joueur i, $i \in N$ n'a intêret à modifier seul son choix x_i^* lorsque les autres joueurs choisissent leurs stratégies dans x^*.
2. L'équilibre de Nash est une situation de non regret, puisque dans cette équilibre aucun joueur ne regrette le choix qu'il a effectué après avoir constaté celui des autres.

1.5.2 Existence de l'équilibre de Nash

Théorème 1.1. *Soit le jeu stratégique $J =< N,X,f >$ avec $X_i \subset \mathbb{R}^n, i \in N$*
$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$, $n = card(N)$ admet un equilibre de Nash si pour tout $i \in N$, les conditions suivantes sont verifiée:

1. *X_i sont non vides, convexes[2] et compactes[3], $i \in N$.*
2. *les fonctions $x \longrightarrow f_i(x)$ est continue.*
3. *les fonctions $x \longrightarrow f_i(x_i,x_i)$ est quasi-concave[4] sur $X_i, \forall x_{-i} \in x_{-i}$*

1.5.3 Propriétés

1. **Optimalité**
   L'existence d'un équilibre n'implique pas que celui-ci soit nécessairement optimal. Il peut en effet exister d'autres choix des joueurs qui conduisent, pour chacun, à un gain supérieur. Ces choix peuvent, ou non, correspondre à un autre équilibre (le théorème de Nash dit

2. Un ensemble K est dit convexe si $\forall x^1,x^2 \in K, \forall \lambda \in [0,1] : \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in K$
3. un ensemble compact est un ensemble fermé borné R^n
4. f est dite quasi concave sur A si:$\forall (x,y)$ dans $A^2, \forall \lambda \in [0,1]$:$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq min(f(x),f(y))$

qu'il existe au moins un équilibre, mais pas qu'il est unique).
Considérons, par exemple, un jeu où deux joueurs choisissent simultanément un nombre de 2 à 12. Le joueur qui a annoncé le plus petit nombre remporte ce nombre, l'autre joueur gagne la même chose moins deux. En cas d'égalité, les deux joueurs subissent la pénalité de deux.
Les seuls équilibres de Nash de ce jeu quand les deux annoncent 2, ou quand l'un annonce 2 et l'autre 3. En effet, dans toutes les autres paires de stratégies : si le plus petit est 3 ou plus, le joueur qui annonce plus ou autant peut améliorer son résultat en déclarant le plus petit moins un. Si le plus petit est 2 et l'autre est 4 ou plus, le joueur qui a choisi le plus petit peut améliorer son score en choisissant le plus grand moins un.
Dans le choix (2,2) si quelqu'un change il n'aura pas mieux que 0 de toute façon. Dans (2,3) si celui qui a choisi 3 change il n'aura pas mieux que 0, si celui qui a choisi 2 change il aura 1 au lieu de 2, donc ce sont des équilibres de Nash. Cependant, il est clair que le choix (12,12), rapportant 10 à chaque joueur, est bien meilleur pour les deux que les équilibres précédents.
D'autres exemples célèbres sont ceux du problème des marchands de glaces ou du dilemme du prisonnier.

2. **Unicité**
   Tout jeu peut avoir de nombreux équilibres de Nash ou aucun (c'est le cas du jeu consistant à écrire simultanément un entier, le gagnant étant celui dont l'entier est le plus grand). Néanmoins, Nash est parvenu à démontrer que tout jeu avec un nombre fini de joueurs ayant un nombre fini de stratégies admet au moins un équilibre de Nash en stratégie mixte (c'est-à-dire si l'on considère comme une stratégie possible de tirer aléatoirement (avec des probabilités fixées) entre plusieurs stratégies).
   Dans le cas d'un jeu à somme nulle à deux joueurs, c'est-à-dire où ce que gagne un joueur est nécessairement perdu par l'autre, ce résultat (c'est-à-dire l'utilité induite par tout équilibre) est nécessairement unique. Il a conduit à définir la valeur d'un jeu.

3. **Limites et perspectives**
   L'équilibre de Nash est limité dans la réalité par la faculté qu'ont

les agents de se coordonner et de répéter leurs choix .

4. **Equilibre évolutivement stable**
   Les applications des jeux répétés et en particulier l'isolement d'un comportement altruiste optimal dans des cas particuliers dedilemme du prisonnier ont intéressé les biologistes. Ce résultat a permis de combler un trou conceptuel dans l'évolutionnisme, qui paraissait privilégier l'égoïsme.
   Les théoriciens ont donc défini une forme plus exigeante d'équilibre pour des modèles répétés : un équilibre évolutivement stable reste stable même en cas de comportement légèrement perturbé. Cette stabilité vise à couvrir les situations d'apparition de nouveaux comportements dans une population, c'est-à-dire de dépasser l'immobilisme présumé par Nash.

Exemple 1.3 (Anecdote). Dans l'adaptation au cinéma de la biographie de Nash, Un homme d'exception, la découverte de cet équilibre est mise en scène par une stratégie de séduction. Quatre camarades de Nash souhaitent séduire une fille parmi les 5 présentes.
Nash leur explique que s'ils suivent individuellement leur intérêt, ils tenteront tous les 4 de séduire la plus belle. Ils vont alors se court-circuiter et essaieront, par la suite, de se reporter sur l'une des quatre restantes. Mais " personne n'aime être un second choix ", leur stratégie est donc vouée à l'échec.
La meilleure stratégie serait donc de s'entendre pour séduire chacun l'une des quatre autres filles évitant, de ce fait, tout court-circuit. Ils augmenteront ainsi considérablement leurs chances de succès.
Nash en déduit que la théorie de la main invisible de Smith est lacunaire. Ce à quoi ses camarades rétorquent qu'il ne s'agit là que d'une stratégie destinée à lui permettre de séduire la plus belle.
Cette situation ne semble pas être un exemple d'équilibre de Nash, puisque chaque individu est tenté de tricher pour avoir la plus belle à lui seul. Donc, il y a ici un point focal (la belle) qui empêche de garder l'équilibre en prétendant aller séduire seulement les autres filles. Cependant, si on suit le raisonnement de Nash à la lettre, et si toute tentative de conquérir la belle à deux amène à un échec total (perte de la belle et des " seconds choix "), alors, de fait, l'ensemble des stratégies qu'il

propose est un équilibre ; il convient seulement de remarquer qu'il en existe quatre autres, tous aussi valables... D'autre part, on ne peut pas en déduire que la théorie de la main invisible est lacunaire, car bien que les 4 camarades vont se court-circuiter, ici la concurrence n'est un échec que parce que la belle peut n'en choisir aucun.

1.6 Quelques exemples célèbres

Exemple 1.4. Le dilemme du prisonnier:
Deux cambrioleurs, notés 1 et 2, sont arrêtés par la police et placés en garde à vue dans des cellules différentes. Les preuves sont insuffisantes pour les inculper et la police leur propose la solution suivante. S'ils avouent tous les deux, chacun sera condamné à 3 ans de prison (dans ce cas, l'utilité de chacun est de 1). Si seulement l'un des deux avoue, il sera libéré et servira de témoin contre l'autre (dans ca cas, l'utilité de celui qui avoue est égale à 4 et celle de l'autre à 0). Si aucun des deux n'avoue, ils seront inculpés pour un délit mineur et condamnés à 1 an de prison (dans ce cas, l'utilité de chacun est égale à 3).

Exemple 1.5. Bataille des sexes et jeu de coordination:
Un couple désire sortir ensemble, mais l'homme et la femme ne sont pas d'accord sur le spectacle. Monsieur désire assister à un match de boxe, Madame à un spectacle de danse. S'il vont à la danse, Monsieur(resp. Madame) a une utilité égale à 1 (resp. 2); et s'ils vont au match de boxe, Monsieur (resp. Madame) a une utilité de 2 (resp.1). S'ils sont séparés, ils ont tous les deux une utilité nulle.

Exemple 1.6. Pile ou face:
Deux joueurs choisissent entre pile et face. Si leurs choix sont identiques, le joueurs A reçoit du joueur B un dinar et inversement si les choix diffèrent.

Exemple 1.7. Le jeu de la poule mouillée:
Deux amis, A et B voient en même temps un billet sur le trotoir. Chacun d'eux a deux choix possible, soit laisser le billet à l'autre (L), soit le prendre (P). S'ils décident tous les deux de laisser le billet, leur utilité est de 3. Si l'un d'entre eux prend le billet et l'autre le laisse, leurs uti-

lités respectives sont égales à 4 et 1. Si les deux amis prennent le billet, ils ne peuvent le partager et leur utilité est égale à 0.

Exemple 1.8. Pierre, Papier, Ciseaux:
Chacun des deux joueurs doit choisir une action: pierre, papier ou ciseaux. Il y a un cycle entre ces trois symboles: la pierre casse les ciseaux, les ciseaux coupent le papieret le papier recouvre la pierre. Si les deux joueurs choisissent le même symbole, alors ils font match nul et aucun paiement n'est effectué. Sinon, le joueur ayant le symbole le plus fort gagne une unité et l'autre en perd une.

Chapitre 2

Les jeux coopératifs

2.1 Introduction:

La théorie des jeux coopératifs (jeux de négociation,jeux,coalitionnels) propose des concepts de solution lorsque les individus décident de former des accords: problèmes de répartition des coûts ou des gains, du pouvoir de décision,...etc. Ces concepts reposent sur des critères de rationalité individuelle, d'efficacité collective et d'équité. Certains(coeur)concluent souvent à une multiplicité d'accords possibles ou, au contraire, à l'absence d'accords stables. D'autres (valeur de Shapley) souligne la possibilité d'une solution coopérative unique dans des contextes assez généraux.

La théorie des jeux coopératifs, qui est un moyen formalisé pour analyser les situations d'interdépendance entre agents économiques, peut être aussi vue comme un ensemble de deux parties, la première se péoccupe de la description des règles du jeu et du processus de regroupement des joueurs, tandis que la deuxième est axée sur la recherche de *solutions* possédant certaines caractéristiques.

Dans ce mémoire, on s'intéréssera à la deuxième partie, on présentera en premier lieu quelques notions de bases sur les jeux coopératifs. Par la suite, on exposera quelques concepts de solutions tels que le coeur, la valeur de shapley et le nucléole ainsi que leurs propriétés.

2.2 Définitions et propriétés

Soit $N = \{1,...,n\}$ un ensemble fini de n joueurs. Une coalition est un sous-ensemble non vide S de joueurs, c'est à dire $S \subseteq N, S \neq \emptyset$.

L'ensemble des coalitions sur N correspond à l'ensemble $2^N \backslash \emptyset$ de sous-ensembles non vides de N.

Définition 2.1 (Jeu coopératif à utilité transférable TU). *Un jeu coopératif est à utilité transférable (**TU**) lorsque la négociation porte sur le partage d'un bien divisible(transférable) que les joueurs évaluent en utilisant la même échelle utilitaire. Cela suppose notamment qu'une "monnaie" commune existe et que les joueurs peuvent effectuer des transferts "monétaires" entre eux.*

Dans un jeu coopératif à utilité transférable on s'intéresse à la répartition entre les joueurs du résultat de la coopération, en tenant compte du potentiel de chacune des coalitions.

Cette problématique générale couvre de nombreuses situations réelles, notamment dans les domaine de l'économie et de la politique: partage de coûts, distribution de gains, exploitation de ressources communes, mesure du pouvoir de décision, etc. Les deux exemples suivants sont représentatifs de deux applications traditionnelles des jeux coalitionnels.

Exemple 2.1 (L'allocation de coûts). Trois villes voisines A,B et C sont en contrat avec une société pour réaliser des adductions d'eau. Le projet revient à 10(millions d'euros) pour chaque municipalité prise séparément. Pour des raisons géographique, le constructeur propose des coûts (réduit) de respectivement 16, 17 et 18 pour des contrats communs entre A et B, A et C, et B et C. Le contrat impliquant les trois villes a un coût de 24. Comment les coûts devraient-ils être répartis entre les trois villes?

Exemple 2.2 (Le pouvoir de décision). Une société a quatre actionnaires, détenant respectivement 40,30,20 et 10 des actions. Les décisions sont prises à la majorité des voix (une proposition doit, pour l'emporter, réunir plus de 50 des parts), chaque actionnaire ayant un poid proportionnel à sa part. Quel est le pouvoir de décision de chacun des actionnaires?

Définition 2.2 (Fonction caractéristique v). *est une fonction qui associé à chaque coalition $S \subseteq \{1,2,...,n\}$ une valeur $v(S) \in \mathbb{R}$.*
Cette fonction informe sur les résultats que peuvent obtenir les différentes coalitions en précisant le montant que les membres d'une coalition S peuvent s'assurer(et se partager)s'ils coopèrent ensemble, sans l'aide de joueurs extérieurs à leur groupe(coalition).

$v \ : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction de coalition,ou fonction caractéristique, qui associe à chaque coalition* $S \in 2^N \setminus \emptyset$ *une valeur* $v(S) \in \mathbb{R}$ *et telle que* $v(\emptyset) = 0$. *La fonction caractéristique* v *possède les deux propriétés suivantes:*

$$v(\emptyset) = 0 \tag{2.1}$$

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \quad \forall S,T \subseteq N, \ \ S \cap T = \emptyset \tag{2.2}$$

Tandis que la première propriété (2.1) ne fait que formaliser l'idée que le gain réalisé par une coalition vide est nul, la deuxième (2.2) − la suradditivités − stipule qu'une coalition de joueurs est au moins aussi efficace que l'ensemble de ces sous-coalitions disjointes.

Un jeu où v est additive ($v(S \cup T) = v(S) + v(T)$) est dit ***inessentiel***[1]

Pour récapituler, un jeu coopératif à n personnes avec paiments latéraux est noté

$$< N,v > \tag{2.3}$$

où

$\mathbf{N=\{1,\ldots,n\}}$: est l'ensemble des joueurs

v : une fonction caractéristique (suradditive).

Exemples d'application:

1. Le problème de l'exemple (2.1) peut être décrit par un jeu à trois joueurs, $N = \{A,B,C\}$ où la valeur d'une coalition S est définie par l'économie de coût qu'un contrat commun entre ses membres permet de réaliser(comparé à la situation où chaque ville se S signerait un contrat individuel). On obtient ainsi
   $v\{A\} = v\{B\} = v\{C\} = 0$
   $v\{A,B\} = 4, \ \ v\{A,C\} = 3, \ \ v\{B,C\} = 2$
   et $v\{N\} = 6$
   On notera que,dans ce jeu la coopération n'est jamais génératrice de perte, cette propriété appelée super-additivité[2] est souvent retenue comme une condition naturelle qui doit être satisfaite par la fonction caractéréstique d'un jeu coopératif.

1. Il n'y a aucun stimulant à la formation de coalition de plus d'un joueur.
2. Au sens où la somme des valeurs de deux coalitions disjointes est toujours inférieure ou égale à la valeur qui résulte de leur fusion.

2. L'exemple(2.2) décrit une situation relevant de la classe des jeux simples[3] avec $N = \{1,2,3,4\}$
   $v(S) = 1$ si S est l'une des coalitions

$$\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}$$

   sinon $v(S) = 0$

Définition 2.3 (Jeu convexe). *Un jeu (N,v) est convexe si pour chaque $S,T \subseteq N$ on a*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) - v(S \cap T) \tag{2.4}$$

La condition (2.4) est difficilement interprétable. Shapley [9] donne une définition équivalente de la convexité:

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S) \tag{2.5}$$

Pour chaque S,T telles que $S \subseteq T \subseteq N\ \{i\}$. La condition (2.5) s'interprète plus facilement: la contribution marginale de chaque joueur $i \in N$ ne décroit pas si la taille de la coalition qu'il rejoint augmente.

2.2.1 Propriétés des jeux TU

Un jeu TU (N,v)est:

Essentiel: si $v(N) > \sum\limits_{i \in N} v(\{i\})$ C'est-à-dire s'il est effectivement dans l'intérêt des joueurs de former la grande coalition plutôt que chacun reste isolé.

Sur-additif: si $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ pour chaque S,T telles que $S \cap T = \emptyset$.
C'est-à-dire qu'il est toujours dans l'intérêt pour deux coalitions dijointes de fusionner.

Symétrique: si $v(S) = v(T)$ quelles que soient S,T telles que $|S| = |T|$.
Ainsi, seule la taille de la coalition importe, pas sa composition.

3. Dans lesquels la fonction caractéréstique ne prend que deux valeurs:1 si la coalition vérifie une propriété donnée sinon 0

Monotone: si $v(S) \leq v(T)$ pour chaque $S \subseteq T$

C'est-à-dire si de nouveaux joueurs rejoignent S pour former T , la valeur de la plus grande coalition T est au moins égale à celle de S.

Positif: si $v(S) \geq 0$ pour chaque $S \subseteq N$.

Définition 2.4 (Imputation). *Une imputation est un ensemble de n valeurs numeriques $\{x_1,...,x_n\}$ représentant les gains des joueurs à l'issue du jeu et satisfaisant les deux conditions suivantes:*

$$x_i \geq v\{i\} \qquad \forall i \in N \tag{2.6}$$

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \tag{2.7}$$

où $v(N)$ est le gain total du jeu.

*On note **I(N,v)** l'ensemble des imputations d'un jeu coopératif $< N,v >$*

On aura:

$$I(N,v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \ et \ x_i \geq v\{i\} \forall i \in N\}$$

Interprétation:

La condition (2.6) signifie qu'aucun joueur n'acceptera un partage lui attribuant moins de ce qu'il pourrait gagner en agissant seul (rationalité individuelle). Par ailleurs, un partage satisfaisant

$$\sum_{i \in N} x_i < v(N) \tag{2.8}$$

ne sera pas accepté par les joueur parce qu'il revient à gaspiller la quantité

$$v(N) - \sum_{i \in N} x_i \tag{2.9}$$

D'autre part, si on suppose que

$$\sum_{i \in N} x_i > v(N) \tag{2.10}$$

ceci reviendra, selon l'expression d'Ekeland [2] à vendre la peau de l'ours avant de l'avoir tué"(la solution n'est pas réalisable). Donc,

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \tag{2.11}$$

Cette condition est appelée la *rationalité collective.*
La rationnalité individuelle étant un ingrédient de base de la théorie des jeux, et d'ailleurs de l'approche décisionnelle en science sociales en général, a permis à la condition (2.6) d'échapper à la critique qui s'est concentrée sur la condition (2.7). Luce et Raifa [5] ont émis des réserves quant à la validité du passage de la rationnalité individuelle à la rationnalité de groupe. Leur argument est que cette dernière n'est ni un postulat ni un résultat de la théorie des jeux coopératfs. D'autre part, si on admet cette hypothèse, pourquoi ne pas l'étendre à toutes les coalitions S

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \tag{2.12}$$

plutôt que de la réserver uniquement à la grande coalition N? La raison est avant tout technique!.

2.3 Concepts de solutions

L'unicité d'une solution est toujours une propriété souhaitable et rassurante, surtout quand il s'agit de partager le gain d'un jeu entre les agents impliqués. En général, un jeu coopératif décrit par une fonction caractéristique n'engendre pas une imputation unique et, par conséquent, l'intérêt des théoriciens s'est tourné vers la recherche des moyens ou de procédures qui permettent, faute d'avoir une solution unique, d'exclure un certain nombre d'imputations sur la base de critères justifiés intuitivement .
Dans ce qui suit, on exposera les solutions les plus utilisées tels que le coeur, la valeur de Shapley, et le nucluole.

2.3.1 Le Coeur (Noyau)

Pour pouvoir écarter certaines imputations, il faudrait définir des critères qui font qu'une coalition va préférer une imputation à une autre. Intuitivement, il est clair qu'une coalition refusera une imputation particulière s'il existe une autre qui procurera à ses membres un gain supérieur.

Définition 2.5. *On dit qu'une imputation y est dominé par x si les deux conditions suivantes sont remplies :*

1. $\sum_{i \in S} x_i \leqslant v(S)$ *(faisabilité)*

2. $x_i > y_i \forall i \in S$ *(préférabilité)*

Le principe général de ce concept de solution, introduit par Gillies (1953) [4], est de retenir toutes les répartitions de la valeur $v(N)$ qu'aucune coalition de joueurs ne peut contester. On part de l'ensembles des allocations possibles $x = (x_1,...,x_n)$, avec x_i la part du joueur i; on note $x(S)$ la somme des parts des membres d'une coalition S. Une première restriction consiste à ne garder que les imputations, c'est-à-dire les allocatios efficaces

$$x(N) = v(N)$$

Et individuellement rationnelles

$$x(i) \geq v(i) \quad \forall i$$

Cela permet d'éviter les contestations individuelles, les objections formulées conjointement par les membres d'une coalition restant possibles. Par exemple, dans le jeu d'allocation de coût (exemple (2.1)), si l'imputation $x = (1.5,1.5,3)$ est proposée, donc si les villes A,B et C payent respectivement 8.5, 8.5 et 7, la coalition $\{A,B\}$ peut s'opposer à ce partage car $x\{A,B\} = 3$ alors que $v\{A,B\} = 4$. Pour appuyer son objection, elle peut proposer l'imputation (2,2,2) qui est à la fois meilleure pour chacun de ses membres et réalisable. On dit alors que $\{A,B\}$ préfère (2,2,2) à (1.5,1.5,3) et que l'imputation (1.5,1.5,3) est dominée parce que bloquée par $\{A,B\}$. En rejetant toutes les imputations dominées, on écarte toute possibilité de contestation de groupe et on obtient le *coeur*(ou noyau) du jeu,défini donc comme suit:

Définition 2.6 (Noyau). *L'ensemble des imputations qui ne sont dominées par aucune coalitions est appelé le* Noyau *du jeu.*

Une caractérisation des imputations (si elles existent)qui appartiennent au *noyau* est ennoncée par le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Une imputation $x = (x_i,...,x_n)$ appartient au Noyau d'un jeu coopératif TU $< N,v >$ si et seulement si:*

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall S \subseteq N \tag{2.13}$$

Si on note $C(N,v)$ le coeur du jeu ,on aura :

$$C(N,v) = \{x \in I(N,v) : x(S) \geq v(S) \text{ pour chaque } S \subseteq N\} \qquad (2.14)$$

Le noyau, proposé par Gillies, a la propriété de satisfaire toutes les coalitions dans la mesrure où aucune d'elle ne peut augmenter son gain. Par contre, le noyau peut être vide.

Interprétation:

Une imputation x est (aurait été) réalisable pour une coalition non vide S si $x(S) \leq v(S)$. Autrement dit, la coalition S peut (aurait pu) se garantir une valeur au moins aussi grande que $x(S)$ sans l'aide de joueurs extérieurs à S. Une coalition S préfère une imputation y à une imputation x si y est réalisable pour S et si $y(i) > x(i)$ pour chaque $i \in S$. On dit parfois que l'imputation x est bloquée par une coalition S lorsqu'il existe une imputation y que S préfère à x.

L'interprétation est la suivante: Supposons que les joueurs soient assis autour d'une table afin de négocier le partage de $v(N)$. Si une coalition de joueurs propose l'imputation x comme une solution possible du jeu TU, alors la coalition S refusera d'adopter x puisqu'il existe une autre imputation y réalisable par S et qui améliore le gain de chacun de ses membres. Autrement dit, il existe un autre partage de $v(N)$ sur lequel la coalition S aurait pu se garantir sa part sans l'aide des autres joueurs.

Le coeur d'un jeu TU peut être vide, comme il peut être un ensemble comme le montrent les exemples suivants:

Exemple 2.3 (Solution unique). *Jeu du marché*

Un produit a un seul acheteur potentiel (le joueur 1) mais a deux fabriquants (les joueurs 2 et 3). Les transactions impliquant nécessairement le joueur 1 et celui-ci pouvant obtenir tout ce qu'il souhaite d'un seul fabriquant, la fonction caractéristique v du jeu est telle que:

$$v(123) = v(12) = v(13) = 1; v(S) = 0 \text{ sinon.}$$

Quelles sont les contraintes caractérisant d'appartenance d'une allocation $x = (x_1,x_2,x_3)$ au coeur? Quel est le coeur du jeu?.

Réponse:

L'allocation $x = (x_1,x_2,x_3)$ appartient au coeur si et seulement si:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 & ....(1) \\ x_1 + x_2 \geq 1 & ....(2) \\ x_1 + x_3 \geq 1 & ....(3) \\ x_2 + x_3 \geq 0 & ....(4) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 & \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x = 1 - x_2 - x_3$$

On remplace x_1 dans (2) on obtient: $x_3 \leq 0$,or $x_3 \geq 0$ d'où

$$x_3 = 0$$

En remplaçant x_3 par 0 dans (1),(3) et (4) on aura :

$$x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0 \text{ et } x_1 + x_2 = 1$$

Ce qui donnera comme solution:

$$x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 0$$

La solution du problème $x = (1,0,0)$ est unique. le coeur du jeu est donc le singleton $\{(1,0,0)\}$.

Exemple 2.4 (Plusieurs solutions). Pour l'exemple (2.1), une allocation (x_1,x_2,x_3) est dans le coeur si:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 & ....(1) \\ x_1 + x_2 \geq 4 & ....(2) \\ x_1 + x_3 \geq 3 & ....(3) \\ x_2 + x_3 \geq 2 & ....(4) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 & \end{cases}$$

Cela ne donne pas de solution unique, puisque plusieurs propositions de partage vérifient ces conditions, par exemplel'allocation égalitaire (2,2,2), ou des solutions extrême comme (4,2,0),(3,3,0) et (4,0,2).

Exemple 2.5 (coeur vide). L'exemple (2.2) est un cas typique d'un jeu de vote ayant un coeur vide. Cela vient de l'absence dans ce jeu d'un détenteur de droit de veto, c'est-à-dire d'un joueur présent dans toutes les coalitions gagnantes. En effet, les groupes $\{1,2\}$,$\{1,3\}$,$\{1,2,3\}$ et $\{2,3,4\}$ ont tous la capacité d'emporter la décision. Toute solution appartenant au coeur doit donc satisfaire la rationalité collective de ces quatre coalitions. En particulier, elle doit distribuer des parts dont la somme est égale à 1 à la fois à {1,2}, {1,3} et {1,2,3}. Cela n'est possible qu'avec le partage (1,0,0,0,0). Mais cette proposition sera bloquée par {2,3,4}, on objectant par exemple l'imputation (0,0,1/3,1/3,1/3). Le coeur n'offre donc aucune aide aux actionnaires pour connaître leurs pouvoirs de décision respectifs.

Remarque 2.1. [4]

1. le coeur apporte rarement une solution définitive au problème de partage; il permet simplement de délimiter le domaine auquel doivent appartenir les solutions, en réduisant l'ensemble des imputations à sa partie stable(celles des propositions incontestables). En fonction de la comptabilité des contraintes , ce domaine peut être *infini* ou *vide*, et trés rarement réduit à un point unique.
2. De manière plus générale, pour que le coeur d'un jeu simple ne soit pas vide, il faut et il suffit qu'un au plusieurs joueurs détiennent un droit de véto. Des résultats comme ceux de Bondareva(1963) et Shapley(1971) ont permis d'identifier d'autre classes de jeux où le coeur n'est jamais vide. C'est le cas notamment des jeux dits *convexes.*

2.3.2 Le nucléole

Définition 2.7. *L'idée du Nucléole proposé par Schmidler [7] est de minimiser le "sentiment d'insatisfaction" le plus élevé sur l'ensemble des coalitions qui est défini par:*

$$e(x,S) = v(S) - x(S).$$

Interprétation:

Pour chaque imputation $x \in I(N,v)$ et chaque coalition S, l'insatisfaction de S dans x défini par:

$$e(x,S) = v(S) - x(S).$$

Représente la différence entre la valeur que peut produire S sans l'aide de joueurs extérieurs et la part de $v(N)$ qu'elle reçoit dans x. Si on s'accorde à dire que S juge satisfaisante une imputation x pour laquelle son insatisfaction $e(x,S)$ est négative ou nulle, alors le coeur du jeu (N,v) est l'ensemble des imputations jugées satisfaisantes par toutes les

coalitions envisageables.
Pour chaque imputation x, il existe donc 2^n valeurs d'insatisfaction, une pour chaque coalition S (y compris la grande coalition et la coalition vide pour lesquelles l'insatisfaction est nulle). Il est utile d'ordonner les insatisfactions de la plus grande à la plus petite dans un vecteur noté $e(x) = e_1(x),...,e_{2^n}(x)$. La coalition S telle que $e(x,S) = e_1(x)$ est donc la coalition ayant le sentiment d'insatisfaction le plus marqué sur x. Par ailleurs, notons $S_{k,s}$ la coalition telle que $e(x,S_{k,x}) = e_k(x)$, c'est-à-dire que $S_{k,s}$ est la k^{eme} coalition la plus insatisfaite sur x. Afin de comparer deux imputations x et y, on utilise le vecteur e. Une imputation x est au moins aussi satisfaisante qu'une imputation y s'il n'existe pas $l \in \{1,...,2^n\}$ tel que

$$e_l(x) > e_l(y) \text{ et } e_k(x) = e_k(y) \text{ pour chaque } k < l$$

Autrement dit, les $l-1$ niveaux d'insatisfactions les plus élevés listés par $e(x)$ et $e(y)$ sont identique, mais la l^{eme} coalition la plus insatisfaite n'est pas plus insatisfaite dans x que dans y. La comparaison entre x et y est donc *lexicographique*: tout d'abord, on compare $e_1(x)$ et $e_1(y)$. Si les deux quantités sont différentes, on conclut. Si les deux quantités sont égales, on compare ensuite $e_2(x)$ et $e_2(y)$, et ainsi de suite.
Pour un jeu (N,v) l'imputation $x \in I(N,v)$ pour chaque x qui atteint son minimun léxicographiquement est appelé Le nucléole $N(N,v,x)$ qu'on défini par:

$$N(N,v) = \{x \in I(N,v) : x \succ y \text{ pour chaque } y \in I(N,v)\} \qquad (2.15)$$

c'est-à-dire, l'ensemble des imputations x qui sont au moins aussi satisafaisantes que tout autre imputation de $I(N,v)$.

Définition 2.8. *On peut ordonner deux imputations x et y léxicographiquement. $x <_l y$ si $e(x)_j = e(y)_j$ pour tout $1 \leq j < i$ et $e(x)_i < e(y)_i$ pour un certain i.*
On pose $e(x)$ tel que $e(x)_i \geq e(x)_j$ pour tout $i \leq j$
$e(x)$ est un vecteur de dimension 2^n.

Exemple 2.6. Soit $TU(N,v)$ un jeu à somme nulle de trois joueurs, qui peuvent former des coalitions. Si un joueur coopère avec un autre, leurs gain total est 1 et le troisième joueur perd 1. Si ils ne coopèrent pas, ils perdent 1. Alors on a le jeu coopératif suivant:

$$v(1) = v(2) = v(3) = -1, \;\; v(12) = v(23) = v(13) = 1$$

Soient $x^1 = (1/2,1/2,-1)$, $x^2 = (-1,1/2,1/2)$ et $x^3 = (0,0,0)$.

S	$v(S)$	x^i	$e(v_S,x_i)$	$e(v_S,x^1)$	$e(v_S,v^2)$	$e(v_S,v^3)$
1	-1	x_1	$-1-x_1$	$-3/2$	0	-1
2	-1	x_2	$-1-x_2$	$-3/2$	$-3/2$	-1
3	-1	x_3	$-1-x_3$	0	$-3/2$	-1
12	1	x_1+x_2	$1-(x_1+x_2)$	0	$3/2$	1
13	1	x_1+x_3	$1-(x_1+x_3)$	$-1/2$	$3/2$	1
23	1	x_2+x_3	$1-(x_2+x_3)$	$-1/2$	0	1
123	0	$x_1+x_2+x_3$	$-(x_1+x_2+x_3)$	0	0	0
$\emptyset$	0	0	0	0	0	0

$e(x^1) = (-3/2,-3/2,0,0,-1/2,-1/2,0,0)$
$e(x^2) = (0,-3/2,-3/2,3/2,3/2,0,0,0)$
$e(x^3) = (-1,-1,-1,1,1,1,0,0)$
On remarque que

$$\left\{\begin{array}{l} x^1 <_l x^2 \\ x^1 <_l x^3 \\ x^3 <_l x^2 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x^1 <_l x^3 <_l x^2$$

Existence et unicité
A priori, la définition que nous venons de donner tend à ranger le Nucléole parmi les solutions ensemblistes comme le coeur. En effet, rien à priori ne garantit que le Nucléole soit non vide ni qu'il s'agit d'une unique imputation, cependant, Schmidler [7] montre dans les deux théorème suivants l'éxistence et l'unicité du Nucléole.

Théorème 2.2. *Pour chaque jeu $TU(N,v)$, le Nucléole est non vide.*

Preuve 2.1. Le théorème est prouvé pour la classe des jeux sur-additifs. La preuve du cas générale peut être trouvée dans l'article de Schmeidler [7]. Notons $I_0 = I(N,v)$.
L'ensemble I_0 est compacte par la sur-additivité de (N,v) et la fonction $e(x,S)$ est continue en x. Ainsi, l'ensemble I_1 des imputations x qui satisfont

$$\min_{x \in I_0} \max_{S \in 2^N} e(x,S) \tag{2.16}$$

est non vide et compacte. L'ensemble I_1 contient toute les imputations dont l'insatisfaction la plus élevée parmi les coalitions est minimale. Par conséquent, $N(N,v) \subseteq I_1$. Ensuite, notons I_2 l'ensemble des imputations x qui satisfont

$$\min_{x \in I_1} \max_{S \in 2^N \quad S_{1,x}} e(x,S) \tag{2.17}$$

ou $S_{1,x}$ est la coalition telle que $e(x,S_{1,x}) = e_1(x)$. Comme pour I_1, l'ensemble I_2 est non vide et compacte. On peut répéter ces étapes 2^n fois de sorte que I_k et l'ensemble des imputations x qui satisfont

$$\min_{x \in I_{k-1}} \max_{S \in 2^N \quad S_{1,x},\ldots,S_{k-1},x} e(x,S) \qquad \text{pour chaque } k = 2,\ldots,2^n \tag{2.18}$$

Cet ensemble est non vide pour chaque $k = 2,\ldots,2^n$.
Il contient toute les imputations dont les insatisfactions des k coalitions les plus insatisfaites sont minimales. Par conséquent,

$$\emptyset \neq I_{2^n} = N(N,v)$$

Théorème 2.3. *Pour chaque jeu TU(N,v), le Nucléole est un ensemble singleton.*

Preuve 2.2. Par contradiction, supposons que le Nucléole contienent deux imputations x et y telles que $x \neq y$. Puisque $x \neq y$, il existe au moins une coalition S telle que $e(x,S) \neq e(y,S)$. Par conséquent, il existe un indice minimal $k^* \in 1,\ldots,2^n$ pour lequel $e_{k^*}(x) \neq e(y,S_{k^*,x})$. Par conséquent,

$$e_k(x) = e(y,S_{k,x}) \tag{2.19}$$

pour chaque $k < k^*$, ce qui implique

$$e_{k^*}(x) > e(y,S_{k^*,x}) \tag{2.20}$$

Par ailleurs, par définition du vecteur e, on a

$$e_{k^*} > e_l(x) \tag{2.21}$$

Pour chaque $l > k^*$. Enfin, pour chaque $l > k^*$,$S_{l,x} \neq S_{k,y}$ quel que soit $k < k^*$ (chacune des $k^* - 1$ coalition les plus insatisfaites par y). Ceci implique

$$e_{k^*}(y) = e_{k^*}(x) \geq e(y,S_{l,x}) \tag{2.22}$$

Construisons l'imputation $z = (x + y)/2$. L'imputation z satisfait les trois proporiétés suivantes:

– en utilisant (2,6), on obtient:

$$e(z,S_{k,x}) = e_k(x) = e_k(y)$$

– en utilisant (3,7), on obtient:

$$e(z,S_{k^*,x}) = \frac{e(x,S_{k^*,x})+e(y,S_{k^*,x})}{2} < e_{k^*}(x)$$

– en utilisant (3,8) et (3,9), on obtient:

$$e(z,S_{l,x}) = \frac{e(x,S_{l,x})+e(y,S_{l,x})}{2} < e_{k^*}(x)$$

pour chaque $l > k^*$.

Au total, on a donc $l \not\succ z$, ce qui contredit le fait que x appartienne au Nucléole du jeu $TU(N,v)$.

Une autre propriété intéressante du Nucléole est qu'il sélectionne un élément du coeur chaque fois que le coeur $IC(N,v)$ d'un jeu TU est non vide.

Calcul du Nucléole:

Le Nucléole peut être trouvé par la résolution d'une série de problèmes PL:

Algorithme de résolution:

Premièrement, on résout le PL suivant:

$$\begin{cases} min x_0; \\ x_i \geq v(i) \quad \forall i \in N; \\ x_0 + \sum\limits_{i \in S_j} x_i \geq v(S_j) \qquad \forall S_j \subseteq N \\ \sum\limits_{i \in N} x_i = v(N) \end{cases} \tag{2.23}$$

On trouve un ensemble X^0 pour chaque x^0 qui atteint son minimum. Par ce que $v(\emptyset) = 0$ on a $x_0 \geq 0$. On sais que $\mid x^0 \mid \geq 1$. Si $\mid x^0 \mid = 1$ on trouve le Nucléole. Sinon, on prend $S^0 = \{S \mid \sum\limits_{i \in S} x_i = v(S), \forall x \in X^0\}$. Maintenant, on résout le problème PL suivant pour $k = 0$:

$$\begin{cases} min x_0 \\ x_i \geq v(i) \quad \forall i \in N \\ x_0 + \sum\limits_{i \in S_j} x_i \geq v(S_j \qquad \forall S_j \subseteq N, S_j \in S^k \\ \sum\limits_{i \in N} x_i = v(N); \\ x \in X^k \end{cases} \tag{2.24}$$

Ceci nous donne l'ensemble X^{k+1}. Si $\mid X^{k+1} \mid$=1 on trouve le Nucléole. Sinon, on prend $S^{k+1} = \{S \mid \sum\limits_{i \in S} x_i = v(S), \forall x \in X^k\}$. et on utilise le même algorithme que précédement.

Exemple 2.7. On se réfère à un jeu à somme nulle de trois joueurs:
$v(i) = -1$
$v(12) = v(23) = v(13) = 1$

On applique l'algorithme:

$$\begin{cases} min \quad x_0 \\ x_i \geq -1 \quad \text{pour} \quad \text{i}\in\{1,2,3\} \\ x_0 + x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_0 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_0 + x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 \geq 0 \end{cases} \tag{2.25}$$

En applliquant la méthode du simplexe on aura:
$X^0 = (1,0,0,0,0,0,0,0,0)$ Avec ce problème PL, on trouve $X_0 = (1,0,0,0)$
Par ce que X_0 est une valeur unique. On conclut donc que
$N(v) = (0,0,0)$

2.3.3 La valeur de Shapley:

Définition 2.9. *Une règle d'*allocation *est une fonction ϕ qui associe une unique allocation $\phi(N,v) \in R^n$ à chaque jeu $TU(N,v)$. Comme pour chaque allocation, on note $\phi(N,v)(S) = \sum_{i \in S} \phi(N,v)(i)$ pour chaque $S \subseteq N$.*

Dans cette section, on s'intéresse à la valeur de shapley qui diffère des autres solutions, dans la mesure où elle consiste en une évaluation a priori du jeu plutôt que d'être le résultat du jeu. Cette caractéristique en fait une solution qui, en quelque sorte, dispense de jouer. Pour mieux saisir sa motivation. Le point de départ de cette solution est un ensemble d'axiomes souhaitables que la règle d'allocation doit satisfaire. L'objectif est alors de montrer qu'il existe une unique règle d'allocation qui satisfait l'ensemble d'axiomes suivant:

- Efficience (EFF): $\phi(N,v)(N) = v(N)$.
L'axiome **EFF** requiert, pour chaque jeu TU, que la règle d'allocation distribue la totalité de la valeur de la valeur de la grande coalition à l'ensemble des joueurs. Autrement dit, $\phi(N,v)$ est une allocation efficiente pour chaque jeu $TU(N,v)$.

-Symétrie (SYM2): On dit de deux joueurs i et j qu'ils sont *symétrique* dans un jeu $TU(N,v)$ si $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ pour chaque coalition $S \subseteq N \backslash \{i,j\}$, alors $\phi(N,v)(j) = \phi(N,v)(j)$.
L'intuition de l'axiome **SYM2** est que deux joueurs dont la contribution marginales aux coalitions sont identiques doivent recevoir la même part de $v(N)$.
-Nullité (NUL): Un joueur i est un joueur nul (à impacte nul) dans (N,v) si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ pour chaque $S \subseteq N \backslash \{i\}$, alors $\phi(N,v)(i) = 0$.
L'axiome **NUL** requiert simplement qu'un joueur dont chacune des contributions marginales est nulle se voit attribuer une part nulle de $v(N)$.

- Additivité (ADD): Si (N,v) et (N,w) sont deux jeux TU à n joueurs, alors $\phi(N,v+w) = \phi(N,v) + \phi(N,w)$.

L'axiome **ADD** signifie que la valeur de la somme de deux jeux TU à n joueurs est la somme des valeurs des deux jeux en questions.

Notons $s =\mid S \mid$ la taille de la coalition S et n le nombre total de joueurs. Shapley montre que ces quatre axiomes suffisent à déterminer de manière unique une valeur pour la classe des jeux TU.

Théorème 2.4. *IL existe une unique règle d'allocation qui satisfait les quatres axiomes (EFF), (SYM2), (NUL) et (ADD). C'est la valeur de Shapley qui associe, à chaque jeu $TU(N,v)$ et à chaque joueur $i \in N$, la valeur*

$$\phi_1(v) = \sum_{S \subseteq N : i \in S} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}[v(S) - v(S \setminus i)]. \tag{2.26}$$

Plutôt que de donner la preuve de ce théorème, nous utiliserons une autre axiomatique de la valeur de Shapley proposée par Hart et Mas-Collel. L'avantage de cette seconde approche est qu'elle repose sur un unique axiome. Mais auparavant, revenons sur l'interprétation de la valeur de Shapley.

Interprétation:
Supposons que les n joueurs forment la grande coalition en entrant dans une pièce un par un selon un ordre $w : N \rightarrow N$ (un ordre est une permuation de N). La grande coalition se forme donc en n étapes: le joueur $w(1)$ entre en premier dans la pièce, le joueur $w(2)$ entre en second et ainsi de suite. A chaque nouvelle arrivée dans la pièce d'un joueur i, le joueur i reçoit sa contribution marginale $v(S) - v(S \backslash \{i\})$ où S est la coalition formée par l'arrivée de i dans une pièce contenant les joueurs $S \backslash \{i\}$ arrivés aux $s-1$ premières étapes. Cependant, la quantité reçue par i est différente selon la permutation qui spécifie l'ordre d'arrivée des joueurs. La valeur de Shapley mesure simplement le gain moyen que reçoit le joueur i sur les $n!$ permutations possibles pour l'ensemble des joueurs. Précisément, $(s-1)!$ représente le nombre de permutations dif-

férentes qui spécifient aux joueurs de $N\backslash S$ d'entrer dans la pièce après les joueurs de S. Ainsi, $(s-1)!(n-s)!$ est le nombre de permutations spécifiant la formation de la coalition $S\backslash\{i\}$ de taille $s-1$ avant que i n'entre dans la pièce à l'étape s. Par conséquent, si on suppose que l'ordre d'arrivée des joueurs est choisi aléatoirement, $\dfrac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$ représente la probabilité que la coalition formée par l'arrivée de i soit précisément la coalition S de taille s.

Exemple 2.8. Soit $N = \{1,\ldots,6\}$

La contribution marginale[4] du joueur 1 à la coalition $\{1,2,4,5\}$ est $v(\{1,2,4,5\}) - v(\{2,4,5\})$. Si l'ordre d'arrivée des joueurs est choisi aléatoirement, quelle est la probabilité que $\{1,2,4,5\}$ se forme par l'arrivé du joueur 1 à la $4^{\text{ème}}$ étape de l'ordre d'arrivée des joueurs?

Réponse:

La coalition $\{2,4,5\}$ doit se former aux 3 premières étapes. Ceci est possible si l'ordre d'arrivée des joueurs spécifie que:

2 entre en premier dans la pièce, suivi de 4 puis de 5.

cela reste possible lorsque 2 entre en premier suivi de 5 puis de 4,

lorsque 4 entre en premier suivi de 2 puis de 5,

lorsque 4 entre en premier suivi de 5 puis de 2,

lorsque 5 entre en premier suivi de 4 puis de 2,

et enfin lorsque 5 entre en premier suivi de 2 puis de 4.

Il existe donc $6 = (|\{1,2,4,5\}| - 1)!$ permutations possibles pour les joueurs de $\{2,4,5\}$ aux trois premières étapes. Il faut également que les joueurs 3 et 6 entrent dans la pièce aux deux dernières étapes de l'ordre Soit 3 entre en 5^{eme} position et 6 entre en dernier, soit6 entre en 5^{eme} position et 3 entre en dernier.

Il existe $2 = (|\{3,6\}|)! = (n - |\{1,2,4,5\}|)!$ permutations possibles pour les joueurs $\{3,6\}$ aux deux dernières étapes. Le nombre de permutations qui spécifient la formation d'une coalition $\{2,4,5\}$ avant l'arrivée de i en 4^{eme} position est donc $2 \times 6 = 12$. Comme il y a $6! = 720$ permutations possibles des 6 joueurs, la probabilité qu'une permutation choisie de manière aléatoire spécifie la formation de la coalition $\{2,4,5\}$, puis l'arrivée du joueur 1 et enfin l'arrivée des joueurs de la coalition $\{3,6\}$ est 12/720. Autrement dit, lorsque l'ordre d'arrivée des joueurs est choisi aléatoire-

4. La contribution marginale d'une coalition i est défini par $v(s) - v(s\backslash\{i\})$

ment, la probabilité que le joueur 1 reçoive la contribution marginale $v(\{1,2,4,5\}) - v(\{2,4,5\})$ en entrant dans la pièce est

$$12/720 \simeq 1{,}67$$

Exemple 2.9. Allocation de coûts
Carreras [1] considère une fédération de trois villes voisines A,B et C en contact avec la société Bouygues Construction afin de construire un centre d'aprovisionnement en eau commun aux trois municipalités.Pourdes raisons géographiques,un contrat de construction proposé revient à 1 million d'euros pour chaque municipalité prise séparément.En revanche,Bouygues Construction offre un coût réduit de 1,86 millions d'euros pour un contrat commun entre les villes A,B et C et un un coût réduit de 1,9 millions d'euros pour un contrat commun entre les villes A,C.Enfin,le contrat impliquant les trois municipalités proposé par Bouygues Construction a un coût de 2,79 millions d'euros.

Cette situation peut être modélisée par un jeu $TU(N,v)$ où $N = \{A,B,C\}$ et où $v(S)$ représente l'économie de coût (en millier d'euros) réalisée par un contrat commun entre les membres de $S \subseteq N$ par rapport à la situation dans laquelle chaque ville de S signerait un contrat individuel.
Déterminer la fonction de coalition et la valeur de Shapley du jeu TU?.

Réponse:
Ainsi ,on a

$$\begin{gathered}
v(\{i\}) = 0 \text{ pour chaque } i = A,B,C. \\
v(\{A,B\}) = 2 \times 1000 - 1860 = 140, \\
v(\{A,C\}) = 2 \times 1000 - 1900 = 100, \\
v(\{B,C\}) = 0 \\
\text{et } v(N) = 3 \times 1000 - 2790 = 210.
\end{gathered}$$

Pour la ville A,on a

$$\begin{gathered}
Sh(N,v)(A) = \frac{2!0!}{3!}[v(\{A\}) - v(\emptyset)] + \frac{1!1!}{3!}[v(A,B) - v(B)] + \\
\frac{1!1!}{3!}[v(\{A,C\}) - v(C)] + \frac{0!2!}{3!}[v(N) - v(B,C)] = \\
\frac{2}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times 140 + \frac{2}{6} \times 210 = 110.
\end{gathered}$$

De la même manière,on obtient

$$Sh(N,v)(B) = 60 \text{ et } Sh(N,v)(C) = 40$$

Chapitre 3

Application

Ce chapitre repose sur l'article [3] où les auteurs modélisent une situation réelle par la théorie des jeux coopératifs. Elle consiste en une formation de réseaux par des institutions bancaires de Royaume Uni, pour permettre à leurs clients d'avoir accès aux distributeurs de toutes les banques dans le réseau. Les questions qui seront posées et auxquelles le modèle de théorie des jeux tentera de répondre:

- comment se coaliser pour former ces réseaux;
- comment distribuer équitablement les coûts engendrés par les transactions des clients de différentes banques dans le réseau.

3.1 Introduction

Les ATM [1] sont devenus l'un des moyens les plus utilisé par les banques pour distribuer de l'argent cash à leurs clients. Les institutions financières ont trouvé leurs intérêts à se regrouper en réseau pour de multiples raisons : leurs clients ont accès à plusieurs machines, le réseau permet la continuité du service aux clients même en cas de panne de leurs propres machines, ainsi que des économies considérables en comparaison avec l'expansion de leur propre réseau.

Le réseau des ATMs au Royaume Uni utilisent des frais d'interchange pour ajuster le déséquilibre d'utilisation du réseau par les clients de différentes banques. Ainsi, à chaque fois qu'un client d'une banque i utilise un distributeur d'une banque j, la banque i paie des frais f_{ij} pour la banque j pour couvrir le travail impliqué dans l'entretien des ATM ainsi

1. ATM: automated teller machine qui représente les distributeurs automatique

que le service fourni aux clients de la banque i. Ces frais sont négociés en une séries d'accords bilatéraux, révisé quand de nouveaux membres rejoignent le réseau.

Dans tout système basé sur des accords historiques avec la renégociation régulière, il existe une réticence à apporter des changements majeurs, et par conséquent l'accord initial a une importance excessive en particulier quand il y a de nouveaux partenaires qui rejoignent le réseau. L'ordre en chaque organisme qui rejoint le réseau devient très importante. Une méthode alternative pour déterminer les frais appropriés pour l'usage du réseau sera de modéliser le système en un jeu coopératif à n joueurs.
Dans un tel modèle, on s'intéressera à la force des différentes coalitions des joueurs, ce que chaque coalition peut se garantir et donc quelles coalitions sont susceptibles de se former. On considérera alors quelle est la répartition du gain total entre les joueurs compatible avec les coalitions formées.

Deux solutions sont particulièrement appropriées dans ce contexte; la valeur de Shapley et le nucleolus. La valeur de Shapley présentés au deuxième chapitre. Le Nucleole est plus un concept de " sécurité sociale" dans les organismes qui sont les plus lésés.

3.2 Présentation du problème:

On considère un réseau d'ATM qui compte n organismes financiers $1,2,\ldots,n$.
L'objectif est de développer un modèle de coût liés à des retraits d'espèces par les clients de ces organismes quand ils sont regroupés dans un réseau commun. Dans le modèle qui sera développé, il est supposé que le coût moyen des retrait non-ATM est fixe.
Les notations pour le modèle sont les suivantes, où le mot "banque" est utilisé comme une description pour toutes institution financière avec des ATM,

S: sous ensemble de $N = \{1,\ldots,n\}$ (N représente l'ensemble complet $\{1,\ldots,n\}$),

c(S): coût total des prestations de service pour les clients des banques de la coalition S lorsque le réseau ne concerne que les banques en S.

$\mathbf{d_j}$: coût fixe annuel d'une ATM opérationnelle d'une banque j

$\mathbf{t_j}$: nombre total d'ATM que possède une banque j.

$\mathbf{c_{ij}}$: coût variable d'une transaction par un client d'une banque i utilisant l'ATM d'une banque j.

$\mathbf{n_{ij}}$: le nombre de transactions effectuées chaque année par les clients d'une banque i sur des ATM d'une banque j.

k: le coût moyen des retraits cash par d'autres moyens que les ATM.

$\mathbf{m_j}$: le nombre de retraits cash par des moyens autres que des ATM effectués chaque année par les clients de la banque j.

Le coût total de la prestation de services est considéré comme la somme des coûts fixes pour maintenir les ATMs opérationnelles, les coûts variables des transactions ATM et les coûts de retraits d'espèces par d'autres moyens que les ATMs. Ce qui donne la formule suivante:

$$c(N) = \sum_{j \in N} R_j = \sum_{j \in N} (d_j t_j + m_j k + \sum_{i \in N} c_{ij} n_{ij}), \tag{3.1}$$

où R_j est le coût engendré par la banque j pour l'entretien de ses machines d_j, le traitement des transactions non-ATM m_j ainsi que les transactions n_{ij} des clients d'une banque i, $i = 1, \ldots, n$.

Dans le but de modéliser ce problème en un jeu, on doit mettre des hypothèses sur ce que les clients ferons si le réseau était plus grand.
Si la banque j quitte le réseau, que feront les clients qui utilisent les ATM de la banque j à la place de ces trasactions. Nous ne nous intéresserons pas aux clients de la banque j vu que cette dernière n'est plus membre du réseau (ils peuvent par ailleurs utiliser des méthodes de retraits cash non-ATM ou alors simplement utiliser les ATM appartenant à leurs banque). Ce qui nous importe c'est les clients des banques restantes dans le réseau et qui utilisent les ATM de la banque j. Ils leurs reste l'option d'utiliser les ATM de leurs propre banque ou les ATM des banques restantes dans le réseau, ou choisir une méthode non-ATM d'un service de provision.
On admet que:

- **Une proportion** $(1-\alpha)$ de ces transactions déplacées seront remplacées par des transactions non-ATM.

- **Une proportion** α des transactions seront remplacées par d'autres transactions effectuées sur des distributeurs des autres banques qui sont toujours dans le réseau. La répartition de cette proportion pour les clients de la banque i entre les ATM des banques restantes dans le réseau est proportionnelle à l'usage de ces ATM par les clients de la banque i quand le réseau concerne toutes les banques.

Ainsi on définit

- $n_{ij}(S)$ comme le nombre de transactions effectuées chaque année par les clients de la banque i utilisant les ATM de la banque j quand le réseau compte les banques de la coalition S quand i et j sont membres de S.

- $m_i(S)$ sera le nombre des transactions non-ATM effectuées chaque année par les clients d'une banque i quand le réseau compte la coalition S, qui inclut i.

Donc

$$n_{ij}(S) = n_{ij} + \alpha \sum_{k \notin S} n_{ik} \frac{n_{ij}}{\sum\limits_{r \in S} n_{ir}}, \tag{3.2}$$

$$m_i(S) = m_i + (1-\alpha) \sum_{k \notin S} n_{ik}. \tag{3.3}$$

Notons que:
$n_{ij}(N) = n_{ij},\;\; m_i(N) = m_i,\;\; n_{ii}(i) = n_{ii} + \alpha \sum\limits_{k \neq i} n_{ik}$
et $m_i(i) = m_i + (1-\alpha) \sum\limits_{k \neq i} n_{ik}$.
Cela signifie que α des transactions ATM faites par les clients des autres banques qui ont quitté le réseau serons remplacées par des transactions ATM des banques restantes. Peut importe que le réseau devienne petit. $(1-\alpha)$ des transactions seront remplacées par des transactions non-ATM si elle ne peuvent être entreprises par leurs ATM actuelles.
Avec ces définitions $c(S)$, le coût quand il y a un réseau d'ATM comportant les banques en coalition S est définis par

$$c(S) = \sum_{j \in S} (d_j t_j + m_j(S)k + \sum_{i \in S} n_{ij}(S)c_{ij}). \tag{3.4}$$

$c(S)$ est le coût des clients des banques de S si celles ci se mettent d'accord pour former un réseau ATM contenant les ATMs de toutes les banques de S. Il pourrai être moins coûteux pour les banques en S si elles décident de former deux ou plusieurs réseaux ATM séparés et ne pas utiliser le réseau contenant toutes les banques de S. La valeur de la fonction caractéristique, $v(S)$, du jeu est le moyen le moins coûteux de servir les clients des banques de la coalition S.
Posons $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_t\}$ une partition de S, et P l'ensemble de toutes les partitions

$$v(S) = \min_{T \in P} \{\sum_i c(T_i)\}. \tag{3.5}$$

Notons que le coté droit de l'équation représente le réseau le moins coûteux ou l'ensemble des réseaux impliquant les banques dans le groupe S.

1. Si $k > c_{ij}$ pour tout i et j, alors il existe un α^* tel que pour tout $\alpha < \alpha^*$, $v(S) = c(S)$ tel que le plus grand réseau qui pourra opérer sera le meilleur.
   dans le cas particulier où

2. $c_{ij} = \{c_d \text{ si } i \neq j; c_s \text{ si } i = j\}$
   avec

$$k > c_d > c_s \text{ et } c_d < (1 - \alpha)k + \alpha c_s \text{ pour tout i} \tag{3.6}$$

Alors encore $v(S) = c(S)$ et le réseau maximum est toujours l'optimal.

Étant donné la valeur de la fonction caractéristique $v(S)$, une issue du jeu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une imputation qui représente la répartition des coûts entre les joueurs (les banques), où chaque banque i doit payer un coût x_i. Les deux solutions les plus favoris dans le sens où elles donnent une répartition équitable des coût entre les joueurs, sont la valeur de Shapley et le nucléole déjà présentées au chapitre 2.

3.3 Frais d'interchange

La section précédente décrit comment la théorie des jeux arrive à déterminer les coûts équitables à payer par chaque banque dans le réseau. Ces coûts se constituent les coûts réel encourus par les banques et les paiements bilatéraux entre les banques, où le coût réel de la banque j est R_j défini par la formule (3.1). Ainsi donc, si le modèle de la théorie des jeux suggère que la banque j devra payer x_j, alors la banque j doit aux différentes banques une somme de $(x_j - R_j)$.
L'objectif de cette section est de définir les différentes manières de déterminer ces paiements bilatéraux.
Il y a plusieurs façons pour le réseau de s'assurer que chaque banque paie un coût équitable pour l'utilisation du réseau plutôt que le coût réel encouru par cette banque. Les deux plus évidentes sont

1. **Frais d'interchange de transaction:** Chaque membre de la coalition prélève une taxe sur chaque transaction effectuée sur ses distributeurs automatiques de billets par les clients des autres banques de la coalition. Les frais sont choisis de sorte que l'effet net des frais d'honoraires, les honoraires et les coûts réels engagés est une répartition équitable du coût total. Ces frais sont réglés quotidiennement ou annuellement.
2. **Frais d'adhésion à une coalition:** chaque membre d'une coalition paie ou reçoit des frais d'adhésion au réseau, dépendant de son coût dans la coalition. Les frais sont choisis de façon à ce que l'effet net soit une répartition équitable du coût total et les frais d'adhésion sont réglés sur une base périodique.

C'est cette dernière option qui a été retenue par tous les réseaux du Royaume Uni, et donc l'étude qui suivra en tiendra compte. Si f_{ij} représente les frais que reçoit une banque j pour toute transaction sur ses ATM effectuée par les clients de la banque i, avec $f_{ii} = 0$, alors un partage équitable des coût est réalisé lorsque

$$x_j - R_j = \sum_{i \neq j} n_{ji} f_{ji} - \sum_{i \neq j} n_{ij} f_{ij}, \;\; j = 1,2,\ldots,n. \tag{3.7}$$

Notons que $\sum\limits_j x_j = v(N) = \sum\limits_j R_j$ et donc il y a seulement $n - 1$ équations indépendantes en (3.7). Le système d'équations (3.7) admet plusieurs différentes solutions puisqu'il y a $n(n-1)$ inconnus pour résoudre $(n-1)$ équations, cela induit donc plusieurs différents ensembles de frais d'inter-change résultants du partage équitable du coût total entre les banques. Dans le souci de réduire ce nombre ou d'obtenir une seule solution, d'autres conditions sur les frais d'interchange sont imposées.

1. **Frais d'échange uniforme:**$f_{ij} = f$, malheureusement, cela permet de résoudre un système à $n-1$ équations et un inconnu, ce qui ne donnera pas une répartition équitable des coûts.

2. **Taxe uniforme pour l'usage des ATM d'une banque par les clients des autres banques :** $f_{ij} = f_j$, $\forall i,j$. Cela impliquera n inconnus pour résoudre les $n-1$ équations ce qui est réalisable. c'est un élément d'équité; tous les clients sont facturés au même coût pour le même service (utilisation de l'ATM de la banque j), mais il n'est pas favori en pratique.

3. **Taxe uniforme pour l'usage des clients d'une banque des ATMs des autres banques:** $f_{ij} = f_i$, $\forall i,j$. Ce qui permet à nouveau toutes les redistributions possibles des coûts requis. Ceci est presque équivalent aux frais annuels d'adhésion des banques, mais encore une fois, il n'est pas favori en pratique.

4. **Les frais d'inter-change bilatéraux uniformes:** $f_{ij} = f_{ji}$, $\forall i,j$. Ceci réduit le nombre de variable dans 3.7 à $\frac{1}{2}\, n(n-1)$, ce qui permet un plus grand nombre de solutions indépendantes. Un nombre de choix indépendant de frais d'inter-change qui donne la même distribution des coûts. Cette condition est la seule qui se produit fréquemment en pratique par ce que la structure des frais étant fixé par des négociations bilatérales.

Même avec les conditions 2,3 et spécialement la 4, il reste un nombre de choix possible de frais d'inter-change qui donne la distribution des coûts requis. D'autres conditions pourront être imposées pour obtenir une solution unique.

5. $f_{ij} \geq 0$, $\forall\ i,j$. Ça semble raisonnable que les banques paient l'utilisation des ATM par ses clients.

6. min $\max\limits_{ijkl}(|f_{ij} - f_{kl}|)$. Cette condition est dans le même esprit que les frais d'inter-change uniforme et essaye de trouver l'ensemble des

frais d'inter-change avec le minimum de différences entres eux.

3.4 Exemple pratique:

L'exemple suivant est basé sur des données d'un réseau de quatre banques de Royaume Uni modifié légèrement pour des raisons de confidentialité.
Les coûts composants sont nombreux et inclut le coût capital des ATM, la sécurité de l'équipement, l'infrastructure de la télécommunication, les ordinateurs centraux, et les périphériques comme trieurs de notes. Il y a des coûts de revenus impliquant la maintenance hardware et software, les coûts de fonctionnement de la technologie-location de lignes, système d'alarme, opérations personnels-service ATM, location du site ainsi que l'assurance, puissance, papeterie, commercialisation, fraude, et éléments administratifs. Le coût du service des clients par d'autres moyens que les ATM, k, notoirement complexe et ouverte à la subjectivité, nous avons donc pris comme une première approximation le coût des retraits cash au guichet.

3.4.1 Hypothèses et données du modèle

Les hypothèses émises dans ce modèles sont:

- Toutes les banques ont le même coût variable des transactions ATM (c_{ij} est le même pour toutes les banques), qui est moins cher pour ses clients que pour ceux des autres banques. On suppose donc

$$c_{ij} = \; c_s \quad \text{si} \quad i = j; \;\; c_d \quad \text{si } i \neq j \; . \tag{3.8}$$

- Il est supposé que toutes les institutions ont le même coût fixe des ATM opérationnelles, i.e. $d_j = d$ pour tout j.
- Le coût des opérations non-ATM est le même pour tous les clients, en d'autres termes $k_j = k$ pour tout j.

Ces coûts sont basés sur des coûts estimé par l'une des quatre institutions et sont fixés à

ATM de banque: $\rightarrow$ Utilisateurs de banque:$\downarrow$	1	2	3	4	Total
1	157	30	0.7	3.2	190.9
2	35	134	0.9	3.5	173.4
3	2.2	1.6	32	7.5	43.3
4	6.6	4.7	6.6	49	66.9
TOTAl	200.8	170.3	40.2	63.2	474.5

Tab. 3.1

$c_S = 0.15£$ par transaction,
$k = 0.75£$ par transaction,
$c_d = 0.25£$ par transaction,
$d = 8{,}500£$ par an,
$t_1 = 2672$,
$t_2 = 2439$,
$t_3 =398$,
$t_4 = 778$.

Le nombre de transactions annuelles (en million) effectuées sont montrés dans le Tableau 3.1. Rappelons qu'on considère la transaction qui utilise l'ATM dans l'ensemble du réseau ($m_i = 0$ pour toutes les banques i) et donc $m_i(s)$ est donnée par l'équation (3.3) avec $m_i = 0$. Ce qui est nécessaire pour estimer α, la fraction des transactions ATM supprimées quand les banques quittent le réseau qui seront remplacées par des transactions ATM sur d'autres machines. Cette subjective estimation est de mettre $\alpha = 0.65$ initialement, mais le résultat doit être vérifié quant à la sensibilité de cette estimation.

3.4.2 Résolution

Sous les hypothèses et les données énoncées ci-dessus et l'estimation de la valeur de α, on remarquera que la condition (3.6) est vérifiée, ce qui entraîne donc $v(S) = c(S)$ pour tout S de $\{1,2,\ldots,n\}$. Ainsi, la valeur de la fonction caractéristique du jeu est comme suit :

$v(1) = 58\ \ 466\ \ 000$ $\qquad$ $v(2) = 55\ 015\ \ 500$
$v(3) = 12\ \ 251\ \ 000$ $\qquad$ $v(4) = 20\ \ 407\ \ 000$
$v(1,2) = 106\ \ 431\ \ 399$ $\qquad$ $v(1,3) = 70\ \ 455\ \ 629$
$v(1,4) = 77\ \ 922\ \ 094$ $\qquad$ $v(2,3) = 67\ \ 038\ \ 220$

$v(2{,}4) = 74\ \ 654\ \ 993$ $\qquad v(3{,}4) = 31\ \ 241\ \ 088$
$v(1{,}2{,}3) = 118\ \ 122\ \ 337$ $\qquad v(1{,}2{,}4) = 124\ \ 859\ \ 892$
$v(1{,}3{,}4) = 88\ \ 312\ \ 290$ $\qquad v(2{,}3{,}4) = 85\ \ 129\ \ 881$
$v(1{,}2{,}3{,}4) = 134\ \ 864\ \ 500.$

Les coûts réels dans ce cas sont:
$R_1 = 56{,}717{,}000,\quad R_2 = 50{,}061{,}500,$
$R_3 = 10{,}388{,}000,\quad R_4 = 17{,}698{,}000$,

La valeur de Shapley donne les "coûts" équitables suivants

$$X^{SV1} = \frac{0!3}{4!}[v(1) - v(\emptyset)] + \frac{1!2!}{4!}[v(1{,}2) - v(2)] + \frac{1!2!}{4!}[v(1{,}3) - v(3)] + \frac{1!2!}{4!}[v(1{,}4) - v(4)] + \frac{2!1!}{4!}[v(1{,}2{,}3) - v(2{,}3)] + \frac{3!0!}{4!}[v(1{,}2{,}3{,}4) - v(2{,}3{,}4)] + \frac{2!1!}{4!}[v(1{,}2{,}4) - v(2{,}4)] + \frac{2!1!}{4!}[v(1{,}3{,}4) - v(3{,}4)]$$

$X^{SV1} = 1/4(58466000) + 1/12(106431399 - (55015500)) + 1/12(70455629 - (12251000)) + 1/12(77922049 - (20407000)) + 1/12(118122337 - (67038220)) + 1/4(134864500 - (85129881)) + 1/12(124859892 - (74654993)) + 1/12(88312290 - (31241088))$

$X^{SV1} = 14616500 + 4284658{,}25 + 4850385{,}75 + 4792920{,}75 + 4257009{,}75 + 12433654{,}75 + 4183741{,}583 + 4755933{,}5 = 54\ \ 173\ \ 971$

$X^{SV1} = 54\ \ 173\ \ 971,\qquad X^{SV2} = 50\ \ 850\ \ 591$
$X^{SV3} = 11\ \ 179\ \ 944,\qquad X^{SV4} = 18\ \ 659\ \ 995.$

Et donc les différences respectives entre leurs coûts "équitables" et leurs coûts réels, $(X^{SVi} - R_i)$, sont:
$(-2\ \ 543\ \ 029;\quad 789\ \ 091;\quad 791\ \ 944;\quad 961\ \ 995)$
i.e. la banque 1 devra être payée 2,543,029£ au total par les banques 2,3 et 4.
Les résultats trouvés dans [3] pour le nucléole sont comme suit les coûts "équitables":

$X^{NC1} = 54\ \ 238\ \ 953,\qquad X^{NC2} = 50\ \ 88\ \ 453$
$X^{NC3} = 111\ \ 127\ \ 804,\qquad X^{NC4} = 18\ \ 709\ \ 290$

Et donc la différence respective entre les coûts "équitables" et les coûts réels, $(X^{NCi} - R_i)$, est:

(-2 478 047, 726 953, 739 804, 1 011 290).

La résolution du système 3.7 aboutit aux frais d'inter-change qui résultent de la répartition du coût correspondant à la valeur de Shapley. En imposant la condition 2, et les conditions 5 et 6 on obtient:

$f_{i1} = 0.2572, \quad f_{i2} = 0.2574,$
$f_{i3} = 0.2574, \quad f_{i4} = 0.2567.$

En imposant la condition 3, tel qu'une banque est chargée de la même peu importe quel ATM ses clients utilisent, et encore les conditions 5 et 6 conduisent à une solution

$f_{1j} = 0.2571, \quad f_{2j} = 0.2569$
$f_{3j} = 0.2569, \quad f_{4j} = 0.2576$

En imposant la condition 4 avec $f_{ij} = f_{ji}$ et exigeant la condition 5 et 6 on obtient la solution:

$f_{12} = 0.2558, \quad f_{13} = 0.2555, \quad f_{14} = 0.2591,$
$f_{23} = 0.2555, \quad f_{24} = 0.2591, \quad f_{34} = 0.2555.$

Les frais d'interchange correspondants au nucléole sont; premièrement, les conditions 2, 5 et 6 conduisent aux valeurs:

$f_{i1} = 0.2503, \quad f_{i2} = 0.2533,$
$f_{i3} = 0.2533, \quad f_{i4} = 0.2476,$

Quand aux conditions 3, 5 et 6 donnent:

$f_{1j} = 0.2503, \quad f_{2j} = 0.2496,$
$f_{3j} = 0.2496, \quad f_{4j} = 0.2546.$

Finalement, en imposant la condition 4 avec $f_{ij} = f_{ji}$ et en exigeant les conditions 5 et 6 on obtient:

$$f_{12} = 0.2428, \quad f_{13} = 0.2386,$$
$$f_{14} = 0.2665, \quad f_{23} = 0.2386,$$
$$f_{24} = 0.2665, \quad f_{34} = 0.2386.$$

Chapitre 4

Programmation

Qu'est ce que MATLAB?

MATLAB est un langage hautes performances pour le calcul scientifique et technique. Il intègre la possibilité de calculs, de visualisation et de programmation dans un environnement très simple d'emploi. Les résultats sont exprimés sous une forme mathématique standard. L'utilisation typique est:

- Calcul scientifique
- Développement d'algorithmes
- Acquisition de données
- Modélisation et simulation
- Analyse de données
- exploration et visualisation
- Graphisme scientifique
- Développement d'applications
- interface graphique (gui)

Définition 4.1. *MATLAB est un système interactif dont la brique de base est un tableau dont la taille n'est pas nécessairement connue. Ceci permet de résoudre des problèmes, en particulier ceux qui ont une formulation matricielle, en un minimum de temps (contrairement aux langages de bas niveau comme le C ou le fortran). Le nom de MATLAB est un résumé de "Matrix Laboratory". MATLAB a été à l'origine développé pour avoir un accès simple et rapide aux projets EISPACK et LINPACK. Aujourd'hui, MATLAB intègre les librairies LAPACK et BLAS, incorporant ainsi les dernières techniques pour le calcul matriciel. Dans l'enseignement universitaire, MATLAB s'est imposé comme un standard pour l'apprentissage de l'algorithmique scientifique. Dans* *l'industrie, il est l'outil de choix pour une productivité accrue en recherche et développement. MATLAB peut aussi être enrichi à l'aide de Toolbox (boites à outils) pour des problémes spécifiques.*

Le système MATLAB consiste en cinq parties majeures :

1. **Environnement de développement** C'est un ensemble d'outils pour l'utilisation des fonctions MATLAB et des fichiers. La plupart de ces outils sont des interfaces graphiques. Ils incluent le bureau MATLAB et la fenêtre de commande, un historique des commandes, un éditeur et un débuggeur, et un navigateur pour voir l'aide, l'espace de travail (workspace), les fichiers, et le chemin.

2. **La librairie de fonctions MATLAB** C'est une grande collection d'algorithmes de calcul allant de fonctions élémentaires comme les sommes, les sinus et cosinus et l'arithmétique complexe, jusqu'aux fonctions plus sophistiquées comme l'inverse de matrices, le calcul de valeurs propres, les fonctions de Bessel et la transformée de Fourier.

3. **Le langage MATLAB** C'est un langage de haut niveau sous forme matrice/vecteur. Il comporte des structures de contrôles, des fonctions, des structures de données, des fonctions d'entrées-sorties et une programmation orientée objet. Il permet le développement de petites applications avec un code simple ou de grandes application industrielles.

4. **Graphisme:** MATLAB possède un grand choix de fonctions pour faire afficher les vecteurs et les matrices comme graphes. Il permet aussi de compléter les graphiques avec des légendes. Il inclue des fonctions de visualisation 2D et 3D de haut niveau. Il est même possible de fabriquer de petites IHM (interfaces hommes machines).

5. **L'API MATLAB** L'API (Application Program Interface) est une librairie qui permet de développer ses propres programmes optimisés en C et en Fortran et de les faire interagir avec MATLAB. Elle inclut des fonctions pour l'appel de routines à partir de MATLAB

(liaison dynamique) ou l'appel de MATLAB comme moteur de calcul.

4.1 Exemples d'application sous MATLAB

Nous avons élaboré un programme sous Matlab qui calcule la valeur de Shapley pour un nombre de joueurs donnés. Les résultats suivants représentés dans les figures ci-dessous illustrent l'application de ce programme à l'exemple 2.1 figure(4.1) ainsi que l'exemple de quatre banques figure(4.2) qu'on a traité dans le chapitre précédent.

Pour l'exemple 2.1 La répartition des 6 millions de réduction de coût selon la valeur de Shapley est donc donnée par (2.5,2,1.5).En termes de partage de coûts,cela signifie que , les 24 millions d'euros, les villes A,B,C auront à payer $7.5; 8; 8.5$ respectivement.

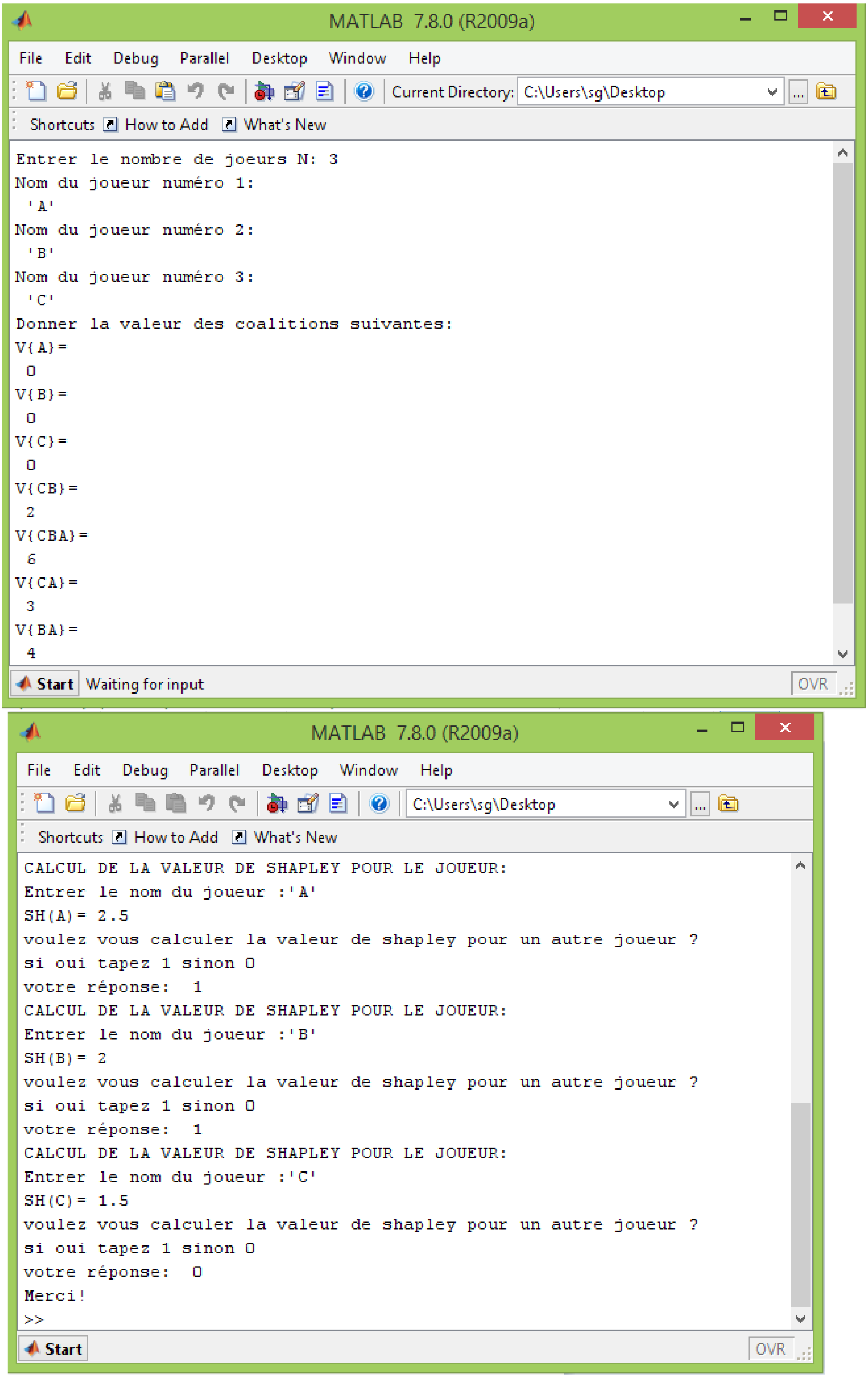
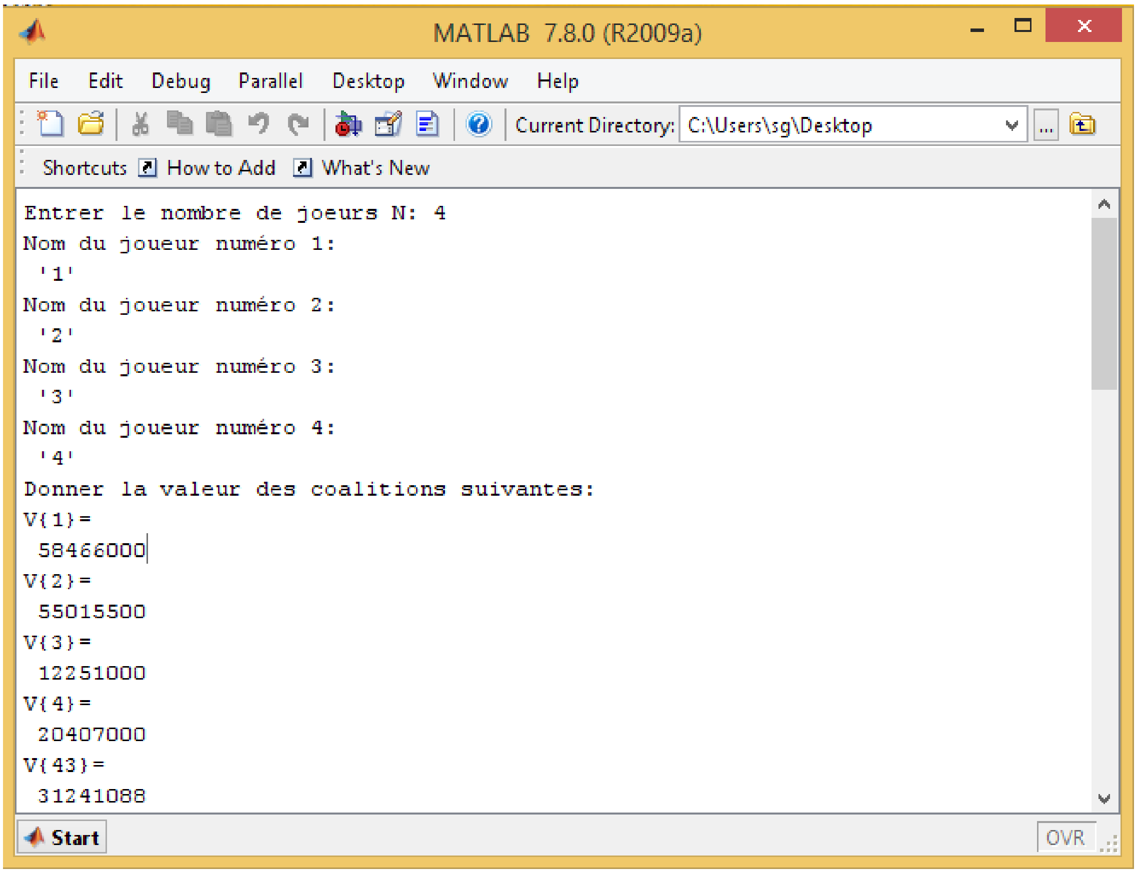
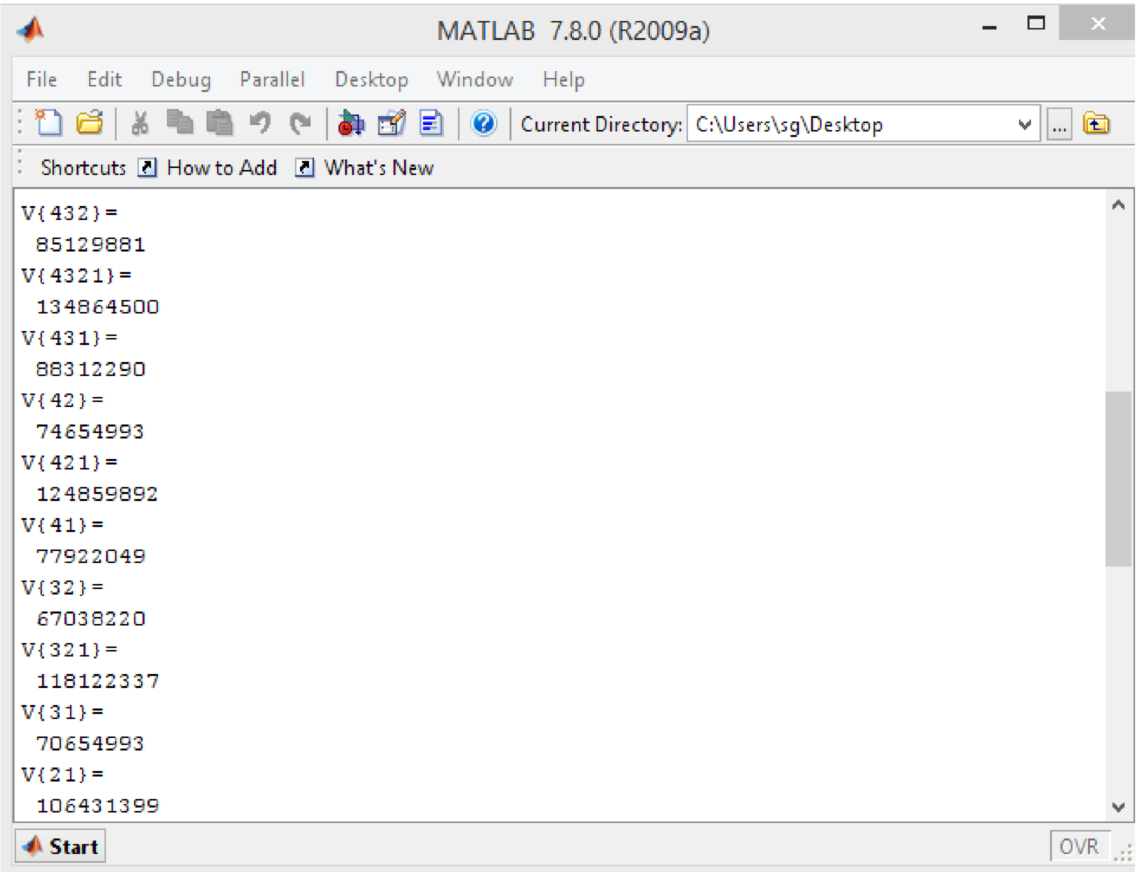


FIG. 4.1 – *Exemple(2.1)*


MATLAB 7.8.0 (R2009a)
File Edit Debug Parallel Desktop Window Help
Current Directory: C:\Users\sg\Desktop
Shortcuts How to Add What's New
Entrer le nombre de joeurs N: 4
Nom du joueur numéro 1:
'1'
Nom du joueur numéro 2:
'2'
Nom du joueur numéro 3:
'3'
Nom du joueur numéro 4:
'4'
Donner la valeur des coalitions suivantes:
V{1}=
58466000
V{2}=
55015500
V{3}=
12251000
V{4}=
20407000
V{43}=
31241088
Start
OVR


MATLAB 7.8.0 (R2009a)
File Edit Debug Parallel Desktop Window Help
Current Directory: C:\Users\sg\Desktop
Shortcuts How to Add What's New
V{432}=
85129881
V{4321}=
134864500
V{431}=
88312290
V{42}=
74654993
V{421}=
124859892
V{41}=
77922049
V{32}=
67038220
V{321}=
118122337
V{31}=
70654993
V{21}=
106431399
Start
OVR

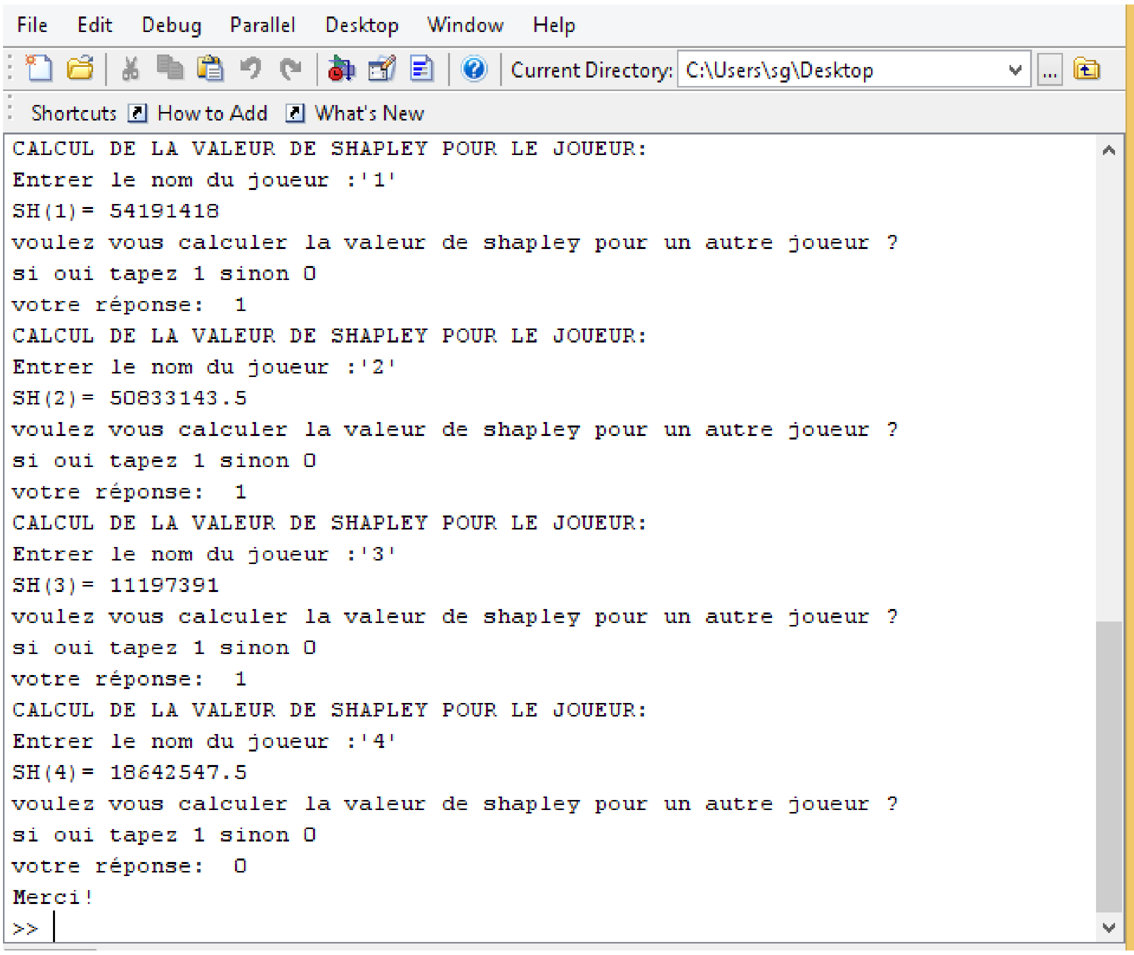


FIG. 4.2 – *Exemple de quatre banques*

Conclusion

L'objectif de notre travail était de mettre en évidence l'utilité de la théorie des jeux coopératifs comme cadre conceptuel pour approcher les problèmes reliés à la répartition équitable de ressources communes à plusieurs agents économiques. L'accent à été mis sur une technique particulière, la valeur de shapley, plus connue sous le nom d'indice de Shapley-Shubik. Cet indice est devenu un instrument très utile pour la mesure du pouvoir de vote dans les processus de décision collective, notamment ceux des organisations internationales. Pour les problèmes de partage de coûts, elle a été utilisée avec succès dans de nombreuses applications ; citons la répartition des frais entre les divisions du constructeur aéronautique McDonnell-Douglas, le partage des coûts de location des lignes téléphoniques d'une université américaine, le financement du développement de projets d'irrigation en eau dans le Tennessee, ou la fixation des frais d'atterrissage à l'aéroport de Birmingham.
On a montré, à travers un exemple réel de la théorie des jeux appliqué à un réseau de quatre banques, la diversité des problématiques qui ont été abordées en ayant recours à cette notion de valeur d'un jeu qui, rappelons-le, détermine un partage unique et équitable.
Pour terminer, notons que le seul élément qui pourrait limiter l'applicabilité de la valeur de shapley à un problème quelconque de partage provient de l'hypothèse qui stipule que les coalitions se forment d'une façon aléatoire, hypothèse qui, il va de soi, n'est pas toujours respectée dans la réalité.

Les limites de ce travail résident dans la partie concernant la solution appelé le Nucléole. c'est à dire que lors de l'application de l'algorithme du nucléole, le passage du premier PL au deuxième n'est pas toujours évident vu le nombre important de contraintes et l'utilisation d'un serveur tel que Lingo ou Visual express n'arrange rien, notamment dans la définition des solutions qui peuvent être infinis.

Bibliographie

[1] F. Carreras. On the existence and formation of partnerships in a game. *Games and Economic Behaviour*, 12:54–67, 1996.

[2] Y. Ekeland. *La théorie des jeux et ses applications à l'économie mathématique*. 1974.

[3] S. H. Gow and L. C. Thomas. Interchange fees for banks atm networks. *Naval Research Logistics*, 45:407–417, 1998.

[4] P.Michel et S.Hatem L.Dominique. Introduction à la théorie des jeux(2):les jeux coopératifs. *Ecoflash.Mensuel d'information économiques et sociales*, (283):1–6, Décembre 2013.

[5] R.D. Luce and H. Raifa. *Games and Decisions*. 1957.

[6] B. O'Neill. Problem of right arbitration from the talmud. *Mathematical Social Sciences*, 2:345–371, 1982.

[7] D. Schmeidler. The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 17:1163–1170, 1969.

[8] M. Shubik. Incentives,decentralised control, the assignment joint costs and internal pricing. *Management Science*, 8:325–343, 1962.

[9] S.Shapley. Cores of convex game. *International Journal of Game Theory*, 1:11:26, 1971.