

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI
TIZI OUZOU**



**Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Automatique**

Mémoire de MASTER Académique

Spécialité : Automatique

Option : Commande des Systèmes

Thème

**Analyse et commande d'un système de transport
public : Application à un système Métro**

Présenté par : SELLAH Sofiane

Soutenu publiquement le 13/07/2017

Composition du Jury :

KARA Redouane, Professeur, Encadreur.

MAIDI Ahmed, Professeur, Président.

NAIT ABDESSELAM Aldjia, MAA, Examinatrice.

HAMRI Hakima, MAA, Examinatrice.

Promotion : 2016/2017

Remerciements

Pour commencer, je veux adresser mes remerciements à Monsieur KARA Redouane, pour son encadrement, sa grande disponibilité et ses précieux conseils. tout au long de la rédaction de ce mémoire.

Je remercie Madame HAMRI Hakima, pour son aide précieuse et pour le temps qu'elle m'a consacré.

Je voudrais également remercier les membre du jury, de l'intérêt qu'ils ont porté à mon mémoire en acceptant de l'examiner.

Je voudrais remercier aussi toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à mes recherches et à l'élaboration de ce mémoire.

Enfin, Je remercie très chaleureusement mes parents et mes frères pour le soutien considérable qu'ils m'ont apporté et la confiance dont ils m'ont toujours témoigné.

Table des matières

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : Modélisation d'un système à événements discrets avec contraintes de temps.	
I.1 Introduction	3
I.2 Réseaux de Petri (RdP).....	4
I.2.1 Définition formelle des RdP	5
I.2.2 Règle de fonctionnement et l'évolution d'un RdP	6
I.2.3 Propriétés des RdPs	9
I.2.4 Graphe d'événement (GE)	10
I.2.4.1 Les p-invariants d'un GE	11
I.2.4.2 Les t-invariants d'un GE	12
I.2.5 Réseaux de Petri temporisé.....	14
I.2.5.1 Règle de fonctionnement	14
I.2.6 Réseaux de Petri temporel	14
I.2.6.1 Réseaux de Petri p-temporels	15
I.2.6.2 Définition formelle des p-RdP	15
I.2.6.3 Condition de franchissement d'une transition	16
I.2.6.4 Propriété des p-RdP	17
I.2.6.5 Graphe d'événement p-temporels.....	18
I.3 Modélisation par des modèles implicites	18
I.4 Exemple illustratif.....	20
I.5 Conclusion	23

CHAPITRE II : Modélisation d'un système de transport public (métro).

II.1 Introduction	24
II.2 Généralités sur les systèmes de transport public	25
II.2.1 systèmes physique	25
II.2.1.1 Infrastructure	25
II.2.1.1.1 Arrêts et tronçons	25
II.2.1.1.2 Lignes.....	26
II.2.1.1.3 Itinéraires.....	27
II.2.1.2 Entités de transport	27
II.2.2 Système de gestion	27
II.3 L'étude des systèmes de transport publics	28
II.4 Modélisation d'un système de métro	28
II.4.1 Modélisation graphique de l'infrastructure de métro	30
II.4.2 Modélisation mathématique du système métro	33
II.5 Conclusion	39

CHAPITRE III : Commande d'un système à événements discrets : application à un système de transport public (métro).

III.1 Introduction	40
III.2 Modèle de Commande prédictive	41
III.2.1 Modèle de Commande prédictive à horizon fini	41
III.2.1.1 Formulation du problème	41
III.2.1.2 Evaluation des performances	42
III.2.1.3 Évolution du système dans un horizon fini	44
III.3 Application sur un système de transport public	46

III.3.1 Evaluation des performances du système métro	46
III.3.2 Commande prédictive à horizon fini du système métro	48
III.4 Conclusion	53
CONCLUSION GENERALE	54
BIBLIOGRAPHIE	55

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Les Systèmes (Dynamiques) à Evénements Discrets (SED) regroupent certains systèmes, généralement de conception humaine (En opposition aux systèmes "naturels" décrits par les lois de la physique). Leur évolution obéit à l'apparition d'événements qui ont lieu à des instants discrets. Cette classe des systèmes regroupe aussi bien les systèmes de production et ateliers flexibles [1], lignes d'assemblage [2], les réseaux de communication (réseaux informatiques) [3] ainsi que les systèmes de transports (routier, ferroviaire ou aérien) [4], [5], [6].

L'importance prise par ces systèmes dans notre société a conduit de nombreux chercheurs à proposer des modèles graphiques et mathématiques permettant de décrire leur comportement afin d'en évaluer les performances et d'optimiser leur conception ou leur pilotage. La diversité de ces systèmes conduit naturellement à différents modèles. Parmi ces modèles les Réseaux de Petri (RdP)[7]. Ils proposent une représentation complète du comportement des systèmes à événements discrets, les SED peuvent se caractériser par des contraintes de temps avec des phénomènes de synchronisation et de retard, ceux-là sont aussi très bien décrit mais par des extensions des RdP, on note les RdP temporisé et les RdP temporel [8].

Une modélisation décrivant tous les paramètres d'un SED est nécessaire, qui servira à l'élaboration des stratégies de contrôles efficaces qui garantissent la stabilité des processus du SED. L'une des stratégies de contrôle est la commande prédictive à horizon fini. L'objectif est de déterminer des commandes pour que les états futures du système dynamique suivent une trajectoire désirée prédéfinie, et ce à partir des mesures sur l'état à un instant présent.

Les systèmes de transport public (STP) sont une classe des SED caractérisé par des contraintes de temps avec des phénomènes de synchronisation. La problématique est la disponibilité des trains dans les différentes stations est le temps d'attente des passagers dans ces stations. Les phénomènes de synchronisation se situe dans le déplacement des ressources de transports (train, bus,...), une bonne synchronisation de ces derniers permet une bonne cohérence dans leurs déplacements, optimise leurs efficacités et leurs disponibilités vis-à-vis des usagers.

L'organisation de ce mémoire est la suivante :

- Dans le premier chapitre nous décrivons la modélisation des SED à contraintes de temps. En premier lieu on présente cette modélisation en deux phases qui commence par une modélisation graphique d'où l'intérêt qu'on a porté sur les réseaux de Petri, ensuite leurs extensions temporisé et temporel ont été discuté. La deuxième phase consiste à

mettre en équations la modélisation graphique, ou modélisation algébrique. Dans notre cas, on a choisi une mise sous équation par des modèles linéaires implicites dans l'algèbre usuelle, un exemple d'application est donné pour illustrer les outils de modélisation adopté.

- Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons aux systèmes de transports publics. Tout d'abord, nous donnons quelques généralités sur les STP en spécifiant les deux composantes qui les constituent, à savoir le système physique et le système de gestion. Ensuite nous prenons comme application un système de métro qui se situe dans la ville d'Alger. Son infrastructure est donné avec quelque caractéristiques réel et théoriques. Nous réalisons une modélisation à l'aide des outils adopté au premier chapitre, qui montre l'efficacité de ces outils dans la description d'un SED à contraintes temps et qui comporte des phénomènes de synchronisation.
- Pour le dernier chapitre, notre objectif est de montrer qu'on peut contrôler les performances du système de métro en optimisant son fonctionnement, Dans notre cas on considère que le système est idéal et sans interruption (panne, retard). Nous agissons sur la synchronisation des trains en marche, afin de permettre une fréquences de passage régulière et optimal des trains dans les arrêts. Nous évaluons les performances du système de métro pour définir un objectif à atteindre, ensuite nous utilisons la théorie de la commande prédictive à horizon fini, que nous définissons et appliquons sur le système métro étudié, afin que le système converge vers un comportement souhaité et accomplir l'objectif prédéfini.

CHAPITRE I

Modélisation d'un système à événements discrets
avec contraintes de temps

CHAPITRE I : Modélisation d'un système à événements discrets avec contraintes de temps.

I.1 Introduction

La modélisation des SED nécessite une analyse globale des interactions de tous les événements considérés dans le problème posé. Ces interactions peuvent être de natures très diverses (corrélations, contraintes de temporisation, synchronisations, exclusions, partage de ressources...etc.). Cette modélisation est divisée en deux phases, la première est de construire un modèle graphique du SED qui décrit l'ensemble des composants et processus sous l'occurrences d'événements de ce dernier. C'est une représentation d'un niveau macroscopique de ces systèmes qui peuvent être d'une grande complexité. La deuxième phase, le comportement du modèle graphique est représenté sous forme d'un modèle mathématique qui permet l'évaluation analytique, une analyse algébrique, une validation du modèle, l'évaluation de ses performances et en dernier le contrôle par l'élaboration d'une commande.

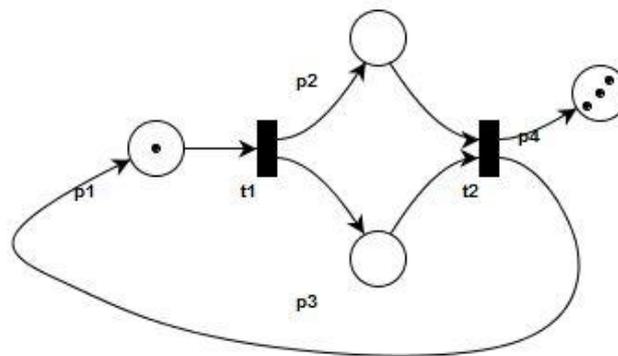
Dans ce premier chapitre, on commence par la présentation de la première phase de la modélisation d'un SED qui consiste à construire un modèle graphique de ce dernier, qui décrit tous les composants et les différents fonctionnements sous l'occurrences d'événements. Dans la littérature, il existe plusieurs modèle graphique pour la modélisation des SED, l'outil le plus complet pour la modélisation graphique de ces systèmes semble être les réseaux de Petri (RdP). Ils ont la puissance de modélisation et de spécification nécessaire pour la descriptions du fonctionnement d'un SED les plus complexe et qui sont sujet à de nombreuse contraintes, et la possibilité de disposer d'un arsenal de résultats mathématiques et analytiques pour l'évaluation de ses performances.

L'objectif de ce chapitre n'est pas de détailler l'ensemble des notions sur les RdP, largement développés dans la littérature, mais d'en donner un rapide descriptif des notions de bases qui nous intéresse dans notre application sur un système de transports publics. Une présentation détaillée de ces notions pourra être aisément trouvée dans les références citées [7] [8]. Ainsi, sur la base de ce descriptif, nous justifierons les notions adoptées dans le reste de ce mémoire.

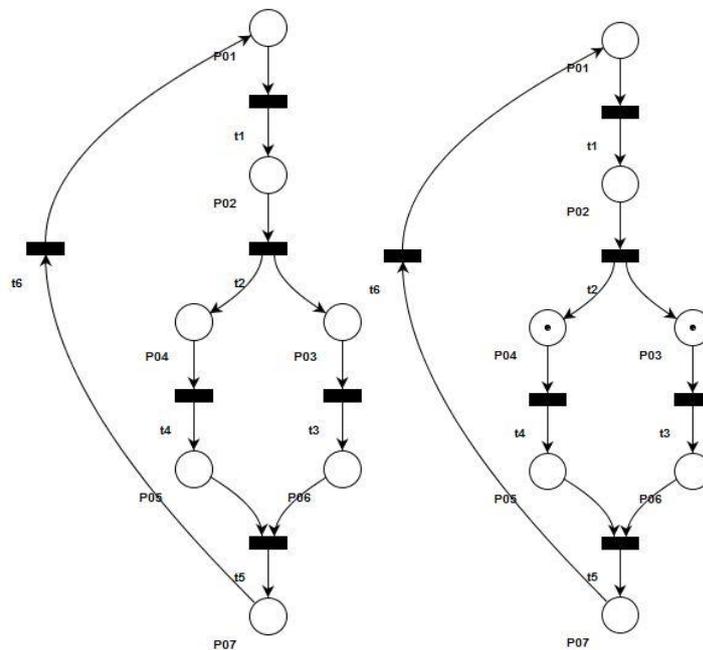
I.2 Réseaux de Petri (RdP)

C'est un outil graphique et mathématique très général permettant de décrire des relations existant entre des conditions et des événements, de modéliser le comportement des systèmes dynamiques à événements discrets [7]. Leur principal avantage est de proposer une modélisation graphique simple, et qui permet de plus, une analyse analytique avec des outils algébriques.

Un RdP est constitué de nœuds, ses nœuds sont divisés en deux types, qui sont les places et les transitions comme indiqué dans la figure I.1 (a et b) :



1-a



1-b

Figure I.1 : Exemples de réseaux de Petri non marqué et marqué

Les places sont représentées par des cercles, et les transitions par des traits gras. Entre chaque place et transition, un arc orienté relie soit d'une place à une transition soit une transition

à une place, l'ensemble des places est finie et non vide idem pour les transitions. Les marques (jetons) sont symbolisé par des points gras dans les cercles qui représentent les places, si un RdP contient des jetons dans une ou dans plusieurs de ces places alors le RdP est dit marqué.

Autrement dit, un RdP est un graph biparti, c'est-à-dire qu'il y a alternance des places et transitions sur un chemin formé d'arcs consécutifs. Et tout arc doit obligatoirement avoir un nœud à chacune de ses extrémités.

1.2.1 Définition formelle des RdP

D'une façon plus formelle, nous donnons la définition qui suit :

Définition I.1: un RdP (marqué) est un 5-uple $R=(P, T, A, W, M)$ où :

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ est un ensemble fini, non vide de places.

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ est un ensemble fini, non vide de transitions.

Pré : est une application de $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturels) correspondant aux poids des arcs reliant les places aux transitions, c'est l'application d'incidence avant.

Post : application de $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturels) correspondant aux arcs poids des arcs reliant les transitions au places, c'est l'application d'incidence arrière.

M : est une application qui associe à chaque place p du RdP, un nombre de marque $M(p)$ entier, M_0 est le vecteur marquage initial.

Lorsque Pré et Post prennent leur valeurs dans l'ensemble $\{0,1\}$, le RdP est dit ordinaire.

Remarque : Les réseaux de Petri traités par la suite, seront considérés comme ordinaires (les poids des arcs seront unitaires), et marqués (présence de jetons dans les places).

Pour la suite, nous considérons les notations suivantes :

${}^{\circ}t$: l'ensemble des places en amont de la transition t.

t° : l'ensemble des places en aval de la transition t.

${}^{\circ}p$: l'ensemble des transitions d'entrée de la place p.

p° : l'ensemble des transitions de sortie de la place p.

I.2.2 Règle de fonctionnement et l'évolution d'un RdP :

Avant de présenter les règles de fonctionnement d'un RdP, on définit le marquage et le franchissement d'une transition dans un RdP.

Définition I.2 : Le marquage d'un RdP a un certain instant est un vecteur colonne dont la i ème composante est le marquage de la place p_i (le nombre de jeton présent dans la place p_i) à cet instant. On prend l'exemple du RdP marqué de la figure 1.1 (1-b) son marquage M est un vecteur dans les composantes sont $M = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$.

Un RdP est un modèle dynamique dont l'évolution est liée à celle du marquage (nombre de jetons dans les places). Son état à un instant donné est représenté par son marquage M à cet instant.

Une transition est dite franchissable (validé ou tirable) si :

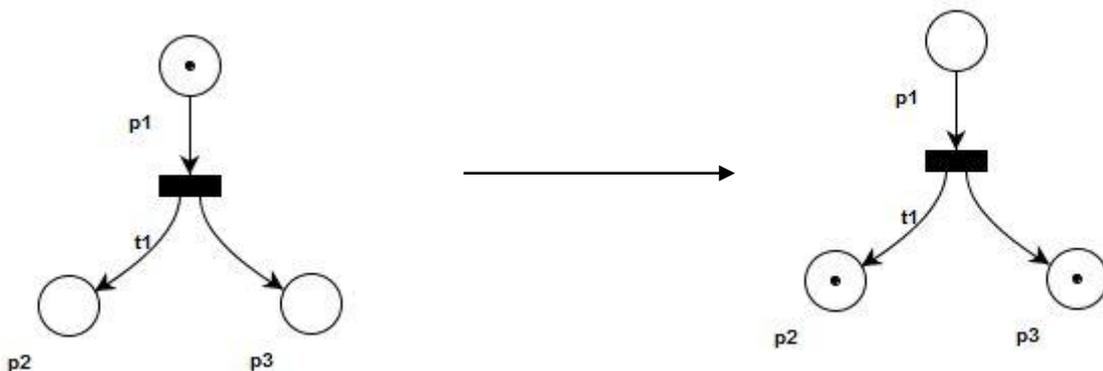
$$\forall p \in {}^{\circ}t \quad M(p) \geq \text{Pré}(p, t)$$

Le tir d'une transition t a pour conséquence :

De prélever $\text{Pré}(p, t)$ marques de chaque place d'entrée p de la transition t . Puis d'ajouter $\text{Post}(p, t)$ marques dans chaque place de sortie p de la même transition t .

Une fois une transition t validé, le franchissement d'une transition t validée provoque le passage d'un marquage M à un autre marquage M' tel que :

$$\forall p \in P \quad M'(p) = M(p) + \text{Post}(p, t) - \text{Pré}(p, t)$$



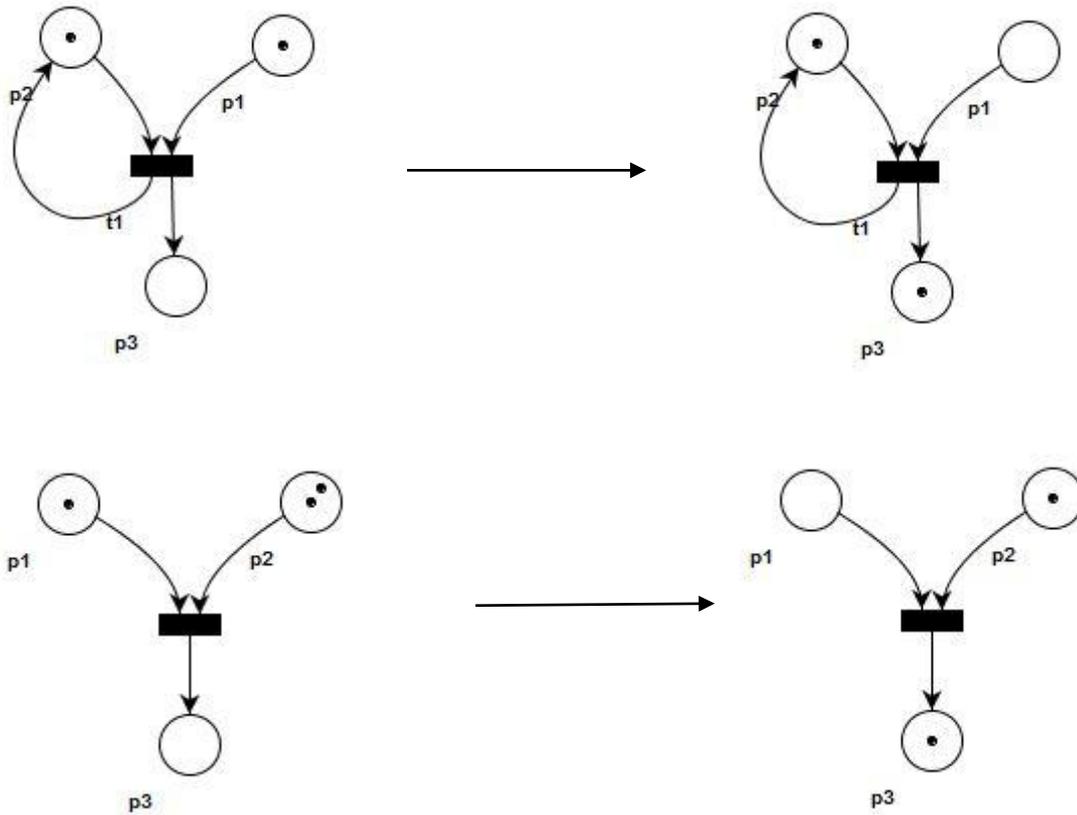


Figure I.2 : Exemples de franchissement d'une transition (arc unitaire)

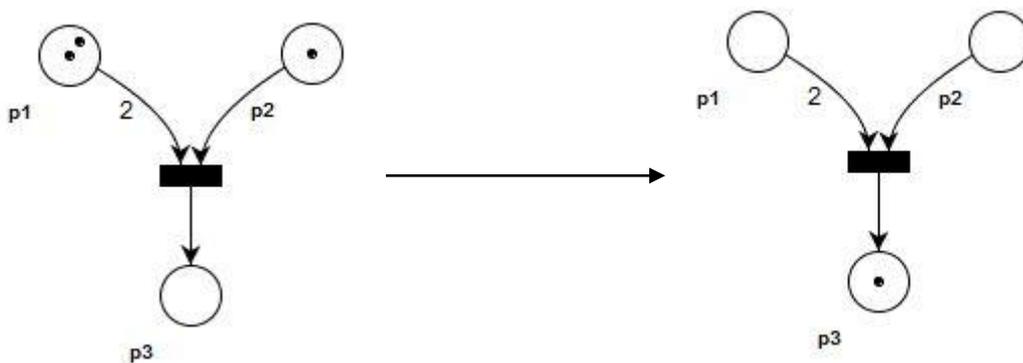


Figure I.3 : Exemple franchissement d'une transition (arc > 1)

Une séquence de franchissement à partir d'un marquage M_0 est représentée par une suite de transitions. Si nous considérons le RdP (marqué) de la figure si dessous et son marquage initial $M_0 = [1\ 0\ 0\ 0]^t$ nous dirons que nous sommes passés de M_0 à $M_2 = [0\ 0\ 1\ 1]^t$ en effectuant le tirage de la séquence de tire $\sigma < t_2, t_3 >$. et on reviens a l'état initial M_0 a partir de M_2 en effectuant le tirage de la transition t_1 .

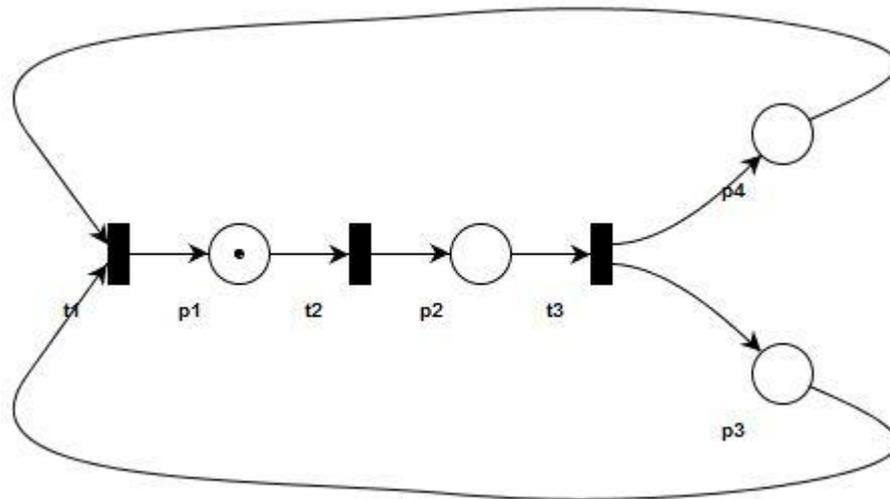


Figure I.4 : Exemple d'un RdP ordinaire.

Le passage d'un marquage M_0 à un marquage M_k s'écrit par la forme matricielle suivante :

$$M_k = M_0 + W.S$$

Où M_k est le marquage que l'on atteint à partir de M_0 après une séquence de franchissement σ réalisable.

S est un vecteur qui représente cette séquence σ . Sa dimension est égale à m le nombre de transitions que contient le RdP, S_j correspond au nombre de fois que la transition t_j a été franchie dans la séquence σ .

W est la matrice d'incidence :

$$W = W^+ - W^-$$

Avec :

$$W^- = [W_{ij}^-] \quad , \text{ ou } \quad W_{ij}^- = \text{Pré}(p_i, t_j)$$

et

$$W^+ = [W_{ij}^+] \quad , \text{ ou } \quad W_{ij}^+ = \text{Post}(p_i, t_j)$$

La matrice d'incidence du RdP de la figure I.4 nous est donnée par :

$$\begin{array}{ccc}
 t_1 & t_2 & t_3 \\
 p_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & - & p_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = & p_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 W^+ & - & W^- & = & W
 \end{array}$$

Le marquage M_2 peut-être calculé à partir des matrices M_0 , S et W données ci-dessus et en appliquant l'équation , soit :

$$M_2 = M_0 + W.S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I.2.3 Propriétés des RdP

nous citons quelques propriétés qui définissent des caractéristiques présentes dans différents modèles de RdP :

Accessibilité : Soit un RdP (R, M_0) , on dit qu'un marquage M' est accessible (ou atteignable) à partir de M_0 si il existe une séquence de franchissement σ , tel que $T(M_0)$ est l'ensemble des marquages que l'on peut atteindre en partant de M_0 .

Bornitude : une place est bornée ou k-bornée pour un marquage initial M_0 si il existe un entier naturel k, tel pour tout marquage accessible à partir de M_0 , le nombre de marque dans la place p reste inférieur ou égal à k. le RdP marqué de la figure I.1 (1-b) est borné par contre (1-a) est non bornée.

un RdP est borné ou k-borné pour un marquage initial M_0 , si dans chaque place dans P le nombre de marque reste inférieur ou égale à k alors, les places sont k bornées pour M_0 .

Dans le cas ou k est égale à 1, alors un RdP est dit sauf (ou binaire) pour un marquage initial M_0 .

Vivacité : Une transition est dite vivante si elle peut être franchie quel que soit le marquage atteint. Une transition est vivante dans un RdP pour tout marquage initial M_0 , si pour tout marquage accessible M_i depuis M_0 , il existe une séquence de franchissement qui contient cette transition a partir de M_i . Un RdP est vivant si chacune de ses transitions est vivante,

Conflit : Un RdP peut se caractérisé par un conflit qui se devise en deux type :

Le conflit structurel qui correspond à un ensemble de transitions qui ont au moins une place d'entrée en commun.

Le conflit effectif qui correspond à l'existence d'un conflit structurel et d'un marquage tel que le nombre de marques dans la place du conflit est inférieur au nombre de transitions de sortie de cette place qui sont validées.

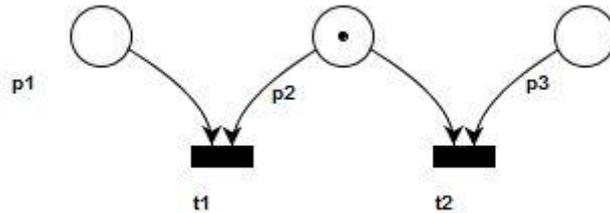


Figure I.5 : Conflit effectif

Blocage :

Le blocage dans un RdP est un marquage M atteignable depuis M_0 , où aucune transition n'est validée ou franchissable.

I.2.4 Graphe d'événements (GE)

Définition I.3 : Un GE est une classe des RdP qui se caractérise par chaque place relié à une transition d'entrée et une transition de sortie, Il bénéficie de l'absence de conflit structurel.

$$|p^\circ| = |{}^\circ p| = 1, \quad \forall p \in P.$$

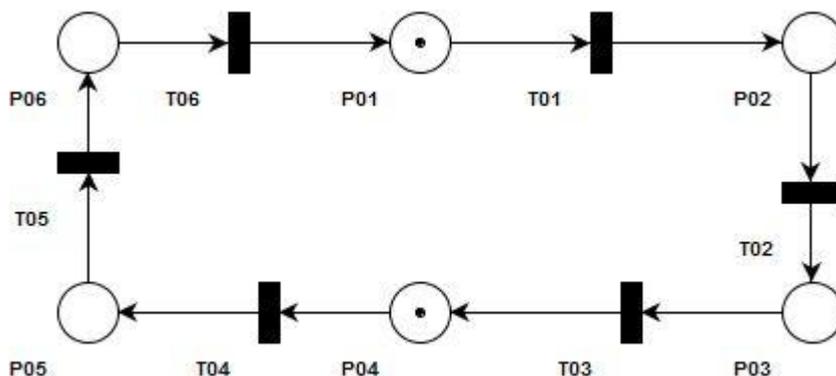


Figure I.6 : Graphe d'événements (GE)

Dans un GE, pour qu'une transition soit franchissable, il suffit que toutes ses places d'entrée contiennent au moins chacune un jeton, donc aucune compétition dans l'approvisionnement des places en jetons ni la consommation de jetons dans les places. Les transitions pouvant par contre comporter plusieurs entrées et sorties, les contraintes de synchronisation sont bien représentées par ces graphes.

Nous rappelons ici brièvement quelques propriétés structurelles des graphes d'événements qui sont indépendantes du marquage initial. L'analyse de ces propriétés utilise l'algèbre linéaire [9]. Nous définissons ci-dessous les p-invariants et les t-invariants.

I.2.4.1 Les p-invariants d'un GE

Définition I.4 : On dit qu'un vecteur X non nul est un p-invariant, si X vérifie la relation suivante :

$$X \cdot W = 0$$

où X est un vecteur ligne entier non-négatif, appelé aussi P-semi-flot, et W est la matrice d'incidence.

L'ensemble des places correspondant aux composantes non nulles d'un p-invariant X , noté $\|X\|$, est appelé support du p-invariant. Le support d'un p-invariant est minimal s'il ne contient strictement aucun ensemble qui soit un support de p-invariant. Un p-invariant X est minimal s'il n'en existe aucun autre dont toutes les composantes soient inférieures ou égales à celles de X . Il existe un unique p-invariant minimal correspondant à un support minimal donné ; il est appelé p-invariant de support minimal [10].

La recherche des p-invariants pour les graphes d'événements est présentée sous la forme suivante [11].

Soit $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un vecteur à composantes entières non négatives, où n est le nombre de places du graphe d'événements considéré. Soit c un circuit élémentaire de ce graphe et $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ l'ensemble des places du graphe. Si, pour i allant de 1 à n , on a :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } p_i \in c, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

Alors, $\forall M_k \in T(M_0)$ on a :

$$X.M_0 = XM_k$$

Ce résultat découle immédiatement de l'équation fondamentale de l'évolution dynamique d'un RdP.

Si nous considérons un graphe d'événements pour lequel toutes les places appartiennent à un support de p-invariant, alors ce graphe d'événements est borné.

Dans un graphe d'événements, la somme des marques des places d'un circuit donné est constante. Pour preuve Rappelons qu'un circuit est un chemin qui commence et se termine au même sommet (place). Alors, si une transition franchissable appartenant à un circuit est franchie, son franchissement prend un jeton dans la place en amont de la transition pour le remettre dans la place en aval de la transition. L'opération de franchissement d'une transition dans un circuit laisse donc invariant le nombre de jetons du circuit.

I.2.4.2 Les t-invariants d'un GE

Définition I.5: Un vecteur Y non nul est un t-invariant, s'il vérifie l'équation suivante :

$$W.Y^t = 0$$

où Y est un vecteur ligne à composantes entières non-négatives, appelé aussi T-semi-flot, dont la dimension est le nombre de transitions du RdP.

L'ensemble des transitions qui correspondent aux composantes non nulles d'un t-invariant noté $\|Y\|$, est appelé support du t-invariant. Il est minimal s'il ne contient strictement aucun ensemble non vide qui soit un support de t-invariant. Un t-invariant α est minimal s'il n'en existe aucun autre dont toutes les composantes soient inférieures ou égales à celles de α . Il existe un unique T-invariant minimal correspondant à un support minimal donné ; il est appelé t-invariant de support minimal [10].

L'existence d'un t-invariant pour un graphe d'événements est une condition nécessaire pour que le graphe ait un fonctionnement répétitif (cyclique). Soit maintenant un graphe d'événements avec m transitions. Le vecteur Y , à m composantes toutes égales à 1, est l'unique t-invariant [11]. Une autre manière d'exprimer ce résultat est de dire que l'on retrouve le même marquage initial après avoir franchi une seule fois chaque transition.

Un graphe d'événements est sans blocage et vivant, si et seulement si, chaque circuit élémentaire contient au moins un jeton [11].

I.2.5 Réseaux de Petri temporisé

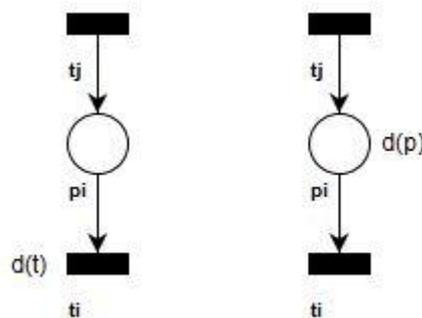


Figure I.7 : RdP t-temporisés (à gauche) et RdP p-temporisé (à droite)

Un réseau de Petri temporisés RdPt permet de décrire un système dont le fonctionnement dépend du temps. Par exemple, il peut s'écouler une certaine durée entre le début d'une opération et sa fin. Si une marque dans certaine place indique que cette opération est en cours, un RdP temporisé permettra de rendre compte de cette durée. Il y a principalement deux façons de modéliser la temporisation : soit les temporisations sont associées aux places (on dira que l'on a un RdP p-temporisés), soit les temporisations sont associées aux transitions (on dira qu'on a un RdP t-temporisés). Or, il a été montré que ces deux modèles sont équivalents [12]. Par conséquent, un seul sera décrit par la suite : le modèle p-temporisés.

Par ailleurs, le modèle RdP p-temporels utilisé dans la suite de ce chapitre pour modéliser les contraintes de temps maximum, se montrera plus proche des RdP p-temporisés. Or, pour la spécification des temps de séjour des jetons dans les places, l'association d'intervalle de temps aux places sera nécessaire. L'orientation vers les RdP p-temporisés est donc plus cohérente.

Définition I.6: Un RdPt est un doublet $RT = (R, D)$

$R=(P, T, A, W, M)$ est un RdP marqué.

D est l'ensemble des durées associées aux places tel que:

$$\forall p \in P \exists d(p) \in D \text{ avec } d(p) \in \mathbb{Q}^+$$

Où \mathbb{Q}^+ est l'ensemble des rationnels positifs.

I.2.5.1 Règle de fonctionnement

On utilisera la notion d'état pour caractériser la situation du réseau à un instant donné.

Définition I.7: Un état est un doublet $\langle M, I_m \rangle$ où :

M est l'application de marquage, assignant à chaque place du réseau, un certain nombre de marques. $(\forall p \in P, M(p) \geq 0)$.

I_m est une application de temps d'indisponibilité, assignant à chaque marque k dans la place p_i , un temps θ_i^k . θ_i^k est la durée qu'il reste à la marque k pour terminer son temps de séjour minimal dans la place p_i .

Notons qu'une transition peut être validée au sens des RdP et ne pas être franchissable à cause des temporisations. Une transition est donc franchissable si elle est validée au sens des RdP et si les marques qui la valident sont disponibles. Si le temps de séjour est inférieur à la temporisation affecté aux places ($t < d(p)$) le jeton n'est pas disponible, cela permet de spécifier la durée nécessaire pour effectuer une opération ou un processus donné, une fois le temps de séjour est supérieurs à la temporisation affecté aux places ($t > d(p)$) le jetons est en état de disponibilité, cela permet de modéliser l'état d'une ressource qui est disponible pour la prochaine tâche. Il faut remarquer que la spécification ne donne pas de borne supérieure au temps de séjour : l'attente, une fois le temps minimal écoulé peut être infinie.

Les RdPt ne permettent que de de spécifier une durée minimale de traitement. Bien qu'ils permettent de modéliser un large nombre de systèmes manufacturiers, ils ne sont pas capables de modéliser des systèmes pour lesquels la durée de traitement est incluse entre une valeur minimale et une valeur maximale.

I.2.6 Réseaux de Petri temporel

Les réseaux de Petri temporel est une classe des réseaux de Petri a états introduits par Merlin [13]. Cette extension temporelle s'exprime sous la forme d'un intervalle associé principalement aux transitions (t-temporel), ou aux places (p-temporel). Pour la suite les caractéristiques et propriétés des graphes d'événements p-temporels et t-temporels, Khansa a montré [14] que ces deux modèles sont distinctes.

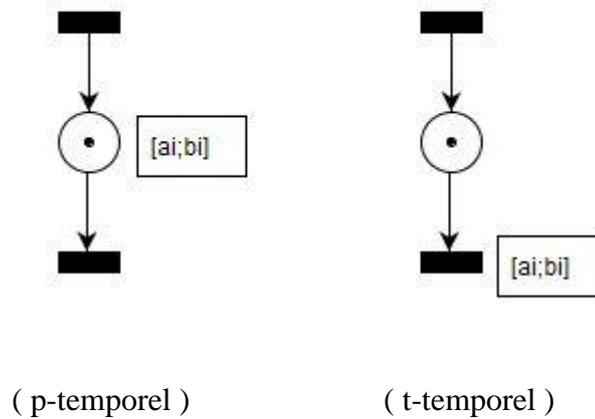


Figure I.8 : Réseaux de Petri temporel

Dans ce mémoire nous nous intéresserons aux graphes d'événements p-temporels comme outil de modélisation , l'explication de ce choix est donné dans le prochain chapitre.

I.2.6.1 Réseaux de Petri p-temporels

Développé dans [14] et [8], les réseaux de Petri p-temporels (p-RdP), ont pour objectif de modéliser des systèmes dans lesquels le temps prend un aspect non déterministe. A cette effet, le temps de séjour associé à chaque place p_i n'est plus une constante fixe et déterminé comme dans les RdPt, mais prend la forme d'un intervalle de temps IS_i . On peut citer, les unités de productions alimentaires [15], les cellules de traitements [16], et les réseaux de transport public [17].

I.2.6.2 Définition formelle des p-RdP

Définition I.8 : Un p-RdP est défini par le doublet $\langle R; IS \rangle$ où :

R est un réseau de Petri marqué

$IS : P \rightarrow (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}) \times (\mathbb{R}_+ \cup \{0, +\infty\})$,

$p_i \rightarrow IS_i = [a_i, b_i]$ avec $0 \leq a_i \leq b_i$,

où $[a_i, b_i]$ définit l'intervalle statique de temps de séjour d'une marque dans la place p_i .

Le temps de séjour d'un jeton est compris dans un intervalle de temps. Le jeton qui arrive dans une place est indisponible (il ne peut pas permettre le franchissement de la transition située en aval) pendant un certain temps. Il doit passer un temps de séjour minimum correspondant à la

borne minimale de l'intervalle. Le jeton atteint un âge de maturité (qui lui permet de franchir une transition) après a_i unités de temps après son arrivée dans la place. Il reste dans cet état de disponibilité durant $b_i - a_i$ unités de temps. Une des spécificités des réseaux de Petri p-temporels est la possibilité de la mort de jetons, le mode de fonctionnement est le suivant. Après un séjour de b_i (borne max de l'intervalle) unités de temps dans la place, le jeton se trouve dans l'obligation de quitter cette dernière, sinon, il se retrouve dans un état de mort. Autrement dit, le jeton ne peut plus participer aux franchissements, et cela peut générer d'éventuels dysfonctionnements du système dans le futur si, par exemple, le jeton représente une ressource importante. Par conséquent, ce modèle va nécessiter un contrôle des tirs des transitions afin d'éviter la mort des jetons.

I.2.6.3 Condition de franchissement d'une transition

L'évolution dynamique d'un p-RdP dépend des marques (jetons) et de leur situation temporelles (intervalle dynamique). Cette évolution peut être décrite par un suivi de l'état de marquage du p-RdP l'âge des marques comme montré dans les deux définitions suivantes :

- L'évolution de p-RdP fondée sur l'états du marquage :

Définition I.9 : A un instant donné, l'état est totalement déterminé par la paire $E \langle M, I \rangle$.

telle que :

-M est une application de marquage, assignant à chaque place du réseau un certain nombre de marques ($\forall p \in P, M(p) \geq 0$)

-I est une application "intervalle potentiel" de tir, associant à chaque marque k dans une places p_i un intervalle $[a_i^k, b_i^k]$. On l'appellera "intervalle dynamique" pour le distinguer de l'intervalle statique (initial) associé à la place qui contient cette marque. Ces intervalles (les intervalles dynamiques) sont relatifs à l'instant d'arrivée de la marque dans la place. Supposons que la marque k arrive dans place p_i (son intervalle statique est $[a_i, b_i]$) à l'instant c, à l'instant $c + d$ ou ($a_i \leq d \leq b_i$) l'intervalle dynamique de k est $[a_i^k, b_i^k] = [\max(a_i - d, 0), b_i - d]$.

- L'évolution de p-RdP fondée sur l'âge des marques :

Définition I.10 : A un instant donné, l'état est défini par un doublet $E = \langle M, Q \rangle$, où :

- M est identique à la définition précédente,
- Q est une application temps de séjour qui associe à chaque marque k dans la place p_i un nombre réel θ_i^k ou θ_i^k est l'âge de cette marque (le temps écoulé depuis son arrivée dans la place p_i). Le θ_i^k associé à la marque k dans la place p_i doit être inférieur ou égale à b_i où $[a_i, b_i]$ est l'intervalle statique associé à la place p_i . La marque k dans la place p_i peut participer à la validation de ses transitions de sortie quand son âge θ_i^k est supérieur ou égale à a_i . Elle est morte quand son âge est strictement supérieur à b_i .

L'âge θ_i^k d'une marque k (donné par l'horloge locale associée à celle-ci) est relatif à l'instant d'arrivée de cette marque dans la place p_i . Supposons que la marque k arrive dans la place p_i à l'instant absolu t (donné par l'horloge globale par exemple), l'âge de la marque à cet instant est égal à zéro. À l'instant absolu t' , son âge est $\theta_i^k = t' - t$. Elle ne participe pas à la validation de ses transitions de sortie qu'à l'instant $t' = t - a_i$ et elle sera morte à l'instant $t' > t - b_i$. Une marque sera morte si son âge devient strictement supérieur à la borne supérieure de l'intervalle statique associé à sa place d'accueil et si aucune de ses transitions de sortie n'est validée à cet instant.

1.2.6.4 Propriété des p-RdP

Bornitude: Un p-RdP est borné pour un marquage initial M_0 si toutes les places sont bornées : il existe donc un entier k, tel que pour tout marquage accessible à partir de M_0 , le nombre de marques dans une place est inférieur ou égal à k. Le réseau est K-borné si toutes les places sont K-bornées.

Vivacité : Une transition est vivante dans un p-RdP pour tout marquage initial M_0 si : pour tout marquage accessible M_i depuis M_0 , il existe une séquence de franchissement (des transitions et des dates de franchissement associées) qui contient cette transition à partir de M_i .

Un p-RdP est vivant pour un marquage initial M_0 si toutes ces transitions sont vivantes pour M_0 .

Blocage : Un état de blocage est un marquage M_i depuis M_0 , tel qu'aucune transition est validée.

Vivacité des marques : En plus des propriétés précédant des p-RdPs, un autre problème est l'étude de la mort des marques. Ce problème découle du fait qu'une marque peut mourir dans une place précédant immédiatement une transition de synchronisation (transition qui possède plusieurs places en amont) avant la validation de celle-ci.

Un état E_i d'un p-RdP est marques-vivantes si toutes les marques dans M_i sont vivantes.

Un p-RdP est marque-vivant pour un marquage initial M_0 (l'état initial E_0) si toutes les marquages des états accessibles depuis M_0 sont des états marque vivantes. Si une marque dans un marquage accessible depuis E_0 est morte, alors le réseau est marque-morte. Rappelons qu'une marque qui meurt ne participe plus à la validation des transition.

Notons qu'un p-RdP peut être vivant sans être marque-vivantes. L'inverse est aussi vrai : un p-RdP peut être marque-vivantes sans être vivant.

I.2.6.5 Graphe d'événement p-temporels

Un graphe d'évènements p-temporels (GE p-temporels) regroupe toutes les propriétés d'un graphe d'événement ordinaire et des réseaux de Petri p-temporels, ou chaque place relié à une transition d'entrée et une transition de sortie, en bénéficiant de l'absence de conflits structurels, et une temporisation sous forme d'intervalle affecté à chacune des places du GE p-temporels.

I.3 Modélisation par des modèles implicites

La deuxième phase de la modélisation d'un SED consiste à décrire le comportement dynamique des graphes d'évènements p-temporels par un modèle mathématique, trois modèles algébriques ont été introduit dans la littérature. La première caractérisation est le modèle d'intervalle sur les dioïdes [18]. La seconde est la représentation polyédral au moyen de l'algèbre standard [19], cette caractérisation nous permet d'évaluer les performances et le contrôle des graphes d'évènements p-temporels. La troisième est la modélisation par des modèles implicites dans l'algèbre conventionnelle introduite par [20]. C'est ce dernier modèle qui nous intéresse et que nous allons présenter par la suite.

Avant de définir ce modèle on va d'abord définir les fonctions dateurs d'un système à évènement discrets :

Définition I.11 : Un dateur x est une application monotone (croissante) de \mathbb{Z} dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Un dateur doit vérifier :

$$x(k + 1) \geq x(k)$$

Nous associons à chaque transition t_i un dateur $x_i(k)$, qui représente la date, à laquelle l'événement k , associé à chaque variable, à lieu.

La modélisation par des modèles implicites [20]. Utilise les fonctions dateurs pour mettre sous équations un graphe d'événement p-temporels afin d'étudier son comportement dynamique et son évolution. Le modèle :

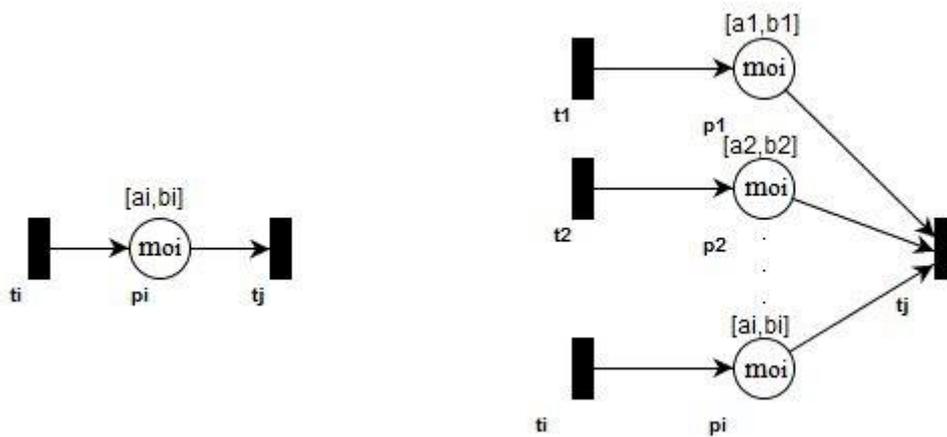


Figure I.9 : parti d'un graphe d'événements p-temporels

Considérons la variable $\theta_j(k)$ comme la date du k ème tir d'une transition $t_j \in T$ et ${}^{\circ}t_j$, l'ensemble de ses entrées. Pour chaque transition t_j , nous pouvons écrire:

$$\theta_j(k) = \theta_i(k - m_{oi}) + q_i(k) \dots \dots \dots (I.1)$$

où,

$\theta_i(k)$ représente le dateur du k nième tir de la transition $t_i \in {}^{\circ}P_i$.

$m_{oi}(k)$ le marquage initial de chaque place $p_i \in {}^{\circ}t_j$.

$q_i(k)$ le temps séjour d'un jeton dans la place p_i pour le k nième tir de la transition en aval de p_i . Le temps de séjour doit vérifier $a_i \leq q_i(k) \leq b_i$.

A partir des équations (I.1), la forme matricielle suivante peut être dérivé:

$$E \cdot \theta(k) = \sum_{\tau=1}^{\tau=l} A_{\tau} \cdot \theta(k - \tau) + w(k) \dots \dots \dots (I.2)$$

Avec

$$E \in \mathbb{Z}^{n \times m}, A_i \in \mathbb{Z}^{n \times m}, q(k) \in \mathbb{R}_+^n, l = \max(m_{oi}) \text{ et } \theta_j(k) = 0 \forall k \leq 0.$$

Pour obtenir une représentation d'état, nous devons décomposer Chaque places contenant plus d'un jeton à plusieurs places et transitions où chaque places contient au plus un jeton. Par cette opération, le modèle (I.2) peut être écrit Dans la représentation d'état généralisée suivante:

$$E \theta(k) = A \theta(k - 1) + q(k)$$

Avec, $a \leq q \leq b$, ou a et b sont respectivement des vecteurs de temporisation minimal et maximal de toutes les places.

Si la matrice E est une matrice identité alors le système est appelé système discret explicite.

I.4 Exemple illustratif

Pour mieux illustrer cette méthode de la modélisation par équation d'état implicite, on traite l'exemple donné [17]. Ou est modélisé un système de transport de bus.

Le modèle suivant décrit les lignes des bus avec leurs arrêts, et l'ensemble du fonctionnement du système, le système est modélisé avec un graphe d'événements p-temporels comme montré dans le figure suivante :

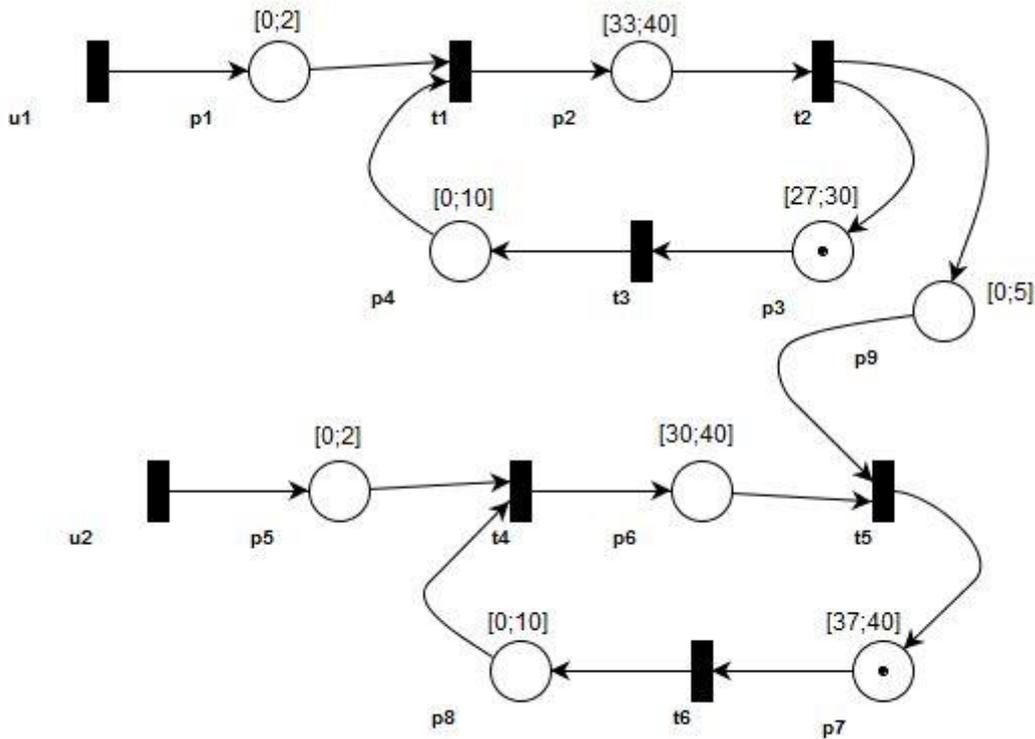


Figure I.10 : Graphe d'événements p-temporels d'un système de transports (bus)

- $u_1, p_1, t_1, p_2, t_2, p_3, t_3$ et p_4 représentent la ligne 1.
- $u_2, p_5, t_4, p_6, t_5, p_7, t_6$ et p_8 représentent la ligne 2.
- p_9 : représente l'arrêt de correspondance entre les deux ligne.
- u_1 (respectivement u_2) : représente l'ordre de départ du bus de la ligne 1 (respectivement ligne 2)

Initialement, les bus sont de retour à leur station de départ, et sont représentés Par un jeton dans la place p_3 pour la ligne 1 et un jeton dans place p_7 pour la ligne 2.

Le tir de la transition t_1 (ou t_4) ajoute un jeton à la place p_2 (ou p_6) qui représente le bus de la ligne 1 (ou ligne 2) allant à la station de correspondance.

Le tir de la transition t_2 ajoute un jeton à la place p_9 qui représente les passagers de la correspondance et ajoute un jeton à la place p_3 qui représente le bus de la ligne 1 allant à sa station de départ.

Le tir de la transition t_5 prend un jeton de la place p_9 qui représente les passagers, prend un jeton de la place p_6 qui représente le bus de la ligne 2 depuis la station de départ de correspondance et ajoute un jeton à la station place p_7 qui représente le bus de la ligne 2 avec des passagers allant de la ligne 1 à la ligne 2.

En modélisant avec l'évolution de dater dans l'algèbre standard, nous obtenons les équations suivantes:

$$\theta_1(k+1) = q_1(k+1) + u_1(k+1)$$

$$\theta_2(k+1) = \theta_1(k+1) + q_2(k+1)$$

$$\theta_3(k+1) = \theta_2(k) + q_3(k+1)$$

$$\theta_1(k+1) = \theta_3(k+1) + q_4(k+1)$$

$$\theta_4(k+1) = q_5(k+1) + u_2(k+1)$$

$$\theta_5(k+1) = \theta_4(k+1) + q_6(k+1)$$

$$\theta_6(k+1) = \theta_5(k) + q_7(k+1)$$

$$\theta_4(k+1) = \theta_6(k+1) + q_8(k+1)$$

$$\theta_5(k+1) = \theta_2(k+1) + q_9(k+1)$$

Dans la forme matricielle, nous obtenons la représentation d'état généralisé du système :

$$E \cdot \theta(k+1) = A \cdot \theta(k) + q(k+1) + G \cdot u(k+1)$$

Avec :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 33 \\ 27 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 37 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} q_1(k+1) \\ q_2(k+1) \\ q_3(k+1) \\ q_4(k+1) \\ q_5(k+1) \\ q_6(k+1) \\ q_7(k+1) \\ q_8(k+1) \\ q_9(k+1) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 40 \\ 30 \\ 10 \\ 2 \\ 40 \\ 40 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

I.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini la modélisation d'un SED sous deux phases, pour la première phase consiste à construire un modèle graphique d'un SED, on a présenté est définie les notions de bases et propriétés sur les réseaux de Petri et les graphes d'événements, on s'est intéressé plus particulièrement aux réseaux de Petri p-temporels plus précisément les graphes d'événements p-temporels, leur mode de fonctionnement et leur propriétés ont été discuté. Par la suite, la deuxième phase consiste à effectuer une traduction mathématique du modèle graphique construit, un modèle algébrique en utilisant des équations implicites [20] est défini, ce modèle prend en charge les GE p-temporels et qui donne une représentation généralisé de ce dernier. Pour conclure, un exemple illustratif a été présenté qui montre l'utilisation des deux phases de modélisation d'un SED

CHAPITRE II

Modélisation d'un système de transport public (métro)

CHAPITRE II : Modélisation d'un système de transport public (métro).

II.1 Introduction

Les systèmes de transport public (STP) peuvent être vus comme une classe des systèmes (dynamiques) à événements discrets (SED). La dynamique de cette classe est gouvernée par l'occurrence d'événements dans un espace d'état discret par exemple l'arrivée et le départ d'un train dans un arrêt, les STP ont une dynamique conduite par différents phénomènes dont la synchronisation, le parallélisme et la concurrence. La diversité de ces phénomènes rend l'étude des STP plus difficile et nécessite l'exploitation de plusieurs théories d'étude des SED pour décrire ces systèmes d'une façon concrète.

Les STP sont de plus en plus important de par leur implication dans la société, surtout dans l'efficacité économique de cette dernière, car la production et la rentabilité de plusieurs secteurs économiques dépend des services apportés par différents moyens de transports publics, sans négliger que plusieurs personnes dépendent des transports publics pour se déplacer au quotidien. D'où le fait que la société moderne exige de plus en plus de performance dans ce secteur qui se traduit en premier lieu par des exigences dans la ponctualité des prestations des services fournis.

Pour cela les chercheurs dans le domaine et les structures concernés par le développement des STP multiplient les travaux de recherche afin d'évoluer et apporter des solutions aux différents problèmes identifiés et apporter des corrections et améliorations.

L'une des problématiques récurrente dans le secteur est la ponctualité dans les départs et les arrivées des entités de transports (train, bus...) et leurs disponibilités dans les différents arrêts. Pour cela, la planification des horaires est une tâche primordiale en raison d'une complexité croissante des conditions de travail, de la nécessité accrue d'adapter les ressources aux besoins de l'entreprise et de l'utilisateur en termes de qualité de service. La planification et l'optimisation sous contraintes des horaires de les départs et arrivées des ressources de transport et leur synchronisation sont un facteur clé de la performance des compagnies de transport.

L'amélioration des STP passe par une étude de celle-ci, qui permet d'avoir une connaissance des problématiques et apporter les corrections nécessaires grâce à des moyens techniques élaborés.

on commence par une présentation des STP et les différentes composantes qui le compose.

II.2 Généralités sur les systèmes de transport public

Afin d'étudier un STP, il faut au préalable connaître sa composition et c'est différents caractéristique. Les systèmes de transports publique se caractérise par deux composantes principal que sont le système physique et le système de gestion.

II.2.1 systèmes physique

La composante physique des STP est représenté par deux éléments principaux : l'infrastructure (ou la topologie qui représente la structure du système) et les entités de transports (train, bus, etc.).

II.2.1.1 Infrastructure

Cette partie du système physique concerne les éléments qui permettent de décrire les caractéristiques physique des chemins. C'est-à-dire, l'intégralité des voies que peut emprunter les moyens de transports (train, bus...). Il s'agit des entités arrêts et tronçons (ou éventuellement zones), lignes et itinéraires (figure II.1). Chacune de ces entités est définie de la façon suivante:

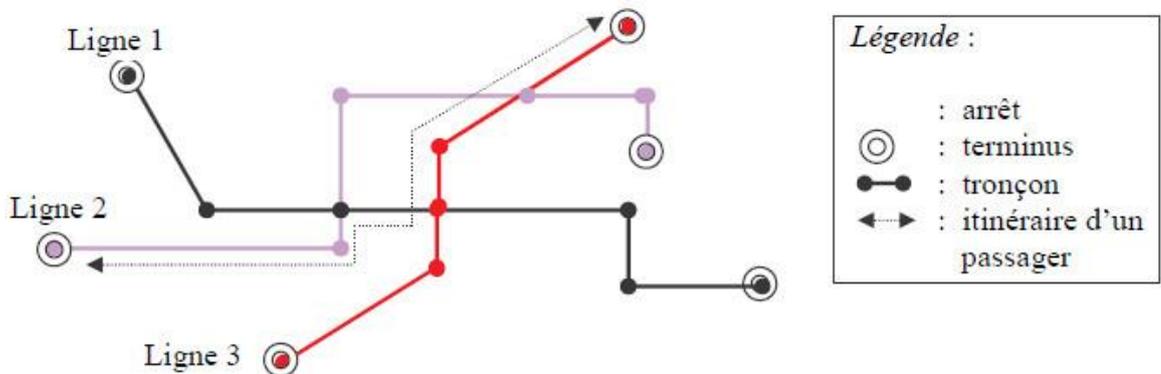


Figure II.1 : Composition de l'infrastructure d'un STP.

II.2.1.1.1 Arrêts et tronçons

Ce sont des éléments de base de la représentation spatiale du réseau. Dans une telle description, les arrêts (ou les stations) représentent les nœuds du réseau, et les tronçons représentent des connexions unidimensionnelles entre les arrêts. Les tronçons sont considérés comme des liaisons orientées entre deux arrêts en sens unique ou double sens. Certains tronçons présentent la particularité d'être associés à des couloirs réservés aux transports public appelés voies propres ou sites propres. Les autres, correspondent à des voies partagées par plusieurs modes de transport (véhicules particuliers, transports collectifs, transport de marchandises). Les

caractéristiques d'un tronçon sont défini par sa longueur, et la vitesse commerciale de déplacement des différents l'entités de transports. Ceci permet de déterminer un temps de déplacement entre deux arrêts.

Un arrêt est caractérisé par un espace ou emplacement où les véhicules en déplacement dans leurs lignes s'arrêtent pour une certaine durée de temps, afin de permettre aux passagers de descendre ou de monter dans les véhicules. Les arrêts peuvent être classés en fonction des buts opérationnels qui leurs sont assignés.

Grâce à ces arrêts qui ont un rôle fonctionnel important dans le déplacement des passagers dans les transports publics, on peut définir la notion de parcours d'une ligne par le déplacement d'un véhicule entre deux terminus opposés. Le temps de parcours est le temps s'écoulant entre le départ d'un véhicule d'un terminus et son arrivée au terminus opposé. Ce temps de parcours inclut :

- les conditions de circulation (temps d'attente aux feux, aux stops, temps d'accélération et décélération des véhicules, etc.) ;
- les temps d'arrêt incluant les temps d'ouverture des portes, ainsi que les temps d'attente hors échange de passagers.

II.2.1.1.2 Lignes

Une ligne est un ensemble fini d'arrêts et de tronçons alternés regroupés par l'exploitant du réseau en une entité d'exploitation. Les arrêts extrémités de cette entité sont appelés terminus de la ligne (c'est à dire les arrêts de début et de fin). La structure d'une ligne peut être plus au moins complexe suivant le nombre d'éléments qui la composent, le rôle de ces éléments par rapport au reste du réseau (connexions assurées avec d'autres lignes). La conception d'une nouvelle ligne se fait souvent en concertation avec les instances communales concernées et les différents utilisateurs (écoles, centres commerciaux, hôpitaux, etc.). Elle doit tenir compte de la demande et des contraintes liées à la circulation des véhicules et aux possibilités d'aménagement. Sur chaque ligne, un véhicule réalise un circuit (ou une course) au cours de laquelle il s'arrête aux stations qui constituent cette ligne. Ceci se fait suivant une planification d'horaires imposée par les exploitants du système, et avec une fréquence qui peut être constante (dans le cas où le passage du véhicule est périodique) ou variable sinon.

II.2.1.1.3 Itinéraires

Dans un système de transport, nous définissons l'itinéraire d'un usager comme une suite alternée d'arrêts et de tronçons d'une ligne ou de plusieurs lignes (figure II.1). Un itinéraire peut contenir une partie d'une ligne ou la ligne entièrement. Chaque itinéraire permet donc d'assurer le transport en commun de passagers d'un arrêt origine à un arrêt destination. Il existe deux types d'itinéraires : commercial et spécial. Dans un itinéraire commercial, la montée et la descente des clients s'effectuent aux différents arrêts de cet itinéraire. Tandis que dans un itinéraire spécial, la montée et la descente des clients s'effectuent uniquement aux terminus.

II.2.1.2 Entités de transport

Le deuxième élément composant le système physique des transport public est représenté par les entités ou ressources de transport :trains, bus, tramway, etc. Dans un système de transport public, un exploitant dispose d'une flotte de véhicules caractérisée par :

- le nombre global de véhicules.
- le type de véhicule et ses caractéristiques: capacité, dimensions (longueur), caractéristiques dynamiques (accélération, décélération) et environnementales (mode d'énergie, bruit, etc.).

Dans cet élément nous pouvons également considérer les personnes qui conduisent les véhicules (conducteurs ou chauffeurs). Leur gestion doit prendre en compte des contraintes législatives, tels que les temps de repos physiologiques. Chaque ligne d'un STP est desservie par des entités de transport, selon son importance (zones desservies, tranche horaire du déplacement considéré au cours d'une journée, fréquence de passage souhaitée, niveau de la demande, etc.), de sorte à renforcer le service sur les lieux où la charge en usagers est importante.

II.2.2 Système de gestion

Le deuxième composant des STP est le système de gestion. Il pilote le système physique pour qu'il atteigne certains objectifs, en assurant entre autres la conception des horaires et l'information des usagers. Plusieurs travaux de recherche dans le domaine du transport public portent sur la conception et le développement d'outils d'aide à la gestion qui permettent aux exploitants d'intervenir dans la résolution de différents problèmes, comme les objectifs

“pertinents” que doivent se fixer les exploitants afin de gérer efficacement ces systèmes de transport et identifier les méthodes et les outils à mettre en œuvre par les exploitants pour atteindre leurs objectifs

Notons que même si les exploitants sont les principales entités citées ici intervenant dans la gestion d'un STP, il est utile de rappeler que d'autres acteurs sont également concernés, de près ou de loin, par cette gestion. En effet, les systèmes de transport public sont souvent exploités, en tenant compte de l'ensemble des paramètres liés aux différents acteurs. Le but de cette exploitation est d'assurer la coordination des services et leur qualité et de résorber les perturbations survenues sur une partie du système.

II.3 L'étude des systèmes de transport public

L'étude des systèmes de transports s'effectue en trois importantes phases :

la première phase est celle de la collecte des informations sur tous les paramètres influant sur l'évolution du système et qui sont nécessaires pour son exploitation. Cette phase, qui permet une bonne compréhension du fonctionnement du système, les informations récoltées jouent un rôle important dans cette étude en termes de modélisation, analyse et commande.

la deuxième phase est celle de la modélisation. Cette étape mobilise les concepteurs du domaine à utiliser des outils pour trouver un modèle décrivant les composantes du STP, en utilisant les informations de la première phase. Les résultats obtenus dépendent de cette dernière.

la phase finale concerne le contrôle avec l'analyse et la commande du système en exploitant le modèle décrivant son comportement. Cette phase se fait en deux étapes. La première consiste à évaluer les performances du système afin d'identifier ses forces et ses faiblesses. La seconde étape s'intéresse à l'amélioration de ces performances par le contrôle, par exemple en synchronisant les ressources afin de réduire les contraintes liées au transport, la régularité de passage des entités de transport, le respect des horaires théoriques, la rapidité de déplacement, etc.

II.4 Modélisation d'un système de métro

On va utiliser toutes les notions adoptées au premier chapitre qui nous serviront à modéliser l'infrastructure d'un métro. Nous nous intéressons à l'infrastructure existante dans la ville d'Alger exploitée par la structure publique Entreprise Métro d'Alger (EMA) comme montré dans la figure 2.2 qui comporte les caractéristiques suivantes : [21]

- Deux lignes avec 19 arrêts et 18 tronçons à double sens.
- Un arrêts de correspondance (de la ligne 1 à 2 et inverse).
- 12 trains en marche.

Les information fournie ci-dessus provienne du site de la structure concerné.

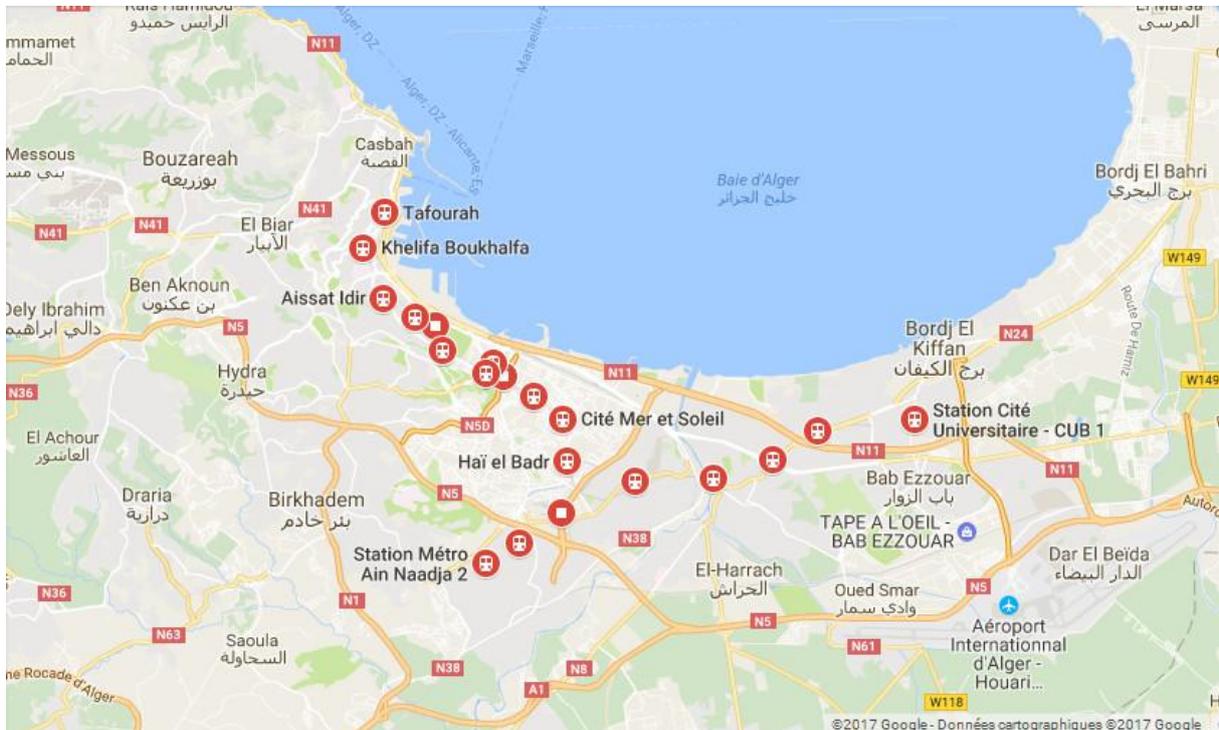


Figure II.2 : Situation géographique des lignes du métro d'Alger

Caractéristiques des deux lignes :

- Ligne 1 : Cette itinéraire qui s'étend de la Place des Martyrs a El Harrach centre qui mesure 15.19 Km et comporte les stations suivantes :
Place des Martyrs – Ali Boumendjel – Tafourah/Grande poste – Khelifa Boukhalfa – 1^{er} Mai – Aissat Idir – Hamma – Jardin d'Essai – Les Fusillés – Amirouche – Mer & Soleil – Hai El Badr – Bachdjarah Tennis – El Harrach Gare – El Harrach Centre.
- Ligne 2 : Cette itinéraire qui s'étend sur trois arrêts et mesure 3,6 Km, comporte les stations suivantes :
Hai El Badr – Halte des Ateliers – Ain Naadja 1 – Ain Naadja 2

Remarque : l'arrêt de Hai El Badr est un arrêt ou station de correspondance qui desservi sur le prolongement de la ligne 1, ou une correspondance vers la lignes 2.



Figure II.3 : Le tracé des itinéraires du métro d'Alger avec les noms des arrêts

On remarque sur la figure II.3, une partie du tracé indiqué est en rouge et une autre partie est en vert, qui veut dire qu'actuellement c'est deux parties sont en cour de réalisation [22]. Donc prochainement opérationnelle, mais on peut les inclure dans notre étude.

Le tracé de la figure II.3 comporte deux lignes composés de nœuds (arrêts) et relié successivement par des tronçons (chemins de fer), plus précisément :

La première ligne représente le chemin que doit emprunté les trains (de la ligne 1) de l'arrêt Place des Martyrs à l'arrêt El Harrach Centre pour l'aller et le contraire pour le retour.

La deuxième ligne représente le chemin que doit emprunté les trains de la ligne 2) de l'arrêt de correspondance Hai El Badr à l'arrêt Ain Naadja 2 pour l'aller et le contraire pour le retour.

II.4.1 Modélisation graphique de l'infrastructure du métro

La modélisation graphique de l'infrastructure du Métro (Figure II.3) est effectué par un graphe d'événements p-temporels, c'est le modèle graphique adopté pour notre étude. Le modèle p-temporels qui en résulte est donné dans la figure suivante :

Le modèle ci-dessus modélise l'infrastructure du métro, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre. Les GE par leur caractéristique (discuté dans chapitre 1), correspond en tous point aux caractéristique des composantes de base de la représentation spéciale d'un réseau de transport public (arrêts et tronçons). Ici les transitions symbolisent les différents arrêts et les places symbolisent les tronçons ou l'attente des passager dans l'arrêt de correspondance, une temporisation est affecté pour chaque place sous la forme d'intervalles de temps, c'est l'extension temporels des GE ou graphe d'événement p-temporels qui définissent le tableau horaire théorique du STP, la durée de parcours d'un train en marche devra être compris dans cette fourchette de temps spécifique à chaque arrêts, les temps de monté et descente des passagers dans l'arrêts de départ inclus. Cette intervalle de temps représente aussi l'attente théorique des passagers dans l'arrêts de correspondance. Enfin les jetons dans les différents places représentent la présence des trains en déplacement et représentent aussi dans la place concerné, la présence des passagers pour une correspondance (changement de ligne).

Pour bien définir le modèle de la figure II.4, nous notons :

Les transition $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{15}$ et les places $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}, p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{15}$ et p_{16} . Représentent respectivement les arrêts et les tronçons (les tronçons symbolisé par \rightarrow) du chemin des trains aller de la ligne 1 comme suite : Place des Martyrs \rightarrow Ali Boumendjel \rightarrow Tafourah/Grande poste \rightarrow Khelifa Boukhalifa \rightarrow 1^{er} Mai \rightarrow Aissat Idir \rightarrow Hamma \rightarrow Jardin d'Essai \rightarrow Les Fusillés \rightarrow Amirouche \rightarrow Mer & Soleil \rightarrow Hai El Badr \rightarrow Bachdjarah Tennis \rightarrow Bachdjarah \rightarrow El Harrach Gare \rightarrow El Harrach Centre.

Les transitions $t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{19}, t_{20}, t_{21}, t_{22}, t_{23}, t_{24}, t_{25}, t_{26}, t_{27}, t_{28}, t_{29}, t_{30}$ et t_{30} avec les places $p_{16}, p_{17}, p_{18}, p_{19}, p_{20}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{24}, p_{25}, p_{26}, p_{27}, p_{28}, p_{29}, p_{30}$, et p_1 . Représentent respectivement les arrêts et les tronçons (les tronçons symbolisé par \rightarrow) du chemin des trains retour de la ligne 1 comme suite : El Harrach Centre \rightarrow El Harrach Gare \rightarrow Bachdjarah \rightarrow Bachdjarah Tennis \rightarrow Hai El Badr \rightarrow Mer & Soleil \rightarrow Amirouche \rightarrow Les Fusillés \rightarrow Jardin d'Essai \rightarrow Hamma \rightarrow Aissat Idir \rightarrow 1^{er} Mai \rightarrow Khelifa Boukhalifa \rightarrow Tafourah/Grande poste \rightarrow Ali Boumendjel \rightarrow Place des Martyrs.

Les transitions t_{31}, t_{32}, t_{33} et t_{34} avec les places p_{32}, p_{33} et p_{34} . Représentent respectivement les arrêts et les tronçons (les tronçons symbolisé par \rightarrow) du chemin des trains aller de la ligne 2 comme suite : Hai El Badr \rightarrow Halte des Ateliers \rightarrow Ain Naadja 1 \rightarrow Ain Naadja 2.

Les transitions t_{34}, t_{35}, t_{36} et t_{34} avec les places p_{35}, p_{36} et p_{31} . Représentent respectivement les arrêts et les tronçons (les tronçons symbolisé par \rightarrow) du chemin des trains retour de la ligne 2 comme suite : Ain Naadja 2 \rightarrow Ain Naadja 1 \rightarrow Halte des Ateliers \rightarrow Hai El Badr.

Reste les deux places de correspondance p_{37} et p_{38} représentant respectivement les passagers en attente pour le passage de la ligne 1 à la ligne 2 et les passager en attente pour le passage la ligne 2 a la ligne 1 bien sûr dans l'arrêt de correspondance Hai El Badr.

Le modèle représente un système déjà en marche, ceci explique la présence d'un jeton dans différents places, montre la position des trains initialement (à l'instant initial choisi) dans les différents tronçons ou pendant leur parcours (l'évolution de l'état du système).

II.4.2 Modélisation mathématique du système métro

La mise sous équations implicite du modèle p-RdP (graphe d'événements p-temporels) de la figure II.4 donne les équations implicites de [20] qui représentent les dates des tirs des transitions et qui définissent l'instant de départ des trains dans les différents arrêts pour entamé leur parcours dans les différents tronçons :

$$\theta_j(k+1) = \theta_i(k - m_{oi}) + q_i(k+1)$$

Avec :

$$\theta_1(k+1) = \theta_{30}(k) + q_1(k+1)$$

$$\theta_2(k+1) = \theta_1(k+1) + q_2(k+1)$$

$$\theta_3(k+1) = \theta_2(k+1) + q_3(k+1)$$

$$\theta_4(k+1) = \theta_3(k) + q_4(k+1)$$

$$\theta_5(k+1) = \theta_4(k+1) + q_5(k+1)$$

$$\theta_6(k+1) = \theta_5(k+1) + q_6(k+1)$$

$$\theta_7(k+1) = \theta_6(k) + q_7(k+1)$$

$$\theta_8(k+1) = \theta_7(k+1) + q_8(k+1)$$

$$\theta_9(k+1) = \theta_8(k+1) + q_9(k+1)$$

$$\theta_{10}(k+1) = \theta_9(k) + q_{10}(k+1)$$

$$\theta_{11}(k+1) = \theta_{10}(k+1) + q_{11}(k+1)$$

$$\theta_{12}(k+1) = \theta_{11}(k+1) + q_{12}(k+1)$$

$$\theta_{13}(k+1) = \theta_{12}(k) + q_{13}(k+1)$$

$$\theta_{14}(k+1) = \theta_{13}(k+1) + q_{14}(k+1)$$

$$\theta_{15}(k+1) = \theta_{14}(k+1) + q_{15}(k+1)$$

$$\theta_{16}(k+1) = \theta_{15}(k) + q_{16}(k+1)$$

$$\theta_{17}(k+1) = \theta_{16}(k+1) + q_{17}(k+1)$$

$$\theta_{18}(k+1) = \theta_{17}(k+1) + q_{18}(k+1)$$

$$\theta_{19}(k+1) = \theta_{18}(k) + q_{19}(k+1)$$

$$\theta_{20}(k+1) = \theta_{19}(k+1) + q_{20}(k+1)$$

$$\theta_{21}(k+1) = \theta_{20}(k+1) + q_{21}(k+1)$$

$$\theta_{22}(k+1) = \theta_{21}(k) + q_{22}(k+1)$$

$$\theta_{23}(k+1) = \theta_{22}(k+1) + q_{23}(k+1)$$

$$\theta_{24}(k+1) = \theta_{23}(k+1) + q_{24}(k+1)$$

$$\theta_{25}(k+1) = \theta_{24}(k) + q_{25}(k+1)$$

$$\theta_{26}(k+1) = \theta_{25}(k+1) + q_{26}(k+1)$$

$$\theta_{27}(k+1) = \theta_{26}(k+1) + q_{27}(k+1)$$

$$\theta_{28}(k+1) = \theta_{27}(k) + q_{28}(k+1)$$

$$\theta_{29}(k+1) = \theta_{28}(k+1) + q_{29}(k+1)$$

$$\theta_{30}(k+1) = \theta_{29}(k+1) + q_{30}(k+1)$$

$$\theta_{31}(k+1) = \theta_{36}(k) + q_{31}(k+1)$$

$$\theta_{32}(k+1) = \theta_{31}(k+1) + q_{32}(k+1)$$

$$\theta_{33}(k+1) = \theta_{32}(k) + q_{33}(k+1)$$

$$\theta_{34}(k+1) = \theta_{33}(k+1) + q_{34}(k+1)$$

$$\theta_{35}(k+1) = \theta_{34}(k) + q_{35}(k+1)$$

$$\theta_{36}(k+1) = \theta_{35}(k+1) + q_{36}(k+1)$$

$$\theta_{31}(k+1) = \theta_{11}(k) + q_{37}(k+1)$$

$$\theta_{19}(k+1) = \theta_{31}(k) + q_{38}(k+1)$$

Nous réunissons toutes les équations pour former la représentation d'état généralisé du système donné comme suite sous forme :

$$E \cdot \theta(k+1) = A \cdot \theta(k) + q(k+1)$$

Avec :

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c} 70 \\ 60 \\ 60 \\ 70 \\ 65 \\ 60 \\ 70 \\ 70 \\ 70 \\ 65 \\ 70 \\ 70 \\ 60 \\ 60 \\ 60 \\ 60 \\ 60 \\ 60 \\ 60 \\ 70 \\ 70 \\ 65 \\ 70 \\ 70 \\ 70 \\ 60 \\ 65 \\ 70 \\ 60 \\ 60 \\ 70 \\ 65 \\ 65 \\ 70 \\ 70 \\ 70 \\ 60 \\ 60 \end{array} \right] \leq \left[\begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \\ q_{12} \\ q_{13} \\ q_{14} \\ q_{15} \\ q_{16} \\ q_{17} \\ q_{18} \\ q_{19} \\ q_{20} \\ q_{21} \\ q_{22} \\ q_{23} \\ q_{24} \\ q_{25} \\ q_{26} \\ q_{27} \\ q_{28} \\ q_{29} \\ q_{30} \\ q_{31} \\ q_{32} \\ q_{33} \\ q_{34} \\ q_{35} \\ q_{36} \\ q_{37} \\ q_{38} \end{array} \right] \leq \left[\begin{array}{c} 140 \\ 120 \\ 120 \\ 140 \\ 130 \\ 120 \\ 140 \\ 140 \\ 140 \\ 130 \\ 140 \\ 140 \\ 120 \\ 120 \\ 120 \\ 120 \\ 120 \\ 120 \\ 120 \\ 140 \\ 140 \\ 130 \\ 140 \\ 140 \\ 140 \\ 120 \\ 130 \\ 140 \\ 120 \\ 120 \\ 140 \\ 130 \\ 130 \\ 140 \\ 140 \\ 140 \\ 120 \\ 120 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Cette forme d'état et une représentation mathématique du graphe d'événements p-temporels qui représente l'infrastructure du métro d'Alger, comme dans les systèmes continues, elle servira pour l'analyse et l'élaboration d'une commande.

Remarque : Les temporisations indiqués ci-dessus sont théoriques et ne représentent pas les données réels appartenant à la structure public qui exploite le métro. Ces temporisations sont données en secondes.

II.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons défini les systèmes de transport public comme des SED, ces composantes ont été citées, l'outil de modélisations graphique adopté dans le chapitre 1 que sont les graphes d'évènements p-temporels nous ont permis de modéliser graphiquement l'infrastructure du système d'un métro. Puis nous avons mis sous équations implicites le modèle p-temporels de l'infrastructure, la représentation d'espace d'état généralisée du système a été établie. Cette analyse algébrique nous permettra d'étudier les performances du système et le contrôle de ce dernier par l'élaboration d'une commande. Ceci sera l'objectif développé dans le dernier chapitre.

CHAPITRE III

Commande d'un système à événement discret :
application à un système de transport public
(métro).

CHAPITRE III : Commande d'un système à événements discrets : application à un système de transport public (métro).

III.1 Introduction

De façon classique, la commande d'un système à événements discrets est le pilotage de ses entrées (contrôle des tirs des transitions) en vue d'obtenir un comportement souhaité pour le système. Parmi toutes les stratégies de commande existantes, l'approche prédictive est souvent employée dans le milieu industriel. Cette approche est une méthode de commande bien établie et populaire [23]. La loi de commande est obtenue à partir d'un problème d'optimisation en ligne résolu à chaque instant sur un intervalle futur, connu sous le nom d'horizon de prédiction. Ainsi, plus d'une entrée de commande est généralement calculée et seule la première loi de commande est implémentée [24].

La théorie de la commande prédictive est étendue récemment à des systèmes d'événements discrets (SED) [25], pour synthétiser une loi de commande optimal sur un horizon fini pour une classe de SED modélisée dans l'algèbre max-plus. Ensuite, l'approche est étendu à un système linéaire max-plus soumis à des erreurs de bruit de modélisation [26]. Le contrôle est obtenu en résolvant un problème de programmation linéaire. Le travail de Necoara [27] traite le calcul d'une loi de commande sans contrainte aux systèmes linéaires max-plus. Les auteurs fournissent des conditions suffisantes qui garantissent la stabilité de la boucle fermée sur un horizon fini. La commande prédictive est appliqué à un SED modélisé par des réseaux continus de Petri [28][29], où les variables sont continue par morceaux.

Plus récemment, l'approche est appliquée au SED modélisé dans l'algèbre standard pour calculer une commande en boucle ouverte sur un horizon fini. Declerck [30] Propose une technique pour modifier la commande de telle sorte que la contrainte causale soit satisfaite. Une autre technique donnée chez Declerck [31], conduit à une réduction de l'espace d'état basée sur les modèles de commande prédictives. Dans ce mémoire on va utiliser une approche qui est une commande prédictive à horizon fini [17] d'un SED modélisé par des GE p-temporels et par équations implicites dans l'algèbre conventionnelle [20]. Nous commençons par une présentation de cette stratégie de commande d'un SED.

III.2 Modèle de Commande prédictive [17]

La commande prédictive est une stratégie de contrôle en ligne bien établie qui calcule itérativement l'entrée de commande optimal en résolvant un problème d'optimisation, sur un horizon de prédiction N_p comme suit:

$$\min_{u_c(k+i|k), i=0,1..N_c} J_{N_p}(k)$$

Où $J_{N_p}(k)$ est la fonction de coût qui peut être formulée sous différentes formes. Dans ce travail, la fonction coût est quadratique et considérée comme suite :

$$J_{N_p}(k) = \sum_{i=1}^{N_p} x(k+i|k)^T Q x(k+i|k) + \sum_{i=1}^{N_c} u(k+i|k)^T R u(k+i|k) \quad (\text{III.1})$$

Où $Q > 0$ et $R \geq 0$ sont des matrices de pondération symétriques et L l'indice k assigné au i ème tir des transitions.

Q est définie positive et R semi-définie positive.

Cette fonction de coût est soumise à des contraintes sur les entrées de commande $u_c(k+i|k), i = 0,1 \dots, N_c - 1$ où N_c est l'horizon de commande et éventuellement aussi sur l'état $x(k+i|k), i = 0,1 \dots, N_p - 1$, où N_p est l'horizon de prédiction.

III.2.1 Modèle de Commande prédictive à horizon fini

III.2.1.1 Formulation du problème [17]

Considérons le modèle présenté par la représentation d'état généralisée. Si la matrice E est inversible à gauche, le système admet une solution unique et devient explicite comme suit:

$$\theta(k+1) = E^L A \theta(k) + E^L q(k+1) \quad (\text{III.2})$$

Où E^L est l'inverse à gauche de E et $a \leq q(k+1) \leq b$.

Le système est actuellement linéaire invariant avec des contraintes sur le vecteur de commande.

Avant de continuer nous définissons le comportement 1-periodique d'un RdP :

Définition 3.1 : Un comportement 1-périodique est représenté par l'équation suivante :

$$\theta(k + 1) = \theta(k) + \lambda \cdot \mu$$

Avec

$\mu = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ et le temps de cycle noté λ , qui représente la fréquence de tire des transition.

Nous voulons suivre une trajectoire désirée $z(k)$, avec $k \in \mathbb{N}$, donnée par un comportement 1-périodique défini comme suit:

$$z(k + 1) = z(k) + \lambda \cdot \mu_m$$

Pour calculer le temps de cycle λ nous devons effectués une évaluation des performances du système. Une méthode est donné dans [32] et son développement est donné par la suite.

III.2.1.2 Evaluation des performances

Considérons un comportement 1-périodique et la représentation d'état généralisé donné respectivement par les deux l'équations suivantes :

$$\theta(k + 1) = \theta(k) + \lambda \cdot \mu \tag{III.3}$$

$$E \theta(k + 1) = A \cdot \theta(k) + q(k + 1) \tag{III.4}$$

En remplaçant l'équation (III.3) dans (III.4), nous obtenons :

$$(E - A) \cdot \theta = q - \lambda \cdot E \cdot \mu$$

qui conduit à :

$$[-W \ I_n \ E \cdot \mu] \begin{bmatrix} \theta \\ q \\ \lambda \end{bmatrix} = 0_{n+m+1}$$

Sujet à :

$$a \leq q \leq b$$

$$\theta \geq 0_m$$

Où, n (m) le nombre de places (transitions) d'un modèle de graphe d'événements p-temporels (GE p-temporels) .

Le temps de cycle minimum (maximum) admissible et le temps de séjour optimal associé aux jetons peuvent être calculés en résolvant le problème de programmation linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser (maximiser) } \lambda \\ \text{sous contraintes} \\ E. \mu. \lambda = C. \theta + q \\ a \leq q \leq b \\ \theta \geq 0_m \end{array} \right. \quad (\text{III.5})$$

L'équation (III.2) peut être réécrite comme suit:

$$z(k+1) = E^L A. z(k) + E^L. q_z \quad (\text{III.6})$$

Où q_z est le vecteur temps de séjour qui permet d'obtenir la trajectoire désirée $z(k)$ (comportement souhaité) avec un certain temps de cycle λ .

Soit $e(k) = \theta(k) - z(k)$ est le vecteur d'état du modèle d'erreur donné comme suit:

$$e(k+1) = E^L A. e(k) + E^L. (q(k+1) - q_z) \quad (\text{III.7})$$

L'équation (III.7) représente le modèle d'erreur donné par la différence entre le modèle du système donné par l'équation (III.2) et le modèle de la trajectoire désirée donnée par l'équation (III.6). L'équation (III.7) équivaut à :

$$e(k+1) = \mathbb{A}. e(k) + \mathbb{B}. u(k+1) \quad (\text{III.8})$$

$$\text{Avec : } \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{A} = E^L A \\ \mathbb{B} = E^L \\ u(k+1) = q(k+1) - q_z \end{array} \right.$$

L'équation (III.8) est un système invariant d'événement linéaire où $u(k+1)$ est l'entrée de commande et $e(k+1)$ est l'état du système d'erreur soumis aux contraintes sur l'entrée de commande donnée comme suit:

$$a - q_z \leq u(k+1) \leq b - q_z \quad (\text{III.9})$$

L'objectif est de calculer une commande optimal pour le système donné par l'équation (III.8) qui nous permet de suivre une trajectoire désirée concernant les contraintes sur le vecteur de commande résultant (III.9). Pour cela, nous résolvons un problème d'optimisation de la commande en minimisant la fonction de coût donnée par l'équation (III.1) sur un horizon fini, formulé comme suite:

$$\begin{aligned} \min J_{N_P}(k) & \quad (III.10) \\ \text{Sujet a } G \cdot u(k) & \leq g \end{aligned}$$

Avec

$$J_{N_P}(k) = \sum_{i=1}^{N_P} e(k+i|k)^T Q e(k+i|k) + \sum_{i=1}^{N_c} u(k+i|k)^T R u(k+i|k)$$

Les contraintes de commande sont représentées par un ensemble polyédral comme suit:

$$\mathcal{P}(G, g) = \{u(k), \in \mathbb{R}^n, G \cdot u(k) \leq g\}$$

Avec : $G = \begin{bmatrix} I_n \\ -I_n \end{bmatrix}$, $g = \begin{bmatrix} b - q_z \\ q_z - a \end{bmatrix}$. I_n est une matrice diagonale unitaire .

III.2.1.3 Évolution du système dans un horizon fini

L'idée est de supprimer la variable d'état $e(k)$ en développant la dynamique du système donnée par l'équation (III.8). La valeur de k est N_P qui est l'horizon de prédiction. Nous obtenons l'équation suivante:

$$e(N_P) = A^{N_P} \cdot e(0) + \sum_{i=1}^{N_P} A^{N_P-i} \cdot B \cdot u(i) \quad (III.11)$$

Cette équation (III.11) peut être réécrite sous forme matricielle comme suit:

$$\mathbf{E} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{A} \cdot e(0) \quad (III.12)$$

Avec

$$\mathbf{E} = [e(1) \ e(2) \ \dots \ e(N_P)]^T$$

$$\mathbf{U} = [u(1) \ u(2) \ \dots \ u(N_P - 1)]^T$$

$$\mathbf{A} = [\mathbb{A}^1 \ \mathbb{A}^2 \ \dots \ \mathbb{A}^{N_P}]^T$$

$$S = \begin{bmatrix} \mathbb{B} & \mathbf{0}_{m \times n} & \dots & \dots & \mathbf{0}_{m \times n} \\ \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} & \mathbb{B} & \dots & \dots & \mathbf{0}_{m \times n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{A}^{N_P-1} \cdot \mathbb{B} & \mathbb{A}^{N_P-2} \cdot \mathbb{B} & \dots & \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} & \mathbb{B} \end{bmatrix}$$

Ou $\mathbf{0}_{m \times n}$ est la matrice null de taille $m \times n$, m est le nombre de transitions, n est le nombre de places.

En remplaçant l'équation (III.12) dans la fonction de coût donnée par l'équation (III.10), on obtient une fonction de coût dépendant uniquement de la variable U comme suit:

$$J = \frac{1}{2} U^T H U + f^T U \quad (\text{III.13})$$

$$\text{Avec} \begin{cases} H = S^T Q_m S + R_m \\ f^T = A^T \cdot e(0)^T \cdot Q_m \cdot S \\ Q_m = \text{diag}[Q \ Q \ \dots \ Q] \\ R_m = \text{diag}[R \ R \ \dots \ R] \end{cases}$$

La fonction de coût donnée par l'équation (III.13) est soumise aux contraintes sur le contrôle U qui sont données comme suit:

$$\mathbf{G} \cdot U \leq \mathbf{g} \quad (\text{III.14})$$

$$\text{Avec } \mathbf{G} = \text{diag}[G \ G \ \dots \ G] \text{ et } \mathbf{g} = \text{diag}[g \ g \ \dots \ g]^T$$

La structure du problème (III.13) sujet à (III.14) est une programmation quadratique linéaire pour laquelle de nombreux outils de résolution existent. Dans ce travail, nous avons utilisé l'outil MATLAB.

III.3 Application sur un système de transport public

Pour l'évaluation des performances et l'élaboration d'une commande pour le système de transports publics, plus exactement un système métro définie dans le chapitre précédant, nous utilisons la méthodologie de la commande prédictive à horizon fini [17] qui été définie au préalable. Cette méthodologie nous permettra une synchronisation optimal des trains en marche afin de satisfaire un temps de cycle établie au préalable par une l'évaluation des performances du système.

III.3.1 Evaluation de performance du système métro

l'évaluation des performances d'un SED, est une évaluation du comportement optimal d'une configuration donnée du système (les données ou paramètres collecté et représenté dans la modélisation). Dans notre application STP (métro), ces performances sont représentés par la distance temporels séparant chaque train en circulation, cette distance doit être minimisé afin de garantir une fréquence maximale de passage des trains dans les arrêts et qui garantit leurs ponctualité vis-à-vis les usagés. Pour ce faire, une synchronisation des trains pendant leurs parcours dans chaque tronçon est requise, afin de garder une distance minimale entre les trains en circulation, cette synchronisation optimal est satisfaite par un temps de parcours inter arrêt spécifique dans chaque tronçon.

Afin d'évaluer les performances du système métro nous utilisons la représentation d'état généralisé (équations d'états implicites) donné dans le deuxième chapitre (qui modélise l'infrastructure du métro) qu'on va exploiter et mettre sous forme d'un problème de programmation linéaire défini au préalable (voire l'équation III.5), la résolution du problème nous donne le temps de cycle minimale qui représente la fréquence de tir des transitions du GE p-temporel de l'infrastructure de métro (figure II.4) qui provoque le passage des jetons vers les places en aval. Physiquement cela correspond à la fréquence d'arrivé des trains dans chaque arrêt, aussi la distance temporels entre les trains en déplacement dans l'infrastructure du métro, et au final la durée maximale d'attente des passagers dans les différents station, mis à part l'attente pour la correspondance (changement de ligne) avec une temps d'attente spécifique.

Deux autres données fourni par la résolution du problème de programmation linéaire nous donne les temporisations ou temps de parcours associé à chaque tronçon que doit satisfaire chaque train afin de réaliser la synchronisation et le temps de cycle, la premier date de tir des transitions ou la premier date d'arrivée des trains dans chaque arrêts.

Dans notre application la résolution du problème de programmation linéaire donné par l'équation (III.5), nous donne les données suivantes :

- Un temps de cycle de 260 secondes. Cela correspond à une fréquence de passage des trains dans chaque arrêt, et aussi le temps d'attente maximum des usagés dans les différents arrêts . Mais pas l'attente dans l'arrêts de correspondance.

Prenons un exemple de l'arrêts Hai El Badr représenté par le transition t_{19} dans GE p-temporel, admettons qu'un train est arrivé à 10h00 et définie de le RdP par le tir de la transition t_{19} , alors le prochain train effectuera son arrêts à 10h00 plus 260 secondes, ce qui fait 10h 04min et 20sec, celui d'après s'arrêtera à la station à 10h 11min et 20sec ainsi de suite.

- Les dates du premier tir de chaque transition ou le premier temps de parcours des trains dans chaque tronçon (après l'instant initiale choisi), temps de monté et descente des passagers est inclus :

$$\theta_{1 \text{ à } 36}(1) = [116.5750 \ 199.7273 \ 284.4407 \ 127.9034 \ 221.7811 \ 309.8752 \ 157.9688 \\ 262.4734 \ 371.7889 \ 221.3140 \ 340.7401 \ 410.7401 \ 210.7401 \ 270.7401 \ 330.7401 \\ 130.7401 \ 190.7401 \ 250.7401 \ 60.7401 \ 154.7968 \ 243.2742 \ 82.4642 \ 174.6713 \\ 268.5400 \ 93.8698 \ 180.4340 \ 274.8718 \ 100.5097 \ 181.4170 \ 276.6243 \ 200.7401 \\ 278.5429 \ 362.8698 \ 189.4898 \ 277.9817 \ 369.8478]^T.$$

- Les temporisations ou temps de séjours désiré q_z des jetons successivement dans chaque places pour réaliser la synchronisation optimal et le temps de cycle, physiquement cela correspond aux temps de parcours que doit mettre les trains sur chaque tronçon (temps de monté et descente des passagers dans l'arrêt de départ inclus) sont :

$$q_z(1 \text{ à } 38) = [99.9507 \ 83.1523 \ 84.7134 \ 103.4627 \ 93.8777 \ 88.0941 \ 108.0936 \\ 104.5046 \ 109.3155 \ 109.5251 \ 119.4261 \ 70.0000 \ 60.0000 \ 60.0000 \ 60.0000 \ 60.00 \\ 60.0000 \ 60.0000 \ 70.0000 \ 94.0567 \ 88.4774 \ 99.1899 \ 92.2071 \ 93.8687 \ 85.3298 \\ 86.5641 \ 94.4378 \ 85.6379 \ 80.9073 \ 95.2073 \ 90.8923 \ 77.8028 \ 84.3269 \ 86.6200 \\ 88.4919 \ 91.8661 \ 120.0000 \ 120.0000]^T.$$

Pour exemple le temps de parcours que doit faire chaque train dans le tronçon qui relie l'arrêts Hamma à Jardin d'Essai est de 108 secondes, aussi dans le tronçons reliant l'arrêts Khelifa Boukhalifa à Tafourah/Grande poste est de 85 secondes. Notons que le temps de montée et descente des passagers dans l'arrêt de départ est inclus dans les temporisations.

L'attente maximale des passagers dans l'arrêt de correspondance Hai El Badr est de 120 secondes pour l'allé et 120 secondes pour le retour, donné dans $q_z(37)$ et $q_z(38)$.

Remarque : La numérotation des composants des deux vecteurs (1 à 36 et 1 à 38) correspond respectivement aux numéros des transitions et places du GE p-temporels, l'explication des numéros affecté aux places et transitions a été donné dans le deuxième chapitre.

Cette évaluation des performances nous permet de connaître le comportement optimal que peut atteindre le système (qui correspond à la configuration donné dans le GE p-temporels), c'est le comportement désiré qu'on souhaite imposer au système de métro. Pour cela il faut contrôler le système en introduisant une commande on utilisant la théorie de la commande prédictive [17], l'objectif est de calculer une commande qui va forcer le système à converger vers la trajectoire désirée.

III.3.2 Commande prédictive à horizon fini du système métro

Comme nous l'avons mentionné précédemment, l'évaluation des performances nous a permis d'établir une trajectoire désirée, ou le système doit converger vers cette trajectoire pour avoir le comportement optimal souhaité.

Tout d'abord, nous fixons l'horizon de prédiction $N_p = 10$ et l'horizon de contrôle $N_c = 8$, et la fonction de coût à minimiser est donnée par l'équation (III.10) :

$$\min J_{N_p}(k)$$

$$\text{Sujet à } G \cdot u(k) \leq g$$

Avec :

$$J_{N_p}(k) = \sum_{i=1}^{N_p} e(k+i|k)^T Q e(k+i|k) + \sum_{i=1}^{N_c} u(k+i|k)^T R u(k+i|k)$$

$$Q = I_{36} \text{ et } R = I_{76}$$

$$G = \begin{bmatrix} I_{38} \\ -I_{38} \end{bmatrix} \text{ et } g = \begin{bmatrix} b - q_z \\ q_z - a \end{bmatrix}$$

Le problème de commande est reformulé comme suit:

$$\min J = \frac{1}{2} U^T H U + f^T U$$

$$\text{Sujet a : } G \cdot U \leq g$$

Avec :

$$H = S^T Q_m S + R_m, Q_m = I_{360}, R_m = I_{304}$$

$$f^T = e(0)^T \cdot A^T \cdot Q_m \cdot S, e(0) = [-Z_0], A = [A \ A^2 \ A^3 \ \dots \ A^{10}]^T$$

$$U = [u(1) \ u(2) \ \dots \ u(8)]^T;$$

$$S = \begin{bmatrix} \mathbb{B} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A \cdot \mathbb{B} & \mathbb{B} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A^2 \cdot \mathbb{B} & A \cdot \mathbb{B} & \mathbb{B} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A^3 \cdot \mathbb{B} & A^2 \cdot \mathbb{B} & A \cdot \mathbb{B} & \mathbb{B} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A^4 \cdot \mathbb{B} & A^3 \cdot \mathbb{B} & A^2 \cdot \mathbb{B} & A \cdot \mathbb{B} & \mathbb{B} & 0 & 0 & 0 \\ A^5 \cdot \mathbb{B} & A^4 \cdot \mathbb{B} & A^3 \cdot \mathbb{B} & A^2 \cdot \mathbb{B} & A \cdot \mathbb{B} & \mathbb{B} & 0 & 0 \\ A^6 \cdot \mathbb{B} & A^5 \cdot \mathbb{B} & A^4 \cdot \mathbb{B} & A^3 \cdot \mathbb{B} & A^2 \cdot \mathbb{B} & A \cdot \mathbb{B} & \mathbb{B} & 0 \\ A^7 \cdot \mathbb{B} & A^6 \cdot \mathbb{B} & A^5 \cdot \mathbb{B} & A^4 \cdot \mathbb{B} & A^3 \cdot \mathbb{B} & A^2 \cdot \mathbb{B} & A \cdot \mathbb{B} & \mathbb{B} \\ A^8 \cdot \mathbb{B} & A^7 \cdot \mathbb{B} & A^6 \cdot \mathbb{B} & A^5 \cdot \mathbb{B} & A^4 \cdot \mathbb{B} & A^3 \cdot \mathbb{B} & A^2 \cdot \mathbb{B} & (A \cdot \mathbb{B} + \mathbb{B}) \\ A^9 \cdot \mathbb{B} & A^8 \cdot \mathbb{B} & A^7 \cdot \mathbb{B} & A^6 \cdot \mathbb{B} & A^5 \cdot \mathbb{B} & A^4 \cdot \mathbb{B} & A^3 \cdot \mathbb{B} & (A^2 \cdot \mathbb{B} + A \cdot \mathbb{B} + \mathbb{B}) \end{bmatrix}$$

$$G = [G \ G \ G \ G \ G \ G \ G \ G]^T$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g \end{bmatrix}$$

Le résultat de l'optimisation nous donne la commande u qu'on va remplacer dans l'équation (III.8), l'évolution du système d'erreur est montré dans les courbes suivantes :

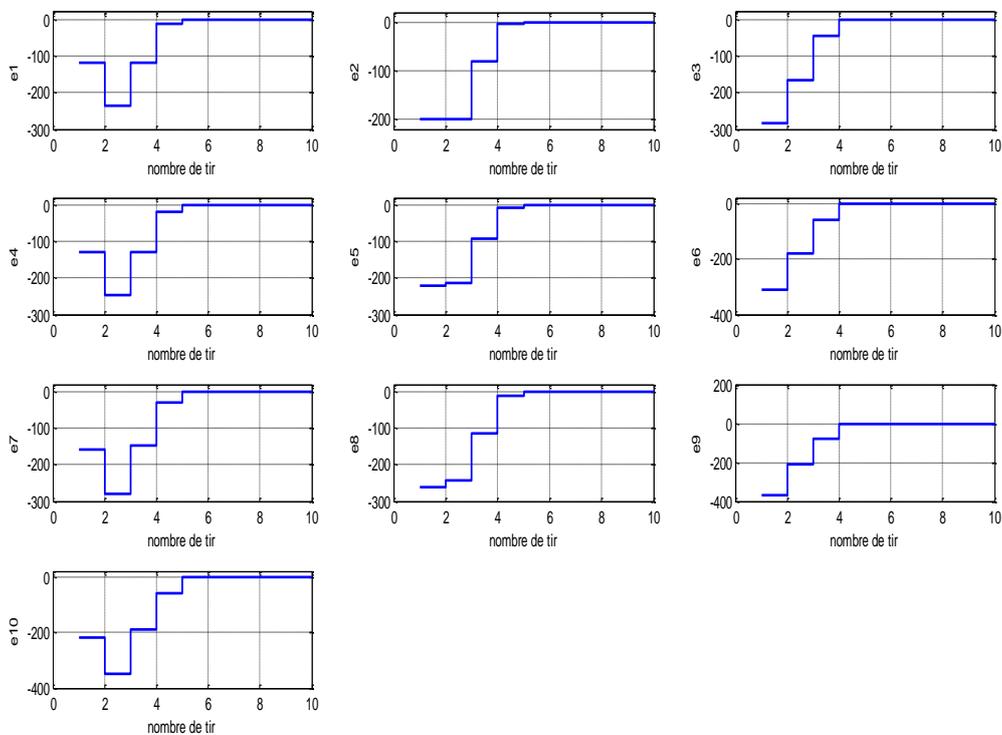
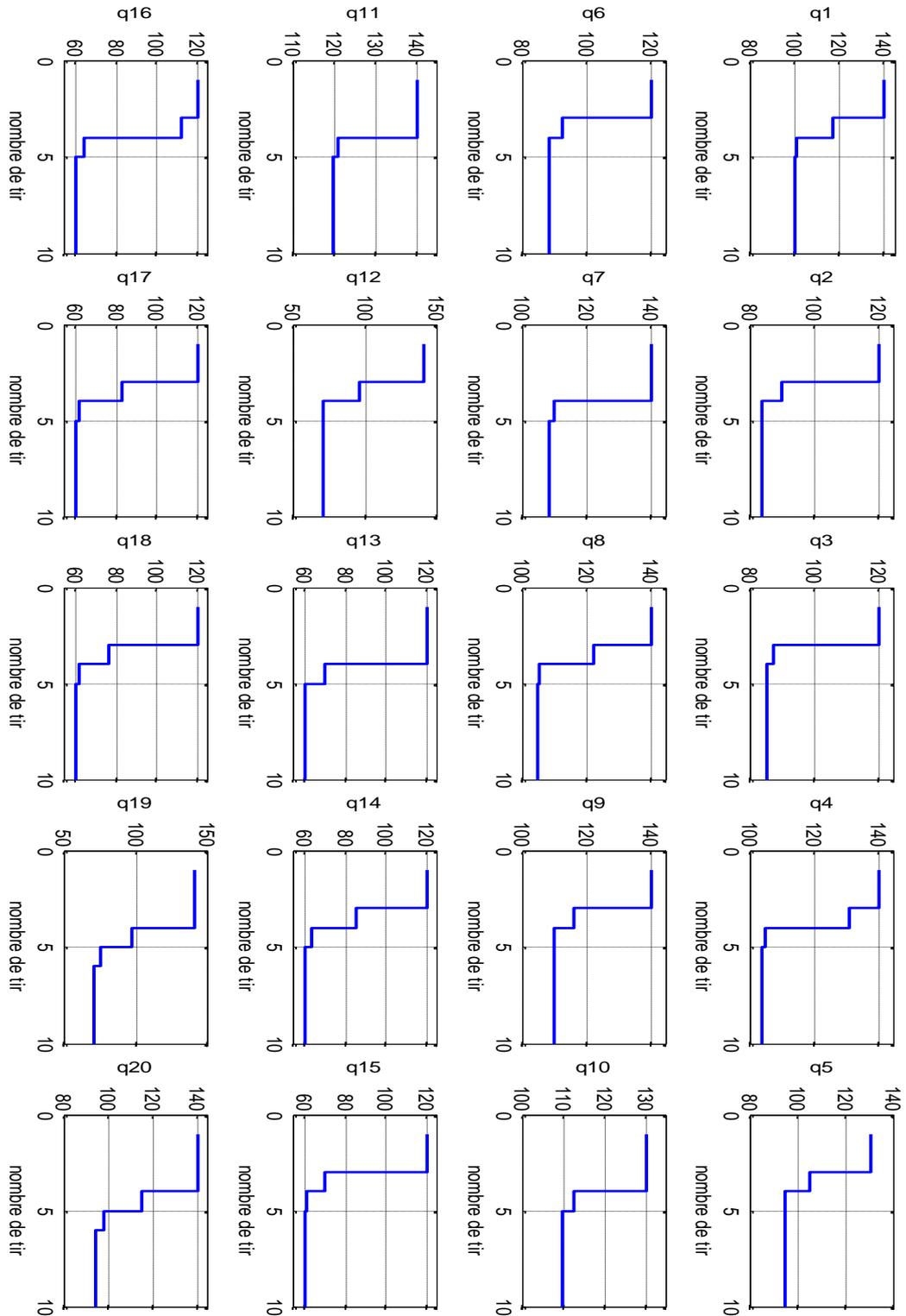


Figure III.1 : évolutions du modèle d'erreur.

La figure III.1 nous montre la convergence des équations d'erreurs vers la valeur zéro, qui signifie que la dynamique du système métro a convergé vers la trajectoire désirée. Physiquement cela veut dire que le comportement dynamique du système a évolué vers le comportement souhaité avec une synchronisation des trains qui réalise le temps de cycle établi.

La commande u nous permet aussi de calculer les courbes suivante :



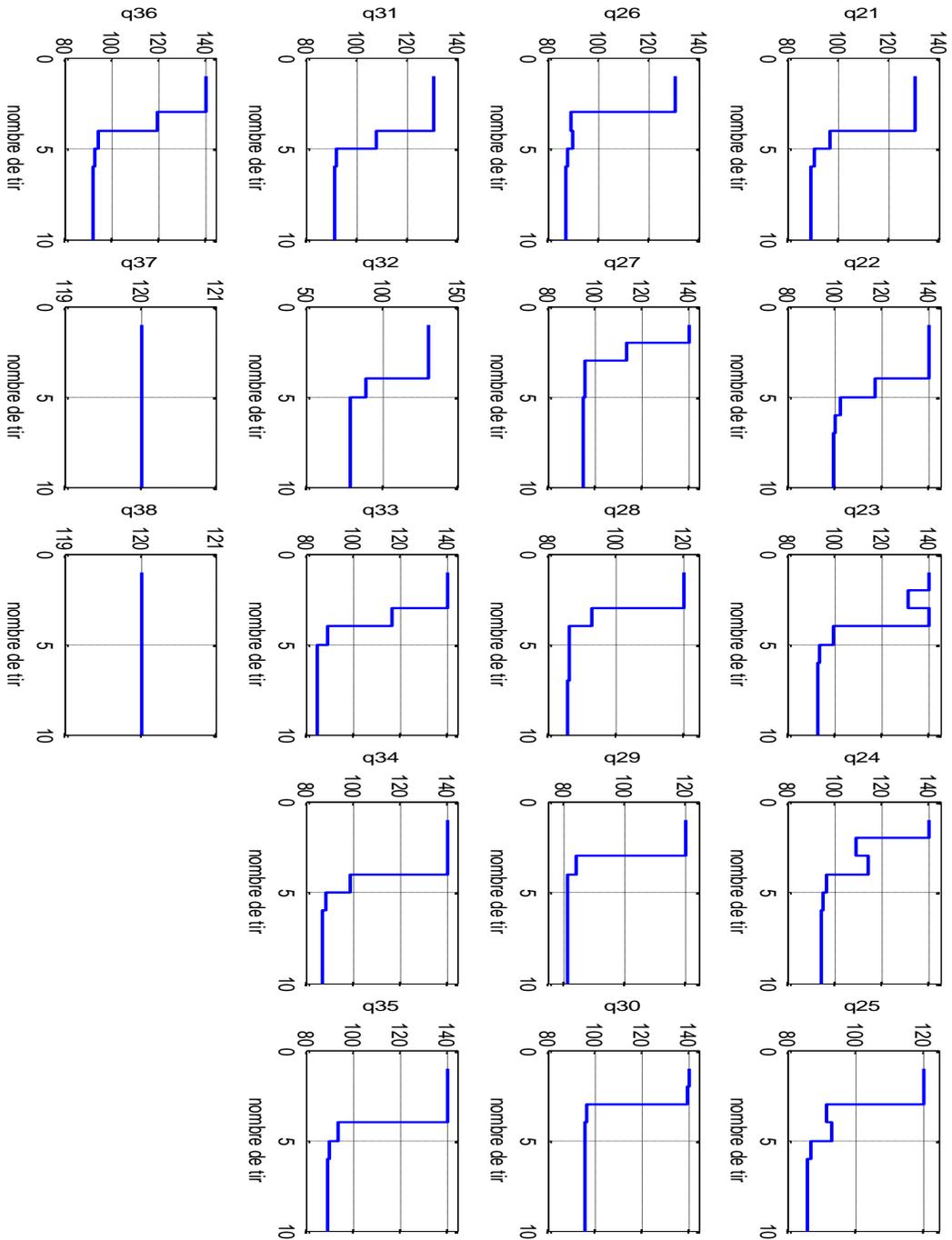


Figure III.2 : Evolutions des temps de parcours des trains ou temps de séjours des jetons

Cette dernière figure, montre que la commande u agit sur la convergence des temps de séjours des jetons associé à chaque place du GE p-temporels vers le temps de séjours désiré q_z dans le total respect des contraintes de temps. Physiquement, cela veut dire que les trains dans les différents tronçons répondent à ce nouveau temps de parcours inter arrêts désiré, afin d'être synchronisé et réaliser le temps de cycle ou la fréquence de passage optimal des trains souhaité dans les arrêts, aussi peut être interprété comme la distance temporel entre les trains en circulation dans l'infrastructure.

III.4 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, l'objectif était de contrôler la dynamique du système métro et le forcer à un comportement souhaité établie par une évaluation des performances. Nous avons commencé par présenter la méthode de l'évaluation des performances d'un SED par la résolution d'un problème de programmation linéaire [32]. En suite la méthodologie de la commande prédictive à horizon fini pour le contrôle d'un SED a été discuté. Par la suite, on a appliqué l'évaluation des performances sur notre système métro pour obtenir le comportement souhaité ou trajectoire désirée, à savoir un temps de cycle ou la fréquence de passage optimal et régulière des trains sur chaque arrêt, et le temps de parcours inter arrêts des trains spécifique à chaque tronçons, en précisant que le temps de montée et descente des passagers dans l'arrêts de départ est inclus, ce temps de parcours réalise le temps de cycle en prenons en compte l'attente des passagers dans l'arrêt de correspondance. Par la suite, l'utilisation de méthodologie de la commande prédictive à horizon fini [17], nous a permis d'élaborer une commande qui converge le système vers la trajectoire désirée.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE :

Dans notre étude sur un système de métro situé dans la ville d'Alger, les informations collectées nous ont permis la construction d'un graphe d'événements p-temporels, le modèle graphique représente l'infrastructure du système métro avec une configuration donnée (temporisation, nombre de train...). Une représentation d'états généralisée du système en utilisant les équations d'états implicites est établie. Nous avons ensuite utilisé cette représentation du système métro pour effectuer une évaluation des performances sous forme d'un problème de programmation linéaire. La résolution du problème nous donne le comportement optimal que le système métro peut atteindre, ce comportement se traduit par un temps de parcours inter station (temps de montée et descente des passagers inclus) des trains en marche spécifique à chaque tronçon, et qui permet la synchronisation des trains en circulation afin de garantir une fréquence de passage régulière des trains dans chaque station, en prenant en compte les passagers en attente dans l'arrêt de correspondance.

Pour réaliser la synchronisation, l'utilisation de la théorie de la commande prédictive à horizon fini nous a permis de contrôler la dynamique du système, la commande synthétisée agit sur le temps de parcours inter stations des trains, et réalise la synchronisation afin d'avoir le comportement souhaité.

Pour finir, le modèle utilisé est limité et ne prend pas en compte tous les paramètres influant sur le système de métro. Des extensions peuvent être ajoutées au modèle actuel afin d'intégrer d'autres paramètres, comme l'augmentation et la diminution du nombre de trains en marche à l'aide de réseaux d'automates, et apporter des extensions sur le GE p-temporels pour prendre en compte l'attente des passagers dans les stations. Nous pouvons aussi prendre en compte les perturbations, avec la synthèse d'une loi de commande de rétroaction optimale qui nous permet de stabiliser le système en boucle fermée, en utilisant la théorie de la commande prédictive à horizon infini.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J., and Viot, M. (1983). Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes. Rapport de recherche 191, INRIA, Le Chesnay, France.
- [2] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J., and Viot, M. (1985). A linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-30:210–220.
- [3] LeBoudec, J.-Y. and Thiran, P. (2002). *Network Calculus*. Springer Verlag.
- [4] Lotito, P., Mancinelli, E., and Quadrat, J.-P. (2001). A min-plus derivation of the fundamental car-traffic law. Report 324, INRIA.
- [5] Braker, H. (1993). *Algorithms and Applications in Timed Discrete Event Systems*. PhD thesis, Delft University of Technology.
- [6] Olsder, G., Subiono, and Gettrick, M. M. (1998). Course notes: On large scale max-plus algebra model in railway systems. *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique*, Ecole de printemps d'informatique théorique.
- [7] René David et Hassane Alla, "Du Grafcet aux réseaux de Petri". Série Automatique, HERMES, Paris 1992.
- [8] W. Khansa. "Réseaux de Petri P-temporels : Contribution à l'Etude des Systèmes à Evénements Discrets". Thèse de Doctorat de l'Université de Savoie, France, mars 1997.
- [9] J. Sifakis. Structural properties of petri nets. In *Mathematical foundation of computer science*, volume 64. J. Windowski (ed), Springer Verlag, 1978.
- [10] T. Murata. *Petri Nets : Properties, Analysis and Applications*. *IEEE Proceedings : Special issue on Discrete Event Systems*, vol. 77, no. 4, pages 541–581, 1989.
- [11] J. M. Proth et X. Xie. *Les réseaux de petri pour la conception et la gestion des systèmes de production*. Masson, Paris, 1995.
- [12] Sifakis J. "Performance Evaluation of Systems Using Petri Nets". *Net Theory and Application*, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag n° 84, Berlin, Germany, pp 307-319.

- [13] P. Merlin. A study of the Recoverability of Computer System. Phd thesis, Dep. Comput. Sci., Univ. California, Irvine, 1974.
- [14] W. Khansa, J. P. Denat et S. Collart-Dutilleul. P-time petri nets for manufacturing systems. In proceedings of WODES'96, pages 94–102, Edimburgh, UK, 1996.
- [15] A. Mhalla, S. Collart Dutilleul, N. Jerbi , E. Craye (2010). Graphe d'événement P-Temporels à arcs valués: Application à une unité de production du lait. *Revue Electronique Sciences & Technologies de l'Automatique (e-STA)*, 7(1), 9-16.
- [16] Bonhomme, P. (2001). Réseaux de Petri P-temporels, contributions la commande robuste. Phd thesis. Savoie university. Bonhomme, P. (2001). Réseaux de Pétri P-temporels: contributions à commande robuste. Thèse de doctorat. université de Savoie, juillet 2001
- [17] H. Hamri, R. Kara & S. Amari (2016) Model predictive control of P-time event graphs, *International Journal of Systems Science*, Vol 47, No16, 3792-3802.
- [18] M.K. Didi-Alaoui. Étude et supervision des graphes d'événements temporisés et temporels : vivacité, estimation et commande. Thèse ISTIA, Université d'Angers, Décembre 2005.
- [19] A. Guezzi, (2010). Modélisation, analyse de performances et commandes des systèmes a évènements discrets. Phd Thesis. Angers University.
- [20] R. Kara, T. Becha, S. Collart Dutilleul, J.J. Loiseau (2013). An implicit system for modelling and control of discrete event systems. 5th Symposium on System Structure and Control Part of 2013 IFAC Joint Conference SSSC, Grenoble, France, February 4-6, pp. 84-89.
- [21] Site de l'Enterprise Metro d'Alger. **METRO-->Alger-->En exploitation**
<http://www.metroalger-dz.com/fr/activites.php?idAC=6>.
- [22] Site de l'Enterprise Metro d'Alger. **METRO-->Alger-->En réalisation**
<http://www.metroalger-dz.com/fr/activites.php?idAC=7>.
- [23] Camacho, E.F, & Bordons, C. (2007). Model predictive control in the process industry. London: Springer.
- [24] Kothare, M.V., Balakrishnan, V., & Morari, M. (1996). Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 32(10), 1361–1379.
- [25] De Schutter, B., & Van den Boom, T.J.J. (2001). Model predictive control for max-plus-linear discrete event systems. *Automatica*, 37(7), 1049–1056.

- [26] Van den Boom, T.J.J., & De Schutter, B. (2002). Model predictive control for perturbed max-plus-linear systems. *Systems and Control Letters*, 45(5), 21–33.
- [27] Necoara, I., Van den Boom, T.J.J., & De Schutter, B. (2008). Stabilization of max-plus linear systems using model predictive control: The unconstrained case. *Automatica*, 44(4), 971–981.
- [28] Júlvez, J., & Boel, R. (2010). A continuous Petri net approach for model predictive control of traffic systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A. Systems and Humans*, 40(4), 686–697.
- [29] Mahulea, C., Giu, A., Recalde, L., Seatzu, C., & Silva, M. (2008). Optimal model predictive control of timed continuous Petri nets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(7), 1731–1735.
- [30] Declerck, P. (2014). Causality phenomenon and compromise technique for predictive control of timed event graphs with specifications defined by P-time event graphs. In *12th International Workshop on Discrete Event Systems*. Ecole Normal Supérieure de cachan (pp. 99–104). Cachan. doi:10.3182/20140514-3-FR-4046.00045
- [31] Declerck, P., & Guezzi, A. (2014). Predictive control of timed event graphs with specification defined by P-time event graphs. *Discrete Event Dynamic Systems*, 24(3), 261–273.
- [32] Becha, T., Kara, R., Dutilleul, S. C., & Loiseau, J. J. (2013). Modelling, analysis and control of electroplating line modelled by P-time event graphs. *IFAC Proceedings Volumes*, 2013, vol. 46, no 24, p. 311-316.