REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQHE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER

Spécialité : Mathématiques

option : Mathématiques appliquées à la gestion

par : BOUZIANE Ahmed

Sujet :

L'EQUILIBRE DE BERGE DANS LE MODELE OLIGOPOLE DE COURNOT

Sous la direction de : ACHEMINE Farida

Devant le jury d'examen composé de :

LESLOUS Fadila	MAA	Présidente
FAHEM Karima	MCB	Examinatrice
ACHEMINE Farida	MCA	Encadreur

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier plus que vivement ma promotrice de mémoire Mme ACHEMINE Farida qui a su, au long de ce travail, non seulement diriger mon mémoire et me faire part de ses nombreuses idées mais surtout pour la confiance qu'elle m'a témoigné en acceptant de diriger ce travail. Je suis heureux de pouvoir remercier Mme LESLOUS Fadila pour avoir accepté de présider le jury de soutenance. Toute ma gratitude va également à Mme FAHEM Karima pour avoir accepté de juger ce travail. Je n'oublierai pas de remercier ma famille qui m'a toujours encouragé et soutenu. Que tous ceux qui ont de près ou de loin contribué à l'aboutissement de ce travail trouvent ici l'expression de mes vifs remerciements.

Table des matières

Introduction

La théorie des jeux peut être définie comme un outil d'analyse des comportements humains. Elle permet de décrire et d'analyser de nombreuses relations économiques et sociales sous la forme de jeux stratégiques. Ses domaines d'applications sont multiples. En effet, même si les économistes ont été les premiers à s'approprier cet outil, différents secteurs tel que la sociologie ou bien encore les chercheurs en sciences politiques s'appuient désormais sur cette théorie.
L'équilibre de Nash est le concept de solution le plus connu et le plus utilisé dans les applications de la théorie des jeux. Cette notion d'équilibre a été introduite par John Forbes Nash (1951). Cet équilibre est un état dans lequel aucun joueur ne souhaite changer sa stratégie en tenant compte des stratégie choisies par les autres joueurs.
L'équilibre de Berge est un concept de solution de la théorie des jeux nommé d'après le mathématicien Claude Berge. En se basant sur la notion d'equilibre pour une coalition R relativement à une coallition S introduite par Berge (Berge, 1957), Zhukovskii a introduit l'équilibre de Berge (Zhukovskii, 1994). Cet équilibre peut être utilié comme une solution alternative lorsque un jeu ne possède pas d'équilibre de Nash ou en possède plusieurs. Il vise à capturer un type d'altruisme plutôt que le jeu purement non-coopératif. Alors qu'un équilibre de Nash est une situation dans laquelle chaque joueur d'un jeu stratégique s'assure qu'ils recevront personnellement le plus de gains compte tenu des stratégies des autres joueurs. Dans un équilibre de Berge, chaque joueur s'assure que tous les autres joueurs recevront le plus de gains possibles.
Dans notre travail, nous allons présenter des résultats concernant l'equilibre de Berge dans le modèl Oligopole de Cournot (Kudryavtsev1 et al, 2017).
Ce mémoire est reparti en trois chapitres et organisé comme suit.
Le premier chapitre sera consacré aux notions générales de la théorie des jeux. Nous ferons un rappel des définitions essentielles sur les jeux ainsi que les concepts de solutions. Dans

le deuxième chapitre, nous nous intéresserons principalement à deux équilibre connu dans les jeux sous forme normale, à savoir l'équilibre de Nash et l'équilibre de Berge .
Dans l'éqilibre de Nash nous allons présenter quelques définitions et critiques aussi que les conditions de son existence. Dans l'équilibre de Berge nous allons présenter quelques propriétés et nous étudierons les conditions de son existence. Dans le troisième chapitre, nous exposons le Modèle mathématique de l'Oligopole de Cournot avec une comparaison de l'éqilibre de Nash et l'équilibre de Berge.

Chapitre 1

Notions générales de la théorie des jeux

1.1 Inroduction

La théorie des jeux consiste à étudier les situations de conflits qui peuvent exister entre des individus en interaction. Ces conflits sont souvent présents dans notre vie réelle, sociale, économique ou tout autre domaine où les individus interagissent entre eux. Le but principal pour chaque individu consiste à savoir comment réagir et quelle sera la décision à prendre pour satisfaire son intérêt personnel selon le principe de la rationnalité qui vise à maximiser son utilité (gain, profit) ou minimiser son coût. Pour répondre à ces besoins, plusieurs études ont été faites pour pouvoir analyser et, dans certains cas, résoudre ces conflits. Cette étude de conflits d'intérêts est appelée Théorie des jeux .

1.2 Définitions essentielles

Définition (concept) de jeu : On appelle jeu toute interaction entre des agents (joueurs) qui sont conduits à faire des choix parmis un certains nombre d'action dans un cadre défini à l'avance (les règles du jeu).
Le résultat de ces choix est appellé "issue du jeu".
On associe à cette issue une quantité appellé "gain".

Définition 1.1. ***La stratégie :***
Une stratégie d'un joueur est un choix parmi la liste de décisions qu'il envisage de prendre.

Le résultat des choix de tous les joueurs constitue une issue du jeu.

Définition 1.2. ***Conflit :***

Un conflit est une situation où les questions suivantes ont un sens.

- *qui participe à cette situation ?*
- *quels sont les résultats possibles de cette situation ?*
- *qui est (et comment) intéressé (e) par ces résultats ?*

Définition 1.3. ***Joueur :***

Toute personne qui participe au conflit et susceptible de prendre une décision est appelée joueur.

Définition 1.4. ***Interaction :***

Toute action choisie par un joueur aura une influence sur celles des autres joueurs.

Définition 1.5. ***Gains(profit) :***

Le gain d'un joueur est le bénéfice négatif (perte) ou positif qui résulte des choix de tous les joueurs.

Définition 1.6. ***La rationnalité :***

La rationalité individuelle d'un joueur est une règle de maximisation du profit individuel. En outre, en théorie des jeux, on suppose que tous les joueurs ont tous une bonne connaissance des règles du jeu. Autrement dit, les règles d'un jeu consistent à définir.

- *la liste des joueurs*
- *les stratégies (choix) disponibles pour chaque joueur*
- *les gains de chaque joueur pour toutes les combinaisons de stratégies de tous les joueurs*
- *l'hypothèse de chaque joueur est rationnelle*

Il faut cependant ajouter les règles qui vont déterminer la manière de jouer. A savoir, si les joueurs décident en même temps ou l'un après l'autre et dans quel ordre ?. Si le jeu n'est joué qu'une seule fois ou bien s'il est répété. Ces règles supplémentaires seront souvent définies de manière implicite, mais elles peuvent aussi faire l'objet d'une décision prise avant de jouer.

Définition 1.7. ***Coalition :***

Dans un jeu, des joueurs ont parfois la possibilité de collaborer et former un groupe de *joueurs ayant les mêmes intérêts. En termes de théorie des jeux un tel groupe est appelé coalition. Si dans un jeu, chaqùe joueur adhère à une coalition on obtient une structure de coalition qu'on définit aussi comme une partition de l'ensemble des joueurs.*

Définition 1.8. ***Accord contraignant :***
Un accord entre les joueurs est dit contraignant s'il existe un organe de côntrole qui peut garantir son application, par exemple, un état, un gouvernement,...

1.3 Classification des jeux

La diversité des situations conflictuelles qu'on peut rencontrer en pratique engendre différent types de jeux et des méthodes spécifiques de résolution.

1.3.1 Selon les relations entre les jeuours

Jeux coopératifs : On dit que le jeu est coopératif, si les joueurs peuvent se grouper dans des coalitions, où le choix de leurs stratégies est décidé en commun, afin d'améliorer les gains de tous les joueurs coalisés. Notons que les coalitions sont formées ou définies au début du jeu, ainsi donc on ne parlera pas de coalitions se formant durant le jeu, ou devenant interdites. Les jeux coopératifs se divisent en deux catégories : les jeux sans paiements latéraux et les jeux avec paiements latéraux.

Jeux non coopératifs : On appelle jeu non coopératif, un jeu où les joueurs ne peuvent pas former de coalitions, par contre ils peuvent communiquer entre eux et échanger les informations, se mettre d'accord sur telle ou telle issue sans jamais contracter un accord contraignant. Les raisons essentielles d'un tel comportement peuvent être l'impossibilité de communication, les intérêts des joueurs sont opposés, la perte de confiance entre les joueurs, ou bien il y a interdiction de former des coalitions.

1.3.2 Selon l'information que possède chaque jeuour

Jeux à information complète : On dit qu'un jeu est à information complète si chacun des participants connaît.

— 1. son ensemble de stratégies .

— 2. l'ensemble des stratégies des autres joueurs .

— 3. toute la gamme des issues possibles, et les gains qui leurs sont associés.

Cette classe des jeux regroupe tous les cas où toute l'information pertinente pour le jeu est observable par tous. Par exemple on garde les jeux d'échecs.

Jeux à information incomplète : Un jeu est dit à information incomplète, lorsque les joueurs manquent d'information à propos :

— des stratégies disponibles.

— des fonctions gains (des résultats provenant du choix des diverses stratégies).

Jeux à information parfaite : Un jeu est dit à information parfaite si chacun des joueurs, au moment de choisir son action, a une connaissance parfaite de l'ensemble des décisions prises antérieurement par les autres joueurs.

Jeux à information imparfaite : Un jeu est à information imparfaite si un des joueurs ne connait pas, à un moment du déroulement du jeu, ceux qu'a joué un autre joueur. Ceci peut arriver dans le cas où on cache l'information aux joueurs ou parce que les joueurs jouent simultanément.

1.3.3 Autres classe des jeux

jeux à deux perssonne : Les jeux à deux personnes, ou duels, constituent la plus grande partie des jeux courants, comme les échecs, ou encore les jeux d'équipes (coalitions). Les jeux à deux personnes ont fait l'objet d'analyses poussées par les théoriciens.

jeux à n-perssonne ($n \geq 3$) : Un jeu à n-personnes est un jeu où le nombre de joueurs intervenant dans le jeu est supérieur à deux.

jeux à somme nulle : On dit qu'un jeu à deux personnes est à somme nulle si le montant total des gains à la fin de la partie est nulle, en d'autre terme si le montant total gagné par un joueur est égal au montant perdu par l'autre. Les échecs ou le poker sont des jeux à somme nulle car les gains d'un joueur se font exactement aux dépens d'un autre.

Jeux monocritères et jeux multicritères : Selon le nombre de critères pris en considération par chaque joueur, on peut distinguer les jeux monocritères (chaque joueur possède une fonction gain) et les jeux multicritères (chaque joueur s'intéresse à plus d'un critère).

1.4 Représentations des jeux

1.4.1 Forme normale

On appelle jeu sous forme normale tout jeu se présentant comme suit.

$I = \{1, 2, ..., n\}$: est l'ensemble des joueurs .

chaque joueur i a une stratégie $x_i \in X_i$

X_i : est l'ensemble des stratégies du joueur i .

Une fois chaque joueur à choisi sa stratégie $x_i, X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}, n_i \in \mathbb{N}^*$ on obtient un uplet $x \in X$.

$X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ est l'ensemble des issues du jeu .

A chaque issue x du jeu est associé un gain i.e :

$$f_i : X = \prod_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow \mathbb{R} \tag{1.1}$$

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto f_i(x) \tag{1.2}$$

$f_i(x)$ est la fonction gain de joueur $i, i \in I$.

Dans ce jeu les joueurs interviennent une seule fois (de façon simultanée).

Dans ce jeu, un joueur connait $f_i, (i = \overline{1, n})$ et X mais au moment de choisir sa stratégie, il ne connait pas celles choisies par les autres .

On note un jeu sous forme normale par

$$\langle I, \{X_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in I} \rangle. \tag{1.3}$$

Jeu sous forme normale à deux joueurs

Un jeu sous forme normale à deux joueurs, avec $I = \{1, 2\}$, est décrit par le jeu :

$$\langle \{X_1, X_2\}, \{f_1, f_2\} \rangle \tag{1.4}$$

Exemple 1.1. *Deux adolescents en vélo foncent l'un vers l'autre dans un chemin étroit.*

Personne ne veut sortir du chemin. Chacun des deux adolescents, qu'on note J_1 et J_2, ont deux choix possibles : soit il passe (F), soit il ne passe pas (C). Nous avons les possibilités suivantes.

— *Si J_1 décide de choisir (F) et J_2 décide aussi de choisir (F). Les deux enfants vont se bousculer et sortir de la route, tous les deux n'ont aucune satisfaction. Supposons que leurs gains sont alors de -1 pour J_1 et de -1 pour J_2.*

— *Si J_1 décide de choisir (F) et J_2 décide de choisir (C). Le joueur J_1 aura une satisfaction totale et aura un gain égal à 10 et J_2 n'aura aucune satisfaction d'où son gain sera nul (0).*

— *Si J_1 décide de choisir (C) et J_2 décide de choisir (F). Le joueur J_2 aura une satisfaction totale et aura un gain égal à 10 et J_1 n'aura aucune satisfaction d'où son gain sera nul (0).*

— *Si J_1 décide de choisir (C) et J_2 décide aussi de choisir (C). Les deux enfants ne vont pas se bousculer et aucun d'entre eux ne sortira de la route, ils ne sont pas satisfaits. Supposons que leurs gains sont alors de 0 pour J_1 et de 0 pour J_2.*

Donc, la matrice des gains associée est.

	(F)	*(C)*
(F)	*(-1,-1)*	*(10,0)*
(C)	*(0,10)*	*(0,0)*

Jeux finis à n joueurs

Définition 1.9. *On dit qu'un jeu sous forme normale est fini, si chacun des joueurs a un ensemble fini de stratégies, c'est-à-dire, le cardinal de $X_i = |X_i| < +\infty, \forall i \in I$.*

Définition 1.10. *Un jeu fini à deux joueurs est un jeu où l'ensemble des joueurs est réduit à deux $(I = \{1, 2\})$ et chacun des deux joueurs a un nombre fini de stratégies. On peut le représenter par un tableau et sous la forme suivante.*

$$\langle X_1, X_2, f_1, f_2 \rangle. \tag{1.5}$$

Jeux finis à deux joueurs à somme nulle

On dit qu'un jeu à deux joueurs est à somme nulle, si la somme totale des gains est nulle. En d'autres termes, si la somme totale gagnée par un joueur est égal au montant perdu par l'autre.

Définition 1.11. *On appelle jeux matricielle tout jeu à deux joueurs à somme nulle est représenté sous la forme suivante.*

$$\langle X_1, X_2, f_1, f_2 \rangle. \tag{1.6}$$

où

— $I = \{1, 2\}$, *l'ensemble des joueurs.*
— $|X_i| < \infty, i \in \{1, 2\}$.
— $f_1(x_1, x_2) = -f_2(x_2, x_1)$.

1.4.2 Forme extensive (étendue)

Un jeu est appelé ainsi, lorsque les règles du jeu stipulent que les joueurs interviennent les uns après les autres, dans un ordre précis et que le nombre d'actions parmi lesquelles leurs choix s'exercent est fini. La représentation qui semble la plus appropriée consiste à tracer un "arbre"(appelé arbre de Kuhn). Une telle représentation est dite forme extensive. Elle symbolise, en effet, très bien l'idée de succession et d'enchaînement des coups. Un jeu sous sa forme extensive est donné par un arbre de jeu contenant un nœud initial, des nœuds de décisions, des nœuds terminaux et des branches reliant chaque nœud à ceux qui lui succèdent.

Définition 1.12. *Un jeu sous forme extensive est défini par*

— *l'ensemble I de $n \geq 2$ joueurs, indexés par $i = 1, ..., n$. Dans le cas des jeux à deux joueurs,$n = 2$.*
— *pour chaque nœud de décision, le nom du joueur qui a le droit de choisir une stratégie à ce nœud.*
— *pour chaque joueur i, la spécification de l'ensemble des actions permises à chaque nœud où il est susceptible de prendre une décision.*
— *la spécification des gains de chaque joueur à chaque nœud terminal.*

Exemple 1.2. *(Jeu de Pierre, Ciseaux et Papier) Supposons qu'il y a deux enfants, qu'on note J_1, J_2, jouant ensemble au jeu de Pierre, Ciseaux et Papier. A chaque affrontement, chacun des deux enfants a le choix entre de jouer Pierre (Pi) ou ciseaux (C) ou papier (Pa). Comme chacun des deux joueurs a un ensemble fini de stratégies, alors on se retrouve face à un jeu fini à deux joueurs, Nous avons les situations suivantes.*

— *Si J_1 joue (Pa) et J_2 joue (Pi) alors le papier enveloppe la pierre, donc J_1 gagne et reçoit un gain égal à 1, J_2 perd et aura une perte égale à -1.*
— *Si J_1 joue (Pa) et J_2 joue (Pa), alors aucun des deux enfants ne va ni gagner, ni perdre. Donc, J_1 et J_2 auront des gains nuls.*
— *Si J_1 joue (Pi) et J_2 joue (C) alors la pierre casse les ciseaux, donc J_1 perd et aura une perte égale à -1, J_2 gagne et reçoit un gain égal à 1.*
— *Si J_1 joue (Pi) et J_1 joue (Pi), alors aucun des deux enfants ne va ni gagner, ni perdre. Donc, J_1 et J_2 auront des gains nuls.*
— *Si J_1 joue (C) et J_2 joue (C), alors aucun des deux enfants ne va ni gagner, ni perdre Donc, J_1 et J_2 auront des gains nuls.*
— *Si J_1 joue (C) et J_2 joue (Pa) alors les ciseaux coupent le papier, donc J_1 gagne et reçoit un gain égal à 1, J_2 perd et aura une perte égale à -1.*
— *Si J_1 joue (Pi) et J_2 joue (Pa) alors le papier enveloppe la pierre, donc J_1 perd et aura une perte égale à -1 , J_1 gagne et reçoit un gain égal à 1.*
— *Si J_1 joue (Pa) et J_2 joue (C) alors les ciseaux coupent le papier, donc J_1 perd et aura une perte égale à -1 , J_2 gagne et reçoit un gain égal à 1.*
— *Si J_1 joue (C) et J_2 joue (Pi) alors la pierre casse les ciseaux, donc J_1 gagne et reçoit un gain égal à 1 , J_2 perd et aura une perte égale à -1.*

La fonction des gains du premier joueur prend les valeurs suivantes.

$$f_1(x_1,x_2)\begin{cases} 0, & si\ x_1 = x_2 \\ 1, & si \begin{cases} x_1 = Pa, & x_2 = Pi \\ x_1 = C, & x_2 = Pa \\ x_1 = Pi, & x_2 = C \end{cases} \\ -1, & si \begin{cases} x_1 = Pa, & x_2 = C \\ x_1 = C, & x_2 = Pi \\ x_1 = Pi, & x_2 = Pa \end{cases} \end{cases}$$

Ce jeu est un jeu à 2 joueurs à somme nulle, donc

$$f_1(x_1, x_2) = -f_1(x_2, x_1)$$

Donc, la matrice des gains associée est :

	Pi	*C*	*Pa*
Pi	*(0,0)*	*(1,-1)*	*(-1,1)*
C	*(-1,1)*	*(0,0)*	*(1,-1)*
Pa	*(1,-1)*	*(-1,1)*	*(0,0)*

La forme extensive de ce jeu est représentée dans la figure suivante.

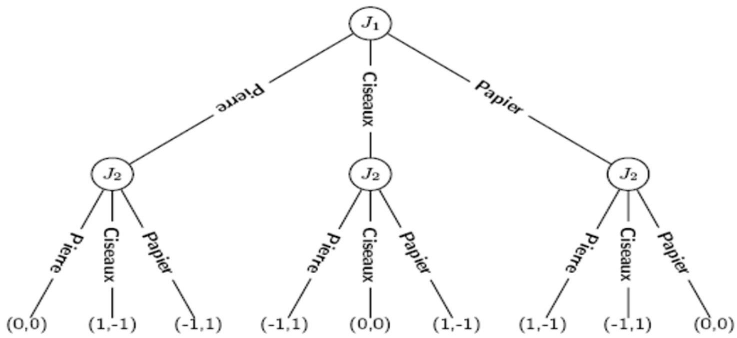

FIGURE 1.1 – Forme extensive du jeu :"Pierre, Ciseaux et Papier".

1.5 Applications de la théorie des jeux

Dans ce paragraphe nous allons citer quelques applications de la théorie des jeux .

En politique : Il y a plusieurs domaines des sciences politiques pour lesquels s'applique la théorie des jeux ; par exemple, ceux qui ont trait aux problèmes de vote, du pouvoir, de la diplomatie du marchandage ou de la négociation, ains que la formation de coalitions entre groupes politiques .

En économie : Un exemple d'application de la théorie des jeux à l'économie est donné par le duopole de cournot.

Duopole de Cournot (1938) **:** C'est un jeu sous forme normale (stratégique) dans lequel les concurents, qui vendent des produits identiques, sont suposés décider de la quantité qu'ils vont produire. La solution suggerée est celle d'un équilibre non coopératif (équilibre de Nash). Une série de modèles de duopole de cournot faisant appel explicitement à la théorie des jeux incorpore les coûts de stockage, les fluctuations de la demande et les contraintes sur la production.

En sociologie : Plusieurs problèmes de la sociologie peuvent être abordés par la théorie des jeux. Ainsi, la formation de coalitions au sein des tribus a été étudiée par Bath. Les jeux de statut fournissent un modèle pour l'étude des hiérarchies sociales et de la recherche de statut. Les juristes ont aussi recours à la théorie des jeux, qu'ils appliquent dans la selection des membres d'un jury .

En des domaines militaires : Trois types de jeux à somme nulle sont avérés être intéressant d'un point de vue militaire : les jeux d'affectation, les duels et les jeux de poursuite et de recherche.

Chapitre 2

Equilibres pour un jeu sous forme normale : Equilibre de Nash et Equilibre de Berge

2.1 Introduction

L'équilibre de Nash (Nash, 1951) est l'un des concepts de solution le plus utilisé en théorie des jeux et dans ses application dans des domaines variés tels que : le sociologie, l'économie, les domaine militaires, la biologie, la politique,... En se basant sur la notion d'équilibre pour une coalition R relativement à une coallition S introduite par Berge (Berge, 1957), Zhukovskii a introduit l'équilibre de Berge (Zhukovskii, 1994). Cet équilibre peut être utilisé comme une solution alternative lorsque un jeu ne possède pas d'équilibre de Nash ou en possède plusieurs. Dans ce cahpitre, nous allons présenter deux concepts de solutions : l'équilibre de Nash et l'équilibre de Berge ainsi que leurs propriétés et des conditions suffisantes d'éxistence de ces deux concepts.

2.2 Equilibre de Nash

John Nash a développé une méthode pour solutionner les jeux avec interactions appelée "équilibre de Nash, 1951". Ce concept est considéré comme étant la solution la plus efficace aux différents types de jeux à conflit. Le théoricien John Nash a démontré qu'il est possible à n'importe quelle situation conflictuelle sous certaines conditions de se retrouver en équilibre qui la mène à la stabilité, où tous les joueurs seront satisfaits de leurs gains et aucun d'eux ne cherchent à changer sa situation.

2.2.1 Définitions

Définition 2.1. *Une issue $\overline{x} \in X$ du jeu J est dite équilibre de Nash si elle vérifie :*

$$\forall i \in I, \forall y_i \in X_i, f_i(y_i, \overline{x}_{I-i}) \leq f_i(\overline{x}) \tag{2.1}$$

Interprétation

1. L'équilibre de Nash signifie qu'aucun joueur $i \in I$ ne peut augmenter strictement son gain en retenant une stratégie différente de celle que lui attribue l'équilibre si les autres joueurs maintiennent leurs stratégies d'équilibre.
2. La stabilité de cet équilibre vient du fait qu'aucun joueur n'a intérêt à effectuer un changement unilatéral de stratégie, au vu du choix des autres.

Remarque 2.1. *L'équilibre de Nash est une issue où simultanément chaque joueur i choisit la meilleure stratégie compte tenu du meilleur choix des autres joueurs.*

Exemple 2.1. *(Dilemme du prisonnier) Deux cambrioleurs, notés* 1 *et* 2*, sont arrêtés par la police et placés en garde à vue dans des cellules différentes. La police n'a pas assez de preuves, donc elle leur propose un marché : Si les deux coopèrent en ne se dénonçant pas mutuellement, chacun va écoper d'un an de prison. Si l'un trahit en accusant l'autre, alors celui qui a trahi va être libéré, et celui qui s'est tu va écoper* 10 *ans de prison. Si les deux se dénoncent mutuellement, alors chacun va écoper de* 5 *ans de prisons.(les lignes si suspect* 1*, les colonnes si suspect* 2 *)*

joueur 2

joueur 1		*Se taire (ST)*	*Dénoncer (D)*
	Se taire (ST)	*(1,1)*	*(10,0)*
	Dénoncer (D)	*(0,10)*	*(5,5)*

Pour le Suspect 1*,* $f_1(ST, ST) = -1 < f_1(D, ST) = 0$

Pour le Suspect 2*,* $f_2(ST, ST) = -1 < f_2(ST, D) = 0$

Le profil (D,D) est un équilibre de Nash. En effet :

$f_1(D, D) = -5 > f_1(ST, D) = -10$

$f_2(D, D) = -5 > f_2(D, ST) = -10$

Il est possible de définir l'équilibre de Nash d'une manière constructive en utilisant les fonctions de meilleures réponses ou fonctions de réaction des joueurs.
La fonction de meilleure réponse d'un joueur i est la meilleure stratégie que le joueur i peut choisir face au choix x_{I-i} des autres joueurs.

Définition 2.2. *Dans un jeu à n personnes la fonction de meilleure réponse du joueur i notée $R_i(.)$ est une fonction définie sur X_{I-i} qui associe à chaque combinaison de stratégies x_{I-i} des autres joueurs, la stratégie $\overline{x}_i \in R_i(x_{I-i})$ qui maximise son gain :*

$$f_i(\overline{x}_i, x_{I-i}) \geq f_i(x_i, x_{I-i}), \forall x_i \in X_i \tag{2.2}$$

On considère le jeu donné par la matrice suivante.

B

A

	y_1	y_2
x_1	(-1,-1)	(-10,0)
x_2	(0,-10)	(-8,-8)

Nous résumons les meilleures réponses des joueurs A et B dans le tableau suivant.
On pose $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ R_1(y) & R_2(x) \\ y_1 \to x_2 & x_1 \to y_2 \\ y_2 \to x_2 & x_2 \to y_2 \end{pmatrix}$$

Dans la colonne de A, $y_1 \to x_2$ signifie que la meileure réponse du joueur A à la stratégie y_1 du joueur B est de jouer x_2.
Pour une meilleure visualisation, on peut représenter les meilleures réponses dans la matrice gain. Nous représentons par des $\blacksquare$ la fonction de réaction du joueur A et par des $\bigstar$ celle de B. Nous obtenons le tableau suivant,

B

A

	y_1	y_2
x_1		★
x_2	■	■★

Cette analyse nous montre que face au choix de x_2 de A, B ne peut rien faire de mieux que de choisir y_2 et inversement, face au choix de y_2 de B, A ne peut rien faire de mieux que de choisir x_2 . Ainsi (x_2, y_2) est l'équilibrevde nash. Il correspond à l'intersection des courbes de réaction.

2.2.2 Quelques propriétés de l'équilibre de Nash

Un jeu ne possède pas forcément un équilibre de Nash

Exemple 2.2. *Considérons le jeu suivant,*

joueur 2

joueur 1

	s_1	s_2
t_1	*(1,0)*	*(0,1)*
t_2	*(0,1)*	*(1,0)*

On vérifie immédiatement que ce jeu ne comporte pas d'équilibre de Nash : quel que soit le couple de stratégies (t_i, s_j) envisagés $(i, j = 1, 2)$, l'un des deux joueurs aurait eu plus (1 contre 0) s'il avait modifié son choix (celui de l'autre étant inchangé).

Exemple 2.3. *Correspondant pièces "Matching Pennies"Deux personnes choisissent, simultanément, de montrer la tête ou la queue d'une pièce de monnaie. S'ils montrent le même côté, la personne 2 paie la personne 1 par dollar ; s'ils montrent des côtés différents, la personne 1 paie la personne 2 par dollar. Chaque personne se soucie seulement du montant d'argent qu'elle reçoit, et (naturellement !) préfère recevoir plus que moins. Un jeu stratégique qui modélise cette situation est illustré dans le tableau suivant. (Dans cette représentation des préférences des joueurs, les gains sont égaux aux montants d'argent impliqués. Nous pourrions aussi bien travailler avec une autre représentation, par exemple ,2 pourrait remplacer chaque 1, et 1 pourrait remplacer chaque -1.)*

joueur 2

joueur 1

	tête	*queue*
tête	*(1,-1)*	*(-1,1)*
queue	*(-1,1)*	*(1,-1)*

Dans ce jeu, les intérêts des joueurs sont diamétralement opposés (un tel jeu est appelé « strictement compétitif ») : le joueur 1 *veut faire la même chose que l'autre joueur, alors que le joueur* 2 *veut faire l'action inverse.Le jeu correspondant pièces ("Matching Pennies") n'a pas d'équilibre Nash.*

Un jeu peut posséder plusieurs équilibres de Nash (pluaralité des équilibres)

Comme il existe des jeux qui ne possèdent pas d'équilibre de Nash, il en existe qui possèdent plusieurs équilibres de Nash. La question qui se pose alors, lequel choisir ?

Exemple 2.4. $I = (A, B)$ $X_A = \quad X_B = \{R, NR\}$ *avec* R *: ralentir et* NR *: ne pas ralentir.*

B

A

	R	*NR*
R	*(2,2)*	*(0,4)*
NR	*(4,0)*	*(-2,-2)*

Pour A : $4 > 2$ *et* $0 > -2$*. Pour B, on a :* $4 > 2$ *et* $0 > -2$
Nous avons deux équilibre de Nash,(R, NR) *et* (NR, R)*.*

L'équilibre de Nash et la rationalité individuelle

Définition 2.3. *On appelle stratégie prudente ou stratégie maximin une stratégie* $\overline{x_i}$ *vérifiant :*

$$\inf_{x_{I-i}\in X_{I-i}} f_i(\overline{x_i}, x_{I-i}) = \sup_{x_i\in X_i} \inf_{x_{I-i}\in X_{I-i}} f_i(x_i, x_{I-i})$$

Le paiement $\alpha_i = \sup_{x_i\in X_i} \inf_{x_{I-i}\in X_{I-i}} f_i(x_i, x_{I-i})$ est le paiement minimal garanti du joueur i, il est aussi appelé niveau de sécurité.
Toute issue $\overline{x} \in X$ vérifiant :

$$\forall i \in I, \sup_{x_i\in X_i} \inf_{x_{I-i}\in X_{I-i}} f_i(x_i, x_{I-i}) \leq f_i(\overline{x})$$

est appelée "issue individuellement rationnelle" ou issue vérifiant le principe de la rationnalité individuelle.

Proposition 2.1. *L'équilibre de Nash est une "issue individuellement rationnelle" ie : Si $\overline{x} \in X$ est un équilibre de Nash alors :*

$$\sup_{x_i \in X_i} \inf_{x_{I-i} \in X_{I-i}} f_i(x_i, x_{I-i}) \leq f_i(\overline{x})$$

L'équilibre de Nash et la rationalité collective

Définition 2.4. *"Efficacité au sens de Paréto"*
Une issue x du jeu J est dite dominée par l'issue $y \in X$ si on a :

$$\forall i \in I, f_i(x_1, ..., x_n) \leq f_i(y_1, ..., y_n)$$

$$\exists i_0 \in I, f_{i_0}(x_1, ..., x_n) < f_{i_0}(y_1, ..., y_n)$$

On appelle optimum de Paréto une issue qui n'est dominée par aucune autre issue. On dit d'une telle issue qu'elle vérifie le principe de la rationalité collective.
L'équilibre de Nash n'assure pas la rationalité collective : l'exemple type qui montre celà est le "dilemme du prisonnier".

B

A

	Se taire	Dénoncer
Se taire	(2,2)	(0,3)
Dénoncer	(3,0)	(1,1)

En effet, l'équilibre de Nash (dénonce , dénonce) est dominée par (se tait, se tait). Ce qui veut dire qu'il n'est pas Paréto-optimal.

Interchangeabilité et équivalence des équilibres

Définition 2.5. *Deux équilibres de Nash x et y sont équivalents si*

$$\forall i \in I, f_i(x) = f_i(y)$$

Définition 2.6. *Deux équilibres $x = (x_i, x_{I-i})$ et $y = (y_i, y_{I-i})$ sont interchangeables si : (x_i, y_{I-i}) et (y_i, x_{I-i}) sont aussi des équilibre de Nash.*

Remarque 2.2. *1) L'interchangeabilité et l'équivalence des équilibres sont des propriétés assez rares de l'équilibre de Nash.*
2) Si les équilibre de nash d'un jeu sont équivalents, alors on pourra prédire ce qui va résulter de ce jeu malgré la multiplicité.

2.2.3 L'existance de l'équilibre de Nash

Pour obtenir, dans le cas général, des conditions suffisantes d'existence d'au moins un équilibre de Nash, on doit faire des hypothèses de convexité sur les ensembles de stratégies et les fonctions d'utilités. Plus précisement on a le théorème de Nash suivant.

Théorème 2.1. *(Théorème de Nash, 1951)*
Si pour tout $i \in I$, les ensembles X_i sont non vides, convexes et compacts, dans un jeu J supposons que :
1) $\forall i \in I$, la fonction $x \to f_i(x)$ est continue sur X.
2) $\forall i \in I$, la fonction $x_i \to f_i(x)$ est quasi-concave sur X_i.

Alors le jeu J possède au moins un équilibre de Nash.

Pour démontrer ce théorème on démontre d'abord le résultat suivant.

Proposition 2.2. *Dans le jeu sous forme normale J, on considère la fonction*

$$\Phi : X \times X \longmapsto \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(y_i, x_{I-i}) - f_i(x) =$$

$$[f_1(y_1, x_{I-1}) - f_1(x) + f_2(y_2, x_{I-2}) - f_2(x) + ... + f_n(y_n, x_{I-n}) - f_n(x)]$$

. Si $\exists \quad x^0 \in X, \quad \not/ \forall y \in X, \quad \Phi(x^0, y) \leq 0$, *alors x^0 est un équilibre de Nash.*

Démonstration. Supposons : $\exists \quad x^0 \in X, \quad \not/ \forall y \in X, \quad \Phi(x^0, y) \leq 0$.
Pour : $y = (x_1^0, x_2^0, ..., x_{i-1}^0, y_i, x_{i+1}^0, ..., x_n^0)$ i.e $y = (y_i, x_{I-i}^0)$ on a :
$\Phi(x^0, y) \leq 0 \Longleftrightarrow \Phi(x^0, y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(y_i, x_{I-i}^0) - f_i(x^0) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow$

$$[f_i(y_i, x_{I-i}^0) - f_i(x^0)] + [\sum_{j \backslash j \neq i}^{n} f_j(y_j, x_{I-j}^0) - f_j(x^0)] \leq 0$$

Comme y_i est quelconque, alors on a

$$f_i(y_i, x^0_{I-i}) - f_i(x^0) \leq 0,$$

Par conséquent

$$\forall y_i \in X_i : \quad f_i(y_i, x^0_{I-i}) \leq f_i(x^0_i, x^0_{I-i})$$

Puisque i est quelconque dans I, alors

$$\forall i, \forall y_i \in X_i : \quad f_i(y_i, x^0_{I-i}) \leq f_i(x^0)$$

i.e x^0 est un équilibre de Nash. □

Pour démontrer le théorème de Nash, nous allons utiliser le théorème de Ky-Fan (Aubin,1984).

Théorème 2.2. *(Ky-Fan,1972)*
Supposons que X et Y sont deux ensembles non vides, compactes et convexes. Considérons

$$g : X \times Y \longmapsto \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto g(x, y)$$

Si

1. *$x \longmapsto g(x, y)$ continue.*
2. *$y \longmapsto g(x, y)$ concave.*

alors $\exists \overline{x} \in X \diagup g(\overline{x}, y) \leq g(y, y), \forall y \in X$.

La preuve du théorème de Nash

Supposons que toutes les conditions du Théorème 2.1 sont satisfaite dans le jeu (J). Considérons la fonction
$\Phi : X \times X \longmapsto \mathbb{R}$
$(x, y) \longmapsto \Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\{f_i(y_i, x_{I-i}) - f_i(x)\}$
Comme la fonction $x \longmapsto \Phi(x, y)$ continue et la fonction $x \longmapsto \Phi(x, y)$ est concave, alors

en utilisant l'inégalité de Ky-Fan, on obtient

$$\exists \overline{x} \in X \diagup \Phi(\overline{x}, y) \leq \Phi(y, y), \forall y \in X$$

Comme $\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \{f_i(x_i, x_{I-i}) - f_i(x)\}$, donc

$$\Phi(y, y) = \sum_{i=1}^{n} \{f_i(y_i, y_{I-i}) - f_i(y)\} = 0.$$

Par conséquent,

$$\exists \overline{x} \in X \diagup \Phi(\overline{x}, y) \leq 0.$$

D'après la proposition précédente $\overline{x}$ est un équilibre de Nash.

2.3 Equilibre de Berge

En se basant sur la notion d'équilibre pour une coalition R relativement à une coalition S introduite par Berge (Berge, 1957), Zhukovskii a introduit l'équilibre de Berge (Zhukovskii, 1994). Cet équilibre peut être utilisé comme une solution alternative lorsque un jeu ne possède pas d'équilibre de Nash ou en possède plusieurs et le contexte non coopératif du jeu n'offraient au joueur qu'un seul choix (choisir sa propre stratégie) dont le gain ne dépendrait plus que des stratégies préconisées par les autres joueurs.

2.3.1 Définitions

Définition 2.7. *On dit que issue x est un équilibre de Berge pour le jeu J si :*

$$\forall i \in I, \forall x_{I-i} \in X_{I-i}, f_i(\overline{x}_i, x_{I-i}) \leq f_i(\overline{x}) \Leftrightarrow f_i(\overline{x}) = \max_{x_{I-i}} f_i(\overline{x}_i, x_{I-i})$$

Si un joueur $i \in I$ joue sa stratégie $\overline{x}_i$, de l'équilibre de Berge $\overline{x}$, il ne peut obtenir un gain maximum que si le reste des joueurs $I - i$ veut bien jouer (ou est dans l'obligation de jouer) sa stratégie $\overline{x}_{I-i}$ de l'équilibre $\overline{x}$.

Autrement dit que si le reste des joueurs $I - i$ dévie de la stratégie d'équilibre, il fera perdre le joueur i dont le gain serait au plus $f_i(\overline{x})$.

Cette volonté ou obligation d'aide, nécessaire à l'apparition de l'équilibre de Berge, clas-

serait ce dernier parmi les issues stables du jeu. Notons que, contrairement à l'équilibre de Nash qui est stable par rapport aux stratégies x_i de chaque joueur i, l'equilibre de Berge est stable par rapport aux stratégies x_{I-i} des joueurs $I - i$.
Pour voir plus clair, considérons le jeu J dans le cas où il n'y a que 2 personnes. Dans ce cas l'équilibre de Berge sera défini comme suit.

Définition 2.8. *On dit que $\overline{x}$ est un équilibre de Berge si*

$$\forall x_2 \in X_2, f_1(\overline{x}_1, x_2) \leq f_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$$

$$\forall x_1 \in X_1, f_2(x_1, \overline{x}_2) \leq f_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$$

Il s'interprète comme suit, si le joueur 1 joue la statégie $\overline{x}_1$ de l'équilibre, il ne peut obtenir un gain maximum que si le joueur 2 veut bien (ou est dans l'obligation) de jouer $\overline{x}_2$ Il en est de même si le joueur 2 joue la stratégie $\overline{x}_2$.

Définition 2.9. *Un équilibre de Berge qui est aussi un équilibre de Nash est appelé équilibre de Berge-Nash.*

Il serait intéressant de connaître les conditions d'existence de l'équilibre de Berge-Nash pour un tel équilibre bénéficie des propriétés des deux concepts de solution en même temps. Citons l'exemple d'une situation conflict où l'équilibre de Berge est la solution.

Exemple 2.5. *Considérez le jeu illustré par le tableau suivant (Tazdait, Larbani and Nessah, 2007).*

	A	*B*
A	*(-1.40 , 0.94)*	*(-0.99 , 0.93)*
B	*(-1.01 , 0.98)*	*(-1 , 1)*

Il y a deux joueurs 1 *et* 2, *et chacun a deux stratégies disponibles. Nous énumérons les stratégies de* 1 *comme lignes dans le tableau, et les stratégies de* 2 *comme colonnes. Ce jeu n'a pas d'équilibre de Nash en stratégies pures. D'autre part, le profil de stratégies* (B, B) *est un équilibre de Berge dans le sens de "Zhukovskii". La stratégie A est attrayante pour le joueur* 1 *parce qu'il peut obtenir son meilleur gain dans le jeu ,i.e* -0.99, *mais dans*

le cas où le joueur 2 choisit la stratégie A, il obtient son plus gros gain dans le jeu, i.e -1.40. *En outre, la stratégie B est sa stratégie maxmin.*
En effet, le minimum qu'il obtient en choisissant A est de $-1,40$, *et en choisissant B il obtient* -1.01. *Ainsi, le joueur que j'aurai tendance à choisir la stratégie B. Il peut atteindre l'équilibre de Berge* (B, B) *en annonçant qu'il a choisi la stratégie B. En effet, dans ce cas, le joueur 2 choisira automatiquement la stratégie B pour qu'il obtiendra son meilleur gain dans le jeu, i.e 1.*

Nous présentons maintenant deux jeux admettant chacun un équilibre de Berge.

Exemple 2.6. *Le joueur 1 vend un bien indivisible et doit fixer le prix : il a deux stratégies, selon qu'il demande un prix élevé ou modéré. Il fait bénéfice même au prix modéré. Le joueur 2 est interessé par ce bien même au prix élevé. Il décide d'acheter ou non. Cette situation est décrite par le jeu suivant, où chaque joueur a 2 stratégies :*

Le joueur 2

Le joueur 1

	achète	*n'achète pas*
prix élevé	*(2 , 1)*	*(0 , 0)*
prix modéré	*(1 , 2)*	*(0 , 0)*

Il y a un unique équilibre de Berge : (prix modéré, achète) et un unique équilibre de Nash Paréto-optimal (prix élevé, achète).
(Prix modéré, achète) est un équilibre de Berge car, si le joueur 1 (vendeur) décide de vendre à prix modéré, le joueur 2 n'a qu'à acheter, et si le joueur 2 décide d'acheter, avec une volonté d'aide de la part du joueur 1 (vendeur), ce dernier vendra à prix modéré (puisque même à ce prix, il fait bénéfice).
Si nous retenons l'issue (prix élevé, achète) comme solution, nous accordons implicitement l'avantage au vendeur dans ce jeu. L'argument serait : l'acheteur n'a qu'à proposer un prix élevé, il ne redoutera plus alors que l'irrationnalité du vendeur, mais il est assuré d'un profit maximal en face d'un acheteur rationnel. Mais, on peut renverser l'argument. D'après la forme normale, l'acheteur seul a le pouvoir d'empêcher toute transaction en refusant d'acheter (le vendeur lui ne peut refuser la vente). Quel que soit le prix proposé, il est irrationnel pour l'acheteur de refuser d'acheter. Mais pourquoi alors l'acheteur ne se servirait-il pas de cette irrationnalité pour obliger le vendeur à vendre à prix modéré ?. S'il manifeste avec entêtement son refus d'achat à prix élevé, alors le vendeur rationnel n'a

plus qu'a accepter de vendre à prix modéré : en adoptant un comportement apparement irrationnel, l'acheteur a donc été parfaitement rationnel puisqu'il a obtenu le maximum absolu de son utilité !. Ainsi le premier argument suggère l'équilibre de Nash (vendre à prix élevé, achète) comme solution, mais il a fallu d'une "menace" (l'irrationnalité de l'acheteur) pour renverser l'argument et suggérer l'équilibre de Berge (vendre à prix modéré, achète) comme solution du jeu.
Un unique équilibre de Nash paréto-optimal est donc parfois trop vulnérable aux menaces pour mériter d'être baptisé solution du jeu, et l'équilibre de Berge peut très bien être cette solution.

Exemple 2.7. *Deux automobilistes préssés qui roulent sur deux routes distinctes, arrivent simultanément à un croisement. Chacun a le choix entre s'arrêter et ne pas ralentir. On admet que chacun d'eux préfère plutôt perdre un peu de temps que d'avoir un accident. Cette situation est décrite par le jeu suivant :*

	stoppe	*passe*
stoppe	*(1 , 1)*	*(1 , 2)*
passe	*(2 , 1)*	*(0 , 0)*

Les deux équilibres de Berge de ce jeu sont (passe,stop) et (stoppe, passe). Comment réagissent les deux joueurs pour que ces deux issues soient solution du jeu ?. Chaque automobiliste essaie de convaincre l'autre qu'il est engagé de façon irréversible à passer (en roulant par exemple si vite qu'il n'a manifestement plus le temps de freiner ou en faisant semblant de ne pas avoir vu l'autre voiture) et bien sûr aucun n'a envie d'avoir un accident, et dans ce cas, l'un d'entre eux doit stopper et l'autre passera. En adoptant l'irrationnalité simulée (accélerer en simulant une profonde ivresse), un joueur peut obliger l'autre à adopter une stratégie d'équilibre de Berge.
Notons que dans ce jeu, les deux équilibres de Berge coïncident avec les deux équilibres de Nash.

2.3.2 Propriétés et critiques de l'équilibre de Berge

Il ya des jeux qui ne possèdent pas d'équilibre de Berge

Considérons le jeu suivant.

M=

	1	2
1	(0,1)	(1,0)
2	(1,0)	(0,1)

On vérifie facilement que ce jeu ne comporte pas d'équilibre de Berge.

Il ya des jeux qui possèdent plusieurs équilibres de Berge

Alors qu'un jeu peut ne pas posséder un équilibre de Berge, il peut arriver qu'un jeux en possède trop. Considérons le jeu suivant dont la matrice gain est donnée comme suit.

M=

	1	2
1	(1,-1)	(2,-2)
2	(1,3)	(0,-5)

Ce jeu possède 2 équilibres de Berge $(1, 2)$ et $(2, 1)$.

Les équilibres de Berges ne sont pas équivalents

En considérant le jeu ci-dessus (2.3.2), le joueur 1 gagne $f_1(1, 2) = 2$ en adoptant l'équilibre $(1, 2)$ et $f_1(2, 1) = 1$ en adoptant l'équilibre $(2, 1)$. Le joueur 2 gagne $f_2(1, 2) = -2$ en adoptant l'équilibre $(1, 2)$ et $f_2(2, 1) = 3$ en adoptant l'autre équilibre. Les équilibres ne sont donc pas équivalents. Face à une telle situation où il y a pluralité des équilibres non équivalents i.e qui ne donnent pas le même gain, lequel des équilibres les joueurs vont ils jouer ?. Par conséquent la question de l'unicité est particulièrement importante.

Les équilibres de Berge ne sont pas interchangeables

On dit que les équilibres de Berges $(x_i, x_{I-i}), (y_i, y_{I-i})$ sont interchangeables si et seulement si (x_i, y_{I-i}) et (y_i, y_{I-i}) sont des équilibres de Berge.
En reprenant le deuxième exemple de la sous-section 2.3.2 , nous remarquons facilement que $(1, 2)$ et $(2, 1)$ sont des équilibres de Berge mais, ils ne sont pas interchangeables. En effet, la stratégie 2 est un équilibre pour le joueur 1 que si le joueur 2 joue la stratégie 1. La situation est symétrique pour le joueur 2. Lorsqu'un jeu possède plusieurs équilibres non interchangeables, un joueur ne peut choisir une stratégie d'équilibre que s'il sait auxquels des équilibres les autres joueurs s'apprêtent à jouer.

2.3.3 Existence de l'équilibre de Berge

Nous établirons l'existence de l'équilibre de Berge en utilisant l'inégalité de Ky-Fan . Dans ce qui suit, nous nous appuierons sur l'approche utilisant l'inégalité de Ky-Fan (Larbani,1998).

Théorème 2.3. *Supposons les conditions suivantes satisfaites :*

1. *Les ensembles* X_i,$i = \overline{1,n}$ *sont non vides, convexes et compacts.*
2. *Les fonctions* $x \to f_i(x)$,$i = \overline{1,n}$ *sont continues sur* X *.*
3. *Les fonctions* $x_{I-i} \to f_i(x)$ *sont concaves sur* X_{I-i} ,$\forall x_i \in X_i$, $i = \overline{1,n}$ *.*
4. $\forall x \in X, \exists y \in X$ *tel que* $\forall i \in I, f_i(x_i, t_{I-i}) \leq f_i(x_i, y_{I-i}), \forall t_{I-i} \in X_{I-i}$.

Alors, le jeu J *admet au moins un équilibre de Berge.*

Pour démontrer ce Théorème, nous avons besoin de définir la fonction à valeurs réelles suivante.

$$\Phi : X \times \hat{X} \to \mathbb{R}$$

$$(x, \hat{y}) \to \Phi(x, \hat{y}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i, \hat{y}_{I-i}) - f_i(x) \tag{2.3}$$

où $x \in X, \hat{y} = (\hat{y}_{I-1}, ..., \hat{y}_{I-n}) \in \hat{X} = \prod_{i=1}^{n} X_{I-i}$.

Remarque 2.3. *Notons que par construction,*

$$\forall x \in X, \max_{\hat{y} \in \hat{X}} \Phi(x, \hat{y}) \geq 0 \tag{2.4}$$

En effet, soit $x \in X$*, si* $\hat{y} = (x_{I-1}, x_{I-2}, ..., x_{I-n})$*. On obtient,*$\Phi(x, \hat{y}) = 0$.
Par conséquent, $\forall x \in X, \max_{\hat{y} \in \hat{X}} \Phi(x, \hat{y}) \geq 0$.

Afin de déterminer la relation entre l'équilibre de Berge et la fonction Φ, on a le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Sous l'hypothèse de la continuité des fonctions* $f_i(i = \overline{1,n})$ *et la compacité des ensembles* $X_i(i = \overline{1,n})$*, on a l'équivalence suivante.*
$\overline{x} \in X$ *est un équilibre de Berge du jeu* J *si et ssi :*

$$\max_{\hat{y} \in \hat{X}} \Phi(\overline{x}, \hat{y}) = 0.$$

Démonstration. Soit $\overline{x} \in X$ un équilibre de Berge du jeu J.

$f_i(\overline{x}_i, t_{I-i}) \leq f_i(\overline{x}), \forall t_{I-i} \in X_{I-i}, \forall i \in I$ donc,

$\Phi(\overline{x}, \hat{y}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\overline{x}_i, \hat{y}_{I-i}) - f_i(\overline{x}) \leq 0, \forall \hat{y} \in \hat{X}$. i.e $\max\limits_{\hat{y} \in \hat{X}} \Phi(\overline{x}, \hat{y}) \leq 0$
En tenant compte de $\forall x \in X, \max_{\hat{y} \in \hat{X}} \Phi(x, \hat{y}) \geq 0$ on a,$\max_{\hat{y} \in \hat{X}} \Phi(x, \hat{y}) = 0$.

Réciproquement, soit $\overline{x} \in X$ tel que $\max\limits_{\hat{y} \in \hat{X}} \Phi(\overline{x}, \hat{y}) = 0$. Ceci est équivalent à

$\forall \hat{y} \in \hat{X}, \Phi(\overline{x}, \hat{y}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(\overline{x}_i, \hat{y}_{I-i}) - f_i(\overline{x}) \leq 0.$
Pour un $i \in I$, i fixé on a

$$\forall \hat{y} \in \hat{X}, \Phi(\overline{x}, \hat{y}) = f_i(\overline{x}_i, \hat{y}_{I-i}) - f_i(\overline{x}) + \sum_{j \neq i, j=1}^{n} f_j(\overline{x}_j, \hat{y}_{I-j}) - f_j(\overline{x}) \leq 0.$$

Pour $\hat{y} \in \hat{X}$ tel que $\hat{y}_{I-i}$ quelconque dans X_{I-i} et $\hat{y}_{I-j} = \overline{x}_{I-j}, \forall j \neq i$ on a :
$\displaystyle\sum_{j \neq i, j=1}^{n} f_j(\overline{x}_j, \hat{y}_{I-j}) - f_j(\overline{x}) = 0.$
De la dernière inégalité, on déduit que $\forall \hat{y}_{I-i} \in X_{I-i}, f_i(\overline{x}_i, \hat{y}_{I-i}) \leq f_i(\overline{x})$.

i est choisi arbitrairement, donc $\forall i \in I, \forall y_{I-i} \in X_{I-i}, f_i(\overline{x}_i, y_{I-i}) \leq f_i(\overline{x})$.

Autrement dit $\overline{x}$ est un équilibre de Berge du jeu J . □

La démonstration du théorème d'éxistence

Introduisons la fonction à valeurs réelles suivante :

$$\Phi : X \times X \in \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i, y_{I-i}) - f_i(x) \tag{2.5}$$

La condition 4 du Théorème 2.4 d'éxistence implique :$\forall x \in X, \exists y \in X$ tel que $\forall \hat{y} \in \hat{X}$
$\Phi(x, \hat{y}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i, \hat{y}_{I-i}) - f_i(x) \leq \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i, y_{I-i}) - f_i(x) = \Phi(x, y)$ i.e.

$$\forall x \in X, \exists y \in X, \quad \forall \hat{y} \in \hat{X}, \Phi(x, \hat{y}) \leq \Phi(x, y) \tag{2.6}$$

La fonction définie par 2.5 possède les propriétés suivantes :

1. Φ est définie sur $X \times X$ dans $\mathbb{R}$ avec X compact et convexe.

2. La fonction $x \mapsto \Phi(x, y)$ est continue sur X ,$\forall y \in X$ vu la continuité des fonctions

$f_i(i = \overline{1,n})$ sur X.

3. La fonction $y \mapsto \Phi(x, y)$ est concave sur X,$\forall x \in X$ vu la concavité des fonctions $x_{I-i} \mapsto f_i(x)$ sur $X_{I-i}, (i = \overline{1,n}), \forall x_i \in X_i$

Elle vérifie donc toutes les conditions de l'inégalité de Ky-Fan, par conséquent :

$$\exists \overline{x} \in X, \quad \max_{y \in X} \Phi(\overline{x}, y) \leq \max_{y \in X} \Phi(y, y) \tag{2.7}$$

Or par construction, $\Phi(y, y) = 0, \forall y \in X$, donc, $\exists \overline{x} \in X, \max_{y \in X} \Phi(\overline{x}, y) \leq 0$. De (2.6) et (2.7), on déduit que, $\Phi(\overline{x}, \hat{y}) \leq 0, \forall \hat{y} \in \hat{X}$ .i.e. $\max_{\hat{y} \in \hat{X}} \Phi(\overline{x}, \hat{y}) \leq 0$, et de (2.4) on obtient, $\max \Phi(\overline{x}, \hat{y}) = 0$.

Le lemme (2.1) implique alors que $\overline{x}$ est un équilibre de Berge du jeu J.

Nous illustrons maintenant les résultats précédents par des exemples :

Exemple 2.8. *(Krim F., 2001) Supposons que un jeu J :*

$n = 3, I = \{1, 2, 3\}, \quad X_1[-1, 1], \quad X_2[0, 1], \quad X_3[\frac{1}{2}, 1], \quad x = (x_1, x_2, x_3)$

$f_1(x) = -x_1x_2 - x_1^2x_3^2 - \frac{x_2^2}{2}$,

$f_2(x) = -3x_1x_2 - x_1^2x_3^2$,

$f_3(x) = -2x_1 + x_3^3$

Les conditions $1, 2, 3$ *du théorème (2.3) sont vérifiées.*

Vérifions la 4^{eme}. $\forall x \in X$ *,avec* $-1 \leq x < 0$,$\exists \overline{y} = (-1, -x_1, \frac{1}{2}) \in X$ *tel que :* $f_i(x_i, t_{I-i}) \leq f_i(x_i, \overline{y}_{I-i}), \forall t_{I-i} \in X_{I-i}, \forall i \in I$.

$\forall x \in X$, *avec* $0 \leq x \leq 1$,$\exists \overline{y} = (-1, 0, \frac{1}{2}) \in X$ *tel que :* $f_i(x_i, t_{I-i}) \leq f_i(x_i, \overline{y}_{I-i}), \forall t_{I-i} \in X_{I-i}, \forall i \in I$.

D'où, $\forall x \in X$,$\exists y \in X / f_i(x_i, t_{I-i}) \leq f_i(x_i, \overline{y}_{I-i}), \forall t_{I-i} \in X_{I-i}, \forall i \in I$.

Ce jeu admet donc au moins un équilibre de Berge.

D'après ce qui précède, nous avons,

$f_1(-1, y_{I-1}) \leq f_1(-1, 0, \frac{1}{2}), \quad \forall y_{I-1} \in X_{I-1}$.

$f_2(0, y_{I-2}) \leq f_2(-1, 0, \frac{1}{2}), \quad \forall y_{I-2} \in X_{I-2}$.

$f_3(\frac{1}{2}, y_{I-3}) \leq f_3(-1, 0, \frac{1}{2}), \quad \forall y_{I-3} \in X_{I-3}$.

D'où, $\sum_{i=1}^n \quad \max_{y_{I-i} \in X_{I-i}} f_i(\overline{x}_i, y_{I-i}) - f_i(\overline{x}) = 0$, *avec* $\overline{x} = (-1, 0, \frac{1}{2})$.

Ce qui est équivalent à

$$\max_{\hat{y} \in \hat{X}} \quad \sum_{i=1}^n f_i(\overline{x}_i, \hat{y}_{I-i}) - f_i(\overline{x}) = 0,$$

avec $\overline{x} = (-1, 0, \frac{1}{2})$

C'est-à-dire $\max_{\hat{y} \in \hat{X}} \Phi(\overline{x}, \hat{y}) = 0,$ *avec* $\overline{x} = (-1, 0, \frac{1}{2})$. *Donc* $(-1, 0, \frac{1}{2})$ *est un équilibre de Berge de ce jeu.*

Chapitre 3

Le modèle Oligopole de Cournot

3.1 Introduction

L'oligopole de Cournot (Cournot,1838) désigne une structure de marché constitué d'un nombre limité d'entreprises n $(n \geq 2)$, qui dominent le marché, vendent des biens ou services similaires. Ce modèle repose sur l'hypothèse que les n entreprises sont identiques et ne concluent pas d'accord pour harmoniser leurs prix, et sur l'hypothèse que les n entreprises supposent que les entreprises rivales cherchent à maximiser leurs profits. Dans un oligopole de Cournot, les entreprises sont en compétition quant à la quantité produite, et elles décident quelle quantité produire simultanément. Ainsi, les entreprises décident de leurs quantités produite en fonction de ce qu elles pensent être la quantité produite par les entreprises rivales et de manière à maximiser leurs profits. On est donc dans une situation de non coopération enre les entreprises, d'où l'intérêt de la modélisation par la théorie des jeux non coopératifs (jeux sous forme normale).

3.2 Modèle mathématique

On considère le modèle d'oligopole de Cournot ayant n entreprises qui representen les n joueurs. On note l'ensemble de ces n joueurs par $I = \{1, 2, ..., n\}$.
Le volume du produit délivré par l'entreprise i (le joueur i) $(i \in I)$ au cours de la période considérée est q_i. En outre, chacune des entreprises ne peut pas mettre les marchandises sur le marché pour un montant inférieur à $\alpha > 0$, et plus de β, c'est-à-dire on a les

inégalités suivantes.

$$\alpha \leq q_i \leq \beta, \quad i = 1, ..., n. \tag{3.1}$$

La deuxième inégalité en (3.1) indique simplement que, la capacité de production de chacune des entreprises (producteurs) est limité.
L'inégalité de gauche dans l'inégalité (3.1) indique qu'il y a un arbitre dans le modèle. L'arbitre permet d'avoir sur le marché suffisement d'entreprises pour garantir une fourniture de la marchandise dont la valeur n'est pas inférieure à une valeur prédéterminée α, quel que soit le prix actuel du marché.
Les coûts de production du joueur i ($i \in I$) sont supposés être linéairement dépendants de la quantité du produit fourni q_i et peuvent être représentés comme $cq_i + d$, où c et d sont respectivement la variable moyenne (*average variable*)et les coûts fixés (fixed costs). Sur le marché, le prix des produits est fixé en fonction de la demande, qui est également considérée comme dépendant linéairement du montant total

$$\overline{q} = q_1 + q_2 + ... + q_n$$

Nous avons le prix p est linéairement dépendant de la production,et il est donné par la formule

$$p(\overline{q}) = a - b\overline{q}. \tag{3.2}$$

où $a = const > 0$ (le prix initial des marchandises), $b > 0$ est une constante positive (elasticity coefficient) qui montre comment le prix baisse par rapport à la disponibilité de l'unité du produit.
Supposons que le prix est déterminé de manière à équilibrer l'offre et la demande. Cela signifie que chaque fabricant vend tout ce qu'il produit.
Le revenu du joueur $i(i \in I)$ dans ce cas est donné par la formule suivante.

$$p(\overline{q})q_i = (a - b\overline{q})q_i = \left[a - b\sum_{K\in I} q_K\right] q_i.$$

Et son profit (revenus moins coûts) est

$$\pi_i(q_1, ..., q_n) = \left[a - b\sum_{K\in I} q_K\right] q_i - (cq_i + d) \tag{3.3}$$

On fait l'hypothèse que la direction de chacune des entreprises, lorsqu'elle définit son champ de production, se base sur le comportement rationnel de ses concurrents (les joueurs sont rationnels).
On obtient donc, la modélisation mathématique de l'oligopole de Cournot, par le jeu non coopératif à n-personnes.

$$\langle I, Q, (\pi_1, \pi_2; ..., \pi_n)\rangle \tag{3.4}$$

$I = \{1, 2, ..., n\}$ est l'ensemble des n joueurs.
$Q = Q_1 \times Q_2 \times ... \times Q_n$, où $Q_i = [\alpha; \beta]$,$i \in I$ est l'ensemble de stratégies du jouers i.
On note $q = (q_1, q_2, ..., q_n) \in Q$ le profile de straégies.
$\pi_i(q_1, ..., q_n) = \left[a - b\sum_{k\in I} q_k\right] q_i - (cq_i + d)$ est la fonction gain du joueur $i \in I$.

Proposition 3.1. *Sous la condition $a > c$(le prix initial des marchandises supérieur à le coût de production), le profile de stratégie de l'équilibre de Berge dans (3.4) est $q^B = (q_1^B, q_2^B, ..., q_n^B)$ et $q_i^B = \alpha$ $(i \in \mathbb{N})$. Les gains (profits) des joueurs sont*

$$\pi_i^B = \pi_i(q^B) = [a - nb\alpha]\alpha - (c\alpha + d) = [a - c]\alpha - bn\alpha^2 - d$$

Démonstration. Le profile de stratégie d'équilibre de Berge dans le jeu (3.4) est donné par le système de n inégalités

$$\pi_i(q_i^B, q_{I-i}) \leq \pi_i(q^B), \forall q \in \mathbf{Q}(i \in I) \tag{3.5}$$

En utilisant (3.3), les inégalités (3.5) sont présentées comme suit.

$$\begin{cases} [a - b(q_1^B + q_2 + ... + q_n)]q_1^B - (cq_1^B + d) \leq \\ \qquad \leq [a - b(q_1^B + q_2^B + ... + q_n^B)]q_1^B - (cq_1^B + d), \\ [a - b(q_1 + q_2^B + ... + q_n)]q_2^B - (cq_2^B + d) \leq \\ \qquad \leq [a - b(q_1^B + q_2^B + ... + q_n^B)]q_2^B - (cq_2^B + d), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [a - b(q_1 + q_2 + ... + q_n^B)]q_N^B - (cq_n^B + d) \leq \\ \qquad \leq [a - b(q_1^B + q_2^B + ... + q_n^B)]q_n^B - (cq_n^B + d). \end{cases}$$

qui sont vérifié pour tout $q_i \in Q_i$ $(i \in I)$.
On obtient donc, le profile de stratégie de l'équilibre de Berge dans le jeu (3.4) est $q^B = (\alpha, \alpha, ..., \alpha)$. Et les gains des joueurs

$$\pi_i^B = \pi_i(q^B) = [a - nb\alpha]\alpha - (c\alpha + d) = [a - c]\alpha - bn\alpha^2 - d$$

. En effet, en réduisant autant que possible l'offre de leurs propres produits sur le marché, chaque entreprise (joueur) $i(i \in I)$ augmente ainsi les profits de tous les autres participants (les joueurs) au jeu (3.4). $\square$

Dans ce qui suit, nous considérons l'équilibre de Nash dans le jeu (3.4).

Proposition 3.2. *Sous la condition $a > c$, on a le profile de stratégie de l'équilibre de Nash dans le jeu (3.4) est*

$$q^e = (q_1^e, q_2^e, ..., q_n^e).$$

où pour tous $i \in I$,

$$q_i^e = \begin{cases} \alpha & si \quad \frac{a-c}{b(n+1)} \leq \alpha \\ \frac{a-c}{b(n+1)} & si \quad \alpha < \frac{a-c}{b(n+1)} < \beta \\ \beta & si \quad \frac{a-c}{b(n+1)} \geq \beta \end{cases} \tag{3.6}$$

Dans ce cas, les gains des joueurs sont donnés par

$$\pi_i^e = \pi_i(q^e) = \begin{cases} (a-c)\alpha - bn\alpha^2 - d & si \quad \frac{a-c}{b(n+1)} \leq \alpha \\ \frac{(a-c)^2}{b(n+1)^2} - d & si \quad \alpha < \frac{a-c}{b(n+1)} < \beta \\ (a-c)\beta - bn\beta^2 - d & si \quad \frac{a-c}{b(n+1)} \geq \beta \end{cases}$$

pour $i \in I$.

Démonstration. L'équilibre de Nash en (3.4) est défini par le système d'équations .

$$\begin{cases} \pi_1(q^e) = \max\limits_{q_1 \in [\alpha;\beta]} \pi_1(q_1, q^e) = \\ \qquad\qquad = \max\limits_{q_1 \in [\alpha;\beta]} \{[a - b(q_1 + q_2^e + ... + q_n^e)]q_1 - (cq_1 + d)\} \\ \pi_2(q^e) = \max\limits_{q_2 \in [\alpha;\beta]} \pi_2(q_2, q^e) = \\ \qquad\qquad = \max\limits_{q_2 \in [\alpha;\beta]} \{[a - b(q_1^e + q_2 + ... + q_n^e)]q_2 - (cq_2 + d)\} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \pi_n(q^e) = \max\limits_{q_n \in [\alpha;\beta]} \pi_n(q_n, q^e) = \\ \qquad\qquad = \max\limits_{q_n \in [\alpha;\beta]} \{[a - b(q_1^e + q_2^e + ... + q_n)]q_n - (cq_n + d)\} \end{cases} \tag{3.7}$$

Dans (3.7), ainsi que ce qui précède, pour tous $i \in I$ nous désignons (q_i, q^e) le profil de stratégie q^e, où la stratégie du joueur i q_i^e est remplacée par q_i.
Pour chaque $i \in I$, le maximum de $\pi_i(q_i, q^e)$ par rapport à q_i est atteint si deux conditions sont remplies :

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_i(q_i,q^e)}{\partial q_i}|_{q_i=q_i^e} & = [a - 2bq_i - b(q_1^e + ... + q_{i-1}^e + q_{i+1}^e + ... + q_n^e) - c] \;\; |_{q_i=q_i^e} = 0. \\ \frac{\partial^2 \pi_i(q_i,q^e)}{\partial q_i^2}|_{q_i=q_i^e} & = -2b < 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

La deuxième condition (3.8) tient, puisque le coefficient d'élasticité $b > 0$, et de la première équation pour chaque $i \in I$ nous obtenons un système de n équations linéaires :

$$\begin{cases} 2q_1^e + q_2^e + q_3^e + ... + q_n^e & = \frac{a-c}{b}, \\ q_1^e + 2q_2^e + q_3^e + ... + q_n^e & = \frac{a-c}{b}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_1^e + q_2^e + q_3^e + ... + 2q_n^e & = \frac{a-c}{b}. \end{cases}$$

solution pour laquelle le profil de stratégie est :

$$q^e = (q_1^e, q_2^e, ..., q_n^e) = \left(\frac{a-c}{(n+1)b}, \frac{a-c}{(n+1)b}, ..., \frac{a-c}{(n+1)b} \right)$$

Lorsque la condition $\alpha < \frac{a-c}{(n+1)b} < \beta$ est maintenue, les valeurs trouvées q_i^e $(i \in I)$ fournissent la valeur maximale aux fonctions $\pi_i(q_i, q^e)$ dans l'intervalle $[\alpha; \beta]$, et, par conséquent, ce sont les stratégies d'équilibre de Nash dans le jeu (3.4).

Si $\frac{a-c}{(n+1)b} \leq \alpha$, alors par la seconde inégalité de (3.8) dans l'intervalle $[\alpha;\beta]$ chacune des fonctions $\pi_i(q_i, q^e) \quad (i \in I)$ diminue de façon monotone. Par conséquent, le maximum de (3.7) est atteint pour $q_i^e = \alpha \quad (i \in I)$.

Dans le cas où $\frac{a-c}{(n+1)b} \geq \beta$ les fonctions $\pi_i(q_i, q^e)$ pour l'ensemble $i \in I$ augmenteront de façon monotone sur $[\alpha;\beta]$. Par conséquent, l'équilibre. (3.7) est satisfait pour $q_i^e = \beta \quad (i \in I)$.

De plus, en combinant les trois cas cités, nous voyons que les stratégies d'équilibre de Nash dans (3.4) sont définies par (3.6).
Nous procédons à la construction des profits $\pi_i(q^e)$ dans le profil de stratégie trouvé (3.6) $(i \in I)$. En remplaçant (3.6) dans la fonction gain (3.3), pour chaque numéro de joueur $i(i \in I)$ nous obtenons les bénéfices de l'équilibre de Nash dans le jeu (3.4). À savoir, si $\frac{a-c}{(n+1)b} \leq \alpha$ nous avons.

$$\pi_i^e = \pi_i(\alpha, \alpha, ..., \alpha) = [a - bn\alpha]\alpha - (c\alpha + d) = (a-c)\alpha - bn\alpha^2 - d$$

Si $\frac{a-c}{(n+1)b} \geq \beta$, alors le profit de joueur de l'équilibre de Nash $i \quad \pi_i^e$ est.

$$\pi_i^e = \pi_i(\beta, \beta, ..., \beta) = [a - bn\beta]\beta - (c\beta + d) = (a-c)\beta - bn\beta^2 - d$$

Enfin, si $\alpha < \frac{a-c}{(n+1)b} < \beta$ c'est.

$$\pi_i^e = \pi_i\left(\frac{a-c}{(n+1)b}, \frac{a-c}{(n+1)b}, ..., \frac{a-c}{(n+1)b}\right) =$$

$$= \left[a - bn\frac{a-c}{(n+1)b}\right]\frac{a-c}{(n+1)b} - \left(c\frac{a-c}{(n+1)b} + d\right) =$$

$$= \frac{(a-c)^2}{(n+1)b} - \frac{(a-c)^2}{(n+1)b}.\frac{n}{n+1} - d \quad = \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2 b} - d$$

Ainsi le bénéfice de joueur i dans l'équilibre de Nash est.

$$\pi_i^e = \pi_i(q^e) = \begin{cases} (a-c)\alpha - bn\alpha^2 - d, & \text{si } \frac{a-c}{(n+1)b} \leq \alpha \\ \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2 b} - d, & \text{si } \alpha < \frac{a-c}{(n+1)b} < \beta \\ (a-c)\beta - bn\beta^2 - d, & \text{si } \frac{a-c}{(n+1)b} \geq \beta \end{cases}$$

$\square$

3.3 La comparaison des gains donnés par l'équilibre de Nash et les gains donnés par l'équilibre de Berge

Dans cette section, nous allons comparer les profits des joueurs, donnés par l'équilibre de Berge avec les profits donnés par l'équilibre de Nash. Pour ce faire, nous examinons trois cas.

Cas 1 :$\frac{a-c}{b(n+1)} \leq \alpha$, le profile de stratégie d'équilibre de Nash x_i^e, donné dans la proposition 3.6 coincide avec le profile de stratégie de l'équilibre de Berge $x_i^B = \alpha \ (i \in I)$.

Par conséquent, les joueurs, en jouant l'équilibre de Nash, recevront les mêmes gains qu'ils obtiendraient en jouant l'équilibre de Berge, à savoir

$$\pi_i^e = \pi_i^B \quad pour \quad \frac{a-c}{b(n+1)} \leq \alpha \tag{3.9}$$

Cas 2 : Si l'inégalité $\alpha < \frac{a-c}{b(n+1)} < \beta$ est vérifiée, alors le gain du joueur i $(i \in I)$ dans le profile de stratégie de l'équilibre de Nash est.

$$\pi_i^e = \pi_i(q^e) = \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2 b} - d$$

et le gains donné par l'équilibre de Berge est.

$$\pi_i^B = \pi_i(q^B) = \alpha\left[a - c - Nb\alpha\right] - d.$$

On calcule la différence.

$$\pi_i^e - \pi_i^B = \left(\frac{(a-c)^2}{(n+1)^2 b} - d\right) - \left[(a-c)\alpha - bn\alpha^2 - d\right] =$$

$$= bn\alpha^2 - (a-c)\alpha + \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2 b} = bn\left(\alpha - \frac{(a-c)}{(n+1)b}\right)\left(\alpha - \frac{a-c}{n(n+1)b}\right)$$

comme le nombre de joueurs $n > 1$ et $a - c > 0$, alors

$$\frac{a-c}{n(n+1)b} < \frac{a-c}{(n+1)b}.$$

Et en sachant que $\alpha > 0$ et $b > 0$, on obtient la différence $\pi_i^e - \pi_i^B$

i) est positif pour

$$0 < \alpha < \frac{a-c}{n(n+1)b}$$

ii) négatif pour

$$\frac{a-c}{n(n+1)b} < \alpha < \frac{(a-c)}{(n+1)b}$$

iii) et égale à zéro si :

$$\alpha = \frac{a-c}{n(n+1)b}.$$

Ainsi, pour tous les $(i \in I)$

$$\begin{cases} \pi_i^e > \pi_i^B, & \text{si} \quad \alpha < \frac{a-c}{n(n+1)b} \quad et \quad \frac{(a-c)}{(n+1)b} < \beta \\ \pi_i^e = \pi_i^B, & \text{si} \quad \alpha = \frac{a-c}{n(n+1)b} \quad et \quad \frac{(a-c)}{(n+1)b} < \beta \\ \pi_i^e < \pi_i^B, & \text{si} \quad \frac{a-c}{n(n+1)b} < \alpha < \frac{(a-c)}{(n+1)b} < \beta \end{cases}$$

Cas 3 : Si $\alpha < \beta \leq \frac{(a-c)}{(n+1)b}$, la stratégie de l'équilibre de Nash du joueur i est la plus grande quantité de marchandises possible. C'est-à-dire, $x_i^e = \beta(i \in I)$ et son profit dans l'équilibre de Nash sera.

$$\pi_i^e = (a-c)\beta - bn\beta^2 - d$$

Dans l'équilibre de Berge, le joueur doit réduire l'offre du produit au minimum autorisé, c'est-à-dire, $x_i^B = \alpha(i \in I)$, et son profit dans l'équilibre de Berge sera

$$\pi_i^B = (a-c)\alpha - bn\alpha^2 - d.$$

On considère la difference dans les gains (profits), que les participants de l'oligopole (3.4) auront dans l'équilibre de Nash et l'équilibre de Berge.
Pour un joueur i ($i \in I$), la différence est

$$\pi_i^e - \pi_i^B = (a-c)\beta - bn\beta^2 - d - \left[(a-c)\alpha - bn\alpha^2 - d\right] =$$

$$= (a-c)(\beta-\alpha) - bn(\beta^2-\alpha^2) = (\beta-\alpha)\left[a-c-bn(\beta+\alpha)\right]$$

Comme $\beta > \alpha$, alors le signe de la difference entre ce qui précède coïncide avec celle d'une fonction linéaire décroissante

$$a - c - bn(\beta+\alpha).$$

Cette fonction change le signe à $\alpha+\beta = \frac{a-c}{bn}$. Par conséquent, la différence $\pi_i^e - \pi_i^B$ est nul pour $\alpha+\beta = \frac{a-c}{bn}$.
Pour $\alpha+\beta < \frac{a-c}{bn}$, la différence $\pi_i^e - \pi_i^B$ est positive, et dans le cas $\alpha+\beta > \frac{a-c}{bn}$, elle est négative.
Par conséquent, lorsque $\alpha < \beta < \frac{(a-c)}{(n+1)b}$, le gain du joueur i dans l'équilibre Berge π_i^B, et son gain dans l'équilibre Nash π_i^e vérifient les relations suivantes.

$$\begin{cases} \pi_i^e > \pi_i^B, & \text{si} \quad \alpha+\beta < \frac{a-c}{nb} \quad et \quad \alpha < \beta \\ \pi_i^e = \pi_i^B, & \text{si} \quad \alpha+\beta = \frac{a-c}{nb} \quad et \quad \alpha < \beta \\ \pi_i^e < \pi_i^B, & \text{si} \quad \alpha+\beta > \frac{(a-c)}{nb} \quad et \quad \alpha < \beta \end{cases}$$

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéréssés à l'équilibre de Berge dans le modèle de l'oligopole de Cournot. Après avoir rappelé les notions generales de la théorie des jeux, nous avons repris la définition de l'equilibre de Nash, ses propriétés et le théoreme d'existence de ce concept d'équilibre. Nous avons également présenté la définition, les propriétés et les conditions d'existence de l'équilibre de Berge.

Nous avons ensuite présenté le modèle de l'oligopole de Cournot. Dans ce modèle, les expressions des profiles de stratégie ainsi que les gains correspondant ont été calculés dans les deux cas : i) l'équilibre de Berge et ii) l'équilibre de Nash. En comparant les gains obtenus dans l'équilibre de Berge à ceux obtenus dans l'équilibre de Nash, nous avons constaté qu'il est intéressant d'adopter l'équilibre de Berge dans les modèles d'économie.

Bibliographie

[1] Achemine F., *Etude d'un jeu a deux personnes sous forme normale avec parametre indetermines dans le cas de l'ignorance totale* ,mémoire de magister, université de tizi ouzou,2001.

[2] ANNANE K., *Concepts d'équilibre pour un jeu non coopératif sous forme normale avec paramètres indéterminés-flous* ,thèse de doctorat, université de tizi ouzou, 2006.

[3] AUBIN J. P., *L'analyse non linéaire et ses motivations économiques*, Masson. Paris - 1984

[4] Barache F., *Sur la Théorie des Jeux Evolutionnaires et ses Applications en Economie*,mémoire de magister, université de bijaia, 2007.

[5] Bath F., *Segmentary opposition and Theory of Games*, A study of Pathan Organization, Journal of the Royel Anthropological Society, London, 89. 5-21, 1959.

[6] Berge C., *Théorie des jeux à n-personnes*, paris, Gauthier, 1957.

[7] Boucenna M., *Coopération dans les réseaux ad hoc par application de la théorie des jeux* ,thèse de doctorat, Université de Constantine 1, 2014 .

[8] Fahem K., *Etude de Concepts de Solutions Dans Un Jeu Multicritère*,mémoire de magister, université de tizi ouzou, 2004 .

[9] Krim F., *Etude approfondie de l'équilibre de Berge dans un jeu à n-personnes* ,mémoire de magister, université de tizi ouzou, 2001.

[10] Kudryavtsev K. et Ukhobotov V. et Zhukovskiy V. , *The Berge Equilibrium in Cournot Oligopoly Model*, Les travaux ont été soutenus par Grant de la Fondation pour les recherches scientific de perspective de l'Université d'État de Tchéliabinsk (2018) et par la loi 211 Gouvernement de la Fédération de Russie, contrat N 02.A03.21.0011.

[11] Ky Fan, *Minimax Inequality and Application*, in Inequality, Vol. 3, edited by O. Shisha. Academic Press, New York (1972).

[12] Larbani M., *Sur l'existence de l'équilibre de Berge pour les jeux à n-personnes*, article accepté pour publication dans les proceedings de la conférence "deuxièmes journées Francophones de la recherche opérationnelle, Francoro II, Sousse, April 6.8, 1998, tunisia.

[13] MOULIN H.,*Théorie des jeux pour l'économie et la politique*, Hermann, paris, 1981.

[14] Nash J. H., *Noncooperative games*, Ann. of Math. 54 (1951) 286–295.

[15] Tazdaït.T, Larbani.M, Rabia.N, *ON BERGE EQUILIBRIUM* , 2007.

[16] V.I. Zhukovskii, *Linear Quadratic Differential Games*, Naoukova Doumka, Kiev, 1994

[17] Yildizoglu M. *Introduction a la theorie des jeux manuel et exercices corriges*, (2011, Dunod) .