

**MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI OUZOU**

**FACULTE DE : SCIENCES**

**DEPARTEMENT : PHYSIQUE**



# **Vibrations, Ondes et Optique**

## **Rappels de Cours et Exercices Corrigés Etudiants Licence Chimie et physique**

Présenté par :  
Dr Saida MOKRANI épouse IMERZOUKENE

Spécialité :  
PHYSIQUE INTERACTION RAYONNEMENT-MATIERE

# Avant-propos

Le but de cet ouvrage est d'étudier et comprendre par une présentation assez fournie d'exercices d'application les phénomènes de vibrations, ondes et optiques puisque ces derniers ont de nos jours envahis tout l'espace dans lequel nous vivons, et il ne s'agit pas seulement de celles qui transportent les programmes de radio, de télévision, les messages de nos téléphones portables ; il s'agit aussi des ondes de diverses natures qui servent aujourd'hui à expliquer les comportements des divers phénomènes présents dans le monde qui nous entoure.

Certes, cet ouvrage s'adresse en priorité aux étudiants de la deuxième année licence chimie – physique puisqu'il regroupe l'ensemble de mes activités pédagogiques que j'avais exercé au sein du département de chimie. Néanmoins, une extension de l'utilité de cet ouvrage pour des étudiants d'autres spécialités (génie mécanique, électronique, physique,...) pourrait se formaliser, car la forme très attractive de présentation des notions de base des phénomènes de vibrations, ondes et optique permet à ces étudiants d'appréhender les difficultés de compréhension de ces concepts.

L'ouvrage est divisé en huit chapitres. Les trois premiers chapitres portent sur l'utilisation du formalisme de Newton pour décrire les oscillations de systèmes physiques. L'étude des oscillations linéaires (faible amplitude) libres des systèmes à un degré de liberté est présentée dans le premier chapitre. Le deuxième chapitre traite le mouvement amorti qui prend en compte les forces de frottement de type visqueux proportionnelles à la vitesse du mobile. La notion de résonance consacrée aux oscillations forcées est présentée au troisième chapitre. Le quatrième chapitre traite les vibrations de systèmes à deux et à plusieurs degrés de liberté avec le formalisme de Lagrange. Les ondes progressives, la corde vibrante et les ondes stationnaires sont présentées dans le cinquième et le sixième chapitre. Le septième et le huitième chapitre sont consacrés à l'étude de l'optique ondulatoire.

Chaque chapitre est suivi d'une série de problèmes résolus permettant aux étudiants de mieux assimiler les phénomènes étudiés.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur M.TAMINE enseignant à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou d'avoir accepté d'évaluer la pertinence et l'utilité de cet ouvrage et de me faire bénéficier des nombreuses remarques dont il m'a fait part lors de ses lectures successives.

## Table des matières

### Chapitre 1: Rappel de cours sur l'oscillateur libre.

1.1 Introduction .....	1
1.2 Equation différentielle du mouvement.....	1
1.3 Etude énergétique.....	2
Applications.....	3

### Chapitre 2 :Rappel de cours sur l'oscillateur amorti.

2.1 Introduction.....	17
2.2 Equation du mouvement d'un oscillateur libre amorti.....	17
2.3 Solution de l'équation différentielle du mouvement.....	17
2.3.1 Régime fortement amorti .....	18
2.3.2 Amortissement critique .....	18
2.3.3 Faible Amortissement (pseudo -périodique) .....	19
2.4 Décroissance logarithmique.....	19
2.5 Notions d'énergie maximale et énergie dissipée .....	20
Applications .....	20

### Chapitre 3 :Rappel de cours sur l'oscillateur forcé.

3.1 Equation du mouvement.....	38
3.2 Solution de l'équation différentielle du mouvement.....	38
3.2.1 Solution particulière.....	38
3.2.2 Calculs de l'amplitude et de la phase .....	39
3.3 Equation horaire.....	39
3.4 Analogie entre oscillateur mécanique et électrique.....	41
Applications .....	42

### Chapitre 4 :Rappel de cours sur le formalisme de Lagrange appliqué aux systèmes à un et à deux degrés de liberté.

4.1. Systèmes linéaires libres .....	61
4.2 Equation de Lagrange.....	61
4.2.1 Equation de Lagrange d'un oscillateur harmonique libre.....	61
4.2.2 Equation de Lagrange d'un oscillateur harmonique libre amorti.....	62
4.2.3 Equation de Lagrange oscillateur harmonique libre amorti et forcé.....	62
4.3. Application à un système libre à deux degrés de liberté .....	63
Applications.....	64

### Chapitre 5 :Rappel de cours sur les ondes progressives.

5.1 Définition.....	99
5.2 Différentes catégories d'ondes.....	99
5.3 Propriétés.....	99
5.4 Etude Théorique.....	100
5.4.1 Expression de $Y(x, t)$ .....	100
Applications.....	101

## Chapitre 6 :Rappels de cours sur les ondes stationnaires.

6.1. Définition .....	119
6.2. Les ondes électromagnétiques.....	120
Applications.....	121

## Chapitre 7 :Rappels de cours sur la réflexion et la réfraction de la lumière.

7.1. Introduction.....	141
7.2. Indice de réfraction d'un milieu.....	141
7.3. Principes de Fermat .....	141
7.4 Lois de Snell- Descartes .....	142
7.4.1 Lois de Snell-Descartes pour la réflexion .....	143
7.4.2. Loi de Snell-Descartes pour la réfraction.....	143
7.4.2.1 Notion de déviation.....	145
7.5. Loi de Kepler .....	145
7.6. Le prisme .....	145
7.6.1. Calcul de la déviation .....	146
7.6.2. Déviation minimale .....	148
7.6.3. Conditions d'émergence .....	148
7.6.3.1 Condition à imposer à l'angle de prisme.....	148
7.6.3.2 Condition à imposer à l'angle d'incidence.....	149
Applications .....	150

## Chapitre 8 :Rappel de cours sur la formation des images.

8.1. Notion d'objet et d'image .....	169
8.1.1 Espaces réel et virtuel .....	170
8.2. Stigmatisme .....	170
8.2.1 Stigmatisme rigoureux .....	170
8.2.2 Stigmatisme approché .....	170
8.3. Approximation de Gauss.....	170
8.4. Dioptré .....	171
8.4.1 Dioptré plan .....	171
8.4.2. Dioptré sphérique .....	171
8.4.2.1 Relation de conjugaison.....	172
8.4.2.1 .1 Relation de conjugaison avec origine au sommet .....	172
8.4.2.1 .2 Relation de conjugaison avec origine au centre .....	173
8.4.2.1.3 Expression de grandissement du dioptré sphérique.....	173
8.4.2.2 Foyers du dioptré .....	174
8.4.2.3 Dioptré convergent ou divergent.....	175
8.4.2. 4 Construction d'images à travers un dioptré sphérique .....	176
8.5.1. Miroir plan.....	177
8.5.2 Miroir sphérique .....	177
8.5.2.1 Relation de conjugaison .....	178
8.5.2.1 .1 Relation de conjugaison du miroir sphérique avec origine au sommet .....	178
8.5.2.1 .2 Relation de conjugaison du miroir sphérique avec origine au centre.....	178
8.5.2.2 Foyers du miroir sphérique.....	178
8.5.2.3 Construction d'images à travers un miroir sphérique.....	179
8.6. Lentilles minces .....	180
8.6.1 Propriétés optiques d'une lentille mince .....	180

8.6.2 Construction optique .....	182
8.6.2.1 Image d'un objet à l'infini .....	182
8.6.2.2 Image d'un objet situé dans le plan focal objet .....	182
8.6.2.3 Image d'un objet quelconque .....	182
8.6.3 Relations mathématiques régissant les lentilles minces .....	183
Applications.....	184

## Rappel de cours sur l'oscillateur libre.

### 1.1 Introduction.

Les vibrations ou les oscillations sont des mouvements ou des changements d'état des systèmes physiques de part et d'autre d'une position d'équilibre se répétant plus ou moins régulièrement dans le temps. On rencontre les phénomènes de vibration dans le domaine chimique (vibration de molécule), la physique, la mécanique, l'électronique...etc.

Les vibrations sont libres dans un système lorsque ce dernier, après avoir été sollicité par une excitation initiale, continue à vibrer sans être soumis à des forces extérieures. En revanche, les vibrations sont dites forcées dans le cas des systèmes qui vibrent sous l'effet de forces extérieures permanentes qui peuvent être associées à la présence de forces internes.

### 1.2 Equation différentielle du mouvement.

Une vibration est dite périodique si le système physique se retrouve exactement dans le même état aux instants séparés par un intervalle de temps  $T$ , celui-ci est appelé période de vibration. Les fonctions mathématiques qui expriment la périodicité sont appelées fonctions sinusoïdales puisqu'elles reprennent les mêmes valeurs après des intervalles de temps  $nT$ , où  $n$  est un entier positif. Ces dernières s'expriment sous la forme :

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = \mp x_m \sin(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \quad (1.1)$$

La constante  $x_m$  est l'amplitude,  $\omega_0$  est la pulsation propre et  $\varphi$  la phase initiale.

En dérivant l'expression (1.1) deux fois par rapport au temps, on obtient les équations (1.2) et (1.3) :

$$\frac{dx}{dt} = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = x_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}) = \dot{x} \quad (1.2)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi) = \ddot{x} \quad (1.3)$$

Avec :

$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$  : la vitesse d'oscillation.  $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$  : l'accélération d'oscillation.

$x_m \omega_0$  : l'amplitude de la vitesse.  $x_m \omega_0^2$  : l'amplitude de l'accélération.

L'expression de  $x(t)$  est la solution de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1.4}$$

L'équation (1.4) définit une équation différentielle linéaire de second ordre à coefficients constants, elle décrit l'équation du mouvement. La pulsation normale ou la pulsation propre  $\omega_0$  du système dépend de ses caractéristiques physiques (masse, force...etc).

### 1.3 Etude énergétique.

Si on multiplie les deux termes de l'équation (1.4) par  $m \dot{x}$  on obtient l'équation (1.5).

$$m \dot{x} \ddot{x} + m \dot{x} \omega_0^2 x = m \dot{x} \frac{d \dot{x}}{dt} + m \frac{dx}{dt} \omega_0^2 x = 0 \tag{1.5}$$

D'où par intégration on arrive à l'équation (1.6).

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 = C \tag{1.6}$$

L'expression (1.6) est donc une intégrale première de l'équation du mouvement.  $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

décrit l'énergie cinétique de la masse  $m$ , le deuxième terme  $E_p = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$  est son énergie

potentielle. La constante  $C$  est l'énergie totale de l'oscillateur, qui est conservée (Fig.1.1)

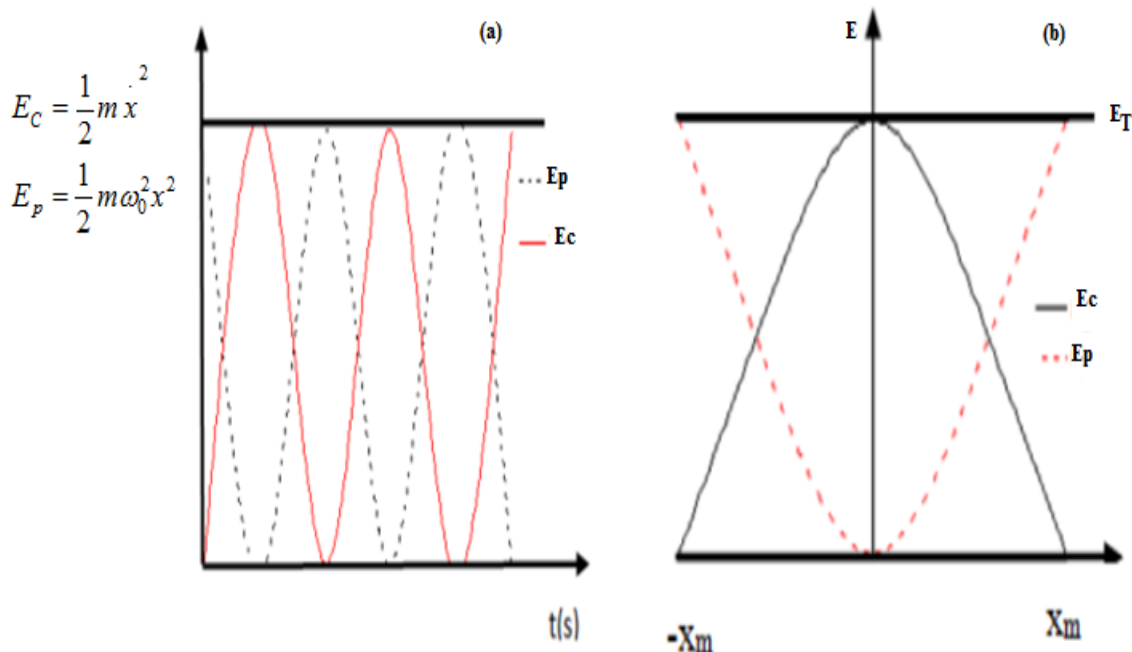


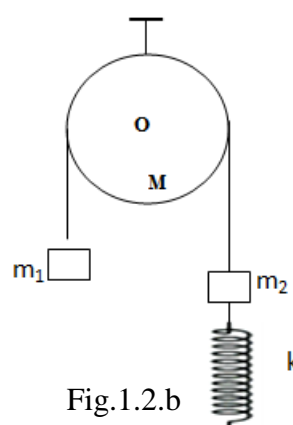
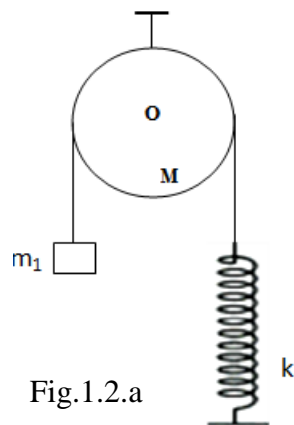
Figure 1. 1 : (a) Evolution de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle en fonction du temps, (b) Evolution de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle en fonction de la position.

## Applications

### Exercice 1

Soit un dispositif est composé d'une poulie homogène de masse  $M$  et de rayon  $R$ , d'un ressort de raideur  $K$  et d'une masse  $m$  attachée à un fil inextensible passant par la gorge de la poulie sans glisser (figure. 1.2.a).

1. Décrire la condition d'équilibre du dispositif.
2. Etudier le mouvement oscillatoire du système et déterminer sa pulsation propre en utilisant le principe fondamentale de la dynamique (PFD). Sachant que le moment d'inertie  $J$  de la poulie est donné par :  $J=1/2MR^2$ .
3. Calculer l'énergie mécanique du système.
4. Etablir l'équation du mouvement en utilisant l'énergie mécanique du système.
5. Dédire la condition d'équilibre et l'équation du mouvement pour le système 1.2.b.
6. Calculer la pulsation et la période propre d'oscillation de ce système, sachant que  $m_1= 4\text{kg}$ ,  $m_2 = M=1\text{kg}$  et  $k=20\text{N/m}$ .



### Solution

1. Les forces exercées sur les masses  $m$  et  $M$  à l'équilibre sont représentées sur la figure 1.3.

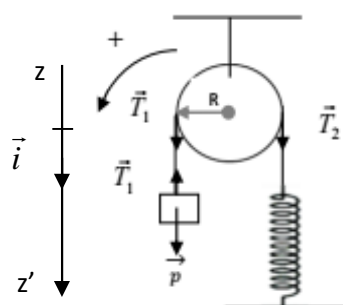


Figure 1.3 : Représentation de l'ensemble des forces sur le système étudié.

Les forces exercées sur la masse  $m$  à l'équilibre : on utilise le principe de Newton:

$$\sum \vec{F} = \vec{p} + \vec{T}_1 = \vec{0} \quad (1)$$

En faisant la projection sur l'axe  $z$  on obtient :

$$p - T_1 = 0 \Leftrightarrow mg - T_1 = 0 \quad (2)$$

Les forces exercées sur la masse  $M$  à l'équilibre :

$$\sum \vec{M}_{/O} = \vec{R} \wedge \vec{T}_1 + \vec{R} \wedge \vec{T}_2 = \vec{0} \quad (3)$$

La projection sur l'axe  $z$  donne l'équation (4) :

$$\sum M_{/\Delta} = T_1 R \sin \frac{\pi}{2} - T_2 R \sin \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow (T_1 - T_2) = 0 \quad (4)$$

Les équations (2) et (4) donnent la formule (5)

$$mg - T_2 = 0 \Leftrightarrow mg - kz_0 = 0 \quad (5)$$

1. Le système en mouvement :

L'équation (1) dans ce cas, s'écrit par l'équation (6)

$$\sum \vec{F} = \vec{p} + \vec{T}_1 = m\vec{a} \quad (6)$$

La projection sur l'axe  $z$  donne :

$$mg - T_1 = m\ddot{z} \quad (7)$$

L'équation (3) peut aussi s'écrire de cette forme en mouvement

$$\sum \vec{M}_{/O} = \vec{T}_1 \wedge \vec{R} + \vec{T}_2 \wedge \vec{R} = J \ddot{\theta} \vec{k} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{/\Delta} = T_1 R - T_2 R = J \ddot{\theta} &\Leftrightarrow R(T_1 - T_2) = \frac{1}{2} MR^2 \ddot{\theta} \\ &\Leftrightarrow (T_1 - T_2) = \frac{1}{2} MR \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (9)$$

Les équations (7) et (9) donnent :

$$mg - k(z + z_0) = m\ddot{z} + \frac{1}{2} MR \ddot{\theta} \quad (10)$$

À l'équilibre, nous avons :  $mg - kz_0 = 0$ , donc l'équation (10) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$-kz = m\ddot{z} + \frac{1}{2} MR \ddot{\theta} \quad (11)$$

Pour de faibles oscillations, on considère  $\sin \theta \approx \theta$ , avec  $\theta = z/R$ . L'équation (11) devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{2k}{2m + M} \theta = 0$$

L'expression (11) est une équation différentielle du second ordre à coefficient constants.

La pulsation propre de ce système :  $\omega_0^2 = \frac{2k}{2m + M} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{2m + M}}$

3. L'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p \tag{12}$$

où  $E_c$  et  $E_p$  sont l'énergie cinétique et l'énergie potentielle respectivement. Le système a une

énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2} m(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J(\dot{\theta})^2$ . L'énergie potentielle de  $m$  est composée de

l'énergie potentielle de ressorts à l'équilibre  $E_p = \frac{1}{2} k(R\theta)^2$  et une énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2} m(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J(\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} k(R\theta)^2$$

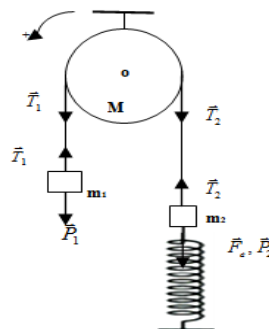
4. L'équation du mouvement en utilisant l'énergie mécanique du système est ci-dessous :

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J(\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} k(R\theta)^2 \right) = 0 \\ &\Rightarrow (m + J)R^2 \ddot{\theta} + kR^2 \theta = 0 \\ &\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{k}{m + J} \theta = 0 \end{aligned}$$

On remplace  $J = \frac{1}{2} MR^2$  dans l'équation précédente on obtient :

$$\ddot{\theta} + \frac{2k}{2m + M} \theta = 0 \text{ qui représente l'équation du mouvement de ce système.}$$

5.1 La condition d'équilibre pour le système 1.2.b est :



On applique le principe fondamental de la dynamique de Newton sur la masse  $m_1$  et  $m_2$  on obtient :

$$\sum \vec{F} = \vec{p}_1 + \vec{T}_1 + \vec{p}_2 + \vec{F}_e + \vec{T}_2 = \vec{0} \quad (14)$$

La projection sur l'axe  $zz'$  est :

$$p_1 - T_1 - p_2 - F_e + T_2 = 0 \quad (15)$$

Concernant le système poulie (M,R) :

$$\sum \vec{M} / O = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{R} \wedge \vec{T}_1 + \vec{R} \wedge \vec{T}_2 = \vec{0} \quad (16)$$

D'après la projection l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} |\vec{R} \wedge \vec{T}_1| - |\vec{R} \wedge \vec{T}_2| = 0 &\Leftrightarrow T_1 R \sin \frac{\pi}{2} - T_2 R \sin \frac{\pi}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow T_1 - T_2 = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

L'équation (15) + l'équation (17) donnent la condition d'équilibre:

$$p_1 - P_2 - F_e = 0 \Leftrightarrow (m_1 - m_2)g - kz_0 = 0 \quad (18)$$

5.2. L'équation du mouvement pour le systeme 1.b est décrite selon:

L'équation (15) s'écrit sous la forme suivante :

$$p_1 - T_1 - P_2 - F_e + T_2 = (m_1 + m_2) \ddot{z} \Leftrightarrow (m_1 - m_2)g - k(z_0 + z) - T_1 + T_2 = (m_1 + m_2) \ddot{z} \quad (19)$$

L'équation (17) peut se traduire par :

$$\begin{aligned} |\vec{R} \wedge \vec{T}_1| - |\vec{R} \wedge \vec{T}_2| = J \ddot{\theta} &\Leftrightarrow T_1 R \sin \frac{\pi}{2} - T_2 R \sin \frac{\pi}{2} = J \ddot{\theta} = \frac{J}{R} \ddot{z} \\ &\Leftrightarrow T_1 - T_2 = \frac{J}{R^2} \ddot{z} \end{aligned} \quad (20)$$

Les équations (19) et (20) donnent :

$$(m_1 - m_2)g - kz_0 - kz = \frac{J}{R^2} \ddot{z} + (m_1 + m_2) \ddot{z} \quad (21)$$

D'après la condition d'équilibre  $(m_1 - m_2)g - kz_0 = 0$  l'équation (21) devient l'équation du mouvement de ce système 1.b :

$$-kz = \frac{J}{R^2} \ddot{z} + (m_1 + m_2) \ddot{z} \Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{k}{\left(\frac{1}{2}M + m_1 + m_2\right)} z = 0 \quad (22)$$

L'expression (22) est une équation différentielle du second ordre sans second membre à coefficient constant, elle peut s'écrire sous la forme  $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$

tel que :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M + 2m_1 + 2m_2}}$  définit la pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2 * 20}{1 + 2 * 4 + 2}} = 1.906 \text{ rad / s}$$

D'où la période propre :  $T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2k}{M + 2m_1 + 2m_2}}}$

$$T_0 = \frac{2\pi}{1.906} = 3.29s$$

**Exercice 2**

Une molécule diatomique est composée de deux atomes notés 1 et 2. Les forces d'interaction entre les atomes  $m_1$  et  $m_2$  sont modélisées par un ressort de raideur  $K$ . Notons  $x_1$  et  $x_2$  les écarts de chacune des masses 1 et 2 par rapport à sa position d'équilibre, respectivement.

1. Ecrire l'équation du mouvement des deux atomes en utilisant le PFD.
2. En effectuant le changement de variables  $x_{12}=x_2-x_1$ , déterminer la pulsation propre et la fréquence de vibration de la molécule.
3. Que devient cette pulsation dans le cas de la molécule  $H_2$ .

**Solution**

1. L'équation du mouvement des deux atomes en appliquant la relation fondamentale de la dynamique (PFD) s'établit comme suit :

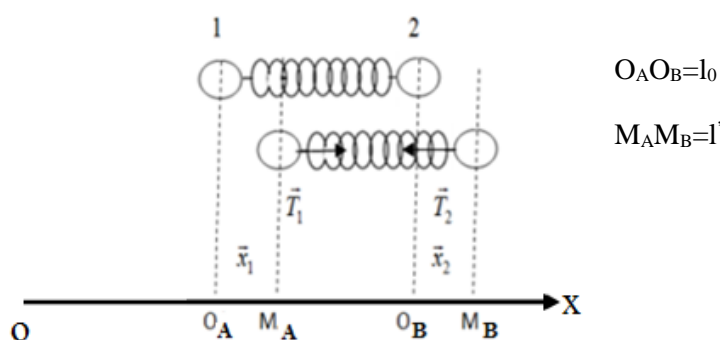


Fig 1. 4: Système représentant une molécule en vibration.

L'équation du mouvement de l'atome 1

$$\sum \vec{F} = \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1$$

Après projection sur l'axe Ox, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = m_1 \ddot{x}_1 \Leftrightarrow K(l'-l_0) = m_1 \ddot{x}_1 \\ \Leftrightarrow k(M_A M_B - O_A O_B) = m_1 \ddot{x}_1 \\ \Leftrightarrow k(O_B M_B - O_A M_A) = m_1 \ddot{x}_1 \\ \Leftrightarrow k(x_2 - x_1) = m_1 \ddot{x}_1 \end{array} \right. \quad (1)$$

L'équation du mouvement de l'atome 2 est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F} = \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2 \\ -T_2 = m_2 \ddot{x}_2 \Leftrightarrow -K(l'-l_0) = m_2 \ddot{x}_2 \\ \Leftrightarrow -k(M_A M_B - O_A O_B) = m_2 \ddot{x}_2 \\ \Leftrightarrow -k(O_B M_B - O_A M_A) = m_2 \ddot{x}_2 \\ \Leftrightarrow -k(x_2 - x_1) = m_2 \ddot{x}_2 \end{array} \right. \quad (2)$$

2. Le changement de variables  $x_{12} = x_2 - x_1$ ,

L'équation (1) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{k}{m_1} x_{12} = \ddot{x}_1 \quad (3)$$

L'équation (2) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{-k}{m_2} x_{12} = \ddot{x}_2 \quad (4)$$

Les équations (3) et (4) donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-k}{m_2} x_{12} - \frac{k}{m_1} x_{12} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \Leftrightarrow -x_{12} k \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) = \ddot{x}_{12} \\ \Leftrightarrow -x_{12} k \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) = \ddot{x}_{12} \\ \Leftrightarrow \ddot{x}_{12} + x_{12} k \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

L'équation (5) d'expression  $\ddot{x}_{12} + \omega_0^2 x_{12} = 0$ , représente une équation différentielle de second ordre sans second membre et sa solution s'écrit:  $x_{12}(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

La pulsation propre de vibration de la molécule :  $\omega_0^2 = k \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{k \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)}$

La fréquence de vibration de la molécule diatomique est :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{k \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)} \Rightarrow f_0 = \frac{\sqrt{k \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)}}{2\pi}$$

Dans le cas de la molécule H<sub>2</sub> la pulsation pour  $m_1 = m_2 = m = 1$

$$\omega_0 = \sqrt{2k}$$

La fréquence de vibration pour la molécule H<sub>2</sub> est :  $f_0 = \frac{\sqrt{2k}}{2\pi}$

### Exercice 3

Soit un système mécanique composé d'une masse  $m=0.2$  kg accrochée à un ressort de constante de raideur  $k=4$  N/m (Fig.1.5). On écarte verticalement la masse de sa position d'équilibre puis on relâche sans vitesse initiale.

1. Déterminer l'allongement  $\Delta l$  du ressort à l'équilibre.
2. Ecrire l'équation du mouvement en utilisant le PFD, la période propre et la fréquence du système.
3. Donner l'expression  $x(t)$  de la solution de cette équation du mouvement.

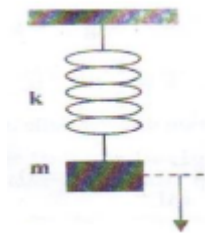


Fig .1.5 .

### **Solution**

L'allongement  $\Delta l$  du ressort à l'équilibre :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = \vec{p} + \vec{T} = \vec{0} &\Leftrightarrow p - T = 0 \\ &\Leftrightarrow mg = k\Delta l \\ &\Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} \end{aligned}$$

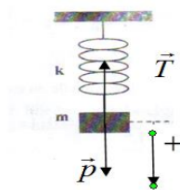


Figure 1. 6: L'ensemble de forces du système à l'équilibre.

On a l'accélération de pesanteur  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , la masse  $m = 0.2 \text{ kg}$  et la constante de raideur du ressort  $k = 4 \text{ N/m}$ .

$$\Delta l = \frac{(0.2)10}{4} = 0.5 \text{ m}$$

2. L'équation du mouvement de ce système est :

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \Leftrightarrow P - T = m\ddot{x} \\ \Leftrightarrow mg - k(l_f - l_i)m\ddot{x} \end{cases} \quad (1)$$

On a :  $(l_f - l_i) = (x + x_0)$  donc l'équation (1) s'écrit :

$$mg - k(x + x_0) = m\ddot{x} \quad (2)$$

Le poids  $mg$  de la masse est équilibré par la force de rappel du ressort  $-kx_0$ . L'équation (2) se transforme alors :

$$-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (3)$$

L'égalité (3) est une équation différentielle de second ordre sans second membre.

La période propre et la fréquence du système sont traduites par:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ et } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La fréquence normale du système est :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \Rightarrow f_0 = \frac{\sqrt{k}}{2\pi m}$$

La solution de l'équation différentielle  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$  décrivant le mouvement est :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

### **Exercice 4**

On considère un pendule simple constitué d'un fil inextensible, sans masse et de longueur  $\ell = 20 \text{ cm}$  accroché au point O. A son extrémité, on accroche une masse  $m = 1 \text{ g}$  assimilée à un point matériel.

1. Déterminer l'équation du mouvement de ce pendule pour les faibles oscillations.
2. Déduire la période propre et la fréquence d'oscillation de ce pendule.
3. Déterminer  $\theta(t)$  avec  $\theta(0) = 5^\circ$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$ .

**Solution**

1. L'équation du mouvement de ce pendule, dans le cas des faibles oscillations, peut s'écrire

comme suit :  $\sum \vec{M}_{/O} = o\vec{A} \wedge \vec{p} = J \ddot{\theta} \vec{k}$

Après la projection on obtient :

$$\sum M_{/\Delta} = -POA \sin \theta = J \ddot{\theta} \Leftrightarrow -P\ell \sin \theta = J \ddot{\theta} \quad (1)$$

avec :

$J$  représente le moment d'inertie de la masse  $m$  ( $J = m\ell^2$ )

Dans le cas de faibles oscillations:  $\sin \theta \approx \theta$  et  $\cos \theta \approx 1$ . L'équation (1) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (2)$$

avec  $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$

2. La période propre d'oscillation de ce pendule est donnée par :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2010^{-2}}{10}} = 0.88 \text{ s}$$

La fréquence d'oscillation de ce pendule est :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$f_0 = \frac{1}{0.88} = 0.136 \text{ s}^{-1}$$

3. L'expression de l'équation du mouvement  $\theta(t)$  :

L'équation (2) est une équation différentielle du second ordre sans second membre. Ce type d'équation peut être intégré directement par l'emploi d'une fonction exponentielle, qui transforme l'équation différentielle en équation algébrique. Dans le cas présent, posons :

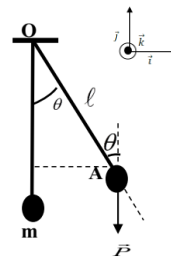
$$\theta = c \exp(pt) \quad (3)$$

Ou  $p$  désigne une constante. La substitution de (3) dans (2) donne

$$p \pm i\omega_0 \text{ avec } i = \sqrt{-1}$$

D'où les intégrales particulières linéairement indépendantes

$$\theta_1 = c_1 \exp(i\omega_0 t), \theta_2 = c_2 \exp(-i\omega_0 t)$$



L'équation (2) étant linéaire, la solution générale est :

$$\theta(t) = c_1 \exp(i\omega_0 t) + c_2 \exp(-i\omega_0 t)$$

où  $c_1, c_2$  désignent des constantes. De même les fonctions réelles

$$\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) = \cos \omega_0 t \quad \text{et} \quad \frac{1}{2i}(\theta_1 - \theta_2) = \sin \omega_0 t$$

vérifient l'équation (2), donc aussi

$$\theta(t) = c_3 \cos \omega_0 t + c_4 \sin \omega_0 t$$

$c_3, c_4$  : étant des constantes réelles car  $\theta$  est réel ou encore

$$\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

d'où :

$$c_3 = \theta_m \cos \varphi \quad \text{et} \quad c_4 = \theta_m \sin \varphi$$

$$\theta_m = \sqrt{c_3^2 + c_4^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{c_4}{c_3}$$

L'équation (2) étant du second ordre, elle admet deux solutions linéairement indépendantes avec deux constantes d'intégration ( $c_1$  et  $c_2$  ou  $c_3$  et  $c_4$ , ou encore  $\theta_m$  et  $\varphi$ ). Ces constantes sont déterminées par les conditions initiales du mouvement.

D'après cette exercice on a :  $\theta(0) = 5^\circ = \frac{5\pi}{180} \text{ rad}$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$

$$\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t - \varphi) \Rightarrow \theta(0) = \theta_m \cos(\varphi) = \theta_0 \quad (4)$$

L'expression de la vitesse à  $t=0$  est :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = -\theta_m \omega_0 \sin(\omega_0 t - \varphi) &\Rightarrow \dot{\theta}(0) = \theta_m \omega_0 \sin(\varphi) = 0 \\ &\Rightarrow \sin(\varphi) = 0 \text{ pour } \varphi = 0, \pi \end{aligned} \quad (5)$$

En remplaçant les valeurs de  $\varphi$  dans l'équation (4) on obtient deux possibilités :

**Premier cas :**

$$\begin{aligned} \text{Pour } \varphi = \pi &\Rightarrow \theta(0) = \theta_m \cos(\pi) = \theta_0 \\ &\Rightarrow -\theta_m = \theta_0 = 0.087 \text{ rad (non valide)} \end{aligned}$$

**Deuxième cas :**

$$\begin{aligned} \text{Pour } \varphi = 0 &\Rightarrow \theta(0) = \theta_m \cos(0) = \theta_0 \\ &\Rightarrow \theta_m = \theta_0 = 0.087 \text{ rad} \end{aligned}$$

D'où l'expression de  $\theta(t)$  :

$$\theta(t) = 0.087 \cos(\omega_0 t)$$

**Exercice 5**

Une tige rigide sans masse et de longueur  $L$  porte à son extrémité une masse  $m$ . Cette tige peut tourner autour de  $O$ . Celle-ci subit une force de rappel horizontale due à un ressort de raideur  $K$ , celui-ci est détendu lorsque le pendule est sur la verticale et il est fixé à la distance  $OA=a$  du point de suspension  $O$  (Fig .1. 7.a).

1. Exprimer l'équation du mouvement du système et déduire la période dans le cas de faibles oscillations en utilisant le PFD.
2. On place le ressort à une la distance  $OA=L$  du point de suspension  $O$ , que devient alors l'équation du mouvement de ce système (fig.1.7.b).
3. Quelle est la condition d'oscillation du système 1.7.c.

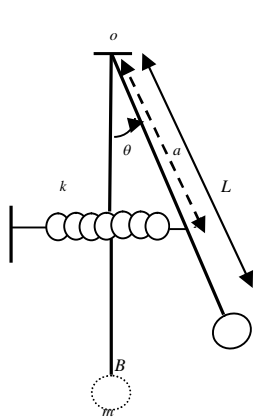


Fig.1.7.a

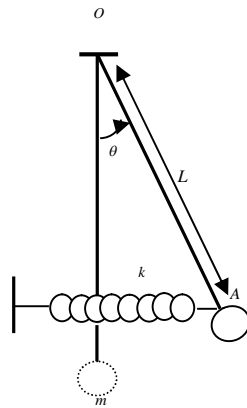


Fig.1.7.b

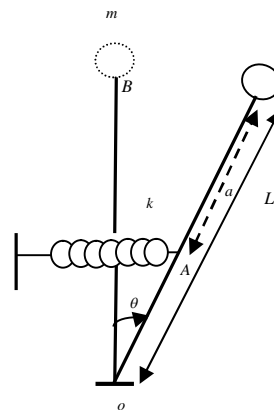
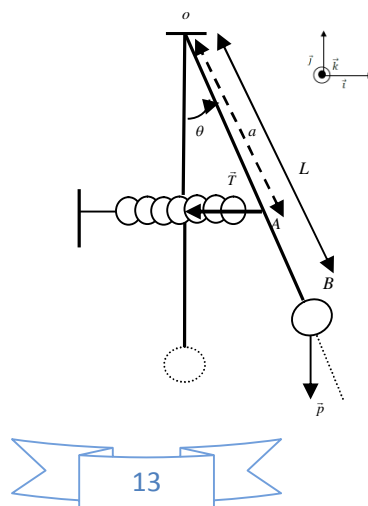


Fig.1.7.c

**Solution**

1. L'équation du mouvement du système (fig 1.7.a) dans le cas de faibles oscillations peut être retrouvée avec le PFD.

Le bilan des forces résultant du système mécanique montre la présence de poids du à la masse  $\vec{P}$  et de force de rappel du ressort  $\vec{T}$  ) :



$$\begin{aligned}\sum \vec{M}_{/O} &= O\vec{B} \wedge \vec{P} + O\vec{A} \wedge \vec{T} = J \ddot{\theta} \vec{K} \\ \sum \vec{M}_{/\Delta} &= -POB \sin \theta - T OA \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = J \ddot{\theta}\end{aligned}\quad (1)$$

On a  $OB = L, OA = a$ , allongement du ressort  $\Delta L = x = a \sin \theta$

Faibles oscillations :  $\sin \theta \approx \theta$  et  $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta \approx 1$ , l'équation (1) devient :

$$-mgL\theta - K a^2 \theta = J \ddot{\theta} \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{mgL + K a^2}{J}\right)\theta = 0 \quad (2)$$

où  $J = mL^2$  est le moment d'inertie, en le remplaçant dans l'équation (2) on obtient alors:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{mgL + K a^2}{mL^2}\right)\theta = 0 \quad (3)$$

Cette dernière peut s'écrire sous la forme canonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

avec :

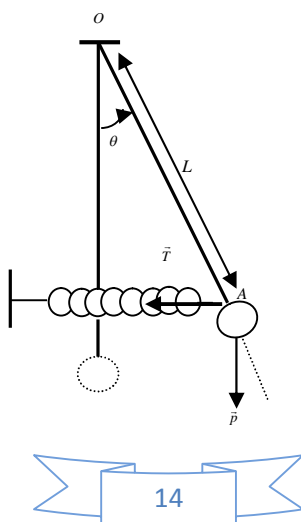
$$\omega_0^2 = \frac{g}{L} + \frac{K a^2}{mL^2}$$

1.2 La période d'oscillation  $T_0$  est donnée par :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L} + \frac{K a^2}{mL^2}}}$$

2. On place le ressort à une distance  $OA=L$  du point de suspension  $O$ . L'équation du mouvement de ce système dans le cas de la (Fig.1.7.b) est :



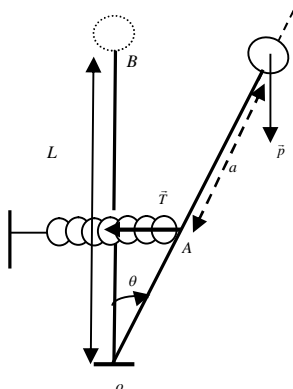
$$\ddot{\theta} + \left( \frac{mgL + K L^2}{J} \right) \theta = 0 \quad (4)$$

En remplaçant le moment d'inertie  $J = mL^2$  dans l'équation (4) on obtient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

avec :  $\omega_0^2 = \left( \frac{mg + K L}{ml} \right)$

3. La condition d'oscillation du système de la fig.1.7.c



L'équation du mouvement pour ce système est :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \text{ avec : } \omega_0^2 = \frac{-mLg + K a^2}{mL^2}$$

Sachant que :

$$\omega_0^2 > 0 \Rightarrow a^2 > \frac{mLg}{K} \text{ le système oscille, si } a^2 < \frac{mLg}{K} \text{ le système n'oscille pas.}$$

**Exercice 6**

Une barre sans masse et de longueur L porte à son extrémité une masse  $m_1$  qui peut osciller autour d'un centre fixe O, d'un disque homogène ( $m_2, R$ ). L'ensemble est relié avec un ressort k. Le ressort n'est pas déformé quand le pendule est à la position verticale (position d'équilibre). On donne :  $4 m_1 = m_2/2 = m, J = 1/2 m_2 R^2, OB = OC/2 = L/2 = R$  (Fig .1.8).

1. Ecrire l'équation du mouvement de ce système.
2. Déduire sa pulsation propre.
3. Déterminer la solution de l'équation différentielle.

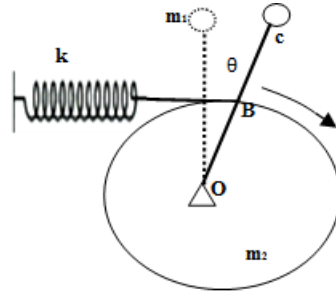


Fig. 1.8

**Solution**

1. Détermination de l'équation différentielle.

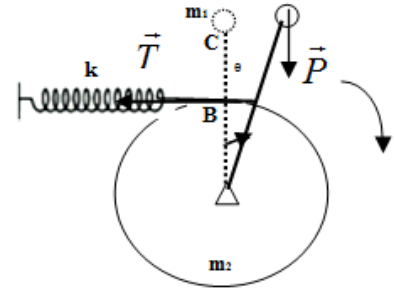
Le disque effectue seulement un mouvement de rotation autour de O avec un moment d'inertie  $J = \frac{1}{2} m_2 R^2$ , la masse  $m_1$  se trouve à une distance  $L = 2R$  de O et l'allongement du ressort est :  $x = R \sin \theta$

$$\sum \vec{M}_{/O} = \vec{OC} \wedge \vec{P}_1 + \vec{OB} \wedge \vec{T} = J \ddot{\theta} \vec{k}$$

Après la projection on obtient :

$$\sum \vec{M}_{/\Delta} = p_1 OC \sin \theta - T OB \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = J \ddot{\theta}$$

$$\sum \vec{M}_{/\Delta} = 2m_1 g R \sin \theta - K R^2 \sin \theta = J \ddot{\theta} \tag{1}$$



Dans le cas des faibles oscillations,  $\sin \theta \approx \theta$  l'équation (1) devient comme suit :

$$(2m_1 g R - K R^2) \theta = J \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{(2m_1 g R - K R^2)}{J} \theta \tag{2}$$

On a :  $4m_1 = \frac{m_2}{2} = m, OC = 2R, OB = BC = \frac{L}{2} = R, J = J_{m_1} + J_{m_2} = 2mR^2$  puis on les

remplace dans l'équation (2) on obtient alors:

$$\ddot{\theta} + \frac{KR^2 - \frac{m}{4} g 2R}{2mR^2} \theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

2. La pulsation propre de ce système est calculée selon:

$$\omega_0^2 = \frac{K}{2m} - \frac{mgR}{4R} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{2m} - \frac{mgR}{4R}}$$

## Rappel de cours sur l'oscillateur libre amorti.

### 2.1 Introduction.

Jusqu'à présent, nous avons décrit des oscillations idéales sans tenir compte des différentes forces de frottement intervenant dans le processus du mouvement de vibration. Il est évident que dans les situations réelles, les oscillations subissent des frottements. On distingue alors deux types de frottements.

Le frottement solide : dans ce cas le solide est soumis à une force constante (frottement dû au contact avec le support...)

Le frottement visqueux : pour lequel la force de frottement dépend de la vitesse (résistance de l'air...)

### 2.2 Equation de mouvement d'un oscillateur libre amorti.

Le système libre amorti est régi par l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants positifs :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.1)$$

Avec :

Le paramètre  $\delta$  lié à l'intensité d'amortissement de l'oscillateur (coefficient d'amortissement).

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} : \text{Pulsation propre,}$$

### 2.3 Solution de l'équation différentielle du mouvement.

L'équation du mouvement (2.1) est une équation différentielle linéaire, du second ordre et à coefficients constants.

On choisit une solution particulière sous la forme  $x(t) = Ae^{rt}$ .

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = A r e^{rt} \text{ et } \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t) = A r^2 e^{rt}$$

On remplace  $x$ ,  $\frac{dx}{dt}$  et  $\frac{d^2x}{dt^2}$  dans l'équation (2.1) on obtient l'équation (2.2) dite équation caractéristique:

$$r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0 \quad (2.2)$$

dont le discriminant réduit est donné par l'équation (2.3)

$$\Delta' = \delta^2 - \omega_0^2 \quad (2.3)$$

Nous distinguons trois régimes selon le signe de  $\Delta'$ .

### 2.3.1 Régime fortement amorti.

$$\delta > \omega_0 \Rightarrow \Delta' = \delta^2 - \omega_0^2 > 0$$

Dans ce cas l'équation caractéristique admet deux racines réelles:

$$r_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

La solution générale de l'équation différentielle (2.1) est :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = e^{-\delta t} (Ae^{-\beta t} + Be^{\beta t})$$

avec :

$$\beta = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Dans cette configuration la solution  $x(t)$  est la somme de deux termes d'amortissement de forme exponentielle, mais ces derniers ne représentent plus le caractère oscillant si  $A \neq 0$  et si  $B$  n'est pas petit. Le premier terme s'amortit beaucoup mais moins vite que le second terme. Dans cette configuration, l'amortissement est fort. Ce régime est appelé aperiodique ou sur-amorti.

Pour les conditions initiales ( $t = 0$  s) de position  $x_0$  et de vitesse  $\dot{x}_0$  on obtient :

$$A = \frac{\dot{x}_0 - r_2 x_0}{r_1 - r_2} ; \quad B = \frac{r_1 x_0 - \dot{x}_0}{r_1 - r_2}$$

### 2.3.2 Amortissement critique.

$$\delta = \omega_0 \Rightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow \delta^2 - \omega_0^2 = 0$$

Pour les situations qui sont représentées par ce cas, l'équation caractéristique admet une racine double réelle:  $r_1 = r_2 = -\delta$ ,

La solution de l'équation différentielle est alors décrite par:

$$x(t) = e^{-\delta t} (A + Bt)$$

Pour les mêmes conditions initiales que précédemment on obtient alors:

$$A = x_0 \quad \text{et} \quad B = \dot{x}_0 + \delta x_0$$

L'amortissement critique détermine le seuil où la configuration de régime amorti commence à apparaître, c'est-à-dire la limite pour laquelle le régime oscillatoire cesse d'exister.

### 2.3.3 Faible Amortissement (régime pseudo -périodique).

$$\delta < \omega_0 \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow -\Delta' = \omega_0^2 - \delta^2 = \omega_a^2$$

Pour ce cas l'équation caractéristique admet deux racines complexes :

$$r_1 = -\delta + i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta + i\omega_a \quad \text{et} \quad r_2 = -\delta - i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta - i\omega_a$$

La solution de l'équation du mouvement (2.1) est:  $x(t) = Ae^{(-\delta-i\omega_a)t} + Be^{(-\delta+i\omega_a)t}$ , qu'on peut mettre sous la forme  $x(t) = ce^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$  : le mouvement est pseudo-périodique avec une amplitude qui décroît exponentiellement.

Avec :

$$\omega_a \text{ pseudo-pulsation, } T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} : \text{ pseudo-période, } \tau = \frac{1}{\delta} : \text{ constante de temps, } \beta = \frac{\delta}{\omega_0} : \text{ degré}$$

d'amortissement et  $Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \pi f_0 \tau = \frac{\pi \tau}{T_0}$  coefficient de qualité.

Dans les mêmes conditions initiales que précédemment on obtient :

$$c = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \delta x_0}{\omega_a}\right)^2}$$

La phase  $\varphi = -\text{Arc tan}\left(\frac{\dot{x}_0 + \delta x_0}{x_0 \omega_a}\right)$

### 2.4 Décrément logarithmique.

Le décrément logarithmique est le logarithme du rapport de deux amplitudes successives dans le cas des oscillations faiblement amorties. Il se définit par la forme suivante :

$$D = \ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_1 + T_a)}\right)$$

Pour un système faiblement amorti on a :  $x(t) = ce^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$

$$D = \ln\left(\frac{ce^{-\delta t_1} \cos(\omega_a t_1 + \varphi)}{ce^{-\delta(t_1 + T_a)} \cos(\omega_a(t_1 + T_a) + \varphi)}\right) = -\ln(e^{-\delta T_a}) = \delta T_a$$

## 2.5 Energie maximale et énergie dissipée.

La solution de l'équation différentielle du mouvement dans le cas d'un système faiblement amorti peut être décrite sous la forme suivante :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_a t + \varphi)$$

$$\text{avec: } x_0 = c e^{-\delta t} \quad \text{et } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Dans le cas d'un amortissement très faible  $\delta \rightarrow 0$ , la pseudo-pulsation est, à peu près, égale à la pulsation propre du système soit :  $\omega_a \approx \omega_0$ .

D'après le chapitre (1) l'énergie maximale est  $E_{\max} = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega_0^2 = \frac{1}{2} m c^2 \omega_0^2 e^{-2\delta t}$

L'énergie perdue (dissipée) par le système est définie par  $\Delta E = \int_t^{T_a+t} F_f(t) dx$

Tel que :  $F_f(t)$  est la force des frottements visqueux :  $F_f(t) = -\alpha \dot{x}$

En remplaçant  $F_f(t) = -\alpha \dot{x}$  dans l'expression de  $\Delta E$  on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int_t^{T_a+t} -\alpha \dot{x}^2 dt \\ \Delta E &= \int_t^{T_a+t} -\alpha \dot{x}^2 dt = - \int_t^{T_a+t} \alpha x_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt \\ &= -\alpha x_0^2 \omega_0^2 \int_t^{T_a+t} \frac{1 + \sin 2(\omega_0 t + \varphi)}{2} dt = -\alpha x_0^2 \omega_0^2 \frac{T_a}{2} = -\pi \alpha x_0^2 \omega_0 \end{aligned}$$

On a

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}, \omega_a \approx \omega_0, x_0^2 = c^2 e^{-2\delta t}$$

## Applications

### Exercice 1

Un bloc de masse de 20 kg est monté sur un support en caoutchouc de masse négligeable. Celui-ci se comprime de 6,1 cm sous l'action du poids du bloc. Quand le bloc vibre librement, on enregistre les positions de la masse après l'avoir déplacée de 5 cm de sa position d'équilibre (Fig. 2.1). Sachant que le support en caoutchouc peut être assimilé à un ressort de raideur K associé à un amortisseur de coefficient de frottement visqueux  $\alpha$ . On rappelle que

l'équation du mouvement dans le cas des petites oscillations est :  $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

1. Calculer le décrement logarithmique, la pseudo-période, l'amplitude des oscillations au bout de la première et la deuxième pseudo-période.

2. Déduire les coefficients  $\alpha$ ,  $\delta$  ainsi que la pulsation propre du système  $\omega_0$ , le facteur de qualité Q et la constante de raideur K associé au support en caoutchouc.

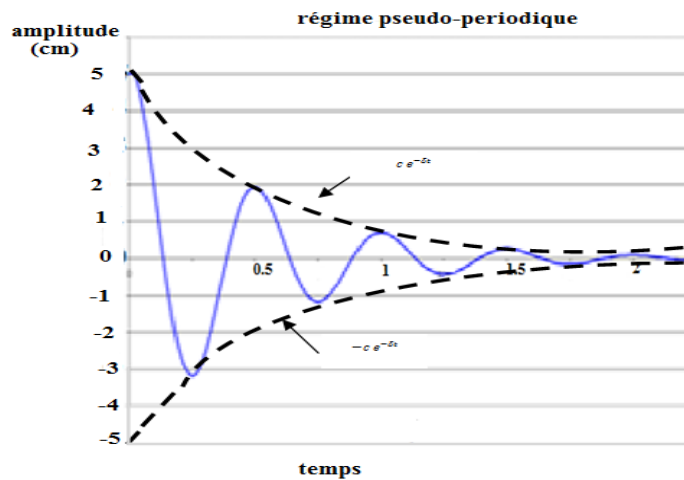


Fig. 2.1

**Solution**

1.1 Détermination du décrement logarithmique D :

La Fig.2.1 représente un mouvement pseudo-périodique dû à l’amortissement, il ne se produit pas de la même façon au bout d’un temps  $T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$ . Le rapport de deux amplitudes

consécutives est :  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \exp(-\delta T_a) \Rightarrow D = \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \delta T_a$ ,

Donc d’après la Fig.2.1 on a :

$$D = \ln\left(\frac{x(t=0)}{x((t=0) + T_a)}\right)$$

$$D = \ln\left(\frac{5}{2}\right) = 0.92$$

1.2 La pseudo-période se mesure entre deux maximums qui se suivent ou bien entre deux minimums qui se suivent. D’après la figure (2.1) on a  $T_a = 0.5$  s

1.3 L’amplitude d’oscillations au bout d’une et deux pseudo-périodes :

$$t = T_a \Rightarrow x(t = T_a) = 2cm$$

$$t = 2T_a \Rightarrow x(t = 2T_a) = 0.8cm$$

2. 1 Le coefficient d’amortissement  $\delta$  :

$$D = \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \delta T \Rightarrow \delta = \frac{D}{T_a} = \frac{0.92}{0.5} = 1.84s^{-1}$$

2. 2 Le coefficient de frottement visqueux  $\alpha$  :

$$\delta = \frac{\alpha}{2m} \Rightarrow \alpha = 2m\delta = 2(20)1.84 = 73.6 \text{ kgs}^{-1}$$

2.3 La pulsation propre  $\omega_0$  du système :

$$\text{On a la pseudo-pulsation } \omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = \frac{2\pi}{0.5} = 12.56 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \omega_a &= \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \Rightarrow \omega_0^2 = \omega_a^2 + \delta^2 = (12.56)^2 + (1.84)^2 = 161.14 \\ &\Rightarrow \omega_0 = 12.69 \text{ rads}^{-1} \end{aligned}$$

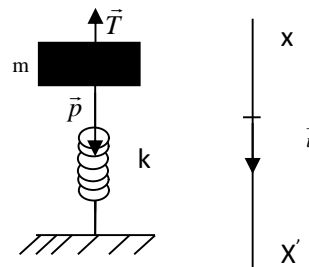
2.4 Le facteur de qualité Q :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{12.69}{(2)1.84} = 3.33$$

3. Détermination de la constante de raideur k.

1<sup>er</sup> méthode :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m\omega_0^2 \\ &\Rightarrow k = 20(161.14) = 32.210^{+2} \text{ N/m} \end{aligned}$$



2<sup>eme</sup> méthode : le système en équilibre

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = \vec{p} + \vec{T} = \vec{0} &\Leftrightarrow p - T = 0 \\ &\Leftrightarrow mg = kx_0 \\ &\Rightarrow k = \frac{mg}{x_0} \\ &\Rightarrow k = \frac{20(9.81)}{6.110^{-2}} = 32.210^{+2} \text{ N/m} \end{aligned}$$

## Exercice 2

Un oscillateur harmonique amorti a pour équation réduite  $\ddot{x} + 2\dot{x} + 4x = 0$ .

1. Calculer sa pulsation propre  $\omega_0$ , sa pseudo-pulsation  $\omega_a$ , son coefficient d'amortissement  $\delta$  et sa constante de temps  $\gamma$ .

2. Trouver la solution de l'équation du mouvement.

## **Solution**

1.1 La pulsation propre  $\omega_0$  :

$$\omega_0^2 = 4 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{4} = 2 \text{ rads}^{-1}$$

1.2 La pseudo-pulsation  $\omega_a$  :

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} \text{ rads}^{-1}$$

1.3 Le coefficient d'amortissement  $\delta$  :

$$\delta = 1 \text{ s}^{-1}$$

1.4 La constante de temps  $\gamma$ :  $\gamma = 1$

2. La solution de l'équation du mouvement  $\ddot{x} + 2\dot{x} + 4x = 0$  :

On cherche une solution homogène de type:  $x(t) = Ae^{rt}$ , ou  $r$  est une constante. Par substitution dans cette équation  $\ddot{x} + 2\dot{x} + 4x = 0$ , ou on a  $\omega_0 > \delta$  (régime faiblement amorti) on obtient une équation algébrique, dite équation caractéristique :  $r^2 + 2r + 4 = 0$ .

L'équation ( $r^2 + 2r + 4 = 0$ ) admet deux racines qui sont complexes conjuguées:  $r = -1 \pm i\omega$ , avec  $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{3}$

La solution homogène de l'équation  $\ddot{x} + 2\dot{x} + 4x = 0$  est :

$$x(t) = \exp(-\delta t)[c_1 \exp(i\omega_a t) + c_2 \exp(-i\omega_a t)]$$

où bien :

$$x(t) = e^{(-\delta t)} [c_3 \cos(\omega_a t) + c_4 \sin(\omega_a t)]$$

$$x(t) = ce^{(-\delta t)} \cos(\omega_a t - \varphi)$$

avec :

$$c = \sqrt{c_3^2 + c_4^2}, \text{tg}\varphi = \frac{c_4}{c_3}$$

### **Exercice 3**

Une masse  $M$  est fixée à un ressort de raideur  $2k$  et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux  $\alpha$  (fig. 2.2.a).

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement et la pulsation propre ainsi que la solution  $x(t)$  lorsque le système est libre non amorti.

2. Décrire l'équation différentielle du mouvement lorsque le système est amorti.

3. Calculer le coefficient d'amortissement et la pulsation d'oscillation amortie en fonction M, k et  $\alpha$ .
4. Exprimer la solution de l'équation différentielle du mouvement.
5. On place un autre ressort de raideur k et de masse m au dessous de masse M (fig. 2.2.b). Dédurre l'équation du mouvement. Que devient la pseudo-pulsation puis explicitez sa solution en régime amorti.

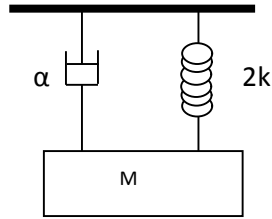


Fig.2.2.a

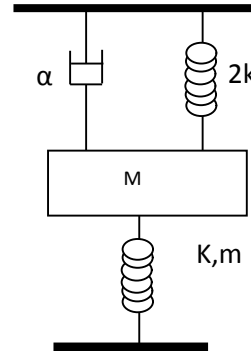


Fig.2.2.b

**Solution**

D'après la fig.2.2.a la masse M est fixée à un ressort de raideur 2k et un amortisseur de coefficient de frottement  $\alpha$ .

1. L'équation différentielle du mouvement lorsque le système est libre non amorti :

A l'équilibre le principe de Newton s'écrit :

$$\sum \vec{F} = \vec{p} + \vec{T} = \vec{0}$$

Projections sur l'axe  $(xx')$  :

$$p - T = 0 \Leftrightarrow Mg - 2kx_0 = 0$$

Le principe de Newton donne :  $\sum \vec{F} = \vec{p} + \vec{T} = M\vec{a}$

Projections sur l'axe  $(xx')$  :

$$\begin{aligned}
 p - T &= M \ddot{x} \Leftrightarrow Mg - 2k(x_0 + x) = M \ddot{x} \\
 &\Leftrightarrow Mg - 2kx - 2kx_0 = M \ddot{x}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

On a  $Mg - 2kx_0 = 0$  quand le système est en équilibre, d'ou l'équation (1) s'écrit sous la forme suivante :

$$-2kx = M \ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2k}{M}x = 0
 \tag{2}$$

1.2 La pulsation propre :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M}}$

La solution de l'équation (2) est sinusoïdale de type :  $x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

2. L'équation différentielle du mouvement lorsque le système est libre amorti :

L'équation (2) prend en régime amorti la forme suivante :

$$-2kx - \alpha \dot{x} = M \ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{M} \dot{x} + \frac{2k}{M} x = 0 \tag{3}$$

3.1 Le coefficient d'amortissement :  $\delta = \frac{\alpha}{2M}$

3.2 La pseudo-pulsation:  $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{2k}{M} - \left(\frac{\alpha}{2M}\right)^2}$

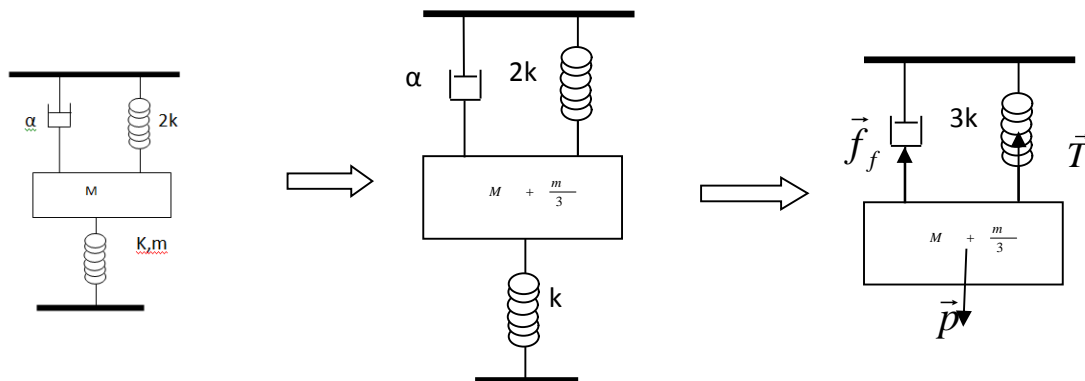
4. La solution de l'équation du mouvement en régime amorti :

Le système peut osciller, donc  $\delta < \omega_0 \longrightarrow x(t) = ce^{\frac{-\alpha}{2M}t} \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{M} - \left(\frac{\alpha}{2M}\right)^2} t + \varphi\right)$

5.1 L'équation du mouvement du dispositif mécanique (2.2.b) :

Le ressort de masse m contribue seulement avec m/3 donc la masse totale du système est égale à :  $M + m/3$ . Les ressorts de raideur (2k) et (k) n'ont pas le même déplacement puisque ils ne sont pas disposés en parallèle.

Donc :



Le système est en équilibre :

$$\sum \vec{F} = \vec{p} + \vec{T} = \vec{0} \Leftrightarrow (M + \frac{m}{3})g - 3k(x_0) = 0$$

Le système est en mouvement :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = \vec{p} + \vec{T} + \vec{f}_f &= (M + \frac{m}{3})\ddot{x} \Leftrightarrow (M + \frac{m}{3})g - 3k(x_0 + x) - \alpha \dot{x} = (M + \frac{m}{3})\ddot{x} \\ \Leftrightarrow (M + \frac{m}{3})g - 3kx_0 - 3kx - \alpha \dot{x} &= (M + \frac{m}{3})\ddot{x} \end{aligned}$$

D'après la condition d'équilibre :  $(M + \frac{m}{3})g - 3k(x_0) = 0$  , l'équation précédente s'écrit :

$$-3kx - \alpha \dot{x} = (M + \frac{m}{3})\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{(M + \frac{m}{3})} \dot{x} + \frac{3k}{(M + \frac{m}{3})} x = 0 \quad (4)$$

Si on pose  $\omega_0^2 = \frac{3k}{(M + \frac{m}{3})}$  et  $2\delta = \frac{\alpha}{(M + \frac{m}{3})}$

l'équation (4) peut s'écrire sous la forme:

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5)$$

5.2 Le pseudo-pulsation :

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{3k}{M + \frac{m}{3}} - \left(\frac{3\alpha}{(6M + 2m)}\right)^2}$$

La solution de l'équation (5) en régime amorti

Le système oscille lorsque  $\delta < \omega_0$  d'ou la solution

$$x(t) = ce^{\frac{-3\alpha}{(6M+2m)t}} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{M + \frac{m}{3}} - \left(\frac{3\alpha}{(6M + 2m)}\right)^2} t + \varphi\right)$$

### **Exercice 4**

On suppose un système mécanique constitué d'une tige OA de masse négligeable et de longueur  $2R$  ; au bout du point A de la tige se trouve fixée une masse  $m$ . Soit un ressort de raideur  $k$  fixé au milieu de la tige et un amortisseur de coefficient  $\alpha$ , attaché à la masse  $m_1$  à une distance  $2R$  du point O (Fig. 2.3.a).

1. Ecrire l'équation différentielle du mouvement amorti en appliquant le P.F.D.
2. Déduire la pulsation propre ainsi que le coefficient d'amortissement.
3. Exprimer la solution de l'équation différentielle dans le cas d'un faible amortissement.
4. Préciser cette solution pour les conditions initiales suivantes :  $t = 0$  s,  $\theta(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ .
5. On place une tige de longueur  $3R$  qui porte à ses extrémités deux masses  $m_1$  et  $m_2$  (fig.2.3.b). La tige peut tourner autour d'un point O. L'ensemble des frottements sont symbolisés par l'amortisseur de coefficient  $\alpha$  qui se trouve à une distance  $R$  du point O. A

l'équilibre, le ressort étant non déformé et la tige verticale. Déduire l'équation du mouvement puis le coefficient de frottement et la pseudo-période.

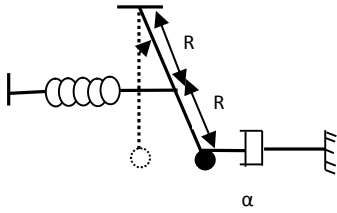


Fig.2.3.a

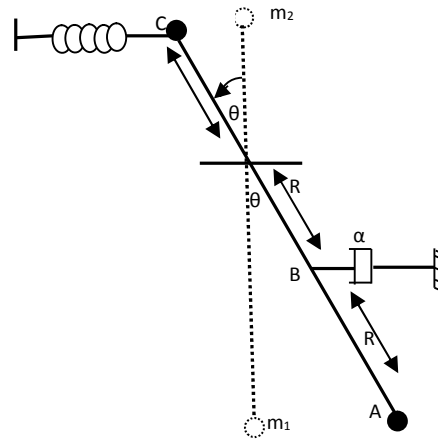


Fig.2.3.b

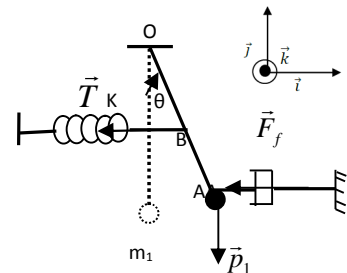
**Solution**

1. L'équation différentielle du mouvement amorti en appliquant le P.F.D pour le système (fig 2.3.a) :

$$\sum \vec{M}(F_{ext})_{/O} = \vec{OA} \wedge \vec{p}_1 + \vec{OB} \wedge \vec{T} + \vec{OA} \wedge \vec{F}_f = J \ddot{\theta} \vec{k}$$

Après projection :

$$\sum M_{/\Delta} = -p_1 OA \sin \theta - TOB \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) - \alpha OA \dot{x} \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = J \ddot{\theta} \quad (1)$$



A faibles oscillations:  $\sin \theta \approx \theta$  et  $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta = 1$ ,  $OA=2R$  et  $OB=R$ , donc l'équation (1) devient :

$$-m_1 g 2R \theta - Rk x - \alpha R \dot{x} = J \ddot{\theta} \quad (2)$$

On a  $x = R \sin \theta = R \theta$ ,  $\dot{x} = 2R \dot{\theta}$  et  $J = m_1 (2R)^2$  l'équation (2) devient alors :

$$(-m_1 g 2R \theta - kR^2) \theta - \alpha 4R^2 \dot{\theta} = 4m_1 R^2 \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m_1} \dot{\theta} + \frac{(m_1 g 2R \theta + kR^2)}{4m_1 R^2} \theta = 0 \quad (3)$$

2.1 La pulsation propre du système est :

$$\omega_0^2 = \frac{(m_1 g 2R + KR^2)}{4m_1 R^2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2R} + \frac{K}{4m_1}}$$

2.2 Le coefficient d'amortissement est  $\delta = \frac{\alpha}{2m_1}$

3. La solution de l'équation différentielle dans le cas d'un faible amortissement :

$$\theta(t) = ce^{\frac{-\alpha}{2m_1}t} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{2R} + \frac{K}{4m_1} - \left(\frac{\alpha}{2m_1}\right)^2} t + \varphi\right) \quad (4)$$

4. La solution de l'équation différentielle du mouvement en prenant compte les conditions initiales suivantes :  $t = 0$  s,  $\theta(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$

$$\begin{cases} \theta(0) = c \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pm \pi}{2} \\ \dot{\theta}(0) = \frac{-\alpha}{2m_1} c \cos(\varphi) - c \sqrt{\frac{g}{2R} + \frac{K}{4m_1} - \left(\frac{\alpha}{2m_1}\right)^2} \sin(\varphi) = \dot{\theta}_0 \end{cases}$$

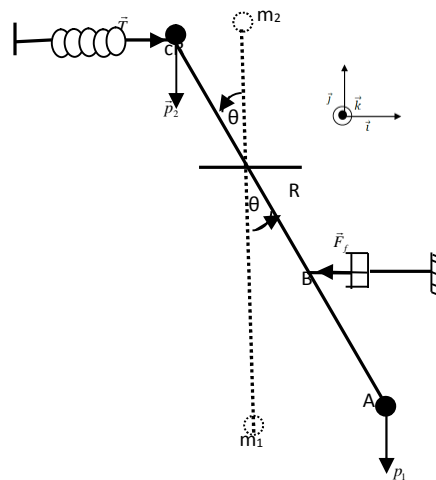
Pour  $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{-\dot{\theta}_0}{\sqrt{\frac{g}{2R} + \frac{K}{4m_1} - \left(\frac{\alpha}{2m_1}\right)^2}}$  (non valide)

Pour  $\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\dot{\theta}_0}{\sqrt{\frac{g}{2R} + \frac{K}{4m_1} - \left(\frac{\alpha}{2m_1}\right)^2}}$

La solution homogène de l'équation (4) est donnée par:

$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\sqrt{\frac{g}{2R} + \frac{K}{4m_1} - \left(\frac{\alpha}{2m_1}\right)^2}} e^{\frac{-\alpha}{2m_1}t} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{2R} + \frac{K}{4m_1} - \left(\frac{\alpha}{2m_1}\right)^2} t - \frac{\pi}{2}\right)$$

5.1 L'équation différentielle du mouvement en appliquant le P. F.D pour le système (2.3.b) :



$$\sum \vec{M}(F_{ext})_{/O} = \vec{OA} \wedge \vec{p}_1 + \vec{OC} \wedge \vec{p}_2 + \vec{OC} \wedge \vec{T} + \vec{OB} \wedge \vec{F}_f = J \ddot{\theta} \vec{k}$$

Après projection sur les axes :

$$\sum M_{/\Delta} = -p_1 OA \sin \theta + p_2 OC \sin \theta - kx OC \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) - \alpha OB \dot{x} \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = J \ddot{\theta} \quad (5)$$

Faible oscillation:  $\sin \theta = \theta$ ,  $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta = 1$ ,  $x = R \sin \theta = R\theta$ ,  $\dot{x} = R \dot{\theta}$ ,  $OA=2R$ ,  $OB=R$ , et  $OC=R$   $J = m_1(2R)^2 + m_2(R)^2$  ; donc l'équation (5) devient :

$$-m_1 g 2R\theta + m_2 g R\theta - kR^2\theta - \alpha R^2 \dot{\theta} = (m_1(2R)^2 + m_2(R)^2) \ddot{\theta} \quad (6)$$

On divise l'équation (6) par  $m_1(2R)^2 + m_2(R)^2$  on obtient alors:

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{8m_1 + 2m_2} \dot{\theta} + \frac{(m_1 g 2R - m_2 g R + kR^2)}{m_1(2R)^2 + m_2(R)^2} \theta = 0 \quad (7)$$

5.2 Le coefficient d'amortissement :  $\delta = \frac{\alpha}{16m_1 + 4m_2}$

5.3 La pseudo-période est :  $T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$

$$\omega_a = \sqrt{\left(\frac{(2m_1 g - m_2 g)}{4m_1 R + m_2 R} + \frac{k}{4m_1 + m_2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{8m_1 + 2m_2}\right)^2}$$

$$T_a = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{(2m_1 g - m_2 g)}{4m_1 R + m_2 R} + \frac{k}{4m_1 + m_2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{8m_1 + 2m_2}\right)^2}}$$

### **Exercice 5**

Une masse sphérique de rayon  $R = 0.01 \text{ m}$  et de masse volumique  $\rho = 7800 \text{ kg/m}$  est suspendue au point O par un fil de masse négligeable et de longueur  $L = OC = 0.98 \text{ m}$  (C : centre de la sphère). Elle est complètement immergée dans un liquide de masse volumique  $\rho' = 970 \text{ kg/m}$  (Fig 2.4.a). On supposera  $\rho > \rho'$ ,  $R \ll L$ .

1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement vers les faibles amplitudes du pendule en tenant compte de la force des frottements visqueux du liquide  $\vec{F}_f = -6\pi\mu R\vec{V}$ ,  $\vec{V}$  est la vitesse du centre C de la sphère.  $\mu$  est le coefficient de viscosité du fluide.
2. Quelle est la relation entre  $L, \rho, \rho', R, \mu$  dans le régime critique.
3. Calculer la valeur de  $\mu$ .

4. Une masse  $m$  de rayon  $r$  est suspendue à un ressort de constante de raideur  $k$ , de longueur à vide  $l_0$ , l'autre extrémité du ressort étant attachée à un support fixe (fig.2.4.b)). On plonge le système dans le liquide précédent, la masse est alors soumise à une force de frottement.

4.1. Écrire l'équation du mouvement de la masse plongée dans le liquide.

4.2. Déduire l'expression de la pseudo-période.

4.3. Dans l'air (frottements sont négligeables), la période propre d'oscillation de la masse est  $T_0$ . Exprimer le facteur de qualité en fonction de  $T_0$  et  $T_a$ .

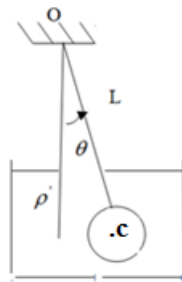


Fig.2.4.a

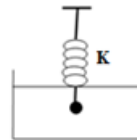


Fig. 2.4.b

**Solution**

1. L'équation différentielle du mouvement pour la fig. 2.4.a est :

La masse de la sphère est :  $m = \rho V = \frac{4}{3} \rho \pi R^3$

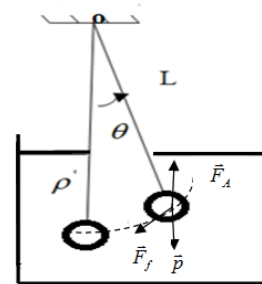
On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{M}(F_{ext})_{/O} = o\vec{c} \wedge \vec{p} + o\vec{c} \wedge \vec{F}_A + o\vec{c} \wedge \vec{F}_f = J \ddot{\theta} \vec{k}$$

Après projection sur les axes on obtient:

$$\sum M_{/\Delta} = -\frac{4}{3} \rho \pi R^3 g L \theta + \frac{4}{3} \rho' \pi R^3 g L \theta - 6\pi \mu R L^2 \dot{\theta} = \frac{4}{3} \rho \pi R^3 g L^2 \ddot{\theta} \tag{1}$$

$$-\frac{4}{3} \pi R^3 g L (\rho - \rho') - 6\pi \mu R L^2 \dot{\theta} = \frac{4}{3} \rho \pi R^3 g L^2 \ddot{\theta}$$



En divisant l'égalité décrite dans l'équation (1) par la masse  $\frac{4}{3} \rho \pi R^3 g L^2$  on trouve :

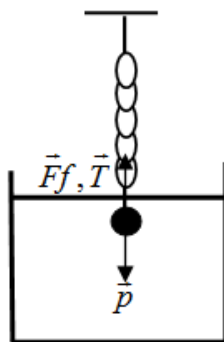
$$\ddot{\theta} + \left(\frac{9}{2} \frac{\mu}{\rho R^2}\right) \dot{\theta} + \frac{g(\rho - \rho')}{L\rho} \theta = 0 \quad (2)$$

2. L'amortissement critique implique :  $\delta = \omega_0 = \left(\frac{9}{4} \frac{\mu}{\rho R^2}\right) = \sqrt{\frac{g(\rho - \rho')}{L\rho}}$

3. Le coefficient de viscosité est :  $\mu = \frac{4\rho R^2}{9} \sqrt{\frac{g(\rho - \rho')}{L\rho}}$

$$\mu = \frac{(4)7800(0.01)^2}{9} \sqrt{\frac{10(7800 - 970)}{(0.98)7800}} = 1.036 \text{ pa.s}$$

4. L'équation différentielle du mouvement pour le système (2.4.b) :



En appliquant le principe fondamental de la dynamique (P.F.D):

$$\vec{p} + \vec{F}_f + \vec{T} = m \ddot{x} \quad (3)$$

$$m \ddot{x} = mg - k(x + x_0) - 6\pi\mu r \dot{x}$$

À l'équilibre:  $mg - kx_0 = 0$ , d'où

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{6\pi\mu r}{m}\dot{x} = 0 \quad (4)$$

On pose :  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $\delta = \frac{6\pi\mu r}{2m}$  l'équation (4) s'écrit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\delta \dot{x} = 0$$

4.2 L'expression de la pseudo-période :

Régime pseudo-périodique  $\Rightarrow \delta < \omega_0$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \Rightarrow T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$$

$$\Rightarrow T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\text{On a } T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - 4 \frac{1}{\varphi^2}}}$$

Avec le facteur de qualité défini par  $\varphi = \frac{\omega_0}{2\delta}$

4.3. Dans l'air où les frottements sont négligeables, la période propre d'oscillation de la sphère est  $T_0$  :

L'équation différentielle (4) devient alors :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (5)$$

La solution de l'équation (5) est sinusoidale non amorti de pulsation propre  $\omega_0$ , donc la

période est de  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  on a donc, la pseudo-période  $T_a > T_0$

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - 4 \frac{1}{\varphi^2}}}$$

$$T_a = \frac{T_0}{\sqrt{1 - 4 \frac{1}{\varphi^2}}} \Rightarrow \frac{T_0}{T_a} = \sqrt{1 - 4 \frac{1}{\varphi^2}}$$

D'où :

$$\frac{T_0^2}{T_a^2} = 1 - 4 \frac{1}{\varphi^2} \Rightarrow \varphi^2 = \frac{1 - \frac{T_0^2}{T_a^2}}{4}$$

### Exercice 7

Un piston de section  $S$ , de masse  $m$ , peut coulisser sans frottement dans un cylindre. Ce dernier emprisonne au repos un volume  $V_0$  d'air sous la pression atmosphérique  $p_0$  et à la température  $T_0$ . Le piston initialement immobile est soumis à une impulsion. On néglige la viscosité de l'air.

1. Dans l'hypothèse où la masse d'air emprisonné suit la loi d'évolution adiabatique  $PV^\gamma = Cte$ , établir l'équation de l'oscillation  $x(t)$  de la masse  $m$  et montrer que le mouvement n'est pas amorti. Calculer la pulsation propre.

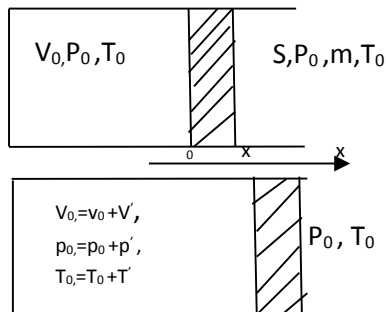


Fig.2.5

2. On suppose maintenant que l'équation caractéristique de l'air dans le cylindre est toujours la loi des gaz parfaits  $PV = nRT$  et que pendant la durée infiniment petite  $dt$ , le gaz reçoit de l'extérieur la quantité de chaleur  $dQ = -kTdt$ . En supposant que l'énergie interne  $U$  de l'air dans le cylindre varie suivant la relation  $dU = dQ + dW = nc_v dT$  (premier principe de la thermodynamique) établir l'équation différentielle reliant  $x, dx/dt, d^2x/dt^2, T', dT/dt$ .

3. Résoudre le système d'équations pour un régime harmonique d'oscillation de la masse  $m$ , c'est-à-dire  $x = \Delta x \cos(\omega t)$  et  $T = \Delta T \cos(\omega t + \varphi)$ . Calculer le coefficient d'amortissement et la nouvelle pulsation propre d'oscillation.

4. Discuter l'influence du coefficient de transmission  $k$  de la paroi et de la pulsation  $\omega$  sur le coefficient d'amortissement  $\delta$ .

### Solution

1. L'évolution adiabatique  $PV^\gamma = Cte$  :

$$\begin{aligned}
 PV^\gamma = cte &\Rightarrow \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \\
 &\Rightarrow \frac{P'}{P_0} + \gamma \frac{Sx}{V_0} = 0 \\
 &\Rightarrow P' = -\gamma \frac{Sx}{V_0} P_0
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$P's = m \ddot{x} \Rightarrow m \ddot{x} + \gamma \frac{S^2 x P_0}{V_0} = 0 \text{ (c'est l'équation du mouvement sans amortissement)}$$

La pulsation propre :  $\omega_0^2 = \gamma \frac{s^2 x P_0}{m V_0} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\gamma \frac{s^2 x P_0}{m V_0}}$

2. Loi des gaz parfaits  $PV = nRT$

L'équation différentielle s'exprime comme suit :

$$PV = nRT \Rightarrow \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} \text{ ou } \frac{p'}{p_0} + \frac{sx}{V_0} = \frac{T'}{T_0} \quad (2)$$

On a :

$$p' s = m \ddot{x} \Leftrightarrow \left( \frac{T'}{T_0} - \frac{s x}{V_0} \right) s p_0 = m \ddot{x} \quad (3)$$

$$m \ddot{x} + \frac{s^2 p_0}{V_0} x - s p_0 \frac{T'}{T_0} = 0$$

Lors d'un déplacement  $dx$  du piston, le gaz reçoit le travail  $dw = -p_0 s dx$  et la quantité de chaleur  $dQ = -k T' dt$  et donc l'énergie interne :

$$dU = -k T' dt - p_0 s dx = n c_v dT' \Rightarrow p_0 s \frac{dx}{dt} + n c_v \frac{dT'}{dt} + k T' = 0 \quad (4)$$

3. Régime sinusoïdal : on remplace dans les équations (3) et (4)  $x, dx/dt, d^2x/dt^2, T', dT'/dt$  par leur amplitude complexe :

$$x = \Delta x \cos(\omega t) \rightarrow x = \bar{x} e^{i\omega t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \bar{x} i \omega e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\bar{x} \omega^2 e^{i\omega t}$$

$$T = \Delta T \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow T = \bar{T} e^{i\omega t} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \bar{T} i \omega e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dt^2} = -\bar{T} \omega^2 e^{i\omega t}$$

Les équations (3) et (4) deviennent :

$$-m \omega^2 \bar{x} + \frac{s^2 p_0}{V_0} \bar{x} - s p_0 \frac{\bar{T}'}{T_0} = 0 \quad (5)$$

$$i p_0 s \omega \bar{x} + i n c_v \omega \bar{T}' + k \bar{T}' = 0 \quad (6)$$

Éliminons la température  $T'$  entre les équations (5) et (6). Après simplifications, on

aboutit :

$$-m\omega^2 \bar{x} + \frac{s^2 p_0^2 k}{T_0(k^2 + n^2 c_v^2 \omega^2)} i\omega \bar{x} + \frac{s^2 p_0}{V_0} \bar{x} + \frac{s^2 p_0^2 n c_v \omega^2}{T_0(k^2 + n^2 c_v^2 \omega^2)} \bar{x} = 0$$

L'équation qui traduit le mouvement amorti est :

$$m \ddot{x} + \frac{s^2 p_0^2 k}{T_0(k^2 + n^2 c_v^2 \omega^2)} \dot{x} + \left( \frac{s^2 p_0}{V_0} + \frac{s^2 p_0^2 n c_v \omega^2}{T_0(k^2 + n^2 c_v^2 \omega^2)} \right) x = 0$$

Le coefficient d'amortissement :  $\delta = \frac{s^2 p_0^2 k}{2mT_0(k^2 + n^2 c_v^2 \omega^2)}$

La nouvelle pulsation :  $\omega_1^2 = \left( \frac{s^2 p_0}{mV_0} + \frac{s^2 p_0^2 n c_v \omega^2}{mT_0(k^2 + n^2 c_v^2 \omega^2)} \right)$

Sachant que  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} \text{ etc } p = c_v + R \Rightarrow \omega_1^2 = \omega_0^2 \left( \frac{n^2 c_v^2 \omega^2 + k^2 / \gamma}{k^2 + n^2 c_v^2 \omega^2} \right) < \omega_0^2$

4. Influence du coefficient de transmission k :

Pour  $k=0$  (paroi parfaitement isolante)  $\Rightarrow \delta = 0$  et  $\omega_1^2 = \omega_0^2$  on retrouve le résultat adiabatique.

Pour  $k \rightarrow \infty$  (la paroi est dissipatrice de la chaleur)  $\Rightarrow \delta = 0$  et  $\omega_1^2 = \omega_0^2 / \gamma = \frac{s^2 p_0}{Vm}$ ,

l'évolution est alors isotherme ( $k \rightarrow \infty \Rightarrow T' = 0$  donc  $T = cte$ ).

Pour k intermédiaire, lorsque  $\omega$  augmente  $\delta$  diminue jusqu'à 0 et  $\omega_1$  croît jusqu'à  $\omega_0$  : le système est d'autant moins amorti que la fréquence est grande car l'influence des parois diminue.

### Exercice 8

On suspend le dispositif ci-contre, constitué d'un barreau et d'une plaque plane à un fil d'acier de longueur L et de diamètre d. On mesure la fréquence propre des oscillations libres non amorties  $f_0 = 0.5 \text{ s}^{-1}$ .

1. Calculer la constante de torsion du fil d'acier tel que le moment d'inertie de ce système soit égal à  $2.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ Kg}$ .

2. On place le système dans l'eau comme le montre la figure.2.6, de telle sorte que la plaque s'enfonce sur une profondeur  $H = 0.02 \text{ m}$ . Les oscillations sont amorties et leur amplitude divisée par 10 après une durée de 4 pseudo-périodes.

2.1 Exprimer la période propre en fonction de  $T_a$ .

2.2 Calculer le coefficient d'amortissement.

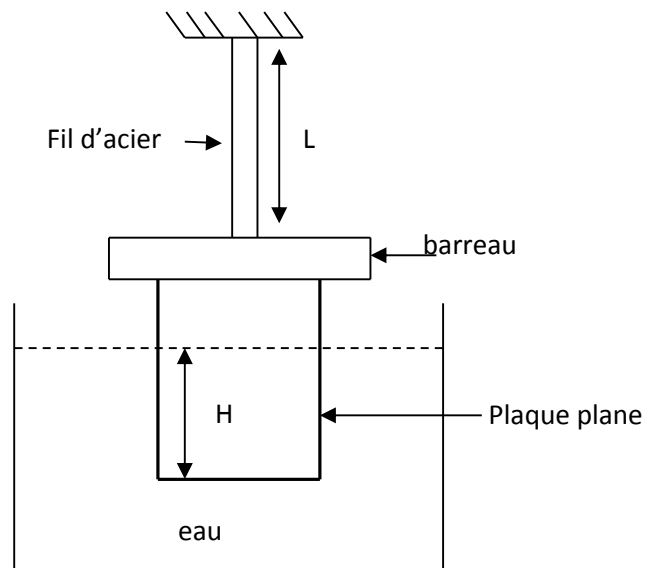


Fig.2.6

### Solution

1. La constante de torsion du système :

Sachant que le moment de torsion de fil d'acier est :  $M = -c\theta$

Le système n'est pas plongé dans l'eau, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit:

$J\ddot{\theta} = -c\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{c}{J}\theta = 0$ , avec la pulsation propre  $\omega_0^2 = \frac{c}{J}$  et la période  $T_0^2 = 4\pi \frac{J}{c}$ , d'où le

moment d'inertie :

$$J = \frac{cT_0^2}{4\pi^2} \Rightarrow c = \frac{J4\pi^2}{T_0^2} = \frac{J4\pi^2}{f_0^2} .$$

$$c = \frac{2.810^{-3}4\pi^2}{(0.5)^2} = 0.44 \text{ pa.m}^3$$

2.1 La période propre en fonction de  $T_a$  est donnée par :

On calcule le décrément logarithmique

$$\delta T_a = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{A_0}{A_n} \right)$$

$$\begin{aligned}\delta T_a &= \frac{1}{n} \ln\left(\frac{A_0}{A_n}\right) \\ &= \frac{1}{4} \ln(10) \\ &= 0.575\end{aligned}$$

La pseudo-période  $\omega_a$  est donnée par :

$$\begin{aligned}\omega_a^2 &= \omega_0^2 - \delta^2 \\ \left(\frac{2\pi}{T_a}\right)^2 &= \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 - \delta^2 \\ \frac{1}{T_a^2} &= \frac{1}{T_0^2} - \frac{\delta^2}{4\pi^2} \Rightarrow \frac{1}{T_0^2} = \frac{1}{T_a^2} \left(1 + \frac{T_a^2 \delta^2}{4\pi^2}\right) \\ \frac{1}{T_0^2} &= \frac{1}{T_a^2} \left(1 + \frac{(0.575)^2}{4\pi^2}\right) \\ &= \frac{1}{T_a^2} 1.008\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{T_0^2} &= \frac{1}{T_a^2} 1.008 \Rightarrow T_0^2 = \frac{T_a^2}{1.008} \\ &\Rightarrow T_0 = \frac{T_a}{\sqrt{1.008}}\end{aligned}$$

2.2 Le coefficient d'amortissement :

$$\delta T_a = 0.575 \Rightarrow \delta = \frac{0.575}{T_a} = \frac{0.575}{(T_0^2 1.008)^{0.5}} = \frac{0.575}{\left(\frac{1}{f_0^2} 1.008\right)^{0.5}}$$

$$\delta = \frac{0.575}{\left(\frac{1}{(0.5)^2} 1.008\right)^{0.5}} = 0.29 \text{ s}^{-1}$$

## Rappel de cours sur l'oscillateur forcé.

### 3.1 Equation du mouvement.

Jusqu'à présent, nous avons considéré que des systèmes physiques étaient capables d'entrer en vibrations par eux mêmes. Ceux-ci décrivent des mouvements libres sous l'influence de forces intérieures et d'amortissement. Les solutions décrivant les oscillations ont montré la présence d'un régime transitoire s'atténuant au cours du temps. Dans le besoin d'entretenir ces oscillations, il devient alors nécessaire de solliciter le système par apport d'énergie extérieure. Ainsi la modélisation du problème consiste à soumettre le système physique à une force d'excitation de nature périodique avec une fréquence  $\omega$  (fréquence du résonateur). Dans l'hypothèse d'une excitation sinusoïdale, l'équation différentielle du mouvement s'écrit alors:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F \cos(\omega t) \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = F \cos(\omega t) \quad (3.1)$$

Avec :  $\omega$  pulsation imposée (dépend de la force d'excitation du résonateur).  $\omega_0, \delta$  sont des paramètres intrinsèques à la nature des vibrations décrites par l'oscillateur. Les définitions et significations physiques respectives à ces deux grandeurs ont été exposées précédemment.

### 3.2 Solution de l'équation différentielle du mouvement.

La solution de l'équation (3.1) est de forme suivante:

$$x(t) = x_l(t) + x_p(t) \quad (3.2)$$

$x(t)$  : solution générale de l'équation différentielle du mouvement l'équation (3.1).

$x_l(t)$  : solution de l'équation sans second membre (solution homogène de l'équation (3.1) en régime transitoire qui ne dure qu'un certain temps).

$x_p(t)$  : solution avec second membre qui représente une solution particulière de l'équation (3.1).

#### 3.2.1 Solution particulière.

Dans le cas où, la solution homogène est négligeable, il ne reste plus que la solution particulière qui est imposée par l'expression mathématique de la force d'excitation.

La solution particulière en régime permanent s'écrit :

$$x_p(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.3)$$

Elle peut se mettre sous forme complexe :

$$x_p(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi)} = Ae^{j\varphi} e^{j\omega t} = \bar{A}e^{j\omega t}, \dot{x}_p(t) = j\omega \bar{A}e^{j\omega t} \text{ et } \ddot{x}_p(t) = -\omega^2 \bar{A}e^{j\omega t} \quad (3.4)$$

Le terme du second membre de l'équation différentielle du mouvement (3.1) s'écrit:

$$F \cos \omega t \xrightarrow{\text{forme complexe}} F e^{j(\omega t)},$$

Où  $\bar{A} = Ae^{j\varphi}$  est l'amplitude complexe.

### 3.2.2 Calcul de l'amplitude et la phase.

En adaptant les écritures adéquates pour  $\dot{x}_p(t)$ ,  $\ddot{x}_p(t)$  et  $F e^{j(\omega t)}$  découlant de la solution particulière  $x_p(t)$ , l'équation (3.1) s'écrit alors:

$$\bar{A}e^{j\omega t} (-\omega^2 + j2\delta\omega + \omega_0^2) = F e^{j\omega t} \Rightarrow \bar{A} = \frac{F}{(-\omega^2 + j2\delta\omega + \omega_0^2)} \quad (3.5)$$

A partir de l'équation (3.5), on calcule l'amplitude d'oscillation A et la phase  $\varphi$  :

$$A((\omega_0^2 - \omega^2) + (j2\delta\omega)) = F e^{-j\varphi} \Rightarrow \begin{cases} A(\omega_0^2 - \omega^2) = F \cos \varphi \\ A(2\delta\omega) = -F \sin \varphi \end{cases} \quad (3.6)$$

La phase de la solution permanente est :

$$\tan g \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow \varphi = \arctg \left[ \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] \quad (3.7)$$

De l'équation (3.6) on déduit l'amplitude A :

$$\begin{cases} A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = F^2 \cos^2 \varphi \\ A^2(2\delta\omega)^2 = F^2 \sin^2 \varphi \end{cases} \Rightarrow A^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2) = F^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \quad (3.8)$$

Tenant compte de l'égalité  $(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 1$  l'équation précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} A^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2) &= F^2 \Rightarrow A^2 = \frac{F^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2} \\ \Rightarrow A &= \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} = A(\omega) \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.3 Equation horaire.

Quand le régime transitoire disparaît i.e. la solution homogène  $x_h(t) = 0$ , la solution générale

$x(t)$  de l'équation (3.1) devient la solution permanente  $x_p(t) = x(t)$ ,

$$x_p(t) = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \cos \left( \omega t + \arctg \left[ \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] \right) \quad (3.10)$$

**Remarques :**

- Lorsque  $A(\omega)$  est maximal cela implique que le dénominateur est minimal dans l'équation (3.9) :

$$\begin{aligned} \frac{dA(\omega)}{d\omega} = 0 &\Leftrightarrow -4\omega_0^2\omega + 4\omega^3 + 8\delta^2\omega = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\omega(-\omega_0^2 + \omega^2 + 2\delta^2) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ (-\omega_0^2 + \omega^2 + 2\delta^2) = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \omega_r, \end{cases} \end{aligned}$$

Avec :

$\omega_r$  : pulsation de résonance.

On pose  $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$ ,  $Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$

$\eta$  : pulsation relative de la source et  $Q$  facteur de qualité.

En remplace l'expression de  $\eta$  et  $Q$  dans les deux équations (3.7) et (3.9) on obtient :

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left[ \frac{-1}{\left(\frac{1}{\eta} - \eta\right)Q} \right] \tag{3.11}$$

$$A = \frac{F}{\omega_0^2 \sqrt{(1-\eta^2)^2 + \frac{\eta^2}{Q^2}}}$$

- l'amplitude d'oscillation  $A$  pour une excitation avec une force constante i.e. une fréquence nulle  $\eta = 0$  est :  $A_0 = \frac{F}{\omega_0^2}$

L'équation (3.11) devient :

$$\frac{A}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + \frac{\eta^2}{Q^2}}} \tag{3.12}$$

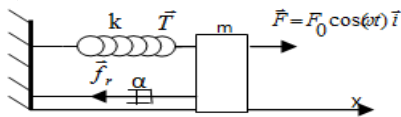
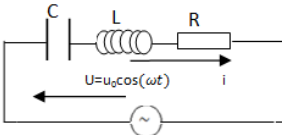
Le rapport  $\frac{A}{A_0}$  représente l'amplitude relative.

- Pour des fréquences relatives très grandes i.e.  $\eta \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{A}{A_0} = 1$ , le résonateur ne vibre plus puisque la fréquence d'excitation est très supérieure à sa fréquence propre.

➤ Pour une fréquence relative  $\eta = 1 \Rightarrow \frac{A}{A_0} = Q$

➤ Le coefficient de qualité  $Q \rightarrow \infty$  (ou  $\delta \rightarrow 0$ )  $\Rightarrow \frac{A}{A_0} = \frac{1}{1-\eta^2}$

### 3.4 Analogie entre oscillateur mécanique et électrique.

Oscillateur mécanique	Oscillateur électrique
<p>1) Schéma :</p>  <p>2) L'équation du mouvement :</p> $m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega t)$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \delta = \frac{\alpha}{2m}; Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}; \eta = \frac{\omega}{\omega_0}$ <p><math>F_M \cos \omega t \rightarrow \bar{F} = F (M : \text{max}; e = \text{efficace})</math></p> <p><math>x = A_M \cos(\omega t - \varphi) \rightarrow \bar{x} = A e^{-j\varphi}</math></p> <p><math>\dot{x} = \frac{dx}{dt} = V \rightarrow \bar{V} = j\omega \bar{x} = e^{j\frac{\pi}{2}} \omega A e^{-j\varphi} = A\omega e^{-j\theta}; \theta = \varphi - \frac{\pi}{2}</math></p> <p>3) Energie cinétique : <math>\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2</math></p> <p>4) Energie potentielle élastique : <math>\frac{1}{2} k x^2</math></p> <p>5) Impédance du résonateur</p> $\bar{Z} = \frac{\text{Force excitatrice}}{\text{Vitesse vibratoire}} = \frac{\bar{F}}{\bar{V}} = \bar{Z} = \alpha + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)$ $\tan g\varphi = \frac{m\omega - \frac{k}{\omega}}{\alpha}$ $ \bar{Z} ^2 = Z^2 = \alpha^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2$ <p>6) Puissance active délivrée par la source et dissipée dans le résonateur :</p> $p_A = F_e V_e \cos \theta = \frac{1}{2} F_M A_M \omega \sin \varphi = \alpha V_e^2 = \frac{1}{2} \alpha A_M^2 \omega^2$ <p>7) Puissance réactive : amplitude de la puissance réversible échange entre le résonateur et la source :</p> $p_r = F_e V_e \sin \theta = -\frac{1}{2} F_M A_M \omega \cos \varphi = \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right) V_e^2$	<p>1) Schéma :</p>  <p>2) L'équation du mouvement :</p> $L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = u_0 \cos(\omega t)$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}; \delta = \frac{R}{2L}; Q = \frac{L\omega_0}{R}; \eta = \frac{\omega}{\omega_0}$ <p><math>U_M \cos \omega t \rightarrow \bar{U} = U (M : \text{max}; e = \text{efficace})</math></p> <p><math>i = i_M \cos(\omega t - \varphi) \rightarrow \bar{i} = i e^{-j\varphi}</math></p> <p>3) Energie de la bobine : <math>\frac{1}{2} L \left(\frac{dq}{dt}\right)^2</math></p> <p>4) Energie de la capacité : <math>\frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2</math></p> <p>5) Impédance du résonateur</p> $\bar{Z} = \frac{\text{Tension excitatrice}}{\text{Intensité}} = \frac{\bar{U}}{\bar{i}} = \frac{U}{i} e^{j\varphi}$ $\bar{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right);$ $\tan g\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$ $ \bar{Z} ^2 = Z^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$ <p>6) Puissance active délivrée par la source et dissipée dans le résonateur :</p> $p_A = U_e i_e \cos \varphi = R i_e^2$ <p>7) Puissance réactive : amplitude de la puissance réversible échange entre le résonateur et la source :</p> $p_r = U_e i_e \sin \varphi = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) i_e^2$

**Applications****Exercice1**

On s'intéresse ici à la rupture de la liaison d'une molécule diatomique sous l'effet d'un champ électrique. On modélise la molécule par un couple de masses ( $m_1, m_2$ ) relié par un ressort de constante de raideur  $k$ , on note  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . On considère que l'atome 1 reste immobile et que seul l'atome 2 se déplace. On note  $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ .

On considère que la liaison est rompue si  $r > R$ . Pour modéliser la polarisation de la liaison, on supposera que l'atome 2 porte une charge électrique  $q$ . On se placera en régime stationnaire forcé.

1. La molécule est soumise à un champ électrique  $\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega_0 t) \vec{e}_x$ .

1.1 Montrer en quoi une solution de la forme particulière  $\vec{r}(t) = r_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \vec{e}_x$  ne peut pas convenir.

1.2 On cherche la solution sous la forme  $\vec{r}(t) = (A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)) \vec{e}_x$ , déterminer A et B.

1.3 Quelle valeur minimale doit avoir le champ  $\vec{E}(t)$  pour rompre la molécule.

2. On modifie à présent le modèle de la molécule pour faire apparaître un facteur de qualité  $Q$ .

2.1 Déterminer l'expression de  $\vec{r}(t)$ .

2.2 Quelle valeur doit avoir le champ  $\vec{E}$  pour rompre la molécule ?

**Solution**

La molécule est soumise à un champ électrique :  $\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega_0 t) \vec{e}_x$

En appliquant le PFD :  $\sum \vec{F} = m \vec{a} \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{elc}} + \vec{F}_R = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$

En projetant sur l'axe  $ox$  :

$$qE - kr = m \frac{d^2 r}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{k}{m} r = \frac{qE_0}{m} \cos(\omega_0 t) \quad (1)$$

**1-Premier cas :**  $\vec{r}(t) = r_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \vec{e}_x$ ,

$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\omega_0^2 r_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 r$ , En remplaçant  $r$  et  $\frac{d^2 r}{dt^2}$  dans l'équation différentielle (1) on

obtient :  $\frac{qE_0}{m} \cos(\omega_0 t) = 0 \Rightarrow E_0 = 0$

**2-deuxième cas :**  $\vec{r}(t) = (A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t))\vec{t}_x$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)) + t (-A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos(\omega_0 t))$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -2A\sin(\omega_0 t) + 2B\omega_0 \cos(\omega_0 t) - (A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t))t\omega_0^2 ,$$

En injectant la forme de  $\vec{r}$  et  $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$  dans l'équation différentielle (1), on a :

$$-2A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + 2B\omega_0 \cos(\omega_0 t) = \frac{qE_0}{m} \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \begin{cases} -2A\omega_0 = 0 \Rightarrow A = 0 \\ 2B\omega_0 = \frac{qE_0}{m} \Rightarrow B = \frac{qE_0}{2m\omega_0} \end{cases}$$

$$\text{D'où } \vec{r}(t) = \frac{qE_0}{2m\omega_0} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\vec{t}_x$$

La valeur minimale du champ, pour rompre la liaison de la molécule quel que soit le champ, est différente de zéro. Celle-ci impose une distance  $|\vec{r}|$  qui n'est pas bornée. Il existe donc nécessairement un instant  $\tau$  tel que  $|\vec{r}| > R$ , pour tout le champ  $E_0$  qui est arbitrairement petit.

2. On modifie à présent le modèle de la molécule pour faire apparaître un facteur de qualité  $Q$ .

2.1 Détermination de l'expression de  $\vec{r}(t)$  : on cherche une solution particulière dans le cas d'une perte d'énergie (présence d'un amortisseur) donc l'équation différentielle (1) devient :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + 2\delta \frac{dr}{dt} + \omega_0^2 r = \frac{qE_0}{m} \cos(\omega_0 t) \tag{2}$$

En tenant compte de la relation  $2\delta = \frac{\omega_0}{Q}$ , l'équation différentielle (2) devient :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dr}{dt} + \omega_0^2 r = \frac{qE_0}{m} \cos(\omega_0 t) \tag{3}$$

La solution particulière pour l'équation (2) s'écrit sous la forme :  $r_p(t) = r_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\text{En notation complexe : } \begin{cases} r_p(t) = r_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi)} \\ \dot{r}_p(t) = i r_0 \omega_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi)} = i \omega_0 r_p(t) \\ \ddot{r}_p(t) = -r_0 \omega_0^2 e^{i(\omega_0 t + \varphi)} = -\omega_0^2 r_p(t) \end{cases}$$

Et en remplaçant  $\ddot{r}_p(t)$ ,  $\dot{r}_p(t)$  et  $r_p(t)$  dans l'équation (3), on aura :

$$\frac{i\omega_0^2}{Q} r_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi)} = \frac{qE_0}{m} e^{i(\omega_0 t)} \Rightarrow \frac{i\omega_0^2}{Q} r_0 e^{i\varphi} = \frac{qE_0}{m} \tag{4}$$

$$\text{Sachant que : } e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \Rightarrow \begin{cases} r_0 = \frac{QqE_0}{\omega^2_0 m} \\ \varphi = \frac{-\pi}{2} \end{cases}$$

La forme finale de la solution particulière est :  $r_p(t) = \frac{QqE_0}{\omega^2_0 m} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{\pi}{2}\right)$

2.2 La valeur du champ  $\vec{E}$  pour rompre la liaison de la molécule est donnée par :

$$|r_0| \geq R \Leftrightarrow \frac{QqE_0}{\omega^2_0 m} \geq R \Rightarrow E_0 = \frac{\omega^2_0 m Qq}{Qq}$$

### Exercice 2

THOMSON a proposé un modèle d'atome dans lequel chaque électron (M) est élastiquement lié à son noyau (O) (il est soumis à une force de rappel vers le centre de l'atome  $\vec{F}_R = -k\vec{OM}$ ). Nous supposons que cet électron est freiné par une force de frottement visqueux proportionnelle à sa vitesse (loi de Stokes)  $\vec{F}_f = -\alpha \vec{V}$  et que le centre O de l'atome est fixe dans le référentiel d'étude supposé Galiléen. Nous cherchons à étudier l'action d'une onde lumineuse caractérisée par un champ électrique  $\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t)$  de pulsation  $\omega$  (provenant du soleil) sur un électron d'un atome de l'atmosphère. Celui-ci est représenté à l'aide d'un modèle dit de THOMSON.

AN:  $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ ;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ ;  $k = 100 \text{N.m}^{-1}$ ;  $\alpha = 10^{-20} \text{kg.s}^{-1}$ .

1. Écrire l'équation différentielle du mouvement de l'électron, puis la normaliser.
2. Déterminer le régime forcé (solution particulière de l'équation différentielle).
3. Simplifier l'expression précédente sachant que le rayonnement visible provenant du Soleil possède des longueurs d'ondes s'étendant de  $\lambda_b = 400 \text{ nm}$  (bleu) à  $\lambda_r = 800 \text{ nm}$  (rouge), longueurs d'onde du champ  $E(t)$ .
4. Calculer la puissance moyenne pour le rayonnement bleu et rouge, sachant qu'elle est proportionnelle au carré de l'amplitude de son accélération.

### **Solution**

La force de rappel :  $F_R = -kOM$

La force de frottement :  $F_f = -\alpha V = -\alpha \dot{OM}$

Le champ d'excitation :  $E = E_0 \cos(\omega t)$

1. L'équation différentielle en appliquant le PFD :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{elc}} + \vec{F}_R + \vec{F}_f = m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}$$

En projetant sur l'axe  $ox$  :

$$qE - kOM - \alpha \frac{dOM}{dt} = m \frac{d^2 OM}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 OM}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dOM}{dt} + \frac{k}{m} OM = \frac{qE}{m} \quad (1)$$

on pose :  $2\delta = \frac{\alpha}{m}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $q = -e$ ,  $E = E_0 \cos(\omega t)$

L'équation (1) devient :

$$\frac{d^2 OM}{dt^2} + 2\delta \frac{dOM}{dt} + \omega_0^2 OM = \frac{-eE_0}{m} \cos(\omega t) \quad (2)$$

2. La solution particulière :

On pose une solution particulière  $OM_p(t)$  sous la forme complexe :

$$\begin{cases} OM_p(t) = r_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = r_0 e^{i\omega t} e^{i\varphi} = \bar{r}_0 e^{i\omega t} \\ \dot{OM}_p(t) = ir_0 \omega e^{i(\omega t + \varphi)} = i\omega \bar{r}_0 e^{i\omega t} = i\omega OM_p(t) \\ \ddot{OM}_p(t) = -r_0 \omega^2 e^{i(\omega t + \varphi)} = -\omega^2 \bar{r}_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 OM_p(t) \end{cases}$$

En remplaçant  $OM_p(t)$ ,  $\dot{OM}_p(t)$  et  $\ddot{OM}_p(t)$  dans l'équation différentielle du mouvement (2) on obtient alors :

$$-\omega^2 \bar{r}_0 e^{i\omega t} + 2i\delta\omega \bar{r}_0 e^{i\omega t} + \omega_0^2 \bar{r}_0 e^{i\omega t} = \frac{-eE_0}{m} e^{i\omega t} \Rightarrow \bar{r}_0 = \frac{-eE_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega} = r_0 e^{i\varphi}$$

Pour mettre  $r_0$  et  $e^{i\varphi}$  sous la forme  $a+ib$ , on multiplie le dénominateur et le numérateur par l'expression conjuguée  $\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega$  on obtient :

$$\bar{r}_0 = r_0 e^{i\varphi} = \frac{\frac{-eE_0}{m} (\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega)} = \frac{\frac{-eE_0}{m} (\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{eE_0}{m} 2i\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}$$

Avec  $|\bar{r}_0| = \sqrt{a^2 + b^2}$  et  $tg\varphi = \frac{b}{a}$

D'où le module  $\bar{r}_0$  et l'argument  $\varphi$  :

$$|\bar{r}_0| = r_0 = \frac{\frac{eE_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}, tg\varphi = \frac{2\delta\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

En posant  $\xi = \frac{\omega}{\omega_0}$ , le module  $|r_0|$  et l'argument  $\varphi$  s'écrit :

$$|r_0| = \frac{\frac{eE_0}{m}}{\omega_0^2 \sqrt{(\xi^2 - 1)^2 + 4\delta^2 \xi^2}} \text{ et } \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\xi}{\omega_0(\xi^2 - 1)} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\delta\xi}{\omega_0(\xi^2 - 1)}\right)$$

D'où la solution permanente est donné comme suit:

$$OM_p(t) = \frac{\frac{eE_0}{m}}{\omega_0^2 \sqrt{(\xi^2 - 1)^2 + 4\delta^2 \xi^2}} e^{i\left(\omega t + \operatorname{arctg}\left(\frac{2\delta\xi}{\omega_0(\xi^2 - 1)}\right)\right)}$$

$$OM_p(t) = \frac{\frac{eE_0}{m}}{\omega_0^2 \sqrt{(\xi^2 - 1)^2 + 4\delta^2 \xi^2}} \cos\left(\omega t + \operatorname{arctg}\left(\frac{2\delta\xi}{\omega_0(\xi^2 - 1)}\right)\right)$$

3. Simplification des expressions précédentes :

La longueur d'onde du bleu  $\lambda_b = 400\text{nm}$

La longueur d'onde du rouge  $\lambda_r = 800\text{nm}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{9.110^{-31}}} = 1.04810^{16} \text{ rad} / \text{s}^{-1},$$

$$\omega_b = \frac{2\pi c}{\lambda_b} = \frac{2\pi 310^{+8}}{40010^{-9}} = 4.7110^{15} \text{ rad} / \text{s}^{-1},$$

$$\omega_r = \frac{2\pi c}{\lambda_r} = \frac{2\pi 310^{+8}}{80010^{-9}} = 2.3610^{15} \text{ rad} / \text{s}^{-1}$$

D'après ces pulsations on peut conclure que :  $\omega_0 \succ \omega_b \succ \omega_r$ .

Si la pulsation d'excitation  $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \xi = \frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow 0$  d'où l'expression de l'amplitude  $r_0$

s'écrit :  $r_0 = \frac{eE_0}{\omega_0^2 m}$

4. La puissance moyenne est proportionnelle au carré de l'amplitude de son accélération :

$$\langle p \rangle = k (\text{amplitude de l'accélération})^2$$

Comme :  $OM_p(t) = \frac{eE_0}{m\omega_0^2} e^{i\left(\omega t + \operatorname{arctg}\left(\frac{2\delta\xi}{\omega_0(\xi^2 - 1)}\right)\right)}$

$$\ddot{OM}_p(t) = -\omega^2 \frac{eE_0}{m\omega_0^2} e^{i\left(\omega t + \operatorname{arctg}\left(\frac{2\delta\xi}{\omega_0(\xi^2 - 1)}\right)\right)}$$

La puissance du bleu est :

$$\langle p_b \rangle = k \left( \frac{e\omega_b^2 E_0}{m\omega_0^2} \right)^2$$

La puissance du rouge est :

$$\langle p_r \rangle = k \left( \frac{e\omega_r^2 E_0}{m\omega_0^2} \right)^2$$

Soit :

$$\frac{\langle p_b \rangle}{\langle p_r \rangle} = \frac{k \left( \frac{e\omega_b^2 E_0}{m\omega_0^2} \right)^2}{k \left( \frac{e\omega_r^2 E_0}{m\omega_0^2} \right)^2} = \frac{\omega_b^4}{\omega_r^4} = \left( \frac{\lambda_r}{\lambda_b} \right)^4 = 16$$

### Exercice 3

Dans le système ci-dessous, une force d'excitation sinusoïdale  $\vec{F}$  appliquée à la masse  $m$  l'incite à osciller verticalement. Suivant l'axe vertical, la force  $\vec{F}$  est donnée par  $\vec{F} = F_0 \cos(\omega t) \vec{i}$  par rapport à la position d'équilibre, le sens positif est choisi vers le bas. On modélise les frottements visqueux par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux  $\alpha$ .

1. Déterminer l'équation du mouvement par le P.F.D.
2. Expliciter la solution permanente et préciser son amplitude et sa phase.
3. Dédurre la pulsation de résonance.
4. Quelle est la valeur maximale que la masse ne doit pas dépasser pour éviter le phénomène de résonance et calculer cette valeur pour  $k = 4 \text{ N/m}$  et  $\alpha = 4 \text{ N.s/m}$ .
5. Calculer la puissance instantanée et moyenne fournies par la force d'excitation.

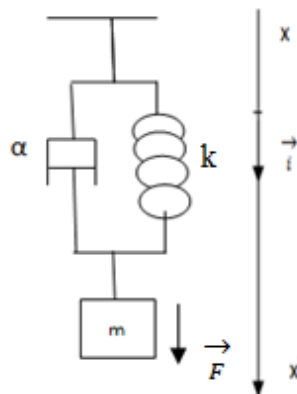


Fig. 3.1

**Solution**

1. L'équation du mouvement par le formalisme fondamental de la dynamique est :

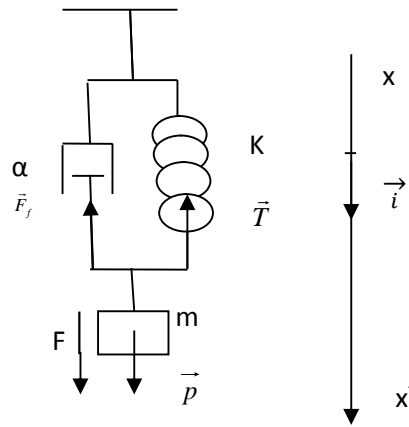


Figure 3.1.a : Bilan des forces.

Le système est en équilibre :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p} + \vec{T} = 0$$

En projetant sur l'axe ( $xx'$ ) on obtient :

$$mg - kx_0 = 0$$

Le système est en mouvement :

En appliquant le PFD :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = m\vec{a} &\Leftrightarrow p - T - F_f + F = m \frac{d^2x}{dt^2} \\ &\Leftrightarrow mg - k(x + x_0) - \alpha \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega t) = m \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned} \tag{1}$$

On a  $mg - kx_0 = 0$  (condition d'équilibre) d'où:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \tag{2}$$

2. La solution permanente en précisant son amplitude et sa phase.

La solution permanente de l'équation précédente est donné par :  $x_p(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$

On met  $x_p(t)$  sous la forme complexe :

$$\begin{cases} x_p(t) = x_m e^{i(\omega t + \varphi)} = \bar{x}_m e^{i(\omega t)} \\ \dot{x}_p(t) = i\bar{x}_m \omega e^{i(\omega t)} = i\omega x_p(t) \\ \ddot{x}_p(t) = -\bar{x}_m \omega^2 e^{i(\omega t)} = -\omega^2 x_p(t) \end{cases}$$

En injectant  $x_p(t), \dot{x}_p(t), \ddot{x}_p(t)$  dans l'équation (2), on obtient :

$$-\bar{x}_m \omega^2 e^{i(\omega t)} + i2\delta \bar{x}_m \omega e^{i(\omega t)} + \omega_0^2 \bar{x}_m e^{i(\omega t)} = \frac{F_0}{m} e^{i(\omega t)} \Rightarrow \bar{x}_m = \frac{\frac{F_0}{m}}{-\omega^2 + 2i\delta\omega + \omega_0^2} = x_m e^{i\varphi}$$

d'où l'amplitude des oscillations :

$$|\bar{x}_m| = x_m = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4(\delta\omega)^2}},$$

avec

$$\varphi = \text{artg}\left(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

La solution en régime permanent est :  $x_p(t) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4(\delta\omega)^2}} \cos(\omega t + \text{artg}\left(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right))$

3. La pulsation de résonance est la pulsation  $\omega_R$  permettant d'obtenir une amplitude maximale (lorsque le dénominateur de  $x_m$  est minimal) : elle correspond à la valeur pour laquelle la dérivée du dénominateur s'annule.

$$\begin{aligned} \frac{d(x_m)}{d\omega} = 0 &\Leftrightarrow \frac{d(x_m)}{d\omega} = -\frac{\frac{F_0}{m} 2\omega(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\delta)}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4(\delta\omega)^2\right)^{3/2}} \\ -\frac{\frac{F_0}{m} 2\omega(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\delta)}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4(\delta\omega)^2\right)^{3/2}} &= 0 \Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2 - 2\delta) = 0 \\ &\Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{2m}} = \omega_r$$

Si on ne veut pas avoir de résonance, l'expression sous la racine doit être négative

$$\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{2m^2} < 0 \Rightarrow m < \frac{\alpha^2}{2k}$$

Pour  $\alpha = 4N / ms^{-1}$  et  $K=4N/m \Rightarrow m < \frac{4^2}{2(4)} = 2kg$

5.1 La puissance instantanée est :

$$P = F \frac{dx(t)}{dt} = F \dot{x}(t) = -F_0 \cos(\omega t) \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4(\delta\omega)^2}} \omega \sin(\omega t + \text{artg}(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}))$$

$$P = -\frac{1}{2} F_0 \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4(\delta\omega)^2}} \omega \left[ \sin(\text{artg}(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2})) + \sin(2\omega t + \text{artg}(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2})) \right]$$

5.1 La puissance moyenne fournie par la force d'excitation est :

$$\langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{T} \int_0^T F \dot{x}(t) dt$$

$$\langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T -\frac{1}{2} F_0 \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4(\delta\omega)^2}} \omega \left[ \sin(\text{artg}(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2})) + \sin(2\omega t + \text{artg}(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2})) \right] dt$$

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{2} F_0 \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4(\delta\omega)^2}} \omega (\sin \varphi) = -\frac{1}{2} F_0 \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4(\delta\omega)^2}} \omega \left( \frac{\text{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi}} \right)$$

On remplace l'expression de  $\varphi = \text{artg}(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2})$  dans l'équation précédente on obtient :

$$\langle P \rangle = \frac{\frac{F_0^2}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4(\delta\omega)^2} \delta\omega^2$$

### Exercice 4

Un système mécanique est constitué d'une barre de masse  $m$  et de longueur  $L$ , oscillant autour du point fixe  $O$  et deux de ressorts de constantes raideur  $k$  fixés à la barre respectivement à des distance  $L/2$  et  $L$ . A l'équilibre, ces deux ressorts sont déformés. Un amortisseur de coefficient  $\alpha$  est fixé à son tour à la barre à une distance  $L$  de point  $O$ . Le centre de la tige est soumis à une force d'excitation sinusoïdale  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ .

1. Dédire la condition d'équilibre puis établir l'équation différentielle du mouvement et sa solution dans le cas de faibles oscillations.
2. Calculer l'expression de l'amplitude  $A$  et la phase  $\varphi$  de la solution particulière et déterminer la solution globale de l'équation différentielle.

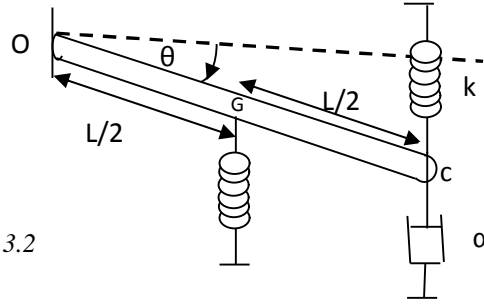


Fig. 3.2

**Solution**

1. 1 La condition d'équilibre est :

$$\sum M(\vec{F}_{Ext})_{/O} = \vec{OG} \wedge \vec{T}_1 + \vec{OC} \wedge \vec{T}_2 + \vec{OG} \wedge \vec{p} = \vec{0}$$

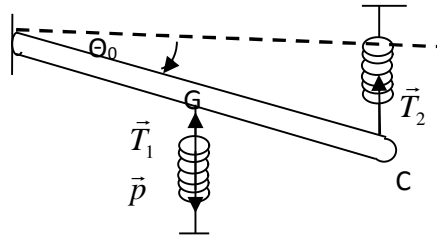


Figure 3.2.a : les forces exercées sur le système en équilibre.

Le moment d'une force par rapport à un axe  $\Delta$  est :

$$\begin{aligned} \sum M(\vec{F}_{Ext})_{/\Delta} &= -|\vec{OG} \wedge \vec{T}_1| - |\vec{OC} \wedge \vec{T}_2| + |\vec{OG} \wedge \vec{p}| = 0 \\ &= -Kx_0 \frac{L}{2} \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - Kx_{01} L \sin(\frac{\pi}{2} - \theta_0) + mg \frac{L}{2} \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) = 0 \end{aligned}$$

Sachant que:  $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta \approx 1$ ,  $x_0 = \frac{L}{2} \sin(\theta_0) \approx \frac{L}{2} \theta_0$  et  $x_{01} = L \sin(\theta_0) \approx L \theta_0$

$$\sum M(\vec{F}_{Ext})_{/\Delta} = -Kx_0 \frac{L}{2} - Kx_{01} L + mg \frac{L}{2} = 0 \Leftrightarrow -K \frac{L^2}{4} \theta_0 - KL^2 \theta_0 + mg \frac{L}{2} = 0$$

1. 2 l'équation différentielle du mouvement est :

$$\sum M(\vec{F}_{Ext})_{/O} = \vec{OG} \wedge \vec{T}_1 + \vec{OC} \wedge \vec{T}_2 + \vec{OC} \wedge \vec{F}_f + \vec{OG} \wedge \vec{f}_{ex} + \vec{OG} \wedge \vec{p} = J \ddot{\theta} \vec{k} \tag{1.a}$$

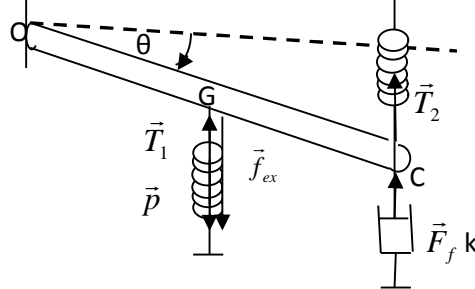


Figure 3.2.b : Ensembles des forces exercées sur le système mécanique en mouvement.

Le moment d'une force par rapport à un axe  $\Delta$  est :

$$\begin{aligned} \sum M(\vec{F}_{Ext})_{/\Delta} &= -|\vec{OG} \wedge \vec{T}_1| - |\vec{OC} \wedge \vec{T}_2| - |\vec{OC} \wedge \vec{F}_f| + |\vec{OG} \wedge \vec{f}_{ex}| + |\vec{OG} \wedge \vec{p}| = J \ddot{\theta} \\ &= -K(x + x_0) \frac{L}{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) - K(x_1 + x_{01})L \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) - \alpha \dot{x}_1 L \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) + \\ &\quad f_{ex} \frac{L}{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) + mg \frac{L}{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = J \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (1.b)$$

En remplaçant  $\sin \theta = \frac{x}{OG} \approx \theta$ ,  $\sin \theta = \frac{x_1}{OC} \approx \theta$ ,  $\sin(\theta \pm \frac{\pi}{2}) = \cos \theta = 1$  dans l'équation (1.b)

on obtient alors:

$$\begin{aligned} -K(\theta + \theta_0) \frac{L^2}{4} - K(\theta + \theta_0)L^2 - \alpha \dot{\theta} L^2 + f_{ex} \frac{L}{2} + mg \frac{L}{2} &= J \ddot{\theta} \\ mg \frac{L}{2} - \frac{L^2}{4} K\theta_0 - KL^2\theta_0 - KL^2\theta - K \frac{L^2}{4} \theta - \alpha \dot{\theta} L^2 + f_{ex} \frac{L}{2} &= J \ddot{\theta} \end{aligned}$$

On a  $mg \frac{L}{2} - \frac{L^2}{4} K\theta_0 - KL^2\theta_0 = 0$  (condition d'équilibre) l'équation précédente s'écrit:

$$\sum M(F_{Ext})_{/\Delta} = -K \frac{L^2}{4} \theta - KL^2\theta - \alpha L^2 \dot{\theta} + f_{ex} \frac{L}{2} = J \ddot{\theta} \quad (1.c)$$

En divise l'équation (1.c) par J on obtient :

$$\ddot{\theta} + (\frac{5KL^2}{4J})\theta + \frac{\alpha L^2}{J} \dot{\theta} + = f_{ex} \frac{L}{2J} \quad (2)$$

En appliquant le théorème de Huygens le moment d'inertie de ce système est :

$$J = J_{/O} + m \frac{L^2}{4} = \frac{1}{12} mL^2 + m \frac{L^2}{4} = \frac{1}{3} mL^2$$

Donc, l'équation précédente (2) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\ddot{\theta} + (\frac{15K}{4m})\theta + \frac{3\alpha}{m} \dot{\theta} + = \frac{3}{2mL} F_0 \cos(\omega t) \quad (3)$$

La solution de l'équation (3) dans le cas faiblement amorti est :

Sachant que faiblement amortie :  $\delta < \omega_0 \Rightarrow \theta_m(t) = ce^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$  avec  $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ ,

2. L'expression de l'amplitude A et la phase  $\varphi$  :

On peut écrire l'équation (3) comme suit :

$$\ddot{\theta} + 2\delta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = B \cos(\omega t) \quad (4)$$

Tels que :  $\omega_0^2 = \frac{15K}{4m}$ ,  $2\delta = \frac{3\alpha}{m}$ ,  $B = \frac{3}{2mL} F_0$

La solution générale de l'équation différentielle (3) est  $\theta(t) = \theta_m(t) + \theta_p(t)$

Pour le régime pseudo périodique  $\delta < \omega_0 \Rightarrow \theta_m(t) = ce^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$  avec  $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ ,  
 et  $\theta_p(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$  : est la solution particulière de l'équation (3).

En utilisant la notation complexe pour  $\theta_p(t)$

$$\theta_p = Ae^{i(\omega t + \varphi)} = \bar{A}e^{i(\omega t)} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta}_p = iA\omega e^{i(\omega t + \varphi)} = i\bar{A}\omega e^{i(\omega t)} \\ \ddot{\theta}_p = -A\omega^2 e^{i(\omega t + \varphi)} = -\bar{A}\omega^2 e^{i(\omega t)} \end{cases}$$

En remplaçant  $\theta_p$ ,  $\dot{\theta}_p$  et  $\ddot{\theta}_p$  dans l'équation, on aura :

$$-\bar{A}\omega^2 + \omega_0^2 \bar{A} + 2i\delta\omega\bar{A} = B \Rightarrow \bar{A} = \frac{B}{(-\omega^2 + \omega_0^2) + (2i\delta\omega)}$$

L'amplitude des oscillations est :

$$|\bar{A}| = A = \frac{B}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

La phase est décrite par:

$$\text{tg } \varphi = \frac{-2\delta\omega}{(-\omega^2 + \omega_0^2)} \Rightarrow \varphi = \text{arctg}\left(\frac{-2\delta\omega}{-\omega^2 + \omega_0^2}\right)$$

3. La solution globale de l'équation différentielle est exprimée alors :

$$\theta(t) = ce^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi) + \frac{3F_0 / 2Lm}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \cos(\omega t + \text{arctg}\left(\frac{-2\delta\omega}{-\omega^2 + \omega_0^2}\right))$$

### Exercice 5

Un disque de masse M et de rayon R tourne autour d'un axe de rotation horizontal O. Au point B de ce disque on applique une force  $F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$ . On donne  $OA=L/2$  et  $OB=R$  (figure.3.3).

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement lorsque le système est librement amorti.
2. Dédire la solution de l'équation différentielle pour le régime critique.
3. Etablir l'équation différentielle et la solution permanente décrivant les oscillations.
4. Que deviennent l'amplitude et la phase, si on applique au point B une force d'excitation de la forme  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ , puis calculer la puissance moyenne et la largeur de la bande passante.

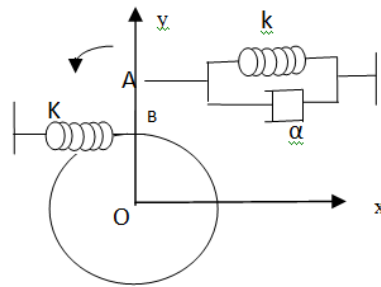


Fig. 3.3

**Solution**

1. L'équation différentielle pour le système est librement amorti avec le P.F.D :

$$\sum M(\vec{F}_{ext})_{/O} = \vec{OB} \wedge \vec{T}_1 + \vec{OA} \wedge \vec{T}_2 + \vec{OA} \wedge \vec{F}_f = J \ddot{\theta} \vec{k}$$

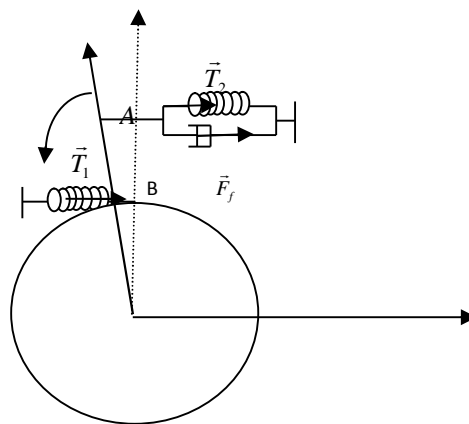


Figure 3.3.a : Ensemble des forces exercées sur le système en mouvement.

Le moment d'une force par rapport à un axe  $\Delta$  est :

$$\begin{aligned} \sum M(F_{ext})_{/\Delta} &= -|\vec{OB} \wedge \vec{T}_1| - |\vec{OA} \wedge \vec{T}_2| - |\vec{OA} \wedge \vec{F}_f| = J \ddot{\theta} \\ \sum M(F_{ext})_{/\Delta} &= -KR^2\theta - K\frac{L^2}{4}\theta - \alpha\frac{L^2}{4}\dot{\theta} = J \ddot{\theta} \end{aligned} \tag{1}$$

On divise l'équation (1) par J, on obtient alors:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{KR^2 + K\frac{L^2}{4}}{J}\right)\theta + \frac{\alpha\frac{L^2}{4}}{J}\dot{\theta} = 0 \tag{2}$$

J est le moment d'inertie du disque :  $J = \frac{1}{2}mR^2$

En remplaçant l'expression de J dans l'équation du mouvement (2), on obtient :

$$\ddot{\theta} + 2\left(\frac{KR^2 + K\frac{L^2}{4}}{mR^2}\right)\theta + 2\frac{\alpha\frac{L^2}{4}}{mR^2}\dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \tag{3}$$

Avec :

$$\delta = \frac{\alpha L^2}{4mR^2}, \quad \omega_0^2 = 2\left(\frac{KR^2 + K\frac{L^2}{4}}{mR^2}\right)$$

2. La solution de l'équation du mouvement pour le régime critique ( $\delta = \omega_0$ ) est donnée comme suit :

$$\theta(t) = e^{-\delta t} (A + Bt)$$

3.1 L'équation différentielle du mouvement lorsque le système est amorti et forcé

En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur le système, on a:

$$\sum M(\vec{F}_{ext})_{/O} = \vec{OB} \wedge \vec{T}_1 + \vec{OA} \wedge \vec{T}_2 + \vec{OA} \wedge \vec{F}_f + \vec{OB} \wedge \vec{f}_{ex} = J \ddot{\theta} \vec{k} \quad (4)$$

$$\sum M(F_{ext})_{/\Delta} = -KR^2\theta - K\frac{L^2}{4}\theta - \alpha\frac{L^2}{4}\dot{\theta} + f_{ex}R = J\ddot{\theta}$$

En divisant l'équation précédente par J :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{KR^2 + K\frac{L^2}{4}}{J}\right)\theta + \frac{\alpha\frac{L^2}{4}}{J}\dot{\theta} = f_{ex}\frac{R}{J} \quad (5)$$

On remplace  $J = \frac{1}{2}mR^2$  dans l'équation précédente (5).

$$\ddot{\theta} + 2\left(\frac{KR^2 + K\frac{L^2}{4}}{mR}\right)\theta + \frac{2\alpha\frac{L^2}{4}}{mR^2}\dot{\theta} = \frac{2F_0}{mR}\cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{4KR^2 + KL^2}{2mR}\right)\theta + \frac{\alpha L^2}{2mR^2}\dot{\theta} = \frac{2F_0}{mR}\cos(\omega_0 t)$$

On pose :  $\omega_0^2 = \left(\frac{4KR^2 + KL^2}{2mR}\right)$  et  $2\delta = \frac{\alpha L^2}{2mR^2}$  l'équation précédente s'écrit alors comme suit:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta + 2\delta\dot{\theta} = \frac{2F_0}{mR}\cos(\omega_0 t) \quad (6)$$

3.2 La solution permanente de l'équation (6) est donnée par :

On pose  $\theta_p(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

La notation complexe de  $\theta_p(t)$  s'écrit:

$$\theta_p(t) = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi)} = \bar{A}e^{i(\omega_0 t)}, \quad \dot{\theta}_p(t) = \bar{A}i\omega_0 e^{i(\omega_0 t)}, \quad \ddot{\theta}_p(t) = -\bar{A}\omega_0^2 e^{i(\omega_0 t)}$$

En remplaçant par la notation complexe ( $\theta_p(t)$ ,  $\dot{\theta}_p(t)$  et  $\ddot{\theta}_p(t)$ ) dans l'équation différentielle du mouvement (5), on obtient alors:

$$(-\bar{A}\omega_0^2 + \bar{A}\omega_0^2 + 2i\delta\bar{A}\omega_0)e^{i(\omega_0 t)} = \frac{2F_0}{mR}e^{i(\omega_0 t)} \quad (7)$$

L'amplitude complexe est donnée par :  $\bar{A} = \frac{2F_0}{2imR\delta\omega_0}$

$$\text{On a : } \bar{A} = Ae^{i\varphi} = A(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{-i2F_0}{2mR\delta\omega_0} \Rightarrow \varphi = \frac{-\pi}{2}, A = \frac{2F_0}{2mR\delta\omega_0}$$

D'où la solution permanente :

$$\theta_p(t) = \frac{2F_0}{2mR\delta\omega_0} \cos\left(\sqrt{\frac{4KR^2 + KL^2}{2mR}}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

4.1 L'amplitude et la phase si on applique au point B une force d'excitation de la forme  $F(t) = F_0 \cos \omega t$  sont :

Dans ce cas l'équation (7) s'écrit sous la forme suivante:

$$(-\bar{A}\omega^2 + \bar{A}\omega_0^2 + 2i\delta\bar{A}\omega)e^{i(\omega t)} = \frac{2F_0}{mR}e^{i(\omega t)} \quad (8)$$

L'amplitude du mouvement s'écrit alors comme suit :

$$\bar{A}(-\omega^2 + \omega_0^2 + 2i\delta\omega) = \frac{2F_0}{mR} \Rightarrow A = \frac{\frac{2F_0}{mR}}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (9)$$

Le déphasage entre  $\theta(t)$  et  $F(t)$  est donné par :

$$\varphi = \text{artg}\left(\frac{-2\delta\omega}{(-\omega^2 + \omega_0^2)}\right)$$

La solution du mouvement en régime permanent s'écrit :

$$\theta(t) = \frac{\frac{2F_0}{mR}}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t + \text{artg}\left(\frac{-2\delta\omega}{(-\omega^2 + \omega_0^2)}\right)\right)$$

4.3 La puissance moyenne :

Sachant que :

$$\langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \dot{\theta}(t) dt$$

$$\langle P \rangle = \frac{\delta \omega^2 \frac{2F_0^2}{mR}}{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}$$

4.4 La largeur de la bande passante :

Les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  pour lesquelles  $\langle P \rangle$  est la moitié de son maximum sont appelées pulsation de coupure. La largeur  $\omega_2 - \omega_1 = B$  est appelée la bande passante.

La puissance moyenne est maximale lorsque :

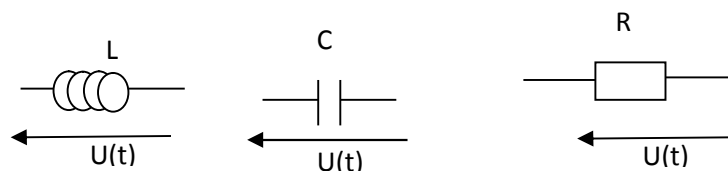
$$\frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \omega} = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0 \quad \text{et} \quad \langle P \rangle_{\max} = \frac{2F_0^2}{4\delta mR}$$

Pour  $\langle P \rangle = \frac{\langle P \rangle_{\max}}{2}$  lorsque  $\omega_1 = \omega_0 - \delta$  et  $\omega_2 = \omega_0 + \delta$

Donc :  $B = 2\delta$

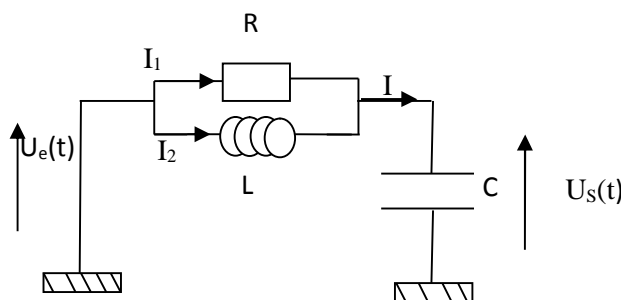
### Exercice 6

1. Rappeler les équations différentielles reliant  $u(t)$  et l'intensité  $i(t)$  dans chacun des trois dipôles ci-dessous :



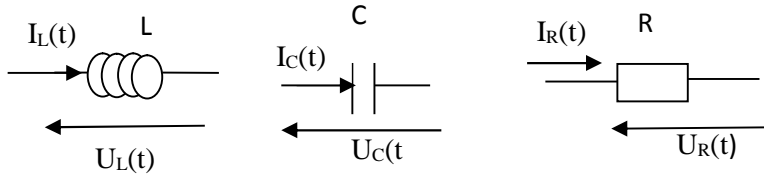
2. Déterminer l'impédance pour chacun des dipôles (L, C, R).

3. Le circuit ci-dessous est alimenté par un générateur qui délivre une tension sinusoïdale  $U_e$  de pulsation  $\omega$ . Déterminer l'impédance équivalente  $Z$  du circuit.



**Solution**

1. En convention des récepteurs :



$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt}, U_C(t) = \frac{q}{C}, U_R(t) = RI_R$$

2. L'impédance pour chaque dipôle s'exprime comme suit :

On pose:  $U(t) = \bar{U}e^{j\omega t}$  et  $I(t) = \bar{I}e^{j\omega t}$

$$\bar{U}_R = R\bar{I}_R = Z_R\bar{I}_R,$$

$$\bar{U}_L = jL\omega\bar{I}_L = Z_L\bar{I}_L,$$

$$\bar{U}_C = \frac{1}{jC\omega}\bar{I}_C = Z_C\bar{I}_C$$

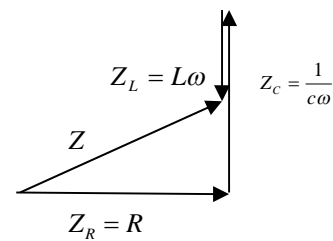


Figure 3.4 : Schéma de Fresnel pour les dipôles (R, C, L)

Avec :

$$Z_R = R, Z_L = jL\omega \text{ et } Z_C = \frac{1}{jC\omega}$$

3. L'impédance équivalente Z du circuit est :

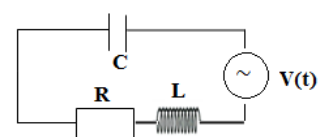
$$Z = (Z_R // Z_L) + Z_C = Z_{RL} + Z_C = \frac{1}{\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L}} + Z_C$$

$$Z = \frac{Z_L + Z_R}{Z_L Z_R} + Z_C = \frac{R + jL\omega}{RjL\omega} + \frac{1}{jC\omega}$$

**Exercice 7**

Un circuit électrique R, L, C en série est alimenté par une source de tension  $V(t) = V_0 \sin(\Omega t)$

1. Dédire l'équation différentielle d'oscillation de ce circuit électrique.
2. Calculer le coefficient d'amortissement et la pulsation propre du circuit.
3. Dans le cas où  $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ , déterminer l'expression de la solution transitoire ainsi que sa pseudo-pulsation.
4. Calculer l'intensité de la charge  $q_0$  et le déphasage.
5. Exprimer le courant  $i(t)$  et déduire l'impédance électrique.



6. Calculer la pulsation de résonance et l'amplitude maximale.

### Solution

1. l'équation différentielle de ce circuit électrique est donnée par :

La tension du générateur est donnée par :  $V(t) = V_0 \sin(\Omega t)$

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} q + Ri = V_0 \sin(\Omega t)$$

On remplace  $i = \frac{dq}{dt}$  dans l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} L \ddot{q} + \frac{1}{C} q + R \dot{q} &= V_0 \sin(\Omega t) \Leftrightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC} q + \frac{R}{L} \dot{q} = \frac{V_0}{L} \sin(\Omega t) \\ &\Leftrightarrow \ddot{q} + \omega_0^2 q + 2\delta \dot{q} = \frac{V_0}{L} \sin(\Omega t) \end{aligned}$$

Avec :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \text{ pulsation propre et } \delta = \frac{R}{2L} \text{ coefficient d'amortissement}$$

3. Le cas où  $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ , on détermine l'expression de la solution transitoire :

$$\text{On a } R = \sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow \delta^2 = \frac{1}{4LC}$$

$$\delta^2 < \omega_0^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4LC} < \frac{1}{LC}$$

Sachant que :

$\delta^2 < \omega_0^2$  le système est faiblement amorti donc la solution transitoire s'écrit :

$$q(t) = ce^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi)$$

avec :

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4LC}}$$

3. L'intensité de la charge  $q_0$  et le déphasage sont :

On cherche une solution sous la forme :

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 \cos(\Omega t + \varphi) \xrightarrow{\text{notation complexe}} q(t) = q_0 e^{(j\Omega t) + j\varphi} = \overline{q_0} e^{j\Omega t} \dot{q}(t) = \overline{q_0} e^{j\Omega t} j\Omega, \\ \ddot{q}(t) &= -\Omega^2 \overline{q_0} e^{j\Omega t} \end{aligned}$$

On remplace  $q(t)$ ,  $\dot{q}(t)$  et  $\ddot{q}(t)$  dans l'équation différentielle, on obtient alors :

$$(-\Omega^2 + \omega_0^2 + j2\delta\Omega)\bar{q}_0 e^{j\Omega t} = \frac{V_0}{L} e^{j\Omega t} \Leftrightarrow \bar{q}_0 = \frac{\frac{V_0}{L}}{-\Omega^2 + \omega_0^2 + j2\delta\Omega}$$

D'où le module du  $\bar{q}_0$  et le déphasage :

$$|\bar{q}_0| = \frac{\frac{V_0}{L}}{\sqrt{(-\Omega^2 + \omega_0^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} = q_0(\Omega), \varphi = \arctg\left(\frac{-2\delta\Omega}{-\Omega^2 + \omega_0^2}\right)$$

#### 4. Le courant $i(t)$

Sachant que :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \Leftrightarrow i(t) = \Omega \frac{\frac{V_0}{L}}{\sqrt{(-\Omega^2 + \omega_0^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \cos\left(\Omega t + \arctg\left(\frac{-2\delta\Omega}{-\Omega^2 + \omega_0^2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \Omega \frac{\frac{V_0}{L}}{\sqrt{\left(-\Omega^2 + \frac{1}{LC}\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\Omega\right)^2}} \cos\left(\Omega t + \arctg\left(\frac{-2\delta\Omega}{-\Omega^2 + \omega_0^2}\right)\right)$$

$$i(t) = \frac{V_0}{\sqrt{\left(-L\Omega + \frac{1}{\Omega C}\right)^2 + R^2}} \cos\left(\Omega t + \arctg\left(\frac{-2\delta\Omega}{-\Omega^2 + \omega_0^2}\right)\right) = \frac{V_0}{Z} \cos\left(\Omega t + \arctg\left(\frac{-2\delta\Omega}{-\Omega^2 + \omega_0^2}\right)\right)$$

Où  $Z = \sqrt{\left(-L\Omega + \frac{1}{\Omega C}\right)^2 + R^2}$  est appelée impédance électrique du circuit

#### 5. La pulsation de résonance et l'amplitude maximale sont exprimées selon:

La pulsation de résonance pour la charge est la pulsation qui donne une intensité maximale pour la charge électrique :

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

La valeur de l'intensité de la charge à la résonance est donnée par:

$$q_0(\Omega_r) = \frac{\frac{V_0}{L}}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

**Formalisme de Lagrange appliqué aux systèmes à un et deux degrés de liberté.**

**4.1 Systèmes linéaires libres.**

Les oscillateurs à un ou plusieurs degrés de libertés sont généralement définis par des variables indépendantes dites « coordonnées généralisées ». Les coordonnées cartésiennes sont utilisées pour décrire l'équation du mouvement, ces dernières sont unies par des relations linéaires qui prennent en compte les variables d'espace et de temps. Il est avantageux d'exprimer directement le principe fondamental de la dynamique au moyen des coordonnées généralisées, désignées par les composantes  $q_i$ , en nombre égal à celui régissant le nombre de degrés de liberté du système.

**Le nombre de degrés de liberté d'un oscillateur** est égal au nombre minimal de paramètres qui fixent sans ambiguïté l'état du système.

**Oscillateur à 1 degré de liberté:** pendule à ressort, pendule de torsion, circuit R LC...

**Oscillateur à n degrés de liberté:** chaîne de n molécules, n pendules pesants reliés entre eux.

**4.2 Equation de Lagrange.**

**4.2.1 Equation de Lagrange d'un oscillateur harmonique libre.**

Les systèmes à un degré de liberté sont des systèmes dont l'état est entièrement déterminé par la connaissance d'une variable  $q$  et de sa dérivée par rapport au temps  $\dot{q}$ . Leur énergie est composée de deux types :

Une énergie potentielle quadratique en  $q$  :

$$U = \frac{1}{2} A q^2 \quad (4.1)$$

Une énergie cinétique quadratique en  $\dot{q}$

$$T = \frac{1}{2} B \dot{q}^2 \quad (4.2)$$

Le Lagrangien s'écrit :

$$L = T - U \quad (4.3)$$

## **CHAPITRE 4** *Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté*

L'équation de Lagrange pour un système conservatif est définie par:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) = 0 \quad (4.4)$$

L'équation différentielle du mouvement pour l'oscillateur harmonique libre s'écrit:

$$\ddot{q} + bq = 0 \quad (4.5)$$

### **4.2.2 Equation de Lagrange d'un oscillateur harmonique libre amorti.**

Dans le cas d'un mouvement harmonique amorti, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \quad (4.6)$$

Avec :

$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2$  : fonction de dissipation dite fonction de Rayleigh.

$\alpha$  : coefficient de frottement visqueux.

L'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique amorti s'écrit:

$$\ddot{q} + a \dot{q} + bq = 0 \quad (4.7)$$

### **4.2.3 Equation de Lagrange d'un oscillateur harmonique libre amorti et forcé.**

L'équation de Lagrange d'un oscillateur harmonique libre amorti et forcé à un degré de liberté est :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + F \quad (4.8)$$

Avec :

F : force d'excitation

$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2$  : fonction de dissipation.

L'équation différentielle du mouvement pour ce type d'oscillateur s'écrit:

$$\ddot{q} + a \dot{q} + bq = F \quad (4.9)$$

**4.3. Application à un système libre à deux degrés de liberté.**

L'équation de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_1} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_2} \right) = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

L'équation du mouvement :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + aq_1 - bq_2 = 0 \\ \ddot{q}_2 + dq_2 - cq_1 = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Les modes propres :

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ q_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \xrightarrow{\text{notation complexe}} \begin{cases} q_1 = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} = \overline{A_1} e^{i(\omega t)} \\ q_2 = A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} = \overline{A_2} e^{i(\omega t)} \end{cases} \quad (4.12)$$

Avec :

$$\overline{A_1} = A_1 e^{i\varphi_1}, \overline{A_2} = A_2 e^{i\varphi_2}$$

On remplace  $q_1, q_2$  dans l'équation du mouvement ; on obtient :

$$\begin{cases} (-\omega^2 + a)\overline{A_1} - b\overline{A_2} = 0 \\ (-\omega^2 + d)\overline{A_2} - c\overline{A_1} = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

La solution est non triviale si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} (-\omega^2 + a) & -b \\ -c & (-\omega^2 + d) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega^4 - \omega^2(a + d) + (ad - bc) = 0 \quad (4.14)$$

Premier mode  $\omega = \omega_1 \Rightarrow \frac{\overline{A_1}}{A_2} = \frac{-\omega_1^2 + d}{c} > 0$  les vibrations sont en phase.

Deuxième mode  $\omega = \omega_2 \Rightarrow \frac{\overline{A_1}}{A_2} = \frac{-\omega_2^2 + d}{c} < 0$  les vibrations sont en position de phase.

**Un système amorti forcé à deux degrés de liberté (une seule force).**

L'équation de Lagrange est donnée par l'équation (4.14) :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_1} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} + F \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_2} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} \end{cases} \quad (4.15)$$

L'équation du mouvement :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\alpha_1 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 - \omega_3^2 q_2 = F \\ \ddot{q}_2 + 2\alpha_2 \dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 - \omega_4^2 q_1 = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Les modes propres :

$$F = F_0 \cos(\omega t) \Rightarrow F = F_0 e^{i\omega t},$$

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ q_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} = \overline{A_1} e^{i(\omega t)} \\ q_2 = A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} = \overline{A_2} e^{i(\omega t)} \end{cases} \quad (4.17)$$

On remplace  $q_1, q_2$  et  $F$  dans l'équation du mouvement et on obtient :

$$\begin{cases} (-\omega^2 + \omega_1^2 - 2i\alpha_1\omega)\overline{A_1} - \omega_3^2\overline{A_2} = F_0 \\ (-\omega^2 + \omega_2^2 - 2i\alpha_2\omega)\overline{A_2} - \omega_4^2\overline{A_1} = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

## Applications

### Exercice 1

Soit le système mécanique ci-dessous, la masse  $m$  peut glisser sans frottement sur le plan de pente  $\alpha=30^\circ$ . On lâche le système après l'avoir écarté de la position d'équilibre.

1. Exprimer l'énergie potentielle  $U$  du système.
2. Déduire la condition d'équilibre, trouver la déformation du ressort dans cet état et simplifier l'expression de  $U$ .
3. Exprimer l'énergie totale du système et déduire l'équation du mouvement en utilisant le principe de Lagrange.

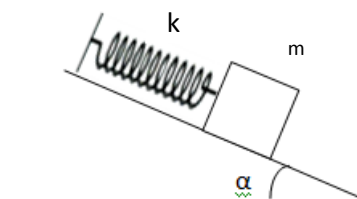
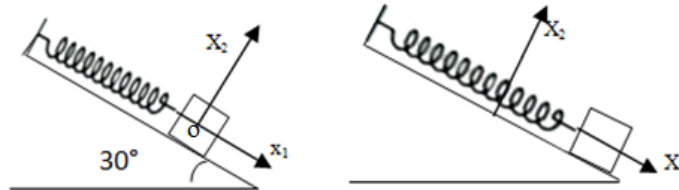


Fig.4.1.

**Solution**

1. On prend l'axe  $Ox_1$  comme repère pour l'énergie potentielle de ressort et l'axe  $Ox_2$  pour l'énergie potentielle de gravitation. La masse en position d'équilibre est représentée sur la figure de gauche. Lorsqu'elle est écartée de sa position d'équilibre (figure de droite) sa position est  $x_2$  suivant l'axe  $Ox_2$  et  $x_1$  suivant l'axe  $Ox_1$ . L'allongement du ressort est  $x_1 + x_{01}$ , avec  $x_{01}$  l'allongement du ressort à l'état d'équilibre.



L'expression de l'énergie potentielle prend alors la forme suivante :

$$U = \frac{1}{2}k(x_{01} + x_1)^2 + mgx_2$$

Les deux coordonnées  $x_2$  et  $x_1$  sont reliées par:  $x_2 = -x_1 \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}x_1$ . On peut garder une seule coordonnée qu'on considère comme degré de liberté, l'énergie potentielle prend alors la forme ci-dessous :

$$U = \frac{1}{2}k(x_{01} + x_1)^2 - \frac{1}{2}mgx_1 = \frac{1}{2}k(x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_{01})^2 + (kx_{01} - \frac{1}{2}mg)x_1$$

2. A l'équilibre la dérivée de l'énergie potentielle  $\left. \frac{\partial U}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = 0$  est :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = kx_1 + (kx_{01} - \frac{1}{2}mg) \Big|_{x_1=0} = 0 \tag{1}$$

A la position  $x_1=0$  l'équation (1) devient :

$$(kx_{01} - \frac{1}{2}mg) = 0, \text{ c'est la condition d'équilibre}$$

L'allongement à l'équilibre  $x_{01}$  est :

$$(kx_{01} - \frac{1}{2}mg) = 0 \Rightarrow x_{01} = \frac{mg}{2k}$$

Donc, l'expression de l'énergie potentielle devient :

$$U = \frac{1}{2}k(x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_{01})^2$$

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

L'énergie cinétique est :

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}_1)^2$$

3. L'énergie totale du système est :  $E = T + U$

$$E = \frac{1}{2} m(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} k(x_1)^2 + \frac{1}{2} k(x_{01})^2$$

4. L'équation du mouvement avec le principe de Lagrange:

La fonction de Lagrange :

$$L = T - U = \frac{1}{2} m(\dot{x}_1)^2 - \frac{1}{2} k(x_1)^2 - \frac{1}{2} k(x_{01})^2$$

L'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_1} \right) = 0$$

Avec :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = m \ddot{x}_1 \\ \left( \frac{\partial L}{\partial x_1} \right) = -kx_1 \end{cases}$$

L'équation du mouvement  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_1} \right) = \ddot{x}_1 + \frac{k}{m} x_1 = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0$  c'est une

équation différentielle du second ordre, à coefficient constant et sans second membre, d'un oscillateur harmonique libre.

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ (pulsation propre).}$$

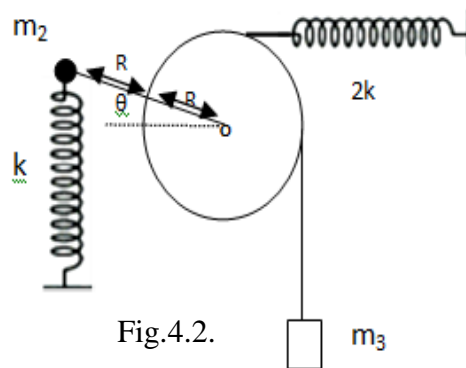
### Exercice 2

Dans le système de la figure 4.2, une poulie de masse  $m_1$  et de rayon  $R$  peut tourner autour de son centre sans frottement. Le fil est de masse négligeable et ne glisse pas sur la poulie, à son extrémité on place une masse  $m_2$ .

A l'équilibre, la tige est horizontale et le ressort vertical n'est pas déformé. La poulie est écartée de sa position d'équilibre d'un petit angle  $\theta$  puis relâchée. On considère que  $\theta$  est suffisamment petit pour admettre que  $\sin \theta \approx \theta$ .

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

1. Exprimer l'énergie potentielle  $U$  du système en fonction de l'angle  $\theta$ .
2. Ecrire la condition d'équilibre à partir de  $U$ . Déduire l'allongement initial  $x_{02}$  du ressort de constante de raideur  $2k$  puis simplifier l'expression de  $U$ .
3. Quelle est la valeur que doit avoir  $m_2$  en fonction de  $m_1$  pour que  $x_{02}$  soit nulle.
4. On suppose que  $m_3 = 2m_2 = m$  et  $m_1=2m$ . Trouver l'énergie cinétique  $T$  du système et déduire le Lagrangien.
5. Déduire l'équation du mouvement en utilisant l'équation de Lagrange.



### Solution

1. l'énergie potentielle  $U$  du système en fonction de  $\theta$  est :

$$U = \frac{1}{2}k(x_1)^2 + \frac{1}{2}2k(x_{02} + x_2)^2 + m_2gx_1 - m_3gx_3 \quad (1)$$

Les trois coordonnées  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  dépendent de  $\theta$  comme suit :

$$x_1 = 2R \sin \theta \approx 2R\theta$$

$$x_2 = R \sin \theta \approx R\theta, x_{02} = R \sin \theta_0 \approx R\theta_0,$$

$$x_3 = R \sin \theta \approx R\theta$$

On remplace  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  dans l'expression (1) de l'énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2}k(2R\theta)^2 + \frac{1}{2}2k(R\theta_0 + R\theta)^2 + 2m_2gR\theta - m_3gR\theta$$

- 2.1 La condition d'équilibre à partir de  $U$  :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 2kR^2\theta + 2kR^2(\theta + \theta_0) + (2m_2g - m_3g)R \Big|_{\theta=0} = 0 \quad (2)$$

On a aussi à l'équilibre  $\theta = 0$  donc l'expression précédente (2) s'écrit :

$$(2kR\theta_0 + 2m_2g - m_3g)R = 0 \quad (3)$$

- 2.2 L'allongement initial du ressort de constante  $2k$  est  $x_{02} \approx R\theta_0$

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

D'après l'équation (3) on a :

$$(2kx_{02} + 2m_2g - m_3g)R = 0 \Rightarrow x_{02} = \frac{-2m_2g + m_3g}{2k}$$

2.3 L'expression de U :  $U = 3k(R\theta)^2 + k(x_{02})^2$

3. La valeur que doit avoir  $m_2$  en fonction de  $m_3$  pour que  $x_{02}$  soit nulle est :

$$x_{02} = \frac{-2m_2g + m_3g}{2k} = 0 \Rightarrow 2m_2 = m_3$$

4.1 L'énergie cinétique T du système

L'énergie cinétique du système est la somme de l'énergie cinétique de la poulie et de la tige (en rotation) à laquelle on ajoute l'énergie cinétique de translation de la masse attachée au fil.

On suppose :  $m_3 = 2m_2 = m$  et  $m_1 = 2m$

$$T = \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}J(\dot{\theta})^2 \quad (4)$$

avec :

$$J = m_2(2R)^2 + \frac{1}{2}m_1R^2 = 3mR^2, \quad x_3 = R\theta \Rightarrow \dot{x}_3 = R\dot{\theta} \quad (\dot{x}_3)^2 = (R\dot{\theta})^2$$

On remplace  $x_3^2$  et  $J$  dans l'expression (4) de l'énergie cinétique, on obtient :

$$T = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta})^2 + \frac{3}{2}mR^2(\dot{\theta})^2 = 2mR^2(\dot{\theta})^2 \quad (5)$$

4.2 La fonction de Lagrange :

$$L = T - U \Leftrightarrow 2mR^2\dot{\theta}^2 - 3kR^2\theta^2$$

5. L'équation du mouvement en utilisant l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 \quad (6)$$

Avec :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 4mR^2\ddot{\theta}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -6kR^2\theta$$

On remplace dans l'équation (6) on obtient alors :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = \ddot{\theta} + \frac{6k}{4m} \theta = 0$$

On pose  $\omega_0^2 = \frac{3k}{2m}$  ; l'équation du mouvement devient :  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$

### **Exercice 3**

Une tige de masse négligeable de longueur  $2L$  porte à chacune de ses extrémités un ressort  $k$  et une masse  $m = m/3$  et peut pivoter autour de son axe horizontal fixe situé en son milieu. L'un des deux ressorts est attaché à un amortisseur vertical de coefficient de frottement  $\alpha_1$ . L'autre ressort est attaché à deux ressorts de constante de raideur  $k$ . Au milieu de la tige on place une barre de masse négligeable de longueur  $L$ , une masse  $m/3$  sur laquelle on fixe un ressort de constante  $k$  et un amortisseur de coefficient de frottement  $\alpha_2$  (figure 4.3).

1. En tenant compte de la disposition des ressorts, décrire une simplification de ce système mécanique.
2. Exprimer l'équation différentielle du mouvement sous forme canonique.
3. Dédire la solution de l'équation différentielle dans les deux cas : fortement et faiblement amorti.

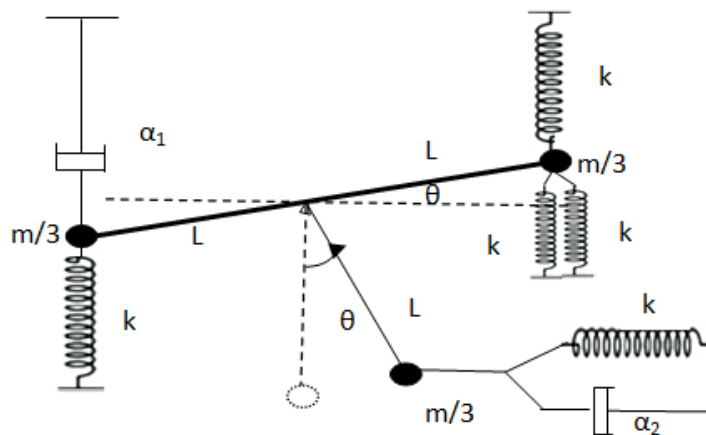
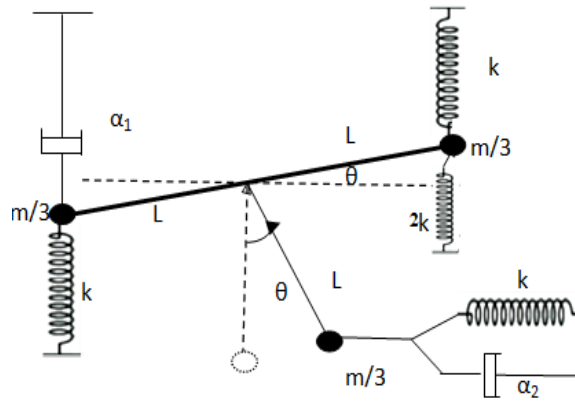


Fig.4.3.

### **Solution**

1. Le système équivalent (simplification du système) :

On remplace les deux ressorts  $k$  qui sont parallèles par le ressort équivalent de raideur  $2k$ .



2. L'équation du mouvement

L'énergie potentielle de ce système :

En choisissant l'axe (ox) comme origine des énergies potentielles, l'énergie potentielle du système s'écrit :

$$U = \frac{1}{2}k(x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_2)^2 + \frac{1}{2}2k(x_2)^2 + \frac{1}{2}k(x_3)^2 - \frac{m}{3}gl \cos \theta \quad (1)$$

Les trois coordonnées  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  dépendent de  $\theta$  comme suit :

$$x_1 = l \sin \theta \approx l\theta$$

$$x_2 = l \sin \theta \approx l\theta$$

$$x_3 = l \sin \theta \approx l\theta$$

En remplaçant  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  dans l'expression (1) on obtient :

$$U = \frac{1}{2}k(l \sin \theta)^2 + \frac{1}{2}3k(l \sin \theta)^2 + \frac{1}{2}k(l \sin \theta)^2 - \frac{m}{3}gl \cos \theta \quad (2.a)$$

$$U = \frac{5}{2}k(l \sin \theta)^2 - \frac{m}{3}gl \cos \theta \quad (2.b)$$

Energie cinétique du système :

$$T = T_{\frac{m}{3}} + T_{\frac{m}{3}} + T_{\frac{m}{3}} = \frac{1}{2}J \dot{\theta}^2 \quad (3)$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}l^2 + \frac{m}{3}l^2 + \frac{m}{3}l^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(ml^2)\dot{\theta}^2$$

La fonction de dissipation :

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

$$\begin{aligned}D &= D_1 + D_2 \\D &= \frac{1}{2} \alpha_1 (l \dot{\theta} \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 (l \dot{\theta} \cos \theta)^2 \\D &= \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) (l \dot{\theta} \cos \theta)^2 \approx \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) (l \dot{\theta})^2\end{aligned} \quad (4)$$

La fonction de Lagrange s'écrit comme suit :

en mettant l'équation (3) - l'équation (2b) on trouve :

$$\begin{aligned}L &= T - U \\L &= \frac{1}{2} (ml^2) \dot{\theta}^2 - \frac{5}{2} k (l \sin \theta)^2 + \frac{m}{3} gl \cos \theta\end{aligned} \quad (5)$$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = - \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \right) \quad (6)$$

Sachant que :  $\cos \theta \approx 1, \sin \theta \approx \theta$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta},$$

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = -5kl^2 \cos \theta \sin \theta - \frac{m}{3} gl \sin \theta \approx -(5kl^2 + \frac{m}{3} gl) \theta$$

$$\left( \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \right) = (\alpha_1 + \alpha_2) l^2 \dot{\theta}$$

En remplaçant  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right)$ ,  $\left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right)$  et  $\left( \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \right)$  dans l'équation de Lagrange (6), on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = - \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta} + (5kl^2 + \frac{m}{3} gl) \theta = -(\alpha_1 + \alpha_2) l^2 \dot{\theta} \quad (7)$$

Et en divisant par l'équation (7) par  $ml^2$ , on obtient :

$$\ddot{\theta} + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{m} \dot{\theta} + \frac{(5kl^2 + \frac{m}{3} gl)}{ml^2} \theta = 0 \quad (8)$$

La forme canonique de l'équation (8) est :

$$\ddot{\theta} + 2\delta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (9)$$

Si on pose  $\omega_0^2 = \frac{(5kl^2 + \frac{m}{3}gl)}{ml^2}$  et  $\delta = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2m}$

$\ddot{\theta} + 2\delta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ , c'est l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Sa solution dépend du discriminant réduit :  $\Delta' = \delta^2 - \omega_0^2$  de l'équation caractéristique

$$\ddot{r} + 2\delta \dot{r} + \omega_0^2 r = 0 \quad (10)$$

3. Solution de l'équation différentielle du mouvement :

3.1. Cas où l'amortissement est fort :  $\Delta' > 0 \Rightarrow \delta = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2m} > \sqrt{\frac{(5kl^2 + \frac{m}{3}gl)}{ml^2}}$

Dans ce cas l'équation caractéristique (10) admet deux racines réelles  $r_{1,2} = -\delta \pm \beta$  avec

$$\beta = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

La solution est :  $\theta(t) = e^{-\delta t} (A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}) \Rightarrow$  cette solution ne présente plus de caractère oscillant,  $\theta(t)$  tend vers 0 sans oscillation quand t augmente, ce régime est dit apériodique ou amorti.

3.2. Cas où l'amortissement est faible :  $\Delta' < 0 \Rightarrow \delta = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2m} < \sqrt{\frac{(5kl^2 + \frac{m}{3}gl)}{ml^2}}$

Dans ce cas l'équation caractéristique (10) admet deux racines complexes  $r_{1,2} = -\delta \pm i\omega_a$

avec  $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

La solution est :  $\theta(t) = e^{-\delta t} (A_1 e^{i\omega_a t} + A_2 e^{-i\omega_a t})$ , cette solution peut se mettre sous la forme :

$\theta(t) = a e^{-\delta t} \cos(\omega_a t - \varphi)$  c'est le régime pseudo-périodique.

### **Exercice 4**

Le système de la figure (4.4.a) effectue des oscillations de faible amplitude.

1. Quel est le nombre de degrés de liberté de ce système.
2. Ecrire l'expression du Lagrangien du système.
3. Etablir l'équation différentielle du mouvement et déduire le facteur de qualité et la pseudo-pulsation.
4. Trouver la solution de l'équation différentielle du mouvement avec les conditions initiales suivantes  $x(0) = x_0, V(0) = 0$ .

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

5. La masse  $m$  est soumise à une force harmonique  $F(t) = 2\cos(30t)$ , que devient l'équation du mouvement et déduire sa solution en régime permanent.

6. On attache la masse  $m$  avec deux ressorts de constante de raideur  $k$ , placés verticalement (figure 4.4.b). La masse  $m$  est aussi soumise à une force excitatrice  $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ .

6.1 Déduire la condition d'équilibre et établir l'équation du mouvement pour ce système.

6.2 Calculer l'expression de l'amplitude des oscillations  $A$ , puis tracer la variation de l'amplitude en fonction de  $\Omega$  pour ces valeurs de  $(\delta = 0, \delta = 0.1, \delta = 0.2, \delta = 0.5)$

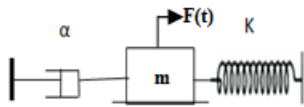


Fig.4.4.a

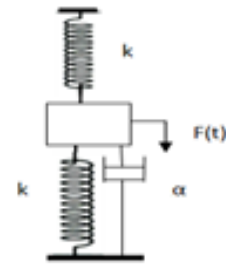


Fig.4.4.b

### Solution

1. Le système a un degré de liberté.

2. Le Lagrangien du système

$$\text{Energie cinétique : } T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\text{Energie potentielle : } U = \frac{1}{2} kx^2$$

$$\text{Fonction de dissipation : } D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$

D'où la fonction de Lagrange :

$$L = T - U \Leftrightarrow L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

2. L'équation différentielle du mouvement

On a l'équation de Lagrange dans le cas d'un système libre amorti :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \quad (1)$$

$$\text{On a : } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \text{ et } \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x}$$

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

En remplaçant  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$  et  $\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x}$  dans l'équation (1), on obtient :

$$m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2)$$

avec :  $\delta = \frac{\alpha}{2m}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Le facteur de qualité :  $Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\sqrt{mk}}{\alpha}$

La pseudo-pulsation est :

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$$

4. La solution de l'équation différentielle du mouvement (2) pour  $\delta < \omega_0$  est :

$$x(t) = ce^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi)$$

On applique les conditions  $x(0)=x_0$ ,  $V(0)=0$  pour calculer  $c$  et  $\varphi$

A  $t = 0$  s  $\Rightarrow x(0) = c \sin(\varphi) = x_0 \Rightarrow \sin(\varphi) = \frac{x_0}{c}$  (1)

$$\dot{x}(t) = ce^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi) \Rightarrow \dot{x}(t) = -\delta ce^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi) + c\omega_a e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$$

Pour  $t = 0$  s on a :

$$\dot{x}(0) = -\delta c \sin(\varphi) + c\omega_a \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_a}{\delta}, \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_a}{\delta}\right) \\ \delta c \frac{x_0}{c} = c\omega_a \cos(\varphi) \Leftrightarrow \cos(\varphi) = \frac{\delta x_0}{c\omega_a} \end{cases} \quad (2)$$

En élevant les équations (1) et (2) au carré et en les sommant, on obtient :

$$\left(\frac{x_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_0}{c\omega_a}\right)^2 = 1 \Rightarrow c = \frac{\sqrt{x_0^2 \omega_a^2 + \delta^2 x_0^2}}{\omega_a}$$

Donc  $x(t) = \frac{\sqrt{x_0^2 \omega_a^2 + \delta^2 x_0^2}}{\omega_a} e^{-\delta t} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}} t + \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_a}{\delta}\right)\right)$

5.1 La masse  $m$  est soumise à une force harmonique  $F(t) = 2 \cos(30t)$ , l'équation du mouvement est :

$$m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = 2 \cos(30t) \Rightarrow \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{2}{m} \cos(30t) \quad (3)$$

5.2 La solution en régime permanent

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

On pose une solution particulière  $x_p(t)$  harmonique et de pulsation 30 Rad/s :

$$x_p(t) = Ae^{j(30t+\varphi)}, \dot{x}_p(t) = j30Ae^{j(30t+\varphi)} \text{ et } \ddot{x}_p(t) = -(30)^2 Ae^{j(30t+\varphi)}$$

En substituant ces expressions dans (3) on obtient :

$$\left(- (30)^2 + 60j\delta + \omega_0^2\right)Ae^{j\varphi} e^{j30t} = \frac{2}{m} e^{j30t} \Rightarrow Ae^{j\varphi} = \frac{\frac{2}{m}}{\left(- (30)^2 + 60j\delta + \omega_0^2\right)}$$

$$\text{L'amplitude d'oscillation est : } A = \frac{\frac{2}{m}}{\sqrt{(-900 - \omega_0^2)^2 + 3600\delta^2}}$$

$$\text{La phase du mouvement est : } \varphi = \text{arctg}\left(\frac{-3600\delta}{(-900 - \omega_0^2)}\right)$$

$$\text{La solution permanente est : } \frac{2}{m\sqrt{(-900 - \omega_0^2)^2 + 3600\delta^2}} \cos(30t + \text{arctg}\left(\frac{-3600\delta}{(-900 - \omega_0^2)}\right))$$

6. On attache la masse  $m$  avec deux ressorts de constante de raideur  $k$ , placés verticalement (figure 4.4.b). La masse  $m$  est soumise à une force d'excitation  $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ .

6.1 L'équation du mouvement pour le système (figure 4.b)

$$\text{L'énergie cinétique est : } T = \frac{1}{2} m(\dot{x})^2$$

L'énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2} k(x + x_0)^2 + \frac{1}{2} k(-x - x_0)^2 - mg(x + x_0)$$

$$U = \frac{1}{2} 2k(x + x_0)^2 - mg(x + x_0)$$

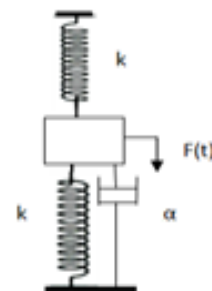
La condition d'équilibre est :

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow 2kx_0 - mg = 0$$

$$\text{La fonction de dissipation : } D = \frac{1}{2} \alpha(\dot{x})^2$$

D'où la fonction de Lagrange

$$L = T - U \Leftrightarrow L = \frac{1}{2} m(\dot{x})^2 - \frac{1}{2} 2k(x)^2$$



## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

On a l'équation de Lagrange dans le cas d'un système libre amorti avec une force donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) = - \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \right) + F(t)$$

On a :  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial x} = -2kx$  et  $\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x}$

En remplaçant  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial x} = -2kx$ ,  $\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x}$  dans l'équation de Lagrange on

obtient :

$$\begin{aligned} m \ddot{x} + 2kx &= -\alpha \dot{x} + F_0 \cos(\Omega t) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{2k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) \\ &\Rightarrow \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

Avec :  $\delta = \frac{\alpha}{2m}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$

### 6.2.1 L'expression de l'amplitude $x_m$

On choisit une solution  $x_p(t) = x_m e^{i(\Omega t + \varphi)}$  vérifiant l'équation différentielle avec second membre :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p + 2\delta \dot{x}_p + \omega_0^2 x_p &= \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t} \Leftrightarrow x_m e^{i(\Omega t + \varphi)} (-\Omega^2 + \omega_0^2 + i\Omega 2\delta) = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t} \\ &\Leftrightarrow x_m e^{i\varphi} (-\Omega^2 + \omega_0^2 + i\Omega 2\delta) = \frac{F_0}{m} \end{aligned}$$

On divise cette équation  $x_m e^{i\varphi} (-\Omega^2 + \omega_0^2 + i\Omega 2\delta) = \frac{F_0}{m}$  par  $e^{i\varphi}$  on obtient ainsi :

$$x_m (-\Omega^2 + \omega_0^2 + i\Omega 2\delta) = \frac{F_0}{m} e^{-i\varphi} \quad (4)$$

Le conjugué de l'équation (4) est :

$$x_m (-\Omega^2 + \omega_0^2 - i\Omega 2\delta) = \frac{F_0}{m} e^{+i\varphi} \quad (5)$$

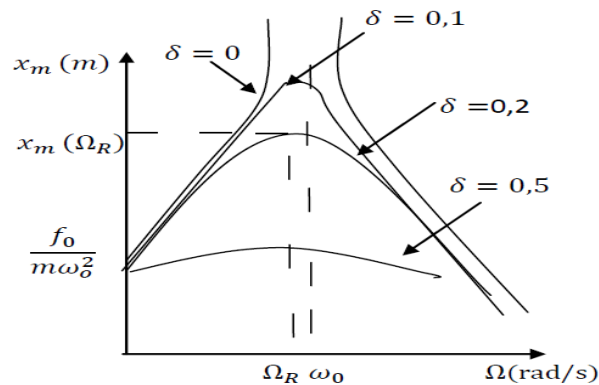
En multipliant l'équation (3) par l'équation (4) on trouve :

$$x_m^2 \left( (-\Omega^2 + \omega_0^2)^2 + (\Omega 2\delta)^2 \right) = \left( \frac{F_0}{m} \right)^2 \Rightarrow x_m = \frac{\left( \frac{F_0}{m} \right)}{\sqrt{(-\Omega^2 + \omega_0^2)^2 + (\Omega 2\delta)^2}}$$

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

6.2.2 La variation de l'amplitude en fonction de  $\Omega$  pour les différentes valeurs  $\delta = 0, \delta = 0.1, \delta = 0.2$  et  $\delta = 0.5$

$$\text{On a : } x_m(\Omega) = \frac{\left(\frac{F_0}{m}\right)}{\sqrt{(-\Omega^2 + \omega_0^2)^2 + (\Omega 2\delta)^2}}$$



D'après cette figure, l'amplitude  $x_m(\Omega)$  augmente quand le coefficient d'amortissement  $\delta$  diminue. L'amplitude de vibration  $x_m(\Omega)$  atteint un maximum quand le carré du dénominateur est minimal : on pose  $f(\Omega) = (-\Omega^2 + \omega_0^2)^2 + (\Omega 2\delta)^2$

$$\frac{\partial f(\Omega)}{\partial \Omega} = 0 \Leftrightarrow 4\Omega(\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2) = 0$$

De l'équation précédente on obtient la pulsation  $\Omega_1 = 0$  et  $\Omega_2 = \Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

Pour la première pulsation  $\Omega_1 = 0$ , l'amplitude  $x_m(\Omega)$  est minimale puisque

$\frac{\partial^2 f(\Omega)}{\partial \Omega^2} \Big|_{\Omega=0} < 0$  mais à  $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$  l'amplitude  $x_m(\Omega_r)$  est maximale puisque

$\frac{\partial^2 f(\Omega)}{\partial \Omega^2} \Big|_{\Omega_2=0} > 0$  qui est la pulsation de résonance. La valeur de l'amplitude à la résonance

$$\text{est donnée par : } x_m(\Omega_r) = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

### Exercice 5

Le système de la figure 4.5 est constitué d'un pendule de longueur  $3L$ . Deux ressorts de constantes de raideur  $k_1$  et  $k_2$  se situent à une distance  $OA=L$  et  $OB=2L$ , respectivement. On applique un amortisseur de coefficient  $\alpha$  avec une force d'excitation sinusoïdale  $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$  à la masse du pendule.

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

1. Exprimer l'équation différentielle du mouvement forcé amorti.
2. Décrire la solution homogène de l'équation différentielle.
3. Expliciter la solution particulière puis calculer l'amplitude en fonction de la pulsation relative  $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$  et le facteur de qualité  $Q$ . Commenter l'évolution de cette amplitude en fonction de la fréquence relative  $\eta = \frac{f}{f_0}$ .
4. Dédire la solution générale de cette équation différentielle.

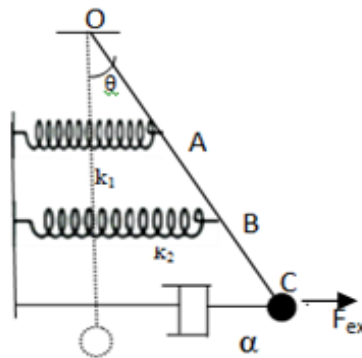


Fig.4.5

### Solution

1. L'équation différentielle du mouvement forcé et amorti.

On applique à la masse  $m$  une force excitatrice  $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$

#### 1.1 Le lagrangien du système

Energie cinétique :  $T = \frac{1}{2} J(\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} m(3L)^2 (\dot{\theta})^2$

Energie potentielle :

$$U = \frac{1}{2} k_1 (x_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2)^2 - mgl \cos \theta = \frac{1}{2} k_1 (L \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 (2L \sin \theta)^2 - 3mgL \cos \theta$$

$$= \frac{1}{2} (k_1 + 4k_2) (L \sin \theta)^2 - 3mgL \cos \theta$$

Fonction de dissipation :  $D = \frac{1}{2} \alpha (3L\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} \alpha 9L^2 (\dot{\theta})^2$

La fonction de Lagrange :

$$L = T - U$$

$$L = \frac{9}{2} mL^2 (\dot{\theta})^2 - \left( \frac{1}{2} (k_1 + 4k_2) (L \sin \theta)^2 - mg3L \cos \theta \right)$$

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

L'équation de Lagrange dans le cas d'un système libre amorti et forcé en rotation s'écrit:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = - \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \right) + M(F_{EXT}), \quad (1)$$

avec  $M(F_{EXT}) = 3LF$  est le moment de la force appliquée. Le moment est la capacité d'une force à faire tourner un objet autour d'un axe.

On a : 
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 9mL^2 \ddot{\theta}, \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = -((k_1 + 4k_2)L^2 \cos \theta \sin \theta + mg3L \sin \theta), \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \right) = \alpha 9L^2 \dot{\theta}$$

En remplaçant  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right)$ ,  $\left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right)$ ,  $\left( \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \right)$  et  $M(F_{EXT})$  dans l'équation de Lagrange(1), on

obtient :

$$m9L^2 \ddot{\theta} + ((k_1 + 4k_2)L^2 \cos \theta \sin \theta + mg3L \sin \theta) = -\alpha 9L^2 \dot{\theta} + F3L \quad (2)$$

Dans le cas des faibles oscillations, les angles sont très petits,  $\cos \theta \approx 1, \sin \theta \approx \theta \approx \theta$ .

En divisant l'équation (2) par la quantité  $9mL^2$  on trouve l'équation différentielle du mouvement sous la forme suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{(k_1 + 4k_2)L + mg3}{m9L} \theta + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta} = \frac{F_0}{3mL} \cos \Omega t \Leftrightarrow \ddot{\theta} + 2\delta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \beta \cos \Omega t, \quad (3)$$

avec :  $\omega_0^2 = \frac{(k_1 + 4k_2)L + mg3}{mL9}, 2\delta = \frac{\alpha}{m}, \beta = \frac{F_0}{3mL}$

### 2. La solution homogène de l'équation différentielle (3)

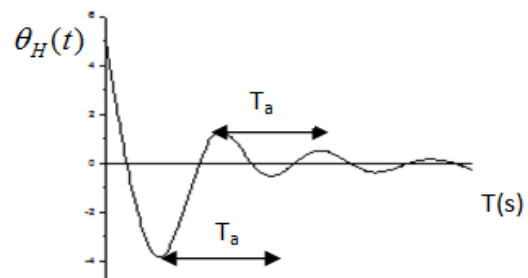
La solution homogène correspond à la solution de l'équation différentielle (3) sans second membre :

$$\ddot{\theta} + 2\delta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (4)$$

Dans le cas faiblement amorti, on a

$$\delta < \omega_0 \Rightarrow \theta_H(t) = ce^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \phi)$$

avec :



## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$\omega_a = \sqrt{\frac{(k_1 + 4k_2)L + mg3}{mL9} - \frac{\alpha^2}{36m^2}}$$

$$T_a = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

On remarque que l'évolution de  $\theta_H(t)$  devient vraiment négligeable avec l'augmentation du temps.

### 3.1 La solution particulière de l'équation différentielle

La solution particulière correspond à la solution de l'équation différentielle avec second membre. Dans ce cas la force excitatrice oblige le système mécanique à suivre une évolution temporelle donc, si  $F(t)$  est une fonction sinusoïdale de pulsation  $\Omega$ , alors la solution particulière  $\theta_p(t)$  sera une fonction sinusoïdale de même pulsation  $\Omega$ . Les oscillations ne sont pas en phase avec la force excitatrice et celle-ci présente un déphasage qu'on notera  $\varphi$ .

La solution particulière  $\theta_p(t)$  correspondant au régime permanent s'écrit comme suit :

$\theta_p(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$ . Nous utilisons la notation complexe :

$$\theta_p(t) = \bar{A} e^{i(\Omega t)}, F(t) = F_0 e^{i(\Omega t)}$$

avec :  $\bar{A} = A e^{i\varphi}$

Donc, l'équation différentielle (3) s'écrit en régime permanent sous la forme suivante :

$$\ddot{\theta}_p + 2\delta \dot{\theta}_p + \omega_0^2 \theta_p = \beta \cos \Omega t \quad (5)$$

En remplaçant dans l'équation (5)  $\theta_p(t) = \bar{A} e^{i(\Omega t)} \Rightarrow \dot{\theta}_p(t) = i\Omega \bar{A} e^{i(\Omega t)}$ ,  $\ddot{\theta}_p(t) = -\Omega^2 \bar{A} e^{i(\Omega t)}$ , on obtient :

$$-\Omega^2 \bar{A} e^{i(\Omega t)} + i 2\delta \Omega \bar{A} e^{i(\Omega t)} + \omega_0^2 \bar{A} e^{i(\Omega t)} = \beta e^{i(\Omega t)} \Leftrightarrow \bar{A}(-\Omega^2 + i 2\delta \Omega + \omega_0^2) = \beta \quad (6)$$

Sachant que:  $\bar{A} = A e^{i\varphi}$

$$A e^{i\varphi} (-\Omega^2 + i 2\delta \Omega + \omega_0^2) = \beta \quad (7)$$

L'équation (7) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$A(-\Omega^2 + \omega_0^2) = \beta \cos \varphi \quad (7.a)$$

$$A(2\delta \Omega) = -\beta \sin \varphi \quad (7.b)$$

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

En élevant au carré les équations (7.a) et (7.b) et en les sommant, on obtient :

$$A^2((-\Omega^2 + \omega_0^2)^2 + (2\delta\Omega)^2) = \beta^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \Rightarrow A = \frac{\beta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \quad (8)$$

L'amplitude en fonction de la pulsation relative  $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$  et le facteur de qualité  $Q$ .

En injectant  $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$  et le facteur de qualité  $Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$  dans l'équation (8) on obtient :

$$A = \frac{\beta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = \frac{\beta}{\omega_0^2 \sqrt{(1 - \eta^2)^2 + \frac{\eta^2}{Q^2}}}$$

On remarque que lorsque la fréquence d'excitation est nulle  $\Omega = 0$  la fréquence relative  $\eta = 0$ . Dans ce cas l'expression de l'amplitude est :  $A = \frac{\beta}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{\omega_0^2 3mL}$  (élongation du résonateur pour une excitation continue).

Lorsque la fréquence d'excitation est très grande  $\Omega \rightarrow \infty$ , la fréquence relative  $\eta \rightarrow \infty$ . Dans ce cas l'expression de l'amplitude est :  $A = 0$  (le résonateur ne vibre plus puisque la fréquence d'excitation est très grande devant la fréquence propre  $\omega_0$ ).

Déphasage  $\varphi$  :

$$\begin{cases} A(-\Omega^2 + \omega_0^2) = \beta \cos\varphi \\ A(2\delta\Omega) = -\beta \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{-2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

$$\varphi = \operatorname{Arctg}\varphi\left(\frac{-2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right)$$

La solution générale de l'équation différentielle est :  $\theta(t) = \theta_H(t) + \theta_p(t)$

$$\theta(t) = ce^{\frac{-\alpha}{2m}t} \sin\left(\sqrt{\frac{(k_1 + 4k_2)L + mg3}{mL9} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}t + \phi\right) + \frac{\frac{F_0}{\omega_0^2 3mL}}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + \frac{\eta^2}{Q^2}}} \cos\left(\Omega t + \operatorname{arctg}\left(\frac{-2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right)\right)$$

### 2. Applications pour des systèmes à deux degrés de liberté.

#### Exercice 6

Le système de la figure 4.6 est composé de deux pendules simples de longueur  $L$  couplés par un ressort de constante de raideur  $k$ .

1. Déterminer l'énergie cinétique puis l'énergie potentielle du dispositif.
2. Déduire le Lagrangien ainsi que les équations du mouvement.

3. Calculer les deux modes propres.

4. Trouver la nature de vibration pour chaque mode sachant que :  $k=20 \text{ N/m}$ ,  $g=10 \text{ m/s}^{-2}$ ,  $m_1=1 \text{ kg}$ ,  $m_2=2 \text{ kg}$ ,  $L=1 \text{ m}$ .

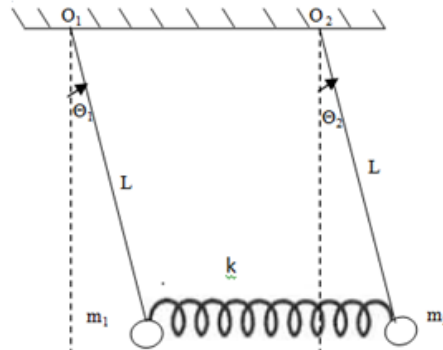


Fig.4.6.

**Solution**

1.1 L'énergie cinétique.

$$T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2} J_1 (\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} J_2 (\dot{\theta}_2)^2 = \frac{1}{2} m_1 L^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (1)$$

1.2 L'énergie potentielle

$$U = U_{m_1} + U_{m_2} + U_{ressort} = m_1 g (L - L \cos \theta_1) + m_2 g (L - L \cos \theta_2) + \frac{1}{2} k (L \sin \theta_1 - L \sin \theta_2)^2 \quad (2)$$

Le développement de Taylor de  $\cos \theta$  au deuxième ordre est :  $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$  et  $\sin \theta \approx \theta$

donc, l'équation (2) devient :

$$U \approx \frac{1}{2} m_1 g L^2 \theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g L^2 \theta_2^2 + \frac{1}{2} L^2 k (\theta_1 - \theta_2)^2 \quad (3)$$

2. 1 Le Lagrangien

En tenant compte des équations (1) et (3), on obtient :

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 L^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} m_1 g L^2 \theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g L^2 \theta_2^2 + \frac{1}{2} L^2 k (\theta_1 - \theta_2)^2 \quad (4)$$

2.2 Les équations différentielles du mouvement

L'équation de Lagrange dans le cas d'un système libre à deux degré liberté :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) &= 0 \Leftrightarrow m_1 L^2 \ddot{\theta}_1 + (m_1 g L + k L^2) \theta_1 - k L^2 \theta_2 = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) &= 0 \Leftrightarrow m_2 L^2 \ddot{\theta}_2 + (m_2 g L + k L^2) \theta_2 - k L^2 \theta_1 = 0 \end{aligned} \right. \quad (5)$$

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

Donc, les équations du mouvement de ce système sont :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{(m_1 g L + k L^2)}{m_1 L^2} \theta_1 - \frac{k}{m_1} \theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{(m_2 g L + k L^2)}{m_2 L^2} \theta_2 - \frac{k}{m_2} \theta_1 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

3. Les modes propres de ce système

On pose deux solutions complexes sous la forme :

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \overline{A}_1 e^{i(\omega t)}, \theta_2(t) = \overline{A}_2 e^{i(\omega t)} \\ \dot{\theta}_1(t) &= i\omega \overline{A}_1 e^{i(\omega t)} \Rightarrow \ddot{\theta}_1(t) = -\omega^2 \overline{A}_1 e^{i(\omega t)} \text{ et } \dot{\theta}_2(t) = i\omega \overline{A}_2 e^{i(\omega t)} \Rightarrow \ddot{\theta}_2(t) = -\omega^2 \overline{A}_2 e^{i(\omega t)} \end{aligned} \quad (7)$$

sachant que :  $\overline{A}_1 = A_1 e^{i\varphi_1}$  et  $\overline{A}_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$

En injectant l'équation (7) dans l'équation (6), on obtient alors:

$$\begin{cases} -\overline{A}_1 \omega^2 + \frac{(m_1 g L + k L^2)}{m_1 L^2} \overline{A}_1 - \frac{k}{m_1} \overline{A}_2 = 0 \\ -\overline{A}_2 \omega^2 + \frac{(m_2 g L + k L^2)}{m_2 L^2} \overline{A}_2 - \frac{k}{m_2} \overline{A}_1 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Pour que  $\overline{A}_1$  et  $\overline{A}_2$  ne soient pas tous les deux nuls à la fois, il faut que le déterminant caractéristique soit nul.

$$\begin{vmatrix} (-\omega^2 + \frac{(m_1 g L + k L^2)}{m_1 L^2}) \overline{A}_1 & -\frac{k}{m_1} \overline{A}_2 \\ -\frac{k}{m_2} \overline{A}_1 & (-\omega^2 + \frac{(m_2 g L + k L^2)}{m_2 L^2}) \overline{A}_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

On pose :  $a = \frac{(m_1 g L + k L^2)}{m_1 L^2}$ ,  $c = \frac{k}{m_1}$ ,  $d = \frac{(m_2 g L + k L^2)}{m_2 L^2}$  et  $b = \frac{k}{m_2}$

En remplaçant a, b, c et d dans l'équation (9), on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} (-\omega^2 + a) & -b \\ -c & (-\omega^2 + d) \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow (-\omega^2 + a)(-\omega^2 + d) - bc = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega^4 - \omega^2(d + a) + ad - bc = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

L'équation caractéristique (10) admet deux solutions :

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{(d+a) + \sqrt{(d+a)^2 - 4(ad-bc)}}}{2}, \omega_2 = \frac{\sqrt{(d+a) - \sqrt{(d+a)^2 - 4(ad-bc)}}}{2}$$

4. la nature de vibration pour chaque mode sachant que :  $k=20\text{N/m}$ ,  $g=10\text{m/s}^{-2}$ ,  $m_1=1\text{kg}$ ,  $m_2=2\text{kg}$ ,  $L=1\text{m}$  :

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{\left(\frac{(m_2gL+kL^2)}{m_2L^2} + \frac{(m_1gL+kL^2)}{m_1L^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{(m_2gL+kL^2)}{m_2L^2} + \frac{(m_1gL+kL^2)}{m_1L^2}\right)^2 - 4\left(\frac{(m_1gL+kL^2)}{m_1L^2} \frac{(m_2gL+kL^2)}{m_2L^2} - \frac{k^2}{m_1m_2}\right)}}}{2}$$

$$\omega_1 = 3.2\text{rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{\left(\frac{(m_2gL+kL^2)}{m_2L^2} + \frac{(m_1gL+kL^2)}{m_1L^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{(m_2gL+kL^2)}{m_2L^2} + \frac{(m_1gL+kL^2)}{m_1L^2}\right)^2 - 4\left(\frac{(m_1gL+kL^2)}{m_1L^2} \frac{(m_2gL+kL^2)}{m_2L^2} - \frac{k^2}{m_1m_2}\right)}}}{2}$$

$$\omega_2 = 6.3\text{rad/s}$$

Le premier mode :  $\omega = \omega_1$

$$\frac{\overline{A_1(1)}}{\overline{A_2(1)}} = \frac{-\omega_1^2 + d}{c} = \frac{-\omega_1^2 + \frac{(m_2gL+kL^2)}{m_2L^2}}{\frac{k}{m_1}} = 1 > 0, \text{ dans ce cas les deux pendules oscillent en}$$

phase.

Le deuxième mode :  $\omega = \omega_2$

On a :

$$\frac{\overline{A_1(2)}}{\overline{A_2(2)}} = \frac{-\omega_2^2 + d}{c} = \frac{-\omega_2^2 + \frac{(m_2gL+kL^2)}{m_2L^2}}{\frac{k}{m_1}} = -2 < 0, \text{ dans ce cas les deux pendules oscillent}$$

en opposition de phase.

### Exercice 7

On considère deux pendules simples de longueur  $L_1$  et  $L_2$  couplés par inertie comme le montre la figure 4.7.

1. Donner l'expression de la fonction de Lagrange pour ce système.
2. Ecrire les deux équations différentielles du mouvement régissant le mouvement des deux masses.

**CHAPITRE 4** *Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté*

3. On pose  $L_1 = L_2 = L$  et  $m = m_1 = m_2$ , déterminer les pulsations propre des modes de vibration correspondants.

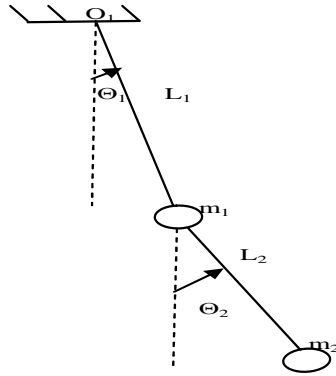


Fig.4.7

**Solution**

Les coordonnées de ce système  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont indépendantes. D'où le nombre de degré de liberté égal à 2.

L'énergie cinétique totale est :

$$E_T = E_{c_{m_1}} + E_{c_{m_2}} = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

En calculant les vitesses par rapport au repère fixe :

$$\overrightarrow{om_1} \begin{pmatrix} x_{m_1} = l_1 \sin \theta_1 \\ y_{m_1} = l_1 \cos \theta_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{om_1} \begin{pmatrix} \dot{x}_{m_1} = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \dot{y}_{m_1} = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{om_2} \begin{pmatrix} x_{m_2} = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ y_{m_2} = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{om_2} \begin{pmatrix} \dot{x}_{m_2} = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \dot{y}_{m_2} = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

La vitesse pour la masse  $m_1$  est :

$$V_{m_1}^2 = \dot{x}_{m_1}^2 + \dot{y}_{m_1}^2$$

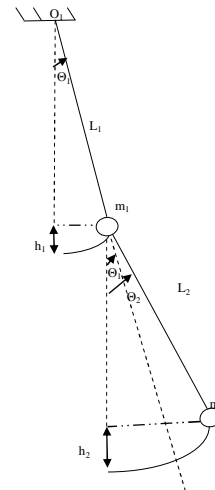
$$V_{m_1}^2 = (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2$$

$$V_{m_1}^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \text{ puisque } \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 = 1$$

$$\text{D'où } E_{c_{m_1}} = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

La vitesse pour la masse  $m_2$  est :

$$V_{m_2}^2 = \dot{x}_{m_2}^2 + \dot{y}_{m_2}^2$$



## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

$$V_{m_2}^2 = (l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2$$

$$V_{m_2}^2 = l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$V_{m_2}^2 = l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{ puisque } \cos(\theta_2 - \theta_1) \approx 1$$

$$\text{D'où } E_{c_{m_2}} = \frac{1}{2} m_2 (l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2)$$

Après tout calcul fait, l'énergie cinétique s'écrit :

$$E_C = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

Pour l'énergie potentielle

$$E_p = m_1 g h_1 + m_2 g h_2$$

$$E_p = m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g (l_1 (1 - \cos \theta_1) + l_2 (1 - \cos \theta_2))$$

$$E_p = m_1 g l_1 \frac{\theta_1^2}{2!} + m_2 g l_1 \frac{\theta_1^2}{2!} + m_2 g l_2 \frac{\theta_2^2}{2!} \text{ puisque } (1 - \cos \theta_1) = \frac{\theta_1^2}{2!} \text{ et } (1 - \cos \theta_2) = \frac{\theta_2^2}{2!}$$

Le Lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_1 g l_1 \frac{\theta_1^2}{2!} - m_2 g l_1 \frac{\theta_1^2}{2!} - m_2 g l_2 \frac{\theta_2^2}{2!}$$

2. Les deux équations différentielles du mouvement sont :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = 0 \Leftrightarrow (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_1 g l_1 \theta_1 + m_2 g l_1 \theta_1 = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) = 0 \Leftrightarrow m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 g l_2 \theta_2 = 0 \end{cases}$$

3. On pose  $L_1 = L_2 = L$  et  $m = m_1 = m_2$  puis nous déterminons les pulsations propre des deux modes :

Les deux équations différentielles du mouvement précédent s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} 2ml^2 \ddot{\theta}_1 + ml^2 \ddot{\theta}_2 + 2mgl\theta_1 = 0 \\ ml^2 \ddot{\theta}_2 + ml^2 \ddot{\theta}_1 + mgl\theta_2 = 0 \end{cases}$$

On divise les équations ci-dessus par  $ml^2$  on obtient :

$$\begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + 2\frac{g}{l}\theta_1 = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l}\theta_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

On cherche des solutions de la forme :

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_{01} \cos(\omega t + \varphi_1) \xrightarrow{\text{notation complexe}} \theta_1 = \theta_{01} e^{i\varphi_1} e^{i\omega t} = \overline{\theta_1} e^{i\omega t} \\ \theta_2 = \theta_{02} \cos(\omega t + \varphi_2) \xrightarrow{\text{notation complexe}} \theta_2 = \theta_{02} e^{i\varphi_2} e^{i\omega t} = \overline{\theta_2} e^{i\omega t} \end{cases}$$

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = -w^2 \bar{\theta}_1 e^{iwt} = -w^2 \theta_1 \\ \ddot{\theta}_2 = -w^2 \bar{\theta}_2 e^{iwt} = -w^2 \theta_2 \end{cases}$$

en remplaçant  $\ddot{\theta}_1$ ,  $\ddot{\theta}_2$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  dans les deux équations (1) et (2), on obtient :

$$\begin{cases} -2w^2 \bar{\theta}_1 - w^2 \bar{\theta}_2 + 2 \frac{g}{l} \bar{\theta}_1 = 0 \\ -w^2 \bar{\theta}_2 - w^2 \bar{\theta}_1 + \frac{g}{l} \bar{\theta}_2 = 0 \end{cases}$$

Ce système homogène admet des solutions non nulles si, et seulement si le déterminant est nul :

$$D = \begin{vmatrix} -2w^2 + 2 \frac{g}{l} & -w^2 \\ -w^2 & -w^2 + \frac{g}{l} \end{vmatrix} = 0$$

$$D = \left(-2w^2 + 2 \frac{g}{l}\right) \left(-w^2 + \frac{g}{l}\right) - w^2 w^2 = 0$$

$$D = \left(w^4 - 4w^2 \frac{g}{l} + 2 \frac{g^2}{l^2}\right) = 0$$

On pose  $w^4 = Y$ , l'équation de  $D$  s'écrit :

$$D = \left(Y^2 - 4Y \frac{g}{l} + 2 \frac{g^2}{l^2}\right) = 0 \rightarrow \text{le discriminant réduit } \Delta' = 2 \frac{g^2}{l^2}$$

L'équation  $\left(Y^2 - 4Y \frac{g}{l} + 2 \frac{g^2}{l^2} = 0\right)$  admet deux solutions :

$$\begin{cases} w_1^2 = \frac{g}{l} (2 + \sqrt{2}) \rightarrow w_1 = \left(\frac{g}{l} (2 + \sqrt{2})\right)^{1/2} \\ w_2^2 = \frac{g}{l} (2 - \sqrt{2}) \rightarrow w_2 = \left(\frac{g}{l} (2 - \sqrt{2})\right)^{1/2} \end{cases}$$

### Exercice 8

Le dispositif de la figure (4.8.a) est composé de deux oscillateurs (M, R) et (m, 2k) couplés par un ressort k se trouvant à une distance A du centre O du disque de rayon R. On considère les

oscillations de faibles amplitudes, on donne :  $J_{/O} = \frac{1}{2} MR^2 = m, Oa = A = 1cm$

1. Trouver les équations du mouvement.
2. Expliciter les solutions des équations du mouvement.
3. Que deviennent les équations du mouvement si le ressort 2k n'existait pas.
4. On place un pendule au centre du disque O de longueur l puis on excite la masse m avec une force  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ , mais cette fois-ci, le cylindre (M, R) roule sans glisser sur le plan

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

horizontal. Calculer le Lagrangien pour le système (fig.4.8.b) et déduire la pulsation de résonance et d'antirésonance.

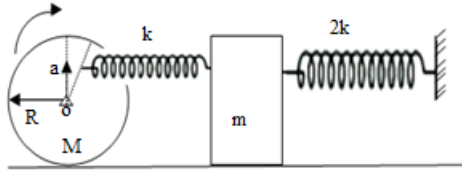


Fig.4.8.a

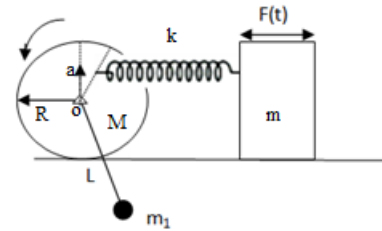


Fig.4.8.b

### Solution :

1. Les équations du mouvement pour la figure (4.8.a)

L'allongement du ressort k reliant les deux oscillateurs est :  $x_k = x - A \sin \theta$

L'énergie cinétique :

$$T = T_M + T_m = \frac{1}{2} J_{I_O} (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (1)$$

L'énergie potentielle :

$$U = U_{2k} + U_k = \frac{1}{2} k (x - A \sin \theta)^2 + kx^2 \quad (2)$$

La fonction de Lagrange :

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \left( \frac{1}{2} k (x - A \sin \theta)^2 + kx^2 \right) \quad (3)$$

2.2 Les équations différentielles du mouvement sont :

Les équations de Lagrange dans le cas d'un système libre à deux degré liberté sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = 0 \Leftrightarrow m \ddot{\theta} + kA \cos \theta (x - A \sin \theta) = 0 \Rightarrow m \ddot{\theta} + k\theta - kx = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0 \Leftrightarrow m \ddot{x} + k(x - A\theta) + 2kAx = 0 \Rightarrow m \ddot{x} + 3kx - k\theta = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

L'équation (4) admet deux solutions harmoniques.

On pose deux solutions complexes de la forme :

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

$$\begin{aligned}\theta(t) &= A_1 e^{(\omega t + \varphi_1)} \quad , \quad x(t) = A_2 e^{(\omega t + \varphi_2)} \\ \ddot{\theta}(t) &= -\omega^2 \theta \quad , \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x\end{aligned}\tag{5}$$

En injectant l'équation (5) dans l'équation (4) on trouve :

$$\begin{cases} (-m\omega^2 + k)\theta - kx = 0 \\ (-m\omega^2 + 3k)x - k\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} (-m\omega^2 + k) & -k \\ -k & (-m\omega^2 + 3k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\tag{6}$$

Nous calculons le déterminant du système d'équations (6) :

$$\begin{aligned}D &= \begin{vmatrix} (-m\omega^2 + k) & -k \\ -k & (-m\omega^2 + 3k) \end{vmatrix} = 0 \\ D &= (-m\omega^2 + k)(-m\omega^2 + 3k) - k^2 = 0\end{aligned}\tag{7}$$

On pose  $\omega^2 = d$ , l'équation (7) devient :

$$D = m^2 d^2 - 4kmd + 2k^2 = 0\tag{8}$$

L'équation (8) admet deux solutions puisque le discriminant  $\Delta = 8k^2 m^2 > 0$ :

$$\begin{cases} d_1 = \omega^2_1 = \frac{k(2 + \sqrt{2})}{m} \\ d_2 = \omega^2_2 = \frac{k(2 - \sqrt{2})}{m} \end{cases}$$

### Calcul des modes propres

$$\text{Le premier mode : } \omega = \omega^2_1 = \frac{(2 + \sqrt{2})k}{m}$$

On a :

$$(1 + \sqrt{2})kx - k\theta = 0 \Rightarrow \theta = (1 + \sqrt{2})x \Rightarrow \vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Le deuxième mode : } \omega = \omega^2_2 = \frac{(2 - \sqrt{2})k}{m}$$

On a :

$$(1 - \sqrt{2})kx - k\theta = 0 \Rightarrow \theta = (1 - \sqrt{2})x \Rightarrow \vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Donc, la solution est :

$$\begin{pmatrix} \theta \\ x \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\theta(t) = A_1(1 + \sqrt{2}) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + (1 - \sqrt{2})A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

3. Les équations du mouvement si le ressort  $2k$  n'existent pas.

L'énergie cinétique :

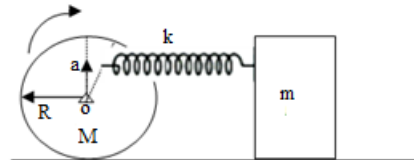
$$T = T_M + T_m = \frac{1}{2} J_{/O} (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

L'énergie potentielle :

$$U = U_k = \frac{1}{2} k (x - A \sin \theta)^2$$

La fonction de Lagrange :

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \left( \frac{1}{2} k (x - A \sin \theta)^2 \right)$$



Les équations différentielles du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\delta L}{\delta \theta} \right) = 0 \Leftrightarrow m \ddot{\theta} + k A \cos \theta (x - A \sin \theta) = 0 \Rightarrow m \ddot{\theta} + k \theta - k x = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{x}} \right) - \left( \frac{\delta L}{\delta x} \right) = 0 \Leftrightarrow m \ddot{x} + k (x - A \theta) = 0 \Rightarrow m \ddot{x} + k x - k \theta = 0$$

4. On place un pendule au centre du disque O de longueur L puis, on excite la masse m avec une force excitatrice  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ .

4.1 Le Lagrangien pour le système (fig.4.8.b).

Le cylindre (M, R) roule sans glisser sur le plan horizontal, dans ce cas il fait un mouvement de rotation et de translation en même temps, donc l'énergie cinétique du cylindre s'écrit :

$$T_M = T_{Rotation} + T_{translation} = \frac{1}{2} J_{/O} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M V_M^2$$

$$T_M = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} M R^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} M R^2 \dot{\theta}^2$$

L'énergie cinétique de la masse  $m_2$  est :

$$T_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 V_{m_2}^2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_{m_2}^2 + \dot{y}_{m_2}^2)$$

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

On a :

$$x_{m_2} = l \sin \theta - R \theta \rightarrow \dot{x}_{m_2} = l \dot{\theta} \cos \theta - R \dot{\theta}$$

$$y_{m_2} = l \cos \theta \rightarrow \dot{y}_{m_2} = -l \dot{\theta} \sin \theta$$

On remplace  $\dot{x}^2, \dot{y}^2$

$$T_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 ((l \dot{\theta} \cos \theta - R \dot{\theta})^2 + (l \dot{\theta} \sin \theta)^2)$$

Puisque  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  et faible oscillation  $\cos \theta \approx 1$

$$T_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 (l - R)^2 \dot{\theta}^2$$

L'énergie cinétique de la masse  $m_1$  est :

$$T_{m_1} = \frac{1}{2} m_1 V_{m_1}^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_{m_1}^2) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2$$

L'énergie cinétique totale du système :

$$T = T_M + T_{m_1} + T_{m_2}$$

$$T = \frac{3}{4} MR^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 (l - R)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2$$

L'énergie potentielle :

$$U = U_k + U_{m_2} = \frac{1}{2} k (A \sin \theta - x)^2 + m_2 g L (1 - \cos \theta)$$

Faible oscillation  $\sin \theta \approx \theta$  et  $(1 - \cos \theta) = \frac{\theta^2}{2}$

$$U = \frac{1}{2} k (A \theta - x)^2 + \frac{1}{2} m_2 g L \theta^2$$

La fonction de Lagrange :

$$L = T - U = \frac{3}{4} MR^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 (l - R)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k (A \theta - x)^2 - m_2 g L \frac{\theta^2}{2}$$

Les équations différentielles du mouvement :

$$\left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} MR^2 \ddot{\theta} + m_2 (l - R) \ddot{\theta} + m_2 g L \theta + k A^2 \theta - k A x = 0 \quad (9. a)$$

$$\left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) = F_0 \cos \Omega t \Leftrightarrow m_1 \ddot{x} + k x - k A \theta = F_0 \cos \Omega t \quad (9. b)$$

On divise l'équation (9.a) par  $(3MR^2 + 2m_2(l - R))$  s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{2(m_2 g L + k A^2)}{3MR^2 + 2m_2(l - R)} \theta - \frac{2kA}{3MR^2 + 2m_2(l - R)} x = 0 \quad (10. a)$$

En divisant l'équation (9.b) par  $m_1$ , on obtient :

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

$$\ddot{x} + \frac{k}{m_1}x - \frac{kA}{m_1}\theta = \frac{F_0}{m_1} \cos \Omega t \quad (10.b)$$

4.2 La pulsation de résonnance et d'antirésonance.

On pose deux solutions complexes sous la forme :

$$\theta(t) = \overline{A_1} e^{i(\Omega t)}, \quad x(t) = \overline{A_2} e^{i(\Omega t)}$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\Omega^2 \theta, \quad \ddot{x}(t) = -\Omega^2 x$$

En introduisant les deux solutions dans les équations du mouvement (10.a) et (10.b), on obtient :

$$\left( \left( -\Omega^2 + \frac{2(m_2 g L + k A^2)}{3MR^2 + 2m_2(l-R)} \right) \overline{A_1} - \frac{2kA}{3MR^2 + 2m_2(l-R)} \overline{A_2} = 0 \right) \quad (11.a)$$

$$\left( \left( -\Omega^2 + \frac{k}{m_1} \right) \overline{A_2} - \frac{kA}{m_1} \overline{A_1} = \frac{F_0}{m_1} \right) \quad (11.b)$$

De l'équation (11.a)

$$\overline{A_2} = \frac{\left( -\Omega^2 + \frac{2(m_2 g L + k A^2)}{3MR^2 + 2m_2(l-R)} \right) \overline{A_1}}{\frac{2kA}{3MR^2 + 2m_2(l-R)}}$$

On pose  $a = \frac{2(m_2 g L + k A^2)}{3MR^2 + 2m_2(l-R)}$ ,  $c = \frac{2kA}{3MR^2 + 2m_2(l-R)}$ ,  $d = \frac{k}{m_1}$  et  $b = \frac{kA}{m_1}$

$$\overline{A_2} = \frac{(-\Omega^2 + a)\overline{A_1}}{c}$$

On remplace  $\overline{A_2}$ , d et b dans l'équation (11.b) obtient:

$$(-\Omega^2 + d)\overline{A_2} - b\overline{A_1} = \frac{F_0}{m_1} \Leftrightarrow (-\Omega^2 + d) \frac{(-\Omega^2 + a)\overline{A_1}}{c} - b\overline{A_1} = \frac{F_0}{m_1} \Rightarrow \overline{A_1} = \frac{c \frac{F_0}{m_1}}{(-\Omega^2 + d)(-\Omega^2 + a) - cb}$$

$$\overline{A_2} = \frac{(-\Omega^2 + a) \frac{F_0}{m_1}}{(-\Omega^2 + d)(-\Omega^2 + a) - cb}$$

Les pulsations de résonnances sont :

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

$\overline{A_2} = \overline{A_1} = \infty$  lorsque  $(-\Omega^2 + d)(-\Omega^2 + a) - cb = 0 \Rightarrow \Omega^4 - \Omega^2 a - \Omega^2 d + ad - cb = 0$  cette équation admet deux solutions

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{(d+a) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-cb)}}{2}}.$$

Les pulsations d'anti-résonances sont :  $\overline{A_2} = 0$  lorsque  $(-\Omega^2 + a) = 0 \Rightarrow \Omega^2 = a$

### Exercice 9

Dans le système de la figure 4.9 la masse  $m_1$  est fixée par un ressort  $k_1$  et la masse  $m_2$  par un ressort  $k_2$  puis on couple les deux masses par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux  $\alpha$ . On considère les oscillations de faible amplitude.

1. Calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.
2. Déduire la fonction de dissipation puis la fonction de Lagrange.
3. Trouver les équations du mouvement.
4. On excite la masse  $m_1$  avec une force excitatrice  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ . Déduire les équations du mouvement pour ce système, son impédance d'entrée puis décrire l'analogie électrique.



Fig.4.9

### Solution

L'énergie cinétique est :  $T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2)^2$

L'énergie potentielle est :  $U = U_{k_1} + U_{k_2} = \frac{1}{2} k_1 (x_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2)^2$

2. La fonction de dissipation est :  $D = \frac{1}{2} \alpha (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2$

La fonction de Lagrange :

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 (x_1)^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_2)^2$$

3. Les équations différentielles du mouvement sont :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_1} \right) = - \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} \right) \Leftrightarrow -m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + \alpha \dot{x}_1 - \alpha \dot{x}_2 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_2} \right) = - \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} \right) \Leftrightarrow m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + \alpha \dot{x}_2 - \alpha \dot{x}_1 = 0$$
(1)

4. En excitant la masse  $m_1$  avec une force excitatrice  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ , l'équation (1) devient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_1} \right) = - \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} \right) \Leftrightarrow m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + \alpha \dot{x}_1 - \alpha \dot{x}_2 = F_0 \cos \Omega t$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_2} \right) = - \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} \right) \Leftrightarrow m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + \alpha \dot{x}_2 - \alpha \dot{x}_1 = 0$$
(2)

4.2 L'impédance d'entrée :

On pose deux solutions complexes sous la forme :

$$x_1(t) = \overline{A}_1 e^{i(\Omega t)} \quad , \quad x_2(t) = \overline{A}_2 e^{i(\Omega t)}$$

$$V_1 = \dot{x}_1(t) = i\Omega x_1 \Rightarrow x_1(t) = \frac{V_1}{i\Omega} \quad , \quad V_2 = \dot{x}_2(t) = i\Omega x_2(t) \Rightarrow x_2(t) = \frac{V_2}{i\Omega}$$

$$\ddot{x}_1(t) = -\Omega^2 x_1(t) = i\Omega V_1 \quad , \quad \ddot{x}_2(t) = -\Omega^2 x_2(t) = i\Omega V_2$$

En remplaçant les deux solutions  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  dans l'équation (2), on obtient :

$$\begin{cases} -m_1 \Omega^2 \overline{A}_1 + k_1 \overline{A}_1 + i\alpha \Omega \overline{A}_1 - i\alpha \Omega \overline{A}_2 = F_0 \Rightarrow (im_1 \Omega + \frac{k_1}{i\Omega} + i\alpha \Omega) V_1 - i\alpha \Omega V_2 = F \\ -\Omega^2 m_2 \overline{A}_2 + k_2 \overline{A}_2 + i\alpha \Omega \overline{A}_2 - i\alpha \Omega \overline{A}_1 = 0 \Rightarrow (i\Omega m_2 + \frac{k_2}{i\Omega} + i\alpha \Omega) V_2 - i\alpha \Omega V_1 = 0 \end{cases}$$
(3)

On pose :  $Z_1 = i\Omega m_1 + \frac{k_1}{i\Omega}$ ,  $Z_2 = -\Omega^2 m_2 + \frac{k_2}{i\Omega}$ ,  $Z_0 = i\alpha \Omega$

L'équation (3) s'écrit :

$$\begin{cases} (Z_1 + Z_0)V_1 - Z_0 V_2 = F \\ (Z_2 + Z_0)V_2 - Z_0 V_1 = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{Z_0}{Z_2 + Z_0} V_1 \end{cases}$$

En remplaçant  $V_2 = \frac{Z_0}{Z_2 + Z_0} V_1$  dans l'équation  $(Z_1 + Z_0)V_1 - Z_0 V_2 = F$ , on obtient :

## CHAPITRE 4 Méthode de Lagrange et Système à Deux Degrés de Liberté

$$(Z_1 + Z_0)V_1 - Z_0 \frac{Z_0}{Z_2 + Z_0} V_1 = F \Leftrightarrow F = V_1 \left( (Z_1 + Z_0) - \frac{Z_0^2}{Z_2 + Z_0} \right) = V_1 \left( Z_1 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_2 + Z_0} \right)$$

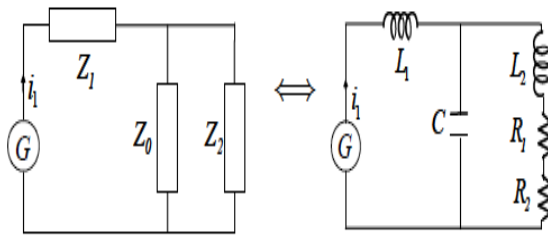
D'où, l'impédance d'entrée :  $\frac{F}{V_1} = \left( Z_1 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_2 + Z_0} \right) = (Z_1 + Z_1 // Z_2)$

### 4.2 Analogie électrique

$Z_1 \Leftrightarrow$  bobine( $L_1$ ) + condensateur( $C$ )

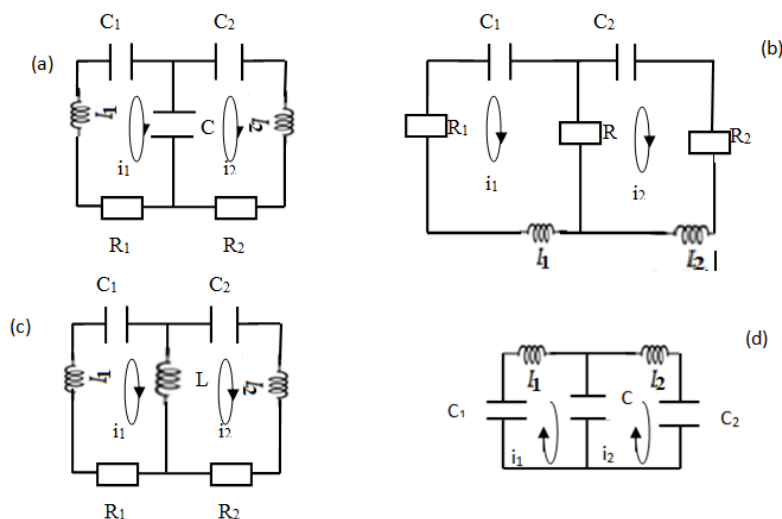
$Z_2 \Leftrightarrow$  bobine( $L_2$ ) + condensateur( $C$ )

$Z_0 \Leftrightarrow$  resi tan ce



### Exercice 10

Soient les circuits électriques représentés par les figures ci-dessous. Etablir les équations différentielles régissant les oscillations des charges électriques pour chacun des circuits. On décrira les oscillations électriques dans chaque maille associée au circuit correspondant.



Déterminer les pulsations propres pour le circuit (d).

**Solution**

1. Les équations différentielles régissant les oscillations des charges électriques dans les deux mailles pour chaque circuit électrique.

1- Circuit électrique (a)

Maille électrique (1) :

$$U_{L_1} + U_{C_1} + U_C + U_{R_1} = 0 \Rightarrow L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{c_1} q_1 + \frac{1}{c} (q_1 - q_2) + R_1 i_1 = 0 \quad (1)$$

En remplaçant  $i_1 = \frac{dq_1}{dt} = \dot{q}_1$ ,  $\frac{di_1}{dt} = \frac{d^2 q_1}{d^2 t} = \ddot{q}_1$  dans l'équation (1), on obtient :

$$L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c}\right) q_1 - \frac{1}{c} q_2 = 0 \quad (2)$$

Maille électrique (2) :

$$U_{L_2} + U_{C_2} + U_C + U_{R_2} = 0 \Rightarrow L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{c_2} q_2 + \frac{1}{c} (q_2 - q_1) = 0 \quad (3)$$

En remplaçant  $i_2 = \frac{dq_2}{dt} = \dot{q}_2$ ,  $\frac{di_2}{dt} = \frac{d^2 q_2}{d^2 t} = \ddot{q}_2$  dans l'équation (3), on obtient :

$$L_2 \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c}\right) q_2 - \frac{1}{c} q_1 = 0$$

Donc, les deux équations différentielles sont :

$$\begin{cases} L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c}\right) q_1 - \frac{1}{c} q_2 = 0 \\ L_2 \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c}\right) q_2 - \frac{1}{c} q_1 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

2- Circuit électrique (b)

Maille électrique (1) :

$$U_{L_1} + U_{C_1} + U_R + U_{R_1} = 0 \Rightarrow L_1 \ddot{q}_1 + (R_1 + R) \dot{q}_1 + \frac{1}{c_1} q_1 - R \dot{q}_2 = 0 \quad (5)$$

Maille électrique (2) :

$$U_{L_2} + U_{C_2} + U_R + U_{R_2} = 0 \Rightarrow L_2 \ddot{q}_2 + (R_2 + R) \dot{q}_2 + \frac{1}{c_2} q_2 - R \dot{q}_1 = 0 \quad (6)$$

Donc les deux équations différentielles sont :

$$\begin{cases} L_1 \ddot{q}_1 + (R_1 + R) \dot{q}_1 + \frac{1}{c_1} q_1 - R \dot{q}_2 = 0 \\ L_2 \ddot{q}_2 + (R_2 + R) \dot{q}_2 + \frac{1}{c_2} q_2 - R \dot{q}_1 = 0 \end{cases}$$

3- Circuit électrique (c)

Maille électrique (1) :

$$U_{L_1} + U_{C_1} + U_L + U_{R_1} = 0 \Rightarrow (L_1 + L) \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{c_1} q_1 - L \ddot{q}_2 = 0 \quad (7)$$

Maille électrique (2) :

$$U_{L_2} + U_{C_2} + U_L + U_{R_2} = 0 \Rightarrow (L_2 + L) \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{c_2} q_2 - L \ddot{q}_1 = 0 \quad (8)$$

Donc, les deux équations différentielles sont :

$$\begin{cases} (L_1 + L) \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{c_1} q_1 - L \ddot{q}_2 = 0 \\ (L_2 + L) \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{c_2} q_2 - L \ddot{q}_1 = 0 \end{cases}$$

4- Circuit électrique (d)

Maille électrique (1) :

$$U_{L_1} + U_{C_1} + U_C = 0 \Rightarrow L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{c_1} q_1 + \frac{1}{c} (q_1 - q_2) = 0 \quad (9)$$

$$\text{avec : } i_1 = \frac{dq_1}{dt} = \dot{q}_1, \frac{di_1}{dt} = \frac{d^2 q_1}{dt^2} = \ddot{q}_1$$

En remplaçant  $i_1 = \frac{dq_1}{dt} = \dot{q}_1, \frac{di_1}{dt} = \frac{d^2 q_1}{dt^2} = \ddot{q}_1$  dans l'équation (9), on obtient :

$$L_1 \ddot{q}_1 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c}\right) q_1 - \frac{1}{c} q_2 = 0 \quad (10)$$

Maille électrique (2) :

$$U_{L_2} + U_{C_2} + U_C = 0 \Rightarrow L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{c_2} q_2 + \frac{1}{c} (q_2 - q_1) = 0 \quad (11)$$

En remplaçant  $i_2 = \frac{dq_2}{dt} = \dot{q}_2, \frac{di_2}{dt} = \frac{d^2 q_2}{dt^2} = \ddot{q}_2$  dans l'équation (11), on obtient :

$$L_2 \ddot{q}_2 + \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c}\right) q_2 - \frac{1}{c} q_1 = 0$$

Donc, les deux équations différentielles sont :

$$\begin{cases} L_1 \ddot{q}_1 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c}\right)q_1 - \frac{1}{c}q_2 = 0 \\ L_2 \ddot{q}_2 + \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c}\right)q_2 - \frac{1}{c}q_1 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

L'équation (12) peut s'écrire en fonction des deux courant  $i_1$  et  $i_2$  :

$$\begin{cases} L_1 \ddot{i}_1 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c}\right)i_1 - \frac{1}{c}i_2 = 0 \\ L_2 \ddot{i}_2 + \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c}\right)i_2 - \frac{1}{c}i_1 = 0 \end{cases}$$

2. Les pulsations propres pour le circuit (d).

On considère deux solutions sinusoïdales :

$$q_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \ddot{q}_1(t) = -A_1 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_1) = -\omega^2 q_1(t)$$

$$q_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \ddot{q}_2(t) = -A_2 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_2) = -\omega^2 q_2(t)$$

En remplaçant  $\ddot{q}_1(t)$ ,  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  et  $\ddot{q}_2(t)$  dans l'équation (12), on obtient alors:

$$\begin{cases} (-L_1 \omega^2 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c}\right))q_1(t) - \frac{1}{c}q_2(t) = 0 \\ (-L_2 \omega^2 + \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c}\right))q_2(t) - \frac{1}{c}q_1(t) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

L'équation (13) admet des solutions non nulles si et seulement si le déterminant est nul

$$\begin{vmatrix} (-L_1 \omega^2 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c}\right)) & -\frac{1}{c} \\ -\frac{1}{c} & (-L_2 \omega^2 + \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c}\right)) \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

On remplace  $L_1=L_2=L$ ,  $C_1=C_2=C$  dans l'équation (14) :

$$\begin{vmatrix} (-L\omega^2 + \frac{2}{c}) & -\frac{1}{c} \\ -\frac{1}{c} & (-L\omega^2 + \frac{2}{c}) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-L\omega^2 + \frac{2}{c})^2 - \frac{1}{c^2} = 0 \quad (15)$$

D'où les pulsations propres de ce système électrique (d) sont données par:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{Lc}},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3}{Lc}}$$

## Rappel de cours sur les ondes progressives.

### 5.1 Définition.

Une onde progressive est une perturbation périodique (qui se répète dans le temps) et qui se déplace dans l'espace, telles les vagues à la surface de l'eau, les ondes sonores et les ondes électromagnétiques. Une onde ne peut être périodique que si sa source est elle-même périodique. Comme tous les phénomènes périodiques, une telle onde est aussi caractérisée par sa fréquence  $f$  qui peut être calculée à partir de différentes relations.

Sa pulsation : aussi appelée vitesse angulaire (en radians/seconde) est égale à  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  étant la fréquence du signal (le nombre de périodes par seconde).

La fréquence  $f$  est liée à la période  $T$  par cette relation :  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ .

La période  $T$  est un temps, c'est la durée qui sépare les instants où le signal périodique se retrouve dans des états identiques (même valeur et même sens de variation, par exemple deux maximums, deux minimums, ou dans le cas d'un signal sinusoïdal, deux passages par zéro dans le même sens, tous deux montants ou tous deux descendants).

### 5.2 Différentes catégories d'ondes.

**Onde transversale :** le mouvement des particules de la matière qui propagent l'onde sont perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde elle-même (Ex : onde le long d'une corde)

**Onde longitudinale :** le mouvement des particules de la matière qui propagent l'onde sont dans la même direction que la direction de propagation de l'onde elle-même (Ex : onde le long d'un ressort)

**Onde à une dimension :** Ondes qui se propagent le long d'un ressort ou le long d'une corde.

**Onde à deux dimensions :** Vagues de surface.

**Onde à trois dimensions :** Ondes sonores et ondes lumineuses.

### 5.3 Propriétés.

Les ondes progressives ont en un point donné dans l'espace une périodicité temporelle  $T$ . C'est à dire qu'elles sont engendrées par une répétition périodique de signaux identiques avec cette période  $T$ . Les ondes progressives ont également à un instant donné une périodicité spatiale. Au point d'émission, la perturbation du milieu se reproduit à l'identique après une

durée de temps  $T$ . Mais pendant cette durée, l'onde s'est déplacée à la vitesse  $V$ , elle a donc parcouru au terme de cette durée une distance  $VT$ . Cette distance qui sépare donc les lieux où la perturbation du milieu se reproduit à l'identique est appelée la longueur d'onde et est notée  $\lambda = VT$ ,  $V$  est la vitesse de propagation de l'onde (dans le cas des ondes électromagnétiques dans le vide, cette vitesse de propagation correspond à la vitesse de la lumière,  $V = C = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ). La longueur d'onde  $\lambda$  est égale à la distance parcourue pendant une période. Plus généralement, après une durée  $t$ , l'onde a progressé de la distance  $x = Vt$ . On peut l'exprimer d'une autre façon, équivalente : à la distance  $x$  de la source et au temps  $t$ , l'onde a la valeur qu'avait la source au temps  $t - \frac{x}{V}$ . En effet, à la distance  $x$  de la source et à l'instant  $t$ , l'onde a la valeur qu'avait à la source au temps  $t - t_0$ ,  $t_0$  étant le temps mis pour parcourir la distance  $x$ , c'est à dire que  $t_0 = x/v$ , donc on retrouve bien  $t - t_0 = t - \frac{x}{V}$ .

## 5.4 Etude Théorique.

### 5.4.1 Expression de $Y(x, t)$ .

Soit  $Y$  la valeur de la perturbation (qui peut signifier par exemple suivant la nature du problème réel au quel on est confronté la hauteur d'une vague, la position d'un point d'une corde vibrante, l'intensité d'une tension ou d'un courant électrique, d'un champ électrique ou magnétique, etc....). L'expression de  $Y(x, t)$  est une fonction de deux variables qui sont: l'espace  $x$  et le temps  $t$ . Considérons une onde progressive sinusoïdale se propageant sur l'axe ( $x'x$ ) dans le sens positif (de  $x'$  vers  $x$ ).

$$y(0, t) = A \cos(\omega t) \quad (5.1)$$

Où  $y(0, t)$  désigne la valeur de  $Y$  à l'endroit  $x = 0$  et au temps  $t$ .

Un point quelconque  $M$  atteint par l'onde subit une perturbation identique à celle de la source

à l'instant  $t$  :  $t - t_M = t - \frac{x}{V}$ .

$t_M = \frac{x}{V}$  : temps mis par l'onde pour parcourir la distance  $OM$ .

$V$  : vitesse de propagation de l'onde ou célérité.

$$y(t - t_M) = y\left(t - \frac{x}{V}\right) \quad (5.2)$$

De ces deux équations on déduit:

$$y\left(t - \frac{x}{V}\right) = A \cos w\left(t - \frac{x}{V}\right) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{V}\right)$$

Or nous avons la pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  et la longueur d'onde  $\lambda = VT$

On remplace  $\omega$  et  $\lambda$  dans l'équation précédente on obtient :

$$y(x, t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{T} \frac{Tx}{\lambda}\right) \quad (5.3)$$

Nous posons le vecteur d'onde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , puis on le remplace dans l'équation (5.3) on

obtient :

$$y(x, t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - kx\right) \quad (5.4)$$

Si l'onde se déplace en sens inverse dans le sens  $x$  vers  $x'$  le même calcul donne:

$$g(x, t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + kx\right) = A \cos(\omega t + kx) \quad (5.5)$$

L'équation générale d'une onde progressive sinusoïdale est :

$$G(x, t) = y(x, t) + g(x, t) = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx) \quad (5.6)$$

En dérivant deux fois l'équation (5.6) par rapport à  $t$  puis par rapport à  $x$  on obtient l'équation de propagation :

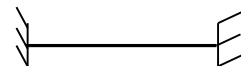
$$\frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial x^2} \quad (5.7)$$

dont la solution générale  $G(x, t)$  est décrite par l'expression (5.6).

## Applications

### Exercice 1

Une corde tendue très longue est excitée à l'une de ses extrémités par un mouvement transversal d'amplitude  $A=40$  cm et d'équation:  $y = A \sin \omega t$ .



1. Trouver l'équation de l'onde progressive dans corde.

Une source fait vibrer une corde à 20 Hz en lui imprimant un mouvement harmonique simple.

La tension est  $F=40$  N et on admet que 10 m de longueur pèse 10 g.

2. Calculer la célérité  $V$  de l'onde ainsi que le vecteur d'onde.

3. Ecrire l'équation du mouvement d'un point  $M$  distant de 2m de la source.

4. A quelle distance se trouve deux points voisins vibrants en opposition de phase.

**Solution**

1. L'équation de l'onde progressive de la corde est :

$$\begin{aligned}
 y\left(t - \frac{x}{V}\right) &= A \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right) \\
 &= A \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{V}\right) \\
 &= A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{VT}\right) \\
 &= A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \\
 &= A \sin(\omega t - kx)
 \end{aligned}$$

On a :

$$A = 0.4 \text{ m} \Rightarrow y(x, t) = 0.4 \sin(\omega t - kx)$$

2. La corde est soumise à une tension  $F=40 \text{ N}$  et on admet que 10 m de longueur pèse 10 g.

2.1 La célérité d'une onde dans une corde est définie par :

$$\begin{aligned}
 V &= \sqrt{\frac{F}{\mu}} \\
 V &= \sqrt{\frac{FL}{m}} \\
 V &= \sqrt{\frac{40 \cdot 10}{0.01}} = 200 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

2.2 Le vecteur d'onde est :

$$\begin{aligned}
 \lambda &= VT = V \frac{1}{f} \\
 \lambda &= \frac{200}{20} = 10 \text{ m} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}
 \end{aligned}$$

3. L'équation du mouvement d'un point M distant de 2m de la source est :

$$\begin{aligned}
 y(2, t) &= 0.4 \sin(\omega t - 2k) \\
 y(2, t) &= 0.4 \sin\left(40\pi t - \frac{2\pi}{5}\right)
 \end{aligned}$$

4. La distance entre deux points voisins vibrants se trouve en opposition de phase est :

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda} x = \pi \Rightarrow x = \frac{\lambda}{2} = 5 \text{ m}$$

**Exercice 2**

Une onde progressive  $y(x, t) = 0.47 \sin(\omega t + 56x)$  de fréquence 13Hz se propage dans la direction (ox) d'un repère cartésien Oxyz.

1. Exprimer la longueur d'onde et la célérité de propagation.
2. Calculer la vitesse maximale et l'accélération maximale.

3. Soit une onde  $y(x, t) = 0.026 \sin(-1570t + 45x + 0.66)$  calculer  $\frac{\partial y}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  à l'instant  $t = 2s$

et  $x = 1m$ .

4. L'onde de propagation dans une corde est caractérisée par la fonction  $y(x, t) = A \cos(20\pi t - 10\pi x + \varphi)$  à l'instant  $t = 1s$ , on observe  $y(2,1) = 1cm$  et  $\dot{y}(2,1) = -20\pi\sqrt{3} cm/s$ , déterminer la valeur de l'amplitude  $A$  et la phase  $\varphi$ .

**Solution**

1. La longueur d'onde est:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 56 \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{56}$$

La célérité de propagation est :

$$V = \lambda f = \frac{2\pi}{56} 13 = \frac{26\pi}{56}$$

2.1 La vitesse maximale :

$$\text{La vitesse du point : } y(x, t) = 0.47 \sin(\omega t + 56x) \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = 0.47\omega \cos(\omega t + 56x)$$

$$\text{La vitesse maximale est : } \frac{\partial y}{\partial t} = 0.47\omega = 0.47(2\pi f) = 12.22\pi \text{ m/s}$$

2.2 L'accélération maximale :

$$\text{L'accélération du point : } \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -0.47\omega^2 \sin(26\pi t + 56x)$$

$$\text{L'accélération maximale est : } \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.47\omega^2 = 0.47(26\pi)^2 = 317.72\pi^2 \text{ m/s}^2$$

3. Une onde  $y(x, t) = 0.026 \sin(-1570t + 45x + 0.66)$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -1570 * 0.026 \cos(-1570t + 45x + 0.66)$$

$$\text{Pour } t = 2s \text{ et } x = 1m \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = -1570 * 0.026 \cos(-1570(2) + 45(1) + 0.66) = 40.5 m/s$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(-1570)^2 * 0.026 \sin(-1570t + 45x + 0.66)$$

$$\text{Pour } t=2s \text{ et } x=1m \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(-1570)^2 * 0.026 \cos(-1570(2) + 45(1) + 0.66) = 8.210^3 m/s^{-2}$$

4. La valeur de l'amplitude A est :

D'après la fonction d'onde  $y(x,t) = A \cos(20\pi t - 10\pi x + \varphi)$ , on déduit l'expression de la

vitesse transversale :  $\dot{y}(x,t) = -20\pi A \sin(20\pi t - 10\pi x + \varphi)$

À l'instant  $t = 1s$  et  $x=2cm$  on a :

$$y(2,1) = A \cos(20\pi - 20\pi + \varphi) = 1cm \Rightarrow A \cos(\varphi) = 1cm \quad (1)$$

$$\dot{y}(2,1) = -20\pi A \sin(20\pi - 20\pi + \varphi) \Rightarrow A \sin(\varphi) = \sqrt{3} \quad (2)$$

On met l'équation (1)<sup>2</sup>+l'équation (2)<sup>2</sup> on obtient :

$$A^2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = 4 \Rightarrow \begin{cases} \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1 \\ A = \sqrt{4} \end{cases}$$

d'où l'amplitude  $A=2$

On obtient de l'équation (1) la phase  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ .

L'équation d'onde s'écrit comme suit :

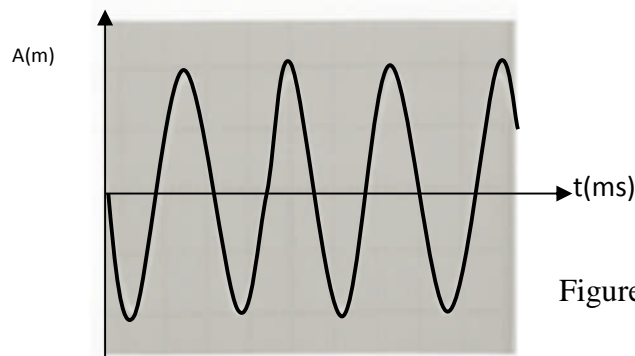
$$y(x,t) = 2 \cos(20\pi t - 10\pi x + \frac{\pi}{3})$$

### Exercice 3

Une onde se propage avec une célérité  $V=340 \text{ ms}^{-1}$  dans les conditions ordinaires de température.

1. Déterminer le domaine de longueur d'onde de cette onde sachant que son domaine de fréquence est compris entre 20Hz et 20kHz.
2. La fréquence d'immobilisation est de l'ordre 15 Hz, quelle est la célérité de l'onde à la surface de l'eau sachant que la distance entre deux maximums consécutifs est de 3cm.
3. On enregistre une onde à l'aide d'un micro phone relié à un oscilloscope. Sachant que la durée de balayage est fixe sur 1ms/div (figure1), que la température de la salle est de l'ordre

$T=25^{\circ}\text{C}$  et que la vitesse de propagation de l'onde  $V = \left(\gamma \frac{RT}{M}\right)^{0.5}$  avec  $\gamma = 1.4$  ;  $R = 8.32\text{SI}$  et  $M = 29\text{g.mol}^{-1}$ . Calculer la vitesse de l'onde, la période, la fréquence ainsi que la longueur d'onde.



### Solution

L'expression de la longueur d'onde  $\lambda = VT = \frac{V}{f}$

1.1 Pour une fréquence  $f = 20\text{Hz} \Rightarrow \lambda = \frac{340}{20} = 17\text{m}$ .

1.2 Pour une fréquence  $f = 20\text{kHz} \Rightarrow \lambda = \frac{340}{20 \cdot 10^3} = 1,710^{-2}\text{m}$ .

Le domaine de longueur d'onde  $\lambda$  pour cette onde est  $1.7\text{cm} < \lambda \leq 17\text{m}$ .

2. La célérité de l'onde à la surface d'eau :

La longueur d'onde est :  $\lambda = VT = \frac{V}{f} \Rightarrow V = \lambda f = 310^{-2} \cdot 15 = 0.45\text{ms}^{-1}$

3.1 La vitesse d'onde est donnée par cette équation :

$$V = \left(\gamma \frac{RT}{M}\right)^{0.5} = \sqrt{\frac{1.4 \cdot 8.32 \cdot 373 \cdot 25}{29 \cdot 10^{-3}}} = 1935.31\text{m/s}$$

3.2 La période :  $T = 2.410^{-3}\text{s}$

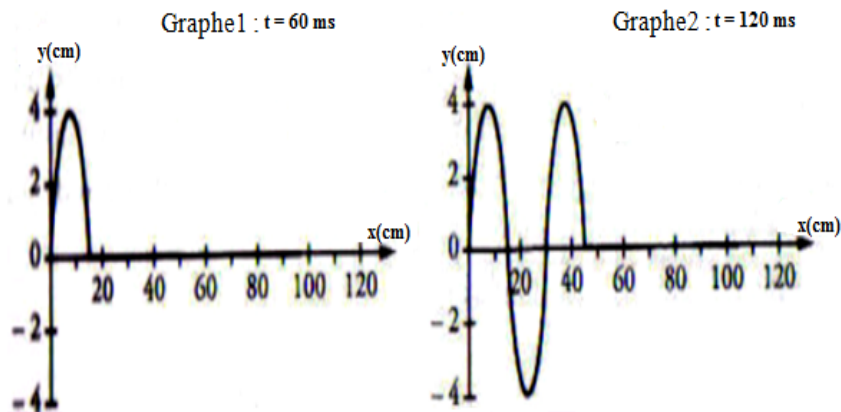
3.3 La fréquence :  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2.410^{-3}} = 0.4110^{-3}\text{s}^{-1}$

3.4 La longueur d'onde :  $\lambda = TV = 1935.31 \cdot 2.410^{-3} = 2.64\text{m}$

**Exercice 4**

Le mouvement d'une extrémité d'une corde vibrante est sinusoïdal avec une fréquence 100Hz, d'amplitude 4mm et la vitesse de propagation est de 30m/s.

1. Ecrire l'équation du mouvement pour un point M de la corde ( $t = 0s, y = 0m$ ).
2. Exprimer l'équation de la forme de cette corde à  $t = 0.1s$  puis à  $t = 0.1025s$ .
3. Elaborer un schéma identique pour le point  $M_3$  telle que la distance entre  $M_3$  et la source M soit de 0.15m.
4. Les deux graphes représentent la forme de la corde à deux instants différents  $t = 60\text{ ms}$  et  $t = 120\text{ms}$ , déduire la longueur d'onde, la période ainsi que la vitesse.



**Solution**

1. L'équation de mouvement pour le point M (source) :

$$y_M = x \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 100 = 200\pi \text{ rad s}^{-1}$$

$$\text{pour } t = 0 \Rightarrow y_M = 0$$

$$\Rightarrow x \sin(\omega(0) + \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow x \sin(\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = 0, \pi$$

Pour  $\varphi = \pi$  (*non valide*) parce que la vitesse est négative

Dou l'équation de la source M est :  $y_M = 4 \sin(200\pi t)$

2. 1 La forme de la corde à  $t=0.1s$  est :

$$y_{M_1} = y_M(t - \theta)$$

$$y_{M_1} = 4 \sin(200\pi)(t - \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

$$y_{M_1} = 4 \sin(200\pi(0.1) - \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

La longueur d'onde :  $\lambda = \frac{V}{f} = \frac{30}{100} = 0.3 \text{ m}$

La longueur de la corde qui vibre :  $L = Vt = 30(0.1) = 3 \text{ m}$

On a  $L = m\lambda \Rightarrow m = \frac{L}{\lambda} = \frac{3}{0.3} = 10$  la longueur d'onde

x	0	$\frac{\lambda}{4}$	$\frac{\lambda}{2}$	$\frac{3\lambda}{4}$	$\lambda$
y	0	-4	0	4	0

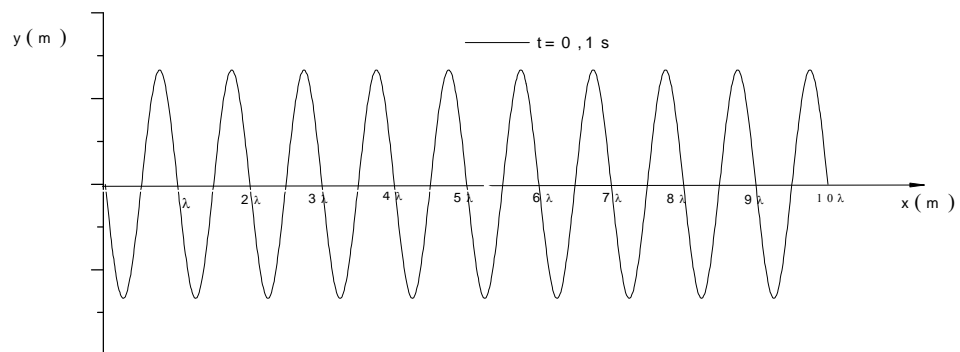


Fig.5.1 : Forme de la corde à t=0.1s

2.2 La forme de la corde à t=0.1025s

$$y_{M_1} = 4 \sin(200\pi(0.1025) - \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

$$y_{M_1} = 4 \sin(20\pi + \frac{\pi}{20} - \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

$$y_{M_1} = 4 \sin(\frac{\pi}{20} - \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

$$y_{M_1} = 4 \cos(\frac{2\pi}{\lambda} x)$$

La longueur de corde qui vibre est :  $L = Vt = 30(0.1025) = 3.075m$

sachant que :  $L = m\lambda \Rightarrow m = \frac{L}{\lambda} = \frac{3.075}{0.3} = 10.25$  de longueur d'onde

x	0	$\frac{\lambda}{4}$	$\frac{3\lambda}{2}$	$\frac{3\lambda}{4}$	$\lambda$
y	4	0	-4	0	4

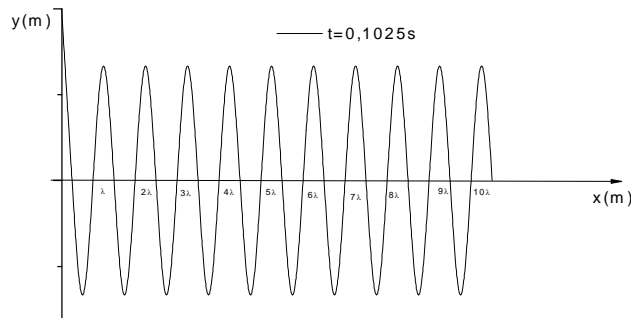


Fig.5.2 : Forme de la corde à t=0.1025s.

3. La forme de la corde lorsque la distance entre le point  $M_3$  et la source M de 0.15m est :

$$y_{M_3} = 4 \sin(200\pi(t) - \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

Or,  $\lambda = 0.3m, x = 0.15m \Rightarrow y_{M_3} = 4 \sin(200\pi(t) - \frac{2\pi}{0.3} 0.15) = 4 \sin(200\pi(t) - \pi)$

On a :  $y_{M_3} = 4 \sin(200\pi(t) - \pi) = -4 \sin(200\pi(t))$

Le temps nécessaire pour que la corde vibre est :  $x = Vt \Rightarrow t = \frac{x}{V} = \frac{0.15}{30} = 510^{-3} s$

La période est :  $\lambda = VT \Rightarrow T = \frac{0.3}{30} = 10^{-2} s$

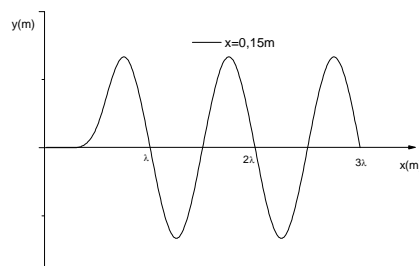


Fig.5.3 : Forme de la corde à x=0.15m.

4. La longueur d'onde, la période et la vitesse à partir des deux graphes :

Les deux graphes 1 et 2 donnent la longueur d'onde :  $\lambda = 30\text{cm} = 0.3\text{m}$ .

En comparant les deux graphes on remarque que à  $t=60\text{ms}$  et  $t=120\text{ms}$  la distance parcourue de l'onde est égale à longueur d'ondes donc la période  $T=T_2-T_1=120-60=60\text{ms}$ .

La vitesse de propagation est:  $V = \frac{\lambda}{T} = \frac{30 \cdot 10^{-2}}{60 \cdot 10^{-3}} = 5 \text{ms}^{-1}$ .

### **Exercice 5**

On produit des ondes progressives dans un bassin d'eau en déplaçant verticalement une tige qui effleure l'eau d'un mouvement vibratoire de fréquence 20Hz selon l'équation  $y = 3\sin(\omega t)$  (y en mm). On observe des rides de longueur 10cm qui se propagent dans une direction perpendiculaire à la tige.

1. Calculer le vecteur d'onde et la vitesse de propagation.
2. Etablir l'équation de déplacement d'un point situé à une distance x de la tige.

### **Solution**

1.1 Le vecteur de la longueur d'onde:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{10(10^{-2})} = 20\pi \text{ m}^{-1}$$

1.2. La vitesse de propagation :

$$V = \lambda T = \frac{\lambda}{f} = \frac{20\pi}{20} = \pi \text{ m/s}$$

On a une fréquence de 20Hz  $\Rightarrow \omega = 2\pi f = 40\pi \text{ rad s}^{-1}$

2. L'équation de déplacement d'un point situé à une distance x de la tige est :

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y\left(0, \frac{t-x}{v}\right) \\ &= 3\sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \\ &= 3\sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{v}\right) \\ &= 3\sin(40\pi t - 40x) \end{aligned}$$

**Exercice 6**

Une onde de fréquence de 300Hz se propage dans la direction du vecteur  $\vec{k}$  (2, 5, 4) rad/cm. La phase initiale est  $\pi/4$  et on considère les points suivants A(1,1,1)cm, B(-1,-2-3)cm appartenant à cette onde.

1. Déterminer la longueur d'onde et la vitesse de propagation de cette onde
2. Calculer la position et la vitesse autour du point O à t=1s.
3. Déduire le temps que met l'onde pour parcourir 10m.
4. Calculer le temps que met l'onde pour aller du point A au point B.
5. Une source émet une onde  $\psi$  de fréquence  $\nu$  qui se propage dans la direction  $Ox$  avec une vitesse  $V$  constante. Ecrire l'équation de propagation, en posant les variables suivantes :  $P = t + x/V$ ,  $q = t - x/V$  et montrer que la solution de l'équation est la somme de deux types de signaux.
6. En déduire la forme de la solution dans le cas d'un milieu homogène linéaire et infini en considérant le régime sinusoïdal.

**Solution**

1. La longueur d'onde et la vitesse de propagation de cette onde sont :

Sachant que les coordonnées du vecteur d'onde  $\vec{k}$  sont (2, 5, 4) rad/cm ce qui donne :

$$|\vec{k}| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{45} \quad \text{rad cm}^{-1}$$

$$\text{La longueur d'onde : } \lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} = \frac{2\pi}{\sqrt{45}} \text{ cm}$$

$$\text{La vitesse de propagation : } V = \frac{w}{|\vec{k}|} = \frac{2\pi f}{|\vec{k}|} = \frac{600\pi}{\sqrt{45}} \text{ cm/s}$$

2. La position et la vitesse autour de O à t=1s sont :

$$\text{La fonction d'onde est } \Psi(r, t) = A_m \cos(600\pi t - \sqrt{45} r + \frac{\pi}{4})$$

$$\text{D'où la position est : } \Psi(0, 1s) = A_m \cos(600\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \text{ cm}$$

$$\text{La vitesse est : } \dot{\Psi}(0, 1s) = -A_m 600\pi \sin(600\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{-A_m 600\pi}{\sqrt{2}} \text{ cm/s}$$

4. Le temps que met l'onde à parcourir 10m.

$$t = \frac{d}{V} = \frac{10}{600\pi} = \frac{10\sqrt{45}}{600\pi} s$$

4. 1 Le temps que met l'onde pour aller du point A au point B est :

Tout d'abord nous calculons le vecteur  $\vec{AB} = (-2, -3, -4) \text{cm}$

La distance qui sépare le point A de point B en tenant compte du vecteur de propagation  $\vec{k}$

$$\text{est : } d_{AB} = \vec{AB} \cdot \vec{u} = (-2, -3, -4) \cdot (2, 5, 4) \frac{1}{\sqrt{45}} = -35 \frac{1}{\sqrt{45}}$$

Le temps que met l'onde pour aller de A au point B est :

$$t_{AB} = \frac{d_{AB}}{V} = \frac{-35 \frac{1}{\sqrt{45}}}{600\pi / \sqrt{45}} = -\frac{2.63}{\pi} s$$

Dans ce cas  $t_{AB}$  et  $d_{AB}$  sont négatifs parce que l'onde passe de point B avant le point A.

5.1. Equation de propagation :

Comme la direction de propagation est unidimensionnelle (selon ox), l'équation aux dérivées partielles régira la fonction  $\psi(x, t)$  est s'écrira alors :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \tag{1}$$

5.2. La solution générale, en utilisant la méthode du changement des variables :

$$P = t + x/V, \quad q = t - x/V$$

On a :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial p} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\partial q}{\partial q} \tag{2}$$

Avec :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = 1,$$

On remplace  $\frac{\partial p}{\partial t} = 1, \frac{\partial q}{\partial t} = 1$ , dans l'équation (2) devient :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial p} + \frac{\partial \Psi}{\partial q} \tag{3}$$

On multiplie l'équation (3) par  $\frac{\partial}{\partial t}$  on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial p} + \frac{\partial \Psi}{\partial q} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial p} + \frac{\partial \Psi}{\partial q} \right) \frac{\partial p}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial p} + \frac{\partial \Psi}{\partial q} \right) \frac{\partial q}{\partial q} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 p} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 q} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q \partial p} \end{aligned} \quad (4)$$

De la même façon on procède avec le deuxième terme :

Pour la première dérivée on a :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial p} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial q} \quad (5)$$

Avec :  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{V}, \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{-1}{V}$

On remplace  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{V}, \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{-1}{V}$  dans l'équation (5), on obtient alors:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial p} - \frac{\partial \Psi}{\partial q} \right) \quad (6)$$

On multiplie l'équation (6) par  $\frac{\partial}{\partial x}$  on obtient la deuxième dérivée:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) &= \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial p} - \frac{\partial \Psi}{\partial q} \right) \\ &= \frac{1}{V} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial p} - \frac{\partial \Psi}{\partial q} \right) \frac{\partial p}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial p} - \frac{\partial \Psi}{\partial q} \right) \frac{\partial q}{\partial q} \right) \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \frac{1}{V^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 p} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 q} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial p \partial q} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q \partial p} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Donc les deux termes dans l'équation de propagation (1), on obtient :

$$2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial p \partial q} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q \partial p} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial p \partial q} = 0 \Rightarrow \Psi = \Psi_2(p) \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q \partial p} = 0 \Rightarrow \Psi = \Psi_1(q) \end{cases} \quad (8)$$

D'où la solution totale qui s'écrit sous la forme :

$$\Psi = \Psi_1(p) + \Psi_2(q)$$

On obtient alors la superposition (somme) de deux ondes qui s'écrit sous la forme :

$$\Psi = \Psi_1(\omega t - kx) + \Psi_2(\omega t + kx)$$

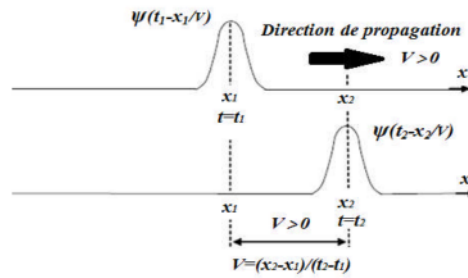


Fig.5.4 : Onde progressive dans le sens de la direction positive

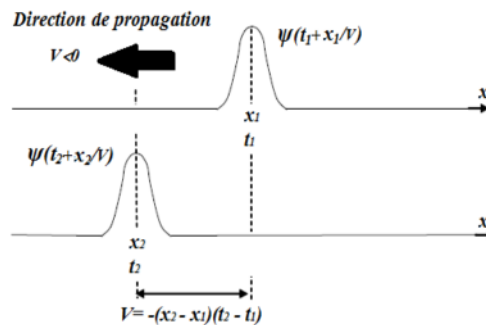


Fig.5.5 : Onde réfléchi dans le sens contraire de la direction positive.

6. Dans un milieu homogène infini et en régime sinusoïdal, la solution est de la forme :

$$\Psi(x, t) = A \cos(\omega t - \frac{\omega}{V} x) = A \cos(\omega t - kx)$$

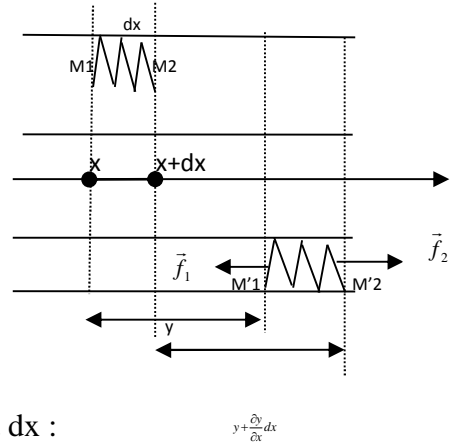
### Exercice 7

une onde progressive longitudinale se propage le long d'un ressort de raideur  $k=10 \text{ N/m}$  , de longueur  $l=50\text{cm}$  et de masse  $m=400\text{g}$ .

1. Etablir l'équation de propagation de cette onde.
2. Déduire l'expression de la célérité de propagation de cette onde.
3. A l'instant  $t=0\text{s}$ , le profil du ressort est décrit par la fonction  $f(y) = \frac{1}{2y^2 + 1}$  . Exprimer la fonction d'onde  $\Psi(y, t)$  .
4. Déduire le profil du ressort en  $y=0$ .
5. Déduire la vitesses en  $y=0$  à  $t= 3\text{s}$ .

**Solution**

On considère petit déplacement  $dx$  du ressort d'abscisse  $x$  au repos. Celui-ci se déplace lorsque l'onde passe. La face arrière  $M_1$  de la tranche devient  $M'_1$ . On pose  $\overline{M_1 M'_1} = y$ . La face avant se déplace de :  $\overline{M_2 M'_2} = y + \frac{\partial y}{\partial x} dx$



La force exercée au point  $M'_1$  sur le petit déplacement  $dx$  de ressort est  $f_1 = -f$  et au point  $M'_2$  la force exercée sur le ressort est:

$$f_2 = f + \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

La loi de la dynamique (loi de Newton) sur le déplacement  $dx$  :

$$\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Avec :  $\mu = \frac{dm}{dx}$

Suivant l'axe (ox) on obtient :

$$-f + f + \frac{\partial f}{\partial x} dx = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{1}$$

D'après la loi de l'élasticité le petit déplacement  $dx$  est soumise à une force moyenne de traction égale à  $f$  qui allonge de  $\frac{\partial y}{\partial x} dx$ , sa raideur est de  $\frac{k}{dx}$  donc :

$$f = \frac{k}{dx} dx \frac{\partial y}{\partial x} = k \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

On remplace  $\frac{\partial f}{\partial x}$  dans l'équation (1) on obtient :

$$k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

2. La célérité de propagation de l'onde est :

$$V^2 = \frac{k}{\mu} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{kl}{m}} = \sqrt{\frac{10 * 0.5}{0.4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} m/s$$

3. A l'instant  $t=0s$ , on a le profil connu  $f(y) = \frac{1}{2y^2 + 1}$  alors :

$$\begin{aligned}\Psi(y,t) &= f(y - Vt) \\ &= f\left(y - \sqrt{\frac{50}{4}}t\right) \\ &= \frac{1}{2\left(y - \sqrt{\frac{50}{4}}t\right)^2 + 1}\end{aligned}$$

4. Le profil de ressort en  $y=0$  est :

$$\begin{aligned}\Psi(0,t) &= f(0 - Vt) \\ &= f\left(0 - \sqrt{\frac{50}{4}}t\right) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{50}t)^2 + 1}\end{aligned}$$

5. La vitesse en  $y = 0$  à  $t = 3s$  est :

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}(y,t) &= \frac{\partial}{\partial t} \Psi(y,t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} f\left(y - \sqrt{\frac{50}{4}}t\right) \\ \dot{\Psi}(y,t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2\left(y - \sqrt{\frac{50}{4}}t\right)^2 + 1} \right) \\ &= \frac{4\sqrt{\frac{50}{4}}\left(y + \sqrt{\frac{50}{4}}t\right)}{\left(2\left(y - \sqrt{\frac{50}{4}}t\right)^2 + 1\right)^2}\end{aligned}$$

Pour  $y=0$  à  $t= 3s$  la vitesse est donnée :

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}(0,3s) &= \frac{4\sqrt{\frac{50}{4}}\left(y + \sqrt{\frac{50}{4}}t\right)}{\left(2\left(y - \sqrt{\frac{50}{4}}t\right)^2 + 1\right)^2} \\ \dot{\Psi}(0,3s) &= \frac{150}{\left(2\left(-3\sqrt{\frac{50}{4}}\right)^2 + 1\right)^2} = 2.9310^{-3} m/s\end{aligned}$$

**Exercice 8**

Une corde homogène et inextensible de masse linéique  $\mu$  est tendue horizontalement avec une tension constante  $T_0$ . Celle-ci est déplacée de sa position d'équilibre, la corde acquiert un mouvement quasi-vertical  $\psi(x,t)$ , celui-ci est mesuré à partir de la position d'équilibre. À l'instant  $t$ , la tension  $\vec{T}(x,t)$  exercée par la partie de la corde à droite d'un point  $M$  d'abscisse  $x$  sur la partie gauche de la corde à gauche de  $M$  qui fait un petit angle  $\theta(x,t)$  par rapport à l'horizontale (Figure 5.6). On négligera les effets de la force de pesanteur et des forces de frottement devant celui de la force de tension.

1. En considérant un tronçon infinitésimal de la corde compris entre  $x$  et  $x + dx$ , montrer que

$$T(x,t) \cos(\theta(x,t)) + T(x+dx,t) \cos(\theta(x+dx,t)) \approx T_0$$

2. Montrer que le déplacement transversal  $\psi(x,t)$  obéit à l'équation d'onde suivante :

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$$

3. Exprimer  $V$  en fonction de  $\mu$  et  $T_0$ .

4. La corde semi-infinie est le siège de la propagation d'une onde progressive sinusoïdale de pulsation  $\omega$  qui se déplace dans le sens des  $x$  croissants telle que :

$$\psi(x,t) = A \cos(\omega t - kx).$$

a) Vérifier que cette onde est la solution de l'équation d'onde puis donner l'expression de la relation de dispersion et de la vitesse de phase.

b) Calculer numériquement la vitesse de phase avec  $\mu = 0.3 \text{ Kg m}^{-1}$  et  $T_0 = 30 \text{ N}$

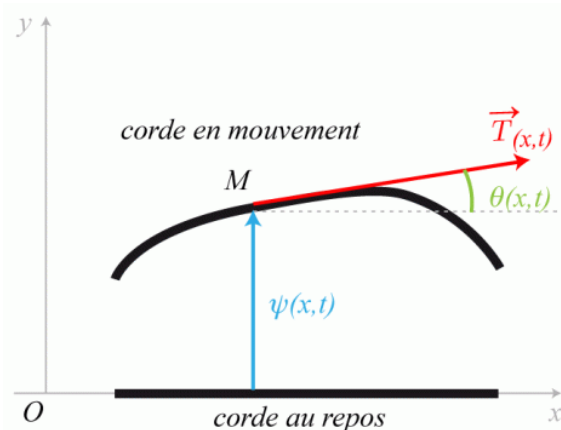


Fig.5.6

**Solution**

1. En considérant un tronçon infinitésimal de la corde compris entre  $x$  et  $x + dx$

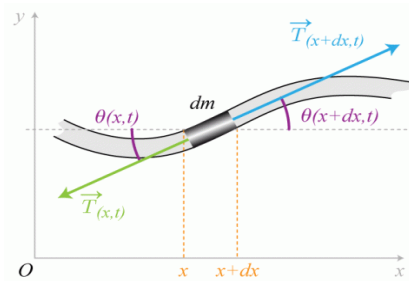


Schéma des forces existantes sur un tronçon de la corde

En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur le tronçon, on obtient :

$$\vec{T}(x, t) + \vec{T}(x + dx, t) = dm \vec{a}$$

La projection sur l'axe horizontal ( $ox$ ) donne :

$$-T(x, t) \cos(\theta(x, t)) + T(x + dx, t) \cos(\theta(x + dx, t)) = dm a_x$$

Le mouvement de la corde étant quasi-vertical, l'accélération selon l'axe ( $ox$ ) est quasi-nulle :

$a_x = 0m / s^2$ , alors :

$$T(x, t) \cos(\theta(x, t)) = T(x + dx, t) \cos(\theta(x + dx, t)) \tag{1.a}$$

De plus, les angles étant petits :  $\cos(\theta(x, t)) = \cos(\theta(x + dx, t)) = 1$

l'équation (1.a) devient :

$$T(x, t) = T(x + dx, t) = T_0 \tag{1.b}$$

2. Le déplacement transversal  $\psi(x, t)$  obéit à l'équation d'onde :  $\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur le tronçon  $dx$ , il vient :

$$\vec{T}(x, t) + \vec{T}(x + dx, t) = dm \vec{a} \tag{2.a}$$

Après projection sur l'axe ( $oy$ ) et  $\psi(x, t)$  étant le déplacement vertical de la corde, on obtient :

$$-T(x, t) \sin(\theta(x, t)) + T(x + dx, t) \sin(\theta(x + dx, t)) = dm \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{2.b}$$

De plus, les angles étant petits :  $\sin(\theta(x, t)) = \theta(x, t)$  et  $\sin(\theta(x + dx, t)) = \theta(x + dx, t)$

On remplace  $\sin(\theta(x, t)) = \theta(x, t)$  et  $\sin(\theta(x + dx, t)) = \theta(x + dx, t)$  dans l'équation (2.b) donne :

$$-T(x, t)\theta(x, t) + T(x + dx, t)\theta(x + dx, t) = dm \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3)$$

D'après la première question on a :  $T(x, t) = T(x + dx, t) = T_0$  l'équation précédente devient :

$$T_0(-\theta(x, t) + \theta(x + dx, t)) = dm \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (4)$$

La masse linéique de corde s'exprime  $\mu = \frac{dm}{dx}$ , d'où :

$$T_0(-\theta(x, t) + \theta(x + dx, t)) = \mu dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} dx \right) \quad (5)$$

On remplace  $\tan g \theta \approx \theta = \frac{\partial \psi}{\partial x}$  dans l'équation (5) celle-ci devient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = V^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (6)$$

3. La vitesse de propagation de l'onde est :

$$V^2 = \frac{T_0}{\mu} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

4. Vérifions qu'une solution réelle de cette équation d'onde est de la forme :

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx) \text{ ou } k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ est appelée vecteur d'onde.}$$

4.a) En dérivant deux fois  $\psi(x, t)$  par rapport au temps :

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - kx) = -\omega^2 \psi(x, t)$$

En dérivant deux fois  $\psi(x, t)$  par rapport à  $x$  :

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = -k^2 A \cos(\omega t - kx) = -k^2 \psi(x, t)$$

En remplaçant dans l'équation d'onde (6), on obtient :

$$-k^2 \psi(x, t) = \frac{-\omega^2}{V^2} \psi(x, t) \Leftrightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{V^2}$$

Alors,  $\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$  est solution de l'équation d'onde à la condition que  $k = \frac{\omega}{V}$  : c'est la relation de dispersion.

4.b) La vitesse de phase est aussi appelée la célérité  $V = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{30}{0.3}} = 10 \text{ m/s}^{-1}$

## Rappels de cours sur les ondes stationnaires.

### 6.1 Définition.

On appelle onde stationnaire, une superposition de deux ondes  $y_1(x, t)$  et  $y_2(x, t)$  de même fréquence, de même polarisation, de même amplitude ou d'amplitude différente qui se propagent suivant deux directions opposées. La superposition de ces deux ondes est illustrée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) = \frac{A}{2} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) + \varphi_1\right) + \frac{A}{2} \cos\left(\omega\left(t + \frac{x}{V}\right) + \varphi_2\right) \\ &= A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \end{aligned}$$

- ✓ En certains points  $y$  est toujours nulle: ce sont des nœuds (points immobiles). Ils sont définis par tels que :

$$A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) = (2m + 1) \frac{\pi}{2} = 0$$

D'où  $x = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{2} + m - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi}\right)$  avec  $m$  un nombre entier

- ✓ L'ensemble des points pour lequel l'amplitude  $A$  est maximale s'appelle des ventres.

On les définit par :

$$A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) = A \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) = m\pi$$

$$\text{D'où } x = \frac{\lambda}{2} \left(m - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi}\right)$$

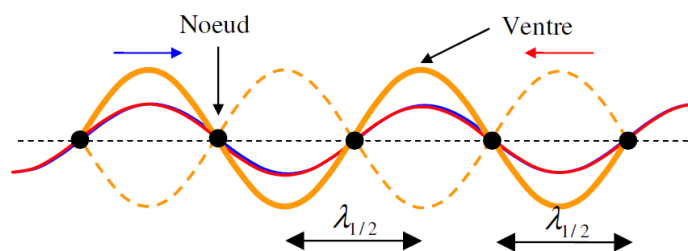


Figure 6.1 : Les positions des nœuds ou des ventres dans une onde stationnaire.

La distance entre deux nœuds ou deux ventres consécutifs est de  $\frac{\lambda}{2}$ . Un ventre se situe à mi-chemin entre deux nœuds consécutifs. Les points localisés entre deux nœuds consécutifs vibrent en phase et les points de deux fuseaux consécutifs vibrent en opposition de phase.

Une onde stationnaire peut être établie dans un milieu limite, elle résulte alors de la réflexion sur les limites de ce milieu. Si le mouvement vibratoire fait apparaître un nombre entier  $n$  de ventres alors on peut montrer que seul le  $i^{\text{ième}}$  terme s'avère nécessaire pour décrire le mouvement dans ce milieu limite. Dans ce cas l'équation de l'onde stationnaire peut s'écrire comme suit :

$$y_i(x, t) = \left( A_i \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_i}\right) + B_i \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_i}\right) \right) \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

avec

$n$  : nombre de modes d'oscillations.

$\omega_i = 2\pi f_i = 2\pi n f_1$  : pulsation du  $i^{\text{ième}}$  mode. Avec  $1 \leq i \leq n$

$\lambda_i$ : longueur d'onde ( $\lambda_i = \frac{f}{f_i}$ ) pour le  $i^{\text{ième}}$  mode.

### 6.2 Les ondes électromagnétiques.

La nécessité d'introduire les différents concepts liés à l'optique géométrique nous oblige à présenter de manière succincte les principales propriétés des ondes électromagnétiques (lumière). En effet, les ondes électromagnétiques sont des phénomènes périodiques qui, contrairement au son, se propagent aussi bien dans le vide que dans l'air. Dans le vide, leur vitesse est la plus grande qui puisse exister dans l'univers. On parle de célérité ou de la vitesse de la lumière et elle est représentée par le symbole  $C$  ( $C = 310^{+8} \text{ ms}^{-1}$ ). Dans les milieux matériels isotropes, les ondes électromagnétiques se propagent à une vitesse plus lente notée  $V$ . Si  $n$  est l'indice du milieu traversé, on peut écrire  $V = \frac{C}{n}$ . Les ondes électromagnétiques, décrites par deux champs vectoriels, électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et magnétique  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  vérifient l'équation d'onde suivante dans un milieu transparent, homogène et isotrope:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0} \text{ et } \Delta \vec{H}(\vec{r}, t) - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

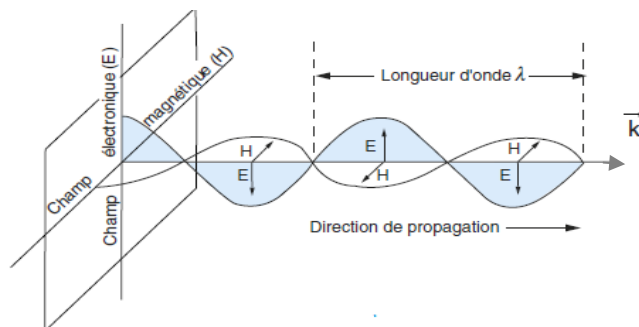


Figure 6.2 : représentation schématique d'une onde électromagnétique.

Le champ électrique s'écrit alors dans l'approximation des ondes planes :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \xrightarrow{\text{notation complexe}} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

L'expression de champ magnétique  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  se déduit de  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  par la relation :

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t)$$

### Propriétés :

Pour une onde électromagnétique, les trois vecteurs : champs magnétique  $\vec{H}(\vec{r}, t)$ , champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et le vecteur d'onde  $\vec{k}$  (direction de propagation) forment un trièdre direct.

La relation  $\lambda = cT = \frac{2\pi}{k}$  ( $k$  le module du vecteur d'onde) permet d'écrire la pulsation  $\omega = kc$ .

Rappelons enfin que si  $\vec{k}$  désigne le vecteur d'onde d'une onde se propageant dans le vide à la vitesse  $c$  et avec une pulsation  $\omega$ , l'onde passant dans un milieu d'indice  $n$  garde la même pulsation : on dit que la pulsation est un invariant de la propagation. Sa vitesse de propagation  $v$  dépend de ( $c$  et  $n$ ) et son vecteur d'onde devient:  $k' = \frac{\omega}{v} = nk$ .

## Applications

### Exercice 1

Deux ondes  $y_1(x, t) = 4 \sin(0.25x - 60t)$  et  $y_2(x, t) = 4 \sin(0.25x + 60t)$  se propagent sur une corde.

- Déterminer la fréquence de propagation des deux ondes.
- Calculer la longueur d'onde.
- Quelle est la vitesse de propagation des deux ondes.
- Déterminer la position des nœuds et des ventres.
- Que devient la position des nœuds et des ventres si la deuxième onde s'écrit :  $y_2(x, t) = 4 \sin(0.25x + 60t + \varphi)$ .

### **Solution**

- La fréquence :  $2\pi f = \omega = 60 \text{ rad s}^{-1} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 9.55 \text{ s}^{-1}$
- La longueur d'onde :  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0.25 \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0.25} = 25.12 \text{ cm}$
- La vitesse de propagation des deux ondes :

$$\lambda = VT \Rightarrow V = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = 25.1210^{-2} \cdot 9.55 = 2.40 \text{ ms}^{-1}$$

4.1 Les positions des nœuds :

Onde totale :  $y = y_1 + y_2$

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = 4 \sin(0.25x - 60t) + 4 \sin(0.25x + 60t)$$

$$y(x, t) = 16 \sin\left(\frac{0.25x - 60t + 0.25x + 60t}{2}\right) \cos\left(\frac{0.25x - 60t - 0.25x - 60t}{2}\right)$$

$$y(x, t) = 16 \sin(0.25x) \cos(60t) = 16 \sin(kx) \cos(\omega t)$$

Les positions des nœuds sont :  $16 \sin(kx) = 0 \Rightarrow kx = m\pi = \frac{2\pi}{\lambda} x$

$$x = m \frac{\lambda}{2} = m \frac{25.12}{2} = m(12.56) \text{ cm}, \text{ avec } (m \text{ entier})$$

4.2 Les positions des ventres sont :  $16 \sin(kx) = 16 \Rightarrow kx = (2p + 1) \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} x$

$$x = (2p + 1) \frac{\lambda}{4} = (2p + 1) \frac{25.12}{4} = 6.28(2p + 1) \text{ cm}, \text{ avec } (p \text{ entier})$$

5. Les positions des nœuds et des ventres si la seconde onde s'écrit :

$$y_2(x, t) = 4 \sin(0.25x + 60t + \varphi)$$

Donc, l'onde totale s'écrit :

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = 4 \sin(0.25x - 60t) + 4 \sin(0.25x + 60t + \varphi)$$

$$y(x, t) = 16 \sin\left(\frac{0.25x - 60t + 0.25x + 60t + \varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{0.25x - 60t - 0.25x - 60t - \varphi}{2}\right)$$

$$y(x, t) = 16 \sin\left(0.25x + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(60t + \frac{\varphi}{2}\right) = 16 \sin\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

D'où les positions des nœuds sont :

$$16 \sin\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{\varphi}{2}\right) = m\pi$$

$$x = \lambda \frac{m\pi - \frac{\varphi}{2}}{2\pi} = \frac{\lambda}{4} \left(2m - \frac{\varphi}{\pi}\right), \text{ donc les nœuds sont décalé de } x = -\frac{\varphi}{4\pi} \lambda$$

D'où les positions des ventres sont :

$$16 \sin\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{\varphi}{2}\right) = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\text{D'ou } x = \frac{\lambda}{4} \left((2m + 1) - \frac{\varphi}{\pi}\right)$$

Donc les points qui ont des amplitudes maximales  $A$  sont aussi décalés de l'ordre  $x = -\frac{\varphi}{4\pi}\lambda$

### Exercice 2

Une corde de longueur 6m et de masse  $m = 30\text{g}$  est fixée à ses extrémités. Un vibreur sollicite cette corde avec une fréquence de 52Hz sachant que la célérité de propagation est de  $V = 26\text{m/s}$ .

1. Déduire la longueur d'onde de propagation de l'onde sur la corde.
2. Calculer sa tension.
3. On règle la fréquence de vibration à 20HZ pour avoir deux fuseaux, lorsqu'on place un obstacle à une distance de 1m par rapport au point A (extrémité de la corde). Que devient sa tension  $F'$  ?
4. Déduire le nombre de fuseaux qui sont formés sur la longueur précédente sachant que sa tension est  $F = F'/2$ .
5. Déduire la longueur de corde qui vibre lorsqu'on déplace l'obstacle pour avoir deux fuseaux, trois fuseaux et quatre fuseaux.
6. La corde forme des ventres d'une largeur 2cm et de longueur d'onde 2m, déduire la forme de la corde à l'instant  $t = 0\text{s}$  et à  $t = 0.0125\text{s}$  sachant que sa longueur qui vibre est de 1m.

### **Solution**

1. La longueur d'onde de propagation est :

$$\lambda = \frac{V}{f} = \frac{26}{52} = 0.5\text{m}$$

2. La force tension :

$$\text{On a : } \mu = \frac{m}{l} = \frac{0.03}{6} = 5 \cdot 10^{-3} \text{kg/m}$$

$$V = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow F = \mu V^2 = 5 \cdot 10^{-3} (26)^2 = 3.38\text{N}$$

3. La force de tension  $F'$  :

On a :

$f = 20\text{Hz}$ ,  $l = 1\text{m}$  et deux fuseaux  $m = 2$

La longueur d'ondes  $\lambda = \frac{2l}{2} = l = 1\text{m}$

La vitesse de propagation  $V = \lambda f = 20 \cdot 1 = f = 20 \text{ m/s}$

$$V = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow F = \mu V^2 = 510^{-3} (20)^2 = 2 \text{ N}$$

4. Le nombre de fuseaux formé sur la longueur précédente :

On a :

$$F = \frac{F'}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ N}$$

La célérité de propagation :

$$V = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{1}{510^{-3}}} = 14.14 \text{ m/s}$$

Le nombre de fuseau est :  $m = \frac{2l}{\lambda} = \frac{2l}{V} f = \frac{2}{14.14} 20 = 2.82 \approx 3$

5. La longueur de corde :

$$\text{On a la longueur : } l = \frac{m}{2f} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$\text{Deux fuseaux : } l = \frac{2}{2f} \sqrt{\frac{F}{\mu}} = 1 \text{ m}$$

$$\text{Trois fuseaux : } l = \frac{3}{2f} \sqrt{\frac{F}{\mu}} = 1.5 \text{ m}$$

$$\text{Quatre fuseaux : } l = \frac{4}{2f} \sqrt{\frac{F}{\mu}} = 2 \text{ m}$$

6.1 La forme de la corde à l'instant  $t = 0 \text{ s}$  est :

$$y(x, t) = 2A_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Avec: la pulsation  $\omega = 2\pi f = 40\pi \text{ rad s}^{-1}$

La largeur d'un ventre est  $2\text{cm} = 2b \Rightarrow b = 2A_m = 1\text{cm} \Rightarrow A_m = \frac{1}{2}$

D'où l'équation précédente  $y(x, t)$  devient :

$$y(x, t) = \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \left( 40\pi t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$t = 0 \Rightarrow y(x, 0) = \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) = \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$$

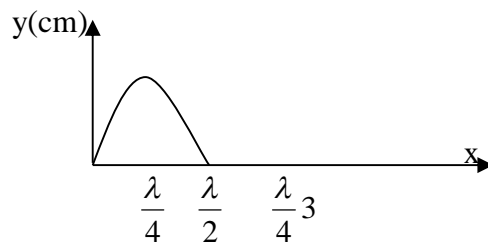
Pour  $x = 0 \Rightarrow y(0,0) = \sin \frac{2\pi}{\lambda} 0 = 0$  cm c'est le premier point.

Pour  $x = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow y(\frac{\lambda}{4}, 0) = \sin \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = 1$  cm .

Pour  $x = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow y(\frac{\lambda}{2}, 0) = \sin \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} = 0$  cm c'est le deuxième point.

Pour  $x = \frac{\lambda 3}{4}, \lambda$  non valide puisque on a la longueur de la corde qui vibre qui est de 1m

inferieur  $\frac{\lambda 3}{4}, \lambda$



6.2 La forme de la corde à l'instant  $t=0.0125$ s :

On a :

$$y(x,0.0125) = \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \sin(40\pi(0.0125) + \frac{\pi}{2}) = \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = 0$$

A cette instant  $t= 0.0125$ s la corde reste statique.

### Exercice 3

Deux cordes d'impédances  $Z_1, Z_2$  et de tension 200N sont reliées en  $x=0$ . La corde de droite vibre à 100Hz et son impédance est  $Z_2 = 20$ kg/s (figure.6.3). L'onde incidente (milieu1) se propage vers la droite à une vitesse 100m/s, son amplitude 2cm et sa phase initiale  $\frac{\pi}{3}$ .

1. Déterminer l'impédance dans la corde de gauche.
2. Déterminer les vecteurs d'onde.
3. Expliciter les expressions des amplitudes et des fonctions d'onde incidente, réfléchié et transmise.
4. Calculer la hauteur et la vitesse de la corde en  $x = -5$ m et  $t = 1$ s.
5. Traduire les expressions des puissances moyennes des trois ondes.

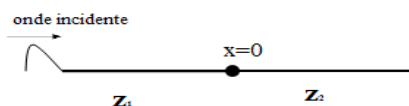


Fig. 6.3

**Solution**

1. L'impédance dans la corde de droite est :

$$Z_2 = 20 \text{ kg/s}$$

Puisque les deux cordes sont reliées, la tension et la fréquence sont identiques dans les deux cordes, d'où l'impédance dans la corde gauche qui s'écrit :

$$Z_1 = \frac{F}{v_1} = \frac{200}{100} = 2 \text{ kg/s}$$

2. les vecteurs d'onde sont :

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \frac{2\pi 100}{100} = 2\pi \text{ rad/m}$$

$$k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \frac{\omega}{F} Z_2 = \frac{2\pi 100}{200} 20 = 20\pi \text{ rad/m}$$

3. Les expressions des amplitudes des ondes réfléchies et transmises

$$r = \frac{A_r}{A_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \Rightarrow A_r = A_i \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$A_r = 0.02 \frac{2 - 20}{2 + 20} = 1.6310^{-2} \text{ m}$$

L'expression des amplitudes des ondes transmises :

$$t = \frac{A_t}{A_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \Rightarrow A_t = A_i \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$A_t = 0.02 \frac{2 * 2}{2 + 20} = 0.3610^{-2} \text{ m}$$

Onde incidente s'écrit :  $y_i(x, t) = A_i \cos(\omega t - k_i x + \frac{\pi}{3})$

$$y_i(x, t) = 0.02 \cos(200\pi t - 2\pi x + \frac{\pi}{3})$$

Onde réfléchie est :  $y_r(x, t) = A_i \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \cos(\omega t + k_r x + \frac{\pi}{3})$

$$y_r(x, t) = 1.6310^{-2} \cos(200\pi t + 2\pi x + \frac{\pi}{3})$$

Onde transmise est :  $y_t(x, t) = A_i \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \cos(\omega t - k_t x + \frac{\pi}{3})$

$$y_t(x, t) = 0.6310^{-2} \cos(200\pi t - 20\pi x + \frac{\pi}{3})$$

4. La hauteur et la vitesse de la corde en  $x = -5\text{m}$  et  $t = 1\text{s}$

A  $x = -5\text{m}$ , les ondes incidentes et réfléchies se superposent dans le milieu 1

$$y_1(x, t) = y_i(x, t) + y_r(x, t)$$

$$y_1(x, t) = 0.02 \cos(200\pi t - 2\pi x + \frac{\pi}{3}) + 1.6310^{-2} \cos(200\pi t + 2\pi x + \frac{\pi}{3})$$

Pour  $x = -5\text{m}$  et  $t = 1\text{s}$  on a :

$$y_1(-5\text{m}, 1\text{s}) = 0.02 \cos(200\pi(1) + 10\pi + \frac{\pi}{3}) + 1.6310^{-2} \cos(200\pi(1) - 10\pi + \frac{\pi}{3})$$

$$y_1(-5\text{m}, 1\text{s}) = 1.02310^{-2} - 0.8610^{-2} = 0.15810^{-2}\text{m}$$

5. Les expressions des puissances moyennes des trois ondes sont :

$$W_i = 2\pi^2 A_i^2 f^2 Z_1^2, W_r = 2\pi^2 A_r^2 f^2 Z_1^2 \text{ et } W_t = 2\pi^2 A_t^2 f^2 Z_2^2$$

### Exercice 4

La vitesse de propagation d'une onde est de  $332\text{m/s}$  dans un tuyau de longueur  $30\text{cm}$  ouvert à ses deux extrémités.

1. Etablir l'équation de déplacement pour la  $n^{\text{ème}}$  harmonique.
2. Quelles sont les fréquences des trois premières harmoniques.

### **Solution**

1. L'équation de déplacement est :

$$y_n(x, t) = A_n \cos \frac{n\pi}{L} x \sin \left( \frac{nf\pi}{L} t + \varphi_n \right)$$

$$y_n(x, t) = A_n \cos \frac{n\pi}{0.3} x \sin \left( \frac{nf\pi}{0.3} t + \varphi_n \right)$$

2. Les fréquences des trois premières harmoniques :

$$\text{On a : la longueur d'onde des modes } \lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{2(0.3)}{n} = \frac{0.6}{n}$$

Les fréquences des modes :  $f_n = n \frac{V}{2L} = n \frac{332}{0.6} = n553.33\text{Hz}$ .

La fréquence de la 1<sup>ère</sup> harmonique:  $f_1 = 1 \frac{V}{2L} = 1 \frac{332}{0.6} = 553.33\text{Hz}$ .

La fréquence de la 2<sup>ème</sup> harmonique:  $f_2 = 2 \frac{V}{2L} = 2 \frac{332}{0.6} = 1106.66\text{Hz}$ .

La fréquence de la 3<sup>ème</sup> harmonique:  $f_3 = 3 \frac{V}{2L} = 3 \frac{332}{0.6} = 1659.99\text{Hz}$ .

### Remarque :

Le tuyau est fermé à l'origine et ouvert à l'extrémité, il doit contenir un nombre demi – entier (n-1/2) de fuseaux de longueur  $\lambda_n / 2$ .

### Exercice 5

Une colonne liquide de longueur  $L=15\text{mm}$  est mise en vibration longitudinale par un excitateur à quartz Q qui émet en A des ultrasons de fréquence  $f$  qui se propagent avec la célérité  $V=1400\text{m/s}$  dans le liquide. A et B sont des extrémités fixes pour les ondes longitudinales dans le liquide.

1. Calculer toutes les fréquences  $f$  qui font vibrer la colonne liquide.
2. Le quartz est alimenté par un générateur électrique dont la tension est sinusoïdale pour une fréquence  $f$  réglable entre 2.6MHZ et 6 MHZ, déterminer les différents modes (repérés par n) dans le liquide qui sont provoqués par excitateur à quartz.

### Solution

1. Les fréquences  $f$  qui font vibrer la colonne liquide sont:

Dans ce cas la longueur d'une corde qui vibre à deux extrémités fixées est égale au nombre de fuseaux c'est des multiples pour chaque longueur de fuseaux:  $l = n \frac{\lambda}{2}$

La vitesse de propagation est donnée :

$$V = \lambda f \Rightarrow f = \frac{V}{\lambda} = \frac{nV}{2l} = n \frac{1400}{2 * 1510^{-3}} = n 46660\text{Hz}$$

2. Les modes n que le quartz peut exciter dans le liquide sont :

$$2.110^6 < n46660 < 610^6 \Rightarrow 45 < n < 128.59$$

$$\text{Pour } n = 46 \Rightarrow f = 2.14\text{MHz} \dots\dots n = 80 \Rightarrow f = 3.73\text{MHz} \dots n = 128 \Rightarrow f = 5.97\text{MHz}$$

### Exercice 6

Une corde de longueur 1m et de masse 100g est fixée à ses deux extrémités avec une tension de 4000N.

1. Calculer les fréquences d'oscillation pour les quatre modes et les longueurs d'onde correspondantes.
2. Etablir l'expression de la vibration au point x et l'instant t.
3. Déduire la densité d'énergie cinétique et la densité d'énergie potentielle.
4. Déduire la valeur de l'énergie totale dans la corde.

### **Solution**

1.1 Les fréquences d'oscillations pour le n<sup>ieme</sup> mode

$$f_n = \frac{nf}{2L} \text{ avec } f = \sqrt{\frac{FL}{m}} = \sqrt{\frac{2000*1}{0.1}} = 200\text{Hz}$$

$$\text{D'ou } f_n = \frac{n200}{2} = n100$$

$$\text{Pour } n = 1 \Rightarrow f_1 = 100\text{Hz}, n = 2 \Rightarrow f_2 = 200\text{Hz}, n = 3 \Rightarrow f_3 = 300\text{Hz} \text{ et } n = 4 \Rightarrow f_4 = 400\text{Hz}.$$

1.2 Les longueurs d'onde pour le n<sup>ieme</sup> mode:  $\lambda_n = \frac{2l}{n}$

$$\text{Pour } n = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 2m, n = 2 \Rightarrow \lambda_2 = 1m, n = 3 \Rightarrow \lambda_3 = 0.66m \text{ et } n = 4 \Rightarrow \lambda_4 = 0.5m.$$

2. L'expression de la vibration au point x et l'instant t

$$y_n(x, t) = A_n \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \left( \frac{nf\pi}{L} t + \varphi_n \right)$$

3.1 La densité d'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} \mu (\dot{y}_n)^2 = \frac{1}{2} \mu \frac{n^2 f^2 \pi^2}{L^2} A_n^2 \sin^2 \frac{n\pi}{L} x \cos^2 \left( \frac{nf\pi}{L} t + \varphi_n \right)$$

3.2 La densité d'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} F \left( \frac{\partial y_n}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} F \frac{n^2 \pi^2}{L^2} A_n^2 \cos^2 \frac{n\pi}{L} x \sin^2 \left( \frac{nf\pi}{L} t + \varphi_n \right) \\ &= \frac{1}{2} \mu \frac{n^2 f^2 \pi^2}{L^2} A_n^2 \cos^2 \frac{n\pi}{L} x \sin^2 \left( \frac{nf\pi}{L} t + \varphi_n \right) \end{aligned}$$

4. l'énergie totale de la corde :

$$E_n = L \langle E_T \rangle = L(\langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle)$$

$$E_n = \frac{1}{4} \mu \frac{n^2 f^2 \pi^2}{L} A_n^2 = \frac{1}{4} \frac{n^2 F \pi^2}{L} A_n^2 = L \frac{1}{4} \mu f_n^2 A_n^2$$

### Exercice 8

Un tuyau sonore de longueur  $L$  est ouvert à ses deux extrémités. Devant l'une d'elles, on place un haut-parleur relié à un générateur de basse fréquence (GBF) délivrant une tension sinusoïdale de fréquence réglable. On modifie la fréquence du GBF en partant d'une valeur très faible et on note les valeurs de fréquence pour lesquelles le son est nettement audible dans le tuyau. Ces valeurs sont consignées dans le tableau suivant :

$f$ (Hz)	142	283	425	567	708	850
----------	-----	-----	-----	-----	-----	-----

On admet qu'à chacune de ses extrémités, la colonne d'air présente un ventre de vibration.

1. Quelle est la fréquence fondamentale pour ce tuyau ?
2. Déduire le nombre des ventres et des nœuds pour la fréquence de vibration  $f = 425$  Hz.
3. Sachant que pour cette expérience, la célérité du son dans l'air vaut  $V = 340$  m/s, calculer la longueur du tuyau.

### **Solution**

1. La fréquence fondamentale pour ce tuyau : c'est la plus petite valeur de  $f$  pour laquelle le tuyau émet un son audible, il s'agit donc de  $f_1 = 142$  Hz.
2. La fréquence de 425 Hz correspond à  $f_3 = 3 f_1$ . Sachant qu'à chaque extrémité du tuyau, il y a un ventre de vibration, et que la longueur du tuyau est  $l = \frac{3}{2} \lambda_n$ , il y a trois nœuds de vibration dans la colonne d'air (et aussi quatre ventres).

3. La longueur du tuyau et la longueur d'onde sont reliées par :  $l = \frac{n}{2} \lambda_n$

pour  $n = 3$  la célérité  $V = 340$  m/s de l'onde étant connue, on déduit :

$$l = \frac{3}{2} \lambda_3, \lambda_3 = VT_3 = \frac{V}{f_3} = \frac{V}{3f_1}$$

D'où la longueur de tuyau est donnée:

$$l = \frac{3}{2} \frac{V}{3f_1} = \frac{340}{2(142)} = 1.20 \text{ m}$$

**Exercice 9**

Soit deux diapasons  $D_1$  et  $D_2$  qui vibrent à la même fréquence  $f=50\text{Hz}$ , avec des phases  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . Ils transmettent, en A pour  $D_1$  et en B pour  $D_2$  ( $AB=1\text{m}$ ), deux vibrations de même amplitude à une corde de grande longueur tendue suivant l'axe  $xx'$  (figure.6.4), qui se propagent sur celle-ci avec une célérité  $V = 20\text{m/s}$ . On admettra que, grâce aux liaisons souples entre les diapasons et la corde, l'onde issue de  $D_1$  ne se réfléchit pas en B, et que l'onde issue de  $D_2$  ne se réfléchit pas en A.

1. Dédurre l'onde issue de  $D_1$  arrivant au point M d'abscisse  $x$ .
2. Dédurre l'onde issue de  $D_2$  arrivant au point M d'abscisse  $x$ .
3. Calculer l'onde résultante en ce point et conclure sur la nature de l'onde obtenue.
4. Dédurre les positions des nœuds et des ventres et que deviennent ces positions lorsque  $\varphi_1 = \varphi_2$
5. Quelle est la distance entre deux nœuds ou deux ventres consécutifs pour  $\varphi_1 = \varphi_2$

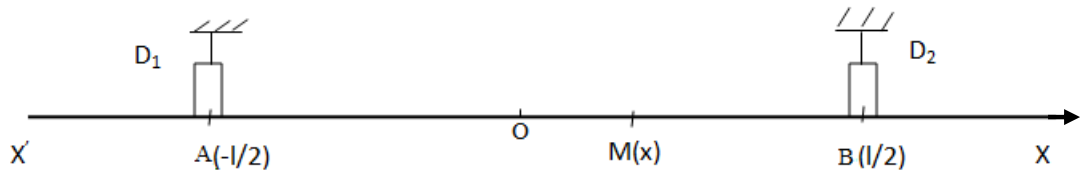


Fig.6.4

**Solution**

Le point M se situe entre A et B donc :

$$|AM| = \left(\frac{l}{2} + x\right) \text{ et } |BM| = \left(\frac{l}{2} - x\right)$$

1. L'onde issue de  $D_1$  arrivant au point M est :

$$y_1(x, t) = a \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{V} \left(\frac{l}{2} + x\right) + \varphi_1\right) = a \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{V} x - \frac{\omega l}{2V} + \varphi_1\right)$$

$$y_1(x, t) = a \cos\left(\omega t - kx - \frac{\omega l}{2V} + \varphi_1\right)$$

2. L'onde issue de  $D_2$  arrivant au point M est :

$$y_2(x, t) = a \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{V} \left(\frac{l}{2} - x\right) + \varphi_2\right) = a \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{V} x - \frac{\omega l}{2V} + \varphi_2\right)$$

$$y_1(x, t) = a \cos\left(\omega t + kx - \frac{\omega l}{2V} + \varphi_2\right)$$

3. l'onde résultante est :  $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$

$$y(x,t) = a \cos(\omega t - kx - \frac{\omega l}{2V} + \varphi_1) + a \cos(\omega t + kx - \frac{\omega l}{2V} + \varphi_2)$$

$$y(x,t) = 2a \cos(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}) \cos(\omega t - \frac{\omega l}{2V} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2})$$

$$y(x,t) \text{ représente une stationnaire de l'amplitude } A = 2a \cos(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2})$$

4.1 Les positions des nœuds et des ventres sont :

Les positions des nœuds  $\Leftrightarrow A = 0$

$$A = 0 \Rightarrow (kx_N + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}) = \frac{\pi}{2} + p\pi$$

$$\Rightarrow x_N = \frac{1}{2k}(-\varphi_2 + \varphi_1 + \pi + 2p\pi) = \frac{\lambda}{4\pi}(-\varphi_2 + \varphi_1 + \pi + 2p\pi)$$

Les positions des ventres  $\Leftrightarrow |A| \text{ est maximale } \Rightarrow (kx_V + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}) = p\pi$

$$(kx_V + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}) = p\pi \Rightarrow x_V = \frac{1}{2k}(-\varphi_2 + \varphi_1 + 2p\pi)$$

$$\Rightarrow x_V = \frac{\lambda}{4\pi}(-\varphi_2 + \varphi_1 + 2p\pi)$$

Lorsque  $\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow x_V = \frac{\lambda}{2\pi} p$

Lorsque  $\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow x_N = \frac{\lambda}{4}(1 + 2p)$

5. La distance entre deux nœuds ou deux ventres consécutifs pour  $\varphi_1 = \varphi_2$  est :

$$\text{On a la longueur d'un fuseau est } L = \frac{\lambda}{2} = \frac{V}{2f} = \frac{20}{2 * 50} = 0.2m$$

$$\text{Lorsque } \varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \begin{cases} x_V = p \frac{0.2}{\pi} \\ x_N = 0.1(1 + 2p) \end{cases}$$

### Exercice 10

Une corde de longueur L est fixée en ses extrémités d'abscisse  $x = 0$  et  $x = L$ .

1. On cherche des solutions de l'équation de propagation  $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$  sous la forme de fonctions à variables séparées:  $y(x,t) = f(x)g(t)$ . Montrer que  $f(x)$  et  $g(t)$  doivent être des fonctions sinusoidales. En notant  $\omega$  la pulsation de  $g(t)$ , donner l'expression de la fonction spatiale  $f(x)$ ?

2. Montrer que les conditions aux limites imposent à  $\omega$  de ne pouvoir prendre qu'une série de valeurs discrètes notées  $\omega_n$  ( $n \in N^*$ ) et donner l'expression de  $\omega_n$ . Exprimer la longueur L en fonction de  $\lambda_n$ .
3. Quelle est l'expression d'une solution  $y_n(x, t)$  correspondant au mode de vibration d'indice  $n$ ? En déduire qu'une solution générale de l'équation de propagation de l'onde s'écrit sous la forme d'une série de Fourier :  $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \frac{n\pi vt}{L} + b_n \sin \frac{n\pi vt}{L}] \sin \frac{n\pi x}{L}$  (1)
4. Montrer que l'équation (1) peut être écrite sous la forme  $y(x, t) = F_1 \left( t - \frac{x}{v} \right) + F_2 \left( t + \frac{x}{v} \right)$
5. Justifier le terme d'onde stationnaire donné à  $y_n(x, t)$  (modes  $n$ ). Montrer qu'il existe le long de la corde des points immobiles ; en préciser le nombre et la position. En supposant qu'à l'instant  $t = 0$ , la corde coïncide avec l'axe (ox), représenter graphiquement l'état des déformations de la corde aux instants  $\frac{T_n}{4}, \frac{T_n}{2}, \frac{3T_n}{4}$  avec  $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$  dans les cas  $n=1,2,3$ .
6. Pour une corde de longueur  $L=1.22m$ , oscillant à la fréquence  $f$ , donner l'expression de la tension  $T'_n$  à appliquer pour obtenir le seul mode  $n$ . Déduire la fréquence  $f$  pour  $n = 1$  pour  $T'_1 = 2930N, \mu = 5.6510^{-3}kgm^{-1}$ .

**Solution**

1. On a l'ébranlement est régi par l'équation suivante:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 f(x)}{dx^2} g(t) - \frac{1}{V^2} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} f(x) = 0$$

$$\frac{\frac{g(t)}{d^2 g(t)} \frac{1}{V^2}}{dt^2} = \frac{\frac{f(x)}{d^2 f(x)}}{dx^2} = 0 \Rightarrow f(x) = g(t) = \alpha^2 \text{ (les variables } x \text{ et } t \text{ sont indépendantes)}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \alpha^2 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \\ \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \alpha^2 V^2 g(t) = 0 \Leftrightarrow g(t) = C \cos \alpha t + D \sin \alpha t \end{cases}$$

D'où la pulsation est :  $\omega = \alpha V \Rightarrow \alpha = k = \frac{\omega}{V}$

L'expression de la fonction spatiale est :  $f(x) = (A \cos kx + B \sin kx)$

Donc  $y(x, t) = f(x)g(t) = (A \cos kx + B \sin kx)(C \cos \omega t + D \sin \omega t)$

2. Les conditions aux limites imposent à  $\omega$  de ne pouvoir prendre qu'une série de valeurs discrètes notées  $\omega_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

$$\begin{cases} y(0,t) = 0 \Leftrightarrow f(0) = A = 0 \\ y(L,t) = 0 \Leftrightarrow f(L) = B \sin kL = B \sin \frac{\omega}{V} L = 0 \end{cases} \quad (1)$$

De l'équation (1) on déduit :

$$\sin \frac{\omega}{V} L = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{V} L = k L = n\pi$$

D'où :

$$\begin{cases} \omega = \frac{n\pi V}{L} = \omega_n \\ k = \frac{n\pi}{L} = k_n \end{cases}$$

Avec:  $n=1, 2, 3, \dots$

Donc l'expression de  $y(x, t)$  s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} y_n(x, t) &= B \sin \frac{n\pi}{L} x \left( C \cos \frac{n\pi V}{L} t + D \sin \frac{n\pi V}{L} t \right) \\ &= B_n \sin \frac{\omega_n}{V} x (C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t) \end{aligned}$$

La longueur L en fonction de  $\lambda_n$  est définie par :

$$\lambda_n = V T_n = \frac{2\pi V}{\omega_n} = \frac{2L}{n} \Rightarrow L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

3. L'expression de  $y(x, t)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} y_n(x, t) &= B_n \sin \frac{\omega_n}{V} x (C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t) \\ &= \sin \frac{\omega_n}{V} x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) = \sin \frac{n\pi}{L} x \left( a_n \cos \frac{n\pi V}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi V}{L} t \right) \end{aligned}$$

Avec :  $a_n = B_n C_n$  et  $b_n = B_n D_n$

4. La solution générale s'écrira comme une combinaison de tous les modes :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{L} x \left( a_n \cos \frac{n\pi V}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi V}{L} t \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \left( \sin \frac{n\pi V}{L} \left( t - \frac{x}{V} \right) + \sin \frac{n\pi V}{L} \left( t + \frac{x}{V} \right) \right) + \frac{b_n}{2} \left( \cos \frac{n\pi V}{L} \left( t - \frac{x}{V} \right) - \cos \frac{n\pi V}{L} \left( t + \frac{x}{V} \right) \right)$$

5.1 Le mode n s'écrit comme suit :

$$y_n(x, t) = B_n \sin \frac{\omega_n x}{V} (C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t) = E_n \sin \frac{\omega_n}{V} x \cos(\omega_n t + \varphi)$$

La solution  $y_n(x, t)$  est caractéristique d'une onde stationnaire.

Avec :

$$\omega_n = \frac{n\pi V}{L}$$

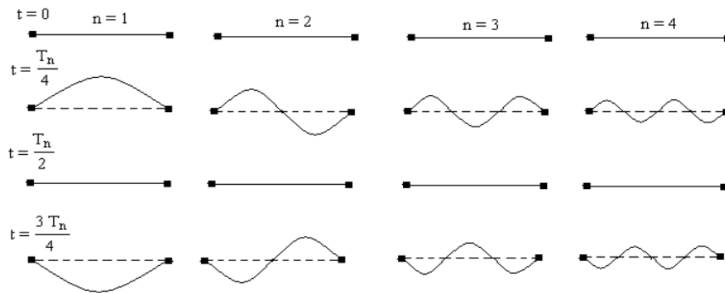
Le terme  $E_n \sin \frac{\omega_n}{V} x$  apparait comme l'amplitude des oscillations.

Les positions des nœuds qui sont en nombre (n+1) en comptant les deux extrémités, sont

défini par  $\sin \frac{\omega_n}{V} x = 0$  (des points immobiles). Elles correspondent à :

$$0 < x = m \frac{\pi V}{\omega_n} = \frac{m}{n} L = \frac{m}{2} \lambda_n < L .$$

5.2. Représentation graphique l'état des déformations de la corde aux instants  $\frac{T_n}{4}, \frac{T_n}{2}, \frac{3T_n}{4}$



6. L'expression de la tension  $T'_n$  à appliquer pour obtenir un seul mode n est :

$$\omega_n = \frac{n\pi V}{L} = 2\pi f_n$$

La vitesse de propagation le long de la corde est  $V = \sqrt{\frac{T'_n}{\mu}} = \frac{2f_n L}{n} \Rightarrow T'_n = \mu \left( \frac{2f_n L}{n} \right)^2$

D'où la tension  $T'_n = \mu \left( \frac{2f_n L}{n} \right)^2$

La fréquence pour le premier mode n=1 est :

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T'_1}{\mu}} = \frac{1}{2(1.22)} \sqrt{\frac{2930}{5.6510^{-3}}} = 294 \text{ Hz}$$

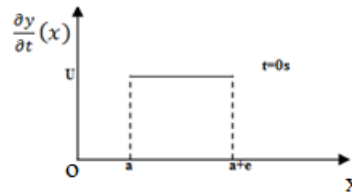
**Exercice 11**

A l'instant  $t = 0s$ , une corde de piano est immobile dans la position d'équilibre  $y(x, 0) = 0$ . Elle est frappée avec un petit marteau de largeur  $e$  ( $e \ll L$ ) situé entre les abscisses  $x = a$  et  $x = a + e$ , qui communique par le choc une impulsion initiale à la partie frappée. Dans ces conditions, la vitesse de chaque point de la corde à l'instant  $t = 0$  est modélisée par une fonction " créneau " :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = U \text{ pour } a \leq x \leq a + e$$

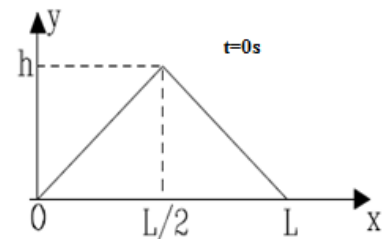
et

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 \text{ partout ailleurs.}$$



1. Déterminer les coefficients  $a_n$  et  $b_n$ .
2. Trouver une application musicale du fait que les coefficients dépendent de  $a$ . Que faut-il faire pour supprimer une harmonique, en particulier celle qui correspond à  $n = 7$ ?
3. Dans le cas  $a = \frac{L}{2}$ , quels sont les harmoniques présentes ?
4. Une corde minuscule de guitare ou de harpe est pincée et lâchée au temps  $t = 0$  de telle sorte que sa vitesse initiale soit nulle. L'endroit  $x = a$  où a lieu le pincement joue le même rôle vis à vis des harmoniques que celui de la frappe. En conséquence, et afin de limiter les calculs, nous nous limitons à un pincement en  $x = \frac{L}{2}$  si bien que la position initiale de la corde est définie par la fonction triangle :

$$\begin{cases} y(x, 0) = \frac{2h}{L}x & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ y(x, 0) = \frac{2h}{L}(L - x) & \text{pour } \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$



- 4.1 Déterminer les coefficients  $a_n$  et  $b_n$ .
- 4.2 Dédire la solution générale de  $y(x, t)$ .

**Solution**

1. Les valeurs des coefficients  $a_n$  et  $b_n$  sont exprimées selon :

La solution de l'équation de propagation de l'onde  $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$  est donnée:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left( a_n \cos \frac{n\pi v t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi v t}{L} \right)$$

A  $t = 0s$

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} = 0 \Rightarrow a_n = 0$$

D'où :  $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi Vt}{L}$

D'après les conditions initiales imposées à la vitesse de chaque point de la corde à l'instant  $t = 0s$  :

$$y'_n(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi V}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi Vt}{L}$$

A  $t = 0s$

$$\begin{aligned} y'_n(x, 0) &= \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi V}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} = U \Rightarrow b_n \frac{n\pi V}{L} = \frac{2}{L} \int_a^{a+e} U \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2U}{n\pi} \left[ \cos \frac{n\pi a}{L} - \cos \frac{n\pi(a+e)}{L} \right] \end{aligned}$$

D'où l'expression de  $b_n$  est donnée sous la forme suivante :

$$b_n = \frac{2UL}{n^2\pi^2V} \left[ \cos \frac{n\pi a}{L} - \cos \frac{n\pi(a+e)}{L} \right]$$

On utilise le développement  $\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$  l'expression précédente devient alors :

$$b_n = \frac{4UL}{n^2\pi^2V} \sin \frac{n\pi}{L} \left( a + \frac{e}{2} \right) \sin \frac{n\pi}{2L} e$$

Sachant que  $\sin \frac{n\pi}{2L} e \approx \frac{n\pi}{2L} e$  puisque  $e \ll 0$

$$b_n \approx \frac{2Ue}{n\pi V} \sin \frac{n\pi}{L} \left( a + \frac{e}{2} \right)$$

D'où la solution de  $y(x, t)$  qui s'écrit comme suit :

$$y(x, t) = \frac{2Ue}{\pi V} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{L} \left( a + \frac{e}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi Vt}{L}$$

Si  $e \ll a$  la solution  $y(x, t)$  devient alors :

$$y(x, t) = \frac{2Ue}{\pi V} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi a}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi Vt}{L}$$

2. Le choix de  $a$ , endroit où la corde est frappée, permet de choisir les harmoniques et leurs amplitudes. Pour supprimer l'harmonique  $n = 7$ , il suffit d'avoir :  $\sin \frac{7\pi a}{L} = 0 \Rightarrow \frac{7\pi a}{L} = m\pi$ ,

La valeur de  $a$  est :  $a = \frac{mL}{7}$

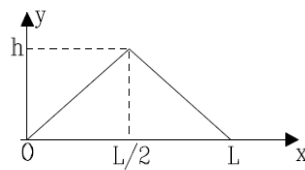
Les valeurs trouvées pour  $a$  sont :

$m = 1, 2, \dots, 6 \Rightarrow a = \frac{L}{7}, \frac{2L}{7}, \dots, \frac{6L}{7}$  correspondent aux nœuds de l'harmonique considéré.

3. Dans le cas  $a = \frac{L}{2}$ , les harmoniques présentes sont :

On a  $a = \frac{L}{2} \Rightarrow \sin \frac{n\pi}{2} = 0$  pour  $n=2, 4, 6, \dots$ . Dans ce cas les harmoniques présentes sont les harmoniques impairs  $n=1, 3, 5, \dots$

4. La corde est maintenant écartée de la position d'équilibre à l'instant  $t = 0$  comme indiqué sur la figure :



La solution de l'équation de d'Alembert est donnée:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left( a_n \cos \frac{n\pi Vt}{L} + b_n \sin \frac{n\pi Vt}{L} \right)$$

On a :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -a_n \frac{n\pi V}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi Vt}{L} + b_n \frac{n\pi V}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi Vt}{L} \right)$$

D'après les conditions initiales on a :  $\dot{y}(x, 0) = \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)_{t=0} = 0 \Rightarrow b_n = 0$

Donc la solution s'écrit:  $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi Vt}{L}$

Pour  $t=0 \Rightarrow y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \Rightarrow a_n = \frac{2}{L} \int_0^L y(x, 0) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \frac{2h}{L} x \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2}{L} \int_{L/2}^L \frac{2h(L-x)}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \frac{2h}{L} x \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2}{L} \int_{L/2}^L \frac{2h(L-x)}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \left( \frac{4hL}{n^2\pi^2} \right) \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \left( \frac{4hL}{n^2\pi^2} \right) \sin \frac{n\pi}{2}$$

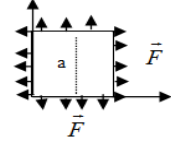
4.2 La solution générale s'écrit :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{8h}{n^2\pi^2} \right) \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi Vt}{L}$$

**Exercice 12**

Une membrane élastique de masse  $m_s$  par unité de surface, carrée de côté  $a$  est fixée tout au long de sa périphérie avec une tension  $\vec{F}$  par unité de longueur de la périphérie.

1. Ecrire l'équation de propagation.
2. Calculer la fréquence des quatre premiers modes.
3. Quelle est la dégénérescence de ces fréquences.
4. Calculer l'énergie totale de la membrane oscillant selon un mode  $(m, n)$  et l'énergie moyenne sur la surface de la membrane.



**Solution**

1. l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \sqrt{\frac{F}{m_s}} \left( \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} \right)$$

2. la fréquence des quatre premiers modes :

Les modes sont :  $u_{m,n} = A_{m,n} \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{L} y \sin(2\pi f_{m,n} t + \varphi_{m,n})$  ( $m$  et  $n \in \mathbb{N}$ )

$$f_{m,n} = \frac{\sqrt{\frac{F}{m_s}}}{2a} \sqrt{m^2 + n^2}$$

La fréquence des premiers modes sont:  $f_{0,1} = \frac{\sqrt{\frac{F}{m_s}}}{2a} = f_{1,0}, f_{1,1} = \frac{\sqrt{\frac{F}{m_s}}}{2a} \sqrt{2}, f_{0,2} = \frac{\sqrt{\frac{F}{m_s}}}{a} = f_{2,0},$

$$f_{1,2} = \frac{\sqrt{\frac{F}{m_s}}}{2a} \sqrt{5} = f_{2,1} \text{ et } f_{2,2} = \frac{\sqrt{\frac{F}{m_s}}}{2a} \sqrt{8}$$

3. La dégénérescence de ces fréquences  $f_{0,1}, f_{0,2}, f_{1,2}$  est double (2) alors que  $f_{1,1}$  et  $f_{2,2}$  ne sont pas dégénérées.

4. L'énergie totale de la membrane oscillant selon le mode  $(m, n)$  est :  $E_t = E_C + E_P$

L'énergie cinétique est :

$$E_C = \frac{1}{2} m_s (\dot{u}_{m,n})^2 = \frac{1}{2} m_s \left( A_{m,n} 2\pi f_{m,n} \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{L} y \cos(2\pi f_{m,n} t + \varphi_{m,n}) \right)^2$$

L'énergie potentielle est :

$$E_p = \frac{1}{2} F \left( \frac{\partial u_{m,n}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} F \left( \frac{\partial u_{m,n}}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{2} F \left( A_{m,n} \frac{m\pi}{L} \cos \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{L} y \sin(2\pi f_{m,n} t + \varphi_{m,n}) \right)^2 + \frac{1}{2} F \left( A_{m,n} \frac{m\pi}{L} \sin \frac{m\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{L} y \sin(2\pi f_{m,n} t + \varphi_{m,n}) \right)^2$$

Donc l'énergie totale est :

$$E_t = \frac{1}{2} m_s \left( A_{m,n} 2\pi f_{m,n} \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{L} y \cos(2\pi f_{m,n} t + \varphi_{m,n}) \right)^2 + \frac{1}{2} F \left( A_{m,n} \frac{m\pi}{L} \cos \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{L} y \sin(2\pi f_{m,n} t + \varphi_{m,n}) \right)^2 + \frac{1}{2} F \left( A_{m,n} \frac{m\pi}{L} \sin \frac{m\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{L} y \sin(2\pi f_{m,n} t + \varphi_{m,n}) \right)^2$$

L'énergie moyenne sur la surface de la membrane est :

$$\langle E_t \rangle = \langle E_C \rangle + \langle E_p \rangle = \frac{1}{2} m_s (\pi A_{m,n} f_{m,n} a)^2$$

### **Exercice 13**

Une onde électromagnétique de fréquence  $f$  égale à  $510^{14}$  Hz se propage dans le vide.

1. Déterminer sa vitesse de propagation, sa longueur d'onde et conclure à quelle partie du spectre des ondes électromagnétiques appartient-elle. En déduire sa couleur ?
2. L'onde pénètre maintenant dans un milieu d'indice de réfraction  $n = 2.5$ . Calculer sa nouvelle vitesse, sa fréquence et sa longueur d'onde? peut-on encore lui attribuer une couleur.

### **Solution**

1.1 L'onde propage dans le vide donc sa vitesse est  $c = 310^8 \text{ ms}^{-1}$ .

1.2 La longueur d'onde dans le vide est donnée par :

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{310^{+8}}{510^{+14}} = 0.610^{-6} m$$

1.3 Cette onde appartient au spectre visible et est de couleur rouge.

2. L'onde propage dans un milieu d'indice  $n = 2.5$  donc :

$$\text{La vitesse de propagation devient : } V = \frac{c}{n} = \frac{310^{+8}}{2.5} = 1.210^{+8} m s^{-1}$$

Cependant l'onde propage dans un milieu d'indice  $n=2.5$  sa fréquence  $f$  reste invariante et donc sa couleur demeure la même dans ce milieu. Par contre, sa longueur d'onde change et sa nouvelle valeur est :

$$\lambda' = \frac{c}{fn} = \frac{\lambda}{n} = \frac{0.610^{-6}}{2.5} = 0.2410^{-6} m$$

## Rappels de cours sur la réflexion et la réfraction de la lumière.

### 7.1 Introduction.

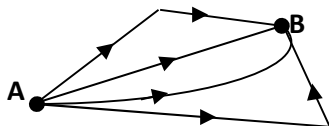
Dans le cadre de l'optique géométrique, la lumière (onde électromagnétique) est considérée comme un rayon lumineux qui se propage d'une manière rectiligne, avec une direction et un sens bien définis. Ainsi, dans un milieu transparent (pouvant être traversé par la lumière par opposition à un milieu opaque), homogène (caractéristiques optiques indépendantes de l'espace), isotrope (caractéristiques optiques indépendantes de la direction de propagation du rayon lumineux.) et caractérisé par son indice de réfraction, la lumière se propage en ligne droite. Il faut garder à l'esprit que l'optique géométrique n'est valable que si toutes les dimensions du problème, notamment la dimension des diaphragmes qui limitent les faisceaux, sont très supérieures à la longueur d'onde. Sans quoi, des phénomènes de diffraction interviennent, et la notion même de rayon lumineux n'a plus de sens.

### 7.2 Indice de réfraction d'un milieu.

La lumière se propage dans le vide avec une vitesse  $C = 3.10^8 \text{ m s}^{-1}$  alors que dans les autres milieux matériels la lumière se propage à une vitesse  $V$  inférieure à la vitesse  $C$ . Chaque milieu peut être caractérisé par un indice, noté  $n$ , dit indice de réfraction tel que  $n = C/V$  (air  $n=1.00$ , eau  $n=1.33$ , verre  $n=1.5$ , quartz  $n=1.45$ ).

### 7.3 Principes de Fermat.

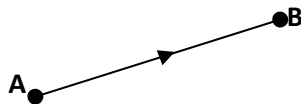
1. Soit A et B deux points dans l'espace, pour aller de A à B on peut suivre plusieurs chemins :



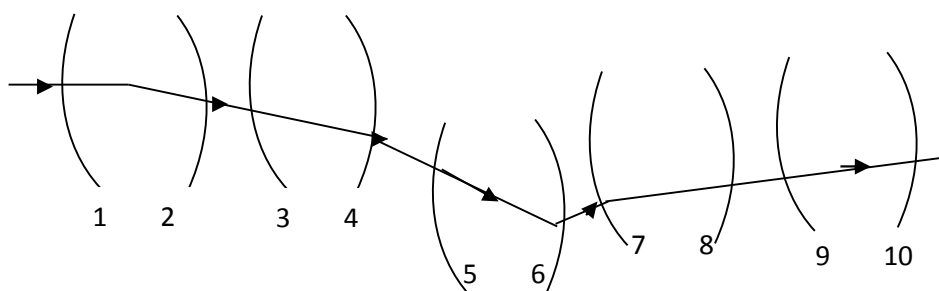
La lumière emprunte le chemin le plus court en temps.

#### 2. Principe de propagation rectiligne de la lumière.

Dans un milieu homogène, la distance la plus courte en temps entre deux points est le segment de droite reliant les deux points.



Lorsque l'espace est formé par plusieurs milieux différents, la lumière se propage en ligne brisée.



**3. Principe de retour inverse.**

Considérons un rayon lumineux issu d'un point A, traversant plusieurs milieux et aboutissant à un point B, sans subir de réflexion. Si on inverse le sens de la lumière en considérant un rayon lumineux issu du point B et aboutissant au point A, on remarque que la lumière suivra le même trajet entre ces deux points (le trajet suivi par la lumière est indépendant du sens de propagation).

**7.4 Lois de Snell-Descartes.**

Les lois de Snell-Descartes décrivent le comportement d'un rayon lumineux à l'interface de deux milieux d'indices de réfraction différents. Un rayon lumineux issu d'une source S, traverse un milieu 1 d'indice n et arrive à la surface d'un 2<sup>ème</sup> milieu n'. Sur le dioptre, le rayon lumineux se divise en deux rayons (un rayon réfléchi IR et un rayon réfracté IR').

SI : rayon incident

I : point d'incidence

i : angle d'incidence

IR : rayon réfléchi

i' : angle de réflexion

IR' : rayon réfracté

r : angle de réfraction

NN' : la normale à la surface des deux milieux

Plan SIN : plan d'incidence

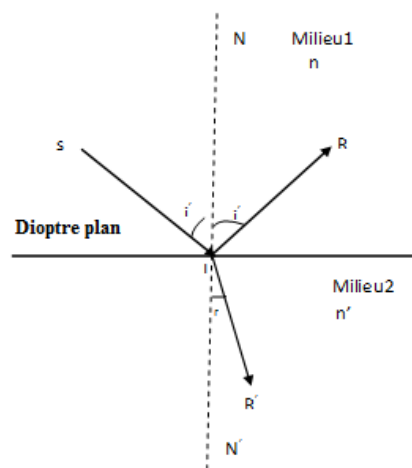


Fig. 7.1 : Comportement d'un rayon lumineux à l'interface de deux milieux différents (dioptre plan).

### 7.4.1 Lois de Snell-Descartes pour la réflexion.

#### Définition.

On dit qu'un rayon lumineux est réfléchi par une surface lorsqu'il est renvoyé par celle-ci dans une direction bien déterminée, (exemples: miroir, une surface d'eau calme, une surface métallisée, une vitrine....) lorsque la surface réfléchissante est plane, on dit qu'il s'agit d'un miroir plan.

Le rayon incident, le rayon réfléchi et la normale à la surface réfléchissante (miroir) sont situés dans un même plan, appelé plan d'incidence. L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence :

$$i' = i$$

Les directions du rayon réfléchi et du rayon incident sont donc symétriques l'une de l'autre par rapport à la normale au plan réfléchissant. Comme la montre la Fig. 7.2.

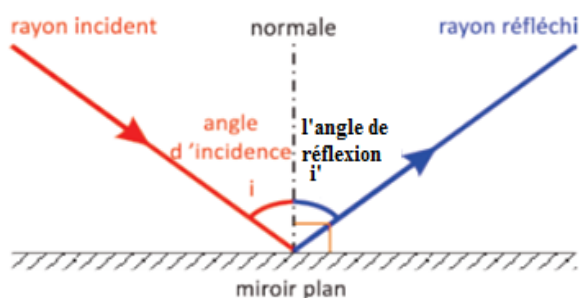


Fig. 7.2 : Réflexion par un miroir plan.

### 7.4.2 Loi de Snell-Descartes pour la réfraction.

Le rayon réfracté fait un angle  $r$  avec la normale (fig. 7.1), tel que :

$$n \sin i = n' \sin r \Rightarrow \sin i = \frac{n'}{n} \sin r$$

$$\Rightarrow \sin i = n_r \sin r$$

$$\text{avec : } n_r = \frac{n'}{n}$$

$n$ ,  $n'$  sont respectivement les indices de réfraction du milieu 1 et du milieu 2 ;  $n_r$  est l'indice relatif.

Si l'on inverse son sens de propagation, le rayon lumineux décrit la même trajectoire d'après le principe de Fermat. La réfraction de lumière se fait selon deux cas :

**1<sup>er</sup> cas : la propagation vers un milieu plus réfringent.**

Si un rayon se propage vers un milieu plus réfringent ( $n' > n$ ) après avoir traversé une surface de séparation (Fig.7.3. a), l'angle d'incidence  $i$  et l'angle de réfraction  $r$  sont liés par la relation de Snell- Descartes :

$$n \sin i = n' \sin r \Leftrightarrow \sin i = \frac{n'}{n} \sin r$$

$$\Leftrightarrow \sin i = n_r \sin r$$

avec :

$$n_r = \frac{n'}{n} > 1.$$

Ainsi l'angle  $r$  est toujours inférieur ou égal à l'angle  $i$  et le rayon incident, dévié après réfraction, se rapproche toujours de la normale à la surface de séparation. Le rayon réfracté existe toujours mais l'angle qu'il fait avec la normale peut atteindre une valeur limite qui correspond à  $90^\circ$ . C'est le cas de l'incidence rasante. Elle induit un angle de réfraction limite  $r_{\text{lim}}$ , donnée par :

$$\sin r_{\text{lim}} = \frac{n}{n'} = \frac{1}{n_r}.$$

**2<sup>eme</sup> cas : propagation vers un milieu moins réfringent.**

Si un rayon lumineux traverse une surface de séparation et se propage vers un milieu moins réfringent ( $n' < n$ ) (Fig.7.3.b), l'angle d'incidence  $i$  et l'angle de réfraction  $r$  sont liés par la loi de Snell-Descartes.

$$n \sin i = n' \sin r \text{ mais dans ce cas: } n_r = \frac{n'}{n} < 1.$$

Dans ce cas,  $r$  est toujours supérieur ou égal à  $i$  et le rayon incident dévié après réfraction, s'écarte toujours de la normale à la surface de séparation. Ainsi, le rayon réfracté n'existe plus pour un angle d'incidence supérieur à un angle limite  $i_{\text{lim}}$ , sa valeur est donnée par :

$$\sin i_{\text{lim}} = n_r,$$

avec :

$$r = 90^\circ$$

$$n_r = \frac{n'}{n}$$

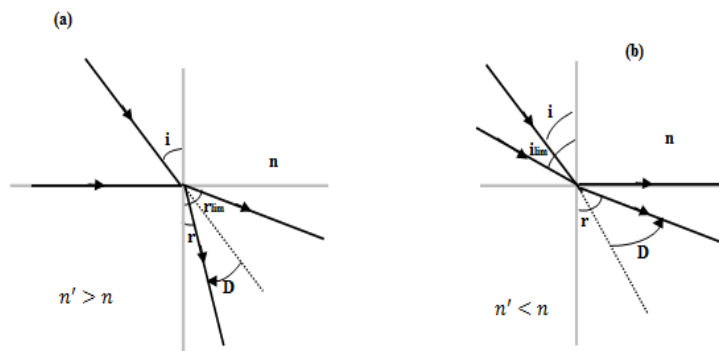


Fig. 7.3 : Réfraction dans un milieu :(a) plus réfringent, (b) moins réfringent.

**7.4.2.1 Notion de déviation.**

Quand un rayon lumineux change de milieu en traversant un dioptre, il est en général dévié. La déviation est l'angle dont il faut faire tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon réfracté. Contrairement à  $i$  ou  $r$ ,  $D$  est par définition un angle orienté avec les conventions habituelles. Quand un rayon se propage vers un milieu plus réfringent après la traversée d'un dioptre, l'angle  $D$  est orienté dans le sens des aiguilles d'une montre et il est négatif (Fig. 7.3. a). Si, au contraire, le rayon se propage vers un milieu moins réfringent, l'angle  $D$  est orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre; il est donc positif (Fig. 7.3.b).

**7.5 Loi de Kepler.**

Lorsque l'angle d'incidence  $i$  est petit, au premier ordre  $\sin i \approx i$  et  $\sin r \approx r$ . On obtient une expression approchée de la loi de Snell-Descartes appelée loi de Kepler :

$$n i = n' r \Rightarrow i = \frac{n'}{n} r$$

$$\Rightarrow i = n_r r$$

Avec :  $n_r = \frac{n'}{n}$

**7.6 Le prisme.**

**Définition.**

Un prisme est un milieu homogène, transparent, isotrope (constitué de verre, de quartz,...) et limité par deux plans non parallèles appelés faces du prisme. Leur intersection forme l'arête du prisme caractérisée par l'angle  $A$ . La base du prisme est la troisième face. Généralement, le prisme est représenté en coupe dans le plan principal qui contient les rayons incidents et

réfractés (voir fig. 7.4). Celui-ci est utilisé souvent dans les montages optiques pour séparer les longueurs d'ondes d'une source lumineuse (Ex : laser avec les cristaux doubleurs ou tripleur... (2w, 3w et 4w)).

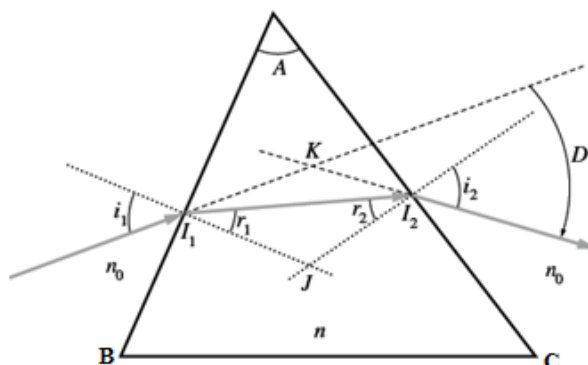


Fig. 7.4 : chemin lumineux dans le prisme.

**Formules de prisme.**

On applique la loi de Snell-Descartes sur la face AB au point I1, on obtient :

$$\sin i_1 = n_r \sin r_1$$

On applique la loi de Snell-Descartes sur la face AC au point I2, on obtient :

$$\sin i_2 = n_r \sin r_2$$

$r_1 + r_2 = A$  (L'angle de prisme), avec:  $n_r = \frac{n}{n_0}$  ( $n$  : est l'indice du prisme,  $n_0$  l'indice du vide).

**7.6.1 Calcul de la déviation.**

Soit K le point d'intersection des supports du rayon incident et du rayon émergent (fig. 7.4) ; le support de ce dernier peut se déduire du support de l'incident par une rotation autour de K, vers la base de prisme, d'un angle D appelé déviation. Pour calculer cette grandeur nous utilisons le triangle I1I2K (fig. 7.4) ; la somme des angles  $\hat{I}_1$  et  $\hat{I}_2$  est égale à l'angle extérieur D :

$$\hat{I}_1 = i_1 - r_1 \text{ et } \hat{I}_2 = i_2 - r_2.$$

Par la suite, la déviation D est donnée par :

$$D = (i_1 - r_1) + (i_2 - r_2)$$

$$D = (i_1 + i_2 - A)$$

Comme l'angle d'émergence  $i_2$  peut se calculer à partir des trois données  $A, n$  et  $i_1$ , nous constatons que la déviation dépend des deux caractéristiques  $A$  et  $n$  du prisme et de l'angle d'incidence  $i_1$ .

**Remarque:**

Imaginons que le sens de propagation de la lumière change conformément à la loi de retour inverse, le trajet de la lumière n'est pas modifié, le rayon est toujours dévié vers la base du prisme du même angle  $D$  (fig. 7.5).

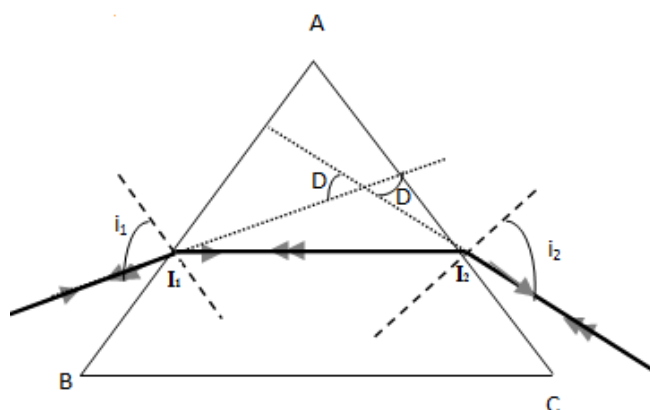


Fig. 7.5. Application de la loi du retour inverse de la lumière.

La valeur de cette déviation est encore donnée par la relation  $D = (i_1 + i_2 - A)$  dans laquelle  $i_2$  est maintenant l'angle d'incidence et  $i_1$  l'angle d'émergence.

On en déduit que la même déviation  $D$  peut être obtenue avec deux valeurs différentes de l'incidence, respectivement égales aux angles  $i_1$  et  $i_2$  relatifs à un même trajet lumineux.

**Cas d'un prisme de petit angle utilisé sous une faible incidence.**

Si l'angle d'incidence  $i_1$  est petit, l'angle de réfraction est encore plus petit. Ainsi, la formule de Descartes peut se transformer en celle de Kepler :

$$i_1 = n_r \cdot r_1$$

$$i_2 = n_r \cdot r_2$$

avec :

$$n_r = \frac{n}{n_0}$$

D'autre part, si  $A$  est petit, l'angle  $r_2$  est donné :  $r_2 = A - r_1$ ,

D'où la nouvelle expression de la déviation s'écrit:

$$\begin{aligned}
 D &= i_1 + i_2 - A \approx n_r r_1 + n_r r_2 - A \\
 &\approx n_r (r_1 + r_2) - A \\
 &\approx (n_r - 1)A
 \end{aligned}$$

Ainsi, dans ce cas particulier, la déviation est indépendante de l'angle d'incidence et elle est proportionnelle à l'angle de prisme. Celle-ci est évidemment faible puisque A est petit.

### 7.6.2 Déviation minimale.

La déviation D passe par un minimum ( $D = D_m$ ) lorsque l'angle d'incidence  $i_1$  est égal à l'angle d'émergence  $i_2$  ( $i_1 = i_2$ ). Cette égalité entraîne celle des angles  $r_1$  et  $r_2$ , d'où :

$$A = 2r_1 = 2r_2 \Rightarrow r_1 = r_2 = \frac{A}{2};$$

Donc, la déviation minimum  $D_m$  est :

$$D_m = 2i_1 - A ; i_1 = i_2 = \frac{A + D_m}{2} = i$$

Il s'ensuit que l'on peut relier la déviation minimale aux caractéristique A et  $n_r$  du prisme grâce à la relation suivante :

$$\sin i_1 = n_r \sin r_1$$

$$n_r = \frac{\sin i_1}{\sin r_1} = \frac{n}{n_0}$$

l'expression de l'indice relatif s'écrit comme suit :

$$n_r = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{n}{n_0}$$

### 7.6.3 Conditions d'émergence.

#### 7.6.3.1 Condition à imposer à l'angle de prisme.

A l'entrée dans le prisme (milieu plus réfringent que l'air), la réfraction à toujours eu lieu et on a nécessairement :

$$r_1 \leq \lambda \tag{1}$$

Avec :  $\lambda$  c'est angle limite

Dans ce cas, la condition d'émergence est :

$$r_2 \leq \lambda \tag{2}$$

Les équations (1)+ (2) donnent :

$$r_1 + r_2 \leq 2\lambda \Leftrightarrow A \leq 2\lambda$$

Pour que certains rayons puissent traverser le prisme, il faut que l'angle du prisme soit inférieur ou égal au double de l'angle limite.

### 7.6.3.2 Condition à imposer à l'angle d'incidence.

La condition relative à l'angle de prisme étant supposée satisfaite, cherchons les valeurs entre lesquelles doit être comprise l'incidence  $i_1$  pour que le rayon lumineux traverse le prisme. Commençons par calculer l'incidence  $i_0$  correspondant à l'émergence rasante ( $i_2=90^\circ$ ) ; à cette fin, il est commode de suivre le trajet lumineux dans le sens inverse de propagation de la lumière (Fig. 7. 6).

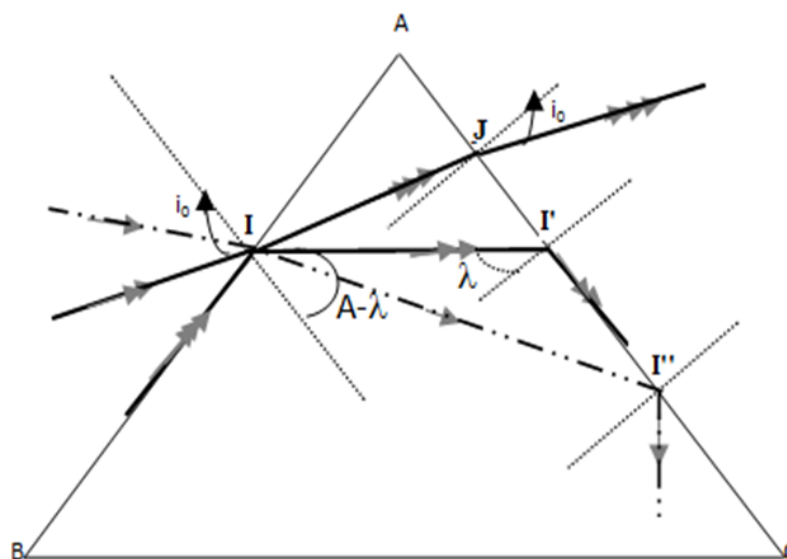


Fig. 7. 6. la condition d'émergence.

Au point  $I'$  : l'angle d'émergence  $i_2 = 90^\circ$  correspond à un angle d'incidence  $r_2$  égale à l'angle limite  $\lambda$ .

Par la suite, en I on a  $r_1 = A - r_2 = A - \lambda$ , d'où la valeur de  $i_0$ , est donnée par la relation :

$$\sin i_0 = n_r \sin(A - \lambda).$$

Pour toute incidence inférieure à  $i_0$ , le rayon intérieur (au point  $I'$ ) est plus incliné vers la base et il frappe la seconde face sous une incidence  $r_2$  supérieure à l'angle limite  $\lambda$  et par la suite, celui-ci subit la réflexion totale.

Si l'incidence sur la première face du prisme est supérieure à  $i_0$ , l'incidence  $r_2$  sur la seconde face est inférieure à l'angle limite  $\lambda$  de prisme et supérieure à  $i_0$ . Dans ce cas, la condition d'émergence est satisfaite et le rayon traverse le prisme.

Pour la plus grande valeur d'angle d'incidence  $i_1 = 90^\circ$  correspond la plus faible valeur de l'angle d'émergence  $i_2 = i_0$ .

## Applications

### Exercice 1

Le tableau ci-dessous donne les longueurs d'onde de deux radiations monochromatiques dans le vide et les indices correspondants pour deux types de verre différents.

Couleur	$\lambda_0$ (nm)	n (crown)	n (flint)
rouge	656.3	1.504	1.612
bleu	486.1	1.521	1.671

1. Calculer les fréquences de ces ondes lumineuses. Dépendent-elles de l'indice optique du milieu? On prendra  $C = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ .
2. Calculer les célérités et les longueurs d'onde de la radiation rouge dans les deux verres.
3. a. Un rayon de lumière blanche arrive sur un dioptre plan air-verre, sous l'incidence  $60^\circ$ . L'indice de l'air est pris égal à 1. Rappeler les lois de Descartes relatives à la réfraction de la lumière.
3. b. Calculer l'angle que fait le rayon bleu avec le rayon rouge pour un verre crown, puis pour un verre flint.
3. c. Quel est le verre le plus dispersif ?

### **Solution**

1. Les fréquences de ces ondes lumineuses :

L'expression de la fréquence en fonction de la longueur d'onde est donnée par :  $f = \frac{c}{\lambda}$

$$\text{La fréquence rouge } f_R = \frac{c}{\lambda_{0R}} = \frac{310^8}{656.310^9} = 4.5710^{14} \text{ Hz}$$

$$\text{La fréquence Bleu } f_B = \frac{c}{\lambda_{0B}} = \frac{310^{+8}}{486.110^{-9}} = 6.1710^{+14} \text{ Hz}$$

Nous remarquons que la fréquence de ces ondes lumineuses ne dépend pas de l'indice du milieu.

2. Les célérités et les longueurs d'onde de la radiation rouge dans les deux verres :

on a l'expression de la vitesse de propagation de la lumière dans un milieu différent du vide

$$\text{est } V = \frac{c}{n}$$

$$\text{La longueur d'onde est : } \lambda = \frac{V}{f} = \frac{c}{nf} = \frac{\lambda_0}{n}$$

Dans le verre crown  $n=1.504$

$$V = \frac{c}{n} = \frac{310^{+8}}{1.504} = 1.9910^{+8} \text{ ms}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{656.310^{-9}}{1.504} = 436.36 \text{ nm}$$

Dans le verre flint  $n=1.612$

$$V = \frac{c}{n} = \frac{310^{+8}}{1.612} = 1.8610^{+8} \text{ ms}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{656.310^{-9}}{1.504} = 407.1 \text{ nm}$$

3. a. La loi de Descartes relatives à la réfraction de la lumière :  $n \sin i = n' \sin r$

3. b. 1. L'angle que fait le rayon bleu avec le rayon rouge pour un verre crown :

$$\begin{aligned} n \sin i &= n' \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{n}{n'} \sin i \\ &\Rightarrow r = \arcsin\left(\frac{n}{n'} \sin i\right) \end{aligned}$$

L'angle réfracté pour le rouge est :

$$\begin{aligned} r &= \arcsin\left(\frac{n}{n'} \sin i\right) \\ r_R &= \arcsin\left(\frac{1}{1.504} \sin 60^\circ\right) = 35.16^\circ \end{aligned}$$

L'angle réfracté pour le bleu est :

$$r_B = \arcsin\left(\frac{1}{1.521} \sin 60^\circ\right) = 34.71^\circ$$

D'où en déduit que le rayon bleu est plus dévié que le rayon rouge. L'angle entre le rayon rouge et le rayon bleu vaut  $\Delta r = 0.45^\circ$ .

3. b. 2. L'angle que fait le rayon bleu avec le rayon rouge pour un verre flint :

L'angle réfracté pour le rouge est :

$$r_R = \arcsin\left(\frac{1}{1.612} \sin 60^\circ\right) = 32.5^\circ$$

L'angle réfracté pour le bleu est :

$$r_B = \arcsin\left(\frac{1}{1.671} \sin 60^\circ\right) = 31.22^\circ$$

D'où en déduit que le rayon bleu est plus dévié que le rayon rouge. L'angle entre le rayon rouge et le rayon bleu vaut  $\Delta r = 1.28^\circ$ .

3. c. Le verre flint est plus dispersif que le verre crown car l'angle entre les deux rayons est plus important.

## Exercice 2

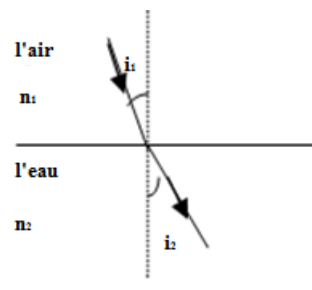
Un rayon lumineux monochromatique passe de l'air à l'eau. Reproduire un schéma en indiquant les angles d'incidence et de réfraction, en dessinant la normale à la surface de séparation des deux milieux.

2. Ecrire l'expression de la loi de Snell-Descartes.

3. Calculer l'angle de réfraction si l'angle d'incidence vaut  $45^\circ$  et sachant que l'indice de l'eau vaut 1.33 et que l'indice de l'air vaut 1.00.

## Solution

1. Le schéma indiquant les angles d'incidence et de réfraction : avec  $i_1$  l'angle d'incidence et  $i_2$  l'angle de réfraction.



2. L'expression de la loi de Snell-Descartes

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

3. L'angle de réfraction si l'angle d'incidence vaut  $45^\circ$  est donné comme suit :

D'après la loi de Snell-Descartes, l'angle de réfraction est :

$$\sin i_2 = \frac{n_1 \sin i_1}{n_2}$$

$$\sin i_2 = \frac{1 \sin 45}{1.33} = 0.533 \Rightarrow i_2 = 32^\circ$$

### Exercice 3

L'un des rayons d'un faisceau de lumière se propage dans l'air et pénètre dans un diamant d'indice de réfraction 2.43.

1. Écrire la loi de Snell-Descartes.
2. Calculer l'angle d'incidence permettant d'obtenir un angle de réfraction égal à  $20^\circ$ .
3. Calculer l'angle de réfraction limite pour un rayon passant de l'air (indice 1.00) dans le diamant (indice 2.43).
4. Calculer l'angle de réfraction limite pour un rayon passant de l'air vers l'oxygène liquide (indice 1.20).

### **Solution**

1. La loi de Snell-Descartes s'écrit comme suit :

$$n_{\text{air}} \sin i_1 = n_{\text{diamant}} \sin i_2$$

$$\sin i_1 = 2.43 \sin i_2$$

2. L'angle d'incidence permettant d'obtenir un angle de réfraction de  $20^\circ$  :

$$\text{sachant que : } \sin i_1 = 2.43 \sin i_2$$

$$\sin i_1 = 2.43 \sin 20^\circ$$

$$\sin i_1 = 0.83 \Rightarrow i_1 = 56.3^\circ$$

3. L'angle de réfraction limite pour un rayon passant de l'air vers le diamant d'indice 2.43

$$n_{\text{air}} < n_{\text{diamant}} \Rightarrow i_1 = 90^\circ, i_2 = L = \text{angle limite.}$$

Dans ce cas la loi de Snell-Descartes s'écrit comme suit:

$$n_{\text{air}} \sin 90 = n_{\text{diamant}} \sin L \Rightarrow \sin L = \frac{n_{\text{air}} \sin 90}{n_{\text{diamant}}}$$

$$\Rightarrow \sin L = \frac{1 \sin 90}{2.43}$$

$$\Rightarrow \sin L = 0.41$$

D'où l'angle de réfraction limite :  $L = \sin^{-1}(0.41) \Rightarrow L = 24.3^\circ$

4. L'angle de réfraction limite pour un rayon passant de l'air d'indice 1.00 vers l'oxygène liquide d'indice 1.2 est :

$$n_{\text{air}} \sin 90 = n_{\text{Oxygène liquide}} \sin L \Rightarrow \sin L = \frac{n_{\text{air}} \sin 90}{n_{\text{Oxygène liquide}}}$$

$$\Rightarrow \sin L = \frac{1 \sin 90}{1.2}$$

$$\Rightarrow \sin L = 0.833$$

Donc, la valeur de L est :  $L = \sin^{-1}(0.833) \Rightarrow L = 56.5^\circ$

### Exercice 4

Les rayons de soleil viennent frapper à la surface d'un lac sous une incidence égale à  $90^\circ$ . On assimile l'air au vide d'indice égal à 1 et on prend l'indice de l'eau  $n = 4/3$ . Un faisceau de rayons étroit est reçu par un poisson.

1. Quelle est pour un poisson dans le lac la direction apparente du soleil qui se couche ?
2. Existe-t-il une position du soleil pour laquelle la direction apparente pour le poisson coïncide avec sa direction réelle ?

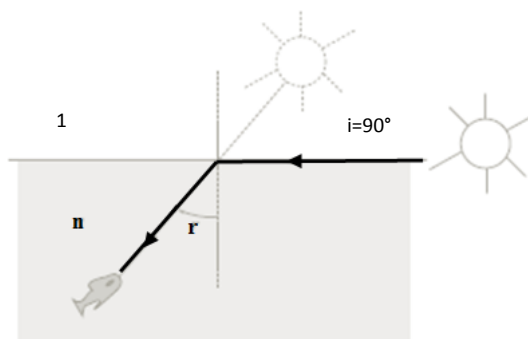
### Solution

1. Le faisceau parallèle rasant est réfracté dans l'eau. L'angle de réfraction  $r$  satisfait la relation de Descartes :

$$n_{\text{air}} \sin i = n_{\text{eau}} \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{n_{\text{air}} \sin 90}{n_{\text{eau}}}$$

$$\Rightarrow \sin r = \frac{3 \sin 90}{4}$$

$$\Rightarrow \sin r = 0.75 \Rightarrow r = 48.6^\circ$$



Pour le poisson, le faisceau parallèle semble provenir d'une direction faisant un angle  $r = 48.6^\circ$  avec la verticale.

2. Le poisson voit le soleil dans la direction réelle si  $i = r$ ,  $i$  étant l'angle d'incidence des rayons issus du soleil. Avec  $\sin i = n \sin r$ , cette condition n'est vérifiée que si  $i = r = 0^\circ$ .

**Exercice 5**

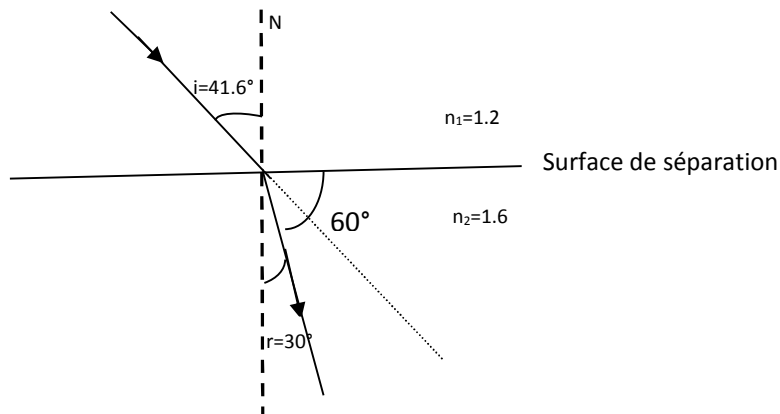
Un rayon lumineux tombe sur la surface de séparation S de deux milieux d'indices respectifs  $n_1=1.2$  et  $n_2=1.6$ . Celui-ci, donne un rayon réfracté qui forme un angle de  $60^\circ$  avec la surface.

1. Calculer l'angle d'incidence et représenter le rayon incident correspondant à ce rayon réfracté.
2. Un rayon lumineux passe de l'air  $n=1$  vers l'eau  $n=1.33$ , l'angle d'incidence est de  $65^\circ$  calculer l'angle de réfraction.
3. Calculer l'angle limite pour la surface de séparation eau/air ; que se passera-t il si l'angle d'incidence est égale à  $50^\circ$ , le rayon passe de l'eau vers l'air.

**Solution**

A tout rayon incident correspond un rayon réfléchi du même côté du dioptre et dans l'autre milieu un rayon réfracté. Le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont tous les deux dans le même coté de la normale au dioptre.

Pour un rayon réfracté, qui forme un angle de  $60^\circ$  avec la surface S, correspond la valeur de l'angle de réfraction :  $r = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$



D'après la loi de Snell-Descartes :

$$\begin{aligned}
 n_1 \sin i &= n_2 \sin r \Rightarrow \sin i = \frac{n_2 \sin r}{n_1} \\
 &\Rightarrow \sin i = \frac{1.6 \sin 30}{1.2} \\
 &\Rightarrow \sin i = 0.667 \Rightarrow i = 41.8^\circ
 \end{aligned}$$

2. L'angle réfracté est:

On a un rayon lumineux qui passe de l'air  $n=1.00$  vers l'eau  $n=1.33$  avec un angle d'incidence  $65^\circ$ .

D'après la loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{n_1 \sin 65}{n_2}$$

$$\Rightarrow \sin r = \frac{1 \sin 65}{1.33}$$

$$\Rightarrow \sin r = 0.68 \Rightarrow r = 42.9^\circ$$

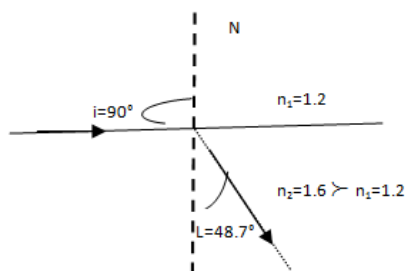
### 3.1 L'angle limite de réfraction L

C'est l'angle de réfraction maximum correspondant à un angle d'incidence maximum de  $90^\circ$

Dans ce cas la loi de Snell-Descartes s'écrit :

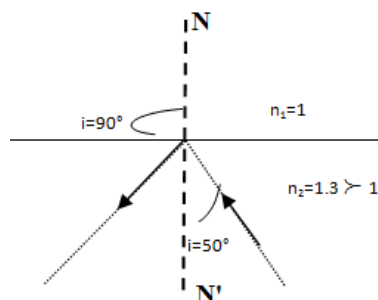
$$n_1 \sin 90 = n_2 \sin L \Rightarrow \sin L = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\sin L = \frac{1}{1.33} = 0,75 \Rightarrow L = 48.7^\circ$$



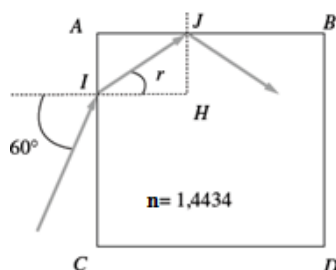
L'angle limite de réfraction L se trouve toujours dans le milieu le plus réfringent (de plus grand indice n).

3.2 L'angle d'incidence est égal à  $50^\circ$ , le rayon passant de l'eau vers l'air (dans ce cas  $n_2$  est le plus grand des deux indices), l'angle d'incidence est supérieur à l'angle limite, le rayon réfracté n'existe plus. La lumière subit alors une réflexion totale sur la surface réfringente.



**Exercice 6**

On considère le rayon incident en I sur un cube ABCD de verre d'arête 4 cm.



1. Déterminer successivement les points de réflexion du rayon sur les différentes faces du cube.
2. Par quelle face va-t-il sortir. On donne  $AB = 4$  cm et  $AI = 1$  cm.

**Solution**

D'après la loi de Snell-Descartes :

$$n_{\text{air}} \sin i = n_{\text{verre}} \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{n_{\text{air}} \sin 60}{n_{\text{verre}}}$$

$$\Rightarrow \sin r = \frac{1 \sin 60}{1.4434}$$

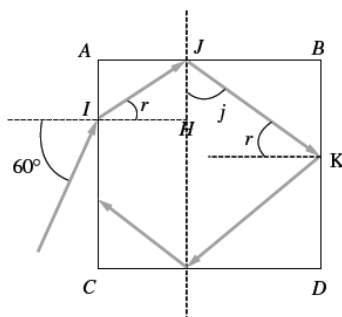
$$\Rightarrow \sin r = 0.6 \Rightarrow r = 36.6^\circ$$

$\sin 60 = 1.4434 \sin r$ ,  $\sin r = 0.6$ ,  $\cos r = 0.8$  et  $\tan r = 0.75 \Rightarrow r = 36.869^\circ$ .

Au point J on a :

$$\hat{j} = 90^\circ - r = 90^\circ - 36.6^\circ = 53.4^\circ, \text{ donc } \sin j = 0.8$$

$$\tan r = \frac{JH}{HI} \Rightarrow HI = \frac{JH}{\tan r} = \frac{1}{0.75} = 1.33 \text{ cm}.$$



$$\begin{aligned}
 AB &= AJ + JB \Rightarrow JB = AB - AJ \\
 &\Rightarrow JB = AB - IH \\
 &\Rightarrow JB = 4 - 1.33 \\
 &\Rightarrow JB = 2.67\text{cm}
 \end{aligned}$$

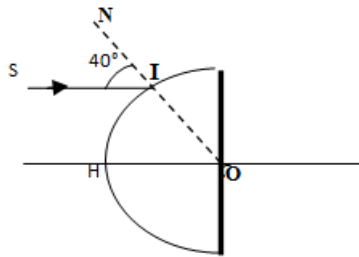
Le rayon arrive en  $K$  sur la face  $BD$  avec un angle égal à  $r$ .

$\tan r = \frac{BK}{BJ} \Rightarrow BK = BJ \tan r = 2.67 * 0.75 = 2.00\text{cm}$ . Dans ce cas, il y a une symétrie complète.

Le rayon ressort sur la face  $AC$ , à 1 cm de  $C$  avec un angle d'émergence de  $60^\circ$ . Une partie du rayon  $JK$  ressort en  $K$  avec un angle d'émergence de  $60^\circ$ .

**Exercice 7**

Une demi-boule de plexiglas sphérique de centre  $O$  et de rayon  $R$ , transparente et d'indice 1.49 reçoit sur sa face sphérique un rayon lumineux  $SI$  parallèle à son axe de symétrie  $HO$  sous un angle d'incidence  $i = 40^\circ$ .



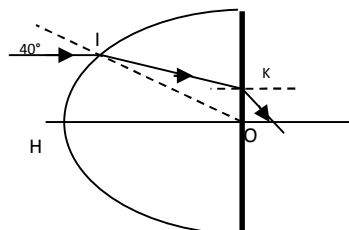
Construire le chemin optique du rayon lumineux. Ce rayon émerge-t-il de la demi -boule?

**Solution**

Soit  $r_1$  l'angle correspondant au rayon réfracté en  $I$ . d'après la loi de Descartes :

$$\begin{aligned}
 n_{\text{air}} \sin i &= n_{\text{plx}} \sin r_1 \Rightarrow \sin r_1 = \frac{n_{\text{air}} \sin i}{n_{\text{plx}}} \\
 &\Rightarrow \sin r_1 = \frac{1 \sin 40}{1.49} \\
 &\Rightarrow \sin r_1 = 0.43 \\
 &\Rightarrow r_1 = 25.5^\circ
 \end{aligned}$$

Sur la face plane de la demi-boule, le rayon arrive en  $k$  avec un angle d'incidence  $r_2$   
 $i = r_2 + r_1 \Rightarrow r_2 = i - r_1 = 40 - 25.5 = 14.5^\circ$



Cherchons l'angle critique d'incidence  $\lambda$  qui vérifie dans ce cas :

$$n_{\text{air}} \sin 90^\circ = n_{\text{plx}} \sin \lambda \Rightarrow \sin \lambda = \frac{n_{\text{air}} \sin 90^\circ}{n_{\text{plx}}}$$

$$\Rightarrow \sin \lambda = \frac{1 \sin 90^\circ}{1.49}$$

$$\Rightarrow \sin \lambda = 0.671$$

$$\Rightarrow \lambda = 42.15^\circ$$

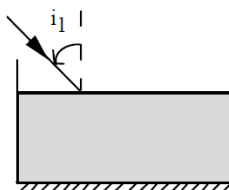
D'où  $\lambda = 42.15^\circ$ . Or  $r_2 < \lambda$ , il y a donc réfraction en k et le rayon émerge de la face plane de la demi-boule.

### Exercice 8

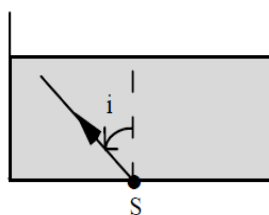
On considère un bassin rempli d'un liquide d'indice  $n = 4/3$  et de hauteur  $h = 1.5$  m. On place au fond du bassin un miroir plan horizontal. Soit un rayon lumineux incident faisant un angle d'incidence  $i_1 = 30^\circ$  à la surface de l'eau.

1.1. Déterminer l'angle de réfraction  $i_2$ .

1.2. Tracer le chemin optique du rayon lumineux qui émerge du bassin après réflexion sur le miroir. En déduire la déviation  $D$  du rayon lumineux.



2. On place au centre de la base du bassin une source lumineuse monochromatique S.



2.1 On observe à la surface de l'eau un disque lumineux. Expliquer le phénomène. Calculer le rayon  $R$  du disque.

2.2 Tracer la marche de deux rayons lumineux issus de la source correspondant aux angles d'incidence  $j_1 = 30^\circ$  et  $j_2 = 60^\circ$ .

### **Solution**

1.1 L'angle de réfraction  $i_2$

D'après la loi de la réfraction :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

D'où:

$$\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$$

$$\sin i_2 = \frac{1}{1.33} \sin 30^\circ$$

$$\sin i_2 = 0.375 \Rightarrow i_2 = 22^\circ$$

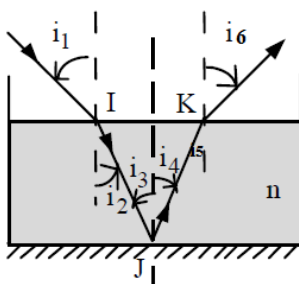
D'après la loi de la réflexion,

Au point J :  $i_2 = 22^\circ = i_3 = -i_4 = i_5$

Au point K, on a :  $n \sin i_5 = \sin i_6$

D'où  $i_6 = 29.93^\circ$ .

1.2.1 Construction du trajet optique du rayon lumineux émergent du bassin après réflexion sur le miroir



1.2.2 La déviation du rayon lumineux est donnée par la somme des déviations aux points I, J et K

$$D = DI + DJ + DK$$

Avec :

$$DI = i_2 - i_1 = 22^\circ - 30^\circ = -8^\circ$$

$$DJ = 180^\circ - 2 i_3 = 180^\circ - 2 (44^\circ) = 136^\circ$$

$$DK = i_5 - i_6 = 22^\circ - 29.93^\circ = -7.93^\circ$$

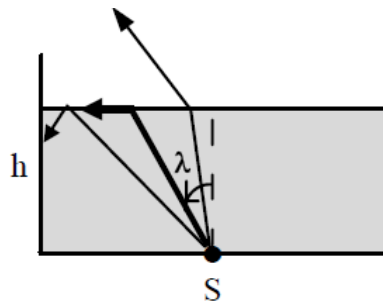
D'où la déviation est:

$$D = 120.07^\circ.$$

2.1 Le rayon lumineux issu de S passe d'un milieu d'indice n à un milieu d'indice inférieur égal à 1 ; il existe un rayon réfracté si et seulement si  $i \leq \lambda$  où  $\lambda$  est l'angle limite d'incidence.

$$n \sin \lambda = \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \lambda = \frac{1}{n}$$

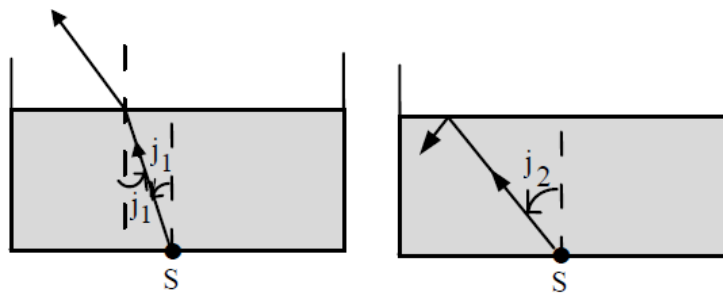
$$\sin \lambda = \frac{3}{4} \Rightarrow \lambda = 48.6^\circ$$



Les rayons issus de S, qui ont un angle d'incidence inférieur à  $\lambda=48.6^\circ$ , traversent le dioptre. En revanche, les rayons issus de S ayant un angle d'incidence supérieur à  $\lambda=48.6^\circ$ , subissent une réflexion totale à la surface du dioptre. Ceci explique l'apparition d'un disque lumineux de rayon R.

Le rayon de disque est :

$$R = h \sin \lambda = 1.5 \sin 48.6^\circ = 1.125 \text{ m}$$



Un angle d'incidence  $j_1 = 30^\circ$  inférieur à  $\lambda=48.6^\circ$  :

La loi de réfraction s'écrit :

$$n \sin j_1 = n_{air} \sin j_1' \Rightarrow \sin j_1' = \frac{n \sin j_1}{n_{air}}$$

$$\Rightarrow \sin j_1' = \frac{\frac{4}{3} \sin 30}{1} = \frac{2}{3} = 0.666$$

$$j_1' = 41.8^\circ$$

Un angle d'incidence  $j_2 = 60^\circ$  supérieur à l'angle limite  $\lambda$ , donc il y a réflexion totale à la surface du dioptre ( $j_2 > \lambda$ ).

**Exercice 9**

Un prisme de verre crown d'indice 1.52 et de petit angle  $A=4^\circ$ , placé dans l'air est éclairé par un faisceau de lumière parallèle sous un faible angle d'incidence i.

1. Montrer que le faisceau qui émerge fait avec le faisceau incident un angle  $D = (n_{verre} - 1) A$ .

2. Calculer la déviation subie par deux rayons qui font à l'entrée l'angle d'incidence  $i = 3^\circ$ , l'un au-dessous, l'autre au-dessus de la normale.

### Solution

D'après la loi de Snell-Descartes on a :

$$n_{\text{air}} \sin i_1 = n_{\text{verre}} \sin r_1$$

$$n_{\text{verre}} \sin r_2 = n_{\text{air}} \sin i_2$$

Pour des angles petits, on a  $\sin i_1 \approx i_1$ ,  $\sin r_1 \approx r_1$ ,  $\sin r_2 \approx r_2$  et  $\sin i_2 \approx i_2$  alors les deux équations précédentes deviennent :

$$n_{\text{air}} i_1 = n_{\text{verre}} r_1$$

$$n_{\text{verre}} r_2 = n_{\text{air}} i_2$$

D'où la déviation D

$$D = i_1 + i_2 - A \text{ et } A = r_1 + r_2$$

Pour des angles petits, la déviation est :

$$D = n_{\text{verre}} r_1 + n_{\text{verre}} r_2 - A$$

$$D = n_{\text{verre}} (r_1 + r_2) - A$$

$$D = (n_{\text{verre}} - 1)A$$

2. La déviation est la même dans les deux cas :

la déviation de prisme est :

$$D = (n_{\text{verre}} - 1)A$$

$$D = (1.5 - 1)4 = 2^\circ$$

On peut retrouver ce résultat en suivant le chemin de chacun des rayons et en calculant les différents angles. D'après la loi de Kepler :

- le premier rayon, on a l'angle d'incidence  $i = + 3^\circ$

$$n_{\text{air}} i = n_{\text{verre}} r_1 \Rightarrow r_1 = \frac{n_{\text{air}} i}{n_{\text{verre}}}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{3}{1.5} = 2^\circ$$

On a :

$$r_1 + r_2 = A \Rightarrow r_2 = A - r_1$$

$$\Rightarrow r_2 = 4 - 2 = 2^\circ$$

La loi de Kepler sur la deuxième face s'écrit alors :

$$n_{\text{air}} i_2 = n_{\text{verre}} r_2 \Rightarrow i_2 = \frac{n_{\text{verre}} r_2}{n_{\text{air}}}$$

$$\Rightarrow i_2 = \frac{(1.5)2}{1} = 3^\circ$$

D'où la déviation :

$$D = i + i' - A$$

$$D = 3 + 3 - 4 = 2^\circ$$

- Le deuxième rayon, on a l'angle d'incidence  $i = -3^\circ$

$$n_{\text{air}} i = n_{\text{verre}} r_1 \Rightarrow r_1 = \frac{n_{\text{air}} i}{n_{\text{verre}}}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{-3}{1.5} = -2^\circ$$

On a :

$$r_1 + r_2 = A \Rightarrow r_2 = A - r_1$$

$$\Rightarrow r_2 = 4 + 2 = 6^\circ$$

La loi de Kepler sur la deuxième face s'écrit :

$$n_{\text{air}} i_2 = n_{\text{verre}} r_2 \Rightarrow i_2 = \frac{n_{\text{verre}} r_2}{n_{\text{air}}}$$

$$\Rightarrow i_2 = \frac{1.5 * 6}{1} = 9^\circ$$

D'où la nouvelle déviation :

$$D = i + i' - A$$

$$D = -3 + 9 - 4 = 2^\circ$$

### **Exercice 10**

Soit un prisme de verre flint d'angle  $A$  et d'indice de réfraction  $n = 1.60$ .

1. Que vaut cet angle si la lumière émerge par sa face de sortie ?
2. On place ce prisme dans un liquide d'indice de réfraction 1.33, que devient cet angle si la lumière émerge par sa face de sortie ?

### **Solution**

1. Le prisme dans l'air :

Pour qu'un rayon émerge par la face de sortie du prisme, l'angle d'incidence  $r_2$  sur la deuxième face ne doit pas dépasser l'angle limite  $r_{2\text{lim}}$ , dans ce cas la loi de Descartes sur la deuxième face s'écrit :

$$n_{\text{verre}} \sin r_{2\text{lim}} = n_{\text{air}} * \sin 90^\circ \Rightarrow r_{2\text{lim}} = \text{Arc sin}\left(\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{verre}}}\right)$$

$$r_{2\text{lim}} = \text{Arc sin}\left(\frac{1}{1.60}\right) = 38.7^\circ$$

La valeur maximale de l'angle de réfraction  $r_1$  sur la face d'entrée du prisme est telle que  $r_{1\text{lim}} = r_{2\text{lim}} = 38.7^\circ$ . Cela correspond à une incidence rasante sur la face d'entrée du prisme.

On a l'angle au sommet du prisme :

$A = r_1 + r_2$ , donc, sa valeur limite est donnée par :

$$A_{\text{lim}} = r_{1\text{lim}} + r_{2\text{lim}} = 2r_{1\text{lim}} = 77.4^\circ.$$

On peut écrire que  $A < A_{\text{lim}}$  avec  $A_{\text{lim}} = 2 \arcsin\left(\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{verre}}}\right)$ , ce qui revient à dire que

$\left(\frac{A}{2}\right) < \arcsin\left(\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{verre}}}\right)$  est la condition d'émergence d'un rayon par la deuxième face d'un prisme.

## 2. Le prisme dans un liquide d'indice de réfraction 1.33

D'après la loi de Descartes sur la deuxième face de prisme plongée dans le liquide on écrit :

$$n_{\text{verre}} \sin r_{2\text{lim}} = n_{\text{liquide}} * \sin 90^\circ \Rightarrow r_{2\text{lim}} = \text{Arc sin}\left(\frac{n_{\text{liquide}}}{n_{\text{verre}}}\right)$$

$$r_{2\text{lim}} = \text{Arc sin}\left(\frac{1.33}{1.60}\right) = 56.23^\circ$$

La valeur maximale de l'angle de réfraction  $r_1$ , sur la face d'entrée du prisme est telle que  $r_{1\text{lim}} = r_{2\text{lim}} = 56.23^\circ$ . Ceci correspond à une incidence rasante sur la face d'entrée du prisme.

On a l'angle au sommet du prisme :

$A = r_1 + r_2$ , donc sa valeur limite est donnée par :

$$A_{\text{lim}} = r_{1\text{lim}} + r_{2\text{lim}} = 2r_{1\text{lim}}$$

## Exercice 11

Soit un prisme ABC rectangle en B d'indice  $n = 1.5$ . Les angles en A et C valent respectivement  $30^\circ$  et  $60^\circ$ .

1. Décrire le chemin optique d'un rayon lumineux normal à la face AB.
2. Calculer la déviation de la lumière.
3. Tracer le trajet optique du rayon lumineux normal à la face BC.

**Solution**

1. Rayon incident normal à la face AB

Au point I, le rayon incident est parallèle à la normale (L'angle d'incidence  $i=0^\circ$ ) donc, c'est une incidence normale, dans ce cas le rayon n'est pas réfracté.

Au point J : l'angle d'incidence  $i_1 = A = 30^\circ$

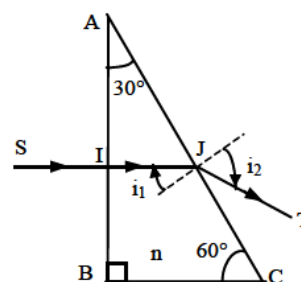
D'où la loi de Descartes sur la deuxième face AC :

$$n_{\text{verre}} \sin i_1 = n_{\text{air}} \sin i_2 \Rightarrow i_2 = \text{Arc sin}\left(\frac{n_{\text{verre}} \sin i_1}{n_{\text{air}}}\right)$$

$$i_2 = \text{Arc sin}\left(\frac{1.5 \sin 30}{1}\right)$$

$$i_2 = 48.6^\circ$$

Donc, le rayon émerge par la face AC avec un angle  $i_2 = 48.6^\circ$



2. La déviation de la lumière

D'après l'expression de la déviation D, on a

$$D = i + i_2 - A$$

$$D = 0 + 48.6 - 30$$

$$D = 18.6^\circ$$

3. Rayon incident normal à la face BC

Au point I, on a l'incidence normale ( $i=0^\circ$ ): le rayon n'est pas réfracté.

Au point J, l'angle d'incidence  $i_1 = C = 60^\circ$

$$n_{\text{verre}} \sin \lambda = n_{\text{air}} \sin 90 \Rightarrow \sin \lambda = \frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{verre}}}$$

$$\Rightarrow \sin \lambda = \frac{1}{1.5}$$

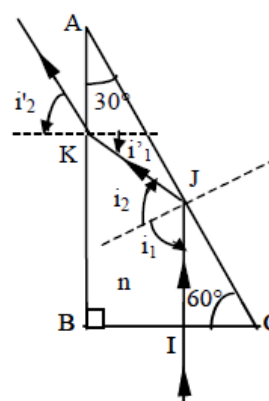
$$\Rightarrow \lambda = 48.8^\circ$$

Avec :  $\lambda$  l'angle limite.

Donc,  $i_1 > \lambda \Rightarrow$  réflexion totale

Au point K : angle d'incidence  $i'_1 = A = 30^\circ$

D'où la loi de Descartes sur la deuxième face AB



$$n_{\text{verre}} \sin i_1' = n_{\text{air}} \sin i_2' \Rightarrow \sin i_2' = \frac{n_{\text{verre}} \sin i_1'}{n_{\text{air}}}$$

$$\Rightarrow \sin i_2' = \frac{1.5 \sin 30}{1}$$

$$\Rightarrow i_2' = 48.6^\circ$$

**Exercice 12**

Un rayon lumineux arrive en *I* sur un bloc de glace qui forme un prisme rectangulaire d'indice  $n = 1.33$  (figure 7.7.a).

1. Calculer les valeurs de  $r$ ,  $r'$  et  $i'$  pour la valeur limite  $i = 90^\circ$ . Donner sans démonstration l'expression de la déviation  $D$ . Calculer  $D$ . Que se passe-t-il en  $J$  ?
2. Donner sans démonstration une relation donnant  $D_m$ , la valeur de  $D$  au minimum de déviation. Calculer  $D_m$  et la valeur  $i_m$  de  $i$  correspondante.
3. On colle le premier prisme ABC (bloc de glace d'indice  $n=1.33$ ) avec un autre prisme DBC d'indice  $n'$  pour former un rectangle comme l'indique la figure 7.7.b. Un rayon lumineux SI arrive sur la face AB sous une incidence  $i = 70^\circ$ .
  - 3.1. Repérer le trajet optique du rayon lumineux SI à travers le premier prisme.
  - 3.2. Discuter selon la valeur de l'indice  $n'$  du second prisme, les différents trajets possibles de la lumière.

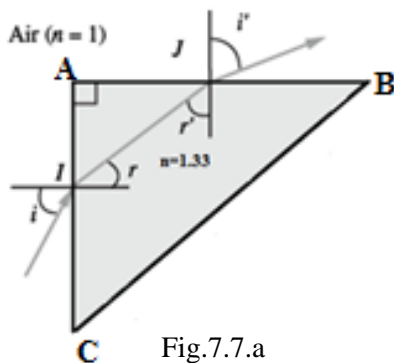


Fig.7.7.a

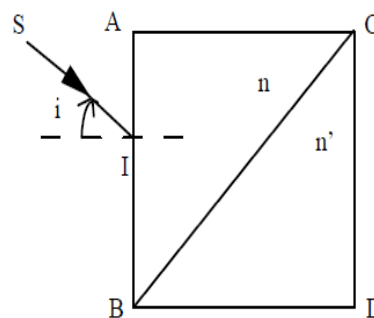


Fig.7.7.b

**Solution**

L'angle d'incidence  $i = 90^\circ$ .

D'après la loi de Snell-Descartes sur AB :

$$n_{air} \sin i = n_{glace} \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{n_{air} \sin i}{n_{glace}}$$

$$\Rightarrow \sin r = \frac{\sin 90}{1.33}$$

$$\Rightarrow \sin r = 0.7518$$

$$\Rightarrow r = 48.75^\circ$$

$$r + r' = A \Rightarrow r' = A - r$$

$$\Rightarrow r' = 90^\circ - 48.75^\circ$$

$$\Rightarrow r' = 41.24^\circ$$

On applique la loi de Snell -Descartes sur AC, on obtient :

$$n_{glace} \sin r' = n_{air} \sin i' \Rightarrow \sin i' = \frac{n_{glace} \sin r'}{n_{air}}$$

$$\Rightarrow \sin i' = 1,33 \sin 41.24$$

$$\Rightarrow i' = 61.27^\circ$$

L'expression de la déviation  $D$  :

$$D = i + i' - A = 90^\circ + 61.27^\circ - 90^\circ = 61.27^\circ.$$

Au point J : la réflexion est totale en J si  $i < 61.27^\circ$ .

2. la relation de la déviation minimale  $D_m$  :

$$\sin \frac{A + D_m}{2} = \frac{n_{glace}}{n_{air}} \sin \frac{A}{2} \Rightarrow \sin \frac{A + D_m}{2} = 1.33 \sin 45^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{A + D_m}{2} = 70.5^\circ$$

$$\Rightarrow D_m = 51^\circ$$

3.1- Au point I, la loi de réfraction sur la face AB s'écrit :

$$\sin 70 = 1.33 \sin i' \Rightarrow \sin i' = \frac{\sin 70}{1.33} = 0.707$$

$$i' = 45^\circ.$$

Le rayon réfracté est orthogonal à la face BC. Il ne subit donc aucune déviation à la traversée du dioptré BC.

3.2- Le rayon lumineux arrive sur la face BD en un point J avec un angle d'incidence donné par :  $j = 45^\circ$ .

Dans ce cas, Il y a trois possibilités qui dépendent à la fois de la valeur de  $n'$  et de l'angle limite d'incidence

$$n' \sin \lambda = n \sin 90^\circ \Rightarrow \lambda = \text{Arc sin} (1/n')$$

➤ Si  $j < \lambda \Rightarrow \sin j = < \sin \lambda$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{n'}$$

$$\Rightarrow n' < \sqrt{2}$$

Donc, le rayon émerge de la face BD avec un angle d'incidence  $j'$  tel que :

$$\sin j' = n' \sin j$$

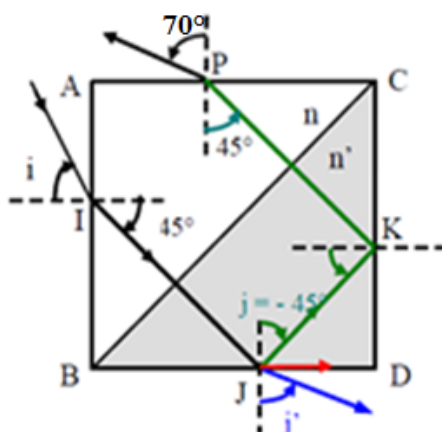
$$\text{Si } j = \lambda \Rightarrow \sin j = \sin \lambda$$

$$\sin j = \sin \lambda \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{n'}$$

$$\Rightarrow n' = \sqrt{2}$$

Dans ce cas, le rayon émerge du prisme parallèlement à la face BD.

- Si  $j > \lambda \Rightarrow n' > \sqrt{2}$  : il y aura une réflexion totale en J. Le rayon arrive en K sur la face CD où il subit encore une réflexion totale. Il arrive en P sur la face AC avec un angle d'incidence égal à  $45^\circ$ . Il émerge avec un angle de  $70^\circ$ .



## Rappel de cours sur la formation des images.

### 8.1 Notion d'objet et d'image.

Soit un système optique représenté par ses deux faces extrêmes  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$ . La face  $\Sigma_1$  est du côté de la lumière incidente et elle reçoit les rayons lumineux (face d'entrée). La face  $\Sigma_2$  est la face de sortie de faisceau lumineux incident qui rencontre la face d'entrée  $\Sigma_1$ . Une partie de ce faisceau pénètre dans le système optique, en le traversant et ressort par la face  $\Sigma_2$  constituant ainsi un faisceau émergent.

#### ❖ Objet :

Un objet réel peut être assimilé à un point source émettant des rayons lumineux. En revanche, un objet virtuel n'émet pas de rayons lumineux, c'est le point de convergence de rayons virtuels.

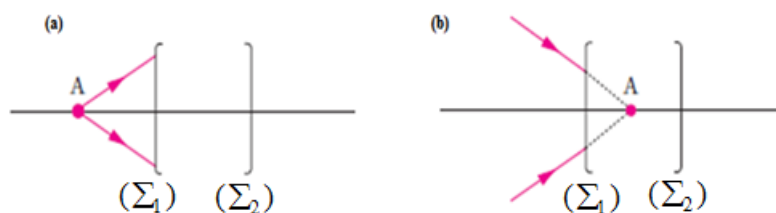


Fig. 8.1. Objets définis par rapport à la face d'entrée  $(\Sigma_1)$ , (a) : Objet A réel ; (b) : Objet A virtuel.

#### ❖ L'image :

Si le faisceau, qui émerge, est conique de sommet  $A'$ , on dit que  $A'$  est l'image du point A à travers le système optique. Si le faisceau conique est convergent au niveau de  $(\Sigma_2)$ , les rayons qui le constituent passent effectivement par  $A'$  : l'image  $A'$  de A est dite réelle. Si le faisceau conique est divergent,  $A'$  est située sur la partie virtuelle de ces rayons :  $A'$  est appelée image virtuelle.

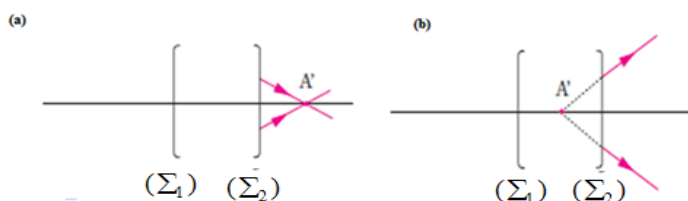


Fig. 8.2. Images définies par rapport à la face de sortie  $(\Sigma_2)$  ; (a) : Image réelle ; (b) Image virtuelle.

### 8.1.1 Espaces réel et virtuel.

Le classement de l'espace des objets en espace réel (avant la face d'entrée  $\Sigma_1$ ) ou espace virtuel (après cette face d'entrée  $\Sigma_1$ ) est caractérisé par les données relatives en rapport au sens de propagation effectif de la lumière avant l'entrée dans le système optique.

De manière analogue, les images  $A'$  envisagées ci-dessus se forment après la face de sortie  $\Sigma_2$  du système optique. Il est ainsi possible de placer en  $A'$  un écran pour observer la formation de l'image. Cette situation correspond aux images réelles. Pour les images virtuelles, celle-ci se forment avant la face d'entrée  $\Sigma_1$  du système optique, (fig. 8.3).

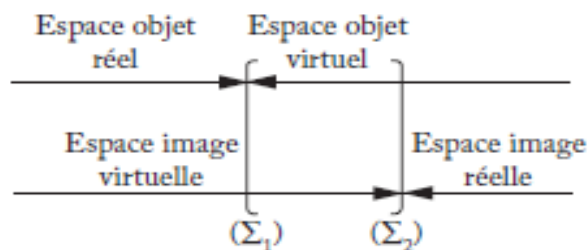


Fig. 8.3. Espaces objet réel/virtuel et espaces image réel/virtuel.

## 8.2 Stigmatisme.

### 8.2.1 Stigmatisme rigoureux.

**Définition :** Un système optique (S) est dit rigoureusement stigmatique (miroirs plan et sphérique...) pour un couple de points (A, A'), si tout rayon lumineux issu de l'objet A émerge de (S) en passant par A' qui est l'image de A par (S).

### 8.2.2 Stigmatisme approché.

**Définition :** Un système optique présente un stigmatisme approché (dioptré plan...) pour un couple de points (A, A'), si tout rayon passant par A passe au voisinage de A' après avoir traversé le système optique.

## 8.3 Approximation de Gauss.

Pour qu'un système donne des images de bonne qualité, il est préférable de l'utiliser dans l'approximation de Gauss. Cette approximation n'est valable que si les faisceaux issus des objets sont peu ouverts et assimilables à des pinceaux et si les angles d'incidences sont petits.

Les rayons incidents sont alors considérés comme proches de l'axe optique (rayons paraxiaux).

## 8.4 Dioptre.

### Définition.

Un dioptre est une surface qui sépare deux milieux d'indices différents, il est caractérisé par les indices de ces milieux. Il existe plusieurs formes de dioptres classés selon la forme des deux milieux.

### 8.4.1 Dioptre plan.

Il représente une surface plane séparant deux milieux d'indices différents. Le dioptre plan constitue un cas d'école pour la compréhension du stigmatisme approché et choisi ainsi comme exemple de système présentant un stigmatisme approché. La minimisation du chemin optique au premier ordre permet d'écrire une relation dite relation de conjugaison. Cette dernière relie la position de l'objet A, associée à l'indice objet  $n$ , à celle de son image par le dioptre A', associée à l'indice image  $n'$  pour des angles d'incidence  $i$  et de réflexion  $r$  faibles. On a alors, d'après la loi de réfraction de Descartes  $n \sin i = n' \sin r$ .

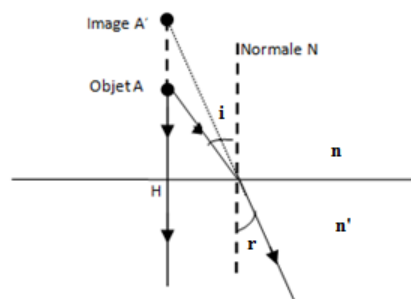


Fig. 8.4. Dioptre plan, les points A et A' sont des points conjugués à travers le dioptre.

La formule de conjugaison est :  $\frac{n'}{HA'} - \frac{n}{HA} = 0$

### 8.4.2 Dioptre sphérique.

C'est une surface sphérique qui sépare deux milieux d'indices différents. On peut distinguer deux types de dioptres sphériques : dioptre convexe et dioptre concave (fig.8.5).

- Si la lumière rencontre une surface bombée, le dioptre est dit convexe et son rayon de courbure  $r > 0$ .

- Si la lumière rencontre une face creuse, le dioptre est dit concave et son rayon de courbure  $r < 0$ .

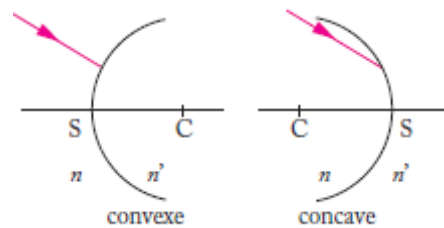


Fig. 8.5. Rayon incident sur un dioptre concave ou convexe.

### 8.4.2.1 Relation de conjugaison.

#### 8.4.2.1.1 Relation de conjugaison avec origine au sommet.

Pour établir la relation de conjugaison du dioptre sphérique, nous utilisons l'expression du chemin optique entre un point lumineux A et un point A'.

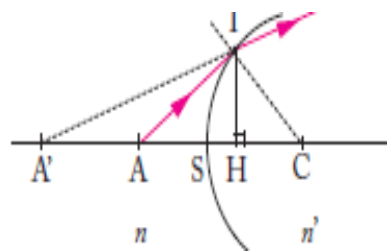


Fig. 8.6. Points A et A' conjugués à travers un dioptre sphérique de sommet S et de centre C.

Avec :  $R = \overline{SC}, P = \overline{SA}, P' = \overline{SA'}, x = HI$

L'expression du chemin optique (Fig. 8.6) est :

$$L_{AA'} = np \sqrt{1 + 2 \frac{x}{p} \left(\frac{R}{p} - 1\right)} - n' p' \sqrt{1 + 2 \frac{x}{p'} \left(\frac{R}{p'} - 1\right)}$$

Nous savons que le dioptre sphérique n'est pas rigoureusement stigmatique, pour cela nous utilisons cette approximation  $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon$ . Dans cette approximation, le chemin optique  $L_{AA'}$  s'écrit:

$$L_{AA'} \approx np \left(1 + \frac{x}{p} \left(\frac{R}{p} - 1\right)\right) - n' p' \left(1 + \frac{x}{p'} \left(\frac{R}{p'} - 1\right)\right)$$

Nous retrouvons la condition de stigmatisme rigoureux à l'ordre zéro qui conduit à la minimisation du chemin optique :

$$\frac{\partial L_{AA'}}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow n\left(\frac{R}{p} - 1\right) - n'\left(\frac{R}{p'} - 1\right) = 0$$

Nous déduisons alors la relation de conjugaison du dioptre sphérique :

$$\frac{n'}{P'} - \frac{n}{P} = \frac{n' - n}{R}$$

**8.4.2.1.2 Relation de conjugaison avec origine au centre.**

On peut établir une autre formule de conjugaison en choisissant l'origine du repère au centre C du dioptre. Notons:  $R = \overline{SC}$ ,  $q = \overline{CA}$ ,  $q' = \overline{CA'}$  ; il vient que :  $q = p - R$  et  $q' = p' - R$ . D'où, la relation de conjugaison avec l'origine au sommet :

$$\frac{n'}{q' + R} - \frac{n}{q + R} = \frac{n' - n}{R}$$

Après simplification, nous obtenons l'expression :

$$\frac{n'}{q} - \frac{n}{q'} = \frac{n - n'}{R}$$

**8.4.2.1.3 Expression du grandissement du dioptre sphérique.**

Pour calculer le grandissement  $\gamma$ , considérons le rayon issu de B et passant par le sommet S du dioptre (Fig. 8.7). Nous notons  $i$  l'angle d'incidence de ce rayon BS sur le dioptre et  $i'$  l'angle que fait le rayon réfracté SB'.

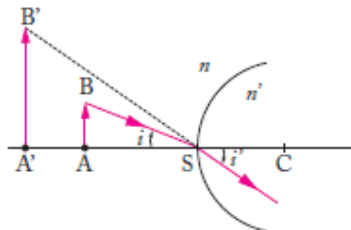


Fig. 8.7. Grandissement à travers un dioptre sphérique.

Dans l'approximation des angles faibles, on a :

$$i \approx \frac{\overline{AB}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{AB}}{p}$$

$$i' \approx \frac{\overline{A'B'}}{\overline{SA'}} = \frac{\overline{A'B'}}{p'}$$

Avec :  $P = \overline{SA}$ ,  $P' = \overline{SA'}$

Dans l'approximation paraxiale, la loi de la réfraction (loi de Kepler) s'écrit  $n i = n' i'$ .

Autrement dit : 
$$n \frac{\overline{AB}}{p} = n' \frac{\overline{A'B'}}{p'}$$

Nous obtenons l'expression du grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n p'}{n' p}$$

Si  $\gamma < 0$ , l'image est inversée ; elle est droite dans le cas contraire ( $\gamma > 0$ ). Si  $|\gamma| < 1$ , l'image est plus petite que l'objet ; elle est plus grande si  $|\gamma| > 1$ .

#### 8.4.2.2 Foyers du dioptré.

- ❖ **foyer objet** : est le point appartenant à l'axe optique traversé par un rayon incident ayant un rayon réfracté parallèle à l'axe optique.
- ❖ **foyer objet (F)** : est le point objet ayant son image à l'infini.
- ❖ **foyer image (F')** : est le point appartenant à l'axe optique traversé par un rayon réfracté issu des rayons incidents parallèles à l'axe optique.
- ❖ La distance focale de l'objet (f) est :

$$\overline{SF} = f = \frac{n}{n' - n} R$$

- ❖ La distance focale de l'image (f')

$$\overline{SF'} = f' = \frac{n'}{n' - n} R$$

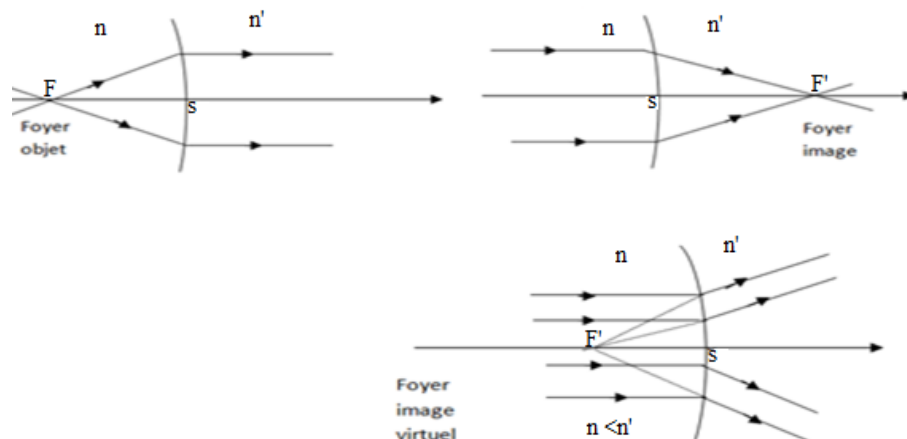


Fig. 8.8. Les foyers du dioptré sphérique.

**8.4.2.3 Dioptr convergent ou divergent.**

Dans un dioptr sphérique convergent, le rayon, après avoir traversé le dioptr, se rapproche de l'axe optique. Au contraire, dans un dioptr divergent, il s'éloigne (Fig. 8.9).

Un dioptr convexe est dit convergent si le deuxième milieu est plus réfringent que le premier  $n' > n$  (Fig. 8.9.b); si au contraire,  $n' < n$  (Fig. 8.9.c), il est dit divergent.

Un dioptr concave est dit divergent si le deuxième milieu est plus réfringent que le premier  $n' > n$  (Fig. 8.9.d) si au contraire,  $n' < n$ , il est dit convergent (Fig. 8.9.a).

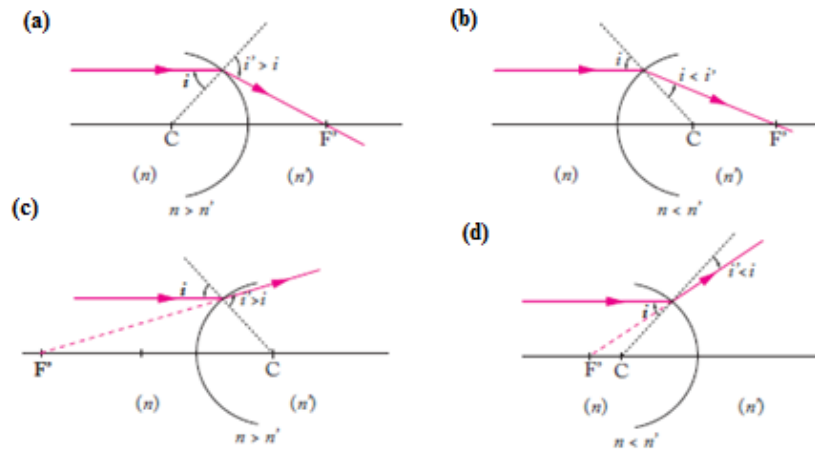


Fig. 8.9 : Les quatre configurations possibles d'un dioptr sphérique : dioptr convergents : a (concave) et b (convexe). Dioptr divergents : c (convexe) et d (concave).

Dans l'approximation de Gauss, on prendra l'habitude de schématiser ces dioptr comme des portions de droite dont les extrémités sont inclinées comme la courbure du dioptr. Ils sont représentés sur la figure 8.10. Dans la mesure où on considère des rayons lumineux semblant provenir de l'infini (rayons peu inclinés sur l'axe optique), cette représentation est parfaitement justifiée.

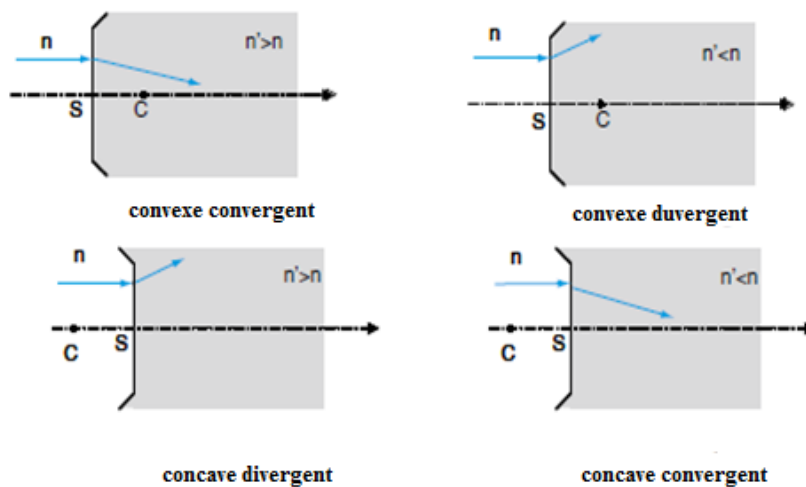


Fig. 8.10 Les quatre configurations dans l'approximation de Gauss.

### 8.4.2.4 Méthode de construction d'images à travers un dioptre sphérique.

Considérons un point  $B$  situé hors de l'axe principal (axe optique) ; ce point matérialise le haut de l'objet  $AB$ . Afin de construire son image  $A'B'$ , on choisit de façon astucieuse deux rayons particuliers incidents sur le dioptre en passant par  $B$ . On utilise en général deux des trois rayons suivants (figure.8.11) :

- Le rayon (1) (ou son prolongement) arrive sur le dioptre parallèlement à l'axe principal ; après le dioptre, il passe par  $F'$  (1'),
- Le rayon (2) passe par  $C$  et il n'est pas dévié,
- Le rayon (3) (ou son prolongement) passe par  $F$  ; après le dioptre, il ressort parallèlement à l'axe optique selon (3').

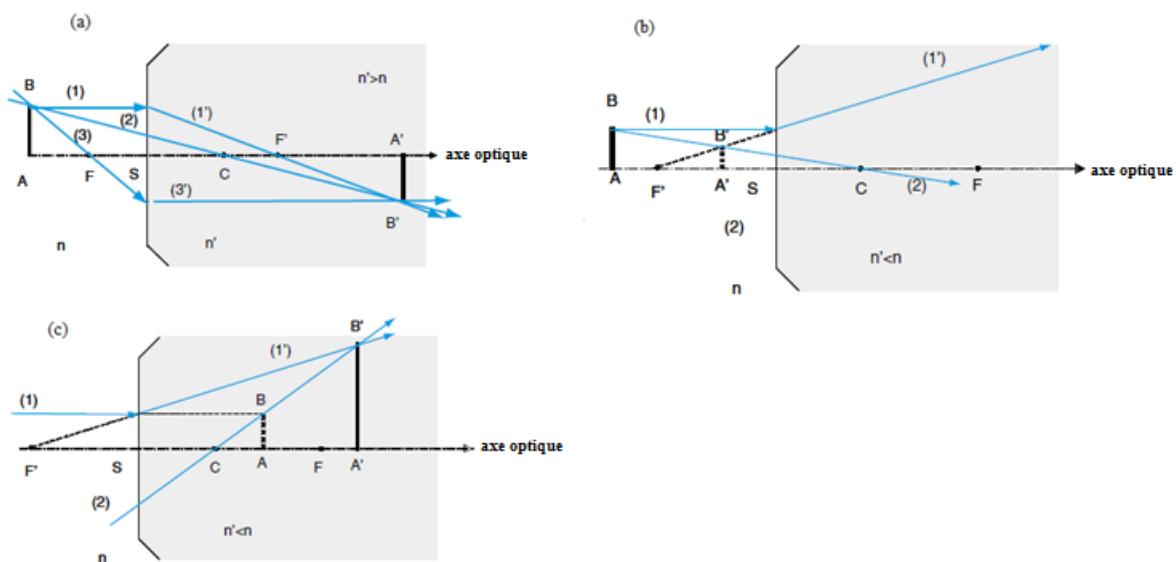


Fig. 8.11. Image  $A'B'$  d'un objet étendu qui transverse  $AB$  à travers un dioptre sphérique.

Si l'objet  $AB$  est réel (figures (8.11a) et (8.11b)), les deux rayons incidents passent réellement par  $B$ . Cependant, si l'objet est virtuel (figure 8.11c), c'est le prolongement d'un ou de deux des rayons incidents qui passe par  $B$ . Après le dioptre, les rayons ou leur prolongement se rencontrent en un point  $B'$ , situé aussi hors de l'axe principal image de  $B$ . En abaissant à partir de  $B'$  la perpendiculaire à l'axe optique, on obtient le point  $A'$ , image conjuguée de  $A$  ; l'image  $A'B'$  est ainsi construite.

Si  $B'$  est à l'intersection des rayons lumineux qui ont traversé le dioptre, l'image  $A'B'$  est réelle (le cas de la figure 8.11: a et c). Si  $B'$  est à l'intersection du prolongement d'au moins un des rayons ayant traversé le dioptre, elle est virtuelle (figure 8.11b).

### 8.5.1 Miroir plan.

Le miroir plan est un exemple de système optique présentant un stigmatisme rigoureux pour tout couple de points symétriques par rapport au plan du miroir.

**Image d'un objet par un miroir plan:**

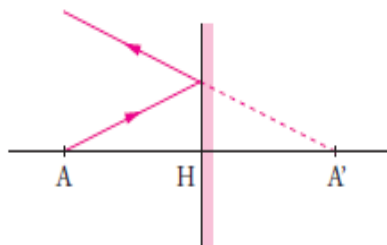


Fig. 8.12. Image  $A'$  d'un objet  $A$  à travers un miroir plan.

La relation de conjugaison du miroir plan:  $\overline{HA} = \overline{HA'}$

Où  $H$  est le projeté de  $A$  sur le miroir.

### 8.5.2 Miroir sphérique.

Un miroir sphérique est une portion de sphère dont la surface est recouverte d'une couche réfléchissante pour les longueurs d'onde du faisceau incident. Comme pour le dioptre sphérique, la représentation du miroir sphérique dans le plan d'incidence est une portion de cercle de centre  $C$  qui coupe l'axe principal (axe optique) et orienté de la gauche vers la droite en un point  $S$  appelé le sommet du miroir (fig.8.13).

Le rayon de courbure du miroir sphérique est la quantité algébrique  $R = SC$ . On rappelle que, conventionnellement, l'orientation de l'axe optique, suit le sens de propagation de la lumière incidente sur le miroir.

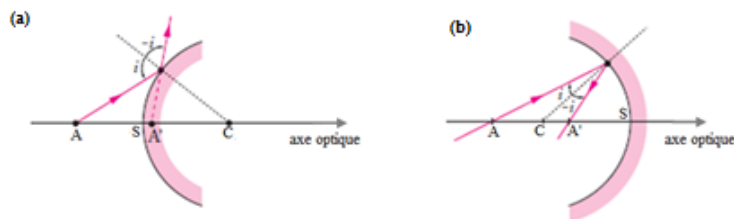


Fig. 8.13. Image  $A'$  d'un objet  $A$  par un miroir concave (a) et convexe (b).

Un objet réel pour le miroir concave donne une image virtuelle tandis que le miroir convexe donne une image réelle.

### 8.5.2.1 Relation de conjugaison.

#### 8.5.2.1 .1 Relation de conjugaison du miroir sphérique avec origine au sommet.

Dans le cadre de l'approximation de Gauss, un point objet  $A$  correspond à un point image unique noté  $A'$ , dit conjugué de  $A$ . La relation de conjugaison relie la position de  $A$  sur l'axe principal à celle de son image  $A'$ . Si l'on pose  $p = SA$  et  $p' = SA'$  (Fig. 8.13), la relation de conjugaison s'écrit pour le miroir sphérique :

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{2}{R}$$

#### 8.5.2.1 .2 Relation de conjugaison du miroir sphérique avec origine au centre.

En reprenant le résultat obtenu pour le dioptre sphérique et en appliquant à nouveau  $n' = -n$  à la relation de conjugaison d'un dioptre sphérique (avec origine au centre), nous obtenons :

$$\frac{1}{CA'} + \frac{1}{CA} = \frac{2}{R}$$

### 8.5.2.2 Foyers du miroir sphérique.

**Foyer objet ( $F$ ) :** C'est la position d'un objet dont l'image est rejetée à l'infini.

**Foyer image ( $F'$ ) :** C'est la position de l'image d'un objet situé à l'infini

Les foyers  $F$  et  $F'$  sont deux points conjugués et leur position sur l'axe principal sont repérées par rapport au sommet  $S$  du miroir sphérique par les distances algébriques  $\overline{SF}$  et  $\overline{SF'}$ .  $f = \overline{SF}$  est la distance focale objet du miroir sphérique et  $f' = \overline{SF'}$  sa distance focale image ; on a :

$$f = \overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2} = \frac{R}{2}, f' = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2} = \frac{R}{2}.$$

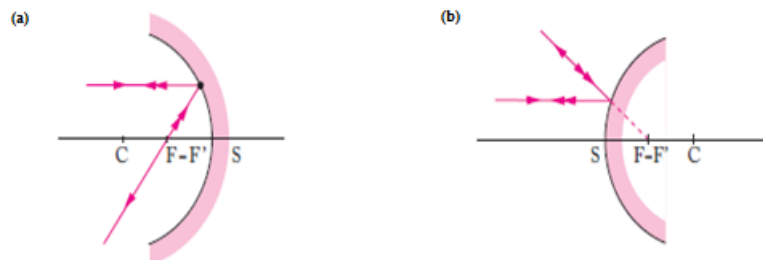


Fig. 8.14. Construction des foyers objet et image d'un miroir sphérique : (a)concave et (b)convexe .

**Remarque:**

Dans un miroir sphérique, les foyers objet et image sont confondus. Le résultat est cohérent avec le principe du retour inverse de la lumière.

**8.5.2.3 Méthode de Construction d'images à travers un miroir sphérique.**

Nous nous plaçons dans le cadre de l'approximation de Gauss. Un objet  $AB$  et son image  $A'B'$  sont dans un plan perpendiculaire à l'axe principal. Ce dernier passe par le centre  $C$  et le sommet  $S$  du système étudié (Fig. 8.15). On rappelle que la méthode de construction suppose connues les positions des foyers objet  $F$  et image  $F'$ . Rappelons que, dans le cas d'un miroir sphérique, ces deux points sont confondus et placés à mi-chemin entre le sommet  $S$  et le centre  $C$ . À partir du point  $B$  de l'objet, on choisit deux rayons particuliers incidents, selon la même démarche que pour le dioptre sphérique.

Si l'objet  $AB$  est réel (Fig. 8.15(a) et Fig. 8.15(b)), les deux rayons incidents passent par  $B$  ; si l'objet est virtuel (Fig. 8.15.c), c'est le prolongement d'un ou de deux de ces rayons incidents qui passe par  $B$ . Pour construire l'image  $A'B'$  de  $AB$  nous recommandons l'utilisation des deux rayons incidents suivants : tout en analysant leur chemin optique.

- Celui qui passe par le centre  $C$  du miroir, car il n'est pas dévié après réflexion ;
- Celui qui est parallèle à l'axe principal du miroir car il passe par  $F'$  après réflexion.

Après le miroir sphérique, les rayons ou leurs prolongements convergent en  $B'$ . En traçant à partir de  $B'$  la perpendiculaire à l'axe optique, on obtient le point  $A'$ , point conjugué du point  $A$ , et donc l'image  $A'B'$ . Là encore, si  $B'$  est à l'intersection des rayons incidents, l'image  $A'B'$  est réelle (Fig. 8.15.a et c) ; sinon, elle est virtuelle (Fig. 8.15.b).

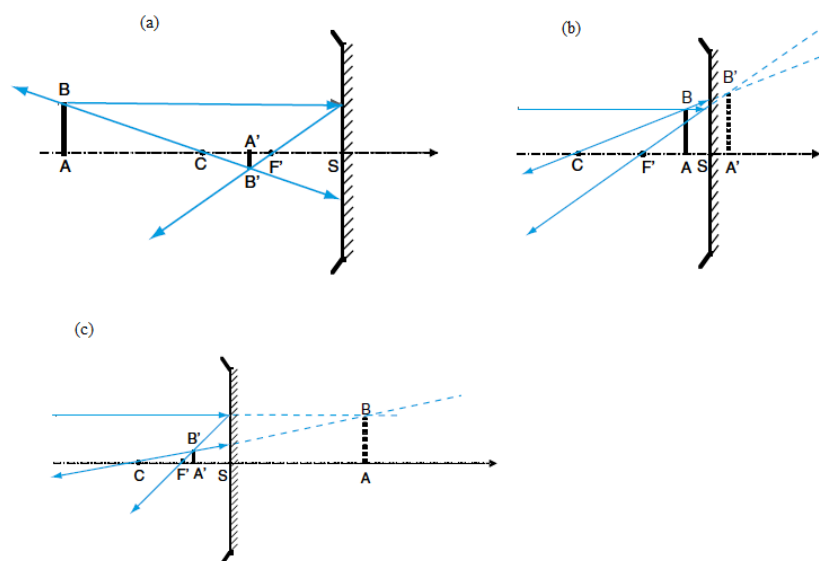
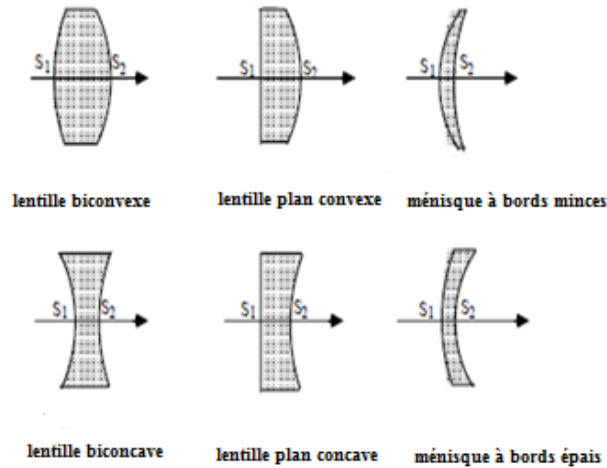


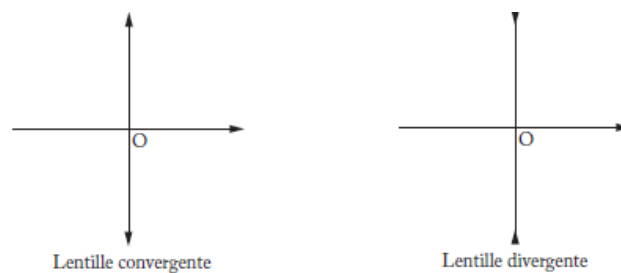
Fig. 8.15. Image  $A'B'$  d'un objet étendu transverse  $AB$  à travers un miroir sphérique.

**8.6 Lentilles minces.**

Une lentille est une association de deux dioptrés, la combinaison des dioptrés plans et sphériques donne naissance à plusieurs types de lentilles :



❖ Une lentille mince correspond à une lentille dont l'épaisseur maximale est très petite devant les rayons de courbure des deux dioptrés. On les représente par :



*Fig. 8.16. Convention de représentation d'une lentille mince convergente ou divergente.*

En général Les lentilles minces sont étudiées dans l'approximation de Gauss. Dans cette approximation, les points objets sont situés au voisinage de l'axe optique. De plus, les rayons considérés sont limités à ceux qui restent proches de l'axe (rayons paraxiaux).

Nous rappelons que, dans le cadre de cette hypothèse, tout point A admet un point conjugué A' : c'est la condition de stigmatisme.

**8.6.1 Propriétés optiques d'une lentille mince.**

1. Les rayons se réfractent parallèlement à l'axe optique d'une lentille mince s'ils sont arrivés en passant réellement ou virtuellement par un même point de l'axe optique : le foyer objet (F) de la lentille.

2. Les rayons incidents parallèles à l'axe optique d'une lentille mince se réfractent en passant réellement ou virtuellement par un même point de l'axe optique : le foyer image ( $F'$ )
3. La distance focale objet d'une lentille mince est la longueur comprise entre son centre optique et son foyer objet  $f = OF$
4. La distance focale image d'une lentille mince est la longueur comprise entre son centre optique et son foyer image  $f' = OF'$
5. L'image d'un point objet situé au foyer objet d'une lentille mince se forme à l'infini sur l'axe optique de cette lentille.
6. L'image d'un point objet situé à l'infini sur l'axe optique d'une lentille mince se forme au foyer image de cette lentille.
7. Le plan perpendiculaire à l'axe optique d'une lentille mince et qui contient son foyer objet est le plan focal objet de cette lentille.
8. Le plan perpendiculaire à l'axe optique d'une lentille mince et qui contient son foyer image est le plan focal image de cette lentille.
9. L'image d'un point objet situé dans le plan focal objet d'une lentille mince se forme à l'infini.
10. l'image d'un point objet situé à l'infini se forme dans le plan focal image d'une lentille mince.

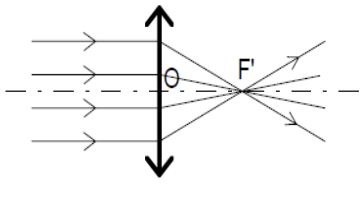
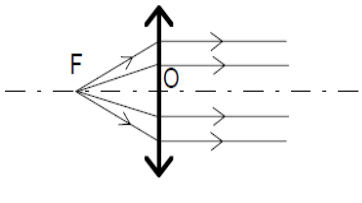
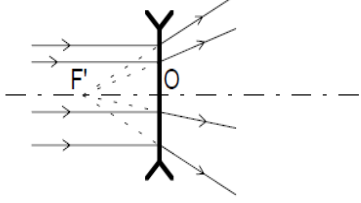
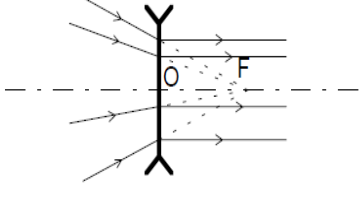
	Foyer image $F'$	Foyer objet $F$
Lentille convergente	 <p style="text-align: center;"><math>F'</math> réel</p>	 <p style="text-align: center;"><math>F</math> réel</p>
Lentille divergente	 <p style="text-align: center;"><math>F'</math> virtuel</p>	 <p style="text-align: center;"><math>F</math> virtuel</p>

Tableau.8.1 : foyers objet et image pour deux lentilles convergente et divergente.

## 8.6.2 Construction optique.

### 8.6.2.1 Image d'un objet à l'infini.

Pour construire l'image  $B'$  d'un objet  $B$  situé à l'infini hors de l'axe optique, nous utilisons le rayon issu de  $B$  passant par le centre optique de la lentille : ce rayon n'étant pas dévié, son intersection avec le plan focal image correspond au point image  $B'$  puisque l'on sait que tous les rayons convergent en un point du plan focal image (Fig. 8.17).

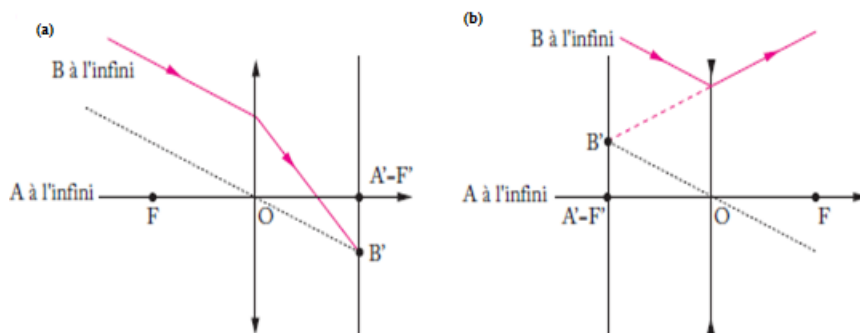


Fig. 8.17. Image  $A'B'$  d'un objet  $AB$  étendu transverse, situé à l'infini, à travers une lentille mince (a) convergente et (b) divergente (le point  $A$  est sur l'axe optique).

### 8.6.2.2 Image d'un objet situé dans le plan focal objet.

Le point  $B$  situé dans le plan focal objet hors de l'axe optique forme son image à l'infini. Pour déterminer la direction d'émergence du faisceau de rayons issus de  $B$ , on trace le rayon issu de  $B$  et passant par le centre optique de la lentille. Ce rayon n'étant pas dévié, il donne la direction  $\alpha$  du faisceau émergent (Fig. 8.18)

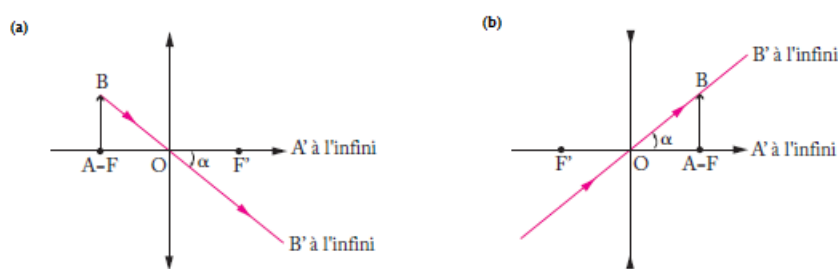


Fig. 8.18. Image  $A'B'$ , renvoyée à l'infini, d'un objet  $AB$  étendu transverse situé dans le plan focal objet d'une lentille mince (a) convergente et (b) divergente.

### 8.6.2.3 Image d'un objet quelconque.

Considérons un objet  $AB$  quelconque, le point  $A$  étant sur l'axe optique. Nous savons que l'image  $A'B'$  de l'objet  $AB$  par la lentille est également transverse et que le point image  $A'$  est sur l'axe optique. La méthode la plus simple pour déterminer la position de l'image  $A'B'$

consiste à construire l'image B' de B. A' se déduit de B' puisque nous savons que A'B' est transverse (Fig. 8.19).

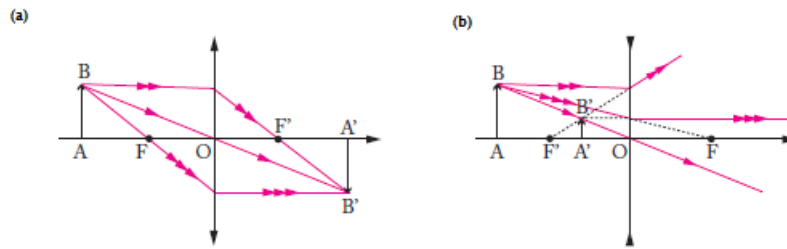


Fig. 8.19. Construction à trois rayons particuliers de l'image A'B' d'un objet transverse étendu à travers une lentille : (a) convergente et (b) divergente.

**8.6.3 Relations mathématiques régissant les lentilles minces.**

Construisons l'image réelle d'un objet AB de hauteur h formée sur un écran par une lentille mince convergente de distance focale f. L'objet est à une distance p de la lentille, avec  $p > f$  (Fig. 8.20).

L'image A'B' de hauteur h' est observée sur un écran qui est placé à une distance p' de la lentille.

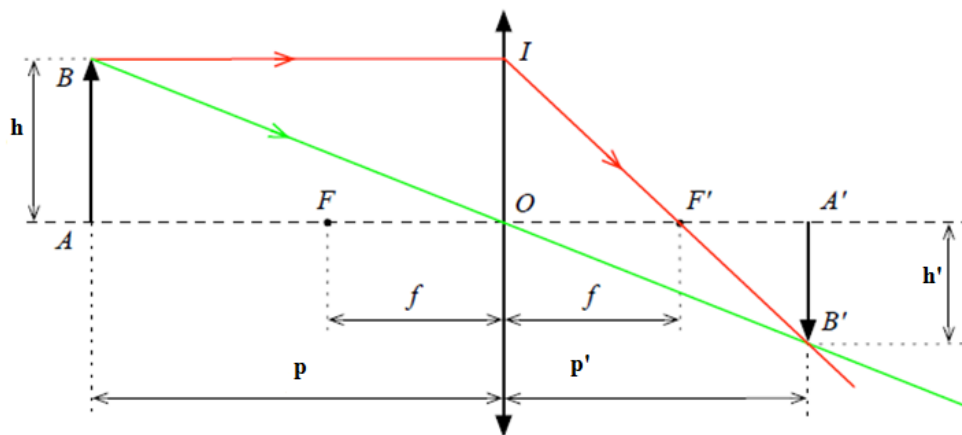


Fig. 8.20 – Image réelle formée par une lentille convergente.

D'après la Fig. (8.20), la similitude des triangles OAB et O'A'B' donnent :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{h'}{h} = \frac{p'}{p}$$

Le rapport des dimensions est appelé grandissement :  $\gamma = \frac{h'}{h}$

La position de l'image dépend de la position de l'objet et de la distance focale de la lentille.

Les triangles F'OI et F'A'B' étant semblables, nous pouvons écrire :

$$\frac{h'}{h} = \frac{p' - f}{f}$$

En injectant la relation de grandissement dans l'expression précédente on aura :

$$\frac{p'}{p} = \frac{p'}{f} - 1$$

D'où, en divisant par  $p'$  :

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f},$$

cette relation est appelée relation de conjugaison de Descartes

### Remarques

- Quand l'objet est placé entre le foyer et la lentille, donc  $p < f$ , l'image est observée à travers la lentille. On obtient de façon analogue :  $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$
- Une image renversée correspond à un grandissement négatif  $\gamma < 0$  quand l'image est de même nature que l'objet ( $p$  et  $p'$  ont alors le même signe) et qu'elle est droite  $\gamma > 0$  dans le cas contraire ( $p$  et  $p'$  des signe contraires).

Donc la relation générale de grandissement est :  $\gamma = -\frac{p'}{p}$

### Applications

#### Exercice 1

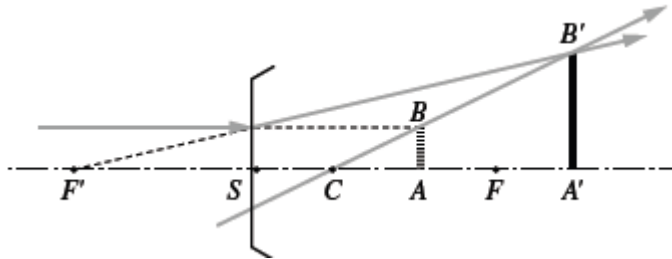
Un dioptre sphérique de rayon de courbure  $r = 2$  cm sépare deux milieux d'indices  $n = 3/2$  et  $n' = 1$ .

1. Sur une figure, placer les foyers  $F$  et  $F'$  puis calculer les distances ?
2. Sur l'axe optique on place une source ponctuelle en  $A$  telle que  $p = 2r$ . Quelle est la position de l'image  $A'$  ?
3. Quel est la valeur du grandissement transverse  $\gamma$  obtenu pour un objet de 1 cm de hauteur ?  
Quel est la grandeur de l'image  $A'B'$ .
4. Reprendre les mêmes questions de l'exercice pour un rayon de courbure du dioptre sphérique  $r = -2$  cm et  $p = 2r$ .

**Solution**

1. Pour  $r = 2 \text{ cm}$ .

Rappelons qu'une image est virtuelle si elle est placée à l'intersection du prolongement des rayons particuliers et réelle si elle est placée à l'intersection de ces mêmes rayons.



La relation de conjugaison s'écrit :

$$\frac{n'}{P'} - \frac{n}{P} = \frac{n' - n}{r} = V$$

Les positions des foyers sont données par les relations suivantes :

$$SF = f = -r \frac{n}{n' - n} \quad \text{et} \quad SF' = f' = r \frac{n'}{n' - n}$$

$$n=1.5, n'=1 \Rightarrow f = -2 \frac{1}{\frac{3}{2}-1} = -4 \text{ cm} \quad \text{et} \quad f' = 2 \frac{1.5}{\frac{3}{2}-1} = 6 \text{ cm}$$

D'où la vergence :  $V = \frac{n' - n}{r} = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} = -0.25 \text{ cm}^{-1} = -25 \text{ dioptrie} \Rightarrow$  le dioptré sphérique

est donc divergent.

2. La position de l'image  $A'$  si  $p = 2r$  :

D'après la relation de conjugaison :

$$\frac{n'}{P'} - \frac{n}{P} = \frac{n' - n}{r} = V$$

$$\frac{1}{P'} - \frac{1.5}{4} = \frac{1-1.5}{2} \Rightarrow \frac{1}{P'} = \frac{-1}{4} + \frac{3}{8}$$

Donc, la position de l'image est  $p' = 8 \text{ cm}$ .

3. Le grandissement transverse  $\gamma$  obtenu pour un objet de 1 cm de hauteur est :

$$\gamma = \frac{np'}{n'P} = 3$$

Un objet de hauteur 1 cm donne une image d'une taille :

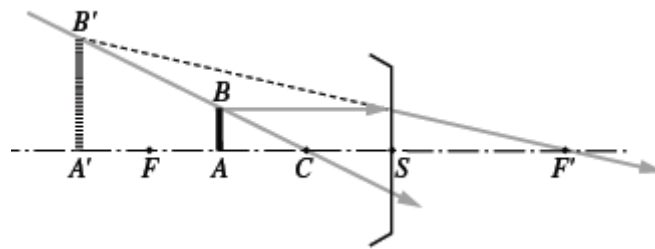
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{AB} = 3 \Rightarrow \overline{A'B'} = 3 \text{ cm}$$

4. Le rayon de courbure du dioptre sphérique est  $r = -2 \text{ cm}$  et  $p = 2r$  :

Les positions des foyers sont données par les relations

$$SF = f = -r \frac{n}{n' - n} \quad \text{et} \quad SF' = f' = r \frac{n'}{n' - n}$$

$$n=1.5, n'=1 \Rightarrow f = 2 \frac{1}{\frac{3}{2}-1} = 4 \text{ cm} \quad \text{et} \quad f' = -2 \frac{1.5}{\frac{3}{2}-1} = -6 \text{ cm}$$



D'où l'équation de la vergence d'un dioptre sphérique :

$$V = \frac{n' - n}{r} = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} = 25 \text{ dioptrie} \Rightarrow \text{Le dioptre sphérique est donc convergent}$$

2. La position de l'image  $A'$  si  $p = 2r$  :

D'après la relation de conjugaison on a :

$$\frac{n'}{P'} - \frac{n}{P} = \frac{n' - n}{R} = V$$

$$\frac{1}{P'} - \frac{1.5}{-4} = \frac{1-1.5}{-2} \Rightarrow \frac{1}{P'} = \frac{1}{4} - \frac{3}{8}$$

Donc, la position de l'image est  $p' = -8 \text{ cm}$ .

3. Le grandissement transverse  $\gamma$  obtenu pour un objet de 1 cm de hauteur

$$\gamma = \frac{np'}{n'P} = 3 \text{ donc, un objet de hauteur de 1 cm donne une image d'une taille}$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{AB} = 3 \Rightarrow \overline{A'B'} = 3 \text{ cm, ce qui donne une image virtuelle de 3 cm de hauteur et}$$

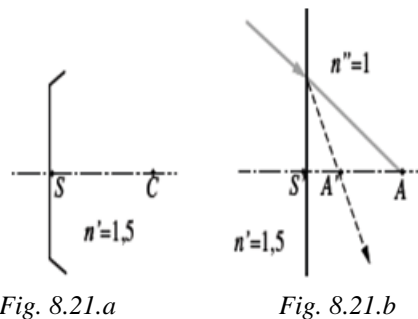
orientée dans le même sens que  $AB$ .

## Exercice 2

1. Écrire sans démonstration la formule de conjugaison ainsi que la formule du grandissement transverse  $\gamma$  d'un dioptre sphérique de rayon de courbure  $r$  séparant deux milieux d'indices  $n$  et  $n'$ .

2. En éliminant  $p'$  (position de l'image) à l'aide de la formule de conjugaison, exprimer  $\gamma$  en fonction de  $p, r, n$  et  $n'$ .
3. Que devient le grandissement  $\gamma$  pour un dioptre plan ?
4. On considère un dioptre sphérique (figure 8.21.a) de 1 cm de rayon de courbure séparant l'air d'indice  $n = 1$  du verre d'indice  $n' = 1.5$ . Déterminer la position des foyers  $F_1$  et  $F'_1$  de ce dioptre. On donne  $SC = 1$  cm.
5. On considère un dioptre plan (figure 8.21. b) séparant deux milieux d'indices  $n' = 1.5$  et  $n'' = 1$  et dont le sommet est en  $S'$ . Montrer que la relation de conjugaison s'écrit  $\overline{S'A'} = \frac{n''}{n'} \overline{S'A}$ .

Calculer la valeur  $\overline{S'A'}$ , on donne  $\overline{SA} = 3$  cm,  $\overline{SS'} = 1$  cm.



**Solution**

1.1 La formule de conjugaison :  $\frac{n'}{P'} - \frac{n}{P} = \frac{n' - n}{R} = V$

1.2 La formule du grandissement :  $\gamma = \frac{np'}{n'P}$

2.1 La position de l'image  $P'$  à l'aide de la formule de conjugaison :

$$\frac{n'}{P'} - \frac{n}{P} = \frac{n' - n}{R} \Rightarrow \frac{n'}{P'} = \frac{(n' - n)p + nR}{Rp}$$

D'où la position de l'image est donnée par :  $P' = \frac{n'Rp}{(n' - n)p + nR}$

2.2 L'équation de  $\gamma$  en fonction de  $p, R, n$  et  $n'$

On remplace la position de l'image dans la formule du grandissement on obtient :

$$\gamma = \frac{nR}{(n' - n)p + nR}$$

3. le grandissement  $\gamma$  pour un dioptre plan :

Pour un dioptre plan le rayon de courbure  $R \rightarrow \infty \Rightarrow \gamma = 1$

4. La position des foyers  $F_1$  et  $F'_1$  de ce dioptre :

$$SF_1 = f = -R \frac{n}{n' - n} \text{ et } SF_1' = f' = R \frac{n'}{n' - n}$$

Avec  $SC = r = 1 \text{ cm}$ ,  $n=1$ ,  $n'=1.5$  on trouve :

$$SF_1 = f = -1 \frac{1}{1.5 - 1} = -2 \text{ cm}$$

$$SF_1' = f' = 1 \frac{1.5}{1.5 - 1} = 3 \text{ cm}$$

5.1 Le dioptre plan (figure 8.21.b) séparant 2 milieux d'indices  $n' = 1.5$  et  $n'' = 1$  peut être considéré comme un dioptre sphérique de rayon infini, ainsi la relation de conjugaison s'écrit :

$$\frac{n''}{S'A'} - \frac{n'}{S'A} = 0 \Rightarrow \overline{S'A'} = \frac{n''}{n'} \overline{S'A} = \frac{n''}{n'} (\overline{S'S} + \overline{SA})$$

5.2 La valeur de  $\overline{S'A'}$  : si  $\overline{SA} = 3 \text{ cm}$ ,  $\overline{SS'} = 1 \text{ cm}$ .

$$\overline{S'A'} = \frac{1}{1.5} (3 - 1) = 1.33 \text{ cm}$$

### Exercice 3

Un ballon sphérique d'épaisseur négligeable, de centre C et de rayon R, est rempli d'un liquide d'indice n (figure 8.22). On considère un point lumineux M qui se déplace le long du diamètre AB à l'intérieur de ce ballon et M' son image après une réfraction à travers la surface du ballon. On repère les positions de M et de M' par  $x = CM$  et  $x' = CM'$ . On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss.

1. Trouver l'expression de la position de M' en fonction de celle de M.
2. Montrer que lorsque le point M se déplace de A à B, la distance MM' passe par un maximum. Trouver la position  $M_0$  de M correspondante.
3. Calculer les grossissements linéaires lorsque M est en A, en  $M_0$  et en B.

On donne :  $n = 3/4$  et  $R = 25 \text{ cm}$ .

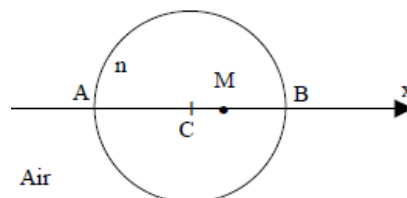


Fig. 8.22

### **Solution**

1. M' est l'image de M par le dioptre sphérique D liquide-air de sommet B. On a donc :

$$\frac{n}{CM'} - \frac{1}{CM} = \frac{n-1}{CA} = \frac{n-1}{CB}$$

On remplace  $CM' = x'$ ,  $CM = x$  et  $CA = CB = R$  dans l'équation précédente d'où :

$$\frac{n}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{n-1}{R} \Rightarrow x' = \frac{nRx}{(n-1)x + R}$$

$$2. \text{ On a : } \overline{MM'} = \overline{MC} + \overline{CM} = x' - x = \frac{nRx}{(n-1)x + R} - x$$

Pour que la distance  $MM'$  passe par un extremum, il faut que sa dérivée par rapport à  $x$  soit nulle :

$$\frac{d\overline{MM'}}{dx} = 0 \text{ ce qui donne :}$$

$$\frac{nR^2}{((n-1)x + R)^2} = 1 \Rightarrow ((n-1)x + R)^2 = nR^2$$

$$\Rightarrow (n-1)x + R = \pm\sqrt{n}R$$

$$\text{Donc, la valeur de } x \text{ est } x_{0,1} = \pm \frac{\sqrt{n}R - R}{n-1}$$

La solution  $x_1 = -\frac{\sqrt{n}R - R}{n-1}$  n'est pas acceptable car, le point serait dans ce cas à l'extérieur

de la boule avec  $x_1 = -6.47 R$ . La solution  $x_0 = \frac{\sqrt{n}R - R}{n-1} = 0.46 R$  est acceptable.

En effectuant le calcul de la dérivée aux points  $x = 0$  et  $x = R$ , on trouve que :

$$\frac{d\overline{MM'}}{dx} > 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } \frac{d\overline{MM'}}{dx} < 0 \text{ pour } x = R. \text{ On vérifie bien qu'il s'agit d'un maximum}$$

en  $x = x_0$ .

La position de  $M$  correspondant au maximum est donnée par :

$x_0 = 0.115 \text{ m}$ . c'est à dire que  $M$  se situe entre  $C$  et  $B$ .

On calcule la distance  $M_0M'_0 = 3R (\sqrt{n} - 1)^2 = 1.8 \text{ cm}$ .

3. Le grandissement est donné par la relation suivante :

$$\gamma = \gamma = \frac{CM'}{CM} = \frac{x'}{x} = \frac{\frac{nRx}{(n-1)x + R}}{x}$$

$$\text{Lorsque } M \text{ est en } A : x = -R \text{ et } \gamma = \frac{n}{2-n} = 2$$

$$\text{Lorsque } M \text{ est en } M_0 : x = x_0 \text{ et } \gamma = \sqrt{n} = 1.15$$

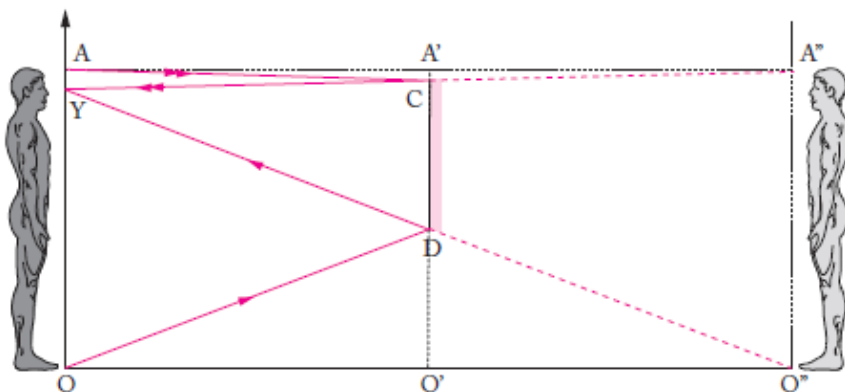
$$\text{Lorsque } M \text{ est en } B : x = R \text{ et } \gamma = 1.$$

**Exercice 4**

Un adulte de hauteur  $H = 1.80$  m se regarde dans un miroir vertical. Ses yeux sont à une hauteur  $h = 1.70$  m. Quelles doivent être la dimension et la position de ce miroir pour que l'adulte puisse se voir en entier ?

**Solution**

1. L'adulte est repéré par le segment  $OA$ , ses yeux sont en  $Y$ .



L'image  $A''O''$  de l'adulte  $AO$  est symétrique par rapport au miroir. Pour que l'adulte puisse se voir en entier, il faut que les rayons provenant de sa tête  $A''$  et de ses pieds  $O''$  pénètrent dans son œil placé en  $Y$ . On note  $CD$  les extrémités du miroir.

Par construction, les triangles  $AA''Y$  et  $A'A''C$  sont semblables tout comme les triangles  $OO''Y$  et  $O'O''D$ , on a donc :

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{YA}} = \frac{\overline{A'A''}}{\overline{AA''}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\overline{DO'}}{\overline{YO}} = \frac{\overline{O'O''}}{\overline{OO''}} = \frac{1}{2}$$

Puisque la position  $A'$  du miroir est par définition au milieu de  $AA''$ . Le miroir doit donc, être

placé à la hauteur  $DO'$  telle que:  $\overline{DO'} = \frac{h}{2} = 0.85m$

La longueur du miroir est :

$$\overline{DC} = \overline{O'A'} - (\overline{CA'} + \overline{O'D})$$

$$\overline{DC} = \overline{O'A'} - \left(\frac{\overline{YA} + \overline{OY}}{2}\right)$$

$$\overline{DC} = H - \frac{H}{2}$$

$$\overline{DC} = \frac{H}{2} = 0.90m$$

Donc, la longueur et la position sont indépendantes de la distance entre l'adulte et le miroir.

**Exercice 5**

Un rayon lumineux se réfléchit successivement sur deux miroirs plans qui font entre eux un angle  $\theta$  (Figure 8.23.a).

1. Déterminer l'angle que fait le rayon émergent avec le rayon incident.
2. Que devient cette déviation si les deux miroirs plans font entre eux un angle  $\theta = 90^\circ$ .
3. Dans cette disposition, on place une source de lumière au point S (Figure 8.23.b) et un observateur se trouve juste derrière cette source.
  - 3.1. Combien d'images de S peut-on observer ?
  - 3.2. Vérifier que la source et ses images sont situées sur un cercle de centre O, intersection des deux miroirs.

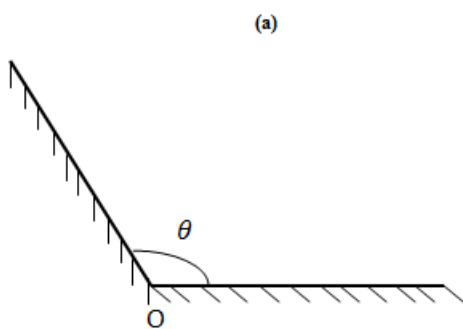


Fig. 8.23.a

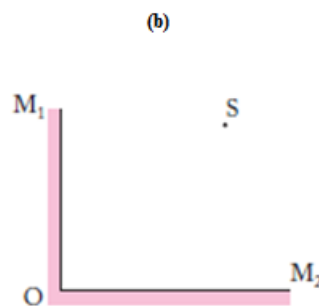


Fig. 8.23.b

**Solution**

1. Le rayon incident frappe le premier miroir au point A, avec l'angle  $i$  puis réfléchi avec le même angle, sa déviation est donnée :

$$D = \pi - 2i$$

Le rayon réfléchi par le premier miroir arrive ensuite au point B, avec un angle d'incidence  $i'$  pour le deuxième miroir puis réfléchi avec le même angle  $i'$ , dans ce cas sa déviation est :

$$D' = \pi - 2i'$$

La déviation totale est donnée :

$$D = D + D' = \pi - 2i + \pi - 2i'$$

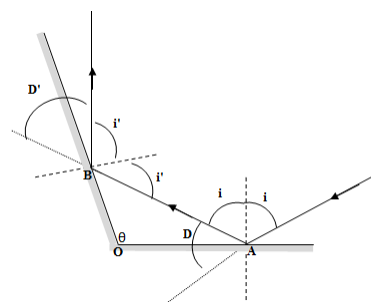
$$D = 2(\pi - i - i')$$

En considérant le triangle OAB, on a :

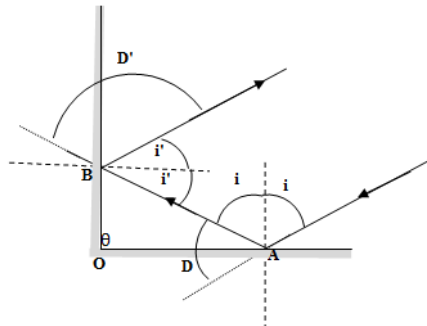
$$\theta + \frac{\pi}{2} - i + \frac{\pi}{2} - i' = \pi \Rightarrow \theta - i - i' = 0$$

L'expression de la déviation totale devient

$$D = 2(\pi - \theta)$$

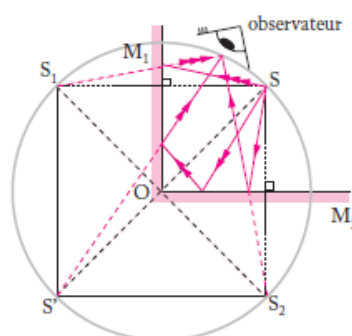


2. Si  $\theta$  est égal à  $\frac{\pi}{2}$ , on a la déviation  $D = 2\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \pi$ , dans ce cas le rayon est réfléchi parallèlement au rayon incident. Ce système est utilisé comme réflecteur idéal (par exemple sur les bateaux pour réfléchir les ondes radars).



3.1. Le nombre d'images de S à travers deux miroirs plans perpendiculaires :

S donne une image  $S_1$  directe à travers le miroir  $M_1$  et une image  $S_2$  directe à travers le deuxième miroir  $M_2$ . Dans les deux cas, le faisceau conique divergent issu de S donne après réflexion sur le miroir un faisceau conique divergent qui semble provenir d'un point situé derrière le miroir.



$S_1$  et  $S_2$  se comportent comme des sources virtuelles émettant un faisceau conique. Une partie du faisceau semblant provenir de  $S_1$  se réfléchit sur  $M_2$  et donne, après réflexion, un faisceau conique divergent qui semble provenir de  $S'$ , image de  $S_1$  à travers le miroir  $M_2$ . Dans le cas où, les deux miroirs sont placés perpendiculairement l'un à l'autre,  $S'$  correspond également à l'image de  $S_2$  à travers  $M_1$ . On obtient 3 images  $S_1$ ,  $S'$  et  $S_2$ .

3.2.  $S$ ,  $S'$ ,  $S_1$  et  $S_2$  appartiennent à un même cercle de centre O. Le rayon incident SO est réfléchi sur  $M_1$  et donne un rayon réfléchi semblant provenir de  $S_1$  tel que  $S_1O = OS$ . De la même manière, SO est réfléchi sur  $M_2$  donc  $S_2O = OS$ . Le rayon SO est également réfléchi sur le miroir  $M_1$  puis sur  $M_2$  (ou l'inverse), ainsi  $S'O = OS$ . On en déduit que  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S'$  sont équidistants de O donc, ils sont situés sur un même cercle de rayon SO et de centre O.

**Exercice6**

I. On considère un miroir sphérique concave, de centre C, de sommet S de rayon de courbure  $R = SC = -0.3$  m et un objet AB de hauteur 1 cm.

1. Localiser la position du foyer F.
2. Déterminer l'image A'B' de AB en précisant sa position, sa nature, son sens et sa taille dans les différents cas suivants :  $SA = -0.6$  m,  $SA = -0.2$  m,  $SA = 0.1$  m. Préciser dans chaque cas la nature de l'objet. Faire la construction de l'image dans les trois cas.

II. Considérons un miroir sphérique convexe, de centre C, de sommet S de rayon de courbure  $SC = 30$  cm et un objet AB de hauteur 1 cm.

1. Donner la position du foyer F.
2. Déterminer l'image A'B' de AB en précisant sa position, sa nature, son sens et sa taille dans les différents cas suivants :  $SA = -30$  cm,  $SA = 20$  cm. Préciser dans chaque cas la nature de l'objet. Réaliser la construction de l'image.

**Solution**

1. Par définition, le foyer objet F et le foyer image F' d'un miroir sont confondus donc, le

foyer F de miroir se trouve au milieu du segment [SC] et  $\overline{SF} = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2} = -0.15$  m.

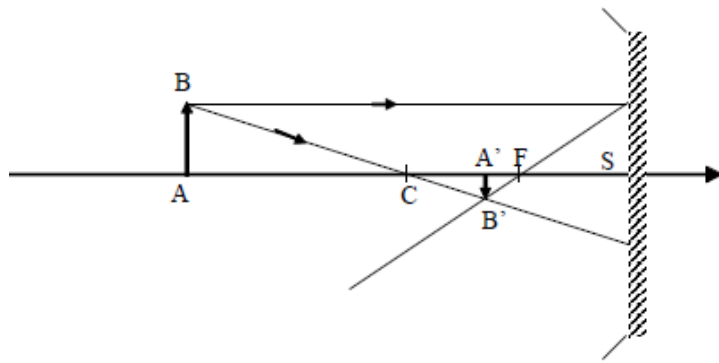
2. La position de A' est obtenue à partir de la formule de conjugaison :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} &= \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SF}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{SA}} \\ &\Rightarrow \overline{SA'} = \frac{\overline{SASC}}{2\overline{SA} - \overline{SC}} \end{aligned}$$

La formule de grandissement est donnée :  $\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$

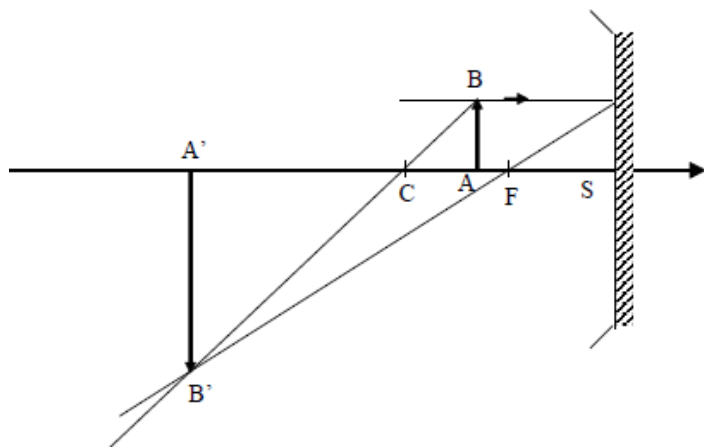
1<sup>er</sup> cas :  $\overline{SA} = -0.6$  m ,  $\overline{SF} = -0.15$  m

$\overline{SA'} = -0.2$  m ,  $\gamma = -\frac{1}{3}$  et  $\overline{A'B'} = 0.33$  donc, l'image et l'objet sont réels. L'image est renversée et trois fois plus petite que l'objet.

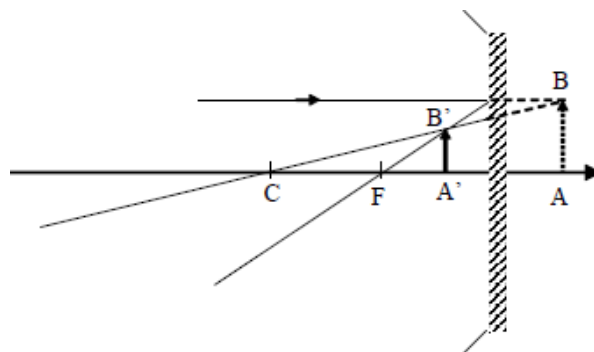


2<sup>ème</sup> cas :  $\overline{SA} = -0.2m$  ,

$\overline{SA'} = -0.6m$  ,  $\gamma = -3$  et  $\overline{A'B'} = 3$  donc, l'image et l'objet sont réels. L'image est renversée et trois fois plus grande que l'objet.



3<sup>ème</sup> cas :  $\overline{SA} = 0.1m$  , L'objet est dans ce cas virtuel. On trouve  $\overline{SA'} = -0.06m$  ,  $\gamma = 0.6$  et  $\overline{A'B'} = 6$  . L'image est donc, réelle et de même sens que l'objet.



II. 1. Le foyer F de miroir convexe se trouve au milieu de segment [SC=30cm] et SF=15 cm.

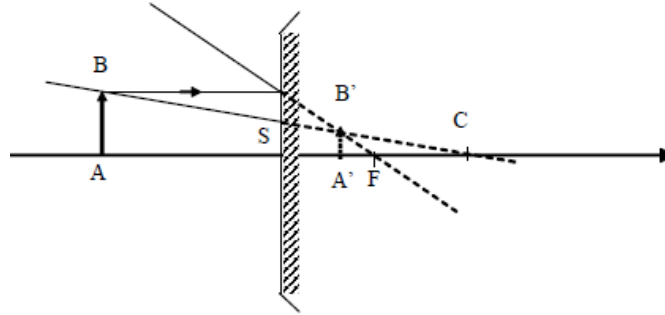
II. 2. La position de A' est obtenue à partir de la formule de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SF}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{SA}}$$

$$\Rightarrow \overline{SA'} = \frac{\overline{SASC}}{2\overline{SA} - \overline{SC}}$$

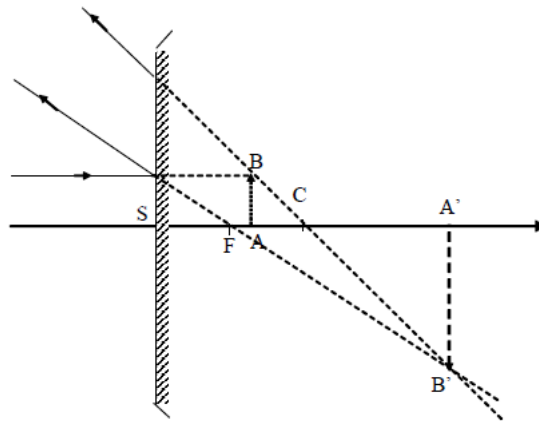
1<sup>er</sup> cas :

$\overline{SA} = -30\text{cm} \Rightarrow \overline{SA'} = 0.1\text{m}$ ,  $\gamma = 0.33$  et  $\overline{A'B'} = 0.33\text{cm}$  donc, l'image est virtuelle, elle est droite et plus petite que l'objet.



2<sup>ème</sup> cas :

$\overline{SA} = 20\text{cm} \Rightarrow \overline{SA'} = 0.6\text{m}$ ,  $\gamma = -3$  et  $\overline{A'B'} = -3\text{cm}$ . L'objet et l'image sont virtuels. L'image est renversée et trois fois plus grande que l'objet.

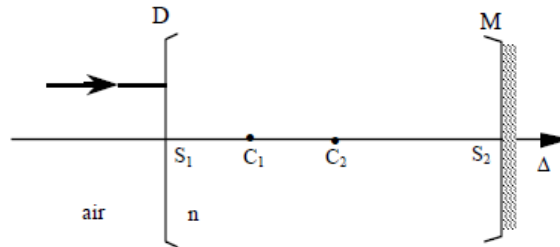


### Exercice 7

Un dioptre sphérique convexe de rayon  $S_1C_1 = 0.5\text{ m}$ , de centre  $C_1$ , de sommet  $S_1$  et d'axe optique  $\Delta$ , sépare l'air d'indice 1 d'un milieu d'indice  $n = 1.5$ . On place un miroir sphérique concave M, sur le même axe  $\Delta$ , de centre  $C_2$ , de sommet  $S_2$  et de rayon  $C_2S_2 = 2R$ , dans le milieu d'indice  $n$ .

1. Le centre  $C_2$  du miroir M est placé à la distance  $R$  de  $C_1$  ( $C_1C_2 = R$ ). Tracer la marche d'un rayon lumineux incident parallèle à l'axe  $\Delta$ .

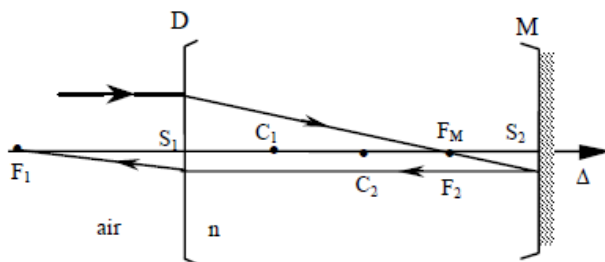
2. On déplace le miroir. Quelle doit être la position du centre  $C_2$  par rapport à  $C_1$  pour qu'un rayon lumineux incident parallèle à l'axe  $\Delta$  émerge du milieu d'indice  $n$ , confondu avec lui-même ?



**Solution**

1. Foyers  $F_1$  et  $F_2$  du dioptre sphérique :

$$\overline{S_1 F_1} = -\frac{n_1}{n_2 - n_1} \overline{S_1 C_1} = -2R \text{ et } \overline{S_1 F_2} = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \overline{S_1 C_1} = 3R \Rightarrow F_2 = \overline{S_2 C_2} = F_M$$



2. Pour que le rayon incident émerge du milieu d'indice  $n$  confondu avec lui-même, il faut que ce rayon se réfléchisse sur le miroir sur lui-même. Ce rayon doit donc, passer par le centre  $C_2$  de miroir considéré, ce qui entraîne que  $F_2$  doit être confondu avec  $C_2$

$$F_2 = C_2, \overline{C_1 C_2} = 2R$$

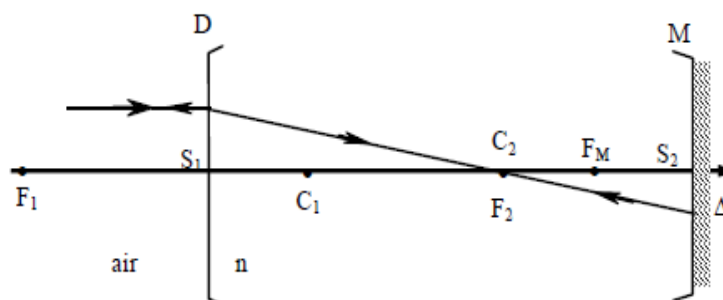


Fig. 8.23

**Exercice 8**

Un objet AB de 1cm est placé à une distance de 8cm d'une lentille convergente de distance focale  $f = 12$  cm.

1. Retrouver l'image par le calcul analytique et par l'exploitation graphique.

2. Un objet AB de 4cm placé à une distance de 64 cm d'une lentille divergente de distance focale  $f = 16$  cm. Déduire la nature de l'image et la valeur du grandissement ?

### Solution

D'après la relation de Descartes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \\ &\Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{12} - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

D'où  $q = -24\text{cm} < 0 \Rightarrow$  l'image est virtuelle

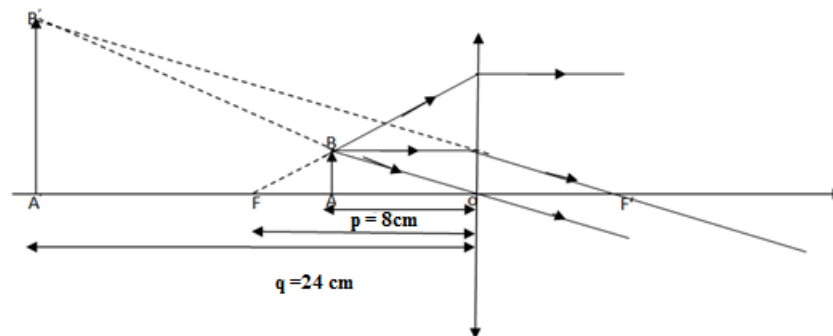
D'après la relation du grandissement de l'image :

$$\gamma = -\frac{q}{p} = \frac{24}{8} = 3\text{cm}$$

La taille de l'image :  $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{AB}\gamma$

La taille de l'image est  $\overline{A'B'} = 3\text{cm}$ .

Exploitation graphique



2. La nature de l'image et la valeur de grandissement d'une lentille divergente :

On applique la relation de Descartes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{1}{q} \\ &\Rightarrow \frac{1}{16} - \frac{1}{64} = \frac{3}{64} = \frac{1}{q} \end{aligned}$$

D'où, la distance de lentille divergente à l'image :  $q > 0 = 21.33\text{cm}$  donc, l'image est réelle.

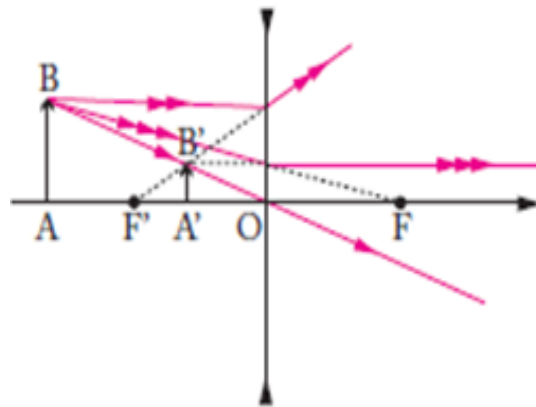
La valeur du grandissement est :  $\gamma = \frac{q}{p} = \frac{21.33}{64} = 0.33 > 0$

$\gamma = 0.33 > 0$ , alors, l'image n'est pas renversée (même sens que l'objet)

La taille de l'image est :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 0.33 \Rightarrow \overline{A'B'} = 0.33\overline{AB} = (0.33)4 = 1.32\text{cm}$$

Donc, la taille de l'image est plus petite que la taille de l'objet



### Exercice 9

On dispose d'une lentille convergente de distance focale  $f = 20\text{cm}$  dont on veut obtenir une image réelle 4 fois plus grande que l'objet.

1. Est-ce que l'image est renversée par rapport à l'objet ?
2. A quelle distance de l'objet se trouve l'image ?

### Solution

L'image réelle est plus grande que l'objet de 4 fois donc, la relation de grandissement de

l'image s'écrit :  $|\gamma| = \left| \frac{-q}{p} \right| > 1$

$$\gamma = \frac{-q}{p} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 4 \Rightarrow \gamma = \frac{-q}{p} = 4 \Rightarrow q = 4p$$

$$\text{L'image est renversée lorsque } \begin{cases} q > 0 & \text{image réelle} \\ p > 0 & \text{objet réel} \end{cases} \Rightarrow \gamma = \frac{-q}{p} < 0$$

On applique la relation de Descartes, on obtient alors:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{4p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow p = 25\text{cm}$$

$$p = 25\text{cm} > 0 \Rightarrow \text{L'objet est réel}$$

$$q = 4p = 100\text{cm} > 0 \Rightarrow \text{L'image est réelle}$$

2. La distance entre l'objet et l'image :

$$p + q = 25\text{cm} + 100\text{cm} = 125\text{cm}$$

### **Exercice 10**

Une lentille mince dont, la première face est plane donne un objet réel situé à 1 m de son sommet. Celle-ci, donne une image droite deux fois plus petite que l'objet. L'indice de la lentille vaut  $n = 3/2$ .

1. Calculer la vergence de la lentille.
2. Quelle est la nature de la lentille ? Calculer le rayon de courbure de la seconde face.

### **Solution**

1. La vergence de la lentille

D'après la relation du grandissement de l'image :

$$\gamma = \frac{-q}{p} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{q}{p} = -0.5 \Rightarrow -2q = p$$

La vergence de la lentille :

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f} = V = -2 + 1 = -1 \quad \text{dioptrie}$$

2.1 La nature de la lentille

La vergence la lentille est négative donc, la lentille est divergente.

2.2 Le rayon de courbure de la deuxième face est donné par :

$$V = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

La première face est plane ( $\frac{1}{R_1} = 0$ ), l'expression de la vergence s'écrit :

$$V = (n - 1) \left( -\frac{1}{R_2} \right) = (1.5 - 1) \left( -\frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow R_2 = \frac{1}{2V} = 50\text{cm}.$$

### **Exercice 11**

A l'aide d'une lentille mince convergente et de distance focale  $f=20\text{cm}$  on obtient une image  $A'B'$  d'un objet réel  $AB$  de hauteur 10 cm et placé à 50 cm de la lentille.

1. Calculer la position en donnant la nature, le sens et la grandeur de l'image obtenue.
2. Une lentille mince convergente, placée à 20cm d'un objet réel  $AB$ , donne une image virtuelle trois fois plus grande que l'objet ; quelle est la distance focale de cette lentille.

3. On considère les deux lentilles convergentes ( $L_1, L_2$ ) suffisamment minces pour que, celles-ci placées l'une contre l'autre définissent un centre optique qui est pratiquement confondu en O. Déduire la vergence de la lentille équivalente.
4. En accolant une lentille convergente de 5 dioptries à une lentille divergente de -3 dioptries, décrire la nature de la lentille équivalente.
5. Si, à la même lentille convergente, on accolait une lentille divergente de -6 dioptries, déduire la vergence de la lentille équivalente.

### Solution

#### 1. La position et la nature

On a la vergence de la lentille :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} = V \Rightarrow \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow p' = \frac{pf}{p - f}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Objet réel donc } p = +50\text{cm} \\ \text{Lentille convergente } f = +20\text{cm} \end{array} \right\} \Rightarrow p' = \frac{50 * 20}{50 - 20} = 33\text{cm}$$

L'image est de +33cm de la lentille ; elle est réelle (puisque nous trouvons pour  $p'$  une valeur positive).

Le sens et la grandeur de l'image obtenue

D'après la formule du grandissement, on obtient alors:

$$\gamma = -\frac{p'}{p} = \frac{33}{50} = 0.67\text{cm}.$$

Le grandissement étant négatif, l'image est renversée, sa grandeur est 0.67 fois celle de l'objet, soit :

$$A'B' = 10 * 0.67\text{cm} = 6.7\text{cm}$$

#### 2. La distance focale de cette lentille est :

Objet réel, donc  $p$  est positif

l'image est virtuelle, donc  $p'$  est négatif

Par la suite, le grandissement,  $\gamma = -\frac{p'}{p}$  est positif ; il est égale +3, nous déduisons :

$$\gamma = -\frac{p'}{p} = +3 \Rightarrow p' = -3p$$

En remplaçant  $p' = -3p$  dans l'équation de la vergence, obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} &= \frac{1}{f} = V \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{-3p} \\ &\Rightarrow f = \frac{3}{2}p \\ &\Rightarrow f = \frac{3}{2}20 \\ &\Rightarrow f = 30\text{cm} \end{aligned}$$

### 3. La vergence de la lentille équivalente

Soit un point objet A sur l'axe principal commun aux deux lentilles :

La lentille L<sub>1</sub> de distance focale f<sub>1</sub>, utilisée seule, donnerait de A<sub>1</sub> une image réelle A<sub>1</sub> telle que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f_1} = V_1 \quad (1)$$

Pour la lentille L<sub>2</sub>, de distance f<sub>2</sub> cette image A<sub>1</sub> devient un objet virtuel dont, elle donne l'image définitive A', nous avons donc, en comptant maintenant négativement le segment  $\overline{OA_1}$  (puisque A<sub>1</sub> est virtuel)

$$\frac{1}{-p_1} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_2} = V_2 \quad (2)$$

En sommant les équations (1) et (2) membre à membre on obtient :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = V_1 + V_2$$

Donc, la vergence de la lentille équivalente est :  $V = V_1 + V_2$

4. Le type de lentille équivalente si on accolait une lentille convergente de 5 dioptries à une lentille divergente de -3 dioptries est :

On obtient un système de vergence  $V = V_1 + V_2$

$V = 5 - 3 = 2\text{dioptries}$ , équivalent à une lentille convergente puisque  $V > 0$  de distance focale :  $f = 50\text{cm}$

5. La vergence de la lentille équivalente si, à la même lentille convergente, est accolée une lentille divergente de -6 dioptre est :

Le système aurait une vergence :  $V = V_1 + V_2$

$V = 5 - 6 = -1\text{dioptries}$ , équivalent à une lentille divergente puisque  $V < 0$  et de distance focale :  $f = -10\text{cm}$

# Bibliographie

- [1] T. Becherrawy, Vibrations et Ondes, Edition Lavoisier (2010).
- [2] M.Tamine et O.Lamrous, Vibrations et Ondes, Office des Publications Universitaire UMMTO, tome1 (1992).
- [3]M. Bendaoud, Vibrations et Ondes, Office des Publication Universitaire USTHB (1986).
- [4] K. Hammoum, Vibrations Ondes et Optique Polycopié d'Habilitation UMMTO (2015).
- [5] H. Djelouah, Vibrations Ondes Mécanique, Office des Publications Universitaire (2011).
- [6] W. Clarence de Silva. "Frontmatter" Vibration: Fundamentals and Practice, Edition Boca Raton: CRC Press LLC (2000).
- [7]J. Paul Mathieu, Vibrations et Phénomènes de Propagation (Oscillateurs), Edition Masson et C<sup>ie</sup>, tome1 (1974).
- [8]F.Bouklihacene et M. Mebrouki, Physique Vibration, Edition Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques de Tlemcen (2016).
- [9]J.Bruneaux et J. Matricon, Vibrations et Ondes, Edition Marketing S.A (2008).
- [10]A. St-Amand, Physique des Ondes, Edition Université de Québec Ecole de Technologie Supérieure, tome 2 (2008).
- [10]A. Maurel Gilles Bouchet, Optique Ondulatoire, Edition Belin (2003).
- [12]J. Marie Escanye et A. Durand, Physique et Biophysique Rappels de Cours, Exercices et QCM Corrígés, Edition Marketing S.A, tome1(2010).
- [13]J.Bernard, Valeur Sons et Lumière, Edition Belin (2008).
- [14]L. Jannaud ,15 Problèmes d'Optique Géométrique et d'Electronique, Edition Marketing S.A (2006).
- [15]P.Brendre et M.Sauzeix, Cours Méthode Exercices Résolus, Edition Bréal (2003).
- [16]P. Colin et D. Fiel, Cours Optique, Edition Marketing S.A (1999).