

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI-OUZOU
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MEMOIRE DE MASTER
Option: Recherche Opérationnelle

Intitulé du Projet :

**Minimisation d'une énergie dans un problème de contrôle optimal à système dynamique hybride.
Application : Thermostat**

Présenté par:

 M^{elle} MADJOUR Amal
 M^{elle} SAHNOUN Hanane

Encadré par:

M^{me} ZIDELMAL Nacera.

Devant le jury composé de :

Président : Mr A. MERAKEB

Examineur Mr.M.Aidene

Examinatrice: Mme F.KARA

Année universitaire : 2017/2018

Remerciements

En préambule à ce mémoire nous remerciant *ALLAH* qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

En second lieu, nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Nous tenons aussi à remercier notre encadrante Mme ZIDELMAL NACERA, pour ses précieux conseils et son aide durant la période du travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs propositions.

Ces remerciements vont aussi au corps professoral et administratif de la Faculté des Sciences de l'université Mouloud Mammeri pour la richesse et la qualité de leur enseignement et qui déploient de grands efforts pour assurer à leurs étudiants une formation actualisée.

Enfin, nous souhaitant adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apporté leur aide, de près ou de loin, ont contribué à l'élaboration de ce modeste travail ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Dédicace...

Je remercie DIEU tout puissant de m'avoir accordé la force et le courage durant toutes ces années afin de mener ce travail à bien et d'arriver au terme de mon cursus universitaire au sein de la faculté des sciences.

A ma plus grande fierté, papa et maman...

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail est le fruit de vos sacrifices que vous avez consentis pour mon éducation et ma formation.

A la plus belle chose que mon dieu ma honoré avec, ma jumelle KHADIDJA ; mon âme, ma sœur et ma copine intime, merci de m'avoir toujours soutenue ; tes la meilleure.

A la prunelle de mes yeux, ma source de bonne humeur, toi ma chérie Djamila
Tes sacrifices, ton amour et ton encouragement m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études et toute ma vie, je te dois mon profond respect et amour.

A mes sœurs : Nadia, Kahina et leur familles.

A mes frères Said, Arezki, Aguriw, Hamza, Hamid et Amazigh.

A toutes mes nièces et mes neveux.

A ma chère binôme Hanane et toute sa famille, merci pour tous les bons moments.

A mon bras droit, ma copine intime, ma sœur Massiva.

Celle avec qui les années d'études ont été agréables ! Je te remercie de m'avoir épaulé, aidé et encouragé. Que tous les moments de joie, de stress, de difficultés que nous avons vécu ensemble témoignent de notre vaste amitié.

A mes chères amies et amis :

Fatiha, Nassima, Djamila , Fadhila, Lynda ,Saida ,Karima, Fatima , Rym, Ghanouche, Hayet, fariza ,Beyzid ,Azzedine , Saïd ,Salem et toute la promotion RO et tous ceux qui ont aidé de près ou de loin.

Merci pour votre amitié, je n'oublierai jamais tous les bons moments passés, nos galères et nos délires

Du fond du cœur Amal....

Table des matières

Notations	4
Introduction générale	5
1 Introduction aux équations différentielles et au contrôle optimal	7
1.1 Introduction	7
1.2 Équations différentielles	7
1.2.1 Introduction	7
1.2.2 Notions générales	8
1.2.3 Problème de Cauchy	8
1.2.4 Exponentielle d'une matrice	9
1.2.5 Méthode de Newton	10
1.2.6 Méthodes de résolutions numériques	11
1.3 Contrôle optimal	15
1.3.1 Introduction	15
1.3.2 Position du problème	16
1.3.3 Critère d'optimisation	17
1.3.4 Contrôlabilité	18
1.3.5 Principe du maximum de Pontryagin	21
1.3.6 Méthodes de résolution	23
1.4 Conclusion	27
2 Notions Générales sur Les Systèmes Dynamiques Hybrides	28
2.1 Introduction	28
2.2 Différentes Définitions	28
2.2.1 Systèmes statiques et systèmes dynamiques	28
2.2.2 Variable continue	28
2.2.3 Système continu	29
2.2.4 Variable discrète	29
2.2.5 Système discret	29
2.3 Définition des Système dynamiques hybrides	29
2.3.1 Définition formelle des Systèmes Dynamiques Hybrides	30
2.3.2 Action des phénomènes	30
2.4 Classification des Systèmes Dynamiques Hybrides	31
2.4.1 Commutation contrôlée	32
2.4.2 Saut contrôlé	33
2.4.3 Commutation autonome	34
2.4.4 Saut autonome	34
2.5 Approches de modélisation	35
2.5.1 L'approche continue	36
2.5.2 L'approche événementielle	36

2.5.3	L'approche mixte	36
2.6	Modélisation des systèmes dynamiques hybrides	36
2.6.1	Modélisation des SDH par les automates hybrides	37
2.6.2	Modélisation des SDH par les réseaux de Petri hybrides	39
2.6.3	Modélisation des SDH par les systèmes à interface	40
2.7	Formulation du problème de commande	42
2.8	Principe du maximum pour les SDH	43
2.9	Conclusion	44
3	Contrôle optimal à système dynamique hybride à commutation auto-	
	nome	45
3.1	Introduction	45
3.2	Le système étudié	45
3.3	Modélisation du système étudié	46
3.4	Automate hybride associé	46
3.5	Position du problème lorsque le chauffage est en état marche	47
3.6	Application du principe du maximum de Pontryagin	47
3.6.1	Résolution théorique	47
3.6.2	Problème aux deux bouts	48
3.7	Position du problème lorsque le chauffage est en arrêt	49
3.8	Résolution numérique	49
3.8.1	Matlab	49
3.9	Conclusion	52
	Conclusion générale	54
	Bibliographie	55

Liste des figures

Figure 1.1.	: Ensemble accessible.[page 21]
Figure 1.2	: Synthèse optimale.[page 29]
Figure 2.1	: Système d'embrayage mécanique.[page 35]
Figure 2.2	: (a) .Trajectoire d'une boule de billard et (b) Automate associé.[page 37]
Figure 2.3	:Modélisation d'un serveur à deux états.[page 40]
Figure 2.4	: Places et transitions d'un RDP hybride. [page 41]
Figure 2.5	: Exemple modélisé par un RDP hybride.[page 42]
Figure 2.6	: Modélisation globale d'un système hybride.[page 42]
Figure 2.7	: Modélisation continu/discret d'un système hybride.[page 44]
Figure3.1	: Schéma fonctionnel d'un thermostat d'ambiance à action tout-ou-rien équipé d'une résistance anticipatrice R .[page 48]
Figure 3.2	L'automate hybride associé.[page 49]
Figure 3.3	: Trajectoire du contrôle.[page 53]
Figure 3.4	: Trajectoire de l'état.[page 53]

Liste des tableaux

Tableau 1.1 : La comparaison entre les méthodes directes et les méthodes indirectes.[page 25]

Tableau 2.1 : Déclenchements des phénomènes hybrides.[page 33]

Tableau 2.2 : Actions des phénomènes hybrides.[page 34]

Notations

\forall : Pour tout.

\exists : Il existe.

\mathbb{R} : Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots \mathbb{R}$ n fois.

$||$: Valeur absolue.

$M_{n,m}(\mathbb{R})$: Ensemble des matrices à n lignes et à m colonnes, à coefficients dans \mathbb{R} .

e^A , ou $\exp(A)$: Exponentielle de la matrice A .

A^t : Transposée de la matrice A .

$\text{Acc}(x_0, T)$: Ensemble accessible depuis x_0 , en temps T .

$x' = \frac{dx}{dt}$: Dérivée de x par rapport à t .

\perp : perpendiculaire.

H : Hamiltonien.

J : Critère de minimisation.

C_p : Complément de p .

U_d : Ensemble des commandes discrètes/événements contrôlables.

U_c : Ensemble des commandes continus.

Q : Espace d'état discret.

τ : Instant de commutation.

$\text{rg}(A)$: Rang de la matrice A .

x_0 : l'état initial.

x^1 : l'état final.

t_0 : temps initial.

T : temps final.

B^t : transposé de la matrice B .

R^{-1} : la matrice inverse de R .

u^t : la transposé du vecteur u .

θ_0 : la température initiale .

θ_m : seuil inférieur .

θ_M : seuil supérieur.

\max : Maximum.

\min : Minimum.

SDH : Systèmes Dynamiques Hybrides.

SED : Systèmes à Évènement Discret.

RdP : Réseau de Petri.

Introduction générale

Historiquement, les premières recherches de la programmation linéaire et les premières applications se sont développées dans le contexte de l'économie. C'est ainsi que C.B.Dantzig propose en 1947 le terme de programmation linéaire pour l'étude des problèmes théoriques et algorithmiques liés à l'optimisation des fonctions linéaires sous contraintes linéaires. L'apparition des systèmes à structure complexe a motivé le développement de la théorie du calcul des variations [21], devenue plus tard, la théorie du contrôle optimal [8,7,19].

Cette théorie, a connu un véritable essor depuis les années cinquante avec la découverte d'outils puissants tels que le principe du maximum de L.S. Pontryagin en 1956 [24], qui généralise les équations d'Euler Lagrange du calcul des variations, et le principe de programmation dynamique de R. Bellman [25]. L'objectif est de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation.

De nos jours, les systèmes automatisés font complètement partis de notre quotidien (nous en sommes souvent inconscients), ayant pour but d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certaines tâches : tout comme le problème illustré dans notre travail (thermostat).

L'automatique s'est intéressé dès ces origines à l'étude et la commande des systèmes physiques généralement représentés par un modèle dynamique continu, modélisé par un ensemble d'équations différentielles, ou par un modèle à événements discrets [4,16], défini par une séquence d'évènements qui provoque la transition entre un nombre fini d'états. Cependant, l'application des méthodes rigoureuses pour traiter les aspects continus d'une part, et les aspects événementiels d'autre part, ne saurait garantir la qualité du système global tant que les interactions entre ces deux aspects ne sont pas prises en compte. Donc, la combinaison des deux aspects continus et discrets dans un même modèle est indispensable, d'où la notion de modèle hybride.

D'une manière générale, un système hybride est un système dont l'évolution au cours du temps est décrite par un ensemble de lois mathématiques qui peuvent être de natures continues ou discrètes. Le Contrôle optimal des systèmes dynamiques hybrides est un domaine de recherche relativement récent est en plein essor. Cependant, contrairement au contrôle des systèmes continus, pour lesquels les problèmes sont bien identifiés, celui des systèmes hybrides manque à l'heure actuelle d'un cadre théorique unifié. Une difficulté majeure est d'arriver à concilier le caractère à la fois continu et discret de ces systèmes.

En effet même si la dynamique continue dans un mode donné de l'automate hybride est bien connu, les transitions discrètes entre les modes peuvent engendrer des phénomènes inattendus, sur lesquels les solutions au sens classique ne sont pas définies. Un certain nombre de travaux ont été effectués dans

ce domaine ; en utilisant les méthodes issues de la commande optimale des systèmes dynamiques continus, tels que le principe du maximum de Pontryagin [7,24], le principe de la programmation dynamique [25,11,17].

Dans notre travail nous nous sommes intéressés à l'application de la théorie du contrôle optimal à systèmes dynamiques hybrides à commutation autonome. Notre problème de commande consiste à l'optimisation du fonctionnement d'une régulation thermique où un thermostat à résistance anticipatrice est choisi comme régulateur. Notre but est de maintenir la température la plus proche possible d'une valeur désirée tout en ayant les plus faibles variations possibles de la température autour de cette valeur désirée à fin de minimiser l'énergie. Nous introduisons de cette manière un des problèmes de commande optimale.

Chapitre 1

Introduction aux équations différentielles et au contrôle optimal

1.1 Introduction

La théorie du contrôle étudie les propriétés des systèmes commandés (ou contrôlés), c'est à dire, des systèmes dynamiques dépendant d'une variable t qui représente le plus souvent le temps, sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. L'objectif de la théorie du contrôle est de stabiliser le système, c'est à dire, le rendre insensible à des perturbations ; c'est ce qu'on appelle la stabilisation, ou de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation ; c'est ce qu'on appelle le contrôle optimal.

Ce chapitre est composé de deux sections, la première est consacrée aux équations différentielles ordinaires [12] et les méthodes numériques de résolution, se sont un moyen de résolution[20,28] et la base fondamentale du contrôle optimal.

Tant dis que la deuxième section est consacré à la présentation des concepts de base de la théorie du contrôle optimal. Elle s'organise en six parties. Après avoir donné dans la première partie, un bref aperçu sur le contrôle optimal, la deuxième partie comporte les critères d'optimisation, la troisième partie donne des rappels sur la contrôlabilité des systèmes linéaires et des systèmes non linéaires. La quatrième partie, nous avons présenté l'énoncé général du principe du maximum de Pontryagin. La cinquième partie, dévolue aux différentes méthodes de résolution d'un problème de contrôle optimal, à savoir les méthodes directes et les méthodes indirectes. . Dans la sixième partie, nous avons illustré le principe de maximum avec un exemple.

1.2 Équations différentielles

1.2.1 Introduction

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction. Cette fonction est a priori définie sur une partie de \mathbb{R} , à valeurs réelles et complexes. La fonction inconnue est en général notée y (parfois f , ou même x) dont la variable est habituellement t . L'équation est une relation entre la fonction y , plusieurs de ses dérivées et potentiellement d'autres fonctions.

Les équations différentielles ont rarement des solutions analytiques exactes, autrement dit la résolution de ces équations différentielles n'est pas possible, elle ne s'intègre pas d'une manière exacte, on fait appel dans ce cas à des méthodes numériques afin de trouver des solutions approchées. La plupart des équations différentielles restent un problème ouvert. Les mathématiciens se sont alors tournés vers une étude plus théorique qui permettait de trouver des résultats.

1.2.2 Notions générales

1.2.2.1 Équation Différentielle Ordinaire

Une équation Différentielle Ordinaire, également notée EDO d'ordre n est une relation entre la variable réelle t , une fonction inconnue $t \rightarrow x(t)$ et ses dérivées $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}$ au point t définie par $f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$, où $x^{(n)}$ désigne la $n^{\text{ième}}$ dérivée de x . On prendra t dans un intervalle I de \mathbb{R} (I peut être \mathbb{R} tout entier). La solution x en général sera à valeurs dans \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$ sera le plus souvent égal à 1, 2 ou 3. On dit que cette équation est scalaire si f est à valeurs dans \mathbb{R} .

1.2.2.2 Équation différentielle autonome

On appelle équation différentielle autonome toute équation de la forme :

$$x^{(n)} = f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}).$$

Autrement dit, f ne dépend pas explicitement de t .

1.2.2.3 Équation différentielle linéaire

Une EDO d'ordre n est linéaire si elle est de la forme :

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t) = g(t) \quad (1.1)$$

Avec tous les $x^{(i)}$ de degré 1 et tous les coefficients dépendant au plus de t .

1.2.2.4 Équation différentielle à variables séparables

On appelle de façon générale équation à variables séparées, toute équation de la forme

$$b(x)\dot{x} = a(t) \quad (1.2)$$

où a et b sont deux fonctions définies respectivement sur I et K , et où I et K sont des intervalles de \mathbb{R} .

1.2.3 Problème de Cauchy

La résolution d'un problème de Cauchy [15] consiste à trouver la solution de l'équation différentielle ordinaire (EDO), satisfaisante les conditions initiales.

Soit I_0 un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point. On se donne une fonction f définie et continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^m$ à valeurs dans \mathbb{R}^m ainsi qu'un élément y_0 de \mathbb{R}^m .

On cherche à trouver une fonction y continue et dérivable sur l'intervalle I_0 à valeurs dans \mathbb{R}^m .

On appelle problème de Cauchy le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) & (1.3) \\ y(t_0) = y_0 & (1.4) \end{cases}$$

Le système (1.3) s'appelle le problème de Cauchy et la condition (1.4) s'appelle la condition de Cauchy. Une fonction y qui vérifie les équations (1.3) et (1.4) est appelée une intégrale de système différentiel, la variable t représente le temps. L'instant t_0 est appelé instant initial et la condition (1.4) est appelée condition initiale.

1.2.3.1 Existence et unicité

Considérons l'équation différentielle

$$\dot{y} = f(t, y) \quad (1.5)$$

La solution de cette équation sous les conditions initiales est

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds, t \in I_0 \subset \mathbb{R} \quad (1.6)$$

Définition 1.1

La fonction $f : I_0 \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est lipschitzienne en y et uniforme en t s'il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$\forall t \in I_0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \quad \| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leq L \| x_1 - x_2 \|$$

L est appelée constante de Lipschitz de f .

Théorème 1.1 (Cauchy - Lipschitz)[15]

Si la fonction $f : I_0 \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ vérifie les hypothèses :

1. f est continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^m$.
2. f est lipschitzienne en y uniformément continue en t alors le problème de Cauchy admet une solution unique de classe C^1 .

1.2.4 Exponentielle d'une matrice

Définition 1.4

Pour toute matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$ on définit la matrice carrée $e^A \in M_n(\mathbb{R})$ par :

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots = \sum \frac{A^n}{n!}$$

Proposition 1.1 [12]

Si A est diagonalisable, alors : $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$
avec :

$$e^{Dt} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$$

le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des valeurs propres associées au polynôme caractéristique de A .

P est la matrice de passage et les vecteurs P_i sont linéairement indépendants.

proposition 1.2[12]

Si A n'est pas diagonalisable on peut utiliser la décomposition de Jordan (tel que $A = D + N$ avec D est diagonalisable et N nilpotente qui commutent

$$e = e^{t(D+N)} = e^{t.D+t.N} = e^{t.D} \cdot e^{t.N}$$

1.2.5 Méthode de Newton

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ donné.

On considère la droite $y(x)$ qui passe par le point $(x_n, f(x_n))$ et qui a pour pente $\dot{f}(x_n)$.

$$y(x) = \dot{f}(x_n)(x - x_n) + f(x_n) \quad (1.9)$$

On définit le point x_{n+1} comme étant le point où cette droite intersecte l'axe des abscisses c'est à dire $y(x_{n+1}) = 0$. Le schéma numérique de la méthode de Newton est le suivant :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dot{f}(x_n)}, \quad n \geq 0.$$

Interprétation géométrique

L'équation de la tangente à la courbe au point $(x_n, f(x_n))$ est donnée par :

$$y(x) = \dot{f}(x_n)(x - x_n) + f(x_n) \quad (1.9)$$

x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe ox .

Méthode de Newton - Raphson (cas général)

Supposons que $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une fonction de classe C^1 , la méthode de Newton consiste à résoudre $f(x) = 0$.

Si x_K est proche d'un zéro x de f alors :

$$f(x) = 0 = f(x_k) + df(x_k)(x - x_k) + O(x - x_k)$$

on définit alors la suite $(x_k)_k$ définie par :

$$x_{k+1} = x_k - (df(x_k))^{-1} f(x_k)$$

On choisit un point initial $x_0 \in \mathbb{R}^p$ et on espère que x_k converge vers le zéro de x . Il s'agit alors à chaque étape, de résoudre :

$$f(x_k) + df(x_k).d_k$$

Où d_k est appelé direction de descente, on pose

$$x_{k+1} = x_k + d_k$$

La méthode de Newton permet la détermination d'un zéro d'une application.

Remarque 1.2

L'inconvénient principal de cette méthode est le choix du point initial x_0 , il faut que x_0 soit choisit très proche de la solution x .

1.2.6 Méthodes de résolutions numériques

1.2.6.1 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler nommée ainsi en l'honneur du mathématicien Leonhard Euler (1707_1783), c'est une procédure numérique pour résoudre approximativement des équations différentielles du premier ordre avec une condition initiale de Cauchy.

Considérons le problème :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0, t \in [0, T]. \end{cases}$$

Subdivisons l'intervalle $[0, T]$ comme suit : $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_N = T$.

Posons : $h_n = t_{n+1} - t_n$, $h = \max_{0 \leq n \leq N} h_n$.

Pour $0 \leq n \leq N$, la solution du problème est donnée par :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds \quad \text{Pour } 0 \leq n \leq N.$$

On aura le schéma d'Euler suivant :

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Ce qui revient à approcher, pour $s \in]t_n, t_{n+1}[$, $f(s, y(s))$ par $f(t_n, y_n)$.

Exemple

On a

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\lambda y \quad (a)$$

La solution analytique de l'équation (a) est

$$y = y_0 e^{-\lambda t_0}$$

à l'instant t_0 on a :

$$t_0 \Rightarrow y_0 e^{-\lambda t_0},$$

On a :

$$\begin{aligned} t_1 = t_0 + h &\Rightarrow y_1 = y_0 e^{-\lambda(t_0+h)}, \\ &= y_0 e^{-\lambda t_0} \cdot e^{-\lambda h} \end{aligned}$$

On pose

$$u_0 = y_0 e^{-\lambda t_0},$$

Donc

$$\begin{aligned} u_1 &= y_0 e^{-\lambda t_0} \cdot e^{-\lambda h}, \\ t_2 &= t_0 + 2h, \\ y_2 &= y_0 e^{-\lambda t_0} e^{-2\lambda h}, \\ u_2 &= u_0 (e^{-\lambda h})^2, \\ u &= u_0 e^{(-\lambda h)^n}, \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + hf(t, x), \\ u_{i+1} &= u_i - \lambda h u_i, \\ u_{i+1} &= u_i (1 - \lambda h). \\ u_n &= u_0 (1 - \lambda h)^n, \end{aligned}$$

La convergence de cette méthode est :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \Leftrightarrow \lim |1 - \lambda h| < 1.$$

$$0 \leq \lambda h \leq 2.$$

$$h < \frac{2}{\lambda} \quad (b)$$

Pour un pas $h < \frac{2}{\lambda}$ la méthode d'Euler converge .

1.2.6.2 Méthode de Runge Kutta

Cette méthode est une méthode d'analyse numérique elle est nommée ainsi à l'honneur des mathématiciens Carl Runge(1856 – 1927) et Martin Kutta (1867 – 1944).

Principe général de la méthode

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad t \in I = [0, T].$$

On cherche à discrétiser ce problème par rapport à une subdivision : $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_n = T$. L'idée est de calculer par récurrence les points (t_n, y_n) en utilisant des points intermédiaires $(t_{n,i}, y_{n,i})$ avec $t_{n,i} = t_n + c_i h_n$, $1 \leq i \leq q$, $c_i \in [0, 1]$.

A chacun de ces points, on associe la pente correspondante :

$$p_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i})$$

Soit y une solution exacte de l'équation

On a :

$$\begin{aligned} y(t_{n,i}) &= y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(t, y(t)) dt. \\ &= y(t_n) + h_n \int_0^{c_i} f(t_n + u h_n, y(t_n + u h_n)) du. \end{aligned}$$

Grâce au changement de variable : $t = t_n + u h_n$.

De même : $y(t_{n+1}) = y(t_n) + h_n \int_0^1 f(t_n + u h_n, y(t_n + u h_n)) du$.

On se donne alors pour chaque $i = 1, 2, \dots, q$ une méthode d'intégration approchée :

$$(M_i) \int_0^{c_i} g(t) dt \simeq \sum_{1 \leq j \leq i} a_{ij} g(c_j), \text{ avec } \sum_{1 \leq j \leq i} a_{ij} = c_i$$

On se donne également une méthode d'intégration approchée sur $[0, 1]$

$$(M) \int_0^1 g(t) dt \simeq \sum_{1 \leq j \leq i} b_j g(c_j), \text{ avec } \sum_{1 \leq j \leq i} b_j = 1.$$

La méthode de Runge-Kutta correspondante est définie par l'algorithme :

$$t_{n,1} = t_n + c_1 h_n,$$

$$y_{n,i} = y_n + h_n \sum_{1 \leq j \leq i} a_{ij} p_{n,j} \quad 1 \leq i \leq q$$

$$p_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i}),$$

$$t_{n+1} = t_n + h_n,$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{1 \leq j \leq q} b_j p_{n,j},$$

La méthode de Runge-Kutta définie par le tableau des coefficients $c_i, a_{i,j}, b_j$ est :

(M_1)	c_1	0	0	0	0
(M_2)	c_2	0	0	0	0
\vdots					
\vdots					
(Mq)	c_q	$a_{q,1}$	$a_{q,2}$	$a_{q,q-1}$	0
(M)	b_1	b_2	b_{q-1}		b_q

Où les méthodes d'intégration approchées correspondent aux lignes. On pose par convention $a_{i,j} = 0$ pour $j \geq i$.

1.2.6.3 Méthode de Runge-Kutta 2

Pour $q = 2$

Il s'agit de la méthode définie par le tableau suivant :

0	0	0
a	a	0
	$1 - \frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{2\alpha}$

L'algorithme s'écrit ici :

$$p_{n,1} = f(t_n, y_n),$$

$$t_{n,2} = t_n + \alpha h_n,$$

$$y_{n,2} = y_n + \alpha h_n p_{n,1},$$

$$t_{n+1} = t_n + h_n,$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left(\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) p_{n,1} + \frac{1}{2\alpha} p_{n,2} \right),$$

Ou encore

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f(t_n, y_n) + \frac{1}{2\alpha} f\left(t_n + \alpha h_n, y_n + \alpha h_n f(t_n, y_n)\right),$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on retrouve la méthode du point milieu :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left(f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n)\right)\right).$$

1.2.6.4 Méthode de Runge-Kutta4

Il s'agit de la méthode définie par le tableau :

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

L'algorithme correspondant s'écrit :

$$\begin{aligned} p_{n,1} &= f(t_n, y_n), \\ t_{n,2} &= t_n + \frac{1}{2}h_n, \\ y_{n,2} &= y_n + \frac{1}{2}h_n p_{n,1}, \\ p_{n,2} &= f(t_{n,2}, y_{n,2}), \\ y_{n,3} &= y_n + \frac{1}{2}h_n p_{n,2}, \\ p_{n,3} &= f(t_{n,2}, y_{n,3}) \quad \text{noter que } t_{n,3} = t_{n,2}, \\ t_{n+1} &= t_n + h_n \quad \text{noter que } t_{n,4} = t_{n+1}, \\ y_{n,4} &= y_n + h_n p_{n,3}, \\ p_{n,4} &= f(t_{n+1}, y_{n,4}), \end{aligned}$$

Ou encore :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left(\frac{1}{6}p_{n,1} + \frac{2}{6}p_{n,2} + \frac{2}{6}p_{n,3} + \frac{1}{6}p_{n,4}\right).$$

Les méthodes d'intégration utilisées sont :

$$\begin{aligned} (M_2) \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) dt &\simeq \frac{1}{2}g(0) && \text{rectangles à gauche} \\ (M_3) \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) dt &\simeq \frac{1}{2}g\left(\frac{1}{2}\right) && \text{rectangles à droite,} \\ (M_4) \int_0^1 g(t) dt &\simeq g\left(\frac{1}{2}\right) && \text{point milieu,} \\ (M) \int_0^1 g(t) dt &\simeq \frac{1}{2}g(0) + \frac{2}{6}g\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{6}g\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}g(1) && \text{simpson.} \end{aligned}$$

1.3 Contrôle optimal

1.3.1 Introduction

La théorie du contrôle a commencé dans les années 50 avec la formulation du principe du maximum de Pontryagin, cette théorie analyse des systèmes commandés c'est à dire des systèmes dynamiques sur les quels on peut agir au moyen d'un contrôle (commande). Le but est alors d'amener le système

d'un état initial donné à un état final prescrit en respectant éventuellement certaines critères, le but peut être aussi de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation. Du point de vu mathématique un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un Paramètre appelé le contrôle.

1.3.2 Position du problème

Un problème de contrôle optimal s'écrit sous la forme suivante [6] :

$$J(x, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt \longmapsto \min(\max) \quad (1.10)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (1.11)$$

$$x(0) = x_0 \in M_0 \quad (1.12)$$

$$x(T) = x_1 \in M_1 \quad (1.13)$$

$$u \in U, t \in I = [0, T].$$

Où M_0 et M_1 sont des variétés de \mathbb{R}^n . I est un intervalle de \mathbb{R} .

$x(0)$ est la position initiale du système, $x(T)$ est sa position terminale.

U est l'ensemble des applications mesurables, localement bornées sur I à valeurs dans $U \in \mathbb{R}^m$. L'objectif est de déterminer le contrôle optimal $u^*(t)$ qui permet de transférer le système (1.11) de l'état initial $x_0 \in M_0$ à l'état final $x_1 \in M_1$ en minimisant la fonctionnelle $J(x, u)$.

On appelle $J(x, u)$ le coût du contrôle ou fonction objective Cette fonctionnelle comporte deux parties :

1. $g(T, x(T))$ est le coût terminal. C'est une sorte de pénalité liée à la fin de l'évolution du système au temps final T , il a son importance lorsque T est libre, sinon il est constant.

2. $\int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt$ dépend de l'état du système tout au long de la trajectoire de la solution, définie par les variables d'état. Cette trajectoire dépend aussi du temps t mais surtout des variables de contrôle u . C'est une fonction d'efficacité de chaque commande sur l'intervalle $[0, T]$.

On distingue trois problèmes importants :

1.3.2.1 Problème de Lagrange

C'est le problème dont le critère à minimiser est égal à :

$$\int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt$$

c'est à dire $g = 0$.

1.3.2.2 Problème de Mayer

Dans ce cas le coût s'écrit :

$$J(x, u) = g(T, x(T)),$$

c'est à dire $f^0 = 0$, $J(x, u)$ est le coût terminal.

1.3.2.3 Problème de Mayer-Lagrange (Bolza)

Est donné sous la forme suivante :

$$J(x, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt$$

1.3.3 Critère d'optimisation

Nous rappelons les critères d'optimisation associés aux problèmes classiques de commande optimale des systèmes continus.

1.3.3.1 Commande à énergie minimale

Cette commande consiste à faire passer le système d'un état initial donné à un état final imposé en minimisant le coût énergétique. Le critère est de la forme :

$$\int_{t_0}^T u^t(t) R u(t) dt$$

L'instant initial t_0 , l'état initial $x(t_0)$, l'instant final T et l'état final $x(T)$ sont imposés. La matrice R est définie positive

1.3.3.2 Commande en temps minimal

En partant d'un état initial donné, le système doit atteindre l'état final imposé en un temps minimum. Ce problème n'a de sens que si la commande est limitée. Le critère est de la forme :

$$T - t_0 = \int_{t_0}^T dt$$

L'instant initial t_0 , l'état initial $x(t_0)$ et l'état final $x(T)$ sont imposés, l'instant final T est à déterminer.

1.3.3.3 Commande avec erreur terminale

Cette commande doit amener le système dans un état proche d'un état désiré x_d . Le critère doit comprendre un terme de la forme :

$$(x(T) - x_d)^t Q (x(T) - x_d)$$

L'instant initial t_0 et l'état initial $x(t_0)$ sont imposés, l'état final $x(T)$ est à déterminer et l'instant final T peut être libre ou imposé. La matrice Q est semi-définie positive.

1.3.3.4 Poursuite de trajectoire

C'est une commande qui minimise l'écart entre l'état instantané désiré $x_d(t)$ et l'état réel $x(t)$. Le critère comprend l'intégrale :

$$\int_{t_0}^T (x(t) - x_d(t))^t Q (x(t) - x_d(t)) dt$$

L'instant initial t_0 et l'état initial $x(t_0)$ sont imposés. La matrice Q est semi-définie positive.

1.3.3.5 Critère général

La forme générale du critère que nous utilisons est :

$$J(x, u) = g(x(T), T) + \int_{t_0}^T f^0(x(t), u(t), t) dt$$

où $f^0(x(t), u(t), t)$ est une fonction à valeur dans \mathbb{R} de classe C^1 de ses trois arguments et $g(x(T), T)$ est une fonction à valeur dans \mathbb{R} de classe C^1 de ses deux arguments, appelée coût final.

1.3.4 Contrôlabilité

La contrôlabilité est l'un des concepts centraux de la théorie du contrôle optimal, c'est la possibilité d'influencer l'état du système (sortie) en manipulant les entrées (commandes).

Définition 1.5

Le système $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, $x(0) = x_0$ est dit contrôlable si pour tous points $x_0 \in M_0$ et $x_1 \in M_1$, il existe un contrôle $u(\cdot)$ tel que la trajectoire associée à u relie x_0 à x_1 en un temps fini.

Ensemble accessible

Considérons le système dynamique suivant :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0, t \in I = [0, T]$$

Définition 1.6

L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en temps T est :

$$Acc(x_0, T) = \{x_u(T), u \in U\}$$

où $x_u(\cdot)$ est la solution du système (1.11) associée au contrôle u (voir Figure 1.1).

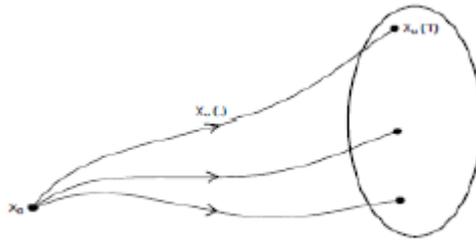


Figure 1.1 – Ensemble accessible

$Acc(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions du système (1.11), en temps T lorsque le contrôle u varie.

Définition 1.7 [7]

Le système (1.11) est dit contrôlable en temps T si :

$$Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n$$

il est dit contrôlable en temps quelconque t depuis x_0 si :

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{T \geq 0} Acc(x_0, T)$$

Pour ce problème de contrôlabilité, Kalman [28] a donné dès 1949 une caractérisation des systèmes linéaires autonomes, contrôlables en dimension finie. Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus compliqué. Il constitue un domaine de recherche actif.

1.3.4.1 Cas des systèmes linéaires

Définition 1.8

Le Système linéaire satisfait la condition suivante : $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$, où x et y sont des vecteurs d'entrée et μ, λ sont des scalaires et $f(\cdot)$ la sortie du système.

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), t \in I = [0, T], x(0) = x_0 \quad (1.14)$$

La solution du système (1.14) en temps t est :

$$x(t) = R(t)x_0 + \int_0^t R(t)R^{-1}(s)B(s)u(s)ds, t \in I = [0, T], x(0) = x_0$$

où $R(\cdot)$ est la résolvante, solution du système :

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = A(t)R(t), \\ R(0) = Id \end{cases}$$

où Id est la matrice identité.

Théorème 1.2 [7]

Le système (1.14) est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice

$$D = \int_0^T R^{-1}(t)B(t)B^t(t)R^{-1}(t)^t dt$$

est inversible. D est appelée matrice de contrôlabilité, où B^t est la transposée de B .

Remarque 1.3

Cette condition ne dépend pas de x_0 , mais dépend de T c'est à dire que si un système linéaire est contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il est contrôlable en temps T depuis tout points.

Systèmes linéaires autonomes

Le système linéaire autonome est un système invariant dans le temps décrit par :

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Autrement dit le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ est dit autonome lorsque les matrices A et B ne dépendent pas de t .

Dans ce cas, la matrice $R(t) = e^{tA}$, et la solution x du système associé au contrôle u s'écrit :

$$\forall t \in I, x(t) = e^{At} \left(x_0 + B \int_0^t e^{-As} (u(s)ds) \right)$$

Théorème 1.3 [7]

Le système autonome

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), t \in I = [0, T]$$

est dit contrôlable si la matrice :

$$K = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \text{ est de rang } n.$$

Remarque 1.4

$K \in M_{n,m}$ est appelée matrice de Kalman. La condition Rang $K = n$ est appelée condition de Kalman. Où $n \leq m$

1.3.4.2 Les problèmes non linéaires

La contrôlabilité est un concept clé pour la compréhension des propriétés structurelles et qualitatives, comme la stabilisation. L'extension de la contrôlabilité au cas non-linéaire de dimension finie et de dimension infinie a suscité depuis près de cinquante ans une littérature considérable, qui n'a en rien épuisé ce sujet riche et varié. Les auteurs, dans leur quasi-totalité, ont considéré des généralisations naturelles de $\dot{x} = Ax + Bu$. Le résultat suivant donne une condition sur la contrôlabilité locale des systèmes non-linéaires :

Proposition 1.3 [6]

Considérons le système $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, $x(0) = x^0$
 Avec $f(x^0, u^0) = u$, on note $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, u^0)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^0, u^0)$
 Si $\text{rang}(B \setminus AB \setminus \dots \setminus A^{n-1}B) = n$ alors le système est localement contrôlable en x^0

En général, le problème de contrôlabilité globale est difficile. Cependant, il existe des techniques qui permettent de déduire la contrôlabilité locale dans le cas des systèmes linéarisés.

1.3.5 Principe du maximum de Pontryagin

Théorème 1.4[13]

On considère le système de contrôle dans \mathbb{R}^n

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (1.17)$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n . On note U l'ensemble des contrôles admissibles dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps t .

$$J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt$$

Où $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ sont C^1 , et $x(\cdot)$ est la trajectoire solution (1.17) de associée au contrôle u .

On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 et minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non.

Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$

absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$ tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, et tels que, pour presque tout $t \in [0, T]$.

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)),$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)).$$

où $H(t, x, p, p^0, u) = \langle p^t f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u)$ est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$.

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v). \quad (1.18)$$

Si de plus si le temps final pour joindre la cible M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final T .

$$\max_{v \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)).$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) \in M_0$ et $x(T) \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)

$$p(0) \perp T_{x(0)} M_0$$

$$p(T) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(T)} M_1.$$

Remarque 1.5

La convention $p^0 \leq 0$ conduit au principe du maximum. La convention $p^0 > 0$ conduirait au principe du minimum, c'est à dire la condition (1.18) serait une condition de minimum.

Remarque 1.6

Lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle, la condition de maximisation devient

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

Problème de Lagrange

Dans ce cas le coût s'écrit :

$$J(t, u) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt,$$

i.e. $g = 0$. Les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint s'écrivent alors

$$p(0) \perp T_{x(0)} M_0 \quad (1.19)$$

$$p(T) \perp T_{x(T)} M_1$$

Remarque 1.7

Si par exemple $M_0 = \{x_0\}$, la condition (1.19) devient vide. Si au contraire $M_0 = \mathbb{R}^n$, i.e si le point initial n'est pas fixé, on obtient $p(0) = 0$. De même, si $M_1 = \mathbb{R}^n$ on obtient $p(T) = 0$. Autrement dit si le point final est libre alors le vecteur adjoint au temps final est nul.

Remarque 1.8

si le temps final n'est pas fixé alors la condition de transversalité sur le Hamiltonien devient alor

$$\max_{v \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = 0.$$

1.3.6 Méthodes de résolution

Dans la littérature, on trouve deux approches de résolution des problèmes de contrôle optimal :

- Les méthodes directes.
- Les méthodes indirectes.

1.3.6.1 Méthode directes[1]

Les méthodes directes consistent à discrétiser l'état et le contrôle.

L'état et le contrôle sont discrétisés et le problème est transcrit en un problème de programmation non-linéaire (NLP). Le NLP est résolu en utilisant des techniques d'optimisation bien connues. D'un autre coté, la solution optimale est trouvée en transformant un problème d'optimisation de dimension infinie en un problème d'optimisation de dimension finie. En discrétisant l'état et le contrôle, on se ramène à un problème (à N variables) de la forme

$$\min_{y \in C} F(y)$$

où

$$y = (x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^n).$$

$$C = (y, g_i(y)) \leq 0, \quad h_j(y) = 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, p$$

On considère donc une subdivision de l'intervalle $[0, T]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Selon cette subdivision, on considère (par exemple) des contrôles constants par morceaux, c'est à dire sur chaque sous intervalle $[t_{i-1}, t_i]$, la valeur du contrôle u_i , $i = 1, \dots, N$ est constante. Par ailleurs, on choisit une discrétisation de l'équation différentielle. Il en existe plusieurs, la plus basique étant la méthode d'Euler explicite donnée par la formule :

$$x^i = x^{i-1} + h_i f(t_{i-1}, x^{i-1}, u^i),$$

qui représente la version discrète de l'équation d'état $\dot{x} = f(t, x, u)$, avec $h_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, \dots, N$ Plus précisément, la méthode consiste à choisir les contrôles admissibles dans un espace de dimension finie, et à les substituer par des contrôles constants par morceaux, affines par morceaux, etc. D'autre part,

il existe une multitude de méthodes pour discrétiser une équation différentielle ordinaire : méthode d'Euler, méthode du point milieu, méthode de Heun, méthode de Runge-kutta, etc. Le choix de la méthode dépend du problème abordé. Cette discrétisation conduit au problème d'optimisation non linéaire

$$\min \sum_{i=1}^N h_i f_0(t_{i-1}, x^{i-1}, u).$$

$$x^i = x^{i-1} + h_i f(t_i, x^{i-1}, u) \quad i = 1, \dots, N, \quad x^1 = x^0, x^N = x^1$$

$$u^i \in U, i = 1, \dots, N.$$

1.3.5.2 Méthodes indirectes[1]

De 1950 à 1980, l'approche privilégiée pour résoudre les problèmes de contrôle optimal est celle des méthodes indirectes.

Les méthodes indirectes consistent à dériver les conditions d'optimalité, en utilisant soit le principe du maximum de pontryagin [13], soit en utilisant la programmation dynamique basée sur le principe de Bellman [25]

Les méthodes utilisées sont :

- la méthode de tir simple
- tir multiples
- la méthode de collocation indirecte .

Dans ce travail on illustre le principe générale de la méthode de tir.

Méthode de tir[1]

Pour illustrer le principe de la méthode, Considérons le problème de contrôle suivant :

$$\min_{t,x,u} J(x, u) = \int_0^T f^0(t, x, u) dt$$

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad x(0) = x^0 \in M_0, x(T) = x^1 \in M_1$$

$$u \in U$$

Et supposons dans un premier temps que le temps final T est fixe. Si l'on est capable, à partir de la condition du maximum du hamiltonien, d'exprimer le contrôle optimal en fonction de $x(t)$ et de $p(t), u = h(x, p)$, alors le système différentiel d'état et d'état adjoint peut s'écrire sous la forme :

$\dot{y}(t) = F(t, y(t))$, où $y(t) = (x(t), p(t))$. Les conditions initiales, finales, et les conditions de transversalité, se mettent sous la forme :

$$R(y(0), y(T)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R_1(y(0)) = 0 \\ R_2(y(T)) = 0 \end{cases}$$

On obtient alors le problème aux deux bouts (valeurs limites)

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = F(t, y(t)) \\ R(y(0), y(T)) = 0 \end{cases}$$

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = F(t, y(t)) \\ y(0) = y^0 \end{cases}$$

On note $y(t, y^0)$ la solution du problème de Cauchy dépendant de y^0 et on pose $S(y^0) = R(y^0, y(T, y))$ appelée fonction de tir. La résolution du problème aux deux bouts est alors équivalent à la recherche d'un zéro de la fonction de tir $S(y^0)$, c'est à dire $S(y^0) = 0$ qu'on peut résoudre par la méthode de Newton. Le tableau suivant résume les caractéristiques des méthodes directes et indirectes [7]

Méthodes directes	Méthodes indirectes
Mise en œuvre simple, sans connaissance a priori de la solution	Connaissance a priori de la structure de la trajectoire optimale
Facilité de la prise en compte des contraintes sur l'état	Difficulté théorique de la prise en compte de contraintes sur l'état
Contrôles (globalement) optimaux en boucle fermée	Contrôles (localement) optimaux en boucle ouverte
Précision numérique basse ou moyenne	Très grande précision numérique
Efficace en basse ou moyenne gourmandise en mémoire	Efficaces en toute dimension calculs parallélisables
Peu sensible au choix de la condition initiale	Très sensibles au choix de la condition initiale

Tableau 1.1 : la comparaison entre les méthodes directes et les méthodes indirectes.

On utilisera plutôt une méthode directe si :

- On n'a pas besoin d'une grande précision de calcul.
- La dimension d'espace est assez petite.
- On n'a aucune idée a priori de la trajectoire optimale recherchée, par exemple on ne sait rien sur la structure des commutations.
- On veut introduire facilement des contraintes sur l'état.

On utilisera plutôt une méthode indirecte si

- Si la dimension d'espace est assez grande.
- Si on a besoin de calculer la trajectoire optimale de manière très précise.
- Dans un deuxième temps, après avoir appliqué une méthode directe qui a donné une première approximation de la solution optimale.

Exemple

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$J(u) = \int_0^T dt \longrightarrow \min$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$|u(t)| \leq 1, t \in [0, T].$$

On cherche à résoudre le problème de temps minimal pour atteindre le point final $(-2; 2)$, en allant de l'origine en appliquant Le principe du maximum.

L'Hamiltonien du problème est :

$$H(t, x_1(t), x_2(t), p_{x_1}(t), p_{x_2}(t), p^0, u) = p_{x_1}(t)u(t) + p_{x_2}x_1(t) + p^0$$

où p_{x_1} et p_{x_2} sont les composantes du vecteur adjoint. Elles sont solutions du système

$$p_{x_1}(t) = \frac{-\partial H}{\partial x_1} = -p_{x_2}(t)$$

$$p_{x_2}(t) = \frac{-\partial H}{\partial x_2} = 0$$

ce qui est équivalent au système suivant :

$$p_{x_2}(t) = \text{Cste}$$

$$p_{x_1}(t) = -\lambda t + c$$

Reprenons l'expression de l'Hamiltonien :

$$H = p_{x_1}(t)u + p_{x_2}x_1(t) + p^0$$

alors quelque soit la valeur de p^0 .

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(p_{x_1}(t)u + p_{x_2}x_1(t))$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, u = \text{signe}(p_{x_1}(t))$$

De la, le contrôle extrémal sera le suivant :

$$u(t) = -1 \text{ si } p_{x_1}(t) < 0$$

$$u(t) = +1 \text{ si } p_{x_1}(t) > 0$$

On remarque que Les contrôles extrémaux ont en plus une commutation. Soit t_c , ce temps de commutation. La trajectoire obtenue pour $u(t) = +1$ sur $[0, t_c]$ est :

$$\begin{cases} u(t) = +1 \text{ sur } [0, t_c] \\ u(t) = -1 \text{ sur } [t_c, T] \end{cases}$$

Si $t \in [0, t_c]$, on obtient :

$$\begin{cases} x_1(t) = t. \\ x_2(t) = \frac{1}{2}t^2. \end{cases}$$

Si $t \in [t_c, T]$, on obtient :

$$\begin{cases} x_1(t) = -t + 2t_c \\ x_2(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t_c t - t_c^2 \end{cases}$$

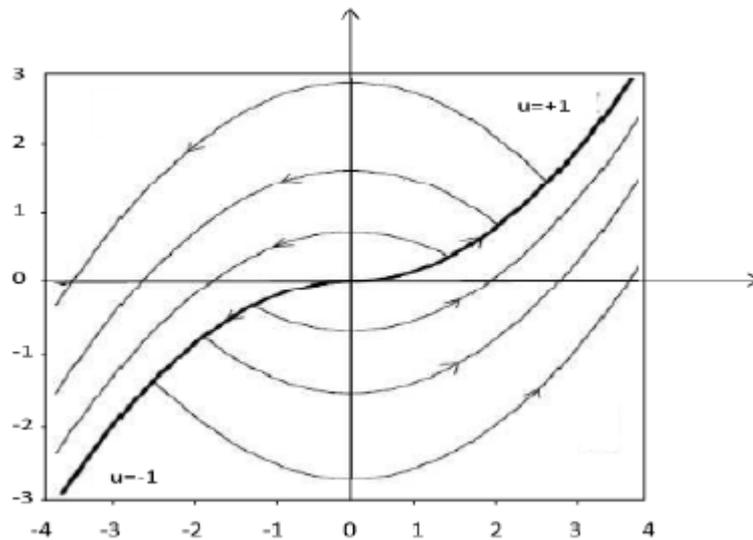


Figure 1.2 : Synthèse optimale

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté des notions générales sur les équations différentielles puis les méthodes numériques de résolution tels que la méthode de Newton, Euler et Runge kutta, ensuite on s'est intéressé à la théorie du contrôle ,dans laquelle on a abordé la contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires, les critères d'optimisation, les méthodes directes et les méthodes indirectes. A la fin de ce chapitre on a énoncé le principe du maximum de Pontryagin avec un exemple illustré.

Chapitre 2

Notions Générales sur Les Systèmes Dynamiques Hybrides

2.1 Introduction

D'une manière générale, un système hybride est un système dont l'évolution au cours du temps est décrite par un ensemble de lois mathématiques qui peuvent être de natures continues ou discrètes. Le développement massif de l'automatisation au XXe siècle s'est longtemps fait suivant deux types de technologies, mises en œuvre selon des méthodologies qui leur étaient propres et par des personnels d'origine différente : les systèmes à événements discrets et les systèmes continus.

Nous donnons dans ce chapitre en première partie quelques définitions générales puis nous procédons à une définition formelle des systèmes dynamiques hybrides. Nous introduisons une classification des systèmes dynamiques hybrides et chaque classe sera munie d'un exemple illustratif. Enfin, Nous présentons les différents moyens de modélisation des SDH.

2.2 Différentes Définitions

2.2.1 Systèmes statiques et systèmes dynamiques

Les systèmes statiques ont une sortie qui est toujours indépendante des valeurs passées de son entrée.

Les systèmes dynamiques ont une sortie qui dépend des valeurs passées de son entrée (système dépendant d'un paramètre qui est souvent nommé t temps). Les équations différentielles ou aux différences sont requises pour décrire le comportement des systèmes dynamiques.

2.2.2 Variable continue

Une variable est dite continue si elle peut prendre ses valeurs dans un ensemble continu de valeurs (donc non dénombrable) et ses variations ne présentent pas de discontinuités.

2.2.3 Système continu

Un système dynamique à temps continu est caractérisé par une évolution continue de ses variables ou états en fonction du temps. Ces variables peuvent prendre une infinité de valeurs, c'est à dire $X \subset \mathbb{R}^n$ avec l'ensemble X est l'espace d'état. Pour un système continu, Les dynamiques sont décrites par des équations différentielles et peuvent être définit comme suit :

Le système dynamique, d'état continu et de temps continu est décrit par un triple (X, U_c, F) ou l'ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est l'espace état, $U_c \subset \mathbb{R}^c$ est l'ensemble des commandes continues, et $F : X \times U_c \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteur décrivant la dynamique du système :

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u_c(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

avec $x \in X$ étant les variables d'états, $u_c \in U_c$ les commandes continues.

2.2.4 Variable discrète

Une variable est dite discrète si elle peut prendre ses valeurs dans un ensemble dénombrable de valeurs. Les variables $V_1 \in \{0, 1\}$ $V_2 \in \{-4, 1, 2\}$ $N \in \{B, M, H\}$, $P \in \{Arrêté, Démarré, Repos\}$ sont des variables d'état discrètes.

2.2.5 Système discret

Un système à évènements discrets est un système dynamique défini par un espace d'états discrets et des évolutions, nommées trajectoires, basées sur une succession des états et des transitions. Les transitions sont étiquetées par des symboles, appelés évènements. L'évolution d'un état discret à un autre est régie par l'occurrence d'un ou d'une suite d'évènements. Une approche courante pour l'étude des ces systèmes consiste à ignorer la valeur explicite de temps et à s'intéresser uniquement à l'ordre d'occurrence des évènements. En général, les SED sont représentés par des automates à états finis. Les automates à états finis sont décrits par un triple (Q, Σ, G) ou Q est un ensemble fini dont les éléments q sont les états ou localités discrets. Σ est l'ensemble des évènements et G est une fonction de transition. La fonction de transition définit le prochain état discret :

$$q^+ = G(q, \sigma)$$

où q^+ se rapporte à l'état discret après la transition qui est due à l'occurrence de l'évènement σ .

2.3 Définition des Système dynamiques hybrides

Les systèmes dynamiques hybrides (SDH) sont des systèmes dynamiques faisant intervenir explicitement et simultanément des phénomènes ou des modèles de type dynamique continu et évènementiel. Ces systèmes sont classiquement constitués de processus continus interagissant avec ou supervisés par des processus discrets.

Un SDH ou encore processus mixtes consiste en un système discret avec un environnement continu. On suppose que l'évolution d'un SDH est une séquence des pas continus alternée par des pas discrets. Dans chaque pas l'état du système hybride évolue d'une façon continue selon des lois dynamiques (équations différentielles par exemple) jusqu'à l'occurrence d'une transition discrète. Les transitions sont des états instantanés servent à séparer les évolutions d'état continues[3].

2.3.1 Définition formelle des Systèmes Dynamiques Hybrides

Nous proposons la définition formelle des systèmes dynamiques hybrides suivante :

Soit $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n, q(t) \in Q \subset \mathbb{N}^m, u_c(t) \in U_c \subset \mathbb{R}^e, u_d(t) \in U_d \subset \mathbb{N}^d$ et $t \in \mathbb{R}^+$ où n, m, e, d sont donnés.

L'ensemble X représente l'ensemble des états continus et l'ensemble Q représente l'ensemble des états discrets. L'ensemble U représente l'ensemble des commandes continues et l'ensemble U_c représente l'ensemble des commandes discrètes. La variable t représente le temps.

Soit $S = X \times Q$ et soit P un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n \times Q$. On définit l'état hybride $s(t) \in S$ du système à l'instant t par la donnée du couple $[x(t), q(t)]$ et on appelle SDH un système dynamique décrit par les équations suivantes pour $t \in [t_0, T]$:

$$\dot{x}(t) = F(x(t), q(t), u_c(t)) \forall s(t) \in S \cap CP \quad (3.1)$$

$$[x(t+), q(t+)] = G(x(t), q(t), u_d(t)) \quad si \quad \begin{cases} s(t) \in \partial P \\ u_d(t) \in U_d \text{ intervient} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (3.3)$$

$$q(t_0) = q_0 \quad (3.4)$$

La fonction F représente la dynamique continue du système hybride et G représente la dynamique hybride du système correspondant aux phénomènes hybrides décrits précédemment. L'ensemble P est celui des zones de déclenchement des phénomènes hybrides et ∂P est la frontière de P . La commande discrète $u_d(t)$ détermine les instants où la fonction G intervient (instants de commutation/saut). Elle détermine également le nouveau modèle ou l'amplitude du saut de l'état suivant l'action du phénomène hybride. Les fonctions F et G sont supposées suffisamment régulières pour que le système défini par les équations (3.1 – 3.4) admette une solution unique.

2.3.2 Action des phénomènes

On note τ l'instant où intervient une action discrète dont nous verrons ultérieurement comment elle peut être déclenchée. L'ensemble, action et déclenchement, est appelé phénomène hybride [17].

les actions des phénomènes hybrides sur le système continu sont de deux type :

Les phénomènes hybrides agissent sur la dynamique du système continu, modifiant ainsi cette dynamique. Le système hybride se situe alors $t \succ \bar{\tau}$ dans un autre mode de fonctionnement. On appelle ce phénomène commutation de modèle et $\bar{\tau}$ instant de commutation. Un exemple simple de modèle formel avec deux modes de fonctionnement est le suivant :

$$\dot{x}(t) = f_1(x, t) \text{ pour } t \prec \bar{\tau} \quad (3, 5)$$

$$\dot{x}(t) = f_2(x, t) \text{ pour } t \succ \bar{\tau} \quad (3, 6)$$

Les phénomènes hybrides agissent également sur le vecteur d'état du système, le faisant évoluer de manière différente pour $t = \bar{\tau}$. C'est-à-dire qu'à l'instant $\bar{\tau}$, l'état saute de $x(\bar{\tau}^-)$ à $x(\bar{\tau}^+)$ sans changement de modèle ($x(\bar{\tau}^-) \neq x(\bar{\tau}^+)$). On appelle ce phénomène saut de l'état. Un exemple de modèle formel est représenté par les équations suivantes :

$$\dot{x}(t) = f(x, t) \text{ pour } t \succeq 0 \text{ et } t \neq \bar{\tau},$$

$$x(\bar{\tau}^+) = x(\bar{\tau}^-) + g \quad g \neq 0.$$

Les deux actions peuvent être couplées. En effet, on peut considérer qu'à l'instant $\bar{\tau}$, on a une commutation de modèle et saut du vecteur d'état. Un exemple de modèle formel est le suivant :

$$\dot{x}(t) = f_1(x, t) \text{ pour } t \prec \bar{\tau},$$

$$x(\bar{\tau}^+) = x(\bar{\tau}^-) + g \quad g \neq 0,$$

$$\dot{x}(t) = f_2(x, t) \text{ pour } t \succ \bar{\tau}.$$

L'état continu du système, est alors ré-initialisation de $x(\bar{\tau}^-)$ à $x(\bar{\tau}^+)$. Notons que $\bar{\tau}^-$ et $\bar{\tau}^+$ correspondent respectivement aux limites à gauche et à droite de $\bar{\tau}$, et g la constante provoquant une discontinuité à l'instant $\bar{\tau}$.

2.4 Classification des Systèmes Dynamiques Hybrides

Dans cette partie, nous proposons une classification des phénomènes hybrides [16,18] intervenant dans les SDH, sachant qu'un SDH peut posséder plusieurs types de phénomènes. Ces phénomènes étant décrits par la fonction G , on définit les différents phénomènes hybrides suivant les propriétés de cette fonction G et notamment suivant son ensemble de départ, noté D et son ensemble d'arrivée, noté A .

Le tableau 2.1 montre, suivant l'ensemble de départ de la fonction G , le type de déclenchement correspondant

$D = X \times Q$	$D = U_d$
Déclenchement autonome	Déclenchement contrôlé

Tableau 2.1 : Déclenchements des phénomènes hybrides.

Le tableau 2.2 montre suivant l'ensemble d'arrivée de la fonction G , le type d'action correspondant.

$A = Q$	$A = X$
Commutation de modèle	Saut de l'état

Tableau 2.2 : Actions des phénomènes hybrides.

2.4.1 Commutation contrôlée

Les événements déclenchés par une commande discrète externe, provoquant un phénomène hybride est dit contrôlé.

Une Commutation contrôlée traduit un phénomène où le champ de vecteur $f(x, t)$ change de façon discontinue et instantanée en réponse à une entrée de commande.

Un système dynamique à commutations contrôlées ou switched system est un système hybride où la variable discrète $q(t)$ n'est pas vue comme une variable d'état mais comme une variable de contrôle. Ainsi, l'évolution de $q(t)$ n'est pas contrainte par un système de garde mais donnée par un individu extérieur (commande).

Exemple

Système mécanique : embrayage d'un véhicule automobile

Dans un véhicule automobile, l'embrayage est un dispositif d'accouplement entre le moteur et l'élément de transmission. Il est nécessaire parce que le moteur doit pouvoir continuer à tourner même si le véhicule est à l'arrêt. Le désaccouplement facilite aussi le changement de rapport de vitesse. Dans la Figure .2.1, J_1 et J_2 sont les moments d'inertie respectivement du moteur et de la chaîne de transmission. Le moteur applique un couple Q_1 qui fait tourner l'arbre à une vitesse w_1 , qui par l'intermédiaire de l'embrayage génère un couple appliqué à l'élément de transmission qui se traduit par une vitesse de rotation w_2 du véhicule. La vitesse d'un véhicule est continue par morceaux selon trois phases de fonctionnement (états discrets) pour le dispositif d'embrayage :

1. En position embrayée : l'embrayage transmet intégralement la puissance fournie (la voiture roule et l'axe moteur est lié à l'axe des roues). Quand le véhicule roule, l'embrayage doit assurer une transmission complète du couple moteur, c'est à dire sans glissement.

2. En position débrayée : La situation est équivalente au point mort. L'embrayage désaccouple temporairement le moteur et les roues lors des changements de rapports de vitesses. La transmission est interrompue. Le moteur peut continuer à tourner sans entraîner les roues.
3. En phase transitoire de glissement : au démarrage du véhicule, l'embrayage assure un accouplement progressif entre l'arbre moteur et l'arbre de transmission. Pendant cette phase, l'arbre moteur et l'arbre de transmission ne tournent pas à la même vitesse ; il y a alors glissement entre les disques, donc dissipation d'énergie, sous forme de chaleur.

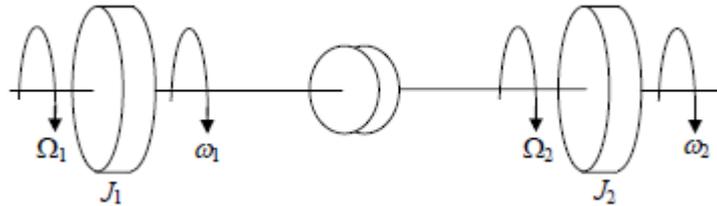


Figure 2.1 – Système d'embrayage mécanique

Lorsque les axes de rotation sont indépendants le système est débrayé le modèle mathématique est donné par

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

Quand les axes de rotation sont couplées le système est embrayé, les vitesses de rotation sont identiques et le système peut être décrit par l'équation

$$\begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

D'une manière plus générale, le système peut donc être décrit par une équation sous la forme :

$$I_k \dot{x} = A_k x + B_k u$$

Où les matrices I_k , A_k et B_k dépendent de l'état k du système. Nous avons donc une équation d'état dans laquelle figure la représentation hybride décrivant la dynamique continue du système dans ses différents états.

2.4.2 Saut contrôlé

Dans ce cas, le comportement est exprimé par un changement de façon discontinue de l'état en réponse à une commande.

ce type de comportement est présent dans les systèmes électrotechniques, avec des entrées de types impulsionnels, ou du type d'un modèle de stock ou le dépôt des quantités C_1 , C_2 , C_3 ... de matières aux instants t_1 , t_2 , t_3 ...

Exemple

C'est le cas du montant dans un compte pendant des opérations de virement ou de retrait. Aussi c'est le cas pour le débit lors de l'ouverture et la fermeture d'une vanne dans un procédé physico-chimique sous l'hypothèse que la fermeture et l'ouverture des vannes sont des gestes instantanés.

2.4.3 Commutation autonome

Une commutation autonome caractérise un phénomène où le champ de vecteur $f(x, t)$ change de façon discontinue lorsque l'état x atteint certains seuils .

Exemple

Système informatique : Disque dur

Un disque dur est un boîtier où l'on trouve des plateaux rigides en rotation. Les faces de ces plateaux sont recouvertes d'une couche magnétique sur laquelle sont stockées les données. Ces données sont écrites en code binaire $[0,1]$ sur le disque grâce à une tête de lecture/écriture. Suivant le flux électrique continu qui traverse cette tête, le champ magnétique local est modifié pour écrire soit un 1, soit un 0, à la surface du disque. Pour lire, c'est le même principe qui est utilisé, mais dans l'autre sens : le champ magnétique local engendre un flux électrique au sein de la tête qui dépend de la valeur précédemment écrite, pour lire un 1 ou un 0. Les phénomènes de lecture noté R et d'écriture noté W peuvent décrire l'état discret du système. On aura deux états de fonctionnement du système :

1. $(R, W) = (1, 0)$: le système est en mode de lecture.
2. $(R, W) = (0, 1)$: le système est en mode d'écriture.

Donc un disque dur est un SDH dont les phénomènes continus sont la rotation des plateaux et les phénomènes discrets sont le mode lecture, le mode écriture et l'information portée par le champs électrique (il peut également recevoir des commandes symboliques comme la réinitialisation et des messages d'erreurs).

2.4.4 Saut autonome

Dans ce cas, lorsque l'état atteint une certaine région de l'espace d'état, la transition subit un saut de type autonome, c'est à dire qu'il passe de façon discontinue de sa valeur courante à une autre.

Généralement, dans le cas des systèmes à saut autonome, le système possède un seul mode de fonctionnement et une seule transition autorisant la ré-initialisation de la variable continue.

Exemple

Un exemple de ce phénomène est donné par la collision de deux corps où la vitesse change brutalement et subit un saut.

Considérons, par exemple, une table de billard de longueur l et de largeur h , avec une boule, comme l'illustre la Figure 2.2

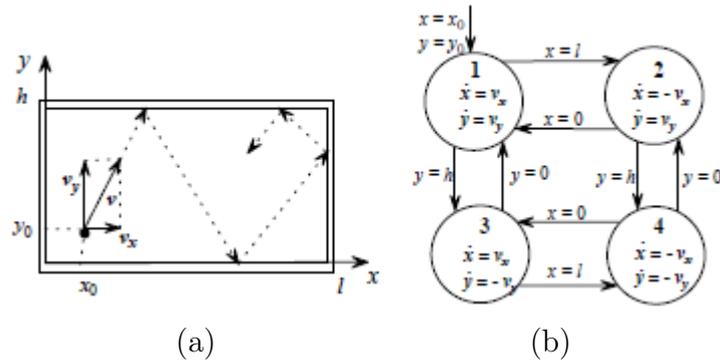


Figure 2.2 (a) .Trajectoire d'une boule de billard et (b) Automate associé

La position initiale de la boule est (x_0, y_0) et après avoir été frappée elle commence à se déplacer avec une vitesse v . Quand la boule arrive à un coté de la table parallèle à l'axe y , elle rebondit et le signe de la composante de la vitesse v_x change. De même, le signe de la composante de la vitesse v_y change lorsque la boule arrive à un coté parallèle à l'axe x . La combinaison des signes des composantes de la vitesse donne quatre directions différentes du mouvement de la boule. Le vecteur de la vitesse peut avoir quatre états différents $[v_x, v_y]T, [-v_x, v_y]T, [v_x, -v_y]T$ et $[-v_x, -v_y]T$. Chaque état de la vitesse caractérise une dynamique des variables x et y , représentée par un sommet de l'automate. Le passage d'une dynamique à une autre est modélisé par les arcs de l'automate et se produit lorsque la boule atteint un coté de la table, c'est-à-dire, quand x atteint les valeurs 0 ou l et/ou y atteint les valeurs 0 ou h .

Remarque

En réalité, un saut d'état ou une commutation ne sont pas rigoureusement instantanés. Mais le fait que leurs durées sont très inférieures aux durées physiques d'évolution du système, ils sont considérés comme tels dans l'approche hybride. Par exemple, dans la cas d'un moteur électrique entraînant une charge, les temps de commutation de l'électronique de puissance (quelques microsecondes) sont très inférieurs aux constantes de temps électriques (quelques millisecondes), mécaniques (quelques secondes), ou thermiques (quelques minutes) du moteur lui même.

2.5 Approches de modélisation

De façon générale, un système hybride sera modélisé par un ensemble de systèmes à Dynamique continue interagissant avec un ou plusieurs systèmes à évènements discrets. Il y a en général trois classes principales des approches de modélisation des systèmes dynamiques hybrides (SDH)[23] :

- l'approche continue
- l'approche événementielle
- l'approche mixte

2.5.1 L'approche continue

Elle s'agit d'étudier le comportement des modèles continus en présence des discontinuités, Et éventuellement, de définir un modèle étendu, c'est-à-dire consiste à définir une approximation des dynamiques discrètes du système hybride par des équations différentielles (ou aux différences) pour modéliser l'occurrence des évènements discrets. L'idée est qu'en utilisant une approche unifiée dans le domaine des systèmes continus, où les théories sont bien établies (les questions de stabilité et d'observabilité...) pourront être étudiées selon les théories classiques.

2.5.2 L'approche événementielle

Contrairement à l'approche continue, cette approche est purement discrète, elle consiste à Modéliser les systèmes hybrides en supprimant les dynamiques continues ou à faire une Approximation de l'évolution continue de façon à ce que le système hybride soit représenté uniquement par les évènements qui le caractérisent. La modélisation événementielle d'un SDH permettra ainsi de faire appel à la théorie classique de superviseur des SED (Systèmes à Évènement Discret) pour la synthèse d'un modèle de commande.

2.5.3 L'approche mixte

Dans les sections précédentes, des approches d'intégration des aspects hybrides dans des Modèles continus ou événementiels. Cependant, dans la structure de ces modèles l'interaction entre la partie continue et événementielle n'est pas représentée explicitement. L'approche mixte repose sur la supposition que le fonctionnement d'un système hybride est une séquence de deux phases. La première étape correspond à une transformation de l'état continu décrite en terme de temps écoulé durant cette phase. Dans la seconde étape, l'état est soumis à un changement discret instantané. Ainsi, les modèles développés dans le cadre de cette approche reposent sur l'interaction de deux sous-modèles, l'un pour les aspects événementiels, basé sur les automates à états finis, et l'autre, formalisé par des équations d'état (souvent par des équations différentielles) pour les aspects continus. Chacun des aspects, continu ou événementiel, est ainsi décrit sous une forme classique est l'aspect hybride est clairement pris en compte dans l'interface entre les deux sous-modèles. L'aspect événementiel influe sur le modèle continu en validant certaines des équations continues en fonction de l'état discret actif et l'aspect continu agit sur le modèle événementiel en validant ou en forçant le franchissement de certaines transitions .Parmi les outils de modélisation résultant de cette approche mixte, on retrouve : les automates hybrides représentant le modèle formel fondamental de cette approche, les états durs hybrides pour apporter des solutions aux problèmes posés par la spécification des modèles, en particulier de la structuration hiérarchisée .

2.6 Modélisation des systèmes dynamiques hybrides

Plusieurs méthodes de modélisation des systèmes dynamiques hybrides ont été proposées dans la littérature : automate hybride[2], les réseaux de Petri ,modélisation par interface...

La modélisation des systèmes dynamiques hybrides est une étape importante qui permet l'étude et la mise au point d'une loi de commande .Elle consiste à proposer des modèles précis qui peuvent décrire le comportement riche et complexe des systèmes dynamiques hybrides. Ce domaine a reçu l'attention des chercheurs ,et plusieurs formalismes ont été proposés afin d'établir un modèle homogène permettant la conciliation entre les parties discrètes et continues .Les modèles les plus utilisés pour la représentation des systèmes hybrides sont décrits ci-dessous.

2.6.1 Modélisation des SDH par les automates hybrides

Une brève description est présentée sur la notion des automates hybrides[2], les automates hybrides sont issus des automates à états finis classiques ,ils combinent les parties continues et discrètes dans une même structure . Les sommets du graphe contiennent les informations sur l'état continu et discret du système et les arcs reliant les sommets sont franchis lorsque une condition spécifiée sur les valeurs des variables continues et/ou discrètes est vérifiée. L'automate hybride est défini comme une extension de l'automate discret en associant une évolution continue à chaque état discret. La composante continue est décrite par un ensemble d'équations différentielles et la composante discrète par un automate à état fini. Un automate hybride évolue par une alternance de pas continu, où les variables d'état et le temps évoluent de façon continue, et de pas discrets où plusieurs transitions discrètes et instantanées peuvent être franchies. D'un point de vue informel et général, un automate hybride apparaît ainsi comme un automate à état fini pilotant un ensemble d'équations différentielles modélisant la dynamique continue du système. Le modèle est composé d'un ensemble fini des variables réelles X et d'un graphe d'évènement étiqueté (S, E) . L'ensemble S est composé par les sommets du graphe et les éléments de l'ensemble E représentent les transitions discrètes. L'état de l'automate change instantanément lors de l'occurrence d'un évènement discret ou par écoulement du temps lors de la variation d'une condition logique spécifiée sur la valeur de la variable continue. (exemple du thermostat ...).

Définition

T.A. Henzinger donne dans[29] une définition plus complété des automates hybrides :

- $H = (X, V, f, E, Saut, \Sigma, Evénement, Initial, Final)$
- X l'ensemble des variables d'état continues et \dot{X} l'ensemble des dérivées des variables continues.
- V l'ensemble des modes de fonctionnement du SDH .
- Un état hybride (v, a, \dot{a}) est composé d'un mode de fonctionnement $v \in V$, d'une variable $a \in X$ et de sa dérivée par rapport au temps $\dot{a} \in \dot{X}$.
- f une fonction qui attribue à chaque mode de fonctionnement $v \in V$ une condition sur l'évolution des variables continues dans ce mode de fonctionnement. Tandis que l'automate est dans le mode de fonctionnement v , les variables d'états continues évoluent suivant des trajectoires différentielles pour lesquelles les valeurs des variables et de leur première dérivée satisfont les conditions d'évolution. Un exemple de condition d'évolution pour une variable $x \in X$ est : $1 \leq x \leq 3 \wedge \dot{x} = -x + 5$.

- L'état (v, x, \dot{x}) est admissible si $(x, \dot{x}) \in f(v)$. L'invariant pour le mode v est le prédicat $inv(v) = (\exists \dot{X} \cdot f(v))$ sur V . L'automate reste dans le mode v tant que l'invariant est vérifié. L'invariant de l'exemple précédent est : $1 \leq x \leq 3$.
- E l'ensemble des séquences de commutation entre les différents modes de fonctionnement.
- Saut une fonction qui attribue une condition sur chaque commutation $e \in E$. La condition Saut(e) .
- Σ un ensemble d'évènements, et Évènement est une fonction qui attribue à chaque commutation $e \in E$ un évènement $\varepsilon \in \Sigma$.
- Initial une fonction qui attribue à chaque mode de fonctionnement $v \in V$ des conditions initiales.
- Final une fonction qui attribue à chaque mode de fonctionnement $v \in V$ des conditions finales.

2.6.1.1 Automate hybride à état fini

L'automate hybride est une extension des automates à états finis[22]. Un automate hybride à états finis noté AEF , qui peut prendre un nombre fini d'états .Il est défini par le schéma suivant :

$$AEF = \{Q, \Sigma, f, I, F\}$$

$Q = \{q_0, q_1, \dots, q\}$: Ensemble fini d'états discret aux états de fonctionnement de la machine .

$\Sigma = \{\varrho_0, \varrho_1, \dots, \varrho_m\}$: Ensemble de symboles représentant les transitions d'états.

f est la fonction qui associe à chaque état et à chaque symbole de transition un ensemble d'état, c'est la fonction de transitions d'état.

$$\Gamma : Q \times \Sigma \longrightarrow Q' \subseteq Q$$

$$(q, \varrho) \longmapsto Q' \subseteq Q$$

$I \subseteq Q$ est l'ensemble des états initiaux.

$F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux.

Exemple

Soit un serveur donné par la figure suivante

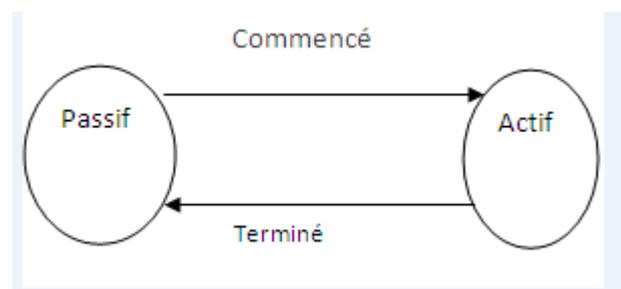


Figure 2.3 modélisation d'un serveur à deux états

Le serveur est libre lorsqu'il est dans l'état passif, et il est occupé dans l'état actif. La figure précédente est une représentation graphique d'un *AEF* à deux états, tel que :

$$\begin{aligned}
 Q &= \{\text{Actif}, \text{passif}\}. \\
 \Sigma &= \{\text{commencé}, \text{Terminé}\} \\
 I &= \{\text{passif}\} \\
 F &= \{\text{Actif}\} \\
 f \{\text{passif}, \text{commencé}\} &= \{\text{Actif}\}. \\
 f \{\text{actif}, \text{terminé}\} &= \{\text{passif}\}.
 \end{aligned}$$

2.6.2 Modélisation des SDH par les réseaux de Petri hybrides

Les réseaux de Petri sont proposés pour la première fois par Petri (1962), dans le but de représenter des systèmes à évènements discrets. Une limite pratique de réseaux de Petri intervient lorsque le nombre de jetons est très grand. En effet, cela provoque une augmentation du nombre d'états atteignables, ce qui conduit à la définition des réseaux de Petri continus. Dans ce modèle, les marquages de places sont des nombres réels mais strictement positifs, et le franchissement de transition est un processus continu.

La modélisation des systèmes hybrides conduit naturellement aux réseaux de Petri hybrides, contenant des places et des transitions continues, et des places et des transitions discrètes, le marquage d'une place continue est représentés par un nombre réel, dont l'unité est appelée marque, et le marquage d'une place discrète est représenté par un nombre entier dont l'unité est appelée jeton.

A fin de mettre en évidence le couplage entre la dynamique discrète et la dynamique continue du système, le graphisme des RDP hybrides est réalisé en adoptant les conventions suivantes :

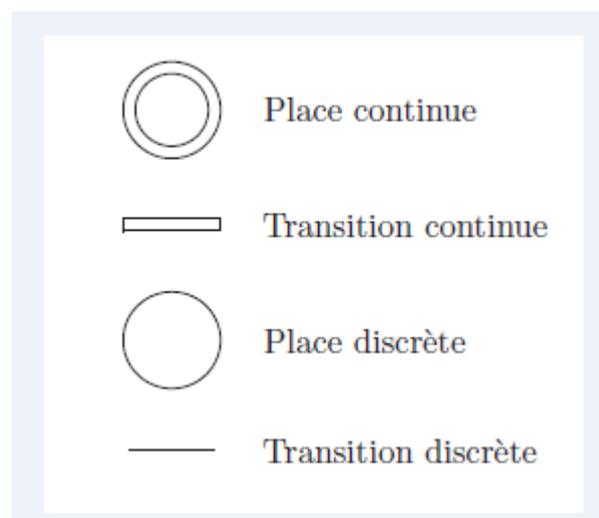


Figure 2.4 : places et transitions d'un RDP hybride

Exemple

Considérons une vanne notée V_1 , qui commande le remplissage du bac R_2 , cela fait intervenir une variable discrète dont l'action peut être modélisée par un RDP généralisé.

Enfin, une fois le bac R_2 est rempli, 60 % du produit va dans un bac R_3 commandé par la vanne V_2 avec un débit v_2 , ensuite, le reste du produit va dans un bac R_4 commandé par la vanne V_3 avec un débit v_3 . ce système peut être modélisé par le RDP hybride dans la figure suivante :

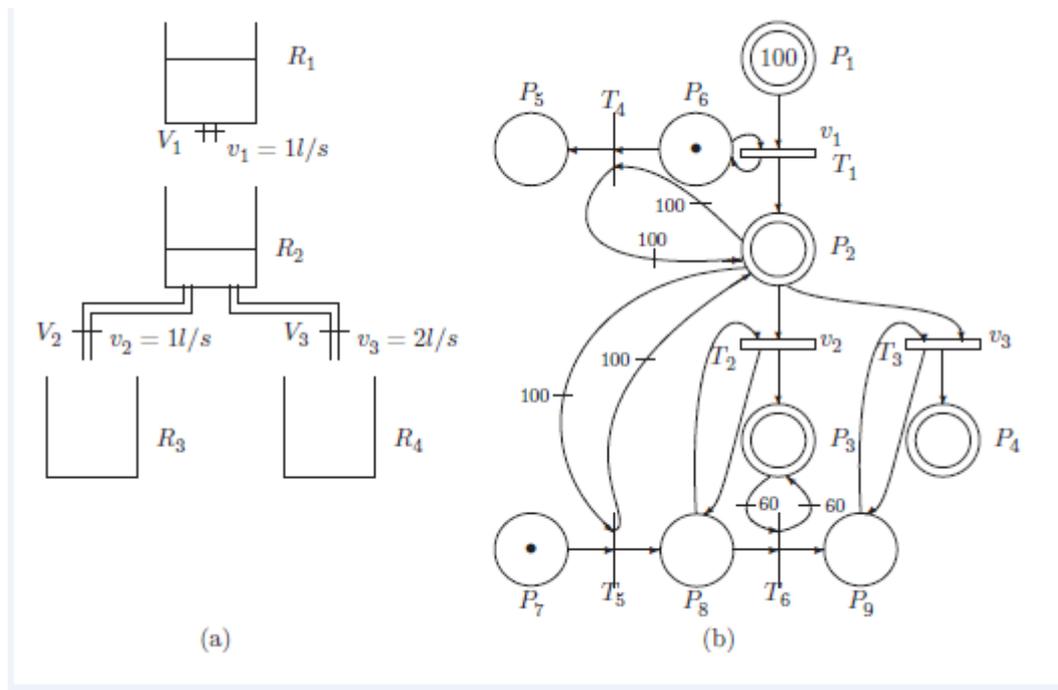


Figure 2.5 : exemple modélisé par un RDP hybride.

2.6.3 Modélisation des SDH par les systèmes à interface

La simulation a pour objectif de décrire l'évolution de l'état généralisé $[5]x = [x_c, x_d]$, où x_c est continu et x_d discret, en fonction du temps t . Les commandes appliquées u comportent des commandes discrètes, u_d , constantes par morceaux, et des commandes continues, u_c , supposées sans discontinuités sur les intervalles de temps où x_d est constant.

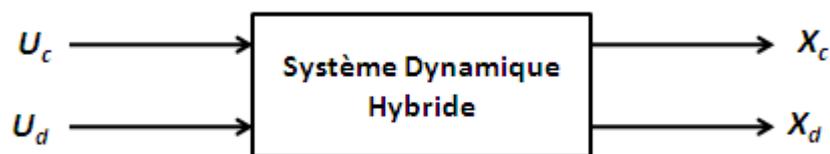


Figure 2.6 Modélisation globale d'un système hybride

L'état généralisé x évolue suivant une fonction de transition d'état qui fournit l'état x à l'instant t , quand l'état initial est $x(t_0)$ et la commande u est appliquée sur l'intervalle $[t_0, t]$:

$$x = \varphi(t, t_0, x(t_0), u).$$

Nous ne nous intéresserons ici qu'aux systèmes pour lesquels la fonction est dérivable par rapport à t sur tout intervalle où x_d est constant.

Le système hybride peut alors être structuré autour des parties suivantes figure suivante

Un système dynamique continu S_c dont l'évolution est décrite par une fonction de transition continue qui dépend de la valeur de x_d

$$x_c(t) = \varphi(t, t_0, x_c(t_0), x_d, u_c).$$

t_0 étant l'instant initial de l'évolution. Du point de vue de la partie continue, x_d peut être considéré comme le numéro du modèle actif.

Nous n'envisagerons que les systèmes pour lesquels cet état continu global x_c est solution d'un système différentiel :

$$\frac{dx_c}{dt} = f(x_d, x_c, t, u_c).$$

On dit que le champ de vecteurs f est indicé par x_d . Le modèle peut être complété en y faisant apparaître des variables de sortie s_c , mesurables sur le système physique,

un système à événements discrets S_d dont l'évolution est décrite par une fonction de transition discrète φ_d :

$$x_d(t^+) = \varphi_d(t, x_d, x_c(t), u_d).$$

où t^+ est l'instant suivant immédiatement la commutation. L'état discret x_d évolue ainsi en fonction des entrées discrètes u_d mais aussi en fonction de l'évolution de x_c . Le système discret S_d décrit les parties « logiques » du système, y compris le comportement événementiel du processus et l'automate qui sert à calculer l'indice du modèle continu actif. Comme pour le système continu, on pourra compléter S_d par une équation de sortie fournissant les variables booléennes (TOR) s_d mesurables et susceptibles d'agir sur un autre système.

des liaisons entre ces deux systèmes S_d et S_c pour exprimer que l'état discret x_d indice le champ de vecteur f du système continu et que la fonction de transition φ_d d'état discrète dépend de x_c .

La liaison $S_d \rightarrow S_c$: elle s'effectue par la notion d'indice ou de numéro du modèle continu actif. Parallèlement au numéro du modèle actif, la liaison $S_d \rightarrow S_c$ fournit également l'état initial du système continu lorsque le changement de modèle s'accompagne d'une discontinuité dans l'état continu.

la liaison $S_c \rightarrow S_d$: si l'état discret est constant par morceaux, on peut exprimer ces liaisons par la notion d'interface. En effet, φ_d ne dépend de x_c que de manière discrète.

φ_c fonction de x_c , est constante sur des domaines qui peuvent dépendre de la valeur de l'indice q . L'application qui à x_c fait correspondre les valeurs des fonctions d'appartenance à ces domaines porte le nom d'interface.

Il est important que l'indice q reste constant sur des intervalles de longueur non nulle :

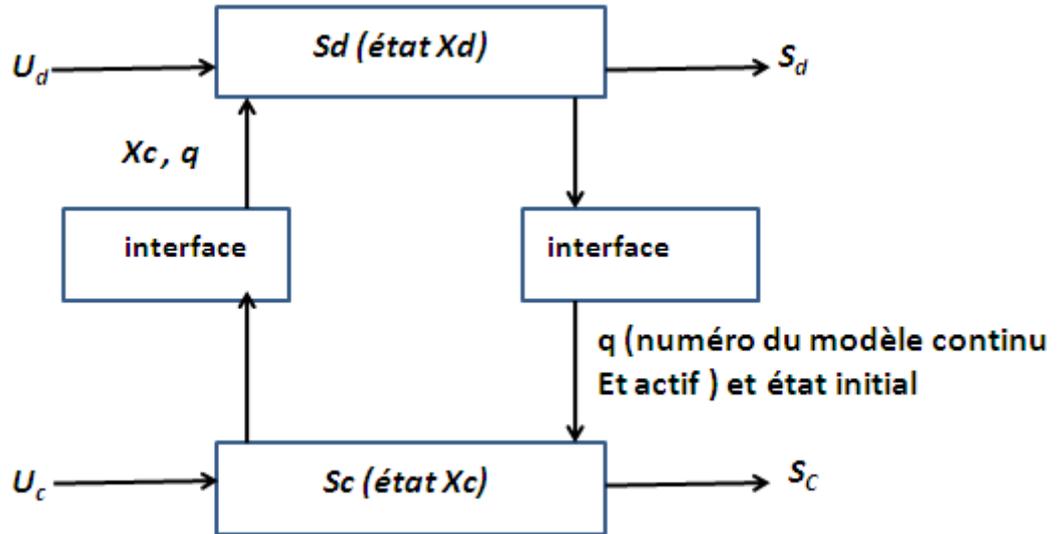


Figure 2.7 Modélisation continu/discret d'un système hybride

2.7 Formulation du problème de commande

En toute généralité , il est possible de définir un système hybride de la manière suivante : pour un ensemble fini d'état discrets $Q = q_1, q_2, \dots, q_{r+1}$. on associe une famille d'équations différentielles :

$$\dot{x}(t) = f_{q_i}(x(t), u(t), t)$$

Où

$$q_i \in Q, i = 1, \dots, r + 1$$

L'état continu $x(t)$ prend ses valeurs dans \mathbb{R}^n .

La commande continue $u(t)$ prend ses valeurs dans l'ensemble U inclus dans \mathbb{R}^m .

Le champs f_{q_i} est défini sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0, T], \forall q_i \in Q$,

Nous supposons donc de manière très générale qu'un changement d'état discret q_i est déterminé par la donnée d'une fonction de transition discrète φ

$$q(t^+) = \varphi(x(t^-), q(t^-), v(t), t),$$

Où $v(t) \in \Omega_c$ représente la commande discrète.

La variable discrète $q(t)$ est une fonction du temps constante par morceaux.

Les notations t^+ et t^- correspondent respectivement aux limites à gauche et à droites de t .

Un ensemble de fonctions de saut $\phi(q_i, q_{i+1})(x(t^-, t))$.

Avec l'occurrence d'une transition de q_i vers q_{i+1} , où $i = 1, \dots, r$ l'état continu est réinitialisé de $x(t^-) \in \mathbb{R}^n$ vers $x(t^+) \in \mathbb{R}^n$.

Posons $[t_0, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_r, \tau_{r+1} = T]$ et $q_i \in Q = q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_{r+1}$ les suites respectivement des instants de commutations et des modes associés à la commande $(u, v)(t)$ sur l'intervalle $[t_0, T]$.

$$J(u, v) = \int_{t_0}^T L_{q(t)}(x(t), u(t), t) dt = \sum_{i=0}^{\tau} L_{q_i}(x(t), u(t), t) dt$$

une commande $(u, v)(t)$ est alors une commande qui minimise J sur l'intervalle $[t_0, T]$.

2.8 Principe du maximum pour les SDH

Le principe du maximum de Pontryagin est un outil puissant pour rechercher les trajectoires optimales d'un système. L'idée principale est d'exploiter les conditions nécessaires d'optimalité dans chaque mode de fonctionnement d'un système hybride [9,39,54]. Une difficulté de la mise en œuvre d'une telle méthode réside dans le calcul de l'état adjoint à un instant donné, indispensable pour résoudre le problème de maximisation l'hamiltonien.

Théorème [14]

On introduit l'hamiltonien H_q associé au système hybride :

$$H_{q_i}(\lambda, \lambda^0, x, u, t) = \lambda^t f_{q_i}(x, u, t) - \lambda^0 L_{q_i}(x, u, t).$$

Si le contrôle u est optimal sur l'intervalle de temps $[t_0, T]$, alors il existe une application non triviale $\lambda: [t_0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$ absolument continue par morceaux telle que :

pour tout $t \in [t_0, T]$ $(\lambda^*, \lambda^0, x^*, u^*)(t)$, vérifie la condition du maximum

$$H(\lambda^*, \lambda^0, x^*, u^*, t) = \sup_{u \in U} H_{q_i}(\lambda^*, \lambda^0, x^*, u, t).$$

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H_{q_i}}{\partial \lambda}(\lambda, \lambda^0, x, u, t),$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H_{q_i}}{\partial x}(\lambda, \lambda^0, x, u, t).$$

$H_{q_i}(\lambda, \lambda^0, x, u, t) = 0$ le long de la trajectoire optimale .

-A chaque instant de transition τ_i entre deux modes q_i et q_{i+1} , les conditions de transversalité s'écrivent :

- Si τ_i est un instant de transition depuis le mode q_i vers le mode q_{i+1} alors :

$$\lambda(\tau_i^+) = \lambda(\tau_i^-) - \frac{\partial C_{q_i, q_{i+1}}^t(x(t), t)}{\partial x} \pi / t = \tau_i,$$

$$H(\lambda, \lambda^0, x, u, \tau_i^+) = H_{q_i}(\lambda, \lambda^0, x, u, \tau_i^-) + \frac{\partial C_{q_i, q_{i+1}}^t(x(t), t)}{\partial x} \pi / t = \tau_i.$$

avec π un vecteur de dimension p .

-Si τ_i est un instant de transition non contraint depuis le mode q_i vers le mode q_{i+1} alors :

$$\lambda(\tau_i^+) = \lambda(\tau_i^-),$$

$$H_{q_i}(\lambda, \lambda^0, x, u, \tau_i^+) = H_{q_i}(\lambda, \lambda^0, x, u, \tau_i^-)$$

$\lambda(t)$ doit vérifier aux instants initiaux et finaux les conditions de transversalités :

$$\lambda(t_0) \in N_{C_0}(x(t_0))$$

$$\lambda(T) \in N_{C_f}(x(T)) - \lambda \frac{\partial \phi_{q_{r+1}}(x(T), T)}{\partial x}.$$

Où $N_C(x)$ représente le sous espace normal à C au point x , C_0 et C_f définissent respectivement les frontières des ensembles X_0 et X_f .

2.9 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de mieux situer les SDH par rapport aux systèmes continus et aux systèmes à événements discrets grâce notamment à une analyse des phénomènes hybrides. Une définition formelle a été donnée et différents moyens de représentation des SDH ont été présentés. Nous avons proposé également une classification des SDH dans laquelle nous avons associé à chaque classe le type de problème de commande qui lui correspond.

Chapitre 3

Contrôle optimal à système dynamique hybride à commutation autonome

3.1 Introduction

Nous traitons dans ce dernier chapitre un problème de contrôle optimal de Système Dynamique Hybride, de classe commutations de modèle autonomes, avec un problème de commande .

Nous avons choisi un thermostat, cas simple et classique de SDH. En effet, de nombreuses approches proposées pour la description et l'analyse des SDH sont souvent illustrées à l'aide d'un système dont la fonction est de maintenir constante la température d'un local. L'exemple du thermostat, comme un des plus simples systèmes hybrides, a été développé par [16] et [9] et analysé par la théorie des automates hybrides. Dans [10] ce thermostat est représenté comme un contrôleur autonome intelligent pour la commande hybride du système.

Pour notre part, nous modélisons dans un premier temps ce système pour obtenir des équations différentielles. Nous le représentons également sous différentes formes présentées au préalable, à savoir un automate hybride.

Nous posons ensuite un problème de commande continue : l'optimisation du fonctionnement d'une régulation thermique où un thermostat à résistance anticipatrice est choisi comme régulateur. Notre but est de maintenir la température la plus proche possible d'une valeur désirée tout en ayant les plus faibles variations possibles de la température autour de cette valeur désirée à fin de minimiser l'énergie. Nous introduisons de cette manière un des problèmes de commande optimale.

Enfin, nous effectuons une mise en œuvre numérique à l'aide de logiciel Matlab .

3.2 Le système étudié

Le système étudié est une régulation de température utilisée pour des constructions dont les différentes parties du local présentent des besoins thermiques égaux. Un thermostat d'ambiance est placé dans un local approprié, dit témoin. Son rôle est de maintenir la température de ce local constante.

Le régulateur de température utilisé est un thermostat d'ambiance (figure 3.1) à action tout ou rien (TOR) équipé d'une résistance anticipatrice R. Quand la température du local témoin varie, les deux bandes de métal, qui

forment le bilame, se dilatent ou se contractent en fonction de la consigne et ceci provoque l'ouverture ou la fermeture de l'interrupteur c . Pour une température inférieure à la consigne, le bilame se contracte et ferme l'interrupteur c . Ainsi, la résistance R est alimentée et commence à chauffer l'environnement du bilame. En même temps un signal, constitué par le courant qui traverse la résistance, est envoyé vers l'organe de commande, c'est - à-dire que le brûleur est alimenté en gaz.

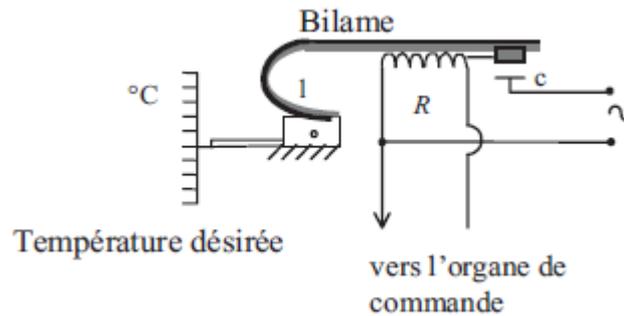


Figure 3.1 : Schéma fonctionnel d'un thermostat d'ambiance à action tout-ou-rien équipé d'une résistance anticipatrice R

Pour maintenir la température dans ce local. Le système étudié est composé par un système de chauffage et un capteur de température. Les seuils inférieur et supérieur du thermostat sont fixés à des valeurs θ_m et, respectivement, θ_M , tel que $\theta_m < \theta_M$. Le système de chauffage est en marche tant que la température dans la chambre est inférieure au seuil θ_M . Le chauffage est arrêté lorsque le capteur détecte le seuil supérieur θ_M et il reste en arrêt jusqu'au moment où la température chute au-dessous du seuil inférieur θ_m .

3.3 Modélisation du système étudié

La température du local et le thermostat peuvent être vus comme un système dynamique dont l'évolution continue est définie par la variation de la température θ dans le local et l'évolution discrète par le passage de l'état en marche du système de chauffage dans l'état d'arrêt.

Considérons que l'évolution de la température en état de marche peut être modélisée dans [30] par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\theta}(t) = k(u(t) - \theta(t))$$

où « u » est la quantité de chaleur produite par le chauffage en consommant de l'énergie, et k est une constante déterminée par le local.

3.4 Automate hybride associé

L'automate hybride représentant le système thermique (associé à sa commande TOR), est illustré dans la figure 3.2, dans la place 1 le thermostat est en marche et dans la place 2 le thermostat est en arrêt. Les activités dans les

places 1 et 2 correspondent respectivement à l'évolution de la température quand le chauffage est en marche et à l'évolution de la température quand le chauffage est en arrêt. l'évolution de la température est dessinée dans la figure 3-4.

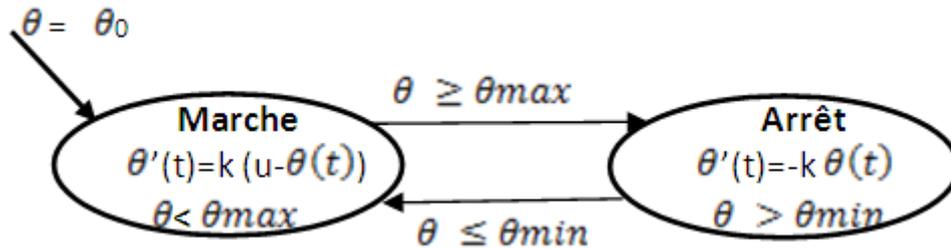


Figure 3.2 L'automate hybride associé

3.5 Position du problème lorsque le chauffage est en état marche

Lorsque le chauffage est en état de marche le problème de contrôle optimal est donné comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \int_0^{T_1} u^2(t) dt \rightarrow Min \\ \dot{\theta}(t) = k(u(t) - \theta(t)) \\ 0 \leq t \leq T_1 \\ \theta(0) = \theta_0 \quad \theta_m \leq \theta \leq \theta_M \\ u \geq 0 \end{array} \right.$$

Avec $f(\theta, u, t) = k(u(t) - \theta(t))$ et une fonction de classe C^1 et où le contrôle est une application mesurable et bornée.

3.6 Application du principe du maximum de Pontryagin

3.6.1 Résolution théorique

Lorsque le chauffage est en état de marche notre problème initial est :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \int_0^{T_1} u^2(t) dt \rightarrow Min \\ \dot{\theta}(t) = k(u(t) - \theta(t)) \\ t \in [0, T_1] \\ \theta(0) = \theta_0 \quad \theta_m \leq \theta \leq \theta_M \\ u \geq 0 \end{array} \right.$$

On pose $k = 1$ et on réécrit le problème sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \int_0^{T_1} u^2(t) dt \rightarrow Min \\ \dot{\theta}(t) = (u(t) - \theta(t)) \\ t \in [0, T_1] \\ \theta(0) = \theta_0 \quad \theta_m \leq \theta \leq \theta_M \\ u \geq 0 \end{array} \right.$$

Avant la caractérisation du contrôle optimal, nous définissons d'abord l'Hamiltonien pour le problème de contrôle optimal par :

$$H(\theta, p, u) = p^0 u^2(t) + p(-\theta + u(t))$$

Où p est le vecteur adjoint.

En appliquant le principe du minimum de Pontryagin nous obtenons :

L'équation adjointe :

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = p$$

On minimise le hamiltonien H en utilisant le principe du minimum ($p^0 = 1$), on aura :

$$\min_{u \geq 0} H = \min_{u \geq 0} [u^2 + p(u - \theta)]$$

Ce qui est équivalent à minimiser :

$$\phi(u) = u^2 + pu$$

– Condition nécessaire

Cherchons les racines de sa dérivée

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(u) = 0 &\iff 2u + p = 0 \\ &\iff u^* = -\frac{1}{2}p \end{aligned}$$

– Condition suffisante

$$\ddot{\phi}(u) = 2 > 0 \Rightarrow u^* = -\frac{1}{2}p$$

est un minimum .

3.6.2 Problème aux deux bouts

Le PMP nous donne une condition nécessaire d'optimalité et nous conduit à un problème aux deux bouts (Two Points Boundray value problem).

$$PDB \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}(t) = -\theta(t) + u(t) \quad \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{p}_\theta = p \quad p(T_1) = 0 \end{array} \right.$$

avec

$$u^* = -\frac{1}{2}P \quad u > 0$$

posant $y = (\theta, p) = (y_1, y_2)$

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -y_1(t) + u(t) & y_1(0) = y_0 \\ \dot{y}_2 = y_2 & y_2(T) = 0 \end{cases}$$

avec

$$u^* = -\frac{1}{2}y_2$$

alors

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1(t) - \frac{1}{2}y_2 & y_1(0) = y_0 \\ \dot{y}_2 = y_2 & y_2(T) = 0 \end{cases}$$

3.7 Position du problème lorsque le chauffage est en arrêt

Lorsque le chauffage est en état d'arrêt le problème de contrôle optimal est donné comme suit :

$$\begin{cases} J(u) = \int_{T_1}^{T_2} u^2(t) dt \rightarrow Min \\ \dot{\theta}(t) = -k\theta(t) \\ t \in [T_1, T_2] \\ \theta(0) = \theta_0 \quad \theta_m \leq \theta \leq \theta_M \\ u \geq 0 \end{cases}$$

pour $k = 1$ on a :

$$\dot{\theta}(t) = -\theta(t)$$

La solution analytique de ce système est :

$$\theta(t) = c_1 e^{-t}$$

3.8 Résolution numérique

Nous effectuons la mise en œuvre numérique à l'aide du logiciel Matlab .

3.8.1 Matlab

Matlab est une abréviation de MATrix LABoratory écrit à l'origine, en fortran, par C.Moler. MATLAB est un logiciel commercial de calcul interactif. Il permet de réaliser des simulations numériques basées sur des algorithmes d'analyse numérique. Il peut donc être utilisé pour la résolution approchée d'équations différentielles, d'équations aux dérivées partielles ou de systèmes linéaires... avec ses fonctions spécialisées, MATLAB peut être considéré comme un langage de programmation adapté pour les problèmes scientifiques.

Les deux programmes suivants nous permettent d'afficher les solutions du problème.

Le programme MATLAB

```

1. function tir simple
2. clearall ; clf ;clc ;
3.global x0 ;
4. x0 = [20] ; T = 5 ; p0 = [1]
5. %=====Calcul du zéro de la fonction de tir=====
6. options = optimset ('Display', 'iter', 'LargeScale', 'on') ;
7. [p0tf, FVAL, EXITFLAG] = fsolve (@G, [p0, tf], options) ;
8. EXITFLAG
9. %=====Tracer les trajectoires optimales=====
10. options = odeset ('AbsTol', 1e - 9, 'RelTol', 1e - 9) ;
11. [t, y]= ode45(@sys, [0; tf],[x0; P0f], options) ;
12. subplot(421) ; plot(t, y(:, 1)) ; title ('Trajectoiredey1(t)') ; gridon
13. subplot(422) ; plot(t, y(:, 2)) ; title('Trajectoiredey2(t)') ; gridon
14. %===== Trajectoire du contrôle optimal=====
15. y(:, 3) = -y(:, 2)/2 ;
16. end
17. subplot(423) ; plot(t, y(:, 3)) ; title('Trajectoiredeu(t)') ; gridon
18. %===== Définition de la fonction de tir =====
19. function Y zero = G(y)
20. global x0 ;
21. options = odeset ('AbsTol', 1e - 9, 'RelTol', 1e - 9) ;
22. [t, y] = ode45(@sys, [0; tf], [x0; Y], options) ;
23. Y zero = [y(end, 5)
24. y(end, 5)] ; .
25. %=====Système extrêmeal=====
26. function ydot= sys(t, y)
27. y(:, 3) = -y(:, 2)/2 ;

```

Les résultats obtenus sur matlab sont représentées dans les figures suivantes :

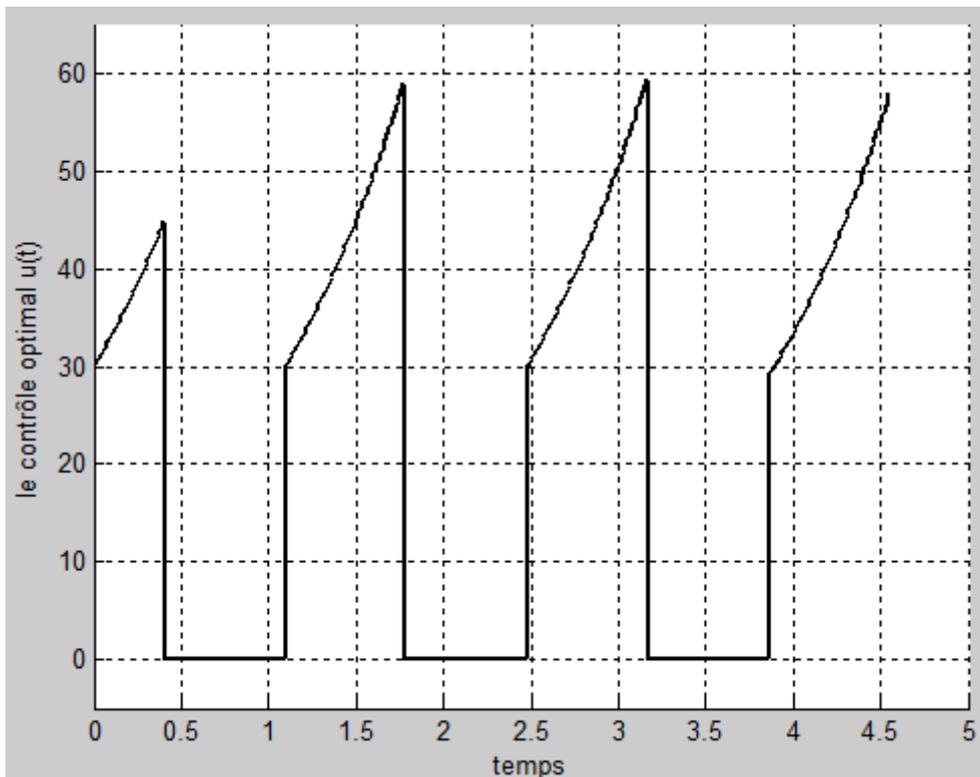


Figure 3.3 trajectoire du contrôle u

Le graphe ci-dessous indique la trajectoire optimale de u autrement dit l'évolution de l'énergie consommée par le chauffage.

L'état de marche du chauffage est illustré par l'augmentation de l'énergie or lorsque le chauffage est en état d'arrêt l'énergie s'annule. ainsi nous économisons de l'énergie puisque le chauffage n'est pas allumé de manière continue.

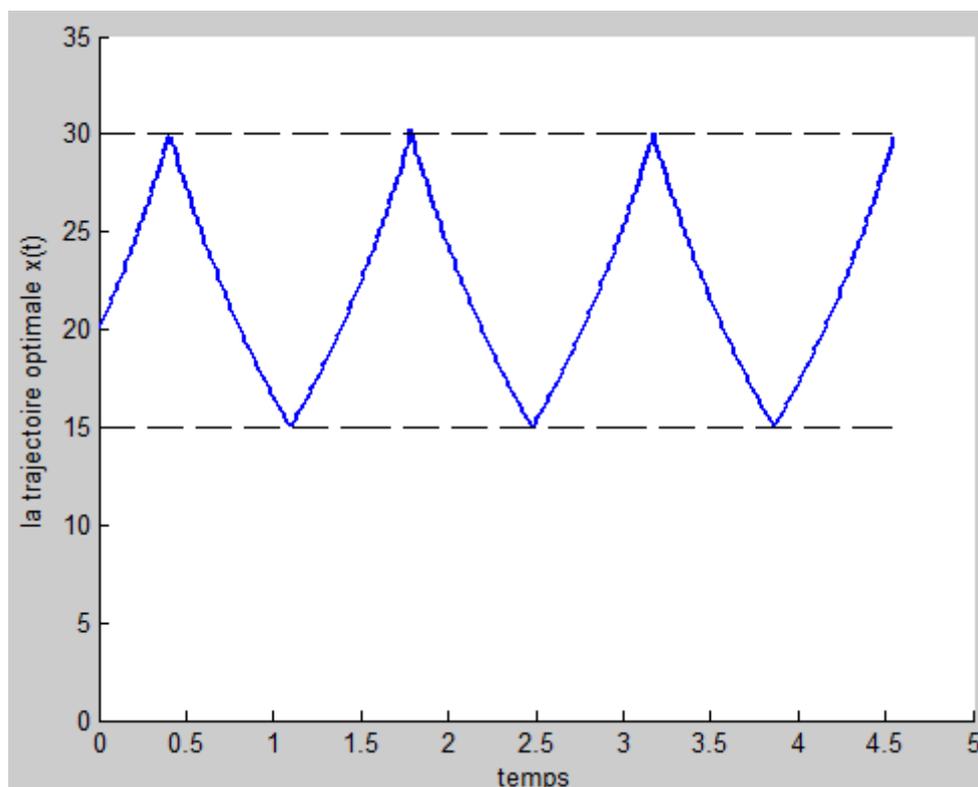


Figure 3.4 trajectoire optimale de l'état

Le graphe si dessous indique la trajectoire optimal de l'état θ autrement dit l'évolution de la température. Cette évolution est en dents de scie.

A L'instant initial t_0 , la température $\theta_0 = 20C^0$. Les seuils inférieur et supérieur du thermostat sont fixés à des valeurs $\theta_m=15$ et respectivement $\theta_M = 30$. Le système de chauffage est en marche tant que l'évolution de la température est inférieur à θ_M .

Le chauffage reste en marche jusqu'à ce que la température atteint la température maximal $\theta_M = 30$.A cet instant de commutation le champ de vecteur change et Le chauffage passe de l'état de marche à l'état d'arrêt.

Le chauffage reprends lorsque la température atteint une température minimal $\theta_m = 15$.

Perspective

Dans ce dernier chapitre on s'est intéressé à une classe des systèmes dynamiques hybrides à commutation autonome. A fin de l'illustré on a pris comme cas d'étude le thermostat exemple simple et classique des systèmes dynamiques hybride. On s'est appuyé sur le cas de marche du thermostat à fin de minimiser l'énergie consommée et pour y procéder on a fais appel à la méthode de résolution indirecte en l'occurrence le principe du maximum de pontryagin, tant dis que lors de l'état d'arrêt l'évolution de la température consiste un système dynamique.

Cependant, dans la cas général du phénomène hybride, la présence de la variable discrète $q = \{1, 0\}$ où $q = 0$ représente l'état d'arrêt, tant dis que $q=1$ représente l'état de marche, la non continuité du problème général du système hybride nous a pas permis d'appliquer le principe du maximum.

En outre, on a procédé à une résolution numérique, dans la qu'elle on a essayé de combiner les deux cas en considérant que le temps final de l'état de marche représente le temps initial de l'état d'arrêt.

3.9 Conclusion

Nous pouvons conclure qu'une résolution analytique d'un problème de contrôle est possible seulement si les solutions des équations différentielles sont connues et si elles ne sont pas trop complexes. Pour les expressions plus complexes, l'utilisation des techniques numériques est indispensable pour simuler l'évolution du système et analyser son comportement. L'évolution obtenue pour le modèle du thermostat est déterministe puisque nous avons considéré des conditions idéales de fonctionnement pour notre système. Notamment, nous avons supposé que le capteur de température détecte d'une manière très précise les seuils de commutations θ_m et θ_M , et dès qu'un de ces deux seuils est détecté, le système change instantanément d'état. Toutes ces conditions sont des conditions de fonctionnement jamais rencontrées dans les systèmes réels, d'une part, puisque la précision des capteurs est limitée, d'autre part, parce que le changement d'état du système ne peut pas se produire instantanément dû aux retards introduits par les composantes du système lors de la transmission d'une information.

L'effet de ces imprécisions est que, en général, les commutations entre les différents états du systèmes ne peuvent pas être garanties à des instants précis. Cela implique une évolution non-déterministe du système. Par conséquent, avant de commencer à analyser l'évolution d'un système, nous devons être sûr que toutes les évolutions du processus réel sont prises en compte.

Conclusion générale

Dans le cadre de ce travail nous nous sommes intéressé à l'étude du contrôle optimal d'un système dynamique hybride.

La modélisation d'un système général de contrôle a recours à des équations différentielles, c'est pourquoi, on a entamé notre travail par une présentation des généralités sur les équations différentielles et quelques méthodes de résolution numériques.

Par la suite une présentation de la théorie du contrôle optimal est réalisée à savoir ; la contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires, quelques méthodes de résolution. En particulier on s'est intéressé à la méthode du principe du maximum de Pontryagin.

Comme l'objet de cette étude est les systèmes dynamiques hybrides (SDH), nous avons introduit l'étude de ce type de systèmes (SDH). Dans cette introduction, on a abordé ses principales classes (commutation autonome, saut autonome, commutation contrôlé et saut contrôlé) et nous avons illustrées chaque cas par un exemple. Nous avons passé en revue les principales approches de modélisation des systèmes dynamique hybrides et enfin on a énoncé le principe du maximum de Pontryagin pour ce type de système.

Enfin, en guise d'application, nous avons considéré un problème de contrôle optimal d'un système dynamique hybride à commutation autonome. Nous avons ainsi, modélisé un problème dont le but est de maintenir une certaine température désirée en minimisant une certaine énergie. Pour la résolution de notre problème nous avons d'abord commencé par appliquer théoriquement le principe du maximum de Pontryagin qui donne les conditions nécessaire d'optimalité du premier ordre, puis numériquement avec une implémentation sous MATLAB. Ce qui nous a permis de déterminer une trajectoire optimale de l'état et du contrôle

Bibliographie

- [1] A. Merakeb et F. Achemine , cours de contrôle optimal : aspects théoriques et numériques, faculte des sciences departement de mathematique. 2013/2014
- [2] A. R. Deshpande, Control of hybrid systems, PhD thesis, University of California at Berkeley, 1994R. Valette, R. Champagnat.
- [3] Andreu, H. Pingaud, Modélisation des systèmes de production hybrides, AGIS'97, colloque de recherche doctorale, Angers, France, 1997.
- [4] C.Cassandras.discrete Event Systems :modeling and performance Analysis ,Asken associates Incorporated Publishers.1993.
- [5] C.VALENTIN . Modélisation par RdP mixtes : un cas d'études. Communication au groupe SDH, Paris (4 oct. 2001) .
- [6] E. Trélat,Notes de cours Master de Mathématiques, Université d'Orléans 2007/2008.
- [7] E. Trélat. Contrôle optimal : Théorie et applications. Université Paris-Sud Laboratoire EN-EDP Mathématiques, 2005.
- [8] E.B.Bryson and Y.C .Ho.applied optimal Control.Gin and company ,waltham,1968.
- [9]J.A. Stiver, P.J. Antsaklis, M.D. Lemmon, Interface and controller design for hybrid control systems, Lecture Notes in Computer Science Hybrid Systems, Vol. 999, Springer-Verlag, 1995.
- [10]J. Antsaklis, J.A. Stiver, M. Lemmon, Hybrid System Modeling and Autonomous Control Systems, Lecture Notes in Computer Science Hybrid Systems, Vol 736, Springer-Verlag, 1993.
- [11] G.Barles .Solutions de viscosité des équations d'Hamilton -Jacobi -Bellman.Volume 17 of mathématiques et applications, Springer -Volume 17 of mathématiques et applications,Springer -Verlag,1994.
- [12] L. Pujo-Menjouet,Equations Différentielles Ordinaires et Partielles, cours Licence Sciences Technologies et Santé Spécialité Mathématiques,Université Claude Bernard,Lyon I ,2002,2003.
- [13] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanski, R.V. Gamkrelidze, and E.F. Mishchenko. The mathematical theory of optimal processes. Interscience Publishers New York, 1962.
- [14] L. PPontryagin ., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V. et Mishchenko E. F. The Mathematical Theory of Optimal Processes, Pergamon, 1964
- [15] M. Crouzeix and A.L. Mignot. Analyse numérique des équations différentielles. 2ème Edition Masson, 1989.
- [16] M.Kurovszky.Etude des systèmes dynamiques hybrides par représentation d'état discrete et automate hybride.PHD thesis .université de Grenoble,2002.

- [17] M.Bardi and I.Capuzzo-Dolcetta .Optimal Control and viscosity Solutions of Hamilton jacobi-Bellman Equations Volume 17 Systems and control : Foundations and Applications.Brkauser,1997.
- [18]M.S. Branicky, Studies in hybrid systems : modeling, analysing and control, PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1995.
- [19] M.M.Lee and L.Maarkus.Foundations of optimal control Theory .Whiley, New York.1967.
- [20] N. Moussouni. Contrôle optimal : optimisation d'une production céréalière. Thèse de doctorat, l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2011. 2012.
- [21] P.Bérest. Calcul des variations , application à la mécanique et à la physique .Ellipses , paris 1997.
- [22] P. Ramadge, M. Wonham, The control of discrete event systems, Proc. IEEE, vol. 77, n^o1, pages 81-89, 1989 .
- [23]P.Antsaklis and X. Koutsoukos, "On hybrid control of complex systems : a survey", Symposium ADPM'98, Reims, France, 1998.
- [24] R.Gamkrelidze L.Pontryaguine , V.Boltiansky and E.Michtchenko.The mathematical theory of optimal processes.Editions de Moscou, 1962.
- [25] R.Bellman .Dynamic Programming .Princeton university Press,princeton ,1963.
- [26] R.E. Kalman. Mathematical description of linear dynamical systems. J. SIAM control, 1 : 152-192, 1963.
- [27] R. Alur, C. Courcoubetis, N. Halbwachs, T. Henzinger, P-H. HO, X. Nicollin, A. Olivero, J. Sifakis, S. Yovine, The Algorithmic Analysis of Hybrid Systems, Theoretical Computer Science, 138(1) :3-34, 1995.
- [28] S. Delabriere.cours Licence B,équation différentielles : équations différentielles methodes de resolution numerique ,Université Pierre et Marie Curie - Paris 6.2002-2003.
- [29] T.A. Henzinger, P.-H. Ho, H. Wong-Toi, Algorithm Analysis of Nonlinear Hybrid Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, Special issue on hybrid control systems, pages 540-555, 1998.
- [30] T.A.Hedfi .Surveillance par observateur des systèmes dynamiques hybrides.Thèse de doctorat,l'université de Lille1, 2013

Résumé

Dans le cadre de ce travail nous avons fait une synthèse bibliographique en s'intéressant à la résolution du problème de contrôle optimale en système dynamique hybride à commutation autonome. Ce problème est fortement lié au principe du maximum de Pontryagin.

Notre problème de commande consiste à l'optimisation du fonctionnement d'une régulation thermique où un thermostat à résistance anticipatrice est choisi comme régulateur. Notre but est de maintenir la température la plus proche possible d'une valeur désirée tout en ayant les plus faibles variations possibles de la température autour de cette valeur désirée à fin de minimiser l'énergie. Nous introduisons de cette manière un des problèmes de commande optimale.

Mots clés

Contrôle optimal, Commutation, Systèmes Dynamiques Hybrides, Saut, température désirée, thermostat, seuil, automate hybride.

Abstract

In this paper, we are interested in solving the optimal control problem in a hybrid dynamic system. This problem is strongly linked to the principle of the maximum Pontryagin, switching to a hybrid dynamic system.

Our control problem consists in the optimization of the functioning of a thermal regulation where a thermostat with anticipatory resistance is chosen like regulator. Our objective is to keep the temperature as close as possible to a desired value while having the smallest possible temperature variations around this desired value in order to minimize energy. We introduce in this way one of the problems of optimal control.

Keywords

Optimal Control, Switching, Dynamic Hybrid Systems, Jump, Desired Temperature, Thermostat, Threshold, Hybrid PLC