



1. République Algérienne Démocratique et  
Populaire  
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la  
Recherche Scientifique  
Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou  
Faculté des sciences  
Département mathématiques



# Mémoire De Fin d'études

En vue d'obtention du diplôme de master  
professionnalisant en Mathématiques appliquées à la  
gestion

## Thème

Problème du flot dans les réseaux de transport et  
application sur un réseau hydraulique de la ville de T.O

Encadré par :

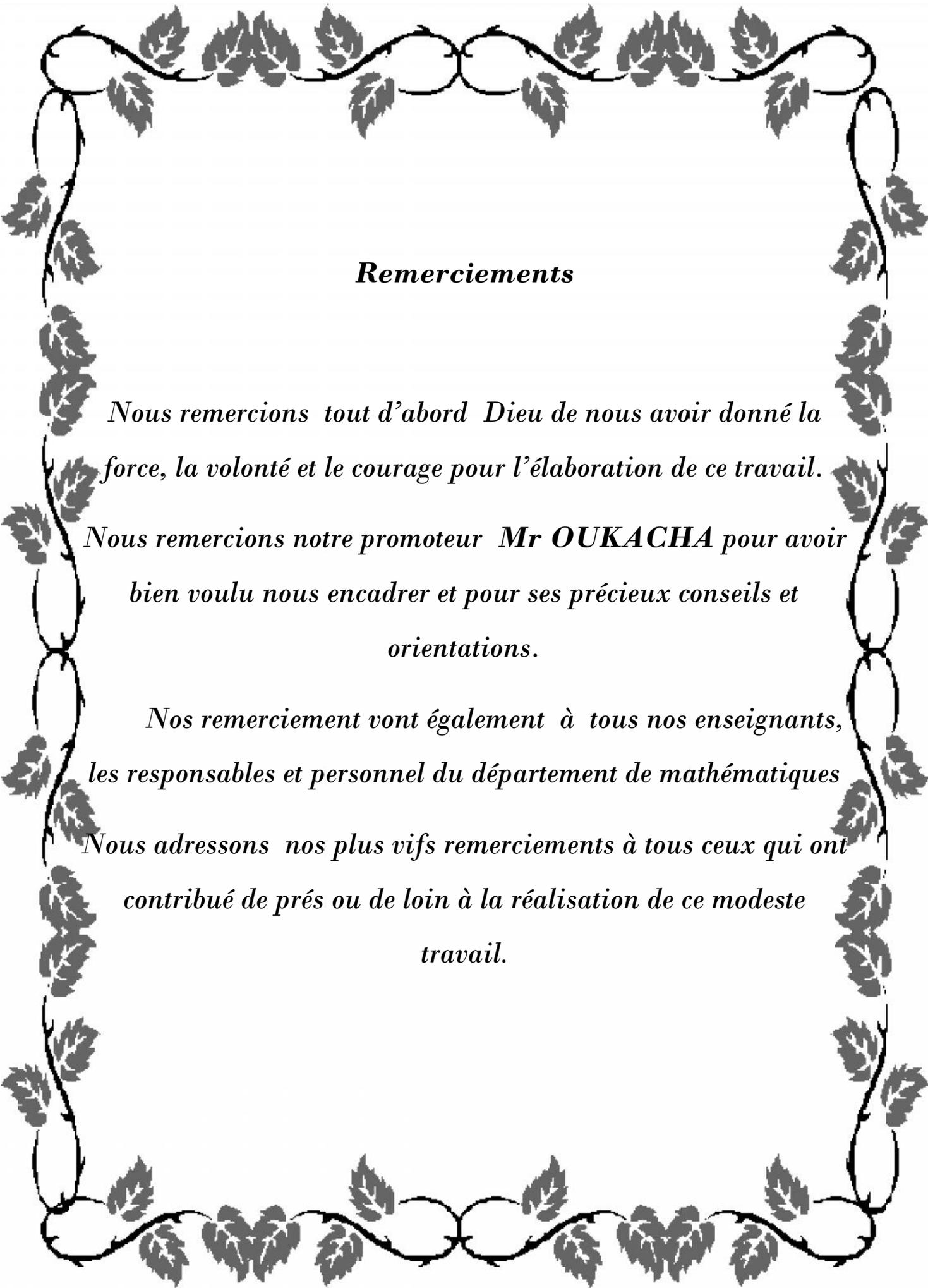
M<sup>r</sup> OUKACHA.B.

Réalisé par :

M<sup>elle</sup> HADJ ARAB Hanane.

M<sup>me</sup> DRIF Houria.

2015-2016



## *Remerciements*

*Nous remercions tout d'abord Dieu de nous avoir donné la force, la volonté et le courage pour l'élaboration de ce travail.*

*Nous remercions notre promoteur **Mr OUKACHA** pour avoir bien voulu nous encadrer et pour ses précieux conseils et orientations.*

*Nos remerciement vont également à tous nos enseignants, les responsables et personnel du département de mathématiques*

*Nous adressons nos plus vifs remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.*

*Dédicace:*

*Je dédie ce modeste travail:*

*Aux personnes les plus chères à mon cœur.*

*D'abord à la mémoire de mon très cher grand-père, que dieu l'accueille dans son vaste paradis.*

*A ma chère grand-mère Louiza pour son amour et soutien moral depuis mon existence.*

*Spécialement à ma mère pour sa présence, ses sacrifices, son soutien, ses conseils, son encouragement et que ce modeste travail exhaussera un de ses rêves.*

*A ma chère tante Rabia qui nous a toujours soutenu moi et mes sœurs.*

*A mes deux chères sœurs Fadhila et Samira que j'aime très fort.*

*A mon cher fiancé Aissa qui n'a jamais cessé de m'encourager.*

*A ma belle famille que j'aime très fort:*

*Ma belle mère Ouardia, mon beau père Amar, mon beau frère Karim, ma belle sœur Meriem, son mari Moussa et leur toute petite fille Nada.*

*A mon amie Samira Fellah et toute sa famille.*

*A mes copines à l'université: Kahina, Sadia, Razika et Narimane.*

*Et finalement à ma chère binôme Houria et tous les membres de sa famille.*

*HADJARAB Hanane.*

## *Dédicace :*

*J'ai un grand plaisir de dédier ce modeste travail à:*

*Mes très chers grands –parents*

*Mes très chers parents*

*Mes très chers bons parents*

*Mon très cher mari*

*Qui ne m'ont jamais privé de quelque chose.*

*Khali et toute sa famille surtout moh akli*

*Mes tantes et leurs enfants*

*Mes très chers frères et sœurs : Mohand , Zakaria, Karima et sa famille, Hadjira et sa famille, Ouiza et Yamina , avec Fatiha.*

*Mes très chères beaux frères et belles sœurs: Madjid, Arezki, Said, Ouiza, Sabrina, Samira et Hassina.*

*Mes amies de la fac : Hanane, Sadia, Kahina, Narimen , Razika, Khadidja et tous notre groupe.*

*Ma chère binôme : HADJ ARABE Hanane et toute sa famille.*

*Et pour tous les gens qui m'aiment.*

*DRIF Houria*

# Table des matières

**Introduction générale..... 1**

**Historique de la théorie des graphes..... 3**

## **CHAPITRE I : l'hydraulique de la wilaya de Tizi-Ouzou.**

**I Définition du secteur ..... 5**

**I.1 Historique ..... 5**

**II.2 Missions essentielles de l'ADE ..... 5**

**II Présentation de l'unité de l'ADE de Tizi-Ouzou..... 6**

**III Mobilisation de la ressource en eau ..... 6**

**III.1 Ressources souterraines ..... 6**

**III.2 Ressources superficielles ..... 6**

**III.3 Sources :..... 8**

**IV. Evolution du patrimoine hydraulique et des indicateurs socio- économiques ..... 9**

**IV.1 Alimentation en eau potable ..... 9**

**IV.1.1 Patrimoine hydraulique ..... 9**

**IV.1.2 Production d'eau potable ..... 9**

**IV.1.3 Indicateur socio-économiques..... 9**

**IV.2 Situation de l'assainissement ..... 10**

**V. Projets structurants à travers la Wilaya de Tizi-Ouzou ..... 11**

**V.1 Transfert d'eau à partir de Taksebt vers Freha, Azazga ..... 11**

**V.2 Transfert d'eau à partir de Taksebt vers Tizi-Ouzou, DBK et Tadmaït ..... 11**

V.3 Transfert d'eau à partir de Koudiet Acerdoune (W.Bouira) vers le couloir de Draâ El Mizan, Boghni et Ouadhias : .....	12
V.4 Transfert d'eau à partir de Taksebt vers les localités du flanc nord de la wilaya : .....	12

## CHAPITRE II : Notions de base de la théorie des graphes

I. Définitions de base.....	13
I.1 Graphes orientés.....	13
I.1.1 Successeurs et Prédécesseurs dans un graphe.....	14
I.2 Graphes non orientés.....	14
I.3 Degrés .....	14
I.3.1 Degré d'un sommet.....	14
I.3.2 Degré d'un graphe .....	15
I.4 Quelques types de graphes.....	15
I.5 Sous-graphe, graphe partiel et sous-graphe partiel d'un graphe.....	16
I.6 Quelques graphes particuliers.....	17
I.7 Connexité dans les graphes.....	19
I.7.1 Chaines –Cycles .....	19
I.7.2 Chemins–circuits.....	20
I.7.3 Connexité.....	20
I.7.4 Forte connexité .....	21
I.7.5 Graphe réduit.....	22
I.8 Arbres et arborescences .....	23
I.8.1 Arbres.....	23
I.8.2 Arbre couvrant.....	23

I.8.3 Forêt .....	24
I.8.4 Racine .....	24
I.8.5 Arborescence .....	24
I.9 pondération des graphes .....	24
I.9.1 graphes à sommets pondérés .....	24
I.9.2 graphes à arêtes pondérées.....	24
I.10 Représentation des graphes en machines .....	25
I.11 couplages dans les graphes.....	26
I.11.1 Couplage maximum .....	26
I.11.2. Couplage maximal .....	26

### **CHAPITRE III : Le flot dans les réseaux**

<b>I .Flots dans les réseaux de transport .....</b>	<b>27</b>
I.1.définition d'un réseau de transport .....	27
I.2 définition d'un flot .....	27
I.3 flot compatible .....	27
I.4Flot complet .....	27
<b>II. Le problème du flot maximum dans un réseau de transport .....</b>	<b>28</b>
II.1 Définitions .....	28
II.2 formulation du problème .....	28
II.3 Algorithmes de résolution .....	28
II.4 Algorithme de Ford &Fulkerson .....	29
II.4.1 algorithme général .....	30

II.4.2 Exemple d'application .....	31
------------------------------------	----

## CHAPITRE IV : Application sur le réseau hydraulique

### du système Freha-Azazga

I. Introduction .....	37
II. Données du Système de Freha-Azazga .....	37
III. Modélisation du problème .....	38
III. Résolution du problème .....	42
IV. Conclusion .....	57
Conclusion générale .....	58

## Introduction générale

La recherche opérationnelle est une discipline à la frontière des mathématiques appliquées, de l'informatique et de la gestion ; elle apporte une méthodologie de modélisation et une collection d'outils scientifiques pour aider à la prise de décision dans des situations où :

- Le nombre de solutions à envisager est très grand.
- Les contraintes sont nombreuses et complexes.
- Les objectifs à atteindre sont multiples et peuvent être contradictoires.
- Il existe des sources d'incertitude, d'indétermination et d'imprécision.

Une des parties essentielles de la recherche opérationnelle est la théorie des graphes, qui étudie la résolution des problèmes pour un grand nombre d'applications :

- Réseaux électriques et transport d'énergie.
- Routage du trafic dans les réseaux de télécommunications et les réseaux d'ordinateurs.
- Routage de véhicules et organisation de tournées.
- Problèmes de localisation (localisation d'entrepôts dans les réseaux de distribution de marchandises, d'antennes...).
- Problème d'ordonnancement de tâches et d'affectation de ressources (problèmes de rotation d'équipage dans les compagnies aériennes).

Dans notre travail, on s'intéresse au problème du flot maximum dans les réseaux qui concernent la circulation de matière sur les arcs d'un graphe. Parmi les nombreuses applications qui relèvent de ce problème, on trouve les réseaux de transport de différents points distributeurs à différents points de consommateurs, l'écoulement de liquides à l'intérieur de tuyaux ...etc. Considérons des châteaux d'eau ayant un débit constant, qui desservent un certain nombre de villes, chacune ayant des besoins quantifiés constants. L'eau est acheminée à travers des conduites dont le débit maximum est connu. Le problème est de trouver un moyen de satisfaire au mieux les demandes de chaque ville. En d'autres termes, essayer d'apporter le plus d'eau possible vers les villes.

Notre travail est divisé en quatre chapitres :

- ✓ Le premier chapitre présente l'hydrologie de la wilaya de Tizi-Ouzou afin de bien connaître ce secteur.

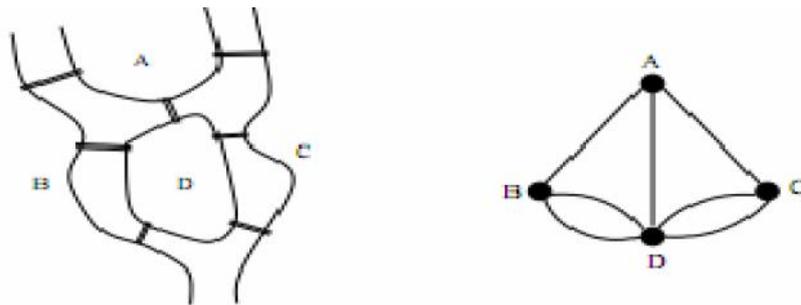
- ✓ Le deuxième chapitre présente des généralités sur la théorie des graphes, en rappelant ses notions de base.
- ✓ Le troisième chapitre représente la notion du réseau de transport et le flot maximum puis nous avons présenté les méthodes de la recherche d'un flot maximum et plus particulièrement, la méthode de Ford Fulkerson.
- ✓ Le quatrième chapitre illustre la méthode de Ford Fulkerson par une application sur un réseau hydraulique du système Taksebt – Freha/Azazga.

Et en fin, nous avons terminé notre mémoire par une conclusion générale.

## Historique de la théorie des graphes

La théorie des graphes est née en 1736 quand Euler démontra qu'il était impossible de traverser chacun des ponts de la ville russe de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) une fois exactement et de revenir au point de départ sans passer deux fois par le même pont.

Dans la figure suivante, les nœuds représentent les rives et les arêtes, les ponts.



### **Les sept ponts de Königsberg**

Pendant les cent années qui suivent, rien ne fut fait dans ce domaine de recherche. En 1847, Kirchhoff (1824-1887) développa la théorie des arbres pour l'appliquer à l'analyse de circuits électriques.

Dix ans plus tard, Cayley (1821-1895) découvrit la notion d'arbre alors qu'il essayait d'énumérer les isomères saturés des hydrocarbures de type  $C_nH_{2n+2}$ . A cette époque, deux autres problèmes d'importance majeure pour la théorie des graphes furent également proposés et partiellement résolus. Le premier est la conjecture des 4 couleurs qui affirme que quatre couleurs suffisent pour colorier n'importe quelle carte géographique telle que les pays ayant une frontière commune soient de couleurs différentes. Möbius (1790-1868) présenta le premier ce problème dans l'un de ses cours en 1840, Environ dix ans après, De Morgan (1806-1871) essaya de résoudre ce problème. Ce problème devient célèbre après sa publication par Cayley en 1879.

A partir de 1946, La théorie des graphes a connu un développement intense sous l'impulsion de chercheurs motivés. Parmi eux, citons de manière privilégiée Kuhn (1955), Ford et Fulkerson (1956) et Roy (1959). Parallèlement, un important effort de synthèse a été opéré en particulier par Claude Berge dans son ouvrage « Graphes et Hypergraphes ».

La théorie des graphes constitue un domaine des mathématiques qui, historiquement, s'est aussi développé au sein de disciplines diverses telles que la chimie (modélisation de structures), la biologie (génomique), les sciences sociales (modélisation des relations) ou en vue d'applications industrielles (problème du voyageur de commerce). Elle constitue l'un des instruments les plus courants et les plus efficaces pour résoudre des problèmes discrets posés en « Recherche opérationnelle » ou « mathématiques discrètes ».

De manière générale, un graphe permet de représenter simplement la structure, les connexions, les cheminements possibles d'un ensemble complexe comprenant un grand nombre de situations, en exprimant les relations, les dépendances entre ses éléments (ex : réseaux de communication, réseaux ferroviaire ou routier, arbre généalogique, diagramme de succession de tâches en gestion de projet...).

### I Définition du secteur :

#### I.1 Historique :

« L'Algérienne des eaux », par abréviation « ADE » est un établissement public national à caractère industriel et commercial.

Au lendemain de sa création, le 21 avril 2001, l'Algérienne des eaux s'est appliquée la mise en place de ses structures, l'impulsion de la gestion et de la levée des préalables à un transfert organisé en sa faveur des établissements en charge de la production, l'exploitation et la gestion de distribution de l'eau. Les objectifs stratégiques assignés à ce nouvel établissement étant d'assurer une meilleure satisfaction des besoins en eau des usagers, d'assurer une gestion plus efficiente de la ressource en réduisant les gaspillages divers (fuites) et de redonner à l'eau sa valeur économique.

#### II.2 Missions essentielles de l'ADE :

- Le service public de l'eau potable visant à assurer la disponibilité de l'eau aux citoyens.

- L'exploitation (gestion et maintenance) des systèmes et installations permettant la production, le traitement, le transfert, le stockage et la distribution de l'eau potable et industrielle.

- La normalisation et la surveillance de la qualité de l'eau distribuée.

- La maîtrise d'ouvrages et la maîtrise d'œuvre pour son propre compte et/ou celui des collectivités locales.

- La maîtrise d'ouvrage déléguée et réalisée contre rémunération par le maître d'ouvrage.

- La police des eaux.

- L'initiation de toute action visant l'économie de l'eau (lutte contre le gaspillage).

### II Présentation de l'unité de l'ADE de Tizi Ouzou.

La Wilaya de Tizi Ouzou présente un relief montagneux fortement accidenté s'étalant sur une superficie de **2994** Km<sup>2</sup> pour une population de **1.171.720** habitants répartie sur **1400** villages à travers les crêtes et collines, soit une densité de **391.35** habts / km<sup>2</sup>.

Le réseau hydrographique est constitué de deux grands bassins versants : le bassin de l'Oued-Sebaou et le bassin côtier.

La pluviométrie moyenne annuelle : 810 mm.

. La principale ressource en eau potable de la Wilaya est soutirée à partir de :

- Nappe alluviale de l'Oued Sebaou : 33 %.
- Ressources superficielles (barrages) : 56 %.
- Sources superficielles, prise d'eau : 8 %.
- Dessalement : 3 %.

### III Mobilisation de la ressource en eau :

#### III.1 Ressources souterraines :

- Ressources souterraines estimées : 57 Hm<sup>3</sup>/an.
- Ressources souterraines mobilisées : 27.83 Hm<sup>3</sup>/an.
- Débit mobilisé superficiel : 75.95 Hm<sup>3</sup>/an.
- Débit mobilisé à partir des sources : 3.43 Hm<sup>3</sup>/an.
- Débit mobilisé à partir de la station de dessalement de Tizirt : 0.91 Hm<sup>3</sup>/an.
- Débit mobilisé à partir des Stations de déminéralisation : 0.91 Hm<sup>3</sup>/an.

#### III.2 Ressources superficielles :

##### a) Barrages et retenues collinaires :

Potentialités: 1 000 000 000 m<sup>3</sup>/an.

Volume mobilisé. 191 930 000 m<sup>3</sup>/an.

## Chapitre I : L'hydraulique de la ville de Tizi-Ouzou.

- **Barrage Taksebt.**

Mis en eau: Novembre 2001.

Volume régularisé: 181 Hm<sup>3</sup>.

Volume alloué à la Wilaya de Tizi-Ouzou : 65 Hm<sup>3</sup>/an.

- **Barrage de Djebba :**

Volume régularisé : 3 Hm<sup>3</sup>.

- **Barrage de Draa El Mizan :**

Volume régularisé: 1,50 Hm<sup>3</sup>.

- **Barrage d'Ain Zaouïa :**

Volume régularisé : 1,40 Hm<sup>3</sup>.

- **Barrage de Tizi Ghenif :**

Volume régularisé : 0,53 Hm<sup>3</sup>.

- **Retenues collinaires :**

Volume régularisé : 4,50 Hm<sup>3</sup>.

*b) Barrages en étude :* il existe trois barrages qui sont en cours d'étude par l'A.N.B.T

- Barrage de Sidi Khelifa (Azeffoun) : volume = 21,40 Hm<sup>3</sup> (étude terminée).
- Barrage de Bounachi (Mekla) : volume = 30,50 Hm<sup>3</sup>.
- Barrage de Zaouïa (Makouda) : volume = 43,60 Hm<sup>3</sup>.

*c) Barrages réalisés :*

- **Barrage de Taksebt :**

Les travaux de ce barrage sont achevés. Le volume régularisé est de 181 Hm<sup>3</sup>/an. Il est destiné à l'alimentation en eau des Wilaya de Tizi-Ouzou, Boumerdes et Alger. Le volume alloué à la Wilaya de Tizi-Ouzou est de 65 Hm<sup>3</sup>/an. Ils sont destinés à alimenter 28 centres

## Chapitre I : L'hydraulique de la ville de Tizi-Ouzou.

urbains et 600 villages représentant 920 000 habitants repartis sur l'axe Azazga – Tizi Ouzou – Draâ Ben Khedda – Tadmait et les communes du Flanc Nord de la Wilaya.

- **Barrage Koudiet Acerdoune :**

Les travaux de ce barrage sont achevés. Le volume régularisé est de 640 Hm<sup>3</sup>/an. Il est destiné à l'alimentation en eau de 5 Wilayas dont Tizi- Ouzou Le volume alloué à la Wilaya de Tizi -Ouzou est de 21 Hm<sup>3</sup>/an. Ils sont destinés à alimenter 13 chefs lieux de communes et 190 villages représentant 226 000 habitants repartis sur l'axe Draa El Mizan, Boghni et Ouadhias.

- **Barrage de Souk N<sup>o</sup>Tleta :**

Implanté sur l'Oued Bougdoura à 8 km au sud de Draâ Ben Khedda, volume régularisé est de 96 Hm<sup>3</sup>/an. Destiné à renforcer l'AEP des Wilaya Tizi-Ouzou – Boumerdes – Alger.

### III.3 Sources :

Le nombre de sources recensées et captées est de 121 dont la potentialité est 16 Hm<sup>3</sup>.une grande partie de ces sources est située sur le Flanc Nord du Djurdjura. Elles sont destinées pour alimenter les villages du coté sud de la wilaya. Citons quelques sources :

- Aincer Amokrane (Iferhounène).
- Thebouth (Ait Bouaddou).
- Derdar (Ait Zikki).
- Bou Djaafer (Illoula Oumalou).
- Tinzert ( Boghni).
- Oualsous, Amane Melloulène, Zerroud (Ait Ouabane).
- El hemmam (Ait Boumehdi).
- Asfis Ait erguène (Agouni Gueghrane).
- Thabourth Lanser (Assi Youcef).
- Aidloul (Timeghras).
- Ait Aissi (Yakourene).
- Ait Naim (Azeffoun).
- Tala Ouguellid (Mechtras).

### IV. Evolution du patrimoine hydraulique et des indicateurs socio-économiques :

#### IV.1 Alimentation en eau potable:

##### IV.1.1 Patrimoine hydraulique :

- Longueur du réseau d'adduction : 2.906 Km.
- Longueur du réseau de distribution : 3.837 Km.
- Nombre de réservoirs : 828.
- Volume de stockage : 365702 m<sup>3</sup>.
- Nombre de stations de pompage : 193.
- Nombre de stations de traitement : 6.
- Nombre de forages : 180.
- Nombre de sources : 26.
- Nombre de station de dessalement : 1.
- Nombre de station de déminéralisation : 1.

IV.1.2 Production d'eau potable : La production d'eau potable a légèrement augmenté durant le premier semestre 2016, ainsi elle est passé de 41,40 hm<sup>3</sup> durant le premier semestre 2015, à 42,17 hm<sup>3</sup> pour le premier semestre 2016, le volume distribué est passé de 31,7 hm<sup>3</sup> à 32,8 hm<sup>3</sup> pour les mêmes périodes, correspondant à des dotations de 145 et 150 litres par jour et par habitant, respectivement.

##### IV.1.3 Indicateur socio-économiques :

indice	2013	2014	2015	2016
Dotation journalière L/J.hab	220	223	229	229
Taux de raccordement %	92.76	94.20	96	96

<b>Taux de satisfaction %</b>	76	81	91	-
<b>Taux horaire moyen de distribution h/j</b>	16	16	17	19

### IV.2 Situation de l'assainissement :

a) Assainissement : L'amélioration de la dotation en AEP par investissements en matière de mobilisation de la ressource, ainsi que la réfection et l'extension des réseaux de distribution a engendré une nette progression du volume rejeté dans des cours d'eau et a travers la nature en général.

#### b) Indicateurs socio-économiques :

- Longueur du réseau : 6842 km.
- Nombre de stations d'épuration : 8.
- Nombre de bassins de décantation : 24.
- Nombre de bassins de filtration : 210.
- Taux de raccordement : 96%.

#### c) Stations d'épuration en exploitation :

- STEP Tizi Ouzou « EST » Pont de bougie : 120 000 eq/habt.
- STEP Tizi Ouzou « OUEST » Boukhalfa : 25 000 eq/habt.
- STEP Tadmait: 13 500 eq/habts -STEP Boghni : 13 500 eq/habt.
- Extension STEP Tigzirt: 15 000 eq/habt.
- Extension STEP Azeffoun: 20 000 eq/habt.
- Extension STEP Draâ Ben Khedda: 50 000 eq/habt.
- STEP Draâ El Mizan: 30 000 eq/habt.

### d) Postes de relevage en exploitation :

- Poste de Relevage de Draâ Ben Khedda.
- Poste de Relevage de Tadmait.
- Poste de Relevage de « Feraoun » à Tizirt.
- Poste de Relevage du «port » à Tizirt.
- Poste de Relevage SR1 d'Azeffoun.
- Poste de Relevage SR2 d'Azeffoun.
- Poste de Relevage de Mouldiouene.

### V Projets structurants à travers la Wilaya de Tizi-Ouzou :

Devant la saturation, voire la surexploitation des nappes et les besoins sans cesse croissants liés à l'évolution démographique, la satisfaction des besoins en eau (potable, irrigation et industrie) passe inévitablement par la mobilisation des eaux superficielles et la réalisation des grands transferts :

#### V.1 Transfert d'eau à partir de Taksebt vers Freha, Azazga:

Le volume affecté sur l'axe Taksebt Freha Azazga est de  $50416 \text{ m}^3/\text{j}$  qui renforcera en eau potable 11 chefs lieux de communes pour une population totale de 200.000 Habitants, qui était alimentée 1j/3 jusqu'à 1j/7 avec une dotation n'excédant pas 60 L/j/habt. Après la mise en service de ce transfert, la population de cet axe reçoit l'eau avec un taux horaire moyen de distribution de 16h/j avec une dotation de 238 L/j/habt. Les communes concernées par ce transfert sont : Irdjene, zone industrielle de Oued Aissi, Tamda, B.Aissi, Timizart, freha, Azazga, Tizi Rached, Ait oumalou, Mekla, Ait khellili, Souamaa, Kahra, Yakourene.

#### V.2 Transfert d'eau à partir de Taksebt vers Tizi Ouzou, DBK et Tadmait:

Le volume affecté sur l'axe Taksebt Tizi Ouzou Tadmait est de  $36 \text{ Hm}^3/\text{an}$  qui renforceront en eau potable 13 chefs lieux de communes et 309 villages pour une population totale de 521 000 habitants. Les communes concernées par le transfert sont :

## Chapitre I : L'hydraulique de la ville de Tizi-Ouzou.

Tizi Ouzou, Draâ ben Khedda, Tadmait, Tizirt, Iflissen, Makouda, Mizrana, Tirmitine, Ait Mahmoud, Béni Douala, Béni Aissi et Béni Zmenzer partiellement Ouadhias, Souk El Tenine et Tizi Ntleta. Les travaux sont achevés et mis en service.

### V.3 Transfert d'eau à partir de Koudiet Acerdoune (W.Bouira) vers le couloir de Draâ El Mizan, Boghni et Ouadhias :

Le volume affecté sur l'axe du barrage vers le couloir de Draâ El Mizan, Boghni et Ouadhias est de  $21 \text{ Hm}^3$  qui renforceront en eau potable 14 chefs lieux de communes et 190 villages pour une population totale de 226 000 habitants. Les communes concernées par le transfert sont : Tizi Ghenif, M'kira, Draâ El Mizan, Frikat, Ain Zaouia, Bounouh, Boghni, Assi Youcef, Mechtras, Souk El Tenine, Tizi Ntleta, Ait Bouaddou, Ouadhias, Agouni Gueghrane.

### V.4 Transfert d'eau à partir de Taksebt vers les localités du flanc nord de la wilaya :

Huit communes sont concernées par ce transfert : Boudjima, Iflissen, Tizirt, Aghribs, Akkerrou, Azeffoun, Ait Chaffaâ et Zekri, comptant 214 villages pour une population globale de 168 000 habitants et un débit de  $21\,000 \text{ m}^3/\text{jours}$ . Population à l'horizon 2030 de ces communes : 140 145 habitants Besoins en eau potable à l'horizon 2030 :  $21\,022 \text{ m}^3/\text{j}$  soit  $7,7 \text{ Hm}^3/\text{an}$ .

### I Définitions de base :

#### I.1 Graphe orienté :

Définition :

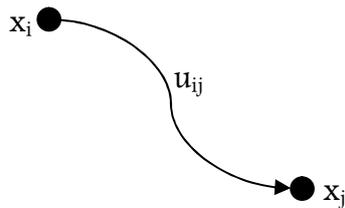
Un graphe orienté  $G=(X, U)$  est déterminé par la donnée de deux ensembles  $X$  et  $U$  tels que :

- $X=\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  dont les éléments sont appelés **sommets**.
- $U=\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_m\}$  dont les éléments sont appelés **arcs**. Si  $u=(x_i, x_j)$ , alors :
  - $x_i$  est l'extrémité initiale de  $u$  (ou origine de  $u$ ) notée  $I(u)$ .
  - $x_j$  est l'extrémité terminale de  $u$  (ou destination de  $u$ ) notée  $T(u)$ .

L'arc  $u$  part de  $x_i$  et arrive en  $x_j$ .

Exemple :

L'arc  $u_{ij}$  se représente de la manière suivante :



$$u_{ij} = (x_i, x_j)$$

Si  $I(u)=T(u)$  alors  $u$  est une **boucle**.

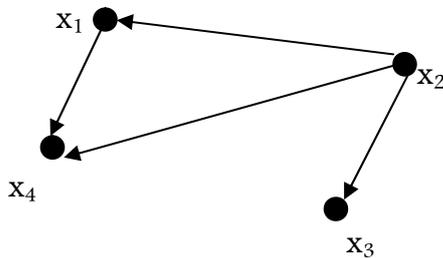


#### I.1.1 Successeurs et Prédécesseurs dans un graphe :

- $x_j$  est successeur de  $x_i$  si  $(x_i, x_j) \in U$ . L'ensemble des successeurs de  $x_i$  est noté par  $\Gamma^+(x_i)$ .  
 $\Gamma^+(x_i) = \{y \in X, \text{ tel que } (x_i, y) \in U\}$ .
- $x_j$  est prédécesseur de  $x_i$  si  $(x_j, x_i) \in U$ . L'ensemble des prédécesseurs de  $x_i$  est noté par  $\Gamma^-(x_i)$ .  
 $\Gamma^-(x_i) = \{y \in X, \text{ tel que } (y, x_i) \in U\}$ .

## Chapitre II : Notions de base de la théorie des graphes.

Exemple :



$$\begin{aligned} X &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \\ \Gamma^+(x_1) &= \{x_4\} \\ \Gamma^+(x_2) &= \{x_1, x_3, x_4\} \\ \Gamma^+(x_3) &= \emptyset \\ \Gamma^-(x_4) &= \{x_1, x_2\} \end{aligned}$$

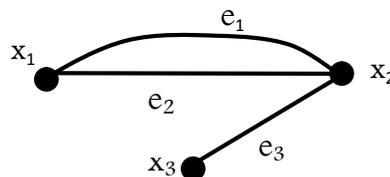
### I.2 Graphe non orienté :

Définition :

Un graphe non orienté  $G=(X, E)$  est défini par deux ensemble  $X$  et  $E$ , tels que :

- $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ( $|X| = n$ ) dont les éléments sont appelés **sommets**.
- $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  ( $|E| = m$ ) dont les éléments sont appelés **arêtes**.

Exemple :



Remarque :

Une arête  $e$  de l'ensemble  $E$  est définie par une paire non ordonnée de sommets, appelés les extrémités de  $e$ . Si l'arête  $e$  relie les sommets  $a$  et  $b$ , on dira que ces sommets sont **adjacents**, ou **incidents** avec  $e$ , ou bien que l'arête  $e$  est incidente avec les sommets  $a$  et  $b$ .

On appelle **ordre** d'un graphe le nombre de sommets  $n$  de ce graphe.

### I.3 Degrés :

#### I.3.1 Degré d'un sommet :

*Cas de graphe orienté :* Soit  $G=(X, U)$ ;  $|X| = n$  et  $|U| = m$ .

On appelle degré de  $x$  noté  $d(x)$  le nombre d'arcs dont  $x$  est l'une des extrémités.

$d^+(x) = |\Gamma^+(x)| =$  demi-degré extérieur de  $x$  dans  $G$ .

## Chapitre II : Notions de base de la théorie des graphes.

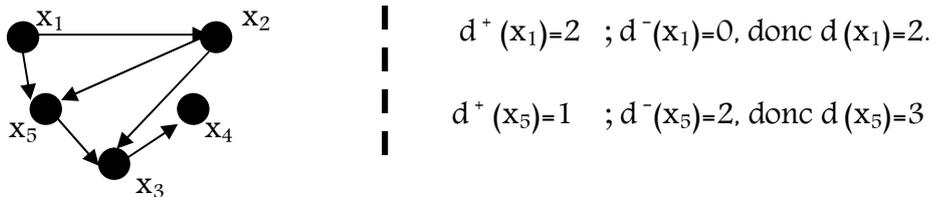
$d^-(x) = |\Gamma^-(x)|$  = demi-degré intérieur de  $x$  dans  $G$ .

$d(x) = d^-(x) + d^+(x)$  est appelé degré de  $x$  dans  $G$ .

Remarque :

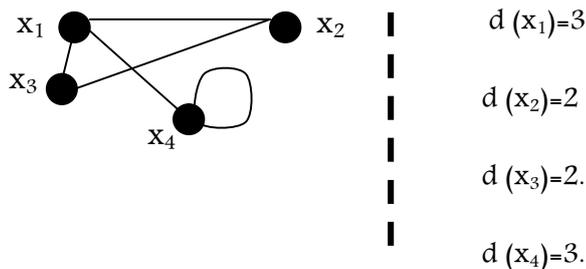
- Un sommet de degré 1 est appelé sommet pendent.
- Un sommet de degré 0 est appelé sommet isolé.

Exemple :



*Cas non orienté :* On appelle **degré** du sommet  $x$ , et on note  $d(x)$ , le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.

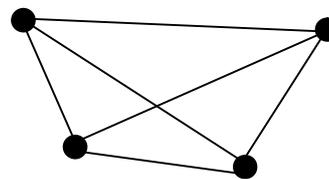
Remarque : Une boucle sur un sommet est comptabilisé en double.



**I.3.2 Degré d'un graphe :** C'est le degré maximum de tous ses sommets,

$d(G) = \max_{x \in X} \{d(x)\}$ . Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit **régulier**. Si le degré commun est  $k$ , alors on dit que le graphe est  $k$ -régulier.

Exemple : le graphe ci-contre est 3-régulier



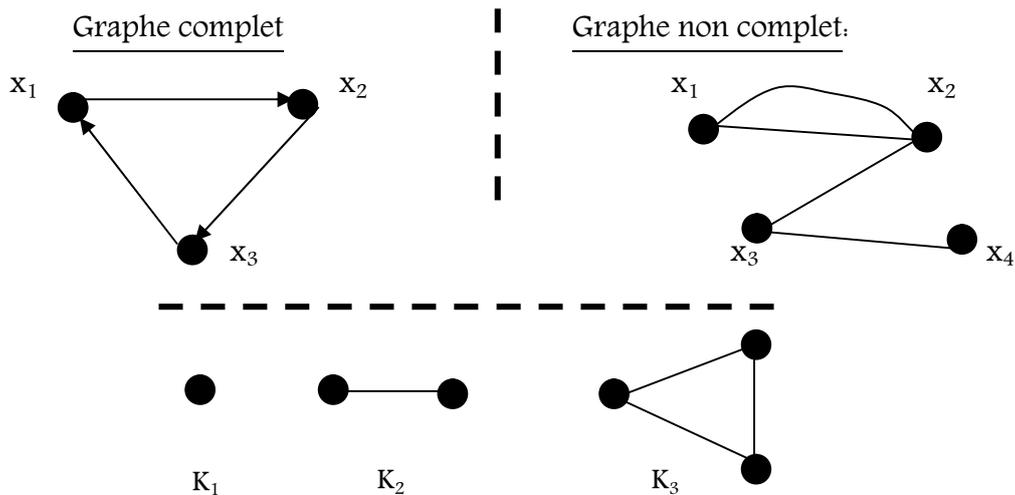
**I.4 Quelques types de graphes :**

**Graphe complet et clique :**  $G = (X, E)$  est complet (ou clique), si  $\forall x, y \in X, (x, y) \in E$ .

Une clique d'ordre  $n$  est notée  $K_n$

## Chapitre II : Notions de base de la théorie des graphes.

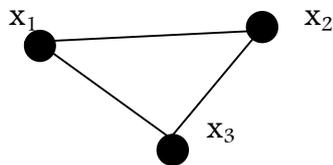
Exemple :



**Graphe simple :** Un graphe est dit simple, s'il ne contient pas de boucle et entre chaque deux sommets, il existe au plus une arête (respectivement arc).

Exemple :

Un graphe simple

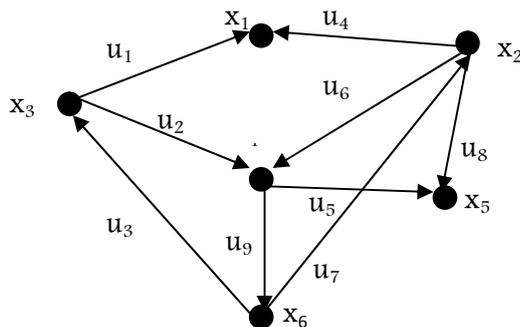


### I.5 Sous-graphe, graphe partiel et sous-graphe partiel d'un graphe :

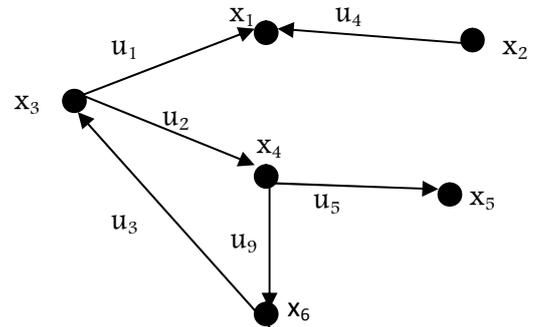
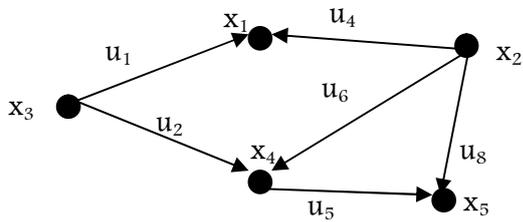
Soit un graphe  $G=(X, U)$ ,  $X' \subset X$  et  $U' \subset U$  et  $U'' = \{(x, y) \in U / x \in X' \text{ et } y \in X'\}$ .

- Un sous-graphe de  $G$  est le graphe  $G' = (X', U')$  engendré par une partie de  $X'$ .
- Un graphe partiel de  $G$  est le graphe  $G'' = (X, U')$  engendré par  $U'$ .
- Un sous-graphe partiel de  $G$  est un graphe partiel d'un sous-graphe de  $G$ .

Exemple :



Le graphe G

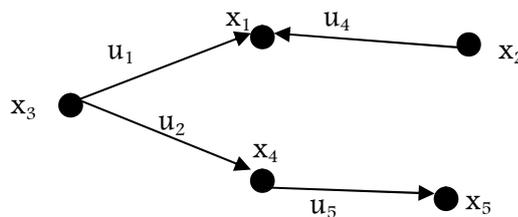


Un sous graphe de G engendré par:

$$X' = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

Un graphe partiel de G engendré par :

$$U' = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_9\}$$



Un sous graphe partiel de G engendré par  $X'$  et  $U'$  tels que:

$$X' = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \text{ et } U' = \{u_1, u_2, u_4, u_5\}$$

I.6 Quelques graphes particuliers :

**Graphe biparti :**

*Partition d'ensembles :* E est un ensemble, partitionner E en sous ensembles  $E_1, E_2, \dots, E_k$

c'est :

1.  $E_i \neq \emptyset, i=1, \dots, k.$
2.  $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j.$
3.  $\cup E_i = E, i=1, \dots, k.$

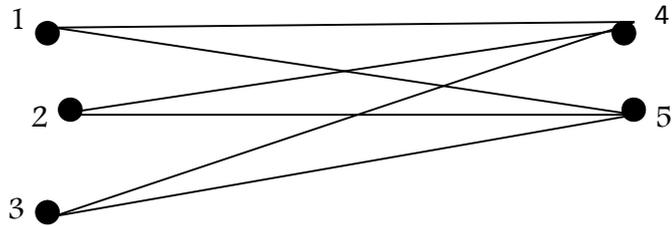
$G=(X, E)$  est biparti s'il existe deux sous ensembles  $X_1$  et  $X_2$  de X tels que :

1.  $X_1 \neq \emptyset$  et  $X_2 \neq \emptyset.$
2.  $X_1 \cup X_2 = X.$

## Chapitre II : Notions de base de la théorie des graphes.

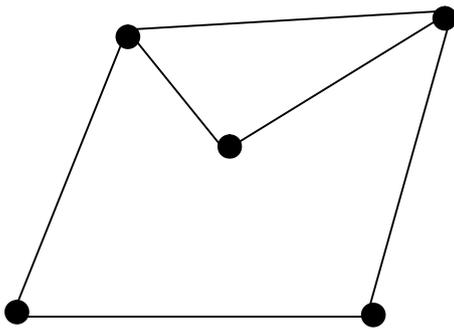
3.  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ .
4. Toute relation de  $G$  est entre un élément de  $X_1$  et un élément de  $X_2$ .

Dans l'exemple ci-dessous on a  $X_1 = \{1, 3, 5\}$  et  $X_2 = \{2, 4\}$

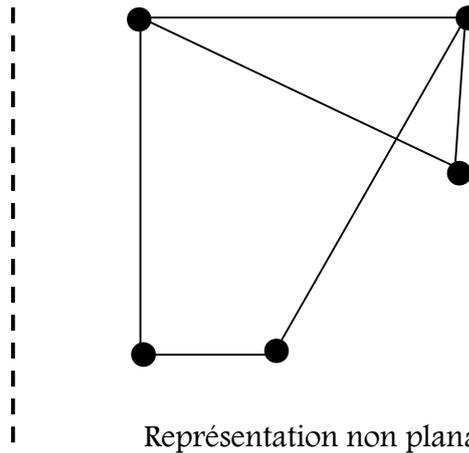


**Graphe planaire :** On dit qu'un graphe est planaire si on arrive à le dessiner sans qu'aucune arête ne coupe une autre.

### Exemple



Représentation planaire.

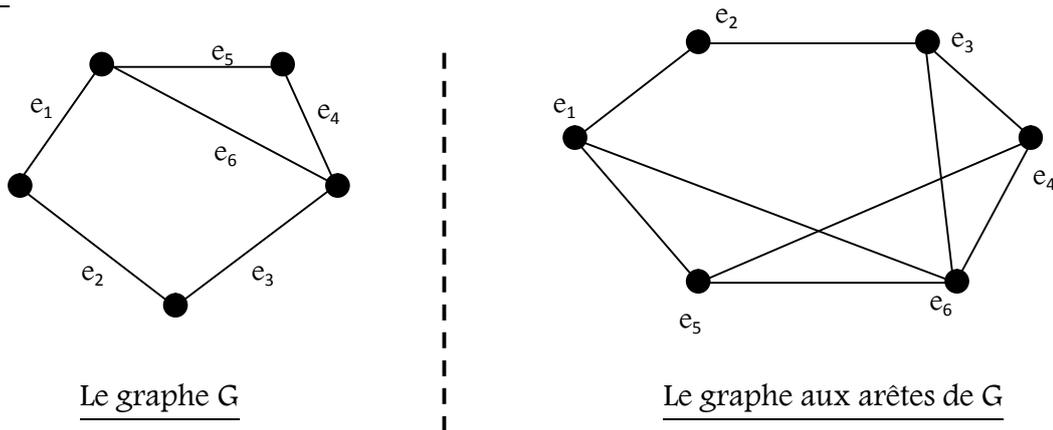


Représentation non planaire.

**Graphe aux arêtes.** Le graphe aux arêtes de  $G$  c'est le graphe  $G'(X', E')$ , où  $|X'| = |E|$ , chaque arête  $e_i$  de  $G$  on lui associe un sommet  $y_i$  de  $G'$  et deux sommets  $x, y$  de  $G'$  sont adjacents si et seulement si les arêtes qui leur correspondent dans  $G$  sont adjacentes.

## Chapitre II : Notions de base de la théorie des graphes.

Exemple :



### I.7 Connexité dans les graphes :

#### I.7.1 Chaines -Cycles:

**Chaîne** :  $G=(X, U)$ , une chaîne est une succession de sommets et d'arcs telle que :

$C=(x_1, u_1, x_2, u_2, \dots, x_k)$  où  $x_i$  et  $x_{i+1}$  sont des extrémités de  $u_i$  .

Remarque :

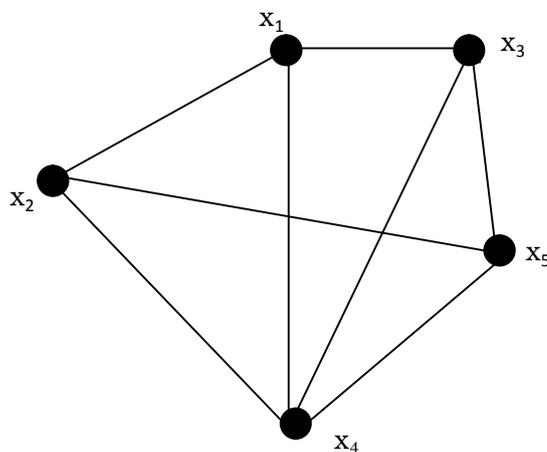
- Une chaîne est dite élémentaire si, en la parcourant, on ne rencontre pas deux fois le même sommet.
- Une chaîne est dite simple si, en la parcourant, on ne rencontre pas deux fois la même arête.

**Cycle**: un cycle est une chaîne dont les extrémités sont confondues.

Remarque :

- Un cycle est dit élémentaire si, en le parcourant, on ne rencontre pas deux fois le même sommet(en dehors de l'extrémité commune).
- Un cycle est dit simple si en le parcourant, on ne rencontre pas deux fois le même arc.

Exemple : soit le graphe G suivant :



## Chapitre II : Notions de base de la théorie des graphes.

$C = (x_2, x_1, x_3, x_4, x_5)$  est une chaîne.

$C = (x_3, x_5, x_2, x_1, x_3)$  est un cycle.

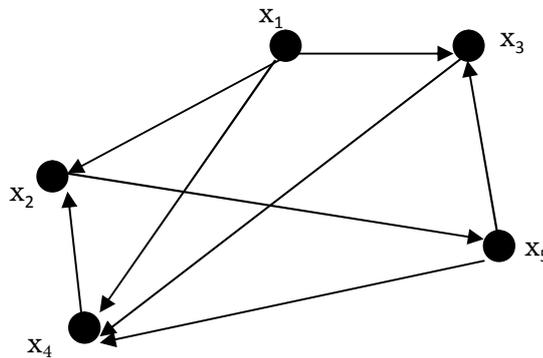
### I.7.2 Chemins-circuits :

**Chemin :**  $G=(X, U)$ , un chemin est une succession de sommets et d'arcs telle que :

$C=(x_1, u_1, x_2, u_2, \dots, x_k, u_k, x_{k+1}, \dots, x_t)$  où  $x_i=I(u_i)$  et  $x_{i+1}=T(u_i)$ .

**Circuit.** Un circuit est un chemin ayant ses extrémités confondues.

Exemple :



$C = (x_3, x_5, x_3, x_4)$  est un chemin.

$C = (x_2, x_5, x_4, x_2)$  est un circuit.

### I.7.3 Connexité :

Soit  $G=(X, U)$  un graphe et soit  $\sphericalangle$  une relation sur  $X$ .

$\sphericalangle : x, y \in X, x \sphericalangle y \Leftrightarrow "x=y$  ou bien  $\exists$  une chaîne entre  $x$  et  $y"$ .

$\sphericalangle$  est d'équivalence :

- Elle est réflexive :  $x \sphericalangle x, x=x$ .
- Elle est symétrique :  $x \sphericalangle y \Rightarrow y \sphericalangle x$ . La chaîne de  $x$  à  $y$  est la même que celle de  $y$  à  $x$ .

## Chapitre II : Notions de base de la théorie des graphes.

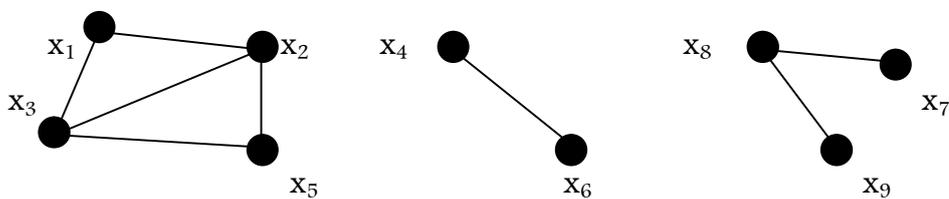
- Elle est transitive :  $x, y, z \in X, x \sim y$  et  $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ . si la chaîne  $C_1 : x \rightarrow y$  et  $C_2 : y \rightarrow z \Rightarrow C_3 : x \rightarrow z, C_3 = C_1 \cup C_2$ .

*Classes d'équivalence :*

$$x \in X, \text{cl}(x) = \{y \in X / y \sim x\}.$$

- Une classe d'équivalence de  $\sim$  est une composante connexe de  $G$ .
- Un graphe est connexe s'il n'admet qu'une seule composante connexe, il est formé d'un seul "bloc".

Exemple :



-Graphe ayant trois composantes connexes-

### I.7.4 Forte connexité :

Soit  $G=(X, U)$  un graphe et soit  $\sim$  une relation sur  $X$ .

$\sim : x, y \in X, x \sim y \Leftrightarrow$  "x=y ou bien  $\exists$  un chemin entre x et y et  $\exists$  un chemin entre y et x".

$\sim$  est d'équivalence :

- Elle est réflexive :  $x \sim x, x=x$ .

## Chapitre II : Notions de base de la théorie des graphes.

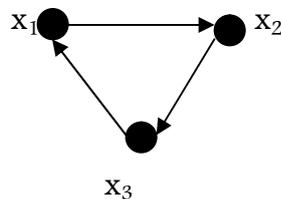
- Elle est symétrique :  $x \rightsquigarrow y \Rightarrow y \rightsquigarrow x$ .  $x \rightsquigarrow y \Rightarrow$  il existe un chemin entre  $x$  et  $y$  et un chemin entre  $y$  et  $x$ . Donc  $y \rightsquigarrow x \Rightarrow$  il existe un chemin entre  $y$  et  $x$  et un chemin entre  $x$  et  $y$ .
- Elle est transitive :  $x, y$  et  $z \in X$ ,  $x \rightsquigarrow y$  et  $y \rightsquigarrow z$  donc  $x \rightsquigarrow z$ .

*Classes d'équivalence :*

$$x \in X, \text{ cl}(x) = \{y \in X / y \rightsquigarrow x\}.$$

- Une classe d'équivalence de  $\rightsquigarrow$  est une composante fortement connexe de  $G$ .
- Un graphe est fortement connexe s'il n'admet qu'une seule composante fortement connexe.

Exemple :



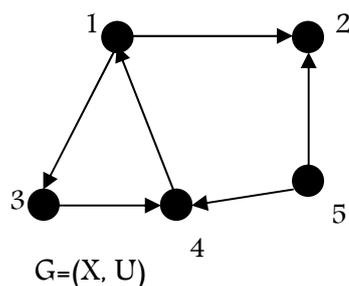
-Graphe fortement connexe-

**I.7.5 Graphe réduit :** Le graphe réduit  $G_R$  d'un graphe  $G=(X, U)$  est défini par les ensembles  $Y$  et  $F$ ,  $G_R=(Y, F)$  où :

$Y = \{\text{composantes fortement connexes de } G\}$

$F = (x, y) \in F$  s'il existe  $cfc_1$  et  $cfc_2$  dans  $G$  telles que  $x \in cfc_1$  et  $y \in cfc_2$  et  $(x, y) \in U$ .

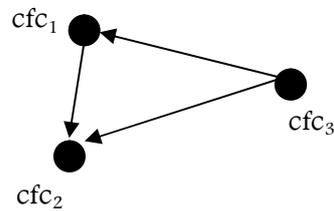
Exemple :



## Chapitre II : Notions de base de la théorie des graphes.

$cfc_1 = \{1, 3, 4\}$ ,  $cfc_2 = \{2\}$ ,  $cfc_3 = \{5\}$ .

$Y = \{cfc_1, cfc_2, cfc_3\}$



$G_R = (Y, F)$

### I.8 Arbres et arborescences :

I.8.1 Arbres : Un arbre est un graphe (non orienté) connexe et sans cycles.

Un graphe sans cycle qui n'est pas connexe est appelé une forêt (chaque composante connexe est un arbre).

Soit  $n$  le nombre de sommets d'un graphe  $G=(X, A)$  et  $m$  le nombre de ses arêtes.

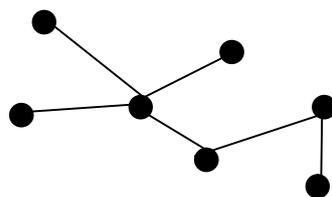
- $G$  est connexe  $\Rightarrow m \geq n-1$
- $G$  est sans cycles  $\Rightarrow m \leq n-1$

Un arbre est donc un graphe simple. On constate également que  $G=(X, A)$  est un arbre si et seulement s'il existe une chaîne et une seule entre deux sommets quelconques.

Proposition :

$G(X, E)$  est un arbre  $\Leftrightarrow |A| = |X| - 1$ .

Exemple :



-Un arbre-

I.8.2 Arbre couvrant : Etant donné un graphe quelconque  $G=(X, A)$ . Un arbre de  $G$  est un graphe Partiel connexe et sans cycle, si ce graphe partiel inclut tous les sommets du graphe  $G$  l'arbre est appelé arbre maximum ou arbre couvrant.

## Chapitre II : Notions de base de la théorie des graphes.

**I.8.3 Forêt** : Une forêt est un graphe dont chaque composante connexe est un arbre.  
Tout graphe partiel d'un arbre est une forêt.

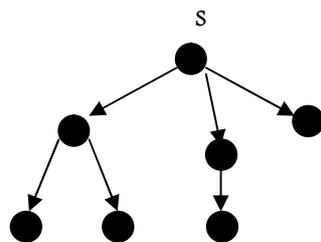
**I.8.4 Racine** : Un sommet  $s$  d'un graphe  $G$  est une racine s'il existe un chemin joignant  $s$  ( $s \in X$ ) à chaque sommet du graphe  $G$ , à l'exception du sommet lui-même.  
C'est-à-dire  $\forall x \in X - \{s\}$ , il existe un chemin de  $s$  à  $x$ .

**I.8.5 Arborescence** : Un graphe  $G=(X, A)$  avec  $|X| =n \geq 2$  sommets est une arborescence de racine  $s$  si :

- $G$  est un arbre.
- $s$  est une racine de  $G$ .

**Remarque** : Une arborescence est un arbre mais la réciproque est fausse.

Exemple :



-une arborescence-

### I.9 Pondération des graphes :

**I.9.1 Graphes à sommets pondérés** : Un graphe  $G(X, E, p)$  à sommets pondérés ou valués est le graphe  $G(X, E)$  muni d'une application  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow p(x)$$

$p(x)$  est le poids du sommet  $x$ .

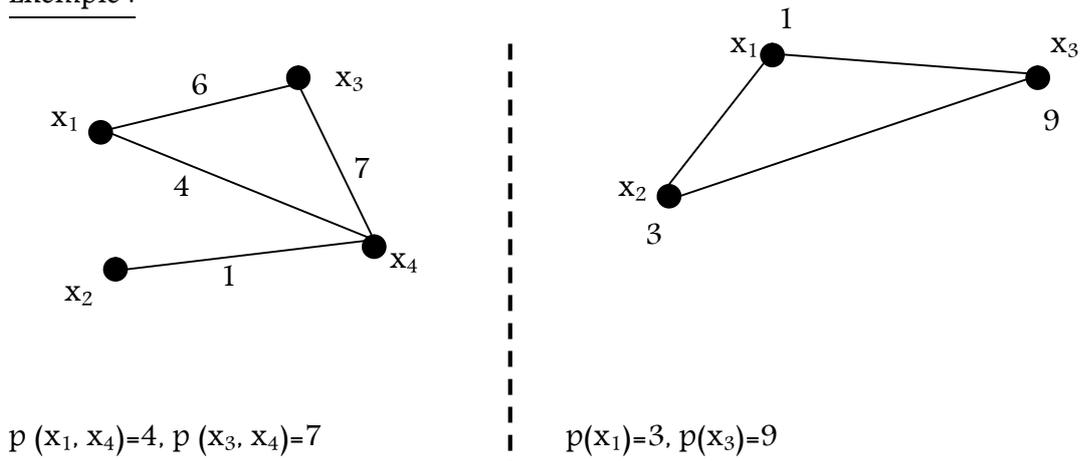
**I.9.2 Graphes à arêtes pondérées** : Un graphe  $G(X, E, p)$  à arêtes pondérées ou valuées est le graphe  $G(X, E)$  muni d'une application  $P : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$e \rightarrow p(e)$$

$p(e)$  est le poids de l'arête  $e$ .

## Chapitre II : Notions de base de la théorie des graphes.

Exemple :



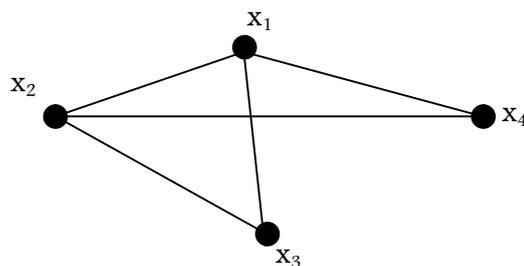
### 1.10 Représentation des graphes en machines :

L'une des façons de représenter un graphe  $G(X, E)$  en machine est la matrice d'adjacence définie par

$$M_{|X|, |X|} = (a_{ij}) \quad \begin{matrix} i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n \end{matrix}$$

$$\text{Où } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \text{ est adjacent avec } x_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple :



La matrice d'adjacence  $M$  de  $G$  est la suivante :

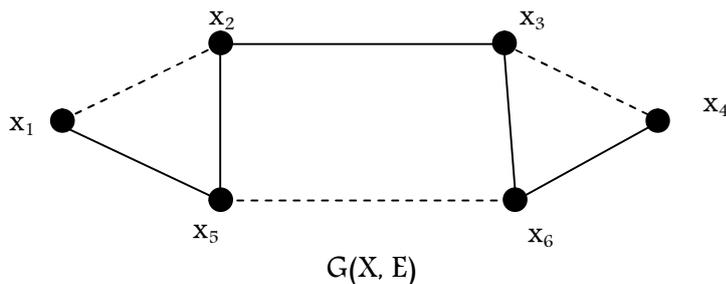
$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

## Chapitre II : Notions de base de la théorie des graphes.

I.11 Couplages dans les graphes : Un couplage  $M$  dans un graphe  $G(X, E)$  est un sous ensemble  $E' \subset E$  tel que  $\forall (e_i, e_j) \in E'^2$   $e_i$  n'est pas adjacente à  $e_j$ .

I.11.1 Couplage maximum : Un couplage maximum est un couplage ayant une cardinalité maximum.

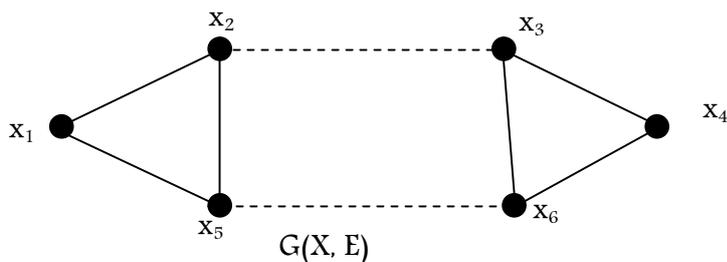
Exemple



$E' = \{(x_1, x_2), (x_5, x_6), (x_3, x_4)\}$  est un couplage maximum.

I.11.2. Couplage maximal : Un couplage maximal est un couplage  $M$  tel que  $M \cup \{e\}$  avec  $e \in E$  n'est plus un couplage.

Exemple



$E' = \{(x_2, x_3), (x_5, x_6)\}$  est un couplage maximal.

## Chapitre III : Le flot dans les réseaux.

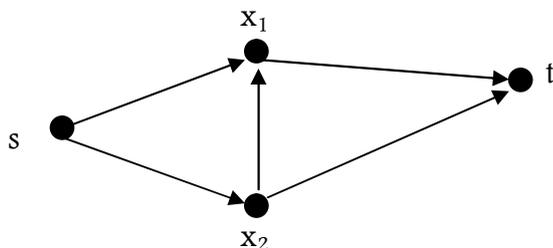
### I. Flots dans les réseaux de transport :

#### I.1. Définition d'un réseau de transport :

Un réseau de transport est un graphe sans boucles, où chaque arc est valué par un nombre positif  $c(u) \geq 0$ , appelé "capacité" de l'arc  $u$ . En outre, un tel réseau vérifie les hypothèses suivantes :

- Il existe un seul nœud qui n'a pas de prédécesseurs, tous les autres en ont au moins un. Ce nœud est appelé l'entrée du réseau, ou la source.
- Il existe également un seul nœud  $t$  qui n'a pas de successeurs, tous les autres en ont au moins un. Ce nœud est appelé la sortie du réseau, ou le puits.

Exemple :



#### I.2. Définition d'un flot :

Un flot «  $f$  » dans un réseau de transport est une fonction qui associe à chaque arc  $u$  une quantité  $f(u)$  qui représente la quantité de flux qui passe par cet arc, en provenance de la source et en destination du puits.

Un flot doit respecter la règle suivante: la somme des quantités de flux sur les arcs entrants dans un nœud (autre que  $s$  et  $t$ ) doit être égale à la somme des quantités de flux sur les arcs sortants de ce même nœud (loi de Kirchhoff).

#### I.3. Flot compatible :

Un flot «  $f$  » est compatible dans un réseau si pour tout arc  $u$ ,  $0 \leq f(u) \leq c(u)$ . Autrement dit, pour chaque arc, le flux qui le traverse ne doit pas dépasser la capacité de l'arc.

#### I.4. Flot complet :

Un flot «  $f$  » est complet si pour tout chemin allant de la source au puits, il y a au moins un arc saturé, c'est-à-dire que le flot qui le traverse est égal à la capacité de l'arc.

## Chapitre III : Le flot dans les réseaux.

$$f(u) = c(u).$$

### II Le problème du flot maximum dans un réseau de transport :

#### II.1 Définitions :

- **Une coupe** : c'est une partition de l'ensemble des sommets en 2 parties disjointes, l'une contenant la source et l'autre le puits.
- **la capacité d'une coupe** : c'est la somme des capacités des arcs de la coupe.
- **Coupe minimum** : c'est la coupe de capacité minimale.
- Un arc  $u$  est **saturé** par un flot  $f$  si la valeur du flot sur l'arc égale à sa capacité :  $F(u) = c(u)$ . Un **chemin** est saturé si l'un de ses arcs est saturé.
- **La capacité résiduelle** d'un arc  $u$  est la quantité  $c(u) - F(u)$  de flot pouvant encore transiter par lui. La capacité résiduelle d'un chemin est la plus petite capacité résiduelle de ses arcs
- **Contrainte de capacité** :  $f(u) \leq c(u)$ . • **Conservation du flot** : pour tout sommet autre que  $s$  et  $t$ , la somme des flots sur les arcs entrants et la somme des flots sur les arcs sortants sont égales.

#### II.2 Formulation du problème :

Le problème du flot maximum consiste à trouver quelle est la quantité maximum de flot qui peut circuler de la source au puits dans un graphe. Quelque fois le problème répond simplement à la question de trouver la valeur de ce flot. Le problème du flot maximum peut être vu comme un cas particulier de plusieurs autres problèmes de flots dans les réseaux.

#### II.3 Algorithmes de résolution :

Étant donné un graphe orienté  $G = (X, U)$ , où chaque arête a une capacité  $c(u)$ , on cherche un flot maximum «  $f$  » depuis la source  $s$  vers le puits  $t$ , sous contraintes de capacité. Il y a plusieurs algorithmes de résolution du problème.

- **Algorithme de Ford & Fulkerson**. Tant qu'il existe un chemin entre la source et le puits dans le graphe résiduel, envoyer le minimum des capacités résiduelles sur ce chemin.
- **Algorithme d'Edmonds-Karp** : Une spécialisation de Ford & Fulkerson, trouver un chemin augmentant avec une recherche en largeur d'abord.
- **Algorithme de Dinic**.
- **Algorithme de flot bloquant de Dinitz**.
- **Algorithme de Goldberg-tarjan**.
- **Algorithme de Malhotra-kumar-maheshwari(MKM)**

Nous nous intéressons à l'algorithme de FORD & FULKERSON.

## Chapitre III : Le flot dans les réseaux.

### II.4 Algorithme de Ford & Fulkerson :

Algorithme de FORD & FULKERSON, du nom de ses auteurs L.R.FORD et D.R.FULKERSON, consiste en une procédure itérative qui permet de déterminer un flot de valeur maximale à partir d'un flot constaté. Il s'agit donc d'un problème d'optimisation classique dans le domaine de la recherche opérationnelle.

L'idée de l'algorithme est de faire passer un flot compatible dans le réseau, le plus évident est le flot nul  $f(u)=0$ , en suite, on cherche une chaîne reliant la source au puits telle que son flot peut être augmenté. Si on n'en trouve pas, le problème est résolu. Sinon, on augmente le flot sur cette chaîne. Ensuite, on recommence à chercher une chaîne augmentante et ainsi de suite. Une chaîne augmentante (une chaîne pour laquelle le flot peut être augmenté) est une chaîne pour laquelle les arcs dans le sens direct n'ont pas atteint leur limite maximum et les arcs en sens indirect ont un flot non nul qui les traverse.

L'augmentation de flot maximum pour une chaîne est le minimum des écarts entre le flot courant et le flot maximal pour les arcs directs ou le flot courant pour les arcs indirect.

Autrement dit, une chaîne  $C$  est augmentante si:

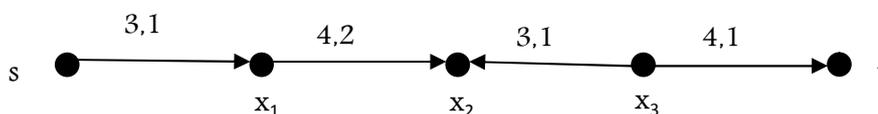
- pour tout arc  $u$  direct de  $C$ ,  $u \in C^+$ ,  $f(u) < c(u)$ ,
- pour tout arc  $u$  indirect de  $C$ ,  $u \in C^-$ ,  $f(u) > 0$ .

Le flot sur cette chaîne  $C$  peut être augmenté de:

$$\varepsilon = \text{Min} \begin{cases} c(u)-f(u) / u \in C^+, \\ \cup \\ f(u) / u \in C^- . \end{cases}$$

Pour améliorer le flot, on ajoute  $\varepsilon$  au flot des arcs de  $C^+$ , c'est-à-dire les arcs directs dans la chaîne, et on le retranche au flot des arcs de  $C^-$ , c'est-à-dire les arcs indirects dans la chaîne.

Exemple :



Les arcs au sens direct  $C^+ = \{(s, x_1), (x_1, x_2), (x_3, t)\}$  n'ont pas atteint leur limite  $f(u) < c(u)$ .

Les arcs dans le sens indirect ont un flot non nul d'où la chaîne est augmentante.

Le flot de cette chaîne peut être augmenté de cette valeur :

## Chapitre III : Le flot dans les réseaux.

$$\varepsilon = \min [\{c(u) - f(u) / u \in C^+\} ; \{f(u) / u \in C^-\}]$$

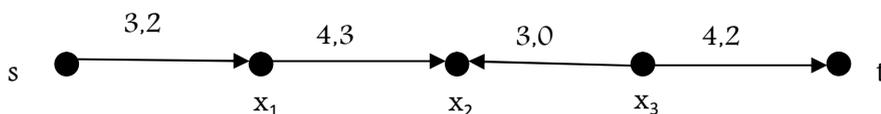
$$\varepsilon = \min [3-1, 4-2, 3-1, 4-1] = \min [2, 2, 2, 1]$$

$$\varepsilon = 1.$$

On augmentera le flot de cette chaîne de 1, ce qui signifie :

- augmenter de 1 le flux entre s et x1.
- augmenter de 1 le flux entre x1 et x2.
- diminuer de 1 le flux entre x3 et x2.
- augmenter de 1 le flux entre x3 et t.

On obtient alors le nouveau flot sur la chaîne :



### II.4.1 Algorithme général :

**Données :** un graphe valué  $G=(x, u, c)$  ;  $f$  est un flot nul.

**Résultat :** un flot  $f$  maximum.

(0) **Initialisation :** marquer un sommet  $s$  et poser :  $C^+ = \emptyset$  ;  $C^- = \emptyset$  ;  $f^k = 0$  ;  $a = \{s\}$  ;  $k := 0$ .

(1) Soit  $A$  l'ensemble des sommets marqué et soit  $x$  un sommet de  $A$  :

- Marquer le sommet  $y$  successeur de  $x$  tel que  $f(x, y) < c(x, y)$ .

On pose :  $C^+ := C^+ \cup \{(x, y)\}$  ;  $A := A \cup \{y\}$ .

- Marquer le sommet  $y$  prédécesseur de  $x$ , tel que  $f(y, x) > 0$ .

On pose :  $C^- := C^- \cup \{(y, x)\}$  ;  $A := A \cup \{y\}$ .

Quand on ne peut plus marquer, deux cas se présentent :

1.  $t$  est marqué aller en (2) ;

2.  $t$  n'est pas marqué, terminé le flot est maximum.

## Chapitre III : Le flot dans les réseaux.

(2) On a obtenu une chaîne augmentante  $C = C^+ \cup C^-$  de  $s$  à  $t$ .

Pour améliorer le flot on calcule :

- $\varepsilon_1 = \min [c(u) - f(u) ; u \in C^+]$
- $\varepsilon_2 = \min [f(u) ; u \in C^-]$ .

D'où  $\varepsilon = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ .

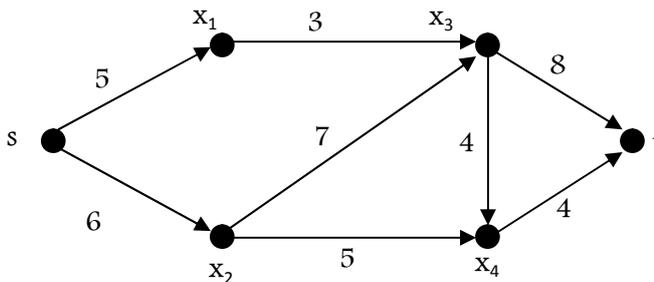
On définit le nouveau flot :

$$f^{k+1}(u) = \begin{cases} f^k(u) + \varepsilon & \text{si } u \in C^+ ; \\ f^k(u) - \varepsilon & \text{si } u \in C^- ; \\ f^k(u) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Effacer les marques sauf en  $s$  et aller en (1).

### II.4.2 Exemple d'application :

Une usine de gaz  $S$  alimente une ville  $T$ , par l'intermédiaire d'un réseau de distribution ci-dessous. Les valeurs associées aux arcs représentent les capacités de transport.



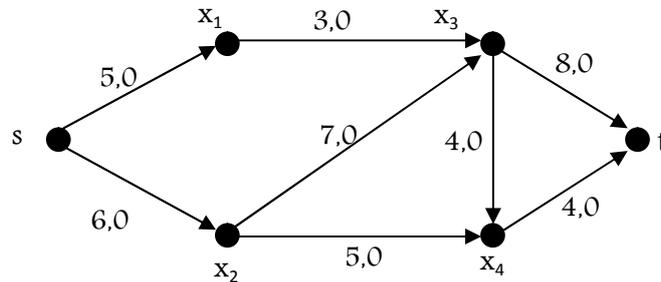
On voudrait connaître la quantité maximale que peut écouler l'usine. Ce qui revient à chercher un flot maximum sur le réseau.

#### ➤ Initialisation

On marque l'entrée  $s$  du réseau  $R$  par le signe  $+$ .

On pose  $A = \{s\}$  ;  $C^+ \cup C^- = \emptyset$  ;  $f^k = 0$  ;  $k = 0$  ( $k$  : nombre d'itérations).

## Chapitre III : Le flot dans les réseaux.



### ➤ Itération 1 .

- On marque le sommet  $x_1$  successeur de  $s$  par + ; car

$f^0(s, x_1) = 0 < c(s, x_1) = 5$ . On pose  $C^+ = C^+ \cup \{(s, x_1)\}$  ;  $A = A \cup \{x_1\} = \{s, x_1\}$  ;

- On marque le sommet  $x_3$  successeur de  $x_1$  par + ; car

$f^0(x_1, x_3) = 0 < c(x_1, x_3) = 3$ .

On pose  $C^+ = C^+ \cup \{(x_1, x_3)\} = \{(s, x_1), (x_1, x_3)\}$  ;  $A = A \cup \{x_3\} = \{s, x_1, x_3\}$  ;

- On marque le sommet  $t$  successeur de  $x_3$  par + ; car

$f^0(x_3, t) = 0 < c(x_3, t) = 8$ .

On pose  $C^+ = C^+ \cup \{(x_3, t)\} = \{(s, x_1), (x_1, x_3), (x_3, t)\}$  ;  $A = A \cup \{t\} = \{s, x_1, x_3, t\}$ .

Le sommet  $t$  étant marqué, on arrête. On obtient donc la chaîne augmentante

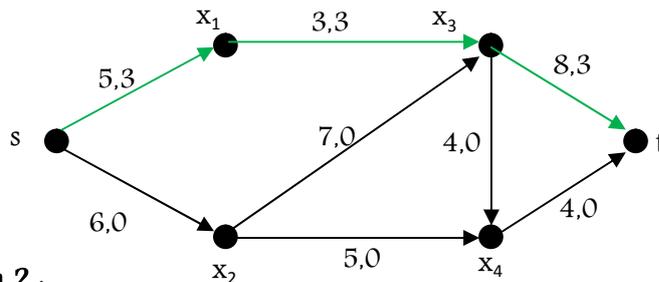
$$C = C^+ \cup C^- = C^+ = \{s, x_1, x_3, t\} \text{ reliant le sommet } s \text{ et } t.$$

On calcule  $\varepsilon$  pour améliorer le flot :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \min [c(u) - f^0(u) ; u \in C^+] \\ &= \min [c(s, x_1) - f^0(s, x_1) ; c(x_1, x_3) - f^0(x_1, x_3) ; c(x_3, t) - f^0(x_3, t)] \\ &= \min [5 - 0 ; 3 - 0 ; 8 - 0] = 3 \end{aligned}$$

On améliore ainsi le flot  $f^0$  pour obtenir un nouveau  $f^1$ .

## Chapitre III : Le flot dans les réseaux.



### ➤ Itération 2 :

- On marque le sommet  $x_1$  successeur de  $s$  par + ; car

$$f^1(s, x_1) = 3 < c(s, x_1) = 5.$$

On pose  $C^+ = C^+ \cup \{(s, x_1)\}$ ;  $A = A \cup \{x_1\} = \{s, x_1\}$ ;

Le sommet  $x_3$  est le successeur de  $x_1$ , mais l'arc  $(x_1, x_3)$  est saturé  $f^1(x_1, x_3) = c(x_1, x_3) = 3$ .

Donc, on ne peut pas marquer  $x_3$  (on abandonne ce marquage).

- On marque le sommet  $x_2$  successeur de  $s$  par + ; car

$$f^1(s, x_2) = 0 < c(s, x_2) = 6$$

On pose  $C^+ = C^+ \cup \{(s, x_2)\} = \{(s, x_2)\}$ ;  $A = A \cup \{x_2\} = \{s, x_2\}$ .

- On marque le sommet  $x_3$  successeur de  $x_2$  par + ; car

$$f^1(x_2, x_3) = 0 < c(x_2, x_3) = 7.$$

On pose  $C^+ = C^+ \cup \{(x_2, x_3)\} = \{(s, x_2), (x_2, x_3)\}$ ;  $A = A \cup \{x_3\} = \{s, x_2, x_3\}$ .

- On marque le sommet  $x_4$  successeur de  $x_3$  par + ; car

$$f^1(x_3, x_4) = 0 < c(x_3, x_4) = 4.$$

On pose  $C^+ = C^+ \cup \{(x_3, x_4)\} = \{(s, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4)\}$ ;  $A = A \cup \{x_4\} = \{s, x_2, x_3, x_4\}$ .

- On marque le sommet  $t$  successeur de  $x_4$  par + ; car :

$$f^1(x_4, t) = 0 < c(x_4, t) = 4.$$

On pose  $C^+ = C^+ \cup \{(x_4, t)\} = \{(s, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, t)\}$ ;  $A = A \cup \{t\} = \{s, x_2, x_3, x_4, t\}$ .

Le sommet  $t$  est marqué, On arrête le marquage. La chaîne obtenue est augmentante :

$$C = C^+ \cup C^- = C^+ = \{s, x_2, x_3, x_4, t\}.$$

## Chapitre III : Le flot dans les réseaux.

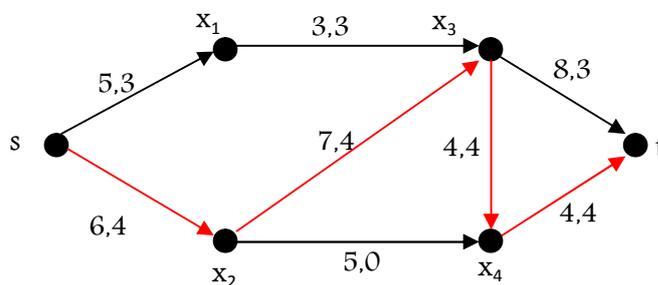
On calcule :

$$\varepsilon = \min [c(u) - f(u) ; u \in C^+]$$

$$= \min [c(s, x_2) - f^1(s, x_2); c(x_2, x_3) - f^1(x_2, x_3); c(x_3, x_4) - f^1(x_3, x_4); c(x_4, t) - f^1(x_4, t)]$$

$$= \min [6 - 0; 7 - 0; 4 - 0, 4 - 0] = 4.$$

On améliore ainsi le flot  $f^1$  pour obtenir un nouveau flot  $f^2$  en ajoutant la quantité  $\varepsilon$  aux flux des arcs de  $C^+$ . Les flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne, restent inchangés.



### ➤ Itération 3 :

- On marque le sommet  $x_2$  successeur de  $s$  par + ; car

$$f^2(s, x_2) = 4 < c(s, x_2) = 6.$$

$$\text{On pose } C^+ = C^+ \cup \{(s, x_2)\}; A = A \cup \{x_2\} = \{s, x_2\};$$

- On marque le sommet  $x_3$  successeur de  $x_2$  par + ; car

$$f^0(x_2, x_3) = 0 < c(x_2, x_3) = 7.$$

$$\text{On pose } C^+ = C^+ \cup \{(x_2, x_3)\} = \{(s, x_2), (x_2, x_3)\}; A = A \cup \{x_3\} = \{s, x_2, x_3\};$$

- On marque le sommet  $t$  successeur de  $x_3$  par + ; car :

$$f^1(x_3, t) = 3 < c(x_3, t) = 8.$$

$$\text{On pose } C^+ = C^+ \cup \{(x_3, t)\} = \{(s, x_2), (x_2, x_3), (x_3, t)\}; A = A \cup \{t\} = \{s, x_2, x_3, t\}.$$

Le sommet  $t$  est marqué, la procédure s'arrête. La chaîne obtenue est augmentante :

### Chapitre III : Le flot dans les réseaux.

$$C = C^+ \cup C^- = C^+ = \{s, x_2, x_3, t\}.$$

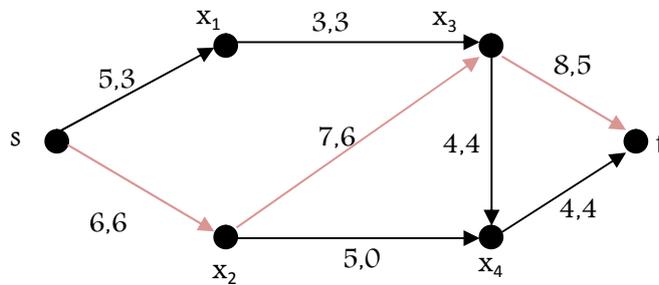
On calcule :

$$\varepsilon = \min [c(u) - f(u) ; u \in C^+]$$

$$= \min [c(s, x_2) - f^2(s, x_2); c(x_2, x_4) - f^2(x_2, x_4); c(x_3, t) - f^2(x_3, t)]$$

$$= \min [6 - 4; 7 - 4; 8 - 3] = 2$$

On améliore ainsi le flot  $f^2$  pour obtenir un nouveau flot  $f^3$ , en ajoutant la quantité  $\varepsilon$  au flot des arcs de  $C^+$  et en la retranchant au flot des arcs de  $C^-$ . Les flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne, restent inchangés.



On efface les marques sauf en t.

#### ➤ Itération 4 :

Dans le réseau R, on ne peut pas marquer le sommet. Donc le flot obtenu est maximum, on le présente comme suit :

arcs	(s, x <sub>1</sub> )	(s, x <sub>2</sub> )	(x <sub>1</sub> , x <sub>3</sub> )	(x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> )	(x <sub>2</sub> , x <sub>4</sub> )	(x <sub>3</sub> , x <sub>4</sub> )	(x <sub>3</sub> , t)	(x <sub>4</sub> , t)
Flux	3	6	3	6	0	4	5	4

La valeur du flot maximum est égale à celle des flux sortant de la source (de s), ou à la somme des valeurs des flux entrant au puits (à t).

$$\text{C'est-à-dire : } F_{\max} = \sum (f(s, x) / x \in \Gamma^+(s)) = \sum (f(x, t) / x \in \Gamma^-(t))$$

La production maximale que peut écouler l'usine s vers la ville t :

$$F_{\max} = f^3(x_3, t) + f^3(x_4, t) = 5 + 4 = 9$$

Ou

### Chapitre III : Le flot dans les réseaux.

$$F_{\max} = f^3(s, x_1) + f^3(s, x_2) = 3+6= 9.$$

#### Remarque :

Lorsque plusieurs flots de valeur maximale sont possibles, il est intéressant d'en déterminer un flot dont le coût est minimal. Dans ce type de problèmes, on considère des réseaux de transport dont les arcs ont deux valeurs : une capacité et un coût. Le problème de flot à cout minimal consiste à acheminer un flot de débit donné « f » de s à t de façon de minimiser le coût, « f » peut être le débit d'un flot maximal. On a alors problème du flot maximum à coût minimal.

### I. Introduction :

Les informations recueillies au sein de la direction de l'hydraulique de la wilaya nous ont permis d'établir les tableaux et les réseaux qui représentent les différents apports quotidiens en eau potable du système Freha–Azazga .

L'objectif de notre application est :

- L'analyse de la situation du système d'alimentation en eau potable des villes concernées ;
- La recherche et la proposition de solutions d'optimisation à l'aide de l'algorithme de Ford&Fulkerson permettant d'améliorer un peu plus la situation hydraulique.

### II. Données du Système de Freha–Azazga :

- Source d'alimentation : Le système Freha–Azazga est alimenté par le barrage de Taksebt qui est lié avec 4 stations de pompage par des conduites dont les capacités sont citées dans le tableau ci-dessous :

Station de pompage	Conduite liant la station avec la source	Capacité de la conduite l/s
SPTI 5	DN 800	802
SPTI 1	DN 700	584
SPTI 2	DN 600	352
SPTI 3	DN 400	173

- Stations de pompage : Les stations de pompage et les villes alimentées par chacune d'elles sont citées dans le tableau suivant :

Station de pompage	Ville alimentée par la station	Demande en eau potable l/s	Capacité d'alimentation par la station de pompage l/s
SPTI 5	Irdjene	87	94
	Zone industrielle de Tizi-ouzou	49	50
	Ouagnoun	66	64
	Tamda	53	50
SPTI 1	Tizi-Rached	85	93
	Timizart/Abizar	65	65
	Mekla	77	74
	Kahra	59	50
SPTI 2	Zone industrielle d'Azazga	56	53
	Freha	111	126
SPTI 5	Tizi-bouchen	71	69
	Azazga	109	104

### III. Modélisation du problème :

Les constituants du réseau  $R = (X, U, C)$  représentant le système hydraulique en question sont :

- L'ensemble de sommets X : Voici les éléments de l'ensemble X et la désignation de chaque sommet dans le tableau suivant :

Le sommet	La désignation
s	Le barrage de Taksebt
p <sub>1</sub>	SPTI 5
p <sub>2</sub>	SPTI 1
p <sub>3</sub>	SPTI 2
p <sub>4</sub>	SPTI 3
x <sub>1</sub>	Irdjen
x <sub>2</sub>	La zone industrielle de Tizi-Ouzou
x <sub>3</sub>	Ouagnoun

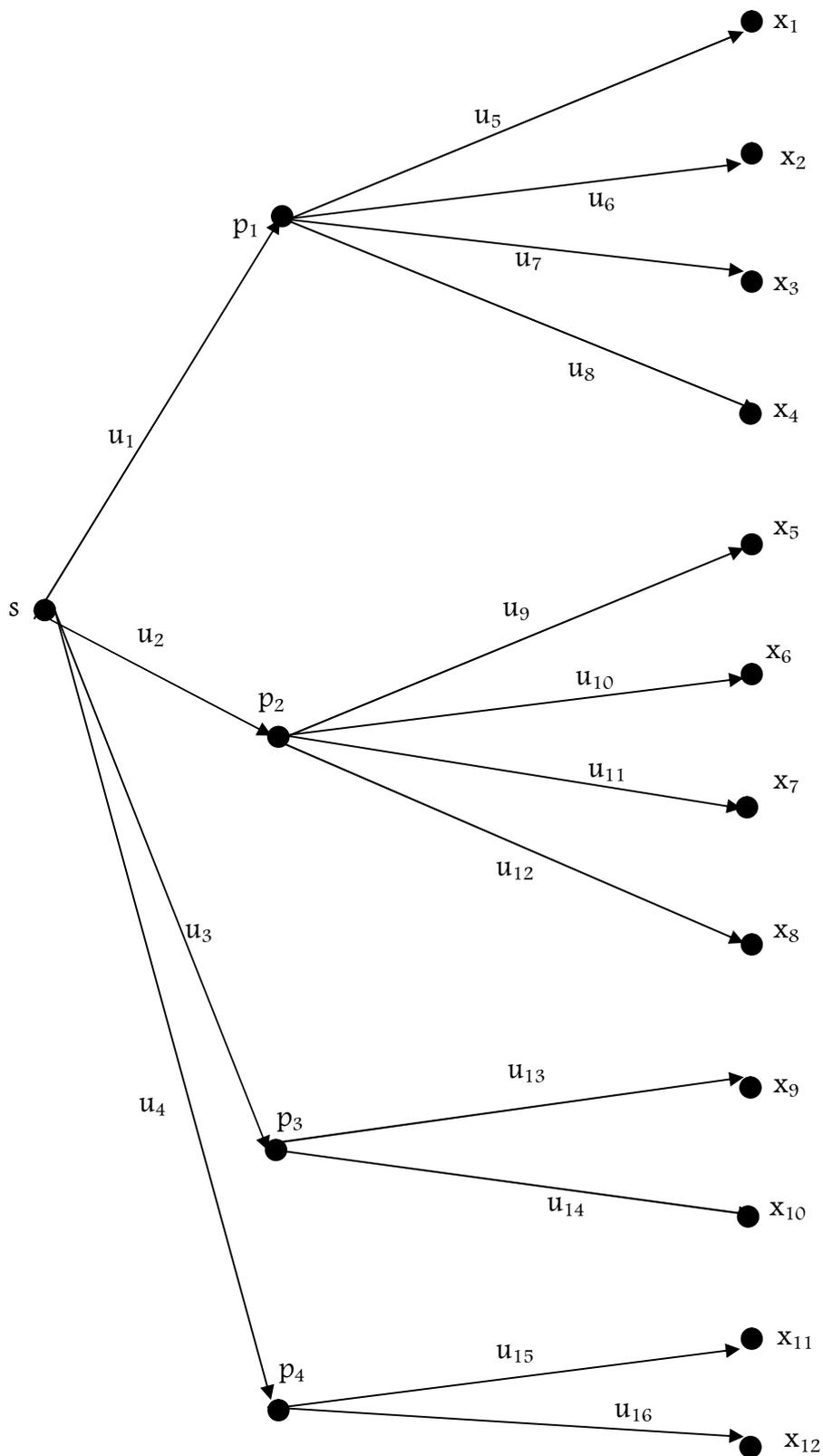
## Chapitre IV : Application sur le réseau hydraulique du système Freha–Azazga

$x_4$	Tamda
$x_5$	Tizi–Rached
$x_6$	Timizart/Abizar
$x_7$	Mekla
$x_8$	Kahra
$x_9$	Zone industrielle d’Azazga
$x_{10}$	Freha
$x_{11}$	Tizi–Bouchen
$x_{12}$	Azazga

- L'ensemble d'arcs U : Les éléments de l'ensemble U et la désignation de chaque arc sont cités dans le tableau suivant :

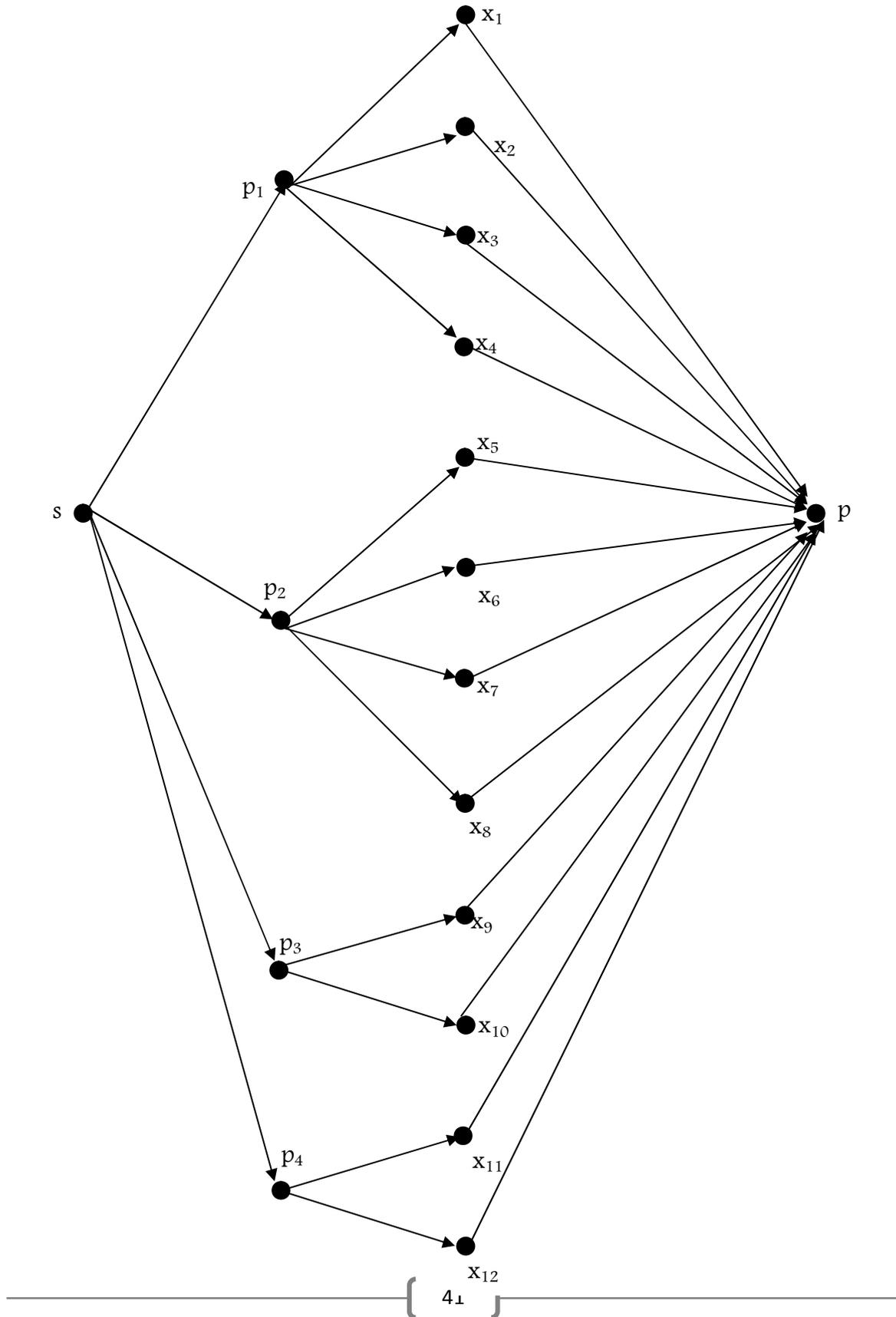
L'arc u	La désignation	La capacité de l'arc u l/s
$u_1$	(s, $p_1$ )	802
$u_2$	(s, $p_2$ )	584
$u_3$	(s, $p_3$ )	352
$u_4$	(s, $p_4$ )	173
$u_5$	( $p_1$ , $x_1$ )	94
$u_6$	( $p_1$ , $x_2$ )	50
$u_7$	( $p_1$ , $x_3$ )	64
$u_8$	( $p_1$ , $x_4$ )	50
$u_9$	( $p_2$ , $x_5$ )	93
$u_{10}$	( $p_2$ , $x_6$ )	65
$u_{11}$	( $p_2$ , $x_7$ )	74
$u_{12}$	( $p_2$ , $x_8$ )	50
$u_{13}$	( $p_3$ , $x_9$ )	53
$u_{14}$	( $p_3$ , $x_{10}$ )	126
$u_{15}$	( $p_4$ , $x_{11}$ )	69
$u_{16}$	( $p_4$ , $x_{12}$ )	104

Le réseau R sera représenté comme suit :



## Chapitre IV : Application sur le réseau hydraulique du système Freha-Azazga

Le réseau R admet 12 puits, il est donc nécessaire de rajouter un sommet p comme représenté dans la figure suivante :



## Chapitre IV : Application sur le réseau hydraulique du système Freha–Azazga

Les capacités des arcs  $u_{17}, u_{18}, \dots, u_{27}$  rentrant dans  $p$  sont respectivement égales aux demandes des villes  $x_1, x_2, \dots, x_{12}$ .

L'arc $u$	désignation de l'arc	Capacité de l'arc l/s
$u_{17}$	$(x_1, p)$	87
$u_{18}$	$(x_2, p)$	49
$u_{19}$	$(x_3, p)$	66
$u_{20}$	$(x_4, p)$	53
$u_{21}$	$(x_5, p)$	85
$u_{22}$	$(x_6, p)$	65
$u_{23}$	$(x_7, p)$	77
$u_{24}$	$(x_8, p)$	59
$u_{25}$	$(x_9, p)$	56
$u_{26}$	$(x_{10}, p)$	111
$u_{27}$	$(x_{11}, p)$	71
$u_{28}$	$(x_{12}, p)$	109

### III. Résolution du problème :

On applique l'algorithme de Ford et Fulkerson pour la recherche d'un flot maximum ..

➤ **Initialisation :**

On marque le sommet  $s$  (entrée du réseau) par le signe +.

On pose :  $A = \{s\}$  ;  $C^+ \cup C^- = \emptyset$  et  $f^k = 0$  ; un flot défini sur le réseau.  $k=0$ .

➤ **Itération 1 :**

Dans le réseau, on suit la procédure de marquage suivante :

- On marque le sommet  $p_1$  d'un +, car il est successeur de  $s$  et  $f^0(u_1) = 0 < c(u_1) = 802$   
On pose :  $C^+ = C^+ \cup \{u_1\} = \{u_1\}$  ;  $A = A \cup \{p_1\} = \{s, p_1\}$  .
- On marque le sommet  $x_1$  d'un +, car il est successeur de  $p_1$  et

## Chapitre IV : Application sur le réseau hydraulique du système Freha–Azazga

$$f^0(u_5)=0 < c(u_5)=94$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{U_5\} = \{u_1, u_5\} ; A = AU \{x_1\} = \{s, p_1, x_1\}$$

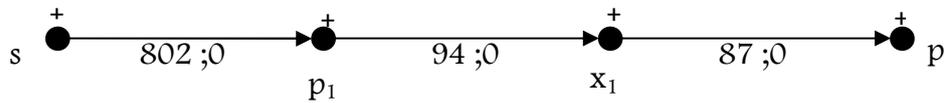
- On marque le sommet p d'un +, car il est successeur de  $x_1$  et

$$f^0(u_{17})=0 < c(U_{17})=87$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_{17}\} = \{u_1, u_5, u_{17}\} ; A = AU \{p\} = \{s, p_1, x_1, p\} .$$

Le sommet p étant marqué, la procédure s'arrête. On obtient la chaîne augmentante

$C = C^+ \cup C^- = \{s, p_1, x_1, p\}$ , qui relie les deux sommets s et p.



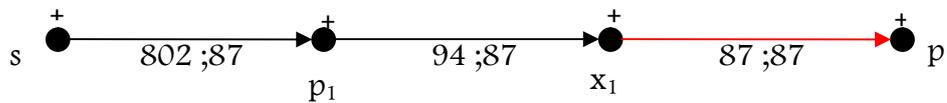
On calcule :

$$\varepsilon_1 = \min [c(u) - f(u) ; u \in C^+]$$

$$= \min [c(u_1) - f^0(u_1) ; c(u_5) - f^0(u_5) ; c(u_{17}) - f^0(u_{17})]$$

$$= \min [802 - 0 ; 94 - 0 ; 87 - 0] = 87.$$

On améliore ainsi le flot  $f^0$  pour obtenir un nouveau flot  $f^1$ , en ajoutant la quantité  $\varepsilon_1$  aux flux des arcs de  $C^+$ . les flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne restent inchangés.



On efface les marques sauf en s.

### ➤ Itération 2 :

- On marque le sommet  $p_1$  d'un +, car il est successeur de s et

$$f^1(u_1)=87 < c(u_1)=802$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_1\} = \{u_1\} ; A = AU \{p_1\} = \{s, p_1\} .$$

- On marque le sommet  $x_1$  d'un +, car il est successeur de  $p_1$  et

## Chapitre IV : Application sur le réseau hydraulique du système Freha–Azazga

$$f^1(u_5) = 87 < c(u_5) = 94$$

On pose :  $C^+ = C^+ \cup \{u_5\} = \{u_1, u_5\}$  ;  $A = AU \{x_1\} = \{s, p_1, x_1\}$ .

Le sommet p est successeur de  $x_1$ , mais l'arc  $u_{17}$  est saturé  $f^0(u_{17}) = c(u_{17}) = 87$ . Donc on ne peut pas marquer p. pour cela on abandonne ce marquage.

- On marque le sommet  $p_1$  d'un +, car il est successeur de s et

$$f^1(u_1) = 87 < c(u_1) = 802$$

On pose :  $C^+ = C^+ \cup \{u_1\} = \{u_1\}$  ;  $A = AU \{p_1\} = \{s, p_1\}$ .

- On marque le sommet  $x_2$  d'un +, car il est successeur de  $p_1$  et

$$f^1(u_6) = 0 < c(u_6) = 50$$

On pose :  $C^+ = C^+ \cup \{u_6\} = \{u_1, u_6\}$  ;  $A = AU \{x_2\} = \{s, p_1, x_2\}$ .

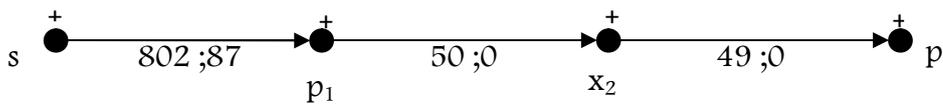
- On marque le sommet p d'un +, car il est successeur de  $x_2$  et

$$f^1(u_{18}) = 0 < c(u_{18}) = 49$$

On pose :  $C^+ = C^+ \cup \{u_{18}\} = \{u_1, u_6, u_{18}\}$  ;  $A = AU \{p\} = \{s, p_1, x_2, p\}$ .

Le sommet p étant marqué, la procédure s'arrête. On obtient la chaîne augmentante

$C = C^+ \cup C^- = \{s, p_1, x_2, p\}$ , qui relie les deux sommets s et p.



On calcule :

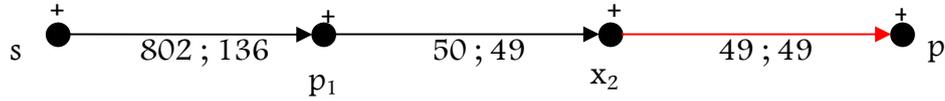
$$\varepsilon_1 = \min [c(u) - f(u); u \in C^+]$$

$$= \min [c(u_1) - f^1(u_1); c(u_6) - f^1(u_6); c(u_{18}) - f^1(u_{18})]$$

$$= \min [802 - 87; 50 - 0; 49 - 0] = 49.$$

## Chapitre IV : Application sur le réseau hydraulique du système Freha–Azazga

On améliore ainsi le flot  $f^1$  pour obtenir un nouveau flot  $f^2$ , en ajoutant la quantité  $\varepsilon_1$  aux flux des arcs de  $C^+$ . Les flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne restent inchangés.



On efface les marques sauf en  $s$ .

### ➤ Itération 3 .

- On marque le sommet  $p_1$  d'un +, car il est successeur de  $s$  et

$$f^2(u_1) = 136 < c(u_1) = 802$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_1\} = \{u_1\} ; A = A \cup \{p_1\} = \{s, p_1\}.$$

- On marque le sommet  $x_2$  d'un +, car il est successeur de  $p_1$  et

$$f^2(u_6) = 49 < c(u_6) = 50$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_6\} = \{u_1, u_6\} ; A = A \cup \{x_2\} = \{s, p_1, x_2\}.$$

Le sommet  $p$  est successeur de  $x_2$ , mais l'arc  $u_{18}$  est saturé  $f^1(u_{18}) = c(u_{18}) = 49$ . Donc on ne peut pas marquer  $p$ . pour cela on abandonne ce marquage.

- On marque le sommet  $p_1$  d'un +, car il est successeur de  $s$  et

$$f^2(u_1) = 136 < c(u_1) = 802$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_1\} = \{u_1\} ; A = A \cup \{p_1\} = \{s, p_1\}.$$

- On marque le sommet  $x_3$  d'un +, car il est successeur de  $p_1$  et

$$f^2(u_7) = 0 < c(u_7) = 64$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_7\} = \{u_1, u_7\} ; A = A \cup \{x_3\} = \{s, p_1, x_3\}.$$

- On marque le sommet  $p$  d'un +, car il est successeur de  $x_3$  et

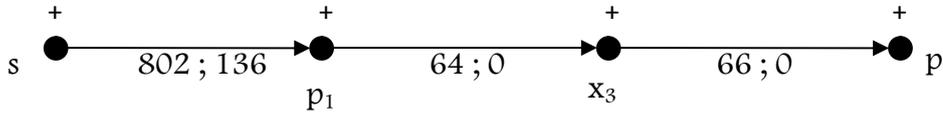
$$f^2(u_{19}) = 0 < c(u_{19}) = 66$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_{18}\} = \{u_1, u_7, u_{19}\} ; A = A \cup \{p\} = \{s, p_1, x_3, p\}.$$

## Chapitre IV : Application sur le réseau hydraulique du système Freha–Azazga

Le sommet p étant marqué, la procédure s'arrête. On obtient la chaîne augmentante

$C=C^+ \cup C^- = \{s, p_1, x_3, p\}$ , qui relie les deux sommets s et p.



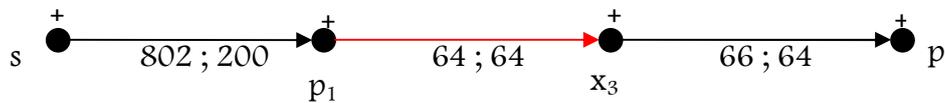
On calcule :

$$\varepsilon_1 = \min [c(u) - f(u); u \in C^+]$$

$$= \min [c(u_1) - f^2(u_1); c(u_7) - f^2(u_7); c(u_{19}) - f(u_{19})]$$

$$= \min [802 - 136; 64 - 0; 66 - 0] = 64.$$

On améliore ainsi le flot  $f^2$  pour obtenir un nouveau flot  $f^3$ , en ajoutant la quantité  $\varepsilon_1$  aux flux des arcs de  $C^+$ . Les flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne restent inchangés.



On efface les marques sauf en s.

### ➤ Itération 4 :

- On marque le sommet  $p_1$  d'un +, car il est successeur de s et

$$f^3(u_1) = 200 < c(u_1) = 802$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_1\} = \{u_1\}; A = A \cup \{p_1\} = \{s, p_1\}.$$

- On marque le sommet  $x_4$  d'un +, car il est successeur de  $p_1$  et

$$f^3(u_8) = 0 < c(u_8) = 50$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_8\} = \{u_1, u_8\}; A = A \cup \{x_4\} = \{s, p_1, x_4\}$$

- On marque le sommet p d'un +, car il est successeur de  $x_4$  et

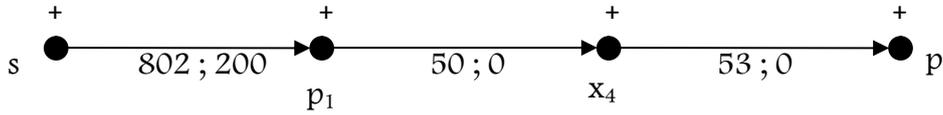
$$f^0(u_{20}) = 0 < c(u_{20}) = 53$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_{20}\} = \{u_1, u_8, u_{20}\}; A = A \cup \{p\} = \{s, p_1, x_4, p\}.$$

## Chapitre IV : Application sur le réseau hydraulique du système Freha–Azazga

Le sommet p étant marqué, la procédure s'arrête. On obtient la chaîne augmentante

$C=C^+ \cup C^- = \{s, p_1, x_4, p\}$ , qui relie les deux sommets s et p.



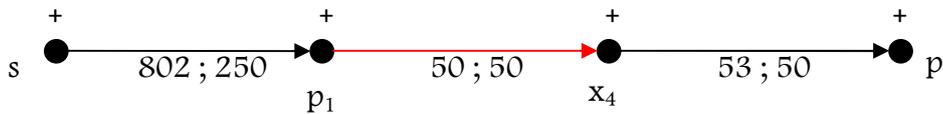
On calcule :

$$\varepsilon_1 = \min [c(u) - f(u); u \in C^+]$$

$$= \min [c(u_1) - f^3(u_1); c(u_8) - f^3(u_8); c(u_{20}) - f^3(u_{20})]$$

$$= \min [802 - 200; 50 - 0; 53 - 0] = 50.$$

On améliore ainsi le flot  $f^3$  pour obtenir un nouveau flot  $f^4$ , en ajoutant la quantité  $\varepsilon_1$  aux flux des arcs de  $C^+$ . Les flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne restent inchangés.



On efface les marques sauf en s.

### ➤ Itération 5 :

- On marque le sommet  $p_2$  d'un +, car il est successeur de s et

$$f^4(u_2) = 0 < c(u_2) = 584$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_2\} = \{u_2\}; A = A \cup \{p_2\} = \{s, p_2\}.$$

- On marque le sommet  $x_5$  d'un +, car il est successeur de  $p_2$  et

$$f^4(u_9) = 0 < c(u_9) = 93$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_9\} = \{u_2, u_9\}; A = A \cup \{x_5\} = \{s, p_2, x_5\}$$

- On marque le sommet p d'un +, car il est successeur de  $x_5$  et

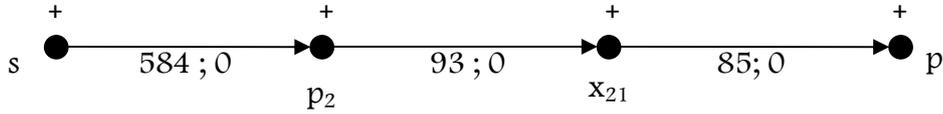
$$f^4(u_{21}) = 0 < c(u_{21}) = 85$$

$$\text{On pose On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_{21}\} = \{u_1, u_9, u_{21}\}; A = A \cup \{p\} = \{s, p_2, x_5, p\}.$$

## Chapitre IV : Application sur le réseau hydraulique du système Freha–Azazga

Le sommet p étant marqué, la procédure s'arrête. On obtient la chaîne augmentante

$C=C^+ \cup C^- = \{s, p_2, x_5, p\}$ , qui relie les deux sommets s et p.



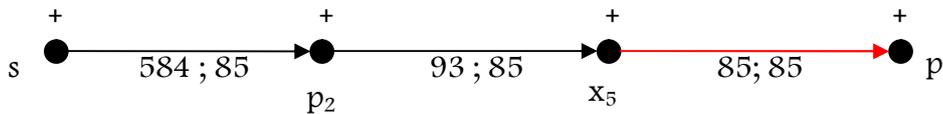
On calcule :

$$\varepsilon_1 = \min [c(u) - f(u); u \in C^+]$$

$$= \min [c(u_2) - f^4(u_2); c(u_9) - f^4(u_9); c(u_{21}) - f^4(u_{21})]$$

$$= \min [584 - 0; 93 - 0; 85 - 0] = 85.$$

On améliore ainsi le flot  $f^4$  pour obtenir un nouveau flot  $f^5$ , en ajoutant la quantité  $\varepsilon_1$  aux flux des arcs de  $C^+$ . Les flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne restent inchangés.



On efface les marques sauf en s.

### ➤ Itération 6 :

- On marque le sommet  $p_2$  d'un +, car il est successeur de s et  $f^5(u_2) = 85 < c(u_2) = 584$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_2\} = \{u_2\}; A = A \cup \{p_2\} = \{s, p_2\}.$$

- On marque le sommet  $x_5$  d'un +, car il est successeur de  $p_2$  et

$$f^5(u_9) = 85 < c(u_9) = 93$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_9\} = \{u_2, u_9\}; A = A \cup \{x_5\} = \{s, p_2, x_5\}.$$

Le sommet p est successeur de  $x_5$ , mais l'arc  $u_{21}$  est saturé  $f^4(u_{21}) = c(u_{21}) = 85$ . Donc on ne peut pas marquer p. pour cela on abandonne ce marquage.

## Chapitre IV : Application sur le réseau hydraulique du système Freha–Azazga

- On marque le sommet  $p_2$  d'un +, car il est successeur de  $s$  et  $f^5(u_2)=85 < c(u_2)=584$

On pose :  $C^+=C^+ \cup \{u_2\} = \{u_2\}$  ;  $A=AU\{p_2\} = \{s, p_2\}$ .

- On marque le sommet  $x_6$  d'un +, car il est successeur de  $p_2$  et  $f^5(u_{10})=0 < c(u_{10})=65$

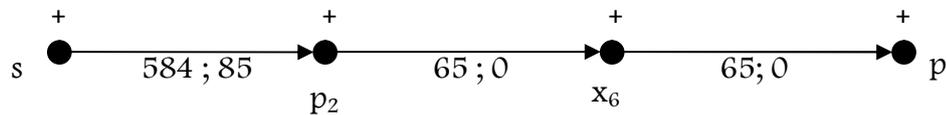
On pose :  $C^+=C^+ \cup \{u_{10}\} = \{u_2, u_{10}\}$  ;  $A=AU\{x_6\} = \{s, p_2, x_6\}$ .

- On marque le sommet  $p$  d'un +, car il est successeur de  $x_6$  et  $f^5(u_{22})=0 < c(u_{22})=65$

On pose :  $C^+=C^+ \cup \{u_{22}\} = \{u_2, u_{10}, u_{22}\}$  ;  $A=AU\{p\} = \{s, p_2, x_6, p\}$ .

Le sommet  $p$  étant marqué, la procédure s'arrête. On obtient la chaîne augmentante

$C=C^+ \cup C^- = \{s, p_2, x_6, p\}$ , qui relie les deux sommets  $s$  et  $p$ .



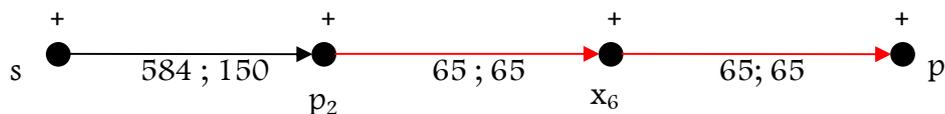
On calcule :

$$\varepsilon_1 = \min [c(u) - f(u); u \in C^+]$$

$$= \min [c(u_2) - f^5(u_2); c(u_{10}) - f^5(u_{10}); c(u_{22}) - f^5(u_{22})]$$

$$= \min [584 - 85; 65 - 0; 65 - 0] = 65.$$

On améliore ainsi le flot  $f^5$  pour obtenir un nouveau flot  $f^6$ , en ajoutant la quantité  $\varepsilon_1$  aux flux des arcs de  $C^+$ . Les flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne restent inchangés.



On efface les marques sauf en  $s$ .

## Chapitre IV : Application sur le réseau hydraulique du système Freha–Azazga

### ➤ Itération 7 :

- On marque le sommet  $p_2$  d'un +, car il est successeur de  $s$  et

$$f^6(u_2) = 150 < c(u_2) = 584$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_2\} = \{u_2\} ; A = A \cup \{p_2\} = \{s, p_2\}.$$

- On marque le sommet  $x_7$  d'un +, car il est successeur de  $p_2$  et

$$f^6(u_{11}) = 0 < c(u_{11}) = 74$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_{11}\} = \{u_2, u_{11}\} ; A = A \cup \{x_7\} = \{s, p_2, x_7\}$$

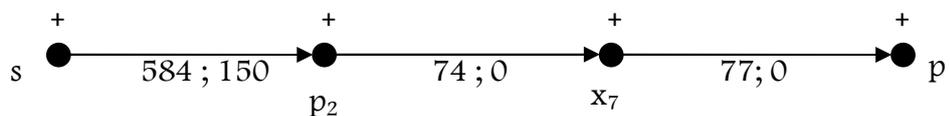
- On marque le sommet  $p$  d'un +, car il est successeur de  $x_7$  et

$$f^6(u_{23}) = 0 < c(u_{23}) = 77$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_{23}\} = \{u_1, u_{11}, u_{23}\} ; A = A \cup \{p\} = \{s, p_2, x_7, p\}.$$

Le sommet  $p$  étant marqué, la procédure s'arrête. On obtient la chaîne augmentante

$C = C^+ \cup C^- = \{s, p_2, x_7, p\}$ , qui relie les deux sommets  $s$  et  $p$ .



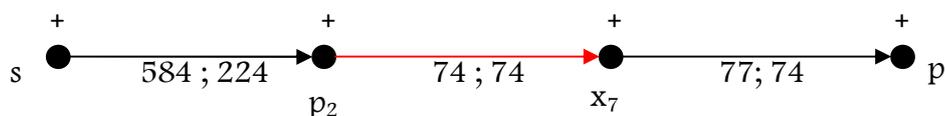
On calcule :

$$\varepsilon_1 = \min [c(u) - f(u); u \in C^+]$$

$$= \min [c(u_2) - f^6(u_2); c(u_{11}) - f^6(u_{11}); c(u_{23}) - f^6(u_{23})]$$

$$= \min [584 - 150; 74 - 0; 77 - 0] = 74.$$

On améliore ainsi le flot  $f^6$  pour obtenir un nouveau flot  $f^7$ , en ajoutant la quantité  $\varepsilon_1$  aux flux des arcs de  $C^+$ . Les flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne restent inchangés.



## Chapitre IV : Application sur le réseau hydraulique du système Freha–Azazga

On efface les marques sauf en s.

➤ **Itération 8 :**

- On marque le sommet  $p_2$  d'un +, car il est successeur de s et

$$f^7(u_2) = 224 < c(u_2) = 584$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_2\} = \{u_2\} ; A = AU \{p_2\} = \{s, p_2\}.$$

- On marque le sommet  $x_8$  d'un +, car il est successeur de  $p_2$  et

$$f^7(u_{12}) = 0 < c(u_{12}) = 50$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_{12}\} = \{u_2, u_{12}\} ; A = AU \{x_8\} = \{s, p_2, x_8\}$$

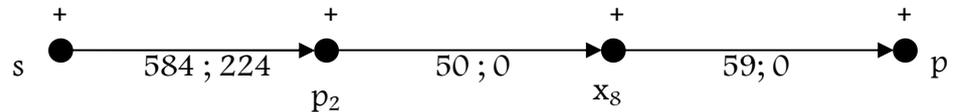
- On marque le sommet p d'un +, car il est successeur de  $x_8$  et

$$f^7(u_{24}) = 0 < c(u_{24}) = 59$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_{24}\} = \{u_1, u_{12}, u_{24}\} ; A = AU \{p\} = \{s, p_2, x_8, p\}.$$

Le sommet p étant marqué, la procédure s'arrête. On obtient la chaîne augmentante

$C = C^+ \cup C^- = \{s, p_2, x_8, p\}$ , qui relie les deux sommets s et p.



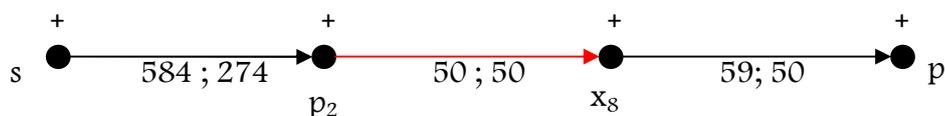
On calcule :

$$\varepsilon_1 = \min [c(u) - f(u); u \in C^+]$$

$$= \min [c(u_2) - f^7(u_2) ; c(u_{12}) - f^7(u_{12}) ; c(u_{24}) - f^7(u_{24})]$$

$$= \min [584 - 224 ; 50 - 0 ; 59 - 0] = 50.$$

On améliore ainsi le flot  $f^7$  pour obtenir un nouveau flot  $f^8$ , en ajoutant la quantité  $\varepsilon_1$  aux flux des arcs de  $C^+$ . Les flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne restent inchangés.



## Chapitre IV : Application sur le réseau hydraulique du système Freha–Azazga

On efface les marques sauf en s.

➤ **Itération 9 .**

- On marque le sommet  $p_3$  d'un +, car il est successeur de s et

$$f^s(u_3)=0 < c(u_3)=352$$

$$\text{On pose : } C^+=C^+ \cup \{u_3\} = \{u_3\} ; A= A \cup \{p_3\} = \{s, p_3\}.$$

- On marque le sommet  $x_9$  d'un +, car il est successeur de  $p_3$  et

$$f^s(u_{13})=0 < c(u_{13})=53$$

$$\text{On pose : } C^+=C^+ \cup \{u_{13}\} = \{u_3, u_{13}\} ; A= A \cup \{x_9\} = \{s, p_3, x_9\}$$

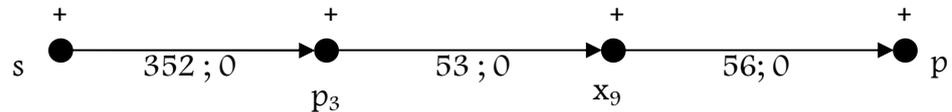
- On marque le sommet p d'un +, car il est successeur de  $x_9$  et

$$f^s(u_{25})=0 < c(u_{25})=56$$

$$\text{On pose : } C^+=C^+ \cup \{u_{25}\} = \{u_3, u_{13}, u_{25}\} ; A= A \cup \{p\} = \{s, p_3, x_9, p\}.$$

Le sommet p étant marqué, la procédure s'arrête. On obtient la chaîne augmentante

$C=C^+ \cup C^- = \{s, p_3, x_9, p\}$ , qui relie les deux sommets s et p.



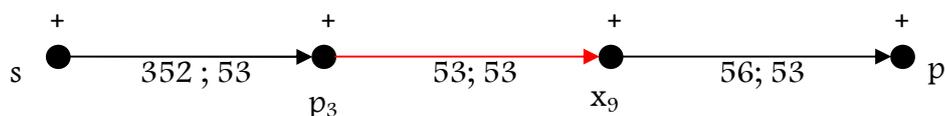
On calcule :

$$\varepsilon_1 = \min [c(u) - f(u); u \in C^+]$$

$$= \min [c(u_3) - f^s(u_3); c(u_{13}) - f^s(u_{13}); c(u_{25}) - f^s(u_{25})]$$

$$= \min [352 - 0; 53 - 0; 56 - 0] = 53.$$

On améliore ainsi le flot  $f^s$  pour obtenir un nouveau flot  $f^9$ , en ajoutant la quantité  $\varepsilon_1$  aux flux des arcs de  $C^+$ . Les flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne restent inchangés.



## Chapitre IV : Application sur le réseau hydraulique du système Freha–Azazga

On efface les marques sauf en s.

➤ **Itération 10 :**

- On marque le sommet  $p_3$  d'un +, car il est successeur de s et

$$f^9(u_3) = 53 < c(u_3) = 352$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_3\} = \{u_3\}; A = AU\{p_3\} = \{s, p_3\}.$$

- On marque le sommet  $x_{10}$  d'un +, car il est successeur de  $p_3$  et

$$f^9(u_{14}) = 0 < c(u_{14}) = 126$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_{14}\} = \{u_3, u_{14}\}; A = AU\{x_{10}\} = \{s, p_3, x_{10}\}$$

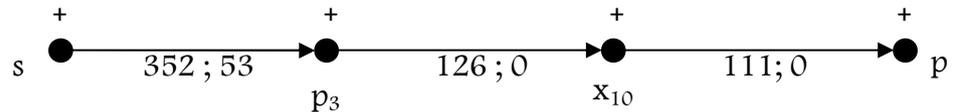
- On marque le sommet p d'un +, car il est successeur de  $x_{10}$  et

$$f^9(u_{26}) = 0 < c(u_{26}) = 111$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_{26}\} = \{u_3, u_{14}, u_{26}\}; A = AU\{p\} = \{s, p_3, x_{10}, p\}.$$

Le sommet p étant marqué, la procédure s'arrête. On obtient la chaîne augmentante

$C = C^+ \cup C^- = \{s, p_3, x_{10}, p\}$ , qui relie les deux sommets s et p.



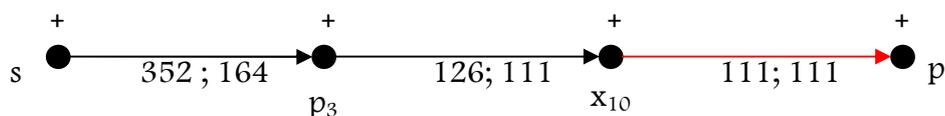
On calcule :

$$\varepsilon_1 = \min [c(u) - f(u); u \in C^+]$$

$$= \min [c(u_3) - f^9(u_3); c(u_{14}) - f^9(u_{14}); c(u_{26}) - f^9(u_{26})]$$

$$= \min [352 - 53; 126 - 0; 111 - 0] = 111.$$

On améliore ainsi le flot  $f^9$  pour obtenir un nouveau flot  $f^{10}$ , en ajoutant la quantité  $\varepsilon_1$  aux flux des arcs de  $C^+$ . Les flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne restent inchangés.



## Chapitre IV : Application sur le réseau hydraulique du système Freha–Azazga

On efface les marques sauf en s.

➤ **Itération 11 .**

- On marque le sommet  $p_3$  d'un +, car il est successeur de s et

$$f^{10}(u_3) = 164 < c(u_3) = 352$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_3\} = \{u_3\} ; A = A \cup \{p_3\} = \{s, p_3\}.$$

- On marque le sommet  $x_{10}$  d'un +, car il est successeur de  $p_3$  et

$$f^{10}(u_{14}) = 111 < c(u_{14}) = 126$$

Le sommet p est successeur de  $x_{10}$ , mais l'arc  $u_{26}$  est saturé  $f^{10}(u_{26}) = c(u_{26}) = 111$ . Donc on ne peut pas marquer p. pour cela on abandonne ce marquage.

- On marque le sommet  $p_4$  d'un +, car il est successeur de s et

$$f^{10}(u_4) = 0 < c(u_4) = 173$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_4\} = \{u_4\} ; A = A \cup \{p_4\} = \{s, p_4\}.$$

- On marque le sommet  $x_{11}$  d'un +, car il est successeur de  $p_4$  et

$$f^{10}(u_{15}) = 0 < c(u_{15}) = 69$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_{15}\} = \{u_4, u_{15}\} ; A = A \cup \{x_{11}\} = \{s, p_4, x_{11}\}$$

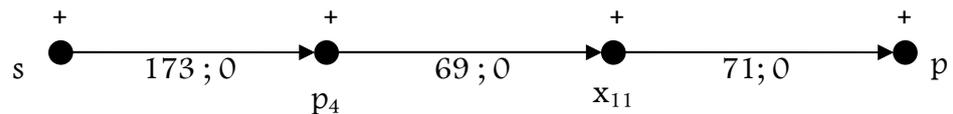
- On marque le sommet p d'un +, car il est successeur de  $x_{11}$  et

$$f^{10}(u_{27}) = 0 < c(u_{27}) = 71$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_{27}\} = \{u_4, u_{15}, u_{27}\} ; A = A \cup \{p\} = \{s, p_4, x_{11}, p\}.$$

Le sommet p étant marqué, la procédure s'arrête. On obtient la chaîne augmentante

$C = C^+ \cup C^- = \{s, p_4, x_{11}, p\}$ , qui relie les deux sommets s et p.



On calcule :

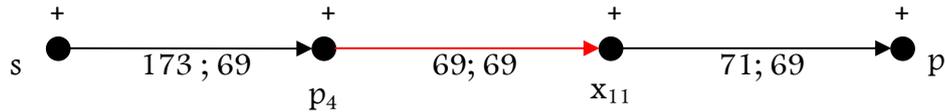
$$\varepsilon_1 = \min [c(u) - f(u); u \in C^+]$$

## Chapitre IV : Application sur le réseau hydraulique du système Freha–Azazga

$$= \min [c(u_4) - f^{10}(u_4); c(u_{15}) - f^{10}(u_{15}); c(u_{27}) - f^{10}(u_{27})]$$

$$= \min [173 - 0; 69 - 0; 71 - 0] = 69.$$

On améliore ainsi le flot  $f^{10}$  pour obtenir un nouveau flot  $f^{11}$ , en ajoutant la quantité  $\varepsilon_1$  aux flux des arcs de  $C^+$ . Les flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne restent inchangés.



On efface les marques sauf en s.

### ➤ Itération 12 :

- On marque le sommet  $p_4$  d'un +, car il est successeur de s et

$$f^{11}(u_4) = 69 < c(u_4) = 173$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_4\} = \{u_4\}; A = AU\{p_4\} = \{s, p_4\}.$$

- On marque le sommet  $x_{12}$  d'un +, car il est successeur de  $p_4$  et

$$f^{11}(u_{16}) = 0 < c(u_{16}) = 104$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_{16}\} = \{u_4, u_{16}\}; A = AU\{x_{12}\} = \{s, p_4, x_{12}\}$$

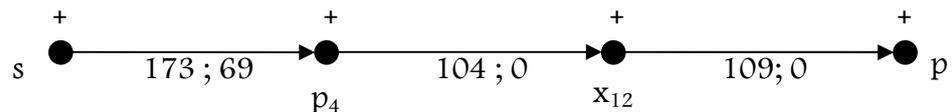
- On marque le sommet p d'un +, car il est successeur de  $x_{12}$  et

$$f^{11}(u_{28}) = 0 < c(u_{28}) = 109$$

$$\text{On pose : } C^+ = C^+ \cup \{u_{28}\} = \{u_4, u_{16}, u_{28}\}; A = AU\{p\} = \{s, p_4, x_{12}, p\}.$$

Le sommet p étant marqué, la procédure s'arrête. On obtient la chaîne augmentante

$C = C^+ \cup C^- = \{s, p_4, x_{12}, p\}$ , qui relie les deux sommets s et p.



On calcule :

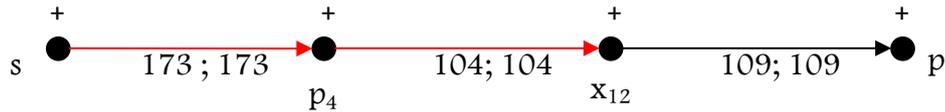
$$\varepsilon_1 = \min [c(u) - f(u); u \in C^+]$$

## Chapitre IV : Application sur le réseau hydraulique du système Freha–Azazga

$$= \min [c(u_4) - f^{11}(u_4) ; c(u_{16}) - f^{11}(u_{16}) ; c(u_{28}) - f^{11}(u_{28})]$$

$$= \min [173 - 69 ; 104 - 0 ; 109 - 0] = 104.$$

On améliore ainsi le flot  $f^{11}$  pour obtenir un nouveau flot  $f^{12}$ , en ajoutant la quantité  $\varepsilon_1$  aux flux des arcs de  $C^+$ . Les flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne restent inchangés.



On efface les marques sauf en s.

### ➤ Itération 13 :

Dans le réseau obtenu, aucun marquage ne peut marquer p. donc le flot actuel est maximum, on le représente comme suit :

Arcs	flux	Arcs	Flux
$u_1$	250	$u_{15}$	69
$u_2$	274	$u_{16}$	104
$u_3$	164	$u_{17}$	87
$u_4$	173	$u_{18}$	49
$u_5$	87	$u_{19}$	64
$u_6$	49	$u_{20}$	50
$u_7$	64	$u_{21}$	85
$u_8$	50	$u_{22}$	65
$u_9$	85	$u_{23}$	74
$u_{10}$	65	$u_{24}$	50
$u_{11}$	74	$u_{25}$	53
$u_{12}$	50	$u_{26}$	111
$u_{13}$	53	$u_{27}$	49
$u_{14}$	111	$u_{28}$	64

La valeur du flot maximum est égale, à la valeur des flux sortant de la source s, ou à la somme des flux entrant dans le puits p.

## Chapitre IV : Application sur le réseau hydraulique du système Freha–Azazga

$$F_{\max}=250+274+164+173=861.$$

Ou bien

$$F_{\max}=87+49+64+50+85+65+74+50+53+111+49+64= 861.$$

### **IV. Conclusion :**

L'application de Ford & Fulkerson est un outil très efficace qui peut être intégré et adapté dans plusieurs domaines.

Nous avons constaté que l'application de l'algorithme sur le réseau hydraulique du système Freha- Azazga apparait comme un bon moyen qui calcule très rapidement une solution optimale afin d'éviter de prendre des mesures aux conséquences négatives.

## Conclusion générale

Dans ce travail nous avons étudié et appliqué principalement une méthode d'optimisation pour résoudre un problème lié aux réseaux de transport.

Cette étude nous a permis de revoir une grande partie du vocabulaire de la théorie des graphes et de voir l'utilité et l'importance de la résolution des problèmes d'optimisation par la théorie des graphes. La méthode utilisée ici est parmi les méthodes les plus utilisées mais une grande variété d'autres méthodes exactes et approchées existent.

## Bibliographie

- [1] P. LOPEZ : Cours de graphe, 2005, LAAS.CNRS, 02 Avril 2008.
- [2] D.MAQUIN : Eléments de la théorie des graphes et programmation linéaire, institue notion polytechnique de lorraine, Mai 2008.
- [3] C. SOLNON : Théorie des graphes et optimisation dans les graphes.
- [4] C.BERGE : Théorie et ses applications, Dunod, Paris, 1958.
- [5] N. BELHARRA : La recherche opérationnelle, page bleu, 2005.
- [6] M.GONDRAN, M.MINOUX : Graphes et algorithmes, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité e de France, Eyrolles, Paris 1985,545p.
- [7] D.MULER, Introduction a la théorie des graphes, 2008.
- [8] J.F.HECHE, T.M.LIEBLING, D.DE WERRA : Recherche opérationnelle pour ingénieur II, presses polytechniques et universitaires, Romande 2003,383p.
- [9] [www.apprendre-en-ligne.net](http://www.apprendre-en-ligne.net)
- [10] [www.tiziouzou-dz.com](http://www.tiziouzou-dz.com)