

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



## THÈSE DE DOCTORAT LMD

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Présentée par :

**MADJOUR Farida**

Sujet

### **Analyse asymptotique d'un problème de transmission sur un domaine avec couche mince**

Devant le jury d'examen composé de :

M <sup>me</sup> Bedouhene Fazia	Professeure	UMMTO	Présidente
M <sup>me</sup> Rahmani Leila	Professeure	UMMTO	Directrice de thèse
M <sup>me</sup> Aissa Naima	Professeure	USTHB	Examinatrice
M <sup>r</sup> Sengouga Abdelmouhcene	Professeur	Univ. M'sila	Examineur
M <sup>me</sup> Smaali Mannal	MCA	UMMTO	Examinatrice

**Année universitaire : 2023-2024**

À la mémoire de mon père.

À ma mère.

À mes frères.

---

## Remerciements

Avant d'entamer la présentation de mes résultats de recherche, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté et le courage pour mener à bien ce projet de thèse.

Mes plus vifs remerciements, vont tout d'abord à ma Directrice de thèse *M<sup>me</sup> Rahmani Leila*, professeur à l'UMMTO pour son aide, ses conseils, sa gentillesse, sa disponibilité, ses encouragements ainsi que pour ses précieux conseils tout au long de la conception de cette thèse. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

Je tiens à remercier *M<sup>me</sup> Bedouhene Fazia*, professeur à l'UMMTO pour l'honneur qu'elle me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je remercie également *M<sup>me</sup> Smaali Mannal*, maître de conférences à l'UMMTO, *M<sup>me</sup> Aissa Naima*, professeur à l'USTHB et *M<sup>r</sup> Sengouga Abdelmouhcene*, professeur à l'université de M'sila d'avoir accepté d'examiner ma thèse et faire partie de ce jury.

Enfin, je ne saurais oublier de remercier tous mes enseignants et toutes les personnes qui de près ou de loin, m'ont apporté leur aide et soutien pour accomplir et faire avancer ce travail.

---

# Liste des Communications et Publications

## Publication

- \* Madjour Farida and Rahmani Leila.

Approximate boundary conditions for a Mindlin-Tiomshenko plate surrounded by a thin layer. [Journal of Engineering Mathematics](#), 2024.

## Communications

- \* Madjour Farida.

Conditions aux limites approchées pour une plaque de Mindlin-Tiomshenko renforcée par une couche mince. [Journée de Mathématiques Appliquées, JMA 2019](#). Université Abdelhafid Boussouf de Mila le 28 Avril 2019.

- \* Madjour Farida.

Modélisation asymptotique et conditions aux limites approchées pour une plaque de Mindlin-Tiomshenko entourée d'une couche mince. [Statistiques et Analyse Avancées : Domaines d'Interactions et d'Applications, SAADIA 1](#). Université de Béjaïa, 20-22 Novembre 2023.

- \* Madjour Farida.

Asymptotic modeling of the effect of a thin layer on the deformation of a Mindlin-Tiomshenko plate. [Second International Workshop on Applied Mathematica, 2nd-IWAM'2023](#). Université de Constantine, 5-7 Décembre 2023.

## Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la modélisation asymptotique de l'effet d'une couche mince sur la déformation d'une plaque de Mindlin-Timoshenko.

D'un point de vue numérique, le traitement du comportement de cette multi-structure est difficile en raison de la présence de la couche mince. Pour surmonter cette difficulté, nous utilisons la méthode des développements asymptotiques pour dériver un modèle approché qui ne fait pas intervenir la couche mince géométriquement, mais qui rend compte de son effet à travers de nouvelles conditions aux limites approchées.

De plus, une estimation d'erreur optimale entre la solution exacte et la solution approchée du problème est donnée.

### Mots clés

Analyse asymptotique. Conditions aux limites approchées. Plaque de Mindlin-Timoshenko, Couche mince.

## Abstract

In this thesis, we focus on the asymptotic modeling of the effect of a thin layer on the deformation of a Mindlin-Timoshenko plate. From the view point of numerical simulation, the treatment of the behavior of this multi-structure is difficult because of the presence of the thin layer. To overcome this difficulty, we use the asymptotic expansion method to identify an approximate model which does not involve the thin coating geometrically but accounts for its effect through new approximate boundary conditions.

In addition, we give optimal error estimates between the exact and the approximate solutions of the problem.

### Keywords

Asymptotic analysis. Approximate boundary conditions. Mindlin-Timoshenko plate. Thin layer.

---

# Table des matières

Introduction générale . . . . .	6
<b>1 Le problème de Mindlin-Timoshenko pour la multi-structure plaque-couche</b>	<b>12</b>
1.1 Position du problème . . . . .	12
1.2 Formulation variationnelle - Existence et unicité de la solution . . . . .	15
<b>2 Développement asymptotique de la solution du problème de transmission</b>	<b>19</b>
2.1 Coordonnées locales . . . . .	19
2.2 Changement d'échelle . . . . .	24
2.3 Le problème de transmission mis à l'échelle . . . . .	25
2.4 Développement asymptotique de la solution . . . . .	33
2.5 Calcul des premiers termes . . . . .	35
2.6 Justification du développement asymptotique . . . . .	43
<b>3 Conditions aux limites approchées</b>	<b>47</b>
3.1 Conditions aux limites approchées . . . . .	47
3.1.1 Conditions d'ordre 0 : . . . . .	47
3.1.2 Conditions d'ordre 1 . . . . .	49
3.2 Estimations d'erreur . . . . .	51
3.2.1 Estimation d'erreur pour l'approximation d'ordre 0 : . . . . .	51
3.2.2 Estimation d'erreur pour l'approximation d'ordre 1 : . . . . .	51
<b>Conclusion générale</b>	<b>57</b>
<b>A Quelques outils d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle</b>	<b>60</b>
A.1 Analyse fonctionnelle . . . . .	60
A.1.1 Quelques espaces fonctionnels . . . . .	60

---

A.1.2	Quelques résultats utiles . . . . .	62
A.2	Éléments de géométrie différentielle . . . . .	65
A.2.1	L'abscisse curviligne . . . . .	65
A.2.2	Courbure et rayon de courbure . . . . .	65
A.2.3	Formules de Frenet . . . . .	66
	<b>Index des notations</b>	<b>66</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>68</b>

---

## Introduction générale

Dans cette thèse, on s'intéresse à la modélisation mathématique du comportement d'une plaque hétérogène de Mindlin-Timoshenko, composée d'une plaque élastique entourée par une couche mince. De telles structures comportant des parties fines, sont largement utilisées dans divers domaines, notamment l'aviation, la construction civile ou même dans plusieurs applications de l'ingénierie. Pour cette raison, elles ont suscité une attention considérable au cours des dernières décennies, tant en termes de modélisation mathématique que d'analyse numérique.

Cependant, d'un point de vue numérique, les caractéristiques géométriques des parties minces incluses dans la composition de la structure empêchent généralement une discrétisation efficace. En effet, la simulation numérique par éléments finis de la solution du problème qui décrit le comportement de cette structure est difficile car elle nécessite une discrétisation à l'échelle de l'épaisseur des parties fines. Ceci engendre alors un maillage très fin et par conséquent un système linéaire qui explose, ce qui rend les calculs très coûteux et parfois peu précis.

Il existe plusieurs façons de traiter un problème posé sur un domaine avec une couche mince. L'une des options consiste tout simplement à procéder sans tenir compte de la couche mince en supposant que ses effets sur la solution du problème peuvent être négligeables. Néanmoins, cette hypothèse s'avère souvent inappropriée, notamment en mécanique des structures, si les propriétés des matériaux constituant les différentes parties de la multi-structure sont différentes.

L'une des approches qui est assez bien connue consiste à construire des modèles approchés plus simples à analyser numériquement et cela en utilisant les méthodes asymptotiques. Ces méthodes s'avèrent très pertinentes, notamment dans la théorie des équations aux dérivées partielles et des équations de la physique mathématique, où elles ne cessent de gagner en popularité parmi un large éventail de chercheurs. Elles sont largement utilisées dans la modélisation des problèmes aux limites posés sur des domaines minces ( Voir [1], [5], [6], [7], [9], [11], [12], [14], [15], [24], [26], [32], [33], [34], [35], [36], [37], [38]).

Afin d'éviter les difficultés numériques liées à la présence de la couche mince, l'ap-

proche mentionnée ci-dessus consiste à considérer l'épaisseur de celle-ci comme un " petit paramètre " et à effectuer une analyse asymptotique appropriée par rapport à ce petit paramètre. La stratégie consiste à éliminer "géométriquement" la couche mince et à reproduire son effet à travers de nouvelles conditions aux limites approchées. Dans le modèle approché recherché, la couche mince est réduite à une frontière et son effet est approché par de nouvelles conditions approchées sur cette frontière.

Dans la littérature, plusieurs travaux ont été consacrés à la modélisation de l'effet des couches minces, en particulier en électromagnétisme (voir [3], [4], [6], [7], [10], [15], [16], [17]). L'idée mentionnée ci-dessus a également été explorée en mécanique des structures (voir [11], [13], [20], [21], [22], [27], [28], [29], [30], [31]). C'est dans ce cadre que s'inscrit notre étude et qui consiste à dériver un modèle approché pour une plaque élastique recouverte d'une couche mince. Plus précisément, nous traitons le problème d'équilibre de Mindlin-Timoshenko pour cette structure en prenant en compte des considérations spécifiques sur les coefficients physiques des matériaux constituant les deux parties.

Dans [30], le modèle dynamique de Mindlin-Timoshenko pour une plaque rectangulaire renforcée avec un raidisseur mince d'épaisseur  $\delta$  a été considéré. Les propriétés des matériaux constituant la plaque et la couche mince étaient contrastées : les coefficients élastiques du corps mince étaient supposés être très grands, se comportant comme des puissances négatives de  $\delta$ , tandis que ceux de la plaque étaient indépendants de ce petit paramètre. Pour dériver un modèle approché, une analyse asymptotique basée sur une approche de convergence a été effectuée. La stratégie adoptée consiste à identifier le comportement limite de la structure, en passant à la limite dans le problème variationnel associé, lorsque  $\delta$  tend vers 0.

Néanmoins, l'analyse a montré que les comportements limites diffèrent selon la manière dont les coefficients physiques dépendent du paramètre  $\delta$ . L'obtention d'un modèle approché qui rend compte de l'effet du raidisseur n'a été observée que pour le cas où les coefficients physiques de celui-ci varient en  $\delta^{-1}$ .

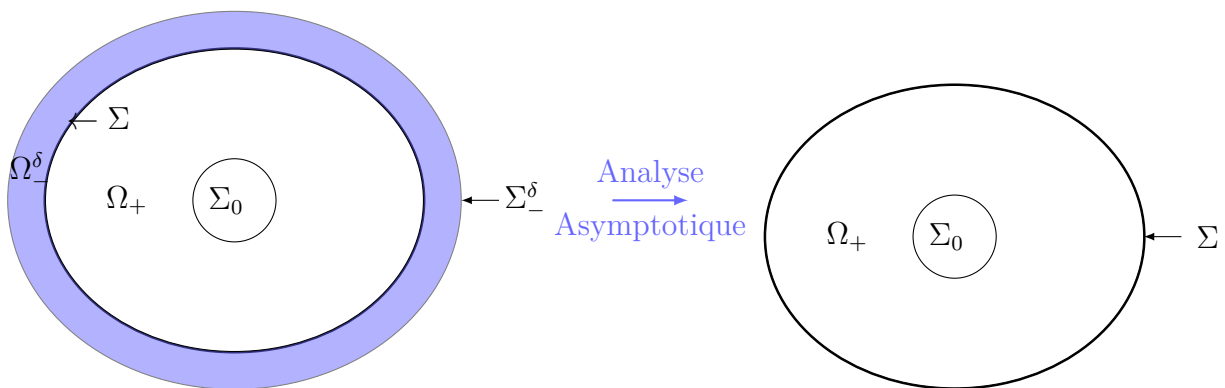
Nous nous sommes donc intéressés à la modélisation du comportement de la structure de Mindlin-Timoshenko dans la situation réaliste où les coefficients de la plaque et de la couche sont indépendants de l'épaisseur  $\delta$ . L'utilisation de la méthode adoptée dans [30] mènera à un modèle dans lequel l'effet de la couche mince sera complètement négligé. Pour obtenir un modèle approché plus précis, nous adoptons une méthode différente basée sur la construction d'un développement asymptotique de la solution de notre problème. L'avantage principal de cette méthode est qu'elle permet d'aller au-delà du problème limite quand  $\delta$  tend vers 0 et d'identifier un modèle approché dans lequel l'effet de la couche mince est pris en considération. Il est important de noter que nous nous limitons ici au modèle statique de Mindlin-Timoshenko, mais nous traitons une géométrie plus

générale en considérant une plaque dont le bord est une courbe régulière. Le modèle que l'on obtient est caractérisé par des nouvelles conditions aux limites qui dépendent des caractéristiques physiques du matériau constituant la couche mince. Ces conditions sont appelées conditions de Ventcel dans la littérature russe et font intervenir des dérivées tangentielles d'ordre égal à celui des opérateurs différentiels intérieurs. D'un point de vue mécanique, elles modélisent les effets hérités de la couche mince, représentant des moments de flexion et de torsion ainsi que diverses forces de cisaillement exercées sur la bord de la plaque auquel la couche était fixée.

Notons que la méthode utilisée dans ce présent travail a déjà été appliquée dans [31] au modèle de Kirchhoff-Love pour les plaques élastiques minces. Notre étude vise à en faire une extension aux plaques modérément épaisses en considérant le modèle de Mindlin-Timoshenko qui, contrairement au modèle de Kirchhoff-Love, prend en considération le cisaillement transverse que subit la plaque lors de sa déformation. Ainsi, le comportement de celle-ci est régi par un système de trois équations aux dérivées partielles, couplant le déplacement transversal avec les angles de rotation engendrée par le cisaillement.

Afin de donner un aperçu du travail effectué et des résultats obtenus consignés dans cette thèse, on convient de noter par  $\Omega_+$  le domaine occupé par la plaque,  $\Omega_-^\delta$  celui occupé par la couche mince et  $\Sigma$  la frontière commune aux deux domaines. On désigne par  $\Sigma_-^\delta = \partial\Omega_-^\delta \setminus \Sigma$  le bord extérieur de la couche et  $\Sigma_0 = \partial\Omega_+ \setminus \Sigma$  (voir le schéma ci-dessous).

Le modèle de Mindlin-Timoshenko pour cette structure se résume en un système



d'équations aux dérivées partielles couplées avec des conditions de transmission et des conditions aux limites :

$$P_{trans} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Équations d'équilibre} & \text{sur } \Omega_+ \text{ et } \Omega_-^\delta, \\ \text{Conditions de transmission} & \text{sur } \Sigma, \\ \text{Conditions du bord libre} & \text{sur } \Sigma_-^\delta, \\ \text{Conditions d'encastrement} & \text{sur } \Sigma_0. \end{array} \right.$$

L'analyse asymptotique basée sur la méthode des développements asymptotiques a permis d'identifier un modèle approché plus simple, posé uniquement sur le domaine de la plaque  $\Omega_+$ , avec des nouvelles conditions aux limites approchées sur l'interface  $\Sigma$  :

$$P_{app} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Équations d'équilibre} & \text{sur } \Omega_+, \\ \text{Conditions d'encastrement} & \text{sur } \Sigma_0, \\ \text{Conditions aux limites approchées} & \text{sur } \Sigma. \end{array} \right.$$

Une estimation d'erreur entre la solution du problème  $P_{trans}$  et celle du problème approché  $P_{app}$  a été obtenue.

Ces résultats ont fait l'objet d'une publication dans la revue internationale "Journal of engineering mathematics" (voir [23]).

La thèse est organisée en trois chapitres et une annexe :

Le chapitre 1 est dédié à l'introduction du problème de Mindlin-Timoshenko pour la structure (plaque-couche). Un résultat d'existence et d'unicité de la solution est donné ainsi qu'une estimation à priori.

Dans le chapitre 2, on construit un développement asymptotique de la solution du problème de transmission. Cette construction est basée sur un changement d'échelle qui consiste à dilater l'ouvert  $\Omega_-^\delta$  d'un rapport  $\frac{1}{\delta}$  afin de le ramener à un ouvert fixe. Les problèmes résolus par les termes du développement asymptotique sont identifiés et un calcul explicite des premiers termes nécessaires pour l'identification du modèle approché est effectué. De plus, une estimation d'erreur validant ce développement est donnée.

Le chapitre 3 est consacré à l'identification du modèle approché recherché. L'idée consiste à tronquer le développement asymptotique construit dans le chapitre 2 à un ordre donné, pour construire une approximation de la solution. L'approximation d'ordre 0, qui consiste à ne garder dans le développement que le premier terme, conduit à un modèle qui ignore complètement l'effet de la couche mince. Afin d'obtenir un modèle qui rend compte de cet effet, nous faisons une approximation d'ordre 1 en tronquant le développement à l'ordre 1. De plus, une estimation d'erreur est donnée, validant cette approximation.

Finalement, une annexe est donnée à la fin, dans laquelle sont regroupés des rappels et

des outils de base d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle, utilisés dans la réalisation de notre travail.

## Le problème de

## Mindlin-Timoshenko pour la

## multi-structure plaque-couche

## Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Position du problème</b>	<b>12</b>
<b>1.2</b>	<b>Formulation variationnelle - Existence et unicité de la solution</b>	<b>15</b>

Ce chapitre est consacré à la description du modèle de Mindlin-Timoshenko, pour une multi-structure composée d'une plaque élastique recouverte d'une couche mince. Il s'agit d'un problème de transmission couplant équations d'équilibre avec des conditions de transmission à l'interface entre les deux structures, ainsi que des conditions aux limites. Par ailleurs, un résultat d'existence et d'unicité de la solution de ce problème est également donné.

## 1.1 Position du problème

Soit  $\Omega_+ \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert borné régulier de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , de frontière  $\partial\Omega_+ = \Sigma_0 \cup \Sigma$ , avec  $\Sigma_0 \cap \Sigma = \emptyset$ . Nous considérons une plaque élastique occupant le domaine  $\Omega_+$ , encadrée sur la partie  $\Sigma_0$  de son bord intérieur et renforcée sur l'autre partie  $\Sigma$  par une couche mince d'épaisseur uniforme  $\delta$ , où  $\delta$  est un petit paramètre positif. On note par :

$$\Omega_-^\delta = \left\{ s + rn(s), \quad s \in \Sigma \quad \text{et} \quad 0 < r < \delta \right\},$$

le domaine occupé par la couche mince, dont la frontière est donnée par  $\partial\Omega_-^\delta = \Sigma_-^\delta \cup \Sigma$ , où :

$$\Sigma_-^\delta = \left\{ s + \delta n(s), \quad s \in \Sigma \right\},$$

et  $n(s) = (n_1(s), n_2(s))$  désigne le vecteur normal unitaire au point  $s$  de  $\Sigma$ .

Nous notons par  $\Omega^\delta = \Omega_+ \cup \Omega_-^\delta \cup \Sigma$  le domaine complet, occupé par la plaque  $\Omega_+$  entourée par la couche mince  $\Omega_-^\delta$  (voir la figure ci-dessous).

Nous nous intéressons dans ce chapitre au comportement de la multi-structure décrite ci-

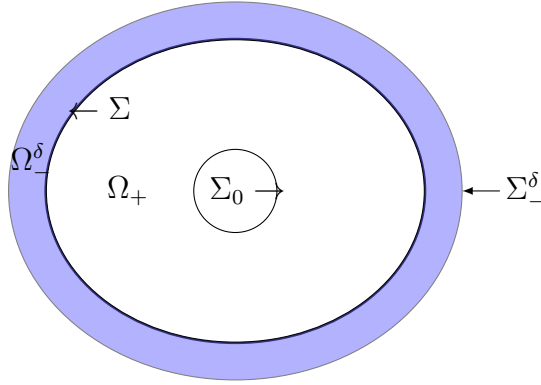


FIGURE 1.1 – Une plaque renforcée par une couche mince.

dessus, lorsque celle-ci subit une déformation suite à l'application des charges extérieures sur ses différentes parties. Notre intérêt est porté sur les structures modérément épaisses qui, en plus d'un déplacement transversal, elles subissent aussi des effets de cisaillement relativement importants. Nous notons par  $\psi$ ,  $\phi$  et  $\omega$  les rotations et la flexion que subit la structure lors de sa déformation ( $\omega$  est le déplacement transversal ou la flexion de la structure). Ainsi, le modèle le plus approprié pour décrire ce comportement n'est rien d'autre que le modèle de Mindlin-Timoshenko, donné par le système d'équations suivantes (voir [30]) :

\* Équations d'équilibre :

$$\begin{aligned}
 -D \left[ \partial_1^2 \psi + \frac{1-\mu}{2} \partial_2^2 \psi + \frac{1+\mu}{2} \partial_{12} \phi \right] + K \left[ \psi + \partial_1 \omega \right] &= f_1 \quad \text{dans } \Omega^\delta, \\
 -D \left[ \partial_2^2 \phi + \frac{1-\mu}{2} \partial_1^2 \phi + \frac{1+\mu}{2} \partial_{12} \psi \right] + K \left[ \phi + \partial_2 \omega \right] &= f_2 \quad \text{dans } \Omega^\delta, \\
 -K \left[ \partial_1 (\partial_1 \omega + \psi) + \partial_2 (\partial_2 \omega + \phi) \right] &= f_3 \quad \text{dans } \Omega^\delta.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

\* Conditions d'encastrement :

$$\psi = 0, \quad \phi = 0, \quad \omega = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0. \tag{1.2}$$

\* Conditions de transmission :

$$\begin{aligned} \left[ \left[ M_1(\psi, \phi) \right] \right] &= g_1, \quad \left[ \left[ M_2(\psi, \phi) \right] \right] = g_2, \quad \left[ \left[ T(\psi, \phi, \omega) \right] \right] = g_3 \quad \text{sur } \Sigma, \\ \left[ \left[ \psi \right] \right] &= 0, \quad \left[ \left[ \phi \right] \right] = 0, \quad \left[ \left[ \omega \right] \right] = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \end{aligned} \quad (1.3)$$

\* Conditions du bord libre :

$$M_1(\psi_-, \phi_-) = h_1, \quad M_2(\psi_-, \phi_-) = h_2, \quad T(\psi_-, \phi_-, \omega_-) = h_3 \quad \text{sur } \Sigma_-^\delta, \quad (1.4)$$

où  $M_1$ ,  $M_2$  et  $T$  sont les opérateurs de trace, donnés par :

$$\begin{aligned} M_1(\psi, \phi) &= D \left[ n_1 \partial_1 \psi + \mu n_1 \partial_2 \phi + \frac{1-\mu}{2} (\partial_2 \psi + \partial_1 \phi) n_2 \right], \\ M_2(\psi, \phi) &= D \left[ n_2 \partial_2 \phi + \mu n_2 \partial_1 \psi + \frac{1-\mu}{2} (\partial_2 \psi + \partial_1 \phi) n_1 \right], \\ T(\psi, \phi, \omega) &= K [\partial_n \omega + n_1 \psi + n_2 \phi]. \end{aligned}$$

D'un point de vue physique, les opérateurs  $M_1$ ,  $M_2$  et  $T$  représentent respectivement les moments de flexion et les forces de cisaillement. Le terme  $\partial_n$  désigne la dérivée normale selon  $n$  et  $[[\nu]] = \nu_+ - \nu_-$  représente le saut à travers  $\Sigma$ . Les fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  sont des forces de volume qui agissent à l'intérieur de la structure  $\Omega^\delta$ . Par ailleurs,  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$  se réfèrent à des forces et moments de cisaillement exercés sur la frontière extérieure  $\Sigma_-^\delta$ , tandis que  $g_1$ ,  $g_2$  et  $g_3$  représentent des forces et des moments qui contribuent au saut à l'interface  $\Sigma$ . Dans les expressions écrites ci-dessus, le coefficient  $D = E/(1 - \mu^2)$  est le module de rigidité de la structure à la flexion,  $E$  étant le module de Young et  $\mu$  le coefficient de Poisson. Ces deux paramètres caractérisent les propriétés élastiques du matériau et sont tels que  $0 < \mu < 1/2$  et  $E > 0$ . Par ailleurs, le coefficient  $K$  désigne le module de cisaillement. On suppose que la multi-structure composée de la plaque et de la couche mince est hétérogène dans le sens où les différents coefficients décrits ci-dessus diffèrent d'une structure à l'autre. Néanmoins, on fait l'hypothèse qu'ils sont constants par morceaux et indépendants de l'épaisseur  $\delta$  :

$$E = \begin{cases} E_+ & \text{sur } \Omega_+, \\ E_- & \text{sur } \Omega_-^\delta, \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} \mu_+ & \text{sur } \Omega_+, \\ \mu_- & \text{sur } \Omega_-^\delta, \end{cases}$$

$$D = \begin{cases} D_+ & \text{sur } \Omega_+, \\ D_- & \text{sur } \Omega_-^\delta, \end{cases} \quad K = \begin{cases} K_+ & \text{sur } \Omega_+, \\ K_- & \text{sur } \Omega_-^\delta. \end{cases}$$

L'objectif principal de ce travail est la construction d'un modèle approché qui décrit le comportement de la structure de Mindlin-Timoshenko. Pour ce faire, on cherche à identifier un modèle qui ne fait pas intervenir la couche mince i,e posé uniquement sur le domaine  $\Omega_+$ , mais qui prend en considération les effets de celle-ci à travers de nouvelles conditions aux limites écrites sur l'interface  $\Sigma$ .

Dans la suite du document, nous conviendrons d'utiliser les indices "+" et "-" pour désigner la restriction à  $\Omega_+$  et  $\Omega_-^\delta$  respectivement.

Nous ferons aussi appel aux espaces de sobolev classiques  $H^n(\eta)$  d'ordre  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ( $\eta$  étant un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ) que l'on munit de la norme naturelle :

$$\| w \|_{H^n(\eta)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq n} \| \partial_n^\alpha w \|_{L^2(\eta)}^2.$$

La suite de chapitre est dédiée à l'existence et l'unicité de la solution du problème de transmission décrit ci-dessus ainsi qu'à l'établissement d'une estimation à priori qui sera utilisée par la suite.

## **1.2 Formulation variationnelle - Existence et unicité de la solution**

Afin d'établir l'existence et l'unicité de la solution du problème de Mindlin-Timoshenko, nous écrivons le système (1.1)-(1.4) sous forme variationnelle. Pour ce faire, nous introduisons l'espace fonctionnel suivant :

$$V(\Omega^\delta) = \left\{ (\hat{\psi}, \hat{\phi}, \hat{\omega}) \in [H^1(\Omega^\delta)]^3; \quad \hat{\psi} = 0, \hat{\phi} = 0, \hat{\omega} = 0 \text{ sur } \Sigma_0 \right\}.$$

Pour obtenir la formulation variationnelle de notre problème, nous multiplions les trois équations du système (1.1) respectivement par des fonctions test  $\hat{\psi}$ ,  $\hat{\phi}$  et  $\hat{\omega}$ , où  $(\hat{\psi}, \hat{\phi}, \hat{\omega})$  est un élément de l'espace fonctionnel  $V(\Omega^\delta)$ . L'intégration sur  $\Omega^\delta$  et l'utilisation de la formule de Green permettent alors d'obtenir la formulation :

$$A(\psi, \phi, \omega, \hat{\psi}, \hat{\phi}, \hat{\omega}) = l(\hat{\psi}, \hat{\phi}, \hat{\omega}) \quad \forall \quad (\hat{\psi}, \hat{\phi}, \hat{\omega}) \in V(\Omega^\delta), \quad (1.5)$$

où les formes  $A$  et  $l$  sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 A(\psi, \phi, \omega, \hat{\psi}, \hat{\phi}, \hat{\omega}) &= \int_{\Omega^\delta} \left( D \left[ \partial_1 \psi \partial_1 \hat{\psi} + \partial_2 \phi \partial_2 \hat{\phi} + \mu \partial_2 \phi \partial_1 \hat{\psi} + \mu \partial_1 \psi \partial_2 \hat{\phi} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1-\mu}{2} (\partial_1 \phi + \partial_2 \psi) (\partial_2 \hat{\psi} + \partial_1 \hat{\phi}) \right] \right. \\
 &\quad \left. + K \left[ (\psi + \partial_1 \omega) (\hat{\psi} + \partial_1 \hat{\omega}) + (\phi + \partial_2 \omega) (\hat{\phi} + \partial_2 \hat{\omega}) \right] \right) d\Omega^\delta,
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
 l(\hat{\psi}, \hat{\phi}, \hat{\omega}) &= \int_{\Omega^\delta} \left[ f_1 \hat{\psi} + f_2 \hat{\phi} + f_3 \hat{\omega} \right] dx + \int_{\Sigma} \left[ g_1 \hat{\psi} + g_2 \hat{\phi} + g_3 \hat{\omega} \right] d\sigma \\
 &\quad + \int_{\Sigma_-^\delta} \left[ h_1 \hat{\psi} + h_2 \hat{\phi} + h_3 \hat{\omega} \right] d\sigma.
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Le théorème qui suit assure l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel (1.5) et fournit une estimation à priori utile pour la suite.

**Théorème 1.1** Pour  $i = 1, 2, 3$ , on suppose que  $f_i \in L^2(\Omega^\delta)$ ,  $g_i \in L^2(\Sigma)$  et  $h_i \in L^2(\Sigma_-^\delta)$ . Le problème variationnel (1.5) admet alors une unique solution  $(\psi, \phi, \omega) \in V(\Omega^\delta)$ . De plus elle satisfait l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
 \|\psi\|_{H^1(\Omega^\delta)} + \|\phi\|_{H^1(\Omega^\delta)} + \|\omega\|_{H^1(\Omega^\delta)} &\leq C \left( \|f_1\|_{L^2(\Omega^\delta)} + \|f_2\|_{L^2(\Omega^\delta)} + \|f_3\|_{L^2(\Omega^\delta)} + \|g_1\|_{L^2(\Sigma)} \right. \\
 &\quad \left. + \|g_2\|_{L^2(\Sigma)} + \|g_3\|_{L^2(\Sigma)} + \|h_1\|_{L^2(\Sigma_-^\delta)} + \|h_2\|_{L^2(\Sigma_-^\delta)} + \|h_3\|_{L^2(\Sigma_-^\delta)} \right),
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

où  $C$  est une constante positive indépendante de l'épaisseur  $\delta$ .

**Preuve.** Pour la démonstration du résultat d'existence et d'unicité de la solution, on peut se référer à [19], où le modèle de Mindlin-Timoshenko a été étudié. La preuve est basée sur le théorème de Lax-Milgram. En effet, pour montrer la continuité de la forme linéaire  $l(\cdot)$ , nous faisons appel à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et nous écrivons :

$$\begin{aligned}
 |l(\hat{\psi}, \hat{\phi}, \hat{\omega})| &\leq \|f_1\|_{L^2(\Omega^\delta)} \|\hat{\psi}\|_{L^2(\Omega^\delta)} + \|f_2\|_{L^2(\Omega^\delta)} \|\hat{\phi}\|_{L^2(\Omega^\delta)} + \|f_3\|_{L^2(\Omega^\delta)} \|\hat{\omega}\|_{L^2(\Omega^\delta)} \\
 &\quad + \|g_1\|_{L^2(\Sigma)} \|\hat{\psi}\|_{L^2(\Sigma)} + \|g_2\|_{L^2(\Sigma)} \|\hat{\phi}\|_{L^2(\Sigma)} + \|g_3\|_{L^2(\Sigma)} \|\hat{\omega}\|_{L^2(\Sigma)} \\
 &\quad + \|h_1\|_{L^2(\Sigma_-^\delta)} \|\hat{\psi}\|_{L^2(\Sigma_-^\delta)} + \|h_2\|_{L^2(\Sigma_-^\delta)} \|\hat{\phi}\|_{L^2(\Sigma_-^\delta)} + \|h_3\|_{L^2(\Sigma_-^\delta)} \|\hat{\omega}\|_{L^2(\Sigma_-^\delta)},
 \end{aligned}$$

ce qui entraîne, en utilisant la continuité des opérateurs de trace :

$$\begin{aligned} |l(\hat{\psi}, \hat{\phi}, \hat{\omega})| &\leq C \left( \|f_1\|_{L^2(\Omega^\delta)} + \|f_2\|_{L^2(\Omega^\delta)} + \|f_3\|_{L^2(\Omega^\delta)} + \|g_1\|_{L^2(\Sigma)} \right. \\ &\quad \left. + \|g_2\|_{L^2(\Sigma)} + \|g_3\|_{L^2(\Sigma)} + \|h_1\|_{L^2(\Sigma_-^\delta)} + \|h_2\|_{L^2(\Sigma_-^\delta)} \right. \\ &\quad \left. + \|h_3\|_{L^2(\Sigma_-^\delta)} \right) \left( \|\hat{\psi}\|_{H^1(\Omega^\delta)} + \|\hat{\phi}\|_{H^1(\Omega^\delta)} + \|\hat{\omega}\|_{H^1(\Omega^\delta)} \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Shwarz donne :

$$\begin{aligned} |A(\psi, \phi, \omega, \hat{\psi}, \hat{\phi}, \hat{\omega})| &\leq C \left( \|\psi\|_{H^1(\Omega^\delta)} + \|\phi\|_{H^1(\Omega^\delta)} + \|\omega\|_{H^1(\Omega^\delta)} \right) \left( \|\hat{\psi}\|_{H^1(\Omega^\delta)} \right. \\ &\quad \left. + \|\hat{\phi}\|_{H^1(\Omega^\delta)} + \|\hat{\omega}\|_{H^1(\Omega^\delta)} \right), \end{aligned}$$

ce qui assure la continuité de la forme bilinéaire  $A(\cdot, \cdot)$ . D'un autre côté, l'inégalité de Poincaré qui découle de la condition d'encastrement imposée sur  $\Sigma_0$  permet de démontrer la coercivité de la forme  $A(\cdot, \cdot)$  et entraîne :

$$|A(\psi, \phi, \omega, \psi, \phi, \omega)| \geq C \left( \|\psi\|_{H^1(\Omega^\delta)}^2 + \|\phi\|_{H^1(\Omega^\delta)}^2 + \|\omega\|_{H^1(\Omega^\delta)}^2 \right).$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la démonstration de l'estimation (1.8).

Les inéquations qui découlent de la coercivité de la forme bilinéaire  $A(\cdot, \cdot)$  et de la continuité de la forme linéaire  $l(\cdot)$  permettent d'écrire :

$$\|\psi\|_{H^1(\Omega^\delta)}^2 + \|\phi\|_{H^1(\Omega^\delta)}^2 + \|\omega\|_{H^1(\Omega^\delta)}^2 \leq CL \left( \|\psi\|_{H^1(\Omega^\delta)} + \|\phi\|_{H^1(\Omega^\delta)} + \|\omega\|_{H^1(\Omega^\delta)} \right),$$

où  $C$  est une constante positive indépendante de  $\delta$  et  $L$  est donné par :

$$\begin{aligned} L &= \left( \|f_1\|_{L^2(\Omega^\delta)} + \|f_2\|_{L^2(\Omega^\delta)} + \|f_3\|_{L^2(\Omega^\delta)} + \|g_1\|_{L^2(\Sigma)} + \|g_2\|_{L^2(\Sigma)} \right. \\ &\quad \left. + \|g_3\|_{L^2(\Sigma)} + \|h_1\|_{L^2(\Sigma_-^\delta)} + \|h_2\|_{L^2(\Sigma_-^\delta)} + \|h_3\|_{L^2(\Sigma_-^\delta)} \right). \end{aligned}$$

On déduit alors l'inégalité :

$$\|\psi\|_{H^1(\Omega^\delta)}^2 - CL \|\psi\|_{H^1(\Omega^\delta)} + \|\phi\|_{H^1(\Omega^\delta)}^2 - CL \|\phi\|_{H^1(\Omega^\delta)} + \|\omega\|_{H^1(\Omega^\delta)}^2 - CL \|\omega\|_{H^1(\Omega^\delta)} \leq 0,$$

que l'on peut écrire

$$\left( \|\psi\|_{H^1(\Omega^\delta)} - \frac{1}{2}CL \right)^2 + \left( \|\phi\|_{H^1(\Omega^\delta)} - \frac{1}{2}CL \right)^2 + \left( \|\omega\|_{H^1(\Omega^\delta)} - \frac{1}{2}CL \right)^2 \leq \frac{1}{4}(CL)^2 + \frac{1}{4}(CL)^2 + \frac{1}{4}(CL)^2,$$

i.e

$$\left( \|\psi\|_{H^1(\Omega^\delta)} - \frac{1}{2}CL \right)^2 + \left( \|\phi\|_{H^1(\Omega^\delta)} - \frac{1}{2}CL \right)^2 + \left( \|\omega\|_{H^1(\Omega^\delta)} - \frac{1}{2}CL \right)^2 \leq \left( \sqrt{3} \frac{CL}{2} \right)^2.$$

Ceci entraîne alors :

$$\left( \|\psi\|_{H^1(\Omega^\delta)} - \frac{1}{2}CL \right)^2 \leq \left( \frac{\sqrt{3}CL}{2} \right)^2,$$

$$\left( \|\phi\|_{H^1(\Omega^\delta)} - \frac{1}{2}CL \right)^2 \leq \left( \frac{\sqrt{3}CL}{2} \right)^2,$$

$$\left( \|\omega\|_{H^1(\Omega^\delta)} - \frac{1}{2}CL \right)^2 \leq \left( \frac{\sqrt{3}CL}{2} \right)^2.$$

On déduit alors que :

$$\|\psi\|_{H^1(\Omega^\delta)} \leq \frac{1 + \sqrt{3}}{2}CL, \quad \|\phi\|_{H^1(\Omega^\delta)} \leq \frac{1 + \sqrt{3}}{2}CL, \quad \|\omega\|_{H^1(\Omega^\delta)} \leq \frac{1 + \sqrt{3}}{2}CL,$$

et donc :

$$\|\psi\|_{H^1(\Omega^\delta)} + \|\phi\|_{H^1(\Omega^\delta)} + \|\omega\|_{H^1(\Omega^\delta)} \leq \frac{3}{2}(1 + \sqrt{3})CL.$$

■

---

# 2 Développement asymptotique de la solution du problème de transmission

## Sommaire

---

<a href="#">2.1 Coordonnées locales</a>	19
<a href="#">2.2 Changement d'échelle</a>	24
<a href="#">2.3 Le problème de transmission mis à l'échelle</a>	25
<a href="#">2.4 Développement asymptotique de la solution</a>	33
<a href="#">2.5 Calcul des premiers termes</a>	35
<a href="#">2.6 Justification du développement asymptotique</a>	43

---

Dans le but d'identifier un modèle approché pour notre problème, qui rend compte de l'effet de la couche mince sur la déformation de la plaque, nous utiliserons la méthode des développements asymptotiques. L'idée consiste à approcher la solution du problème initial par la série définissant son développement asymptotique, tronquée à un ordre donné. Les conditions vérifiées par cette approximation sur l'interface  $\Sigma$  fournissent les conditions aux limites approchées recherchées.

Ce chapitre est dédié à la construction et à la validation du développement asymptotique de la solution de notre problème. Cette construction est basée sur l'utilisation des coordonnées locales et l'établissement d'un changement d'échelle dans le domaine occupé par la couche mince afin de le ramener à un domaine fixe indépendant de  $\delta$ .

## 2.1 Coordonnées locales

Nous reprenons le problème de Mindlin-Timoshenko présenté dans le chapitre précédent et qui décrit l'équilibre de la multi-structure constituée de la plaque entourée de la couche mince. Afin de simplifier l'étude et sans perte de généralité, nous supposons que

les restrictions des forces et moments sur le domaine de la couche mince sont nulles.

Notons par  $f_1^+$ ,  $f_2^+$ ,  $f_3^+$  les restrictions de  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  sur  $\Omega_+$  respectivement. Nous désignons aussi par  $(\psi_+, \phi_+, \omega_+)$  et  $(\psi_-, \phi_-, \omega_-)$  les restrictions de  $(\psi, \phi, \omega)$  sur  $\Omega_+$  et  $\Omega_-^\delta$  respectivement.

Avec ces notations, nous récrivons le problème de transmission considéré sous la forme :

\* Équations d'équilibre sur  $\Omega_+$  :

$$\begin{aligned}
-D_+ \left[ \partial_1^2 \psi_+ + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_2^2 \psi_+ + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \phi_+ \right] + K_+ [\psi_+ + \partial_1 \omega_+] &= f_1^+ \quad \text{dans } \Omega_+, \\
-D_+ \left[ \partial_2^2 \phi_+ + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_1^2 \phi_+ + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \psi_+ \right] + K_+ [\phi_+ + \partial_2 \omega_+] &= f_2^+ \quad \text{dans } \Omega_+, \\
-K_+ \left[ \partial_1 (\partial_1 \omega_+ + \psi_+) + \partial_2 (\partial_2 \omega_+ + \phi_+) \right] &= f_3^+ \quad \text{dans } \Omega_+.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

\* Équations d'équilibre sur  $\Omega_-^\delta$  :

$$\begin{aligned}
-D_- \left[ \partial_1^2 \psi_- + \frac{1-\mu_-}{2} \partial_2^2 \psi_- + \frac{1+\mu_-}{2} \partial_{12} \phi_- \right] + K_- [\psi_- + \partial_1 \omega_-] &= 0 \quad \text{dans } \Omega_-^\delta, \\
-D_- \left[ \partial_2^2 \phi_- + \frac{1-\mu_-}{2} \partial_1^2 \phi_- + \frac{1+\mu_-}{2} \partial_{12} \psi_- \right] + K_- [\phi_- + \partial_2 \omega_-] &= 0 \quad \text{dans } \Omega_-^\delta, \\
-K_- \left[ \partial_1 (\partial_1 \omega_- + \psi_-) + \partial_2 (\partial_2 \omega_- + \phi_-) \right] &= 0 \quad \text{dans } \Omega_-^\delta.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

\* Conditions du bord libre :

$$\begin{aligned}
D_- \left[ n_1 \partial_1 \psi_- + \mu_- n_1 \partial_2 \phi_- + \frac{1-\mu_-}{2} (\partial_2 \psi_- + \partial_1 \phi_-) n_2 \right] &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_-^\delta, \\
D_- \left[ n_2 \partial_2 \phi_- + \mu_- n_2 \partial_1 \psi_- + \frac{1-\mu_-}{2} (\partial_2 \psi_- + \partial_1 \phi_-) n_1 \right] &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_-^\delta, \\
K_- \left( \partial_n \omega_- + n_1 \psi_- + n_2 \phi_- \right) &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_-^\delta.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

\* Conditions de transmission :

$$\begin{aligned}
M_1(\psi_+, \phi_+) &= D_- \left[ n_1 \partial_1 \psi_- + \mu_- n_1 \partial_2 \phi_- + \frac{1 - \mu_-}{2} (\partial_2 \psi_- + \partial_1 \phi_-) n_2 \right] && \text{sur } \Sigma, \\
M_2(\psi_+, \phi_+) &= D_- \left[ n_2 \partial_2 \phi_- + \mu_- n_2 \partial_1 \psi_- + \frac{1 - \mu_-}{2} (\partial_2 \psi_- + \partial_1 \phi_-) n_1 \right] && \text{sur } \Sigma, \\
T(\psi_+, \phi_+, \omega_+) &= K_- (\partial_n \omega_- + n_1 \psi_- + n_2 \phi_-) && \text{sur } \Sigma, \\
\psi_+ = \psi_-, \quad \phi_+ = \phi_-, \quad \omega_+ = \omega_- &&& \text{sur } \Sigma.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

\* Conditions d'encastrement :

$$\psi_+ = 0, \quad \phi_+ = 0, \quad \omega_+ = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0. \tag{2.5}$$

### Coordonnées locales

Dans ce qui suit, nous allons introduire les coordonnées locales en effectuant une paramétrisation de la couche mince dans le repère de Frénet. Pour ce faire, nous supposons que l'interface  $\Sigma$  est une courbe régulière. On peut donc la paramétrer localement en utilisant l'abscisse curviligne :

$$x(s) = (x_1(s), x_2(s)); \quad s \in [0, L[,$$

où  $L$  désigne la longueur de  $\Sigma$ .

On désigne par  $\tau(s)$  et  $n(s)$  les vecteurs unitaires tangent et normal à  $\Sigma$  en  $x(s)$  :

$$\tau(s) = \begin{pmatrix} n_2(s) \\ -n_1(s) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad n(s) = \begin{pmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \end{pmatrix},$$

et on associe à chaque point  $X \in \Omega_-^\delta$  les coordonnées locales  $(s, r)$  telles que :

$$X = x(s) + rn(s), \quad x(s) \in \Sigma.$$

Notons que  $x(s)$  est la projection orthogonale de  $X$  sur  $\Sigma$ .

Par abus de notations, nous allons identifier un point  $x(s)$  de  $\Sigma$  par son abscisse curviligne  $s$  et nous introduisons les formules de Frénet :

$$\frac{\partial n}{\partial s} = c(s)\tau(s) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tau}{\partial s} = -c(s)n(s), \quad (2.6)$$

où  $c(s)$  représente la courbure associée au point  $s$  de  $\Sigma$ .

Les formules de Frénet donnent :

$$\begin{pmatrix} \partial_s \\ \partial_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+rc(s))n_2 & -(1+rc(s))n_1 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix},$$

ce qui permet de déduire les dérivées cartésiennes  $\partial_1, \partial_2$  en fonction des dérivées locales :

$$\begin{cases} \partial_1 = \frac{n_2(s)}{1+rc(s)}\partial_s + n_1(s)\partial_r, \\ \partial_2 = \frac{-n_1(s)}{1+rc(s)}\partial_s + n_2(s)\partial_r. \end{cases} \quad (2.7)$$

Les équations (2.7) permettent de réécrire dans les coordonnées locales les différentes dérivées cartésiennes intervenant dans les équations de notre problème.

### Expression de la dérivée seconde $\partial_1^2$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \partial_1^2 &= \partial_1(\partial_1), \\ &= \frac{n_2}{1+rc} \partial_s \left( \frac{n_2}{1+rc} \partial_s + n_1 \partial_r \right) + n_1 \partial_r \left( \frac{n_2}{1+rc} \partial_s + n_1 \partial_r \right), \\ &= \frac{n_2}{1+rc} \left( \frac{n_2'(1+rc) - rc'n_2}{(1+rc)^2} \partial_s + \frac{n_2}{1+rc} \partial_s^2 + n_1' \partial_r + n_1 \partial_{rs} \right) \\ &\quad + n_1 \left( \frac{-n_2c}{(1+rc)^2} \partial_s + \frac{n_2}{1+rc} \partial_{rs} + n_1 \partial_r^2 \right), \\ &= -\frac{cn_2n_1}{(1+rc)^2} \partial_s - \frac{n_2^2rc'}{(1+rc)^3} \partial_s + \frac{n_2^2}{(1+rc)^2} \partial_s^2 + \frac{cn_2^2}{1+rc} \partial_r \\ &\quad + \frac{n_2n_1}{1+rc} \partial_{rs} - \frac{cn_2n_1}{(1+rc)^2} \partial_s + \frac{n_2n_1}{1+rc} \partial_{rs} + n_1^2 \partial_r^2, \\ &= -\frac{2cn_2n_1}{(1+rc)^2} \partial_s - \frac{n_2^2rc'}{(1+rc)^3} \partial_s + \frac{n_2^2}{(1+rc)^2} \partial_s^2 + \frac{cn_2^2}{1+rc} \partial_r + \frac{2n_2n_1}{1+rc} \partial_{rs} + n_1^2 \partial_r^2. \end{aligned}$$

D'où :

$$\partial_1^2 = -\frac{2cn_2n_1}{(1+rc)^2}\partial_s - \frac{n_2^2rc'}{(1+rc)^3}\partial_s + \frac{n_2^2}{(1+rc)^2}\partial_s^2 + \frac{cn_2^2}{1+rc}\partial_r + \frac{2n_2n_1}{1+rc}\partial_{rs} + n_1^2\partial_r^2.$$

### Expression de la dérivée seconde $\partial_2^2$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \partial_2^2 &= \partial_2(\partial_2), \\ &= -\frac{n_1}{1+rc}\partial_s \left( \frac{-n_1}{1+rc}\partial_s + n_2\partial_r \right) + n_2\partial_r \left( \frac{-n_1}{1+rc}\partial_s + n_2\partial_r \right), \\ &= -\frac{n_1}{1+rc} \left( \frac{-n_1'(1+rc) + rc'n_1}{(1+rc)^2}\partial_s - \frac{n_1}{1+rc}\partial_s^2 + n_2'\partial_r + n_2\partial_{rs} \right) \\ &\quad + n_2 \left( \frac{n_1c}{(1+rc)^2}\partial_s - \frac{n_1}{1+rc}\partial_{rs} + n_2\partial_r^2 \right), \\ &= \frac{cn_2n_1}{(1+rc)^2}\partial_s - \frac{n_1^2rc'}{(1+rc)^3}\partial_s + \frac{n_1^2}{(1+rc)^2}\partial_s^2 + \frac{cn_1^2}{1+rc}\partial_r \\ &\quad - \frac{n_2n_1}{1+rc}\partial_{rs} + \frac{cn_2n_1}{(1+rc)^2}\partial_s - \frac{n_2n_1}{1+rc}\partial_{rs} + n_2^2\partial_r^2. \end{aligned}$$

D'où :

$$\partial_2^2 = \frac{2cn_2n_1}{(1+rc)^2}\partial_s - \frac{n_1^2rc'}{(1+rc)^3}\partial_s + \frac{n_1^2}{(1+rc)^2}\partial_s^2 + \frac{cn_1^2}{1+rc}\partial_r - \frac{2n_2n_1}{1+rc}\partial_{rs} + n_2^2\partial_r^2.$$

### Expression de la dérivée mixte $\partial_{12}$

$$\begin{aligned} \partial_{12} &= \partial_1(\partial_2), \\ &= \frac{n_2}{1+rc}\partial_s \left( \frac{-n_1}{1+rc}\partial_s + n_2\partial_r \right) + n_1\partial_r \left( \frac{-n_1}{1+rc}\partial_s + n_2\partial_r \right), \\ &= \frac{n_2}{1+rc} \left( \frac{-n_1'(1+rc) + rc'n_1}{(1+rc)^2}\partial_s - \frac{n_1}{1+rc}\partial_s^2 + n_2'\partial_r + n_2\partial_{rs} \right) \\ &\quad + n_1 \left( \frac{cn_1}{(1+rc)^2}\partial_s - \frac{n_1}{1+rc}\partial_{rs} + n_2\partial_r^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{n_2^2 c}{(1+rc)^2} \partial_s + \frac{rc' n_1 n_2}{(1+rc)^3} \partial_s - \frac{n_1 n_2}{(1+rc)^2} \partial_s^2 - \frac{cn_1 n_2}{1+rc} \partial_r \\
&\quad + \frac{n_2^2}{1+rc} \partial_{rs} + \frac{cn_1^2}{(1+rc)^2} \partial_s - \frac{n_1^2}{1+rc} \partial_{rs} + n_1 n_2 \partial_r^2, \\
&= -\frac{2n_2^2 c}{(1+rc)^2} \partial_s + \frac{c}{(1+rc)^2} \partial_s + \frac{rc' n_1 n_2}{(1+rc)^3} \partial_s - \frac{n_1 n_2}{(1+rc)^2} \partial_s^2 - \frac{cn_1 n_2}{1+rc} \partial_r \\
&\quad + \frac{2n_2^2}{1+rc} \partial_{rs} - \frac{1}{1+rc} \partial_{rs} + n_1 n_2 \partial_r^2,
\end{aligned}$$

par conséquent :

$$\begin{aligned}
\partial_{12} &= -\frac{2n_2^2 c}{(1+rc)^2} \partial_s + \frac{c}{(1+rc)^2} \partial_s + \frac{rc' n_1 n_2}{(1+rc)^3} \partial_s - \frac{n_1 n_2}{(1+rc)^2} \partial_s^2 - \frac{cn_1 n_2}{1+rc} \partial_r \\
&\quad + \frac{2n_2^2 - 1}{1+rc} \partial_{rs} + n_1 n_2 \partial_r^2.
\end{aligned}$$

## 2.2 Changement d'échelle

Afin d'écrire notre problème dans un domaine fixe indépendant du paramètre  $\delta$ , nous effectuons une dilatation de rapport  $\delta^{-1}$  dans la direction normale de la couche mince  $\Omega_-^\delta$ , de la forme :

$$y = \delta^{-1} r. \quad (2.8)$$

Ce changement d'échelle permet de transformer  $\Omega_-^\delta$  en un domaine fixe  $\Omega_- = \Sigma \times ]0, 1[$  :

$$\begin{aligned}
\Omega_- &\rightarrow \Omega_-^\delta \\
(s, y) &\mapsto x = s + \delta y n(s).
\end{aligned}$$

On note  $\Sigma_- = \Sigma \times \{1\}$  et on désigne par  $\Omega$  le domaine complet dilaté,  $\Omega = \Omega_+ \cup \Sigma \cup \Omega_-$ . Par ailleurs, pour chaque fonction  $\rho$  définie sur  $\Omega_-^\delta$ , on associe  $\rho^\delta$  donnée par la relation :  $\rho^\delta(s, y) = \rho(s + \delta y n(s))$ .

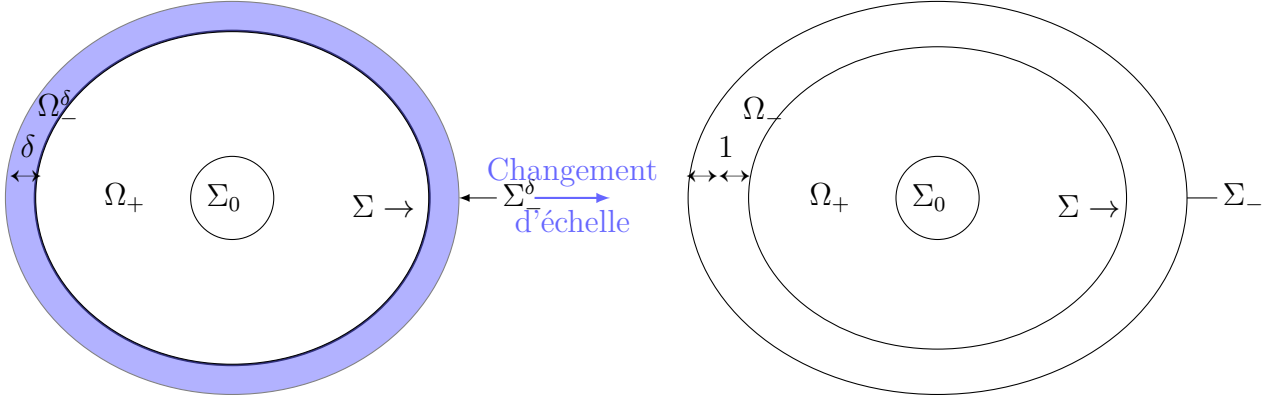


FIGURE 2.1 – Changement d'échelle

## 2.3 Le problème de transmission mis à l'échelle

Après passage en coordonnées locales et adaptation de la nouvelle échelle, le petit paramètre  $\delta$  n'apparaît plus dans la géométrie du problème mais intervient dans les équations de celui-ci. Nous allons nous intéresser dans ce qui suit à l'expression des différents opérateurs qui interviennent dans les équations posées sur le domaine de la couche mince. En considérant la première équation du système écrit sur  $\Omega_-^\delta$ , à savoir :

$$-D_- \left[ \partial_1^2 \psi_- + \frac{1 - \mu_-}{2} \partial_2^2 \psi_- + \frac{1 + \mu_-}{2} \partial_{12}^2 \phi_- \right] + K_- [\psi_- + \partial_1 \omega_-] = 0, \quad (2.9)$$

en utilisant les coordonnées locales et le changement d'échelle (2.8), nous obtenons la nouvelle expression de celle-ci, écrite sur l'ouvert dilaté  $\Omega_-$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} -D_- \left[ \frac{-2cn_2n_1}{(1 + \delta yc)^2} \partial_s \psi_-^\delta - \frac{n_2^2 \delta yc'}{(1 + \delta yc)^3} \partial_s \psi_-^\delta + \frac{n_2^2}{(1 + \delta yc)^2} \partial_s^2 \psi_-^\delta + \frac{1}{\delta} \frac{cn_2^2}{1 + \delta yc} \partial_y \psi_-^\delta \right. \\ \left. + \frac{1}{\delta} \frac{2n_2n_1}{1 + \delta yc} \partial_{ys} \psi_-^\delta + \frac{1}{\delta^2} n_1^2 \partial_y^2 \psi_-^\delta + \frac{1 - \mu_-}{2} \left( \frac{2cn_2n_1}{(1 + \delta yc)^2} \partial_s \psi_-^\delta - \frac{n_1^2 \delta yc'}{(1 + \delta yc)^3} \partial_s \psi_-^\delta \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{n_1^2}{(1 + \delta yc)^2} \partial_s^2 \psi_-^\delta + \frac{1}{\delta} \frac{cn_1^2}{1 + \delta yc} \partial_y \psi_-^\delta - \frac{1}{\delta} \frac{2n_2n_1}{1 + \delta yc} \partial_{ys} \psi_-^\delta + \frac{1}{\delta^2} n_2^2 \partial_y^2 \psi_-^\delta \right) \right. \\ \left. + \frac{1 + \mu_-}{2} \left( \frac{-2n_2^2 c}{(1 + \delta yc)^2} \partial_s \phi_-^\delta + \frac{c}{(1 + \delta yc)^2} \partial_s \phi_-^\delta + \frac{\delta yc' n_1 n_2}{(1 + \delta yc)^3} \partial_s \phi_-^\delta - \frac{n_1 n_2}{(1 + \delta yc)^2} \partial_s^2 \phi_-^\delta \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\delta} \frac{cn_1 n_2}{1 + \delta yc} \partial_y \phi_-^\delta + \frac{1}{\delta} \frac{2n_2^2}{1 + \delta yc} \partial_{ys} \phi_-^\delta - \frac{1}{\delta} \frac{1}{1 + \delta yc} \partial_{ys} \phi_-^\delta + \frac{1}{\delta^2} n_1 n_2 \partial_y^2 \phi_-^\delta \right) \right] \\ \left. + K_- \left[ \psi_-^\delta + \frac{n_2}{1 + \delta yc} \partial_s \omega_-^\delta + \frac{1}{\delta} n_1 \partial_y \omega_-^\delta \right] = 0. \end{array} \right.$$

Notons l'apparition du paramètre  $\delta$  dans l'expression de l'équation ci-dessus. En faisant un développement en puissances de  $\delta$  du membre de gauche de celle-ci, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq -2} \delta^k (A_1^k \psi_-^\delta + B_1^k \phi_-^\delta + C_1^k \omega_-^\delta) &= \delta^{-2} (A_1^{-2} \psi_-^\delta + B_1^{-2} \phi_-^\delta + C_1^{-2} \omega_-^\delta) + \delta^{-1} (A_1^{-1} \psi_-^\delta + B_1^{-1} \phi_-^\delta \\ &+ C_1^{-1} \omega_-^\delta) + \delta^0 (A_1^0 \psi_-^\delta + B_1^0 \phi_-^\delta + C_1^0 \omega_-^\delta) + \delta^1 (A_1^1 \psi_-^\delta + B_1^1 \phi_-^\delta + C_1^1 \omega_-^\delta) + \dots \end{aligned}$$

avec

$$A_1^{-2} = D_- \left[ -1 + \frac{1 + \mu_-}{2} n_2^2 \right] \partial_y^2,$$

$$A_1^{-1} = D_- \left[ -c \partial_y + \frac{1 + \mu_-}{2} c n_1^2 \partial_y - (1 + \mu_-) n_1 n_2 \partial_{sy} \right],$$

$$\begin{aligned} A_1^0 &= D_- \left[ y c^2 \partial_y - \frac{1 + \mu_-}{2} c^2 y n_1^2 \partial_y + (1 + \mu_-) n_1 n_2 y c \partial_{sy} - \partial_s^2 + (1 + \mu_-) c n_1 n_2 \partial_s \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + \mu_-}{2} n_1^2 \partial_s^2 \right] + K_-, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1^1 &= D_- \left[ -y^2 c^3 \partial_y - \frac{1 + \mu_-}{2} c^3 y^2 n_1^2 \partial_y - (1 + \mu_-) n_1 n_2 y^2 c^2 \partial_{sy} + 2 y c \partial_s^2 - 2(1 + \mu_-) c^2 y n_1 n_2 \partial_s \right. \\ &\quad \left. + y c' \partial_s - (1 + \mu_-) y c n_1^2 \partial_s^2 - \frac{1 + \mu_-}{2} y c' n_1^2 \partial_s \right], \end{aligned}$$

$$B_1^{-2} = -D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y^2,$$

$$B_1^{-1} = D_- \left[ \frac{1 + \mu_-}{2} c n_1 n_2 \partial_y - (1 + \mu_-) n_2^2 \partial_{sy} + \frac{1 + \mu_-}{2} \partial_{ys} \right],$$

$$\begin{aligned} B_1^0 &= D_- \left[ -\frac{1 + \mu_-}{2} y c^2 n_1 n_2 \partial_y + (1 + \mu_-) n_2^2 y c \partial_{sy} - \frac{1 + \mu_-}{2} y c \partial_{ys} + (1 + \mu_-) c n_2^2 \partial_s \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 + \mu_-}{2} c \partial_s + \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_s^2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1^1 &= D_- \left[ \frac{1 + \mu_-}{2} y^2 c^3 n_1 n_2 \partial_y - (1 + \mu_-) n_2^2 y^2 c^2 \partial_{sy} + \frac{1 + \mu_-}{2} y^2 c^2 \partial_{ys} - 2(1 + \mu_-) y c^2 n_2^2 \partial_s \right. \\ &\quad \left. + (1 + \mu_-) y c^2 \partial_s - (1 + \mu_-) y c n_1 n_2 \partial_s^2 - \frac{1 + \mu_-}{2} y c' n_1 n_2 \partial_s \right], \end{aligned}$$

$$C_1^{-2} = 0, \quad C_1^{-1} = K_- n_1 \partial_y, \quad C_1^0 = K_- n_2 \partial_s, \quad C_1^1 = -K_- n_2 y c \partial_s.$$

Nous nous intéressons maintenant à la deuxième équation du système posé sur  $\Omega_-^\delta$ . Après passage aux coordonnées locales et changement d'échelle, cette équation s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -D_- \left[ \frac{2cn_1n_2}{(1+\delta yc)^2} \partial_s^2 \phi_-^\delta - \frac{\delta yc' n_1^2}{(1+\delta yc)^3} \partial_s \phi_-^\delta + \frac{n_1^2}{(1+\delta yc)^2} \partial_s \phi_-^\delta + \frac{1}{\delta} \frac{cn_1^2}{1+\delta yc} \partial_y \phi_-^\delta \right. \\ \left. + \frac{1}{\delta^2} n_2^2 \partial_y^2 \phi_-^\delta - \frac{1}{\delta} \frac{2n_2n_1}{1+\delta yc} \partial_{ys} \phi_-^\delta + \frac{1-\mu_-}{2} \left( -\frac{2cn_2n_1}{(1+\delta yc)^2} \partial_s \phi_-^\delta - \frac{n_2^2 \delta yc'}{(1+\delta yc)^3} \partial_s \phi_-^\delta \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{n_2^2}{(1+\delta yc)^2} \partial_s^2 \phi_-^\delta + \frac{1}{\delta} \frac{cn_2^2}{1+\delta yc} \partial_y \phi_-^\delta + \frac{1}{\delta} \frac{2n_2n_1}{1+\delta yc} \partial_{ys} \phi_-^\delta + \frac{1}{\delta^2} n_1^2 \partial_y^2 \phi_-^\delta \right) \right. \\ \left. + \frac{1+\mu_-}{2} \left( -\frac{2n_2^2 c}{(1+\delta yc)^2} \partial_s \psi_-^\delta + \frac{c}{(1+\delta yc)^2} \partial_s \psi_-^\delta + \frac{\delta yc' n_1 n_2}{(1+\delta yc)^3} \partial_s \psi_-^\delta - \frac{n_1 n_2}{(1+\delta yc)^2} \partial_s^2 \psi_-^\delta \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\delta} \frac{cn_1 n_2}{1+\delta yc} \partial_y \psi_-^\delta + \frac{1}{\delta} \frac{2n_2^2}{1+\delta yc} \partial_{ys} \psi_-^\delta - \frac{1}{\delta} \frac{1}{1+\delta yc} \partial_{ys} \psi_-^\delta + \frac{1}{\delta^2} n_1 n_2 \partial_y^2 \psi_-^\delta \right) \right] \\ \left. + K_- \left[ \phi_-^\delta - \frac{n_1}{1+\delta yc} \partial_s \omega_-^\delta + \frac{1}{\delta} n_2 \partial_y \omega_-^\delta \right] = 0. \right. \end{array} \right.$$

De même, le développement en puissances de  $\delta$  permet d'écrire :

$$\sum_{k \geq -2} \delta^k (A_2^k \psi_-^\delta + B_2^k \phi_-^\delta + C_2^k \omega_-^\delta) = \delta^{-2} (A_2^{-2} \psi_-^\delta + B_2^{-2} \phi_-^\delta + C_2^{-2} \omega_-^\delta) + \delta^{-1} (A_2^{-1} \psi_-^\delta + B_2^{-1} \phi_-^\delta + C_2^{-1} \omega_-^\delta) + \delta^0 (A_2^0 \psi_-^\delta + B_2^0 \phi_-^\delta + C_2^0 \omega_-^\delta) + \delta^1 (A_2^1 \psi_-^\delta + B_2^1 \phi_-^\delta + C_2^1 \omega_-^\delta) + \dots$$

où :

$$A_2^{-2} = -D_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y^2,$$

$$A_2^{-1} = D_- \left[ \frac{1+\mu_-}{2} cn_1 n_2 \partial_y - (1+\mu_-) n_2^2 \partial_{sy} + \frac{1+\mu_-}{2} \partial_{ys} \right],$$

$$A_2^0 = D_- \left[ -\frac{1+\mu_-}{2} yc^2 n_1 n_2 \partial_y + (1+\mu_-) n_2^2 yc \partial_{sy} - \frac{1+\mu_-}{2} yc \partial_{ys} + (1+\mu_-) cn_2^2 \partial_s \right. \\ \left. - \frac{1+\mu_-}{2} c \partial_s + \frac{1+\mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_s^2 \right],$$

$$A_2^1 = D_- \left[ \frac{1+\mu_-}{2} y^2 c^3 n_1 n_2 \partial_y - (1+\mu_-) n_2^2 y^2 c^2 \partial_{sy} + \frac{1+\mu_-}{2} y^2 c^2 \partial_{ys} - 2(1+\mu_-) yc^2 n_2^2 \partial_s \right. \\ \left. + (1+\mu_-) yc^2 \partial_s - (1+\mu_-) ycn_1 n_2 \partial_s^2 - \frac{1+\mu_-}{2} yc' n_1 n_2 \partial_s \right],$$

$$B_2^{-2} = D_- \left[ -1 + \frac{1+\mu_-}{2} n_1^2 \right] \partial_y^2,$$

$$B_2^{-1} = D_- \left[ -c \partial_y + \frac{1+\mu_-}{2} cn_2^2 \partial_y + (1+\mu_-) n_1 n_2 \partial_{ys} \right],$$

$$\begin{aligned}
B_2^0 &= D_- \left[ yc^2 \partial_y - \frac{1 + \mu_-}{2} yc^2 n_2^2 \partial_y - (1 + \mu_-) ycn_1 n_2 \partial_{ys} - \partial_s^2 - (1 + \mu_-) cn_1 n_2 \partial_s \right. \\
&\quad \left. + \frac{1 + \mu_-}{2} n_2^2 \partial_s^2 \right] + K_-, \\
B_2^1 &= D_- \left[ -y^2 c^3 \partial_y + \frac{1 + \mu_-}{2} y^2 c^3 n_2^2 \partial_y + (1 + \mu_-) y^2 c^2 n_1 n_2 \partial_{ys} + 2yc \partial_s^2 + yc' \partial_s \right. \\
&\quad \left. - (1 + \mu_-) ycn_2^2 \partial_s^2 + 2(1 + \mu_-) yc^2 n_1 n_2 \partial_s - \frac{1 + \mu_-}{2} yc' n_2^2 \partial_s \right], \\
C_2^{-2} &= 0, \quad C_2^{-1} = K_- n_2 \partial_y, \quad C_2^0 = -K_- n_1 \partial_s, \quad C_2^1 = K_- n_1 yc \partial_s.
\end{aligned}$$

La troisième équation du système posé sur  $\Omega_-^\delta$  devient après passage en coordonnées locales et changement d'échelle :

$$\begin{cases} -K_- \left[ \frac{1}{(1 + \delta yc)^2} \partial_s^2 \omega_-^\delta - \frac{\delta yc'}{(1 + \delta yc)^3} \partial_s \omega_-^\delta + \frac{1}{\delta} \frac{c}{1 + \delta yc} \partial_r \omega_-^\delta + \frac{1}{\delta^2} \partial_y^2 \omega_-^\delta \right. \\ \left. + \frac{n_2}{1 + \delta yc} \partial_s \psi_-^\delta + \frac{1}{\delta} n_1 \partial_y \psi_-^\delta - \frac{n_1}{1 + \delta yc} \partial_s \phi_-^\delta + \frac{1}{\delta} n_2 \partial_y \phi_-^\delta \right] = 0. \end{cases}$$

Un développement en puissances de  $\delta$  permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq -2} \delta^k (A_3^k \psi_-^\delta + B_3^k \phi_-^\delta + C_3^k \omega_-^\delta) &= \delta^{-2} (A_3^{-2} \psi_-^\delta + B_3^{-2} \phi_-^\delta + C_3^{-2} \omega_-^\delta) + \delta^{-1} (A_3^{-1} \psi_-^\delta + B_3^{-1} \phi_-^\delta \\
&\quad + C_3^{-1} \omega_-^\delta) + \delta^0 (A_3^0 \psi_-^\delta + B_3^0 \phi_-^\delta + C_3^0 \omega_-^\delta) + \delta^1 (A_3^1 \psi_-^\delta + B_3^1 \phi_-^\delta + C_3^1 \omega_-^\delta) + \dots
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{cases} A_3^{-2} = 0, \\ A_3^{-1} = -K_- n_1 \partial_y, \\ A_3^0 = -K_- n_2 \partial_s, \\ A_3^1 = K_- n_2 yc \partial_s, \end{cases} \quad \begin{cases} B_3^{-2} = 0, \\ B_3^{-1} = -K_- n_2 \partial_y, \\ B_3^0 = K_- n_1 \partial_s, \\ B_3^1 = -K_- n_1 yc \partial_s, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} C_3^{-2} = -K_- \partial_y^2, \\ C_3^{-1} = -K_- c \partial_y, \\ C_3^0 = K_- (yc^2 \partial_y - \partial_s^2), \\ C_3^1 = K_- (-y^2 c^3 \partial_y + 2yc \partial_s^2 + yc' \partial_s). \end{cases}$$

\* Expression des opérateurs de trace sur  $\Sigma_-$ 

On s'intéresse dans cette partie aux opérateurs de trace  $M_1$ ,  $M_2$  et  $T$ , qui ne sont rien d'autre que les moments de flexion et l'effort tranchant exercés sur la frontière externe de la couche  $\Sigma_-$ .

**L'opérateur  $M_1$  :**

Nous rappelons ici l'expression de l'opérateur  $M_1$  :

$$M_1(\psi_-, \phi_-) = D_- \left[ n_1 \partial_1 \psi_- + \mu_- n_1 \partial_2 \phi_- + \frac{1 - \mu_-}{2} (\partial_2 \psi_- + \partial_1 \phi_-) n_2 \right], \quad (2.10)$$

qui, après changement d'échelle s'écrit :

$$\begin{aligned} M_1(\psi_-^\delta, \phi_-^\delta) &= D_- \left[ n_1 n_2 (1 - \delta y c) \partial_s \psi_-^\delta + \delta^{-1} n_1^2 \partial_y \psi_-^\delta - \mu_- n_1^2 (1 - \delta y c) \partial_s \phi_-^\delta \right. \\ &\quad + \delta^{-1} \mu_- n_1 n_2 \partial_y \phi_-^\delta - \frac{1 - \mu_-}{2} n_1 n_2 (1 - \delta y c) \partial_s \psi_-^\delta + \delta^{-1} \frac{1 - \mu_-}{2} n_2^2 \partial_y \psi_-^\delta \\ &\quad \left. + \frac{1 - \mu_-}{2} n_2^2 (1 - \delta y c) \partial_s \phi_-^\delta + \delta^{-1} \frac{1 - \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y \phi_-^\delta \right]. \end{aligned}$$

Le développement en puissances de  $\delta$  donne :

$$\begin{aligned} M_1(\psi_-^\delta, \phi_-^\delta) &= \sum_{k \geq -1} \delta^k (M_{1.1}^k \psi_-^\delta + M_{1.2}^k \phi_-^\delta) \\ &= \delta^{-1} (M_{1.1}^{-1} \psi_-^\delta + M_{1.2}^{-1} \phi_-^\delta) + (M_{1.1}^0 \psi_-^\delta + M_{1.2}^0 \phi_-^\delta) + \delta^1 (M_{1.1}^1 \psi_-^\delta + M_{1.2}^1 \phi_-^\delta) + \dots, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} M_{1.1}^{-1} = D_- \left[ 1 - \frac{1 + \mu_-}{2} n_2^2 \right] \partial_y, \\ M_{1.1}^0 = D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_s, \\ M_{1.1}^1 = -D_- \frac{1 + \mu_-}{2} y c n_1 n_2 \partial_s, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} M_{1.2}^{-1} = D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y, \\ M_{1.2}^0 = -D_- \left[ \mu_- - \frac{1 + \mu_-}{2} n_2^2 \right] \partial_s, \\ M_{1.2}^1 = D_- \left[ \mu_- - \frac{1 + \mu_-}{2} n_2^2 \right] y c \partial_s. \end{cases}$$

**L'opérateur  $M_2$  :**

Concernant l'opérateur de trace  $M_2$ , nous avons

$$M_2(\psi_-, \phi_-) = D_- \left[ n_2 \partial_2 \phi_- + \mu_- n_2 \partial_1 \psi_- + \frac{1 - \mu_-}{2} (\partial_2 \psi_- + \partial_1 \phi_-) n_1 \right]. \quad (2.11)$$

Celui-ci devient après changement d'échelle :

$$\begin{aligned} M_2(\psi_-^\delta, \phi_-^\delta) &= D_- \left[ -n_1 n_2 (1 - \delta y c) \partial_s \phi_-^\delta + \delta^{-1} n_2^2 \partial_y \phi_-^\delta + \frac{1 - \mu_-}{2} n_1 n_2 (1 - \delta y c) \partial_s \phi_-^\delta \right. \\ &\quad + \delta^{-1} \frac{1 - \mu_-}{2} n_1^2 \partial_y \phi_-^\delta + \mu_- n_2^2 (1 - \delta y c) \partial_s \psi_-^\delta + \delta^{-1} \mu_- n_1 n_2 \partial_y \psi_-^\delta \\ &\quad \left. - \frac{1 - \mu_-}{2} n_1^2 (1 - \delta y c) \partial_s \psi_-^\delta + \delta^{-1} \frac{1 - \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y \psi_-^\delta \right]. \end{aligned}$$

De même, un développement en puissances de  $\delta$  donne :

$$\begin{aligned} M_2(\psi_-^\delta, \phi_-^\delta) &= \sum_{k \geq -1} \delta^k (M_{2.1}^k \psi_-^\delta + M_{2.2}^k \phi_-^\delta) \\ &= \delta^{-1} (M_{2.1}^{-1} \psi_-^\delta + M_{2.2}^{-1} \phi_-^\delta) + (M_{2.1}^0 \psi_-^\delta + M_{2.2}^0 \phi_-^\delta) + \delta^1 (M_{2.1}^1 \psi_-^\delta + M_{2.2}^1 \phi_-^\delta) + \dots, \end{aligned}$$

où :

$$\begin{cases} M_{2.1}^{-1} = D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y, \\ M_{2.1}^0 = -D_- \left[ \frac{1 + \mu_-}{2} n_1^2 - \mu_- \right] \partial_s, \\ M_{2.1}^1 = D_- \left[ \frac{1 + \mu_-}{2} n_1^2 - \mu_- \right] y c \partial_s, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} M_{2.2}^{-1} = D_- \left[ 1 - \frac{1 + \mu_-}{2} n_1^2 \right] \partial_y, \\ M_{2.2}^0 = -D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_s, \\ M_{2.2}^1 = D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 y c \partial_s. \end{cases}$$

**L'opérateur  $T$  :**

Pour le troisième opérateur de trace  $T$ , donné par :

$$T(\psi_-, \phi_-, \omega_-) = K_- \left( \partial_n \omega_- + n_1 \psi_- + n_2 \phi_- \right), \quad (2.12)$$

son expression après changement d'échelle devient :

$$\begin{aligned} T(\psi_-^\delta, \phi_-^\delta, \omega_-^\delta) &= K_- \left[ \frac{n_1 n_2}{1 + \delta y c} \partial_s \omega_-^\delta + \delta^{-1} n_1^2 \partial_y \omega_-^\delta \frac{n_1 n_2}{1 + \delta y c} \partial_s \omega_-^\delta + \delta^{-1} n_2^2 \partial_y \omega_-^\delta + n_1 \psi_-^\delta + n_2 \phi_-^\delta \right] \\ &= K_- \left[ \delta^{-1} \partial_y \omega_-^\delta + n_1 \psi_-^\delta + n_2 \phi_-^\delta \right], \end{aligned}$$

et de même, un développement en puissances de  $\delta$  donne :

$$\begin{aligned} T(\psi_-^\delta, \phi_-^\delta, \omega_-^\delta) &= \sum_{k \geq -1} \delta^k (T_1^k \psi_-^\delta + T_2^k \phi_-^\delta + T_3^k \omega_-^\delta) \\ &= \delta^{-1} (T_1^{-1} \psi_-^\delta + T_2^{-1} \phi_-^\delta + T_3^{-1} \omega_-^\delta) + (T_1^0 \psi_-^\delta + T_2^0 \phi_-^\delta + T_3^0 \omega_-^\delta) + \dots, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} T_1^{-1} = 0, \\ T_1^0 = K_- n_1, \\ T_1^1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} T_2^{-1} = 0, \\ T_2^0 = K_- n_2, \\ T_2^1 = 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} T_3^{-1} = K_- \partial_y, \\ T_3^0 = 0, \\ T_3^1 = 0. \end{cases}$$

### Écriture du problème dans un domaine fixe

Le changement d'échelle décrit précédemment permet d'obtenir un problème équivalent à notre problème initial, posé cette fois-ci sur un domaine fixe  $\Omega$ , indépendant du paramètre  $\delta$ . Nous désignons par  $\psi^\delta$ ,  $\phi^\delta$  et  $\omega^\delta$  les fonctions obtenues à partir de  $\psi$ ,  $\phi$  et  $\omega$  par la mise à l'échelle (2.8), à savoir :

$$\psi^\delta = \begin{cases} \psi_+^\delta = \psi|_{\Omega_+} & \text{dans } \Omega_+, \\ \psi_-^\delta = \psi|_{\Omega_-^\delta}(s + \delta yn(s)) & (s, y) \in \Omega_-, \end{cases} \quad \phi^\delta = \begin{cases} \phi_+^\delta = \phi|_{\Omega_+} & \text{dans } \Omega_+, \\ \phi_-^\delta = \phi|_{\Omega_-^\delta}(s + \delta yn(s)) & (s, y) \in \Omega_-, \end{cases}$$

$$\omega^\delta = \begin{cases} \omega_+^\delta = \omega|_{\Omega_+} & \text{dans } \Omega_+, \\ \omega_-^\delta = \omega|_{\Omega_-^\delta}(s + \delta yn(s)) & (s, y) \in \Omega_-. \end{cases}$$

Les développements des différents opérateurs intervenant dans notre problème permettent d'écrire le problème mis à l'échelle suivant :

\* Équations d'équilibre sur  $\Omega_+$  :

$$\begin{aligned} -D_+ \left[ \partial_1^2 \psi_+^\delta + \frac{1 - \mu_+}{2} \partial_2^2 \psi_+^\delta + \frac{1 + \mu_+}{2} \partial_{12}^2 \phi_+^\delta \right] + K_+ \left[ \psi_+^\delta + \partial_1 \omega_+^\delta \right] &= f_1^+ \quad \text{dans } \Omega_+, \\ -D_+ \left[ \partial_2^2 \phi_+^\delta + \frac{1 - \mu_+}{2} \partial_1^2 \phi_+^\delta + \frac{1 + \mu_+}{2} \partial_{12}^2 \psi_+^\delta \right] + K_+ \left[ \phi_+^\delta + \partial_2 \omega_+^\delta \right] &= f_2^+ \quad \text{dans } \Omega_+, \\ -K_+ \left[ \partial_1 (\partial_1 \omega_+^\delta + \psi_+^\delta) + \partial_2 (\partial_2 \omega_+^\delta + \phi_+^\delta) \right] &= f_3^+ \quad \text{dans } \Omega_+. \end{aligned} \tag{2.13}$$

\* Équations d'équilibre sur  $\Omega_-$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq -2} \delta^k (A_1^k \psi_-^\delta + B_1^k \phi_-^\delta + C_1^k \omega_-^\delta) &= 0 \quad \text{dans } \Omega_-, \\ \sum_{k \geq -2} \delta^k (A_2^k \psi_-^\delta + B_2^k \phi_-^\delta + C_2^k \omega_-^\delta) &= 0 \quad \text{dans } \Omega_-, \\ \sum_{k \geq -2} \delta^k (A_3^k \psi_-^\delta + B_3^k \phi_-^\delta + C_3^k \omega_-^\delta) &= 0 \quad \text{dans } \Omega_-. \end{aligned} \tag{2.14}$$

\* Conditions du bord libre sur  $\Sigma_-$  :

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq -1} \delta^k (M_{1.1}^k \psi_-^\delta + M_{1.2}^k \phi_-^\delta) &= 0 & \text{sur } \Sigma_-, \\
\sum_{k \geq -1} \delta^k (M_{2.1}^k \psi_-^\delta + M_{2.2}^k \phi_-^\delta) &= 0 & \text{sur } \Sigma_-, \\
\sum_{k \geq -1} \delta^k (T_1^k \psi_-^\delta + T_2^k \phi_-^\delta + T_3^k \omega_-^\delta) &= 0 & \text{sur } \Sigma_-,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

\* Conditions de transmission sur  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned}
M_1(\psi_+^\delta, \phi_+^\delta) &= \sum_{k \geq -1} \delta^k (M_{1.1}^k \psi_-^\delta + M_{1.2}^k \phi_-^\delta) & \text{sur } \Sigma, \\
M_2(\psi_+^\delta, \phi_+^\delta) &= \sum_{k \geq -1} \delta^k (M_{2.1}^k \psi_-^\delta + M_{2.2}^k \phi_-^\delta) & \text{sur } \Sigma, \\
T(\psi_+^\delta, \phi_+^\delta, \omega_+^\delta) &= \sum_{k \geq -1} \delta^k (T_1^k \psi_-^\delta + T_2^k \phi_-^\delta + T_3^k \omega_-^\delta) & \text{sur } \Sigma, \\
\psi_+^\delta = \psi_-^\delta, \quad \phi_+^\delta = \phi_-^\delta, \quad \omega_+^\delta = \omega_-^\delta & & \text{sur } \Sigma.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

\* Conditions d'encastrement sur  $\Sigma_0$  :

$$\psi_+^\delta = 0, \quad \phi_+^\delta = 0, \quad \omega_+^\delta = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0. \tag{2.17}$$

Dans la section qui suit, nous allons procéder à la construction d'un développement asymptotique pour la solution de notre problème. Les différents termes de ce développement seront identifiés grâce à un processus de résolution intérieur-extérieur, entre les domaines  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$ . Par la suite, ce développement sera validé par une estimation d'erreur.

## 2.4 Développement asymptotique de la solution

Afin de déterminer le problème approché recherché, nous allons d'abord construire un développement asymptotique de la solution de notre problème. Pour ce faire, nous développons  $\psi^\delta$ ,  $\phi^\delta$  et  $\omega^\delta$  sous la forme :

$$\psi_+^\delta = \sum_{n \geq 0} \delta^n \psi_+^n, \quad \phi_+^\delta = \sum_{n \geq 0} \delta^n \phi_+^n, \quad \omega_+^\delta = \sum_{n \geq 0} \delta^n \omega_+^n, \tag{2.18}$$

$$\psi_-^\delta = \sum_{n \geq 0} \delta^n \psi_-^n, \quad \phi_-^\delta = \sum_{n \geq 0} \delta^n \phi_-^n, \quad \omega_-^\delta = \sum_{n \geq 0} \delta^n \omega_-^n, \quad (2.19)$$

où les termes  $\psi_+^n, \phi_+^n, \omega_+^n, \psi_-^n, \phi_-^n, \omega_-^n$  sont indépendants de  $\delta$  et les indices "+" et "-" se réfèrent à la restriction aux domaines  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  respectivement. En insérant ces expressions dans (2.13)-(2.17), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -D_+ \left[ \partial_1^2 \psi_+^n + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_2^2 \psi_+^n + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12}^2 \phi_+^n \right] + K_+ \left[ \psi_+^n + \partial_1 \omega_+^n \right] = \delta_0^n f_1^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ -D_+ \left[ \partial_2^2 \phi_+^n + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_1^2 \phi_+^n + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12}^2 \psi_+^n \right] + K_+ \left[ \phi_+^n + \partial_2 \omega_+^n \right] = \delta_0^n f_2^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ -K_+ \left[ \partial_1^2 \omega_+^n + \partial_2^2 \omega_+^n + \partial_1 \psi_+^n + \partial_2 \phi_+^n \right] = \delta_0^n f_3^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ A_1^{-2} \psi_-^n + B_1^{-2} \phi_-^n = - \sum_{k+l=n-2, k \geq -1, l \geq 0} (A_1^k \psi_-^l + B_1^k \phi_-^l + C_1^k \omega_-^l) & \text{pour } 0 \leq y \leq 1, \\ A_2^{-2} \psi_-^n + B_2^{-2} \phi_-^n = - \sum_{k+l=n-2, k \geq -1, l \geq 0} (A_2^k \psi_-^l + B_2^k \phi_-^l + C_2^k \omega_-^l) & \text{pour } 0 \leq y \leq 1, \\ C_3^{-2} \omega_-^n = - \sum_{k+l=n-2, k \geq -1, l \geq 0} (A_3^k \psi_-^l + B_3^k \phi_-^l + C_3^k \omega_-^l) & \text{pour } 0 \leq y \leq 1, \\ M_{1.1}^{-1} \psi_-^n + M_{1.2}^{-1} \phi_-^n = - \sum_{k+l=n-1, k \geq 0, l \geq 0} (M_{1.1}^k \psi_-^l + M_{1.2}^k \phi_-^l) & \text{sur } \Sigma_-, \\ M_{2.1}^{-1} \psi_-^n + M_{2.2}^{-1} \phi_-^n = - \sum_{k+l=n-1, k \geq 0, l \geq 0} (M_{2.1}^k \psi_-^l + M_{2.2}^k \phi_-^l) & \text{sur } \Sigma_-, \\ T_3^{-1} \omega_-^n = - \sum_{k+l=n-1, k \geq 0, l \geq 0} (T_1^k \psi_-^l + T_2^k \phi_-^l) & \text{sur } \Sigma_-, \\ M_1(\psi_+^n, \phi_+^n) = \sum_{k+l=n, k \geq -1, l \geq 0} (M_{1.1}^k \psi_-^l + M_{1.2}^k \phi_-^l) & \text{sur } \Sigma, \\ M_2(\psi_+^n, \phi_+^n) = \sum_{k+l=n, k \geq -1, l \geq 0} (M_{2.1}^k \psi_-^l + M_{2.2}^k \phi_-^l) & \text{sur } \Sigma, \\ T(\psi_+^n, \phi_+^n, \omega_+^n) = \sum_{k+l=n, k \geq -1, l \geq 0} (T_1^k \psi_-^l + T_2^k \phi_-^l + T_3^k \omega_-^l) & \text{sur } \Sigma, \\ \psi_+^n = \psi_-^n, \quad \phi_+^n = \phi_-^n, \quad \omega_+^n = \omega_-^n & \text{sur } \Sigma, \\ \psi_+^n = 0, \quad \phi_+^n = 0, \quad \omega_+^n = 0 & \text{sur } \Sigma_0, \end{array} \right. \quad (2.20)$$

où  $\delta_0^n$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_0^n = 1$  si  $n=0$  et  $\delta_0^n = 0$  si  $n \neq 0$ ).

La prochaine section est consacrée au calcul des premiers termes du développement asymptotique décrit ci-dessus.

## 2.5 Calcul des premiers termes

Afin de construire un modèle approché pour la multi-structure considérée, nous sommes amenés à calculer explicitement les premiers termes du développement asymptotique. L'identification de ces termes découle d'une résolution alternative des équations du système (2.20) dans chaque sous-domaine  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$ . Notons que tous les termes extérieurs  $\psi_-^0, \phi_-^0, \omega_-^0, \psi_-^1, \phi_-^1$  et  $\omega_-^1$  doivent être identifiés avant que le premier terme intérieur ( $\psi_+^0, \phi_+^0, \omega_+^0$ ) ne soit entièrement déterminé.

En considérant le système (2.20), on remarque que le terme extérieur ( $\psi_-^0, \phi_-^0, \omega_-^0$ ) résout le problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -D_- \left( 1 - \frac{1 + \mu_-}{2} n_2^2 \right) \partial_y^2 \psi_-^0(s, y) - D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y^2 \phi_-^0(s, y) = 0 & \text{pour } 0 \leq y \leq 1, \\ -D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y^2 \psi_-^0(s, y) - D_- \left( 1 - \frac{1 + \mu_-}{2} n_1^2 \right) \partial_y^2 \phi_-^0(s, y) = 0 & \text{pour } 0 \leq y \leq 1, \\ -K_- \partial_y^2 \omega_-^0(s, y) = 0 & \text{pour } 0 \leq y \leq 1, \\ D_- \left( 1 - \frac{1 + \mu_-}{2} n_2^2 \right) \partial_y \psi_-^0(s, 1) + D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y \phi_-^0(s, 1) = 0, \\ D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y \psi_-^0(s, 1) + D_- \left( 1 - \frac{1 + \mu_-}{2} n_1^2 \right) \partial_y \phi_-^0(s, 1) = 0, \\ K_- \partial_y \omega_-^0(s, 1) = 0. \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Afin de calculer explicitement  $\psi_-^0, \phi_-^0$  et  $\omega_-^0$ , on commence par intégrer la première équation de (2.21), de  $y$  à 1, par rapport à la seconde variable :

$$\int_y^1 \left( -D_- \left( 1 - \frac{1 + \mu_-}{2} n_2^2 \right) \partial_\xi^2 \psi_-^0(s, \xi) - D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_\xi^2 \phi_-^0(s, \xi) \right) d\xi = 0,$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} D_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y \phi_-^0(s, y) &+ D_- \left( 1 - \frac{1+\mu_-}{2} n_2^2 \right) \partial_y \psi_-^0(s, y) \\ &= D_- \left( 1 - \frac{1+\mu_-}{2} n_2^2 \right) \partial_y \psi_-^0(s, 1) + D_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y \phi_-^1(s, 1). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Grâce à la quatrième équation de (2.21), nous déduisons que le terme de droite de (2.22) est nul, ce qui conduit à :

$$D_- \left( 1 - \frac{1+\mu_-}{2} n_2^2 \right) \partial_y \psi_-^0(s, y) + D_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y \phi_-^0(s, y) = 0. \quad (2.23)$$

En intégrant encore une fois (2.23) de 0 à  $y$ , on obtient :

$$\begin{aligned} D_- \left( 1 - \frac{1+\mu_-}{2} n_2^2 \right) \psi_-^0(s, y) &+ D_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1 n_2 \phi_-^0(s, y) \\ &= D_- \left( 1 - \frac{1+\mu_-}{2} n_2^2 \right) \psi_-^0(s, 0) + D_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1 n_2 \phi_-^0(s, 0). \end{aligned} \quad (2.24)$$

En ce qui concerne la deuxième équation de (2.21), en utilisant les mêmes arguments que pour le cas précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} D_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1 n_2 \psi_-^0(s, y) &+ D_- \left( 1 - \frac{1+\mu_-}{2} n_1^2 \right) \phi_-^0(s, y) \\ &= D_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1 n_2 \psi_-^0(s, 0) + D_- \left( 1 - \frac{1+\mu_-}{2} n_1^2 \right) \phi_-^0(s, 0). \end{aligned} \quad (2.25)$$

D'un autre côté, l'équation (2.24), donne :

$$\phi_-^0(s, y) = \phi_-^0(s, 0) + \frac{2}{(1+\mu_-)n_1 n_2} \left( 1 - \frac{1+\mu_-}{2} n_2^2 \right) \left( \psi_-^0(s, 0) - \psi_-^0(s, y) \right). \quad (2.26)$$

Par la suite, en insérant cette dernière équation dans (2.25), on aboutit au fait que le terme  $\psi_-$  est réduit à sa trace sur  $\Sigma$  :

$$\psi_-^0(s, y) = \psi_-^0(s, 0) = \alpha^0(s),$$

où  $\alpha^0$  ne dépend que de la variable  $s$ . Maintenant, à partir de (2.26), nous concluons que :

$$\phi_-^0(s, y) = \phi_-^0(s, 0) = \beta^0(s),$$

où  $\beta^0$  est indépendant de  $y$ .

De même, en combinant la troisième et la dernière équation de (2.21), on déduit :

$$\omega_-^0(s, y) = \omega_-^0(s, 0) = \lambda^0(s),$$

où  $\lambda^0$  est indépendant de  $y$ .

Comme indiqué ci-dessus, nous devons calculer le terme extérieur  $(\psi_-^1, \phi_-^1, \omega_-^1)$  avant d'identifier le premier terme intérieur  $(\psi_+^0, \phi_+^0, \omega_+^0)$ .

Pour ce faire, nous résolvons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -D_- \left( 1 - \frac{1 + \mu_-}{2} n_2^2 \right) \partial_y^2 \psi_-^1(s, y) - D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y^2 \phi_-^1(s, y) = 0 & \text{pour } 0 \leq y \leq 1, \\ -D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y^2 \psi_-^1(s, y) - D_- \left( 1 - \frac{1 + \mu_-}{2} n_1^2 \right) \partial_y^2 \phi_-^1(s, y) = 0 & \text{pour } 0 \leq y \leq 1, \\ -K_- \partial_y^2 \omega_-^1(s, y) = 0 & \text{pour } 0 \leq y \leq 1, \\ D_- \left( 1 - \frac{1 + \mu_-}{2} n_2^2 \right) \partial_y \psi_-^1(s, 1) + D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y \phi_-^1(s, 1) = -\gamma^1(s, 1), \\ D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y \psi_-^1(s, 1) + D_- \left( 1 - \frac{1 + \mu_-}{2} n_1^2 \right) \partial_y \phi_-^1(s, 1) = -\xi^1(s, 1), \\ K_- \partial_y \omega_-^1(s, 1) = -\zeta^1(s, 1), \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma^1(s, y) &= M_{1,1}^0 \psi_-^0(s, y) + M_{1,2}^0 \phi_-^0(s, y) \\ &= D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_s \alpha^0(s) - D_- \left[ \mu_- - \frac{1 + \mu_-}{2} n_2^2 \right] \partial_s \beta^0(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi^1(s, y) &= M_{2,1}^0 \psi_-^0(s, y) + M_{2,2}^0 \phi_-^0(s, y) \\ &= -D_- \left[ \frac{1 + \mu_-}{2} n_1^2 - \mu_- \right] \partial_s \alpha^0(s) - D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_s \beta^0(s), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \zeta^1(s, y) &= T_1^0 \psi_-^0(s, y) + T_2^0 \phi_-^0(s, y) \\ &= K_- n_1 \alpha^0(s) + K_- n_2 \beta^0(s). \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments que pour la résolution du système (2.21), on obtient :

$$\begin{aligned}\psi_-^1(s, y) &= \alpha^1(s) - \frac{1}{D_-} \frac{2}{1 - \mu_-} \left( 1 - \frac{1 + \mu_-}{2} n_1^2 \right) \gamma^1(s, 1)y + \frac{n_1 n_2}{D_-} \frac{1 + \mu_-}{1 - \mu_-} \xi^1(s, 1)y, \\ \phi_-^1(s, y) &= \beta^1(s) - \frac{1}{D_-} \frac{2}{1 - \mu_-} \left( 1 - \frac{1 + \mu_-}{2} n_2^2 \right) \xi^1(s, 1)y + \frac{1}{D_-} \frac{1 + \mu_-}{1 - \mu_-} n_1 n_2 \gamma^1(s, 1)y, \\ \omega_-^1(s, y) &= \lambda^1(s) - \frac{1}{K_-} \zeta^1(s, 1)y,\end{aligned}$$

où les fonctions  $\alpha^1(s)$ ,  $\beta^1(s)$  et  $\lambda^1(s)$  sont indépendantes de la variable  $y$ .

Maintenant, en se référant à (2.20) et en utilisant les expressions des termes extérieurs obtenus ci-dessus, on déduit le problème résolu par le premier terme intérieur ( $\psi_+^0$ ,  $\phi_+^0$ ,  $\omega_+^0$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -D_+ \left( \partial_1^2 \psi_+^0 + \frac{1 - \mu_+}{2} \partial_2^2 \psi_+^0 + \frac{1 + \mu_+}{2} \partial_{12}^2 \phi_+^0 \right) + K_+ (\psi_+^0 + \partial_1 \omega_+^0) = f_1^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ -D_+ \left( \partial_2^2 \phi_+^0 + \frac{1 - \mu_+}{2} \partial_1^2 \phi_+^0 + \frac{1 + \mu_+}{2} \partial_{12}^2 \psi_+^0 \right) + K_+ (\phi_+^0 + \partial_2 \omega_+^0) = f_2^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ -K_+ (\partial_1^2 \omega_+^0 + \partial_2^2 \omega_+^0 + \partial_1 \psi_+^0 + \partial_2 \phi_+^0) = f_3^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ M_1(\psi_+^0, \phi_+^0)(s, 0) = -\gamma^1(s, 1) + \gamma^1(s, 0) & \text{sur } \Sigma, \\ M_2(\psi_+^0, \phi_+^0)(s, 0) = -\xi^1(s, 1) + \xi^1(s, 0) & \text{sur } \Sigma, \\ T(\psi_+^0, \phi_+^0, \omega_+^0)(s, 0) = -\zeta^1(s, 1) + \zeta^1(s, 0) & \text{sur } \Sigma, \\ \psi_+^0 = \psi_-^0, \quad \phi_+^0 = \phi_-^0, \quad \omega_+^0 = \omega_-^0 & \text{sur } \Sigma, \\ \psi_+^0 = 0, \quad \phi_+^0 = 0, \quad \omega_+^0 = 0 & \text{sur } \Sigma_0. \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Avec

$$\begin{aligned}M_1(\psi_+^0, \phi_+^0)(s, 0) &= \left( M_{1.1}^0 \psi_-^0 + M_{1.1}^{-1} \psi_-^1 + M_{1.2}^0 \phi_-^0 + M_{1.2}^{-1} \phi_-^1 \right)(s, 0) \\ &= -\gamma^1(s, 1) + \gamma^1(s, 0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_2(\psi_+^0, \phi_+^0)(s, 0) &= \left( M_{2.1}^0 \psi_-^0 + M_{2.1}^{-1} \psi_-^1 + M_{2.2}^0 \phi_-^0 + M_{2.2}^{-1} \phi_-^1 \right)(s, 0) \\ &= -\xi^1(s, 1) + \xi^1(s, 0)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
T(\psi_+^0, \phi_+^0, \omega_+^0)(s, 0) &= \left( T_1^0 \psi_-^0 + T_1^{-1} \psi_-^1 + T_2^0 \phi_-^0 + T_2^{-1} \phi_-^1 + T_3^0 \omega_-^0 + T_3^{-1} \omega_-^1 \right)(s, 0) \\
&= -\zeta^1(s, 1) + \zeta^1(s, 0).
\end{aligned}$$

Un simple calcul, utilisant les expressions de  $\psi_-^0$ ,  $\phi_-^0$  et  $\omega_-^0$  montre que :

$$-\gamma^1(s, 1) + \gamma^1(s, 0) = 0, \quad -\xi^1(s, 1) + \xi^1(s, 0) = 0 \text{ et } -\zeta^1(s, 1) + \zeta^1(s, 0) = 0,$$

ce qui engendre l'annulation des termes de droite des équations imposées sur l'interface  $\Sigma$ . Par conséquent, le problème résolu par le premier terme intérieur  $(\psi_+^0, \phi_+^0, \omega_+^0)$  n'est rien d'autre que le modèle de Mindlin-Timoshenko pour la plaque  $\Omega_+$ , encadrée sur la partie du bord  $\Sigma_0$  et libre de toute force sur  $\Sigma$ .

Grâce aux résultats précédents et aux conditions de transmission, on peut maintenant déterminer les fonctions  $\alpha^0(s)$ ,  $\beta^0(s)$  et  $\lambda^0(s)$  :

$$\alpha^0(s) = \psi_+^0|_{\Sigma} = \psi_+^0(s, 0), \quad \beta^0(s) = \phi_+^0|_{\Sigma} = \phi_+^0(s, 0), \quad \lambda^0(s) = \omega_+^0|_{\Sigma} = \omega_+^0(s, 0),$$

ce qui nous permet de fixer complètement  $\psi_-^0$ ,  $\phi_-^0$  et  $\omega_-^0$  :

$$\psi_-^0(s, y) = \psi_+^0|_{\Sigma}, \quad \phi_-^0(s, y) = \phi_+^0|_{\Sigma}, \quad \omega_-^0(s, y) = \omega_+^0|_{\Sigma}.$$

On revient maintenant à la partie extérieure, nous allons calculer le troisième terme  $(\psi_-^2, \phi_-^2, \omega_-^2)$  qui est nécessaire pour identifier le deuxième terme intérieur  $(\psi_+^1, \phi_+^1, \omega_+^1)$ . Encore une fois, nous nous référons au système (2.20), ce qui nous permet d'avoir le problème résolu par le terme extérieur  $(\psi_-^2, \phi_-^2, \omega_-^2)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l}
-D_- \left( 1 - \frac{1 + \mu_-}{2} n_2^2 \right) \partial_y^2 \psi_-^2(s, y) - D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y^2 \phi_-^2(s, y) = -\theta_1^2(s, y) \quad \text{pour } 0 \leq y \leq 1, \\
-D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y^2 \psi_-^2(s, y) - D_- \left( 1 - \frac{1 + \mu_-}{2} n_1^2 \right) \partial_y^2 \phi_-^2(s, y) = -\theta_2^2(s, y) \quad \text{pour } 0 \leq y \leq 1, \\
-K_- \partial_y^2 \omega_-^2(s, y) = -\theta_3^2(s, y) \quad \text{pour } 0 \leq y \leq 1, \\
D_- \left( 1 - \frac{1 + \mu_-}{2} n_2^2 \right) \partial_y \psi_-^2(s, 1) + D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y \phi_-^2(s, 1) = -\gamma^2(s, 1), \\
D_- \frac{1 + \mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_y \psi_-^2(s, 1) + D_- \left( 1 - \frac{1 + \mu_-}{2} n_1^2 \right) \partial_y \phi_-^2(s, 1) = -\xi^2(s, 1), \\
K_- \partial_y \omega_-^2(s, 1) = -\zeta^2(s, 1),
\end{array} \right. \tag{2.28}$$

où  $\gamma^2(.,.)$ ,  $\xi^2(.,.)$  et  $\zeta^2(.,.)$  sont données par :

$$\begin{aligned}
\gamma^2(s, y) &= M_{1,1}^0 \psi_-^1(s, y) + M_{1,1}^1 \psi_-^0(s, y) + M_{1,2}^0 \phi_-^1(s, y) + M_{1,2}^1 \phi_-^0(s, y) \\
&= D_- \left[ \frac{1+\mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_s \alpha^1 - \left( \mu_- - \frac{1+\mu_-}{2} n_2^2 \right) \partial_s \beta^1 + \mu_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1 n_2 y c \partial_s \alpha^0 \right. \\
&\quad - 2\mu_- (1+\mu_-) n_1 n_2 y c \partial_s \alpha^0 - \mu_- \frac{1+\mu_-}{2} n_2^2 c y \partial_s \beta^0 + \mu_- (1+\mu_-) n_1^2 c y \partial_s \beta^0 \\
&\quad \left. + \mu_- c y \partial_s \beta^0 - \mu_- y \partial_s^2 \alpha^0 + \mu_- \frac{1+\mu_-}{2} n_2^2 y \partial_s^2 \alpha^0 - \mu_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1 n_2 y \partial_s^2 \beta^0 \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi^2(s, y) &= M_{2,1}^0 \psi_-^1(s, y) + M_{2,1}^1 \psi_-^0(s, y) + M_{2,2}^0 \phi_-^1(s, y) + M_{2,2}^1 \phi_-^0(s, y) \\
&= D_- \left[ -\frac{1+\mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_s \beta^1 - \left( \frac{1+\mu_-}{2} n_1^2 - \mu_- \right) \partial_s \alpha^1 + \mu_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1^2 c y \partial_s \alpha^0 \right. \\
&\quad - \mu_- c y \partial_s \alpha^0 - \mu_- (1+\mu_-) n_2^2 c y \partial_s \alpha^0 + 2\mu_- (1+\mu_-) n_1 n_2 y c \partial_s \beta^0 \\
&\quad \left. - \mu_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1 n_2 y c \partial_s \beta^0 - \mu_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1 n_2 y \partial_s^2 \alpha^0 + \mu_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1^2 y \partial_s^2 \beta^0 - \mu_- y \partial_s^2 \beta^0 \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta^2(s, y) &= T_1^0 \psi_-^1(s, y) + T_1^1 \psi_-^0(s, y) + T_2^0 \phi_-^1(s, y) + T_2^1 \phi_-^0(s, y) \\
&= K_- \left[ n_1 \alpha^1 + n_2 \beta^1 - \mu_- n_2 y \partial_s \alpha^0 + n_1 \mu_- y \partial_s \beta^0 \right].
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en tenant compte des expressions des termes extérieurs identifiés ci-dessus, les seconds membres  $\theta_1^2(.,.)$ ,  $\theta_2^2(.,.)$  et  $\theta_3^2(.,.)$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\theta_1^2(s, y) &= (A_1^{-1} \psi_-^1 + B_1^{-1} \phi_-^1 + C_1^{-1} \omega_-^1 + A_1^0 \psi_-^0 + B_1^0 \phi_-^0 + C_1^0 \omega_-^0)(s, y) \\
&= D_- \left[ -\mu_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1 n_2 c \partial_s \alpha^0 + 2(1+\mu_-) n_1 n_2 c \partial_s \alpha^0 + \frac{1-\mu_-^2}{2} n_2^2 c \partial_s \beta^0 \right. \\
&\quad + \frac{1-\mu_-}{2} c \partial_s \beta^0 - (1+\mu_-) n_1^2 c \partial_s \beta^0 - \frac{1+\mu_-}{2} n_1^2 c \partial_s \beta^0 + \frac{1+\mu_-}{2} n_1^2 \partial_s^2 \alpha^0 \\
&\quad - \partial_s^2 \alpha^0 + \frac{1+\mu_-}{2} \partial_s^2 \alpha^0 - \frac{1-\mu_-^2}{2} n_2^2 \partial_s^2 \alpha^0 - \mu_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_s^2 \beta^0 \\
&\quad \left. + (1+\mu_-) n_1 n_2 \partial_s^2 \beta^0 \right] + K_- \left[ n_2^2 \alpha^0 - n_1 n_2 \beta^0 + n_2 \partial_s \lambda^0 \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_2^2(s, y) &= (A_2^{-1}\psi_-^1 + B_2^{-1}\phi_-^1 + C_2^{-1}\omega_-^1 + A_2^0\psi_-^0 + B_2^0\phi_-^0 + C_2^0\omega_-^0)(s, y) \\
&= D_- \left[ \mu_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1^2 c \partial_s \alpha^0 + 2(1+\mu_-) n_2^2 c \partial_s \alpha^0 - c \partial_s \alpha^0 + \mu_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1 n_2 c \partial_s \beta^0 \right. \\
&\quad - 2(1+\mu_-) n_1 n_2 c \partial_s \beta^0 - \mu_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1 n_2 \partial_s^2 \alpha^0 + (1+\mu_-) n_1 n_2 \partial_s^2 \alpha^0 - \partial_s^2 \beta^0 \\
&\quad \left. + \mu_- \frac{1+\mu_-}{2} n_1^2 \partial_s^2 \beta^0 + (1+\mu_-) n_2^2 \partial_s^2 \beta^0 \right] + K_- \left[ -n_1 n_2 \alpha^0 + n_1^2 \beta^0 - n_1 \partial_s \lambda^0 \right].
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\theta_3^2(s, y) &= (A_3^{-1}\psi_-^1 + B_3^{-1}\phi_-^1 + C_3^{-1}\omega_-^1 + A_3^0\psi_-^0 + B_3^0\phi_-^0 + C_3^0\omega_-^0)(s, y) \\
&= K_- \left[ -(1-\mu_-) n_2 \partial_s \alpha^0 + (1-\mu_-) n_1 \partial_s \beta^0 + c n_1 \alpha^0 + c n_2 \beta^0 - \partial_s^2 \lambda^0 \right].
\end{aligned}$$

Notons que ces termes sont en fait indépendants de  $y$ . Ainsi, la résolution du système (2.28) nous donne :

$$\begin{aligned}
\psi_-^2(s, y) &= \alpha^2(s) - \frac{1}{D_-} \frac{2}{1-\mu_-} \left( 1 - \frac{1+\mu_-}{2} n_1^2 \right) \left\{ \theta_1^2(s, y) \left( y - \frac{1}{2} y^2 \right) + \gamma^2(s, 1) y \right\} \\
&\quad + \frac{n_1 n_2}{D_-} \frac{1+\mu_-}{1-\mu_-} \left\{ \theta_2^2(s, y) \left( y - \frac{1}{2} y^2 \right) + \xi^2(s, 1) y \right\}, \\
\phi_-^2(s, y) &= \beta^2(s) - \frac{1}{D_-} \frac{2}{1-\mu_-} \left( 1 - \frac{1+\mu_-}{2} n_2^2 \right) \left\{ \theta_2^2(s, y) \left( y - \frac{1}{2} y^2 \right) + \xi^2(s, 1) y \right\} \\
&\quad + \frac{1}{D_-} \frac{1+\mu_-}{1-\mu_-} n_1 n_2 \left\{ \theta_1^2(s, y) \left( y - \frac{1}{2} y^2 \right) + \gamma^2(s, 1) y \right\}, \\
\omega_-^2(s, y) &= \lambda^2(s) - \frac{1}{K_-} \left\{ \theta_3^2(s, y) \left( y - \frac{1}{2} y^2 \right) + \zeta^2(s, 1) y \right\},
\end{aligned}$$

où  $\alpha^2(s)$ ,  $\beta^2(s)$  et  $\lambda^2(s)$  sont indépendants de  $y$ .

En se référant au système (2.20) et en utilisant les expressions des différents termes extérieurs calculés précédemment, on obtient le problème résolu par  $(\psi_+^1, \phi_+^1, \omega_+^1)$  qui

s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -D_+ \left( \partial_1^2 \psi_+^1 + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_2^2 \psi_+^1 + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \phi_+^1 \right) + K_+ (\psi_+^1 + \partial_1 \omega_+^1) = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ -D_+ \left( \partial_2^2 \phi_+^1 + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_1^2 \phi_+^1 + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \psi_+^1 \right) + K_+ (\phi_+^1 + \partial_2 \omega_+^1) = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ -K_+ (\partial_1^2 \omega_+^1 + \partial_2^2 \omega_+^1 + \partial_1 \psi_+^1 + \partial_2 \phi_+^1) = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ M_1(\psi_+^1, \phi_+^1)(s, 0) = -(\theta_1^2(s, 0) + \gamma^2(s, 1) - \gamma^2(s, 0)) & \text{sur } \Sigma, \\ M_2(\psi_+^1, \phi_+^1)(s, 0) = -(\theta_2^2(s, 0) + \xi^2(s, 1) - \xi^2(s, 0)) & \text{sur } \Sigma, \\ T(\psi_+^1, \phi_+^1, \omega_+^1)(s, 0) = -(\theta_3^2(s, 0) + \zeta^2(s, 1) - \zeta^2(s, 0)) & \text{sur } \Sigma, \\ \psi_+^1 = \psi_-^1, \quad \phi_+^1 = \phi_-^1, \quad \omega_+^1 = \omega_-^1 & \text{sur } \Sigma, \\ \psi_+^1 = 0, \quad \phi_+^1 = 0, \quad \omega_+^1 = 0 & \text{sur } \Sigma_0. \end{array} \right. \quad (2.29)$$

En explorant les différents seconds membres des conditions écrites sur  $\Sigma$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \theta_1^2(s, 0) + \gamma^2(s, 1) - \gamma^2(s, 0) &= -D_-(1 - \mu_-^2) n_2^2 \partial_s^2 \alpha^0 + D_-(1 - \mu_-^2) n_1 n_2 \partial_s^2 \beta^0 \\ &\quad + 2D_-(1 - \mu_-^2) n_1 n_2 c \partial_s \alpha^0 - D_-(1 - \mu_-^2) n_1^2 c \partial_s \beta^0 \\ &\quad + D_-(1 - \mu_-^2) n_2^2 c \partial_s \beta^0 + K_-(n_2^2 \alpha^0 - n_1 n_2 \beta^0 + n_2 \partial_s \lambda^0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_2^2(s, 0) + \xi^2(s, 1) - \xi^2(s, 0) &= D_-(1 - \mu_-^2) n_1 n_2 \partial_s^2 \alpha^0 + D_-(1 - \mu_-^2) n_2^2 \partial_s^2 \beta^0 \\ &\quad - 2D_-(1 - \mu_-^2) n_1 n_2 c \partial_s \beta^0 - D_-(1 - \mu_-^2) n_1^2 c \partial_s \alpha^0 \\ &\quad + D_-(1 - \mu_-^2) n_2^2 c \partial_s \alpha^0 - K_-(n_1 n_2 \alpha^0 - n_1^2 \beta^0 + n_1 \partial_s \lambda^0), \end{aligned}$$

$$\theta_3^2(s, 0) + \zeta^2(s, 1) - \zeta^2(s, 0) = -K_- n_2 \partial_s \alpha^0 + K_- n_1 \partial_s \beta^0 + K_- c n_1 \alpha^0 + K_- c n_2 \beta^0 - K_- \partial_s^2 \lambda^0,$$

et en remplaçant les valeurs de  $\alpha^0$ ,  $\beta^0$  et  $\lambda^0$ , on aboutit à des seconds membres qui dépendent uniquement des traces de  $\psi_+^0$ ,  $\phi_+^0$  et  $\omega_+^0$  sur  $\Sigma$ .

Finalement, les conditions imposées sur  $\Sigma$  s'écrivent :

$$M_1(\psi_+^1, \phi_+^1) = -Q(\psi_+^0, \phi_+^0, \omega_+^0),$$

$$M_2(\psi_+^1, \phi_+^1) = -R(\psi_+^0, \phi_+^0, \omega_+^0),$$

$$T(\psi_+^1, \phi_+^1, \omega_+^1) = -S(\psi_+^0, \phi_+^0, \omega_+^0),$$

où :

$$\begin{aligned} Q(\psi_+^0, \phi_+^0, \omega_+^0) &= -D_-(1 - \mu_-^2) \partial_s \left[ n_2(n_2 \partial_s \psi_+^0 - n_1 \partial_s \phi_+^0) \right] + K_- n_2(n_2 \psi_+^0 - n_1 \phi_+^0 + \partial_s \omega_+^0), \\ R(\psi_+^0, \phi_+^0, \omega_+^0) &= D_-(1 - \mu_-^2) \partial_s \left[ n_1(n_2 \partial_s \psi_+^0 - n_1 \partial_s \phi_+^0) \right] - K_- n_1(n_2 \psi_+^0 - n_1 \phi_+^0 + \partial_s \omega_+^0), \\ S(\psi_+^0, \phi_+^0, \omega_+^0) &= -K_- \partial_s \left[ n_2 \psi_+^0 - n_1 \phi_+^0 + \partial_s \omega_+^0 \right]. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Pour fixer complètement  $\psi_-^1$ ,  $\phi_-^1$  et  $\omega_-^1$ , nous allons déterminer les fonctions  $\alpha^1$ ,  $\beta^1$  et  $\lambda^1$  en exploitant les conditions de transmission  $\psi_+^1 = \psi_-^1$ ,  $\phi_+^1 = \phi_-^1$ ,  $\omega_+^1 = \omega_-^1$  sur  $\Sigma$ .

Ceci permet d'obtenir :

$$\alpha^1(s) = \psi_{+|\Sigma}^1 = \psi_+^1(s, 0), \quad \beta^1(s) = \phi_{+|\Sigma}^1 = \phi_+^1(s, 0), \quad \lambda^1(s) = \omega_{+|\Sigma}^1 = \omega_+^1(s, 0),$$

ce qui donne  $\psi_-^1$ ,  $\phi_-^1$  et  $\omega_-^1$  :

$$\psi_-^1(s, y) = \psi_+^1|_{\Sigma}, \quad \phi_-^1(s, y) = \phi_+^1|_{\Sigma}, \quad \omega_-^1(s, y) = \omega_+^1|_{\Sigma}.$$

**Remarque 2.5.1** Avec ce même procédé de résolution extérieure-intérieure et en se basant sur le système (2.20), tous les termes  $\psi_-^n$ ,  $\phi_-^n$ ,  $\omega_-^n$ ,  $\psi_+^n$ ,  $\phi_+^n$ ,  $\omega_+^n$  du développement asymptotique peuvent être déterminés. En effet, les problèmes résolus par ces différents termes peuvent être identifiés de la même manière.

## 2.6 Justification du développement asymptotique

Nous donnons dans cette section une estimation d'erreur qui permet de justifier et valider le développement asymptotique construit précédemment.

**Théorème 2.1** Soit  $(\psi, \phi, \omega)$  la solution du problème initial (1.1)-(1.4). Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $C_N$  indépendante du petit paramètre  $\delta$ , telle que les restes d'ordre  $N$  :

$$\Gamma_1^N(\delta) = \psi - \sum_{n=0}^N \delta^n \psi^n, \quad \Gamma_2^N(\delta) = \phi - \sum_{n=0}^N \delta^n \phi^n, \quad \Gamma_3^N(\delta) = \omega - \sum_{n=0}^N \delta^n \omega^n, \quad (2.31)$$

satisfont les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} & \| \Gamma_{1+}^N(\delta) \|_{H^1(\Omega_+)} + \sqrt{\delta} \| \Gamma_{1-}^N(\delta) \|_{H^1(\Omega_-^\delta)} \leq C_N \delta^{N+1}, \\ & \| \Gamma_{2+}^N(\delta) \|_{H^1(\Omega_+)} + \sqrt{\delta} \| \Gamma_{2-}^N(\delta) \|_{H^1(\Omega_-^\delta)} \leq C_N \delta^{N+1}, \\ & \| \Gamma_{3+}^N(\delta) \|_{H^1(\Omega_+)} + \sqrt{\delta} \| \Gamma_{3-}^N(\delta) \|_{H^1(\Omega_-^\delta)} \leq C_N \delta^{N+1}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

**Preuve.** Un calcul simple permet de montrer que les restes  $\Gamma_1^N(\delta)$ ,  $\Gamma_2^N(\delta)$  et  $\Gamma_3^N(\delta)$  sont solutions du problème suivant (on convient d'omettre le symbole  $\delta$  et d'écrire  $\Gamma_1^N$ ,  $\Gamma_2^N$ ,  $\Gamma_3^N$  au lieu de  $\Gamma_1^N(\delta)$ ,  $\Gamma_2^N(\delta)$ ,  $\Gamma_3^N(\delta)$ , pour ne pas alourdir l'écriture) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -D_+ \left[ \partial_1^2 \Gamma_{1+}^N + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_2^2 \Gamma_{1+}^N + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \Gamma_{2+}^N \right] + K_+ \left[ \Gamma_{1+}^N + \partial_1 \Gamma_{3+}^N \right] = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ -D_+ \left[ \partial_2^2 \Gamma_{2+}^N + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_1^2 \Gamma_{2+}^N + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \Gamma_{1+}^N \right] + K_+ \left[ \Gamma_{2+}^N + \partial_2 \Gamma_{3+}^N \right] = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ -K_+ \left[ \partial_1^2 \Gamma_{3+}^N + \partial_2^2 \Gamma_{3+}^N + \partial_1 \Gamma_{1+}^N + \partial_2 \Gamma_{2+}^N \right] = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ -D_- \left[ \partial_1^2 \Gamma_{1-}^N + \frac{1-\mu_-}{2} \partial_2^2 \Gamma_{1-}^N + \frac{1+\mu_-}{2} \partial_{12} \Gamma_{2-}^N \right] + K_- \left[ \Gamma_{1-}^N + \partial_1 \Gamma_{3-}^N \right] = O(\delta^{N-1}) & \text{dans } \Omega_-^\delta, \\ -D_- \left[ \partial_2^2 \Gamma_{2-}^N + \frac{1-\mu_-}{2} \partial_1^2 \Gamma_{2-}^N + \frac{1+\mu_-}{2} \partial_{12} \Gamma_{1-}^N \right] + K_- \left[ \Gamma_{2-}^N + \partial_2 \Gamma_{3-}^N \right] = O(\delta^{N-1}) & \text{dans } \Omega_-^\delta, \\ -K_- \left[ \partial_1^2 \Gamma_{3-}^N + \partial_2^2 \Gamma_{3-}^N + \partial_1 \Gamma_{1-}^N + \partial_2 \Gamma_{2-}^N \right] = O(\delta^{N-1}) & \text{dans } \Omega_-^\delta, \\ M_1 \left( \Gamma_{1-}^N, \Gamma_{2-}^N \right) = O(\delta^N), \quad M_2 \left( \Gamma_{1-}^N, \Gamma_{2-}^N \right) = O(\delta^N) & \text{sur } \Sigma_-^\delta, \\ T \left( \Gamma_{1-}^N, \Gamma_{2-}^N, \Gamma_{3-}^N \right) = O(\delta^N) & \text{sur } \Sigma_-^\delta, \\ M_1 \left( \Gamma_{1-}^N, \Gamma_{2-}^N \right) - M_1 \left( \Gamma_{1+}^N, \Gamma_{2+}^N \right) = O(\delta^N) & \text{sur } \Sigma, \\ M_2 \left( \Gamma_{1-}^N, \Gamma_{2-}^N \right) - M_2 \left( \Gamma_{1+}^N, \Gamma_{2+}^N \right) = O(\delta^N) & \text{sur } \Sigma, \\ T \left( \Gamma_{1-}^N, \Gamma_{2-}^N, \Gamma_{3-}^N \right) - T \left( \Gamma_{1+}^N, \Gamma_{2+}^N, \Gamma_{3+}^N \right) = O(\delta^N) & \text{sur } \Sigma, \\ \Gamma_{1-}^N - \Gamma_{1+}^N = 0, \quad \Gamma_{2-}^N - \Gamma_{2+}^N = 0, \quad \Gamma_{3-}^N - \Gamma_{3+}^N = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \Gamma_{1+}^N = 0, \quad \Gamma_{2+}^N = 0, \quad \Gamma_{3+}^N = 0 & \text{sur } \Sigma_0, \end{array} \right. \quad (2.33)$$

L'application de l'estimation (1.8) permet d'avoir :

$$\| \Gamma_1^N(\delta) \|_{H^1(\Omega^\delta)} + \| \Gamma_2^N(\delta) \|_{H^1(\Omega^\delta)} + \| \Gamma_3^N(\delta) \|_{H^1(\Omega^\delta)} \leq C\delta^{N-1},$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\| \Gamma_1^N(\delta) \|_{H^1(\Omega^\delta)} \leq C\delta^{N-1}, \quad \| \Gamma_2^N(\delta) \|_{H^1(\Omega^\delta)} \leq C\delta^{N-1}, \quad \| \Gamma_3^N(\delta) \|_{H^1(\Omega^\delta)} \leq C\delta^{N-1} \quad (2.34)$$

où C est une constante positive indépendante de  $\delta$ .

Afin d'améliorer les estimations (2.34), nous écrivons :

$$\begin{aligned} \Gamma_1^N(\delta) &= \Gamma_1^{N+3}(\delta) + \sum_{n=N+1}^{N+2} \delta^n \psi^n, & \Gamma_2^N(\delta) &= \Gamma_2^{N+3}(\delta) + \sum_{n=N+1}^{N+2} \delta^n \phi^n, \\ \Gamma_3^N(\delta) &= \Gamma_3^{N+3}(\delta) + \sum_{n=N+1}^{N+2} \delta^n \omega^n. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Par conséquent, en combinant (2.34), (2.35) et en utilisant le fait que  $\| \psi_+ \|_{H^1(\Omega_+)} = O(1)$  et  $\| \psi_- \|_{H^1(\Omega_-)} = O(\delta^{-1/2})$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \| \Gamma_{1+}^N(\delta) \|_{H^1(\Omega_+)} &\leq \| \Gamma_{1+}^{N+3}(\delta) \|_{H^1(\Omega_+)} + \delta^{N+1} \| \psi_+^{N+1} \|_{H^1(\Omega_+)} + \delta^{N+2} \| \psi_+^{N+2} \|_{H^1(\Omega_+)} \\ &\leq C\delta^{N+1}, \\ \| \Gamma_{1-}^N(\delta) \|_{H^1(\Omega_-)} &\leq \| \Gamma_{1-}^{N+3}(\delta) \|_{H^1(\Omega_-)} + \delta^{N+1} \| \psi_-^{N+1} \|_{H^1(\Omega_-)} + \delta^{N+2} \| \psi_-^{N+2} \|_{H^1(\Omega_-)} \\ &\leq C\delta^{N+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ce qui mène à la première estimation de (2.32) :

$$\| \Gamma_{1+}^N(\delta) \|_{H^1(\Omega_+)} + \sqrt{\delta} \| \Gamma_{1-}^N(\delta) \|_{H^1(\Omega_-)} \leq C_N \delta^{N+1}.$$

De manière similaire, en utilisant les mêmes arguments, nous aboutissons aux autres inégalités de (2.32), à savoir :

$$\| \Gamma_{2+}^N(\delta) \|_{H^1(\Omega_+)} + \sqrt{\delta} \| \Gamma_{2-}^N(\delta) \|_{H^1(\Omega_-)} \leq C_N \delta^{N+1}.$$

$$\| \Gamma_{3+}^N(\delta) \|_{H^1(\Omega_+)} + \sqrt{\delta} \| \Gamma_{3-}^N(\delta) \|_{H^1(\Omega_-)} \leq C_N \delta^{N+1}.$$

■

**Remarque 2.6.1** *Comme mentionné précédemment, tous les termes du développement asymptotique (2.18) peuvent être déterminés et résolvent des problèmes similaires à ceux résolus par les premiers termes identifiés dans cette partie. Néanmoins, le calcul explicite de ces derniers devient plus compliqué et plus fastidieux au fur et à mesure que l'on avance dans l'ordre.*

*Nous nous sommes alors limités au calcul des seuls termes qui permettent de construire un modèle approché qui rend compte de l'effet de la couche mince. Cette construction fera l'objet du chapitre suivant, où l'on procédera à l'identification des conditions aux limites approchées pour notre problème.*

---

# 3

## Conditions aux limites approchées

### Sommaire

---

<b>3.1 Conditions aux limites approchées</b>	<b>47</b>
3.1.1 Conditions d'ordre 0 :	47
3.1.2 Conditions d'ordre 1	49
<b>3.2 Estimations d'erreur</b>	<b>51</b>
3.2.1 Estimation d'erreur pour l'approximation d'ordre 0 :	51
3.2.2 Estimation d'erreur pour l'approximation d'ordre 1 :	51

---

Dans ce chapitre, nous allons procéder à l'identification du modèle approché qui rendra compte de l'effet de la couche mince sur la déformation de la plaque. Nous établirons aussi une estimation d'erreur entre la solution du problème initial et celle du problème approché.

## 3.1 Conditions aux limites approchées

L'intérêt de cette section est d'identifier un modèle approché qui tient compte de l'effet de la couche mince sur le comportement de la plaque. L'idée, consiste à utiliser les développements asymptotiques obtenus précédemment, afin de dériver des nouvelles conditions sur  $\Sigma$ , dites conditions aux limites approchées.

### 3.1.1 Conditions d'ordre 0 :

Afin d'aboutir à une approximation d'ordre 0, nous allons tronquer le développement asymptotique de  $(\psi_+^\delta, \phi_+^\delta, \omega_+^\delta)$  en ne conservant qu'un seul terme, on définit alors :

$$\psi_+^{\{0\}} = \psi_+^0, \quad \phi_+^{\{0\}} = \phi_+^0, \quad \omega_+^{\{0\}} = \omega_+^0. \quad (3.1)$$

Le problème approché d'ordre 0 résolu par  $(\psi_+^{\{0\}}, \phi_+^{\{0\}}, \omega_+^{\{0\}})$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -D_+ \left( \partial_1^2 \psi_+^{\{0\}} + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_2^2 \psi_+^{\{0\}} + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \phi_+^{\{0\}} \right) + K_+ \left( \psi_+^{\{0\}} + \partial_1 \omega_+^{\{0\}} \right) = f_1^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ -D_+ \left( \partial_2^2 \phi_+^{\{0\}} + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_1^2 \phi_+^{\{0\}} + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \psi_+^{\{0\}} \right) + K_+ \left( \phi_+^{\{0\}} + \partial_2 \omega_+^{\{0\}} \right) = f_2^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ -K_+ \left( \partial_1^2 \omega_+^{\{0\}} + \partial_2^2 \omega_+^{\{0\}} + \partial_1 \psi_+^{\{0\}} + \partial_2 \phi_+^{\{0\}} \right) = f_3^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ M_1(\psi_+^{\{0\}}, \phi_+^{\{0\}}) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ M_2(\psi_+^{\{0\}}, \phi_+^{\{0\}}) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ T(\psi_+^{\{0\}}, \phi_+^{\{0\}}, \omega_+^{\{0\}}) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \psi_+^{\{0\}} = 0, \quad \phi_+^{\{0\}} = 0, \quad \omega_+^{\{0\}} = 0 & \text{sur } \Sigma_0. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Notons que le problème résolu par l'approximation d'ordre 0 n'est rien d'autre que le problème de Mindlin-Timoshenko pour la plaque  $\Omega_+$ , avec des conditions aux limites homogènes sur  $\Sigma$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1(\psi_+^{\{0\}}, \phi_+^{\{0\}}) = 0, \\ M_2(\psi_+^{\{0\}}, \phi_+^{\{0\}}) = 0, \\ T(\psi_+^{\{0\}}, \phi_+^{\{0\}}, \omega_+^{\{0\}}) = 0. \end{array} \right.$$

D'un point de vue physique, ces conditions traduisent le fait que la plaque  $\Omega_+$  est libre de tout effort ou de toute force extérieure sur le bord  $\Sigma$ .

**Remarque 3.1.1** *Le problème résolu par l'approximation d'ordre 0 néglige complètement l'effet de la couche mince. Il nous appartient alors d'aller plus loin dans le développement asymptotique afin d'obtenir un modèle qui tient compte de cet effet.*

## 3.1.2 Conditions d'ordre 1

Afin d'obtenir une meilleure approximation, nous allons tronquer le développement asymptotique à l'ordre 1. Rappelons d'abord le problème résolu par  $(\psi_+^1, \phi_+^1, \omega_+^1)$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -D_+ \left( \partial_1^2 \psi_+^1 + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_2^2 \psi_+^1 + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \phi_+^1 \right) + K_+ (\psi_+^1 + \partial_1 \omega_+^1) = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ -D_+ \left( \partial_2^2 \phi_+^1 + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_1^2 \phi_+^1 + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \psi_+^1 \right) + K_+ (\phi_+^1 + \partial_2 \omega_+^1) = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ -K_+ (\partial_1^2 \omega_+^1 + \partial_2^2 \omega_+^1 + \partial_1 \psi_+^1 + \partial_2 \phi_+^1) = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ M_1(\psi_+^1, \phi_+^1)(s, 0) = -Q(\psi_+^0, \phi_+^0, \omega_+^0) & \text{sur } \Sigma, \\ M_2(\psi_+^1, \phi_+^1)(s, 0) = -R(\psi_+^0, \phi_+^0, \omega_+^0) & \text{sur } \Sigma, \\ T(\psi_+^1, \phi_+^1, \omega_+^1)(s, 0) = -S(\psi_+^0, \phi_+^0, \omega_+^0) & \text{sur } \Sigma, \\ \psi_+^1 = 0, \quad \phi_+^1 = 0, \quad \omega_+^1 = 0 & \text{sur } \Sigma_0. \end{array} \right.$$

Comme mentionné, nous définissons une approximation d'ordre 1 en conservant les deux premiers termes du développement asymptotique :

$$\psi_+^{\{1\}} = \psi_+^0 + \delta \psi_+^1, \quad \phi_+^{\{1\}} = \phi_+^0 + \delta \phi_+^1, \quad \omega_+^{\{1\}} = \omega_+^0 + \delta \omega_+^1. \quad (3.3)$$

En exploitant les problèmes résolus par les termes  $\psi_+^0, \phi_+^0, \omega_+^0, \psi_+^1, \phi_+^1, \omega_+^1$ , on montre que  $\psi_+^{\{1\}}, \phi_+^{\{1\}}$  et  $\omega_+^{\{1\}}$  résolvent le problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -D_+ \left( \partial_1^2 \psi_+^{\{1\}} + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_2^2 \psi_+^{\{1\}} + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \phi_+^{\{1\}} \right) + K_+ (\psi_+^{\{1\}} + \partial_1 \omega_+^{\{1\}}) = f_1^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ -D_+ \left( \partial_2^2 \phi_+^{\{1\}} + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_1^2 \phi_+^{\{1\}} + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \psi_+^{\{1\}} \right) + K_+ (\phi_+^{\{1\}} + \partial_2 \omega_+^{\{1\}}) = f_2^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ -K_+ (\partial_1^2 \omega_+^{\{1\}} + \partial_2^2 \omega_+^{\{1\}} + \partial_1 \psi_+^{\{1\}} + \partial_2 \phi_+^{\{1\}}) = f_3^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ M_1(\psi_+^{\{1\}}, \phi_+^{\{1\}}) + \delta Q(\psi_+^{\{1\}}, \phi_+^{\{1\}}, \omega_+^{\{1\}}) = \delta^2 Q(\psi_+^1, \phi_+^1, \omega_+^1) & \text{sur } \Sigma, \\ M_2(\psi_+^{\{1\}}, \phi_+^{\{1\}}) + \delta R(\psi_+^{\{1\}}, \phi_+^{\{1\}}, \omega_+^{\{1\}}) = \delta^2 R(\psi_+^1, \phi_+^1, \omega_+^1) & \text{sur } \Sigma, \\ T(\psi_+^{\{1\}}, \phi_+^{\{1\}}, \omega_+^{\{1\}}) + \delta S(\psi_+^{\{1\}}, \phi_+^{\{1\}}, \omega_+^{\{1\}}) = \delta^2 S(\psi_+^1, \phi_+^1, \omega_+^1) & \text{sur } \Sigma, \\ \psi_+^{\{1\}} = 0, \quad \phi_+^{\{1\}} = 0, \quad \omega_+^{\{1\}} = 0 & \text{sur } \Sigma_0. \end{array} \right.$$

Ceci montre que les conditions aux limites sur  $\Sigma$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} M_1(\psi_+^{\{1\}}, \phi_+^{\{1\}}) + \delta Q(\psi_+^{\{1\}}, \phi_+^{\{1\}}, \omega_+^{\{1\}}) &= \delta^2 Q(\psi_+^1, \phi_+^1, \omega_+^1) = O(\delta^2), \\ M_2(\psi_+^{\{1\}}, \phi_+^{\{1\}}) + \delta R(\psi_+^{\{1\}}, \phi_+^{\{1\}}, \omega_+^{\{1\}}) &= \delta^2 R(\psi_+^1, \phi_+^1, \omega_+^1) = O(\delta^2), \\ T(\psi_+^{\{1\}}, \phi_+^{\{1\}}, \omega_+^{\{1\}}) + \delta S(\psi_+^{\{1\}}, \phi_+^{\{1\}}, \omega_+^{\{1\}}) &= \delta^2 S(\psi_+^1, \phi_+^1, \omega_+^1) = O(\delta^2). \end{aligned}$$

Ceci suggère l'idée de négliger les termes en  $O(\delta^2)$  et définir le problème approché :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -D_+ \left( \partial_1^2 \tilde{\psi}_1 + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_2^2 \tilde{\psi}_1 + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \tilde{\phi}_1 \right) + K_+ \left( \tilde{\psi}_1 + \partial_1 \tilde{\omega}_1 \right) = f_1^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ -D_+ \left( \partial_2^2 \tilde{\phi}_1 + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_1^2 \tilde{\phi}_1 + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \tilde{\psi}_1 \right) + K_+ \left( \tilde{\phi}_1 + \partial_2 \tilde{\omega}_1 \right) = f_2^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ -K_+ \left( \partial_1^2 \tilde{\omega}_1 + \partial_2^2 \tilde{\omega}_1 + \partial_1 \tilde{\psi}_1 + \partial_2 \tilde{\phi}_1 \right) = f_3^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ M_1(\tilde{\psi}_1, \tilde{\phi}_1) + \delta Q(\tilde{\psi}_1, \tilde{\phi}_1, \tilde{\omega}_1) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ M_2(\tilde{\psi}_1, \tilde{\phi}_1) + \delta R(\tilde{\psi}_1, \tilde{\phi}_1, \tilde{\omega}_1) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ T(\tilde{\psi}_1, \tilde{\phi}_1, \tilde{\omega}_1) + \delta S(\tilde{\psi}_1, \tilde{\phi}_1, \tilde{\omega}_1) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \tilde{\psi}_1 = 0, \quad \tilde{\phi}_1 = 0, \quad \tilde{\omega}_1 = 0 & \text{sur } \Sigma_0. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Les conditions aux limites écrites sur l'interface  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned} M_1(\tilde{\psi}_1, \tilde{\phi}_1) &= -\delta \left[ -D_-(1-\mu_-^2) \partial_s \left[ n_2(n_2 \partial_s \tilde{\psi}_1 - n_1 \partial_s \tilde{\phi}_1) \right] + K_- n_2 (n_2 \tilde{\psi}_1 - n_1 \tilde{\phi}_1 + \partial_s \tilde{\omega}_1) \right], \\ M_2(\tilde{\psi}_1, \tilde{\phi}_1) &= -\delta \left[ D_-(1-\mu_-^2) \partial_s \left[ n_1(n_2 \partial_s \tilde{\psi}_1 - n_1 \partial_s \tilde{\phi}_1) \right] - K_- n_1 (n_2 \tilde{\psi}_1 - n_1 \tilde{\phi}_1 + \partial_s \tilde{\omega}_1) \right], \\ T(\tilde{\psi}_1, \tilde{\phi}_1, \tilde{\omega}_1) &= -\delta \left[ -K_- \partial_s \left( n_2 \tilde{\psi}_1 - n_1 \tilde{\phi}_1 + \partial_s \tilde{\omega}_1 \right) \right], \end{aligned}$$

sont les nouvelles conditions aux limites approchées recherchées.

**Remarque 3.1.2** Contrairement à l'approximation d'ordre zéro, celle d'ordre 1 fait apparaître de nouveaux opérateurs sur l'interface  $\Sigma$ , conduisant à de nouvelles conditions aux limites qui tiennent compte de l'effet de la couche mince. Ces nouvelles conditions peuvent être considérées comme la contribution héritée de la couche, d'autant plus qu'elles intègrent ses caractéristiques physiques  $E_-$ ,  $\mu_-$ ,  $K_-$  ainsi que son épaisseur  $\delta$ .

## 3.2 Estimations d'erreur

Nous terminons cette partie par des estimations d'erreur, entre la solution exacte du problème initial et celle du problème approché.

### 3.2.1 Estimation d'erreur pour l'approximation d'ordre 0 :

Afin d'obtenir une estimation d'erreur entre la solution du problème approché d'ordre 0 et celle du problème initial, il suffit de se référer aux estimations (2.32). Celles-ci nous permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned}\|\psi_+ - \psi_+^{\{0\}}\|_{H^1(\Omega_+)} &\leq C\delta, \\ \|\phi_+ - \phi_+^{\{0\}}\|_{H^1(\Omega_+)} &\leq C\delta, \\ \|\omega_+ - \omega_+^{\{0\}}\|_{H^1(\Omega_+)} &\leq C\delta\end{aligned}$$

où  $C$  est une constante positive indépendante de  $\delta$ .

### 3.2.2 Estimation d'erreur pour l'approximation d'ordre 1 :

Nous allons nous intéresser dans ce paragraphe à l'établissement d'une estimation d'erreur entre la solution du problème approché d'ordre 1 et celle du problème initial. Celle-ci est fournie dans le théorème qui suit :

**Théorème 3.1** L'estimation d'erreur entre la partie intérieure de la solution  $(\psi_+, \phi_+, \omega_+)$  du problème initial et la solution  $(\tilde{\psi}_1, \tilde{\phi}_1, \tilde{\omega}_1)$  du problème approché d'ordre 1 est donnée par :

$$\begin{aligned}\|\psi_+ - \tilde{\psi}_1\|_{H^1(\Omega_+)} &\leq C\delta^2, \\ \|\phi_+ - \tilde{\phi}_1\|_{H^1(\Omega_+)} &\leq C\delta^2, \\ \|\omega_+ - \tilde{\omega}_1\|_{H^1(\Omega_+)} &\leq C\delta^2\end{aligned}$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\delta$ .

**Preuve.** Afin d'établir les estimations d'erreur énoncées ci-dessus, nous procéderons à écrire des estimations a priori pour le problème approché d'ordre 1, avec des seconds

membres plus g eneraux. Pour ce faire, nous considérons le problème aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -D_+ \left( \partial_1^2 \tilde{\psi} + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_2^2 \tilde{\psi} + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \tilde{\phi} \right) + K_+ \left( \tilde{\psi} + \partial_1 \tilde{\omega} \right) = \tilde{f}_1^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ -D_+ \left( \partial_2^2 \tilde{\phi} + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_1^2 \tilde{\phi} + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \tilde{\psi} \right) + K_+ \left( \tilde{\phi} + \partial_2 \tilde{\omega} \right) = \tilde{f}_2^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ -K_+ \left( \partial_1^2 \tilde{\omega} + \partial_2^2 \tilde{\omega} + \partial_1 \tilde{\psi} + \partial_2 \tilde{\phi} \right) = \tilde{f}_3^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ M_1(\tilde{\psi}, \tilde{\phi}) + \delta Q(\tilde{\psi}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}) = \tilde{g}_1 & \text{sur } \Sigma, \\ M_2(\tilde{\psi}, \tilde{\phi}) + \delta R(\tilde{\psi}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}) = \tilde{g}_2 & \text{sur } \Sigma, \\ T(\tilde{\psi}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}) + \delta S(\tilde{\psi}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}) = \tilde{g}_3 & \text{sur } \Sigma, \\ \tilde{\psi} = 0, \quad \tilde{\phi} = 0, \quad \tilde{\omega} = 0 & \text{sur } \Sigma_0, \end{array} \right. \quad (3.5)$$

où  $\tilde{f}_1^+, \tilde{f}_2^+, \tilde{f}_3^+ \in L^2(\Omega_+)$  et  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3 \in L^2(\Sigma)$ .

Afin d'écrire une formulation variationnelle associée à ce problème, nous multiplions les trois premières équations de (3.5) par des fonctions test régulières  $\hat{\psi}, \hat{\phi}$  et  $\hat{\omega}$  qui satisfont  $\hat{\psi}|_{\Sigma_0} = 0, \hat{\phi}|_{\Sigma_0} = 0$  et  $\hat{\omega}|_{\Sigma_0} = 0$ . Grâce à la formule de Green, nous obtenons :

$$\begin{aligned} A(\tilde{\psi}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}, \hat{\psi}, \hat{\phi}, \hat{\omega}) + \delta b(\tilde{\psi}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}, \hat{\psi}, \hat{\phi}, \hat{\omega}) &= \int_{\Omega_+} \left( \tilde{f}_1^+ \hat{\psi} + \tilde{f}_2^+ \hat{\phi} + \tilde{f}_3^+ \hat{\omega} \right) d\Omega_+ \\ &+ \int_{\Sigma} \left( \tilde{g}_1 \hat{\psi} + \tilde{g}_2 \hat{\phi} + \tilde{g}_3 \hat{\omega} \right) d\sigma, \end{aligned} \quad (3.6)$$

où les formes bilin aires  $A$  et  $b$  sont définies par :

$$\begin{aligned} A(\tilde{\psi}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}, \hat{\psi}, \hat{\phi}, \hat{\omega}) &= \int_{\Omega_+} \left( D_+ \left[ \partial_1 \tilde{\psi} \partial_1 \hat{\psi} + \partial_2 \tilde{\phi} \partial_2 \hat{\phi} + \mu_+ \partial_2 \tilde{\phi} \partial_1 \hat{\psi} + \frac{1-\mu_+}{2} \left( \partial_1 \tilde{\phi} + \partial_2 \tilde{\psi} \right) \left( \partial_2 \hat{\psi} + \partial_1 \hat{\phi} \right) \right. \right. \\ &\left. \left. + \mu_+ \partial_1 \tilde{\psi} \partial_2 \hat{\phi} \right] + K_+ \left[ \left( \tilde{\psi} + \partial_1 \tilde{\omega} \right) \left( \hat{\psi} + \partial_1 \hat{\omega} \right) + \left( \tilde{\phi} + \partial_2 \tilde{\omega} \right) \left( \hat{\phi} + \partial_2 \hat{\omega} \right) \right] \right) d\Omega_+, \end{aligned}$$

$$b(\tilde{\psi}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}, \hat{\psi}, \hat{\phi}, \hat{\omega}) = D_-(1 - \mu_-^2) \int_{\Sigma} \chi_{\mu}(\tilde{\psi}, \tilde{\phi}) \chi_{\mu}(\hat{\psi}, \hat{\phi}) d\sigma + K_- \int_{\Sigma} \chi_{\tau}(\tilde{\psi}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}) \chi_{\tau}(\hat{\psi}, \hat{\phi}, \hat{\omega}) d\sigma,$$

avec

$$\begin{aligned} \chi_{\tau}(\tilde{\psi}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}) &= \left( n_2 \tilde{\psi} - n_1 \tilde{\phi} + \partial_s \tilde{\omega} \right), \\ \chi_{\mu}(\tilde{\psi}, \tilde{\phi}) &= \left( n_2 \partial_s \tilde{\psi} - n_1 \partial_s \tilde{\phi} \right). \end{aligned}$$

Par la suite, nous posons  $\tilde{\psi} = \hat{\psi}$ ,  $\tilde{\phi} = \hat{\phi}$  et  $\tilde{\omega} = \hat{\omega}$  dans (3.6). La forme bilinéaire  $A$  étant coercive, nous avons :

$$A(\tilde{\psi}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}, \tilde{\psi}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}) \geq C_1 \left( \|\tilde{\psi}\|_{H^1(\Omega_+)}^2 + \|\tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega_+)}^2 + \|\tilde{\omega}\|_{H^1(\Omega_+)}^2 \right),$$

où  $C_1$  est une constante positive indépendante de  $\delta$ .

Par ailleurs, en utilisant le fait que  $b(\tilde{\psi}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}, \tilde{\psi}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}) \geq 0$ , la coercivité de  $A$  et l'équation (3.6) permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned} \|\tilde{\psi}\|_{H^1(\Omega_+)}^2 + \|\tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega_+)}^2 + \|\tilde{\omega}\|_{H^1(\Omega_+)}^2 &\leq C_2 \left( \left[ \|\tilde{f}_1^+\|_{L^2(\Omega_+)} + \|\tilde{g}_1\|_{L^2(\Sigma)} \right] \|\tilde{\psi}\|_{H^1(\Omega_+)} \right. \\ &\quad + \left[ \|\tilde{f}_2^+\|_{L^2(\Omega_+)} + \|\tilde{g}_2\|_{L^2(\Sigma)} \right] \|\tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega_+)} \\ &\quad \left. + \left[ \|\tilde{f}_3^+\|_{L^2(\Omega_+)} + \|\tilde{g}_3\|_{L^2(\Sigma)} \right] \|\tilde{\omega}\|_{H^1(\Omega_+)} \right) \\ &\leq C_2 \left( \|\tilde{f}_1^+\|_{L^2(\Omega_+)} + \|\tilde{g}_1\|_{L^2(\Sigma)} + \|\tilde{f}_2^+\|_{L^2(\Omega_+)} \right. \\ &\quad \left. + \|\tilde{g}_2\|_{L^2(\Sigma)} + \|\tilde{f}_3^+\|_{L^2(\Omega_+)} + \|\tilde{g}_3\|_{L^2(\Sigma)} \right) \\ &\quad \left( \|\tilde{\psi}\|_{H^1(\Omega_+)} + \|\tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega_+)} + \|\tilde{\omega}\|_{H^1(\Omega_+)} \right), \end{aligned} \tag{3.7}$$

où  $C_2$  est une constante positive indépendante de  $\delta$ .

Cette inégalité provient de l'inégalité de Hölder et de la continuité de l'opérateur de trace.

Posons :

$$\tilde{l} = C_2 \left( \|\tilde{f}_1^+\|_{L^2(\Omega_+)} + \|\tilde{g}_1\|_{L^2(\Sigma)} + \|\tilde{f}_2^+\|_{L^2(\Omega_+)} + \|\tilde{g}_2\|_{L^2(\Sigma)} + \|\tilde{f}_3^+\|_{L^2(\Omega_+)} + \|\tilde{g}_3\|_{L^2(\Sigma)} \right), \tag{3.8}$$

alors (3.7) entraîne :

$$\left( \|\tilde{\psi}\|_{H^1(\Omega_+)} - \frac{1}{2} \tilde{l} \right)^2 + \left( \|\tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega_+)} - \frac{1}{2} \tilde{l} \right)^2 + \left( \|\tilde{\omega}\|_{H^1(\Omega_+)} - \frac{1}{2} \tilde{l} \right)^2 \leq \frac{3}{4} \tilde{l}^2. \tag{3.9}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\left( \|\tilde{\psi}\|_{H^1(\Omega_+)} - \frac{1}{2} \tilde{l} \right)^2 \leq \frac{3}{4} \tilde{l}^2,$$

ce qui donne

$$\| \tilde{\psi} \|_{H^1(\Omega_+)} - \frac{1}{2} \tilde{l} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{l},$$

d'où

$$\| \tilde{\psi} \|_{H^1(\Omega_+)} \leq \frac{\sqrt{3}+1}{2} \tilde{l}.$$

D'une façon similaire, nous obtenons :

$$\| \tilde{\phi} \|_{H^1(\Omega_+)} \leq \frac{\sqrt{3}+1}{2} \tilde{l} \quad \text{et} \quad \| \tilde{\omega} \|_{H^1(\Omega_+)} \leq \frac{\sqrt{3}+1}{2} \tilde{l},$$

et par conséquent,

$$\| \tilde{\psi} \|_{H^1(\Omega_+)} + \| \tilde{\phi} \|_{H^1(\Omega_+)} + \| \tilde{\omega} \|_{H^1(\Omega_+)} \leq \frac{3}{2}(\sqrt{3}+1) \tilde{l}. \quad (3.10)$$

Soit maintenant  $(\tilde{\psi}_1, \tilde{\phi}_1, \tilde{\omega}_1)$  la solution du problème approché d'ordre 1 (3.4). Nous allons procéder au développement asymptotique de cette solution en puissances positives de  $\delta$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_1 &= \sum_{n \geq 0} \delta^n \tilde{\psi}_1^n, \\ \tilde{\phi}_1 &= \sum_{n \geq 0} \delta^n \tilde{\phi}_1^n, \\ \tilde{\omega}_1 &= \sum_{n \geq 0} \delta^n \tilde{\omega}_1^n. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nous insérons les développements (3.11) dans les équations du système (3.4), ce qui nous permet d'obtenir, après identification selon les puissances de  $\delta$ , les problèmes aux limites résolus par les différents termes du développement asymptotique (3.11), à savoir :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -D_+ \left( \partial_1^2 \tilde{\psi}_1^0 + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_2^2 \tilde{\psi}_1^0 + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \tilde{\phi}_1^0 \right) + K_+ \left( \tilde{\psi}_1^0 + \partial_1 \tilde{\omega}_1^0 \right) = f_1^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ -D_+ \left( \partial_2^2 \tilde{\phi}_1^0 + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_1^2 \tilde{\phi}_1^0 + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \tilde{\psi}_1^0 \right) + K_+ \left( \tilde{\phi}_1^0 + \partial_2 \tilde{\omega}_1^0 \right) = f_2^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ -K_+ \left( \partial_1^2 \tilde{\omega}_1^0 + \partial_2^2 \tilde{\omega}_1^0 + \partial_1 \tilde{\psi}_1^0 + \partial_2 \tilde{\phi}_1^0 \right) = f_3^+ & \text{dans } \Omega_+, \\ M_1(\tilde{\psi}_1^0, \tilde{\phi}_1^0) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ M_2(\tilde{\psi}_1^0, \tilde{\phi}_1^0) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ T(\tilde{\psi}_1^0, \tilde{\phi}_1^0, \tilde{\omega}_1^0) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \tilde{\psi}_1^0 = 0, \quad \tilde{\phi}_1^0 = 0, \quad \tilde{\omega}_1^0 = 0 & \text{sur } \Sigma_0, \end{array} \right. \quad (3.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll}
-D_+ \left( \partial_1^2 \tilde{\psi}_1^1 + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_2^2 \tilde{\psi}_1^1 + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \tilde{\phi}_1^1 \right) + K_+ \left( \tilde{\psi}_1^1 + \partial_1 \tilde{\omega}_1^1 \right) = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\
-D_+ \left( \partial_2^2 \tilde{\phi}_1^1 + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_1^2 \tilde{\phi}_1^1 + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \tilde{\psi}_1^1 \right) + K_+ \left( \tilde{\phi}_1^1 + \partial_2 \tilde{\omega}_1^1 \right) = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\
-K_+ \left( \partial_1^2 \tilde{\omega}_1^1 + \partial_2^2 \tilde{\omega}_1^1 + \partial_1 \tilde{\psi}_1^1 + \partial_2 \tilde{\phi}_1^1 \right) = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\
M_1(\tilde{\psi}_1^1, \tilde{\phi}_1^1) = -Q(\tilde{\psi}_1^0, \tilde{\phi}_1^0, \tilde{\omega}_1^0) & \text{sur } \Sigma, \\
M_2(\tilde{\psi}_1^1, \tilde{\phi}_1^1) = -R(\tilde{\psi}_1^0, \tilde{\phi}_1^0, \tilde{\omega}_1^0) & \text{sur } \Sigma, \\
T(\tilde{\psi}_1^1, \tilde{\phi}_1^1, \tilde{\omega}_1^1) = -S(\tilde{\psi}_1^0, \tilde{\phi}_1^0, \tilde{\omega}_1^0) & \text{sur } \Sigma, \\
\tilde{\psi}_1^1 = 0, \quad \tilde{\phi}_1^1 = 0, \quad \tilde{\omega}_1^1 = 0 & \text{sur } \Sigma_0,
\end{array} \right. \quad (3.13)$$

et pour  $n \geq 2$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll}
-D_+ \left( \partial_1^2 \tilde{\psi}_1^n + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_2^2 \tilde{\psi}_1^n + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \tilde{\phi}_1^n \right) + K_+ \left( \tilde{\psi}_1^n + \partial_1 \tilde{\omega}_1^n \right) = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\
-D_+ \left( \partial_2^2 \tilde{\phi}_1^n + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_1^2 \tilde{\phi}_1^n + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \tilde{\psi}_1^n \right) + K_+ \left( \tilde{\phi}_1^n + \partial_2 \tilde{\omega}_1^n \right) = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\
-K_+ \left( \partial_1^2 \tilde{\omega}_1^n + \partial_2^2 \tilde{\omega}_1^n + \partial_1 \tilde{\psi}_1^n + \partial_2 \tilde{\phi}_1^n \right) = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\
M_1(\tilde{\psi}_1^n, \tilde{\phi}_1^n) = -Q(\tilde{\psi}_1^{n-1}, \tilde{\phi}_1^{n-1}, \tilde{\omega}_1^{n-1}) & \text{sur } \Sigma, \\
M_2(\tilde{\psi}_1^n, \tilde{\phi}_1^n) = -R(\tilde{\psi}_1^{n-1}, \tilde{\phi}_1^{n-1}, \tilde{\omega}_1^{n-1}) & \text{sur } \Sigma, \\
T(\tilde{\psi}_1^n, \tilde{\phi}_1^n, \tilde{\omega}_1^n) = -S(\tilde{\psi}_1^{n-1}, \tilde{\phi}_1^{n-1}, \tilde{\omega}_1^{n-1}) & \text{sur } \Sigma, \\
\tilde{\psi}_1^n = 0, \quad \tilde{\phi}_1^n = 0, \quad \tilde{\omega}_1^n = 0 & \text{sur } \Sigma_0.
\end{array} \right. \quad (3.14)$$

Il est facile de remarquer que les problèmes aux limites résolus par  $(\tilde{\psi}_1^0, \tilde{\phi}_1^0, \tilde{\omega}_1^0)$  et  $(\tilde{\psi}_1^1, \tilde{\phi}_1^1, \tilde{\omega}_1^1)$  coïncident avec ceux résolus par les termes  $(\psi_+^0, \phi_+^0, \omega_+^0)$  et  $(\psi_+^1, \phi_+^1, \omega_+^1)$  respectivement. Par conséquent,

$$\psi_+^0 = \tilde{\psi}_1^0, \quad \phi_+^0 = \tilde{\phi}_1^0, \quad \omega_+^0 = \tilde{\omega}_1^0, \quad \psi_+^1 = \tilde{\psi}_1^1, \quad \phi_+^1 = \tilde{\phi}_1^1, \quad \omega_+^1 = \tilde{\omega}_1^1. \quad (3.15)$$

Notons que les autres termes, pour  $n \geq 2$ , ne coïncident pas.

Nous définissons maintenant les restes :

$$\Gamma_\psi^N(\delta) = \tilde{\psi}_1 - \sum_{n=0}^N \delta^n \tilde{\psi}_1^n, \quad \Gamma_\phi^N(\delta) = \tilde{\phi}_1 - \sum_{n=0}^N \delta^n \tilde{\phi}_1^n, \quad \Gamma_\omega^N(\delta) = \tilde{\omega}_1 - \sum_{n=0}^N \delta^n \tilde{\omega}_1^n. \quad (3.16)$$

L'expression de ces restes montre que ceux-là résolvent le problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -D_+ \left[ \partial_1^2 \Gamma_\psi^N + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_2^2 \Gamma_\psi^N + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \Gamma_\phi^N \right] + K_+ \left[ \Gamma_\psi^N + \partial_1 \Gamma_\omega^N \right] = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ -D_+ \left[ \partial_2^2 \Gamma_\phi^N + \frac{1-\mu_+}{2} \partial_1^2 \Gamma_\phi^N + \frac{1+\mu_+}{2} \partial_{12} \Gamma_\psi^N \right] + K_+ \left[ \Gamma_\phi^N + \partial_2 \Gamma_\omega^N \right] = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ -K_+ \left[ \partial_1^2 \Gamma_\omega^N + \partial_2^2 \Gamma_\omega^N + \partial_1 \Gamma_\psi^N + \partial_2 \Gamma_\phi^N \right] = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ M_1 \left( \Gamma_\psi^N, \Gamma_\phi^N \right) + \delta Q \left( \Gamma_\psi^N, \Gamma_\phi^N, \Gamma_\omega^N \right) = -\delta^{N+1} Q \left( \tilde{\psi}_1^N, \tilde{\phi}_1^N, \tilde{\omega}_1^N \right) & \text{sur } \Sigma \\ M_2 \left( \Gamma_\psi^N, \Gamma_\phi^N \right) + \delta R \left( \Gamma_\psi^N, \Gamma_\phi^N, \Gamma_\omega^N \right) = -\delta^{N+1} R \left( \tilde{\psi}_1^N, \tilde{\phi}_1^N, \tilde{\omega}_1^N \right) & \text{sur } \Sigma \\ T \left( \Gamma_\psi^N, \Gamma_\phi^N, \Gamma_\omega^N \right) + \delta S \left( \Gamma_\psi^N, \Gamma_\phi^N, \Gamma_\omega^N \right) = -\delta^{N+1} S \left( \tilde{\psi}_1^N, \tilde{\phi}_1^N, \tilde{\omega}_1^N \right) & \text{sur } \Sigma \\ \Gamma_\psi^N(\delta) = 0, \quad \Gamma_\phi^N(\delta) = 0, \quad \Gamma_\omega^N(\delta) = 0 & \text{sur } \Sigma_0. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

En tenant compte de l'estimation (3.10), on obtient :

$$\| \Gamma_\psi^N(\delta) \|_{H^1(\Omega_+)} + \| \Gamma_\phi^N(\delta) \|_{H^1(\Omega_+)} + \| \Gamma_\omega^N(\delta) \|_{H^1(\Omega_+)} \leq C \delta^{N+1}, \quad (3.18)$$

où  $C$  est une constante positive indépendante de  $\delta$ .

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \| \psi_+ - \tilde{\psi}_1 \|_{H^1(\Omega_+)} &= \| \psi_+ - (\psi_+^0 + \delta \psi_+^1) + (\psi_+^0 + \delta \psi_+^1) - \tilde{\psi}_1 \|_{H^1(\Omega_+)} \\ &\leq \| \psi_+ - (\psi_+^0 + \delta \psi_+^1) \|_{H^1(\Omega_+)} + \| \tilde{\psi}_1 - (\psi_+^0 + \delta \psi_+^1) \|_{H^1(\Omega_+)}. \end{aligned}$$

Comme  $\tilde{\psi}_1^0 = \psi_+^0$  et  $\tilde{\psi}_1^1 = \psi_+^1$ , alors :

$$\begin{aligned} \| \psi_+ - \tilde{\psi}_1 \|_{H^1(\Omega_+)} &\leq \| \psi_+ - (\psi_+^0 + \delta \psi_+^1) \|_{H^1(\Omega_+)} + \| \tilde{\psi}_1 - (\tilde{\psi}_1^0 + \delta \tilde{\psi}_1^1) \|_{H^1(\Omega_+)} \\ &= \| \Gamma_{1+}^1(\delta) \|_{H^1(\Omega_+)} + \| \Gamma_\psi^1(\delta) \|_{H^1(\Omega_+)}. \end{aligned}$$

En utilisant les estimations (2.32) et (3.18), on obtient :

$$\| \psi_+ - \tilde{\psi}_1 \|_{H^1(\Omega_+)} \leq C \delta^2.$$

D'une manière analogue, nous établissons les estimations :

$$\| \phi_+ - \tilde{\phi}_1 \|_{H^1(\Omega_+)} \leq C\delta^2$$

et

$$\| \omega_+ - \tilde{\omega}_1 \|_{H^1(\Omega_+)} \leq C\delta^2.$$

■

Nous avons ainsi démontré des estimations d'erreur entre la solution exacte et approchée. Ces estimations sont optimales dans le sens où elles sont de l'ordre du premier terme négligé.

---

## Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons considéré le problème de renforcement d'une plaque élastique de Mindlin-Timoshenko par une couche mince élastique. Nous avons utilisé la méthode des développements asymptotiques pour identifier un modèle approché, plus simple pour les simulations numériques. Cette méthode consiste à approcher la solution intérieure du problème initial par son développement asymptotique tronqué à un ordre donné de sorte à avoir un modèle approché posé uniquement sur le domaine occupé par la plaque, mais qui rend compte des effets induits par la couche mince.

La troncature du développement asymptotique à l'ordre 0 (i.e en ne considérant que le premier terme du développement comme approximation) conduit à un modèle qui ignore complètement les effets de la couche mince. Cela est tout a fait naturel et s'accorde avec l'intuition physique car les matériaux constituant les deux multi-structures ont des rigidités qui sont du même ordre de grandeur par rapport au petit paramètre  $\delta$  qui représente l'épaisseur de la couche mince.

Dans le but d'obtenir un modèle plus précis et qui tient compte de l'effet de la couche mince, nous avons tronqué le développement à l'ordre 1. Cette approximation a donné lieu à un modèle dans lequel les effets de la couche élastique ont été incorporés.

Ces effets se traduisent par de nouvelles conditions aux limites, dites " conditions aux limites approchées ", posées sur l'interface commune des deux structures.

Ces conditions dépendent des caractéristiques physiques de la couche mince ainsi que l'épaisseur  $\delta$  de celle-ci, Elles ne sont pas standard car elles font intervenir des dérivées tangentielles qui sont du même ordre que celles de l'opérateur différentiel intérieur.

Par ailleurs, une estimation d'erreur optimale a été établie, permettant ainsi de valider cette approximation. L'étude élaborée dans cette thèse peut être généralisée et plusieurs perspectives peuvent être explorées. Il s'agit notamment de :

- \* Généraliser cette approche au cas d'une plaque de Mindlin-Timoshenko entourée d'une couche élastique d'épaisseur variable. Cette question a été traitée pour la plaque de Kirchhoff-Love dans [25] et il serait intéressant d'identifier un modèle

approché pour la plaque de Mindlin-Timoshenko.

- \* Explorer d'autres configurations géométriques (plaques avec coins,...).
- \* Généraliser l'étude à d'autres modèles de plaques.

Notons enfin que l'aspect numérique de cette étude n'a pas été étudié et peut constituer une perspective intéressante et compléter les résultats obtenus dans le cadre de la réalisation de cette thèse.

---

# A

## Quelques outils d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle

L'intérêt de cette annexe, est de rappeler quelques définitions et notions de base d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle, qui sont utiles pour l'étude et la résolution du problème abordé dans cette thèse. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages [2], [8], [18].

### A.1 Analyse fonctionnelle

Dans cette partie, nous allons introduire certains espaces fonctionnels qui sont nécessaires pour le traitement de la problématique développée dans cette thèse. Nous énoncerons aussi quelques résultats que nous avons utilisés lors de l'élaboration de notre travail.

#### A.1.1 Quelques espaces fonctionnels

Dans tout ce qui suit, nous supposons que  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ .

**Les espaces  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$**

**Définition A.1.1 (L'espace  $L^1(\Omega)$ )** On note par  $L^1(\Omega)$ , l'espace des fonctions intégrables sur  $\Omega$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ , muni de la norme :

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

**Définition A.1.2 (L'espace  $L^p(\Omega)$ )** On désigne par  $L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p < +\infty$ ), l'espace des

fonctions mesurables de puissance  $p$ -ème intégrable sur  $\Omega$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ est mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}.$$

Cet espace est muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Définition A.1.3 (L'espace  $L^\infty(\Omega)$ )** On désigne par  $L^\infty(\Omega)$  l'espace des fonctions mesurables et essentiellement bornées sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ est mesurable et } \exists C \text{ telle que } |f| < C \text{ p.p sur } \Omega \right\}.$$

Cet espace est muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \left\{ C \in \mathbb{R}^+, |f(x)| < C \text{ p.p sur } \Omega \right\}.$$

**Proposition A.1.1** L'espace  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  est un espace de Banach. Par ailleurs, il est :

1. Séparable si  $1 \leq p < +\infty$ .
2. Réflexif si  $1 < p < +\infty$ .
3. De Hilbert si  $p = 2$ .

### Les espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ , $H^k(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$

Les espaces de Sobolev sont des espaces de fonctions qui sont très utilisés dans la théorie des équations aux dérivées partielles, principalement dans la résolution des formulations variationnelles. D'un point de vue physique, ils s'interprètent comme des espaces de fonctions d'énergie finie.

**Définition A.1.4 (L'espace  $H^1(\Omega)$ )** On appelle espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$ , l'espace :

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega), \partial_j f \in L^2(\Omega), j = 1, \dots, n \right\},$$

où la dérivée  $\partial_j f$  est prise au sens des distributions. Cet espace est muni de la norme :

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} (|\nabla f|^2 + |f|^2) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Définition A.1.5 (L'espace  $H^k(\Omega)$ )** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On appelle espace de Sobolev  $H^k(\Omega)$ , l'espace :

$$H^k(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega), \partial_\alpha f \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k \right\},$$

où  $\partial_\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$  est prise au sens des distributions. ( $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  est un multi-indice de longueur  $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ ).

Cet espace est muni de la norme :

$$\| f \|_{H^k(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ \alpha \in \mathbb{N}^n}} |\partial_\alpha f|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Définition A.1.6 (L'espace  $H_0^k(\Omega)$ )** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On appelle  $H_0^k(\Omega)$  l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^k(\Omega)$ . En d'autres termes :

$$\forall f \in H_0^k(\Omega), \exists (f_l)_l \in (\mathcal{D}(\Omega)), \lim_{l \rightarrow +\infty} \| f - f_l \|_{H^k(\Omega)} = 0.$$

(On rappelle que  $\mathcal{D}(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ ).

## A.1.2 Quelques résultats utiles

### Trace et formules de Green

**Théorème A.1.1 (Théorème de trace)** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $\mathcal{C}^1$ , de frontière  $\partial\Omega$ . On définit l'application trace  $\gamma_0$  par :

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) &\rightarrow L^2(\partial\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\partial\Omega}) \\ u &\mapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Cette application  $\gamma_0$  se prolonge par continuité en une application linéaire continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ . Il existe alors une constante,  $C > 0$  telle que  $\forall u \in H^1(\Omega)$ , on a :

$$\| u \|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \| u \|_{H^1(\Omega)}.$$

**Théorème A.1.2 (Un autre théorème de trace)** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de

classe  $\mathcal{C}^1$ . On définit l'application trace  $\gamma_1$  par :

$$\begin{aligned} \gamma_1 : H^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) &\rightarrow L^2(\partial\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\partial\Omega}) \\ u &\mapsto \gamma_1(u) = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega}, \end{aligned}$$

où  $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ . L'application  $\gamma_1$  se prolonge par continuité en une application linéaire continue de  $H^2(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$  et il existe une constante positive  $C > 0$ , telle que :

$$\forall u \in H^2(\Omega), \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

**Théorème A.1.3 (Formule de Green)** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $\mathcal{C}^1$ , et  $\partial\Omega$  son bord. Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions de  $H^1(\Omega)$ , alors elles vérifient :

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) n_i(x) ds,$$

où  $n = (n_i)_{1 \leq i \leq n}$  est la normale unitaire orientée vers l'extérieur de  $\Omega$ .

**Théorème A.1.4 (Deuxième formule de Green)** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $\mathcal{C}^2$ . Pour toutes fonctions  $f \in H^2(\Omega)$  et  $g \in H^1(\Omega)$ , nous avons :

$$\int_{\Omega} \Delta f(x) g(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial n} g(x) ds,$$

où  $\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot n$  est la dérivée normale.

**Remarque A.1.1** Si  $\Omega$  est un ouvert borné régulier de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors l'espace  $H_0^1(\Omega)$  coïncide avec le sous espace de  $H^1(\Omega)$  dont les éléments sont les fonctions qui s'annulent sur le bord  $\partial\Omega$ .

### Les inégalités de : Minkowski, Cauchy-Schwarz, Hölder et Poincaré

**Proposition A.1.2 (Inégalité de Minkowski)** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $L^p(\Omega)$  telles que  $1 \leq p \leq \infty$ , alors on a :

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

**Proposition A.1.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)** *Pour toutes fonctions  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\Omega)$ , on aura :*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Proposition A.1.4 ( Inégalité de Hölder )** *Soient  $p$  et  $q$  deux nombres réels strictement positifs vérifiant  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .*

*Pour toutes fonctions  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$  on a  $f.g \in L^1(\Omega)$  et :*

$$\| fg \|_{L^1(\Omega)} \leq \| f \|_{L^p(\Omega)} \| g \|_{L^q(\Omega)},$$

*i.e :*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Proposition A.1.5 ( Inégalité de Poincaré )** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . Il existe une constante positive  $C > 0$  telle que,  $\forall f \in H_0^1(\Omega)$  :*

$$\| f \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \| \nabla f \|_{L^2(\Omega)}^2.$$

**Remarque A.1.2** *L'inégalité de Poincaré reste valable pour toute fonction  $f$  de  $H^1(\Omega)$  qui s'annule seulement sur une partie du bord de  $\Omega$ .*

### Théorème de Lax-Milgram

**Théorème A.1.5 (Lax-Milgram)** *Soit  $H$  un espace de Hilbert réel, muni de la norme  $\|\cdot\|$ ,  $a(u, v)$  une forme bilinéaire et  $L(v)$  une forme linéaire sur  $H$ . On suppose que :*

1.  $a(u, v)$  est continue : c'est-à-dire  $\forall u, v \in H, \exists C > 0$  telle que

$$| a(u, v) | \leq C \| u \| \| v \| .$$

2.  $a(u, v)$  est coercive : c'est-à-dire  $\forall u \in H, \exists C > 0$  telle que

$$| a(u, u) | \geq C \| u \|^2 .$$

3.  $L(v)$  est continue : c'est-à-dire  $\forall v \in H, \exists C > 0$  telle que

$$| L(v) | \leq C \| v \| .$$

Alors, le problème variationnel

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H,$$

admet une unique solution  $u \in H$ .

## A.2 Éléments de géométrie différentielle

Cette partie est consacrée à l'introduction de quelques éléments de géométrie différentielle nécessaires pour la construction des conditions aux limites approchées.

Dans tout ce qui suit,  $\Sigma$  désigne une courbe de  $\mathbb{R}^2$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

### A.2.1 L'abscisse curviligne

**Définition A.2.1 (Abscisse curviligne)** Soit  $M$  une paramétrisation quelconque de  $\Sigma$ , définie de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . On appelle abscisse curviligne du point  $M(t)$ , le nombre réel :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|M'(\mu)\| d\mu, \quad \forall t \in I,$$

où  $M(t_0)$  correspondant à  $s(t_0) = 0$ , est appelé origine de l'abscisse curviligne  $s$ .

**Remarque A.2.1** \* L'abscisse curviligne  $s$ , est la mesure algébrique, qui mesure la longueur d'une courbe  $\Sigma$ , à partir d'un point fixe  $M(t_0)$  (dit point de référence) à un point  $M(t)$ .

\* L'application  $P = M \circ s^{-1}$  définie de  $s(I)$  dans  $\Sigma$  est un reparamétrage de  $\Sigma$  par l'abscisse curviligne  $s$ , ce reparamétrage est un  $\mathcal{C}^2$  paramétrage et on a :

$$\left\| \frac{dP}{ds} \right\| = 1.$$

### A.2.2 Courbure et rayon de courbure

**Définition A.2.2 (Courbure)** Soit  $\Sigma$  une courbe paramétrée. On définit la courbure de  $\Sigma$  au point  $P(s)$  par le nombre réel :

$$c(s) = \left\| \frac{d^2P}{ds^2} \right\|.$$

**Définition A.2.3 (Rayon de courbure)** *Le rayon de courbure est le nombre réel positif  $R(s)$ , tel que*

$$R(s) = \frac{1}{c(s)},$$

*qui correspond à l'inverse de la courbure.*

### A.2.3 Formules de Frenet

Désignons par  $P$  un reparamétrage de  $\Sigma$  par une abscisse curviligne  $s$ . Soit  $\tau(s) = \frac{dP}{ds}$  le vecteur unitaire tangent à  $\Sigma$  au point  $P(s)$  et  $n(s)$  le vecteur normal unitaire qui se déduit du vecteur  $\tau(s)$  par une rotation de  $\frac{\pi}{2}$ .

Les formules de Frenet sont données par les relations :

$$\begin{cases} \frac{d\tau(s)}{ds} = c(s)n(s), \\ \frac{dn(s)}{ds} = -c(s)\tau(s), \end{cases}$$

où  $c(s)$  est appelée courbure algébrique, elles sont les conséquences de la dérivation des relations :

$$\langle \tau(s), \tau(s) \rangle = 1 \quad \text{et} \quad \tau(s) \cdot n(s) = 0.$$

---

## Index des notations

$\Omega_+$	Le domaine occupé par la plaque.
$\Omega_-^\delta$	Le domaine occupé par la couche mince.
$\partial\Omega_+$	Frontière de $\Omega_+$ , $\partial\Omega_+ = \Sigma_0 \cup \Sigma$ .
$\partial\Omega_-^\delta$	Frontière de $\Omega_-^\delta$ , $\partial\Omega_-^\delta = \Sigma_-^\delta \cup \Sigma$ .
$\Sigma_0$	Bord intérieur de la plaque $\Omega_+$ .
$\Sigma$	Frontière commune entre $\Omega_+$ et $\Omega_-^\delta$ .
$\delta$	Le petit paramètre qui représente l'épaisseur de la couche mince.
$\Sigma_-^\delta$	Bord extérieur de $\Omega_-^\delta$ .
$\Omega^\delta$	Domaine complet occupé par la structure, $\Omega^\delta = \Omega_+ \cup \Omega_-^\delta \cup \Sigma$ .
$n(s) = (n_1(s), n_2(s))$	Vecteur normal unitaire au point $s$ de $\Sigma$ .
$\tau(s) = (n_2(s), -n_1(s))$	Vecteur unitaire tangent.
$M_1, M_2$	Moments de flexion.
$T$	Force de cisaillement.
$\partial_n$	Dérivée normale selon $n$ .
$[[ \ ]]$	Saut à travers $\Sigma$ .
$\psi, \phi$	Angles de rotation.
$\omega$	Déplacement transversal où la flexion de la structure.

---

$f_1, f_2$ et $f_3$	Forces de volume qui agissent à l'intérieur de $\Omega^\delta$ .
$h_1, h_2$ et $h_3$	Forces et moments de cisaillement exercés sur $\Sigma_-^\delta$ .
$g_1, g_2$ et $g_3$	Forces et moments qui contribuent au saut à l'interface $\Sigma$ .
$D$	Module de rigidité de la structure à la flexion $D = E/(1 - \mu^2)$ .
$E$	Module de Young.
$\mu$	Coefficient de Poisson.
$K$	Module de cisaillement.
$s$	Abscisse curviligne $s$ .
$c(s)$	Courbure associée à un point de $\Sigma$ d'abscisse curviligne $s$ .
$(s, r)$	Coordonnées locales.
$(s, y)$	Coordonnées dans les variables dilatées.
$\partial_1, \partial_2$	Dérivées cartésiennes .
$\partial_s, \partial_r$	Dérivées dans les coordonnées locales.
$\partial_s, \partial_y$	Dérivées dans les coordonnées locales dilatées.
$\Omega$	Domaine complet dilaté $\Omega = \Omega_+ \cup \Sigma \cup \Omega_-$ .
$\Omega_-$	Domaine de la couche mince après dilatation.
$\Sigma_-$	La frontière extérieure de la couche mince après dilatation.

---

## Bibliographie

- [1] Athmane Abdallaoui and Keddour Lemrabet. Mechanical impedance of a thin layer in asymmetric elasticity. *Applied Mathematics and Computation*, 316 :467–479, 2018.
- [2] Grégoire Allaire. *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions Ecole Polytechnique, 2005.
- [3] H Ammari and C Latiri-Grouz. Approximate boundary conditions for thin periodic coatings. *Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Golden, CO, 1998)*, pages 297–301, 1998.
- [4] Habib Ammari and Chiraz Latiri-Grouz. Conditions aux limites approchées pour les couches minces périodiques. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33(4) :673–692, 1999.
- [5] Ivan Argatov and Gennady Mishuris. An asymptotic model for a thin bonded elastic layer coated with an elastic membrane. *Applied Mathematical Modelling*, 40(4) :2541–2548, 2016.
- [6] Abderrahmane Bendali and Keddour Lemrabet. The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the helmholtz equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 56(6) :1664–1693, 1996.
- [7] Abderrahmane Bendali and Keddour Lemrabet. Asymptotic analysis of the scattering of a time-harmonic electromagnetic wave by a perfectly conducting metal coated with a thin dielectric shell. *Asymptotic Analysis*, 57(3-4) :199–227, 2008.
- [8] H Brezis. *Analyse fonctionnelle*, 1983.
- [9] Philippe G Ciarlet. *Mathematical elasticity : volume II : theory of plates*. Elsevier, 1997.
- [10] B Engquist and JC Nedelec. Effective boundary conditions for the acoustic and electromagnetic scattering in thin layer (1993), report of cmap n. 278. *Ecole Polytechnique, France*.

- 
- [11] Alexey Furtsev and Evgeny Rudoy. Variational approach to modeling soft and stiff interfaces in the kirchhoff-love theory of plates. *International Journal of Solids and Structures*, 202 :562–574, 2020.
- [12] Giuseppe Geymonat, Sofiane Hendili, Françoise Krasucki, Michèle Serpilli, and Marina Vidrascu. Asymptotic expansions and domain decomposition. In *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XXI*, pages 749–757. Springer, 2014.
- [13] Giuseppe Geymonat, Françoise Krasucki, and Stefano Lenci. Mathematical analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 4(2) :201–225, 1999.
- [14] Giuseppe Geymonat, Françoise Krasucki, and Michele Serpilli. Asymptotic derivation of a linear plate model for soft ferromagnetic materials. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, 39 :451–460, 2018.
- [15] FZ Goffi, Keddour Lemrabet, and T Laadj. Transfer and approximation of the impedance for time-harmonic maxwell’s system in a planar domain with thin contrasted multi-layers. *Asymptotic Analysis*, 101(1-2) :1–15, 2017.
- [16] Housseem Haddar, Patrick Joly, and Hoai-Minh Nguyen. Generalized impedance boundary conditions for scattering by strongly absorbing obstacles : the scalar case. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 15(08) :1273–1300, 2005.
- [17] Housseem Haddar, Patrick Joly, and Hoai-Minh Nguyen. Generalized impedance boundary conditions for scattering problems from strongly absorbing obstacles : The case of maxwell’s equations. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 18(10) :1787–1827, 2008.
- [18] W Kühnel. Differential geometry, curves–surfaces–manifolds, translated by b. *Hunt, AMS*, 2006.
- [19] John E Lagnese and Jacques Louis Lions. Modelling analysis and control of thin plates. *Recherches en mathématiques appliquées*, Masson 1988.
- [20] Frédérique Le Louër. Thin layer approximations in mechanical structures : The dirichlet boundary condition case. *Comptes Rendus. Mathématique*, 357(6) :576–581, 2019.
- [21] Keddour Lemrabet. *Étude de divers problèmes aux limites de Ventcel d’origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers*. PhD thesis, Alger, 1987.
- [22] Keddour Lemrabet and J-L Rapp LIONS. Le problème de ventcel pour le système de l’élasticité dans un domaine de  $\mathbb{R}^3$ . *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 304(6) :151–154, 1987.

- [23] Farida Madjour and Leila Rahmani. Approximate boundary conditions for a mindlin–timoshenko plate surrounded by a thin layer. *Journal of Engineering Mathematics*, 145(1) :3, 2024.
- [24] Dragan Milosavljevic, Milan Zmindak, V Dekys, Aleksandar Radakovic, and D Cukanovic. Approximate phase speed of lamb waves in a composite plate reinforced with strong fibres. *Journal of Engineering Mathematics*, 129 :1–11, 2021.
- [25] Hanifa Mokhtari and Leila Rahmani. Asymptotic modeling of a reinforced plate with a thin layer of variable thickness. *Meccanica*, 57(9) :2155–2172, 2022.
- [26] R Nawaz, Rahmatullah Ibrahim Nuruddeen, and QM Zaigham Zia. An asymptotic investigation of the dynamics and dispersion of an elastic five-layered plate for anti-plane shear vibration. *Journal of Engineering Mathematics*, 128(1) :9, 2021.
- [27] Leila Rahmani. Ventcel’s boundary conditions for a dynamic nonlinear plate. *Asymptotic Analysis*, 38(3-4) :319–337, 2004.
- [28] Leila Rahmani. Conditions aux limites approchées pour une plaque mince non linéaire. *Comptes Rendus Mathématique*, 343(1) :57–62, 2006.
- [29] Leila Rahmani. Modelling of the effect of a thin stiffener on the boundary of a nonlinear thermoelastic plate. *Mathematical Modelling and Analysis*, 14(3) :353–368, 2009.
- [30] Leila Rahmani. Reinforcement of a mindlin–timoshenko plate by a thin layer. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 66(6) :3499–3517, 2015.
- [31] Leila Rahmani and Grégory Vial. Reinforcement of a thin plate by a thin layer. *Mathematical methods in the applied sciences*, 31(3) :315–338, 2008.
- [32] Anurag Rajagopal and Dewey H Hodges. Variational asymptotic analysis for plates of variable thickness. *International Journal of Solids and Structures*, 75 :81–87, 2015.
- [33] M Serpilli, R Rizzoni, Frédéric Lebon, and Serge Dumont. An asymptotic derivation of a general imperfect interface law for linear multiphysics composites. *International Journal of Solids and Structures*, 180 :97–107, 2019.
- [34] Michele Serpilli. Asymptotic interface models in magneto-electro-thermo-elastic composites. *Meccanica*, 52(6) :1407–1424, 2017.
- [35] Michele Serpilli. On modeling interfaces in linear micropolar composites. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 23(4) :667–685, 2018.
- [36] Michele Serpilli. Classical and higher order interface conditions in poroelasticity. *Annals of Solid and Structural Mechanics*, 11(1) :1–10, 2019.

- 
- [37] Michele Serpilli and Stefano Lenci. An overview of different asymptotic models for anisotropic three-layer plates with soft adhesive. *International Journal of Solids and Structures*, 81 :130–140, 2016.
- [38] DR Westbrook. A linear asymptotic theory for anisotropic shells. *Journal of Engineering Mathematics*, 6(4) :305–312, 1972.