

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE UNIVERSITE MOULOU**  
**MAMMERI, TIZI-OUZOU**

**FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE**  
**DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE**

**THESE DE DOCTORAT**  
**SPECIALITE : ELECTROTECHNIQUE**  
**OPTION : MACHINES ELECTRIQUES**

Présenté par :  
**HOCINI Farid**

Sujet :

**ASSOCIATION DE LA COMMANDE POUR L'ETUDE PAR ELEMENTS FINIS DES PHENOMENES MAGNETO-ELASTIQUES ET VIBRATOIRES DANS LES SYSTEMES ELECTROTECHNIQUES**

Devant le Jury d'examen composé de :

M. Mohammed El Hadi LATRECHE, Professeur, Université de Constantine,	<b>Président</b>
M. Hassane MOHELLEBI, Professeur, Université de Tizi-ouzou,	<b>Rapporteur</b>
M. Rachid CHAIBI, Professeur, Université de Tizi-ouzou,	<b>Co-rapporteur</b>
M. Mouloud FELIACHI, Professeur, Université de Nantes,	<b>Examineur</b>
M. Sourî Mohamed MIMOUNE, Professeur, Université de Biskra,	<b>Examineur</b>
M. Mohamed Rachid MEKIDECHE, Professeur, Université de Jijel,	<b>Examineur</b>
M. Mohammed NEDJAR, Professeur, Université de Tizi-ouzou,	<b>Invité</b>

Soutenue le : 23 Avril 2013

# **REMERCIEMENTS**

Cette thèse a été réalisée au département d'Electrotechnique, Faculté de Génie Electrique et Informatique de l'université de Tizi-Ouzou avec la collaboration de l'équipe interaction ondes et matières de l'institut de recherche en Electrotechnique, Electronique de Nantes.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur MOHELLEBI Hassane, Professeur à l'université de Tizi-Ouzou, de m'avoir proposer et diriger cette Thèse, je lui exprime ma profonde gratitude pour son dévouement, sa grande patience, pour sa disponibilité et pour ses qualités scientifiques et humaines.

Je tiens à remercier Monsieur CHAIBI Rachid , Professeur à l'université de Tizi-Ouzou, Co-directeur de Thèse, je lui exprime ma profonde reconnaissance d'avoir contribuer à la proposition et l'encadrement de ce travail ainsi que pour ces précieux conseils.

Je témoigne toute ma reconnaissance à Monsieur FELIACHI Mouloud, Professeur à l'université de Nantes, je le remercie de m'avoir bien accueilli dans l'équipe interaction ondes et matières de l'IREENA dans le cadre de ma bourse de finalisation de thèse, je le remercie également pour son soutien et sa contribution sur le plan scientifique et humain pour la réussite de mon séjour.

Remerciements et profonde gratitude vont à Messieurs:

- LATRECHE Mohamed El Hadi
- FELIACHI Mouloud
- MIMOUNE Soury Mohamed
- MEKIDECHE Mohamed Rachid
- NEDJAR Mohammed

Pour avoir accepter de participer au jury de soutenance.

Je tiens à remercier tous les membres de l'équipe du laboratoire de génie électrique (LGE) de Tizi-Ouzou, tout particulièrement OULD OUALI Samy Hassani, maitre de conférences classe B à l'université de Tizi-Ouzou pour son soutien, ces conseils et ces encouragements qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

# **DEDICACES**

*Je dédie ce travail à mon père et à ma mère, à ma femme, à mes frères et ma sœur et à tous ceux qui me sont proches.*

# **SOMMAIRE**

## Sommaire

<b>Introduction générale</b>	01
------------------------------	----

### Chapitre 1

#### Etat de l'art des phénomènes magnéto-élastiques et vibratoires et modèles mathématiques

I.1 Introduction	03
I.2 Vibrations dans les machines électriques	03
I.3 La Magnétostriction	04
I.3.1 Les Applications de la magnétostriction	06
I.4 Modèle Electromagnétique	06
I.4.1 Lois de comportement	07
a- Loi d'Ohm	07
b- Relation magnétique	07
c- Relation diélectrique	07
I.4.2 Hypothèses simplificatrices	09
I.4.2.1 Les courants de déplacement	09
I.4.3 Conditions de transmission	10
I.4.4 Conditions aux limites	11
a- Condition de DIRICHLET	11
b- Condition de NEWMANN	11
I.4.5 Formulations utilisant le vecteur potentiel magnétique A	11
I.4.5.1 Modèle magnétostatique	12
I.4.5.2 Modèle magnétodynamique	12
I.4.6 Equation magnétostatique 2D cartésienne	13
I.4.7 Equation magnétodynamique 2D axisymétrique	14
I.4.8 Modèles géométriques	15
I.5.1 Modélisation du problème mécanique	16
I.5.1 Equation d'équilibre	17
I.5.2 Cas de déformations planes	17
I.5.3 Etat de contraintes planes	18
I.5.4 Modélisation en terme de champs de déplacement	19

### Chapitre 2

#### Modèles numériques et méthodes de calcul des forces

II.1 La méthode des différences finies	21
II.2 Méthode des éléments finis	22
II.2.1 formulation éléments finis	23
II.2.1.1 Formulation variationnelle	23
a- Cas d'un problème électromagnétique	23
II.2.1.2 Méthodes des résidus pondérés	24
II.2.2 Discrétisation du domaine d'étude (maillage)	25
1- Principe de l'état complet	27
2- Principe de compatibilité	27

II.2.3	Notions de fonctions d'approximation	27
II.3	Formulations éléments finis des équations électromagnétiques	27
II.4	Formulations éléments finis des équations mécaniques	30
a-	Dans le cas de déformations planes	30
b-	Dans le cas de contraintes planes	31
II.5	La méthode d'intégrales de frontières	33
II.6	Discrétisation temporelle	34
II.6.1	Méthode d'Euler explicite	34
II.6.2	Méthode d'Euler implicite	34
II.6.3	Méthode de Newmark	34
II.6.4	Méthode proposée basée sur un schéma différences finis	35
II.6.5	Méthode de Runge-Kutta	35
II.7	Méthodes de calcul des forces magnétiques	36
II.7.1	Méthode de variation de la coénergie et de l'énergie magnétiques	36
II.7.2	Méthode basée sur la force de Lorentz	37
II.7.3	Méthode du tenseur de Maxwell	38
II.7.4	Méthode des travaux virtuels	39
II.8	Méthodes de prise en compte du mouvement	40
II.8.1	Méthode de remaillage du domaine	40
II.8.2	Méthode de la bande de mouvement	40
a-	Cas d'un déplacement vertical	40
b-	Cas d'un déplacement dans la direction radiale	42
II.8.3	Méthode de la bande infinie	44
1-	Géométrie du problème	45
II.8.4	Méthode avec surface de glissement	46
II.8.5	Méthode éléments finis Macro-élément	46
1-	Géométrie du problème	47
2-	Equation électromagnétique 2D axisymétrique	48

### **Chapitre 3**

#### **Modèles Couplés et Applications**

III.1	Modèle de Couplage Magnéto-élastique pour L'étude Des Vibrations d'une Plaque	49
III.1.1	Le dispositif d'étude	51
III.1.2	Résultats et discussions	53
III.1.3	Conclusion	57
III.2	Modèle magnéto-élastique de plaque ferromagnétique mince	58
III.2.1	Application du modèle magnéto-élastique	60
III.2.1.1	Dispositif d'étude	60
III.2.1.2	Résultats et discussions	61
III.2.2	Modèle inverse de Jiles-Atherton	62
III.2.3	Conclusion	66
III.3	Application du Modèle de Jiles-Atherton Inverse pour les matériaux à magnétostriction géante	67
III.3.1	Modèle Etendu de Jiles-Atherton	67
III.3.2	1 <sup>ère</sup> approche: Proposition d'un modèle pour les faibles contraintes	71
III.3.3	2 <sup>ème</sup> approche: Utilisation de la méthode des algorithmes génétiques	72
	<b>Conclusion générale</b>	<b>76</b>

# **INTRODUCTION**

## **Introduction générale**

Tous les systèmes en fonctionnement produisent des vibrations, images des efforts dynamiques engendrés par les pièces en mouvement. Ces vibrations peuvent être d'origine mécanique (le balourd) ou électromagnétique (effet des forces d'origines magnétiques sur les parties mobiles).

L'étude présentée ici concerne une contribution à l'étude des phénomènes couplés magnéto-élastiques dans les systèmes électromagnétiques. L'objectif consiste à établir des lois de comportement couplés magnéto-mécaniques capables de rendre compte des déformations induites dans les pièces conductrices et dans les matériaux magnétiques. La méthode des éléments finis est utilisée pour la résolution simultanée des équations relatives aux modèles électromagnétique et mécanique. Une partie du travail concerne un autre aspect incontournable dans l'étude des phénomènes couplés magnéto-élastiques il s'agit de la magnétostriction.

L'étude de la magnétostriction avait commencé en 1840 quand James P. Joule a constaté un changement dans la longueur d'un barreau de fer lorsqu'il est soumis à un champ magnétique. Le phénomène de la magnétostriction est commun à tous les matériaux ferromagnétiques. Les matériaux magnétostrictifs comme le fer, le Nickel, le Cobalt et leurs alliages sont largement utilisés pendant la première moitié du 20<sup>ème</sup> siècle dans de nombreuses applications y compris les récepteurs téléphoniques, le sonar à balayage, les oscillateurs et les couple-mètres. En 1971, Clark et Belson du laboratoire naval d'artillerie et Schindler et Clark du Laboratoire de recherche naval découvrent le Terfenol-D (Terbium, fer, Naval Ordnance Laboratory, Dysprosium) [67]. Ce matériau est désigné souvent sous le nom du matériau à magnétostriction 'géante'.

Aujourd'hui, le Terfenol-D voit son champ d'application s'accroître dans les domaines industriel, biomédical et militaire. Spécifiquement, le Terfenol-D est actuellement utilisé dans les sonars, les moteurs linéaires et de rotatifs, le micropositionnement, le mouvement et la détection de force.

Le premier chapitre de ce travail présente un état de l'art des phénomènes vibratoires et élastiques dans les dispositifs électromagnétiques. Ce chapitre est consacré aussi au développement du modèle électromagnétique en s'appuyant sur les équations de Maxwell. Le modèle mécanique est présenté par l'équation d'équilibre et l'équation de Hook généralisée.

Le deuxième chapitre présente les modèles numériques pour la résolution des équations spatio-temporelles. La méthode des éléments finis est développée pour la résolution de l'équation électromagnétique et de l'équation mécanique en hypothèse bidimensionnelle.

Trois applications font l'objet du troisième chapitre. La première concerne l'étude du phénomène magnéto-élastique dans le cas d'une plaque conductrice encastrée d'un côté et soumise à un champ magnétique variable.

La deuxième application est consacrée à l'étude de la déformation d'une plaque ferromagnétique soumise simultanément aux forces d'origine magnétique et magnétostrictive. Le modèle de Jiles-Atherton est implémenté afin de tenir compte de la non linéarité et de l'effet de l'hystérésis. Les résultats obtenus sont confrontés aux résultats expérimentaux.

Dans la dernière application nous allons étudier l'effet d'une contrainte sur la répartition du champ magnétique, nous avons utilisé le modèle de Jiles-Atherton étendu qui se traduit par l'ajout d'un champ magnétique résultant des interactions magnéto-élastiques des domaines magnétiques. Pour la résolution du modèle de la déformation en fonction de l'aimantation, deux approches vont être considérées la première est basée sur la méthode des moindres carrés, et la deuxième est basée sur l'application de la méthode des algorithmes génétiques.

# **CHAPITRE I**

**Etat de l'art des phénomènes magnéto-élastiques et  
vibratoires et modèles mathématiques**

## **I.1 Introduction**

Le niveau de bruit global d'une machine électrique provient de quatre sources principales :

- Le bruit d'origine mécanique (roulements, engrènements, etc.) ;
- Le bruit d'origine aéraulique (ventilation) ;
- Le bruit d'origine magnétique.
- Le bruit d'origine magnétostrictif.

Les phénomènes de couplage magnéto-élastique ont deux manifestations principales : l'effet des contraintes sur le comportement magnétique et la déformation de magnétostriction, qui est la déformation induite par l'application d'un champ magnétique dans les matériaux ferromagnétiques. Ces effets de couplage peuvent être source de nuisance, c'est souvent le cas pour le matériel électrique. Ils peuvent aussi être exploités, comme c'est le cas dans les dispositifs à base de matériaux magnétostrictifs.

Le bruit acoustique des machines électriques est dû à différents phénomènes. Les plus connus sont le frottement dans les balais, le flux d'air de refroidissement, les vibrations du noyau statorique sous l'effet des forces magnétiques et de la magnétostriction [1].

Dans certains dispositifs ces vibrations ou ces déformations sont recherchées, à titre d'exemple les actionneurs électromagnétiques à base de matériaux magnétostrictifs.

Dans ce chapitre nous allons citer les différentes sources de vibrations et les différents travaux réalisés dans ce domaine, l'exploitation du phénomène de la magnétostriction dans la fabrication de certains transducteurs et actionneurs électromagnétiques.

Les différents modèles qui traduisent les phénomènes vibratoires et élastiques seront cités.

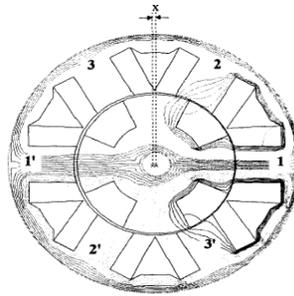
## **I.2 Vibrations dans les machines électriques**

Le bruit et les vibrations des machines électriques sont devenus un problème de première importance. Cela s'explique en partie, par la présence de plus en plus de l'électricité dans la vie quotidienne et aussi à des contraintes de conception moderne liées au nouveau mode d'alimentation. Étant donné les nouvelles possibilités de calcul, la modélisation d'un dispositif, conduisant à la détermination quantitative de la vibration ou du bruit (amplitudes et fréquences) est devenu un objectif possible [2].

Le calcul des vibrations d'origine magnétique dans une machine électrique n'est pas une tâche aisée. Le résultat d'un tel calcul est de la plus haute importance dans la conception vibratoire et magnétique d'une machine ainsi que de son alimentation électrique [3].

Beaucoup de travaux traitent des vibrations et des bruits dans les machines électriques, plusieurs chercheurs ont démontrés l'influence de la structure de la machine [4] et son alimentation dans la génération des vibrations et des bruits acoustiques [5].

Les vibrations dans les machines électriques sont dues essentiellement à la composante radiale des forces électromagnétiques, localisées sur les dents du stator, qui excitent différents modes propres de la machine [4],[6]. Pour réduire les vibrations, on peut agir de deux manières différentes, soit au niveau de l'alimentation, ou sur la forme géométrique de la machine [7]. Toute fois l'excentricité du rotor a été l'objet de nombreux travaux [4], [7], les auteurs ont étudiés les effets de l'excentricité sur les vibrations, le bruit acoustique et la pulsation du couple.



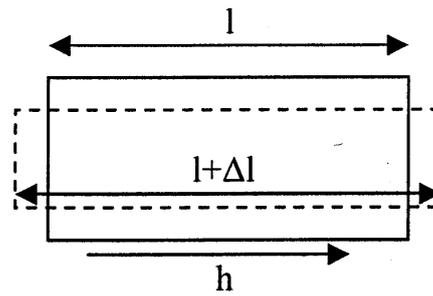
**Figure 1.** Distribution de flux magnétique dans une machine à réluctance variable avec l'excentricité du rotor

Ils ont élaboré des modèles pour le calcul de l'entrefer, de la densité de flux et du champ magnétique, d'autres ont examinés des techniques de détection de l'excentricité du rotor, principalement dans les machines à induction [8], [9].

Dans les dispositifs statiques, comme les transformateurs, inductances, les matériaux ferromagnétiques sont certainement la plus importante source de bruits et de vibrations [2],[10], [11].

### **I.3 Magnétostriction [12]**

On entend, par magnétostriction la déformation d'un barreau ferromagnétique consécutivement aux interactions magnétiques, elle peut être spontanée et forcée. La première est due aux interactions magnétiques internes, alors que la deuxième est due à l'interaction magnétique entre l'échantillon et le champ magnétique externe. Ce phénomène, découvert par J. P. Joule en 1842, est appelé magnétostriction de Joule, mesurée en microns par mètre ( $\mu\text{m}/\text{m}$ ).

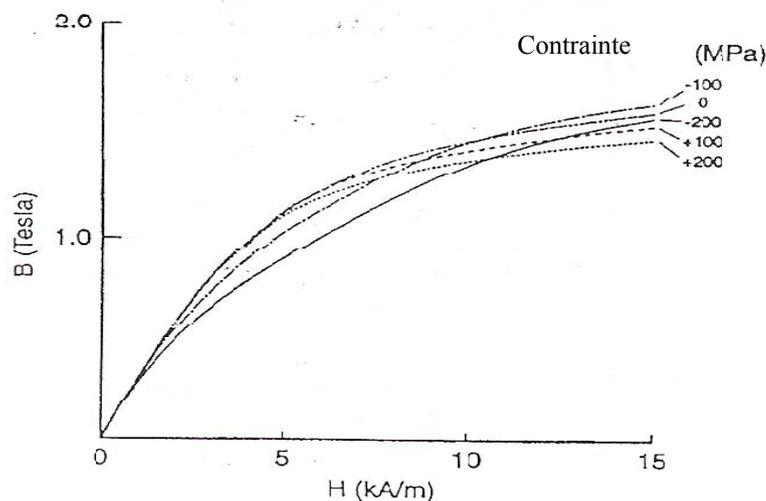


**Figure 2.** Illustration de l'effet Joule Longitudinal

Une déformation associée à la magnétostriction de joule dans la direction orthogonale au champ. Elle est appelée magnétostriction transversale.

Si on applique un champ magnétique à un échantillon de fer, une déformation anisotrope apparait dans le sens du champ magnétique. Les magnétostrictions de joule et transversale ne modifient pas le volume de l'échantillon.

L'application d'une contrainte mécanique sur un matériau ferromagnétique aimanté induit une variation du champ magnétique. Ce phénomène est appelé effet Villari ou l'effet longitudinal inverse, il a été découvert en 1865 par Villari. Cela est illustré en figure 2,[12], [13], [14], [15].



**Figure2.** Effet d'une contrainte mécanique sur l'aimantation d'un matériau ferromagnétique [15]

La variation de l'aimantation par l'application d'une contrainte mécanique a été mesurée et modélisée par plusieurs chercheurs [12],[13],[14],[16], pour l'acier et le fer. Ce comportement est assez compliqué car ces matériaux se comportent différemment à différents

niveaux d'aimantation. En général l'effet d'une contrainte unidirectionnelle sur l'aimantation dépend de la magnétostriction du matériau.

Les matériaux à magnétostriction positive se dilatent sous l'effet d'un champ magnétique et leur aimantation est augmentée avec des contraintes mécaniques à la traction. Les matériaux à magnétostriction négative se contractent sous l'effet d'un champ magnétique et leur aimantation diminue avec l'application d'une contrainte mécanique à la traction.

### **I.3.1 Les Applications de la magnétostriction**

L'avènement dans les années quatre vingt des matériaux actifs [18] tels que les matériaux à magnétostriction géante [19], [20] , a offert des possibilités ainsi que des performances techniques intéressantes. Ces matériaux magnétostrictifs sont aujourd'hui utilisés dans les secteurs les plus divers, allant du domaine médical à celui de l'automobile en passant par la robotique, mais aussi par le secteur militaire. Ils sont caractérisés par un fort couplage non linéaire entre les propriétés magnétiques et mécaniques et vice-versa. Ainsi une modification des états (magnétiques ou mécaniques) peut entraîner un changement de l'autre.

Les propriétés des matériaux magnétostrictifs sont utilisées afin de réaliser des actionneurs et des capteurs [21]. Cependant, dans les dispositifs à base de matériaux ferromagnétiques, ce phénomène est souvent la cause de nuisances sonores et de vibrations.

### **I.4 Modèle Electromagnétique**

La modélisation des problèmes électromagnétiques s'appuie sur les équations de Maxwell. Ces équations aux dérivées partielles font intervenir des champs physiques (champs magnétiques, champs électriques). L'étude de ces champs en régime statique (indépendant du temps) constitue les modèles électrostatiques, électrocinétiques et magnétostatiques. Leur étude en régime dynamique (dépendant du temps) constitue le modèle magnétodynamique.

Nous commençons par présenter le problème initial constitué des équations de Maxwell, les lois de comportement des milieux et des conditions d'interfaces associées. Puis partant de ce problème initial, nous introduisons une variable mathématique vectorielle appelée potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  qui permettra de présenter différentes formulations équivalentes entre elles, des problèmes magnétostatiques et magnétodynamiques transitoires.

Ces formulations seront développées dans le cas particulier des problèmes caractérisant les systèmes axisymétriques et cartésiens, et la nature des conditions aux limites considérées.

Les équations de Maxwell forment un système d'équations aux dérivées partielles régissant des phénomènes électromagnétiques, elles s'écrivent [22],[23].

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{I.1})$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{I.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I.3})$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{I.4})$$

$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  est aussi noté  $\mathbf{J}_D$  et appelé densité de courant de déplacement.

$\mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{J}$  et  $\rho$  sont respectivement les vecteurs induction magnétique [T], champ magnétique [ $\text{A.m}^{-1}$ ], induction électrique [ $\text{C.m}^{-2}$ ], champ électrique [ $\text{V.m}^{-1}$ ] vecteur densité de courant de conduction [ $\text{A.m}^{-2}$ ] ainsi que la densité de charge volumique [ $\text{C.m}^{-3}$ ]

#### I.4.1 Loi de comportement

Les inductions et les champs sont reliés entre eux par les lois de comportement qui expriment les propriétés des matériaux, ainsi pour les milieux isotropes nous écrivons :

##### a- Loi d'Ohm

la loi d'Ohm est donnée en chacun des points du domaine par l'expression:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{I.5})$$

$\sigma$  est la conductivité électrique du milieu [ $\text{S.m}^{-1}$ ]

##### b- Relation magnétique

La relation entre le vecteur induction  $\mathbf{B}$  et le vecteur champ magnétique  $\mathbf{H}$  est donnée par:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{I.6})$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

$\mu$  est la perméabilité magnétique absolue [ $\text{H.m}^{-1}$ ],

$\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide [ $\text{H.m}^{-1}$ ]  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  [ $\text{H.m}^{-1}$ ]

$\mu_r$  est la perméabilité magnétique relative.

##### c- Relation diélectrique

La relation entre le vecteur induction électrique  $\mathbf{D}$  et le vecteur champ électrique  $\mathbf{E}$  est donnée par la relation:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (\text{I.7})$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

$\varepsilon$  est la Permittivité électrique absolue [ $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ ],

$\varepsilon_0$  est la Permittivité électrique du vide [ $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ ],  $\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$  [ $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ ]

$\varepsilon_r$  est la permittivité électrique relative

L'expression détaillée des densités de courants :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_{ind} \quad (\text{I.8})$$

$\mathbf{J}_s$  et  $\mathbf{J}_{ind}$  sont respectivement les densités de courant source et de courant induit en [ $\text{A}/\text{m}^2$ ].

Dans le cas d'un milieu conducteur en mouvement le champ électrique est donné par :

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E} + \mathbf{E}' \quad (\text{I.9})$$

$\mathbf{E}'$  étant le champ électromoteur donné par :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (\text{I.10})$$

$\mathbf{v}$  est la vitesse de déplacement du milieu [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]

En appliquant la loi d'Ohm on aura :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_t = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}') = \sigma \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E}' \quad (\text{I.11})$$

Avec :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_{ind} \quad (\text{I.12})$$

$\mathbf{E}_s$  et  $\mathbf{E}_{ind}$  représentent respectivement le champ électrique source et le champ électrique induit en [ $\text{V}/\text{m}$ ]

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_s + \sigma \mathbf{E}_{ind} + \sigma \mathbf{E}' \quad (\text{I.13})$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_s + \sigma \mathbf{E}_{ind} + \sigma(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (\text{I.14})$$

Donc :

$$\mathbf{J}_s = \sigma \mathbf{E}_s \quad (\text{I.15})$$

$$\mathbf{J}_{\text{ind}} = \sigma \mathbf{E}_{\text{ind}} + \sigma(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (\text{I.16})$$

Le terme  $\sigma \mathbf{E}_{\text{ind}}$  est le courant résultant du champ électrique  $\mathbf{E}_{\text{ind}}$  et le terme  $\sigma(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$  représente la densité de courant résultant du mouvement.

## I.4.2 Hypothèses simplificatrices

### I.4.2.1 Les courants de déplacement

En prenant la divergence de l'équation (I.4) et en tenant compte de l'équation (I.1), nous obtenons la loi de conservation de la charge (équation de continuité).

$$\nabla \wedge \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.17})$$

La combinaison de cette équation avec les équations (I.5) et (I.1), aboutira à l'équation d'évolution de la densité de charge électrique :

$$\rho + \frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.18})$$

La solution de cette équation est donnée par :

$$\rho(\mathbf{t}) = \rho_0 e^{-\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) \mathbf{t}} \quad (\text{I.19})$$

Pour un conducteur le rapport  $\frac{\varepsilon \omega}{\sigma}$  est très faible, donc la charge d'espace s'atténue rapidement par retour à la neutralité électrique. Ceci permet de considérer que  $\rho=0$

Puisque les fréquences de travail sont relativement faibles, dans ces conditions les courants de déplacement seront négligeables.

Sachant que :

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \text{ et } \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\text{en hypothèse harmonique : } \mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j} \omega \mathbf{D}$$

Le rapport  $\frac{\mathbf{J}_D}{\mathbf{J}} = \frac{2 \pi f \varepsilon}{\sigma}$  dans un milieu conducteur en cuivre est faible pour une fréquence  $f < 10^{12}$  Hz , ce qui est le cas souvent dans les applications en électrotechnique. Ainsi le terme  $\mathbf{J}_D$  devient négligeable devant  $\mathbf{J}$ .

L'équation (I.4) devient alors :

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \sigma \mathbf{E}_{ind} \quad (I.20)$$

Après simplification, les équations de Maxwell à résoudre sont :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (I.21)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (I.22)$$

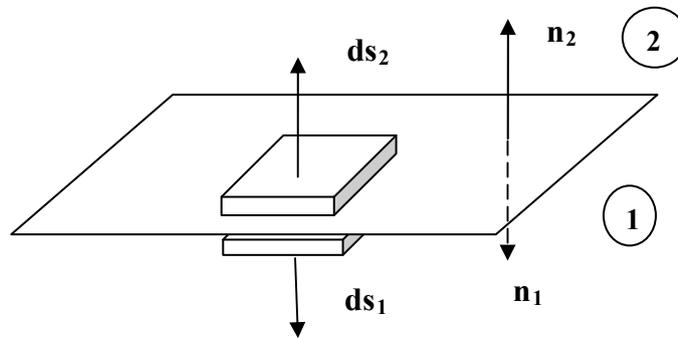
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (I.23)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (I.24)$$

Avec  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{ind} + \mathbf{J}_s$

### I.4.3 Conditions de transmission

Les champs subissent des discontinuités à l'interface entre deux milieux de propriétés différentes. Les conditions de passage permettent d'exprimer des relations de continuité sur les composantes de ces champs



**Figure 3.** Interface entre les milieux 1 et 2 avec propriétés différentes.

En appliquant les équations de Maxwell sous leurs formes intégrales à la surface de séparation des deux milieux on obtient :

- Conservation de la composante normale du vecteur induction magnétique  $\mathbf{B}$

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (I.25)$$

- Conservation de la composante tangentielle du vecteur Champ électrique  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{n} \wedge (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (I.26)$$

- La composante tangentielle du vecteur champ magnétique  $\mathbf{H}$  est discontinue lorsque la conductivité du milieu conducteur est infinie (l'existence des courants surfaciques).

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{k} \quad (\text{I.27})$$

- La composante normale du vecteur déplacement électrique n'est pas continue

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \quad (\text{I.28})$$

$\mathbf{k}$ ,  $\rho_s$  et  $\mathbf{n}$  sont respectivement la densité des courants surfaciques, la densité de charge surfacique et le vecteur normal à la surface de séparation entre les deux milieux.

#### I.4.4 Conditions aux limites

##### a- Condition de DIRICHLET

Cette condition nous renseigne sur la valeur exacte de l'inconnue sur la frontière extérieure du domaine de résolution (limite)

$$U = g_0 \quad (\text{I.29})$$

$U$  est l'inconnue du problème et la constante  $g_0$  représente la valeur de l'inconnue sur la frontière.

##### b- Condition de NEWMANN

Cette condition nous renseigne sur la valeur de la composante normale de l'inconnue sur la limite du domaine étudié. Elle permet de déduire qu'il existe un plan de symétrie dans le domaine d'étude lorsque la valeur de cette dernière est nulle.

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} = h_0 \quad (\text{I.30})$$

$h_0$ : constante ou nulle.

#### I.4.5 Formulations utilisant le vecteur potentiel magnétique $\mathbf{A}$

Les équations de Maxwell telles qu'elles sont posées se prêtent mal à une résolution numérique. Pour les problèmes de symétrie de révolution on utilise généralement une formulation en potentiel vecteur magnétique [24].

### I.4.5.1 Modèle magnétostatique

En magnétostatique, le champ est produit par des sources de courant indépendantes du temps. A partir de l'équation (I.23) on peut écrire:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \text{il existe un potentiel vecteur } \mathbf{A} \text{ tel que } \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$$

Par ailleurs nous avons l'équation  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , et en utilisant l'équation (I.24) on trouve que :

$$\nabla \wedge \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mathbf{J}_s, \text{ et avec l'équation } \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \text{ on aura finalement l'équation magnétostatique en}$$

terme du potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$ :

$$\nabla \wedge \frac{\nabla \wedge \mathbf{A}}{\mu} = \mathbf{J}_s \quad (\text{I.31})$$

C'est l'équation magnétostatique pour un milieu de perméabilité  $\mu$  et alimenté par une densité de courant  $\mathbf{J}_s$ .

### I.4.5.2 Modèle magnétodynamique

Dans le cas où les sources dépendent du temps, le terme  $-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  n'est donc pas nul. Les champs magnétique et électrique sont couplés par la présence des courants induits.

En remplaçant  $\mathbf{B}$  par  $\nabla \wedge \mathbf{A}$ , l'équation (I.22) devient :

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \text{Il existe un potentiel scalaire électrique } V \text{ tel que :}$$

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad (\text{I.31})$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V = \mathbf{E}_{\text{ind}} + \mathbf{E}_s \quad (\text{I.32})$$

avec :

$$\mathbf{E}_s = -\nabla V \quad (\text{I.33})$$

$$\mathbf{E}_{\text{ind}} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{I.34})$$

La combinaison des équations (I.8), (I.15), (I.16), (I.33) et (I.34) donne :

- Pour un milieu en mouvement

$$\mathbf{J} = -\sigma \left\{ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right\} + \sigma (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{J}_s \quad (\text{I.35})$$

avec  $\mathbf{J}_s = -\sigma \nabla V$

$$\mathbf{J} = -\sigma \left\{ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \right\} + \mathbf{J}_s \quad (\text{I.36})$$

$\mathbf{J}_s$  est imposée dans l'inducteur et nulle ailleurs.

$$\mathbf{J}_{\text{ind}} = -\sigma \left\{ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \right\} \quad (\text{I.37})$$

$$\mathbf{J}_s = -\sigma \nabla V \quad (\text{I.38})$$

En adoptant la notation  $\frac{\mathbf{DA}}{\mathbf{Dt}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ , l'équation (I.36) devient :

$$\mathbf{J} = -\sigma \left\{ \frac{\mathbf{DA}}{\mathbf{Dt}} \right\} + \mathbf{J}_s \quad (\text{I.39})$$

En remplaçant  $\mathbf{J}$  par son expression dans l'équation (I.24), on aboutit ainsi à l'équation magnétodynamique en potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$ , donnée par le système d'équations suivant :

$$\nabla \wedge (\mathbf{v}(\nabla \wedge \mathbf{A})) + \sigma \left( \frac{\mathbf{DA}}{\mathbf{Dt}} \right) = \mathbf{J} \quad (\text{I.40})$$

L'équation (I.36) est valable pour un milieu de conductivité  $\sigma$ , de reluctivité magnétique  $\nu$  alimenté par une source de densité de courant  $\mathbf{J}_s$ .

#### **I.4.6 Equation magnétodynamique 2D cartésienne**

Dans le cas des coordonnées cartésiennes, le potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  a une seule composante suivant l'axe  $z$ .  $\mathbf{A} = (0, 0, A_z)$

pour un milieu à caractéristiques magnétiques linéaires

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = -\Delta \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (\text{I.41})$$

Dans le cas particulier des systèmes 2D, le terme  $(\nabla \cdot \mathbf{A})$  est nul.

L'équation magnétodynamique en coordonnées cartésiennes s'écrit:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}_z}{\partial y^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial t} = -\mu \mathbf{J}_{sz} \quad (\text{I.42})$$

Dans le cas où les caractéristiques magnétiques sont non linéaires l'équation devient:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial \mathbf{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial \mathbf{y}} \right) - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial t} = -\mathbf{J}_{sz} \quad (\text{I.43})$$

#### I.4.7 Equation magnétodynamique 2D axisymétrique

Dans une configuration axisymétrique (coordonnées cylindriques  $(r, \varphi, z)$ ), la formulation utilisant le potentiel vecteur magnétique offre l'intérêt suivant :

- Le système présente une seule inconnue, la composante orthoradiale ( $\mathbf{A}_\varphi$ ) du vecteur  $\mathbf{A}$  lorsque le courant est lui même orienté suivant cette direction.  $\mathbf{A} = (0, \mathbf{A}_\varphi, 0)$  et  $\mathbf{J}_s = (0, \mathbf{J}_{s\varphi}, 0)$ .

en coordonnées cylindriques nous avons:

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r\mathbf{A}_\varphi & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{I.42})$$

ce qui donne  $\nabla \wedge \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left[ -\frac{\partial r\mathbf{A}_\varphi}{\partial z} \mathbf{u}_r + \frac{\partial r\mathbf{A}_\varphi}{\partial r} \mathbf{u}_z \right]$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial r\mathbf{A}_\varphi}{\partial z} & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial r\mathbf{A}_\varphi}{\partial r} \end{vmatrix} \quad (\text{I.43})$$

En prenant comme inconnue le potentiel vecteur magnétique modifié  $\mathbf{A} = r\mathbf{A}_\varphi$ , le développement de l'équation (I.40) dans le plan  $[r, z]$  permet d'écrire:

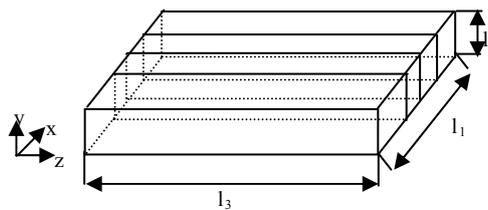
$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) - \frac{\sigma}{r} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{J}_{sz} \quad (\text{I.44})$$

La condition de jauge est vérifiée automatiquement dans les systèmes axisymétriques, car le potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  est confondu avec l'axe orthoradial donc sa divergence s'annule [24].

### I.4.8 Modèles géométriques

Les lois de l'électromagnétisme qui permettent de calculer les grandeurs électromagnétiques sont obtenues à partir des équations de Maxwell (théorème d'ampère, loi de Faraday...) et des relations constitutives du milieu (loi d'Ohm, caractéristiques d'aimantation...) à partir de ces lois, différentes formulations menant à l'expression des équations différentielles aux dérivées partielles peuvent être envisagées (en champ, en potentiel...). Le choix de la formulation est guidé par le souci de simplicité des équations différentielles aux dérivées partielles à résoudre. Ainsi un modèle bidimensionnel (2D) peut être préféré à un modèle plus complexe. Parmi les systèmes qui peuvent être étudiés à partir de formulations 2D, on peut citer les deux principaux cas de figure suivants :

- Les systèmes de longueur (suivant l'axe z) importantes par rapport aux dimensions transversales.

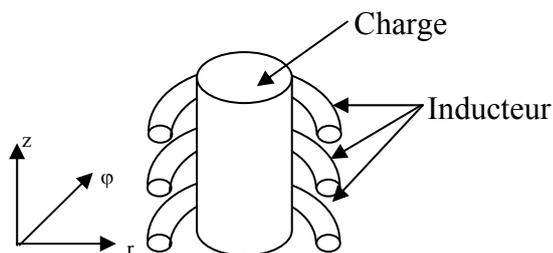


$$l_1 \ll l_3$$

$$l_2 \ll l_3$$

**Figure 4.** Système long

- Les systèmes pourvus d'une symétrie de révolution



**Figure 5.** Système à symétrie de révolution

Dans le 1<sup>er</sup> cas, les courants circulent suivant la direction longitudinale (oz).

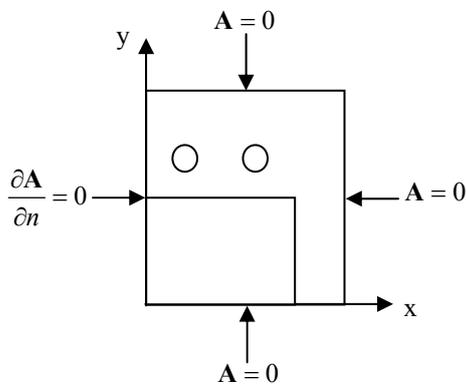
Dans le 2<sup>ème</sup> cas les courants n'ont de composantes que suivant la direction orthoradiale ( $\phi$ ).

Dans ce cas le potentiel vecteur magnétique a la même direction que le courant.

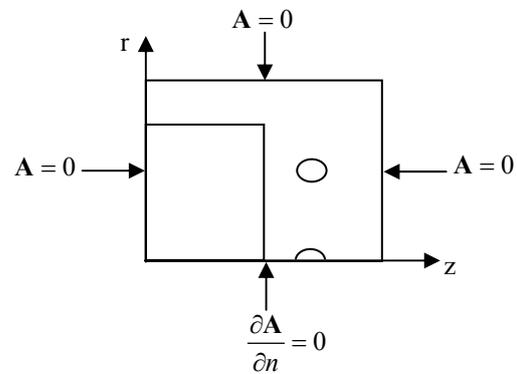
**Remarques :**

Le choix de la formulation en potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  permet de mener respectivement l'étude dans le plan  $(x, y)$  (système cartésien Figure 4)) ou dans le plan  $(r, z)$  (système cylindrique Figure 5).

Les conditions aux limites doivent être exprimées en termes de potentiel vecteur magnétique. On choisit la composante tangentielle de  $\mathbf{A}$  nulle à l'infini et sur l'axe de symétrie de révolution. Sur les plans de symétrie géométriques et magnétiques on choisit la condition  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}} = 0$  qui exprime que les lignes du champ sont orthogonales à ces plans.



**Figure 6** Système cartésien



**Figure 7** Système cylindrique

**1.5 Modélisation du problème mécanique**

On considère un corps solide, déformable, ce corps est soumis à l'action des forces de volume  $F_v$ . Le problème mécanique consiste à déterminer le champ des déplacements  $\mathbf{u}$  et/ou des contraintes  $\sigma$  dans un corps de forme initiale connue. Les équations décrivant le comportement du corps sont des équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites.

Pour simplifier les calculs certaines hypothèses s'imposent [33]:

- 1) Le corps est homogène: les constantes du matériau sont les mêmes en tout point du corps et ne changent pas dans le domaine.
- 2) Le corps est isotrope: les caractéristiques du corps ne changent pas avec la direction autour d'un point à l'intérieur.
- 3) L'élasticité est idéale: les déformations et les contraintes nous fournissent la même information sur l'état du corps. La déformation est complètement réversible et le corps revient à son état initial une fois la charge supprimée.

### I.5.1 Equation d'équilibre

Pour un solide soumis à l'action des forces de volume, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (\text{I.45})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{Loi de Hooke généralisée}) \quad (\text{I.46})$$

C est le tenseur d'élasticité.

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla \bar{\mathbf{u}} \quad (\text{I.47})$$

$\rho$  : la masse volumique du matériau [ $\text{kg/m}^3$ ].

$\mathbf{f}$  : Vecteur densité de force [ $\text{N/m}^3$ ].

$\boldsymbol{\sigma}$  : Tenseur des contraintes [Pa].

$\boldsymbol{\varepsilon}$  : Tenseur des déformations.

$\mathbf{u}$  : Champs de déplacements [m].

La loi de Hooke est, par essence, tridimensionnelle. Dans son application à des problèmes bidimensionnels, il faudra distinguer déformations planes et contraintes planes.

### I.5.2 Cas de déformations planes

La "déformation plane" est une approximation très utilisée. S'il se trouve dans la déformation étudiée une direction suivant laquelle les variations spatiales des déplacements sont négligeables (devant celles suivant les deux directions perpendiculaires), et si les déplacements le long de cette direction sont constants, alors on est dans les conditions de déformation plane : on choisit cette direction comme un axe du repère, et on peut se contenter de travailler seulement avec les deux autres axes.

Le tenseur des déformations s'écrit alors:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.48})$$

et par la loi de comportement élastique, le tenseur des contraintes:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{I.49})$$

Ou  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  sont les contraintes principales suivant les axes x et y,  $\sigma_{xy}$  est la contrainte tangentielle,  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$  sont respectivement les déformations principales suivant les directions x et y,  $\varepsilon_{xy}$  est la déformation tangentielle.

on trouve après développement :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (I.50)$$

E : module de Young [Pa].

$\nu$  : Coefficient de poisson.

Dans ce cas le tenseur d'élasticité s'écrit :

$$C = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (I.51)$$

### I.5.3 Etat de contraintes planes

Le modèle contrainte plane est une approximation qui convient aux plaques minces sollicitées dans leur plan par des forces de surface et de volume [64]. Toute contrainte suivant l'axe z est considérée nulle ( $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ )

Le tenseur des déformations

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (I.52)$$

et par la loi de comportement élastique, le tenseur des contraintes

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (I.53)$$

on trouve à la fin :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (I.54)$$

le tenseur d'élasticité s'écrit

$$C = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (I.55)$$

### I.5.4 Modélisation en termes de champs de déplacement

Le système d'équations mécaniques en termes de contraintes s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \end{cases} \quad (I.56)$$

On remplace les contraintes par leurs expressions , dans le cas des déformations planes

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_{xx} + \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{yy} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{E}{2(1-\nu)} \varepsilon_{xy} \right] + f_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{E(1-\nu)}{2(1-\nu)} \varepsilon_{xy} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{E\nu}{(1-\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{xx} + \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_{yy} \right] + f_y = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \end{cases} \quad (I.57)$$

avec

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

en introduisant les relations contraintes - déplacements, on obtient le système matricielle suivant

$$\begin{cases} \frac{E}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + f_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{E}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} + f_y = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \end{cases} \quad (I.58)$$

Dans le cas des contraintes planes , en adoptant la même démarche que dans le cas des déformations planes on obtient:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_{xx} + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \varepsilon_{yy} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{E(1-\nu)}{2(1-\nu^2)} \varepsilon_{xy} \right] + f_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{E(1-\nu)}{2(1-\nu^2)} \varepsilon_{xy} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{E\nu}{1-\nu^2} \varepsilon_{xx} + \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_{yy} \right] + f_y = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \end{cases} \quad (I.59)$$

En remplaçant les déformations par leurs expressions le système matricielle à résoudre dans le cas des contraintes planes est le suivant:

$$\begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + f_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} + f_y = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \end{cases} \quad (I.60)$$

# **CHAPITRE II**

## **Modèles numériques et méthodes de calcul des forces**

Les équations aux dérivées partielles interviennent dans de nombreux domaines de la physique, qui comprennent les problèmes de diffusion et les phénomènes de propagation. Ces équations différentielles n'ont généralement pas de solutions analytiques, lorsque les géométries sont complexes ou que les propriétés physiques des matériaux dépendent de la variable d'état, une résolution numérique est alors nécessaire.

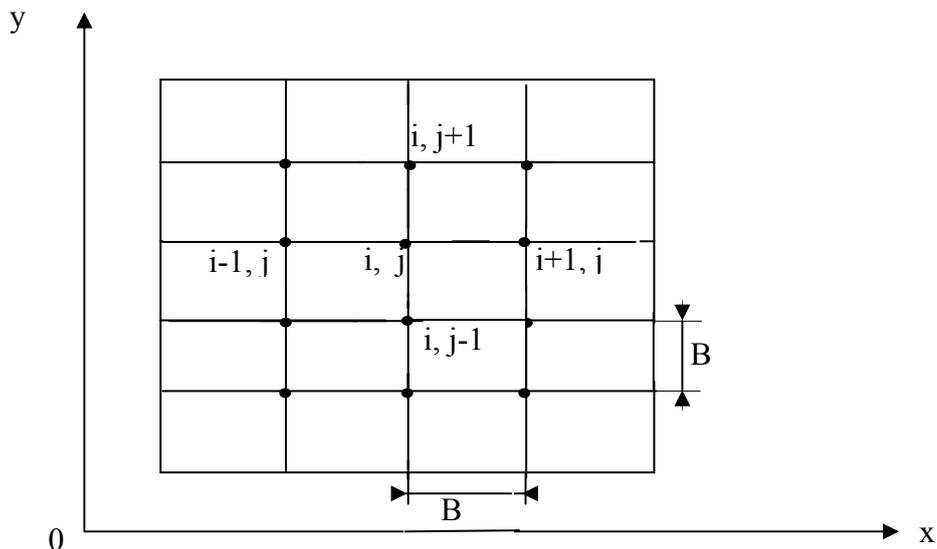
Les méthodes numériques de discrétisation transforment les équations aux dérivées partielles, caractéristiques aux champs, à des systèmes d'équations algébriques dont la solution fournit une approximation de ces champs en une grille discrète de points dans le plan ou dans l'espace. Ceci consiste à ramener la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles dans le domaine d'étude, compte tenu des conditions aux limites et de symétrie, à un système d'équation algébrique dont la solution conduit à la détermination des champs.

Parmi ces méthodes, on cite la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et la méthode des intégrales de frontières.

### II.1 La méthode des différences finies

Cette méthode est basée sur la transformation de l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences où chaque dérivée est approchée par une différence de valeurs de l'inconnue aux nœuds du domaine de résolution [25].

Considérons le domaine suivant:



**Figure II.1 Maillage type différences finies**

Si on applique un développement limité en séries de Taylor de la fonction à déterminer en chacun des nœuds du maillage, l'approximation des dérivées aux points  $(i, j)$  est :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2B}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2B}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{B^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{B^2}$$

ce qui permet de déduire l'expression du Laplacien

$$(\Delta f)_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{B^2} + \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{B^2}$$

$$(\Delta f)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j}}{B^2}$$

la méthode des différences finies est très attrayante par sa simplicité quand il s'agit des problèmes à géométrie régulière, par contre elle est très difficile à généraliser aux problèmes à géométrie complexe et des conditions aux limites quelconques.

De nos jours, elle est supplantée par la méthode des éléments finis dans presque toutes les applications en ingénierie.

## II.2 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis a été utilisée pour la première fois pour simuler les problèmes de mécanique des milieux continus déformables. Le champ d'application s'est considérablement étendu et les fondements théoriques de la méthode se sont amplement consolidés. Il existe de nos jours un nombre important de logiciels commerciaux et académiques qui utilisent la méthode des éléments finis comme un outil de simulation robuste pour des problèmes de mécanique des milieux continus, de mécanique des fluides, de thermique, d'électromagnétisme ou de finance, pour ne citer que quelques exemples [26].

La méthode des éléments finis consiste donc à remplacer un problème continu par un problème discret équivalent. La discrétisation se fait sur deux fronts, d'une part le domaine est subdivisé en sous domaines de géométries simples appelés éléments, et d'autre part les

équations aux dérivées partielles sont remplacées par des équations algébriques à l'aide du calcul variationnel ou des méthodes de minimisation de l'erreur comme la méthode des résidus pondérés.

La solution finale s'obtient en résolvant les équations algébriques obtenues sur tous les éléments constituant le domaine [28], [29].

### II.2.1 Formulation éléments finis

Nous définissons la méthode des éléments finis comme une méthode de discrétisation des formes intégrales de type Galerkin : elle remplace la forme intégrale globale par la somme de formes intégrales élémentaires puis discrétiser celles-ci en utilisant une approximation par éléments finis.

La formulation intégrale peut être de deux types :

- Variationnelle
- Résidus pondérés

#### II.2.1.1 Formulation variationnelle

La méthode variationnelle exige la connaissance au préalable de la fonctionnelle d'énergie du système à étudier.

Cette fonctionnelle est déterminée à partir du principe de l'action Hamiltonienne qui stipule l'existence d'une fonctionnelle de type intégrale définie par :

$$F(A) = \int_{\Omega} L d\Omega \quad (\text{II.1})$$

$L$  : fonction de Lagrange qui résulte de la coénergie du système de type cinétique et de son énergie potentielle.

$\Omega$  : domaine de résolution.

Résoudre le problème variationnel défini par la fonctionnelle d'énergie  $F[A]$  revient à minimiser cette fonctionnelle.

#### Cas d'un phénomène magnétique

Dans ce cas la fonction Lagrange est donnée par l'expression :

$$L = \int_0^B \nu B dB - JA \quad (\text{II.2})$$

Avec :

$A$  : Potentiel vecteur magnétique [T. m].

$J$  : Densité de courant [ $A/m^2$ ]

$\nu$  : Réductivité magnétique [ $H/m$ ]<sup>-1</sup>

B : Induction magnétique [T].

L'expression de la fonctionnelle d'énergie est donnée comme suit :

$$F(A) = \int_{\Omega} \left[ \int_0^B v B dB - JA \right] d\Omega \quad (II.3)$$

La résolution du problème variationnel défini par la fonctionnelle d'énergie  $F(A)$  revient à minimiser cette fonctionnelle ; la minimisation est effectuée en utilisant le principe de Rayleigh-Ritz. [29]

Qui s'énonce comme suit : La dérivée de la fonctionnelle d'énergie  $F(A)$  par rapport à chaque inconnue au nœud est nulle.

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = 0 \quad \text{pour } i=1,2,3,\dots,n \quad (II.4)$$

Ou :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{A})}{\partial A_2} = \dots = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{A})}{\partial A_i} = \dots = \frac{\partial F(A)}{\partial A_n} = 0 \quad (II.5)$$

Avec :

$n$  : nombre de nœuds du domaine d'étude.

$A_i$  : est l'inconnu aux nœuds  $i$  du domaine.

### II.2.1.2 Méthodes des résidus pondérés

Les méthodes des résidus pondérés sont des méthodes numériques permettant de résoudre un système d'équations aux dérivés partielles en approximant la solution exacte par une solution approchée.

En remplaçant la solution exacte par la solution approchée, nous commettons une erreur appelée résidu  $R$ .

$$R = L(u) - f_v \neq 0 \quad (II.6)$$

A l'aide des fonctions de pondération  $\beta_i$  bien choisies, nous imposons à l'intégrale du résidu de s'annuler en  $n$  points de  $\Omega$  [25] :

$$w_i = \int_{\Omega} \beta_i R d\Omega = 0 \quad \text{pour } i=1,\dots,n \quad (II.7)$$

Les fonctions de pondération  $\beta_i$  sont indépendantes et leur nombre doit être égal au nombre de paramètres de l'approximation .

Leur choix conduit à plusieurs méthodes :

- Méthode de collocation par point.
- Méthode des moindres carrés.

➤ Méthode de Galerkin

La méthode de collocation par point utilise les fonctions de Dirac comme fonctions de pondération (projection), la méthode des moindres carrés utilise la minimisation de la norme quadratique de l'erreur sur l'équation et les conditions aux limites.

Dans la méthode de Galerkin, les fonctions de projection  $\beta_i$  sont identiques aux fonctions de forme  $\alpha_j$ . On se limitera dans ce qui suit à cette méthode qui sera employée pour le traitement des problèmes à équations aux dérivées partielles étudiées et cela pour deux raisons [27],[28],[24] :

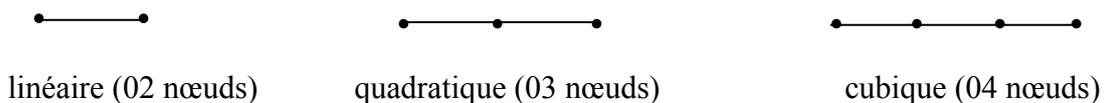
1. Elle s'applique indépendamment de la connaissance au préalable de la fonctionnelle d'énergie du système à étudier.
2. En choisissant les fonctions de pondération identiques aux fonctions de formes, nous obtenons un système algébrique dont la résolution devient relativement rapide.

### II.2.2 Discrétisation du domaine d'étude (maillage)

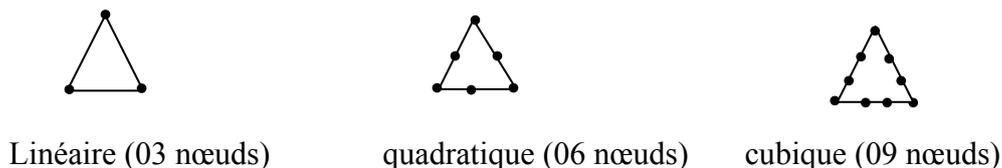
Nous choisissons un ensemble de  $n$  points sur le domaine  $\Omega$  qui servira à définir la géométrie des éléments. Ces points appelés nœuds géométriques, peuvent éventuellement coïncider avec les nœuds d'interpolation puis nous remplaçons le domaine  $\Omega$  par un ensemble d'éléments  $\Omega_e$  de formes relativement simples. Chaque élément doit être défini analytiquement de manière unique en fonction des nœuds.

Les éléments de base pour discrétiser  $\Omega$  sont :

- Problème à une dimension  $\mapsto$  élément droit



- Problème à deux dimensions  $\mapsto$  triangle ou quadrilatère



- Problème à deux dimensions  $\mapsto$  quadrilatères



linéaire (04 nœuds)

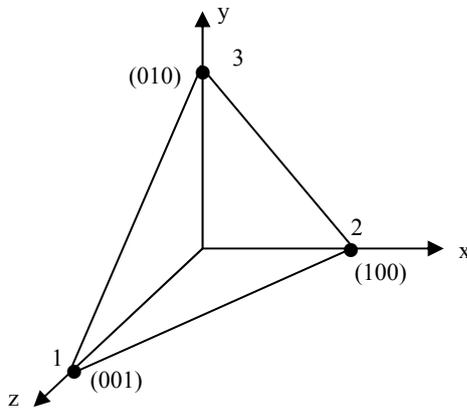


quadratique (08 nœuds)

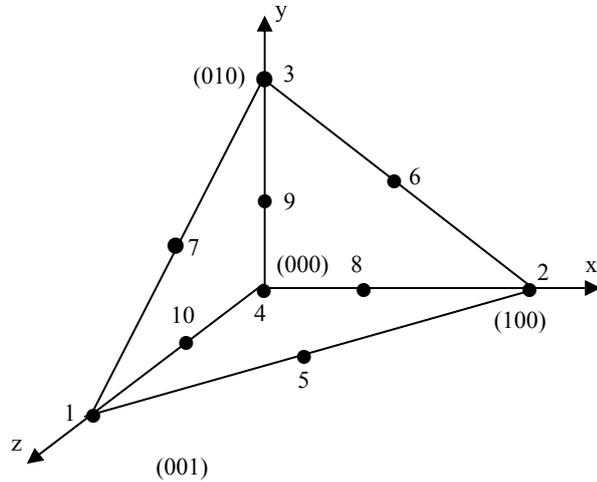


cubique (12 nœuds)

– Problème à trois dimensions



Elément linéaire (04 nœuds)



Elément quadratique (10 Noeuds)

Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leurs frontières communes, si elle existe. Cette condition exclut le recouvrement de deux éléments, les frontières entre deux éléments peuvent être des points (le cas à une dimension), des courbes (le cas à deux dimensions) ou des surfaces (le cas à trois dimensions).

L'ensemble de tous les éléments  $\Omega_e$  doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine  $\Omega$ , nous excluons en particulier les trous entre les éléments [27].

Les fonctions d'interpolations sont obtenues à partir du triangle de PACSAL, donné ci-dessous :

1	—	ordre 0
$U \quad V$	—	ordre 1
$U^2 \quad UV \quad V^2$	—	ordre 2
$U^3 \quad U^2V \quad UV^2 \quad V^3$	—	ordre 3

**Triangle de PACSAL**

La construction de ces fonctions doit vérifier les conditions suivantes :

### 1- Principe de l'état complet

- La fonction doit contenir un terme constant.
- Le nombre de termes de la fonction doit être égale au nombre de nœuds de l'élément.

### 2- Principe de compatibilité

- La fonction doit être continue (c'est-à-dire la première dérivée existe).

## II.2.3 Notions de fonctions d'approximation

La fonction d'approximation consiste à chercher la meilleure approximation d'une fonction  $F(x)$  à domaine  $\Omega$  de manière à satisfaire au mieux les lois physiques auxquelles elle obéit, donc pour approximer une fonction  $F(x)$  on procède comme suit :

On choisit dans le domaine d'étude  $\Omega$  un ensemble de nœuds d'interpolations de coordonnées  $(x_i)$  confondus ou non avec les nœuds géométriques, puis on applique une approximation nodale de la fonction exacte  $F(x)$  sur chaque élément  $(\Omega_e)$

$$F(x) = \langle N^e_1(x) \quad N^e_2(x) \quad \dots \quad N^e_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} U^e_1 \\ U^e_2 \\ \vdots \\ U^e_n \end{Bmatrix} = \langle N^e(x) \rangle \{U^e\} \quad (\text{II.8})$$

$\langle \dots, \dots \rangle$  : vecteur ligne

$\{ \}$  : vecteur colonne

$x_i$  : coordonnée au point  $i$  de  $\Omega_e$

$U^e_1 \dots, U^e_n$  : sont les valeurs de  $F(x)$  aux nœuds d'interpolation de l'élément ou variables nodales.

$N^e(x)$  : vecteur des fonctions de forme de l'élément.

## II.3 Formulations éléments finis des équations électromagnétiques

L'équation magnétodynamique avec terme source en coordonnées cartésiennes est donnée sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right] - \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} = -J_{sz} \quad (\text{II.9})$$

Nous appliquons la méthode de Galerkin à l'équation (II-9), La formulation intégrale de l'équation s'écrit :

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) \alpha_i dx dy = - \iint_{\Omega} J_{sz} \alpha_i dx dy \quad (II.10)$$

C'est la forme forte de la formulation éléments finis de l'équation magnétodynamique L'intégration par partie des dérivées d'ordre deux génère la forme faible de cette formulation, En appliquant le théorème de Green , nous aurons :

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \alpha_i dx dy = - \iint_{\Omega} v \overrightarrow{\nabla A_z} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} dx dy + \int_{\Gamma} v \frac{\partial A_z}{\partial n} \alpha_i d\Gamma \quad (II.11)$$

En remplaçant (II-11) dans (II-10) on aura :

$$\iint_{\Omega} \overrightarrow{\nabla A_z} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} dx dy - \int_{\Gamma} v \frac{\partial A_z}{\partial n} \alpha_i d\Gamma + \iint_{\Omega} \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} \alpha_i dx dy = \iint_{\Omega} J_{sz} \alpha_i dx dy \quad (II.12)$$

Dans le cas des conditions aux limites de types Dirichlet ou Neumann homogènes , le terme sur la frontière est nul, donc  $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$

n est le vecteur unitaire normal au point considéré de la frontière.

Donc l'équation (II-12) devient :

$$\iint_{\Omega} \overrightarrow{\nabla A_z} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} dx dy + \iint_{\Omega} \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} \alpha_i dx dy = \iint_{\Omega} J_{sz} \alpha_i dx dy \quad (II.13)$$

L'interpolation d'un élément est effectuée en fonction des valeurs de l'inconnue aux nœuds de cet élément ; il s'agit alors de l'interpolation nodale.

Dans l'approximation nodale que nous utiliserons dans cette étude, l'inconnue A est exprimée dans le cas du système cartésien par :

$$A(x, y) = \sum_{j=1}^{nn} \alpha_j(x, y) A_j \quad (II.14)$$

A(x,y) : inconnue,

nn : nombre de nœuds du domaine subdivisé,

$\alpha_j(x, y)$  : Fonction de forme au nœud j.

$A_j$  : Valeur de l'inconnue au nœud j.

La discrétisation de A à l'aide des fonctions d'approximation (II-14) conduit à l'écriture suivante :

$$\sum_{j=1}^{nn} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \nabla \alpha_i \cdot \nabla (\alpha_j A_j)] dx dy + \sum_{j=1}^{nn} \int_{\Omega} \left[ \sigma \alpha_i \frac{d(\alpha_j A_j)}{dt} \right] dx dy - \int_{\Omega} (J_s \alpha_i) dx dy = 0 \quad (\text{II.15})$$

L'équation obtenue est une équation différentielle du premier ordre par rapport au temps.

La dérivée temporelle peut être traitée par la méthode d'Euler :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A^{t+1} - A^t}{\Delta t} \quad (\text{II.16})$$

En remplaçant la dérivée temporelle intervenant dans le système (II-17) par l'approximation (II-18), il vient :

$$\sum_{j=1}^{nn} \Delta t \left( \int_{\Omega} [\mathbf{v} \nabla \alpha_i \cdot \nabla (\alpha_j)] dx dy \right) A_j^{t+1} - \int_{\Omega} [J_s \alpha_i] dx dy + \sum_{j=1}^{nn} \left( \int_{\Omega} [\sigma \alpha_i \alpha_j] dx dy \right) (A_j^{t+1} - A_j^t) = 0 \quad (\text{II.17})$$

Le système algébrique à résoudre sera donc donné par la relation matricielle suivante :

$$\Delta t ([M] \{A\} + \{F\}) + [K] \{A^{t+1} - A^t\} = 0 \quad (\text{II.18})$$

avec

$$M_{ij} = \int_{\Omega} [\mathbf{v} \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j] dx dy \quad (\text{II.19})$$

$$F_i = \int_{\Omega} [J_s \alpha_i] dx dy \quad (\text{II.20})$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega} [\sigma \alpha_i \alpha_j] dx dy \quad (\text{II.21})$$

$\Delta t$  est le pas de temps

$\{A^{t+1}\}$  est le vecteur correspondant aux valeurs du potentiel vecteur magnétique aux nœuds du maillage à l'instant  $t+1$  ;

$\{A^t\}$  sa valeur à l'instant précédent ( $t$ )

## II.4 Formulations éléments finis des équations mécaniques

### a- Dans le cas de déformations planes

Le système d'équations en terme de déplacements est donné par :

$$\begin{cases} \frac{E}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + f_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{E}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} + f_y = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \end{cases} \quad (II-22)$$

L'intégration par partie du système d'équations (II-22) permet d'obtenir :

$$\begin{cases} \frac{E}{1-2\nu} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dx dy - \frac{E}{1-2\nu} \int_{\Gamma} \alpha_i \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) d\Gamma + \frac{E}{2(1-\nu)} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dx dy \\ - \frac{E}{2(1-\nu)} \int_{\Gamma} \alpha_i \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \left( \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\Gamma} \left( \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \alpha_i \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) d\Gamma \\ + \int_{\Omega} \left( \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dx dy - \int_{\Gamma} \left( \frac{E}{2(1-\nu)} \alpha_i \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \alpha_i f_x dx dy + \int_{\Omega} \alpha_i \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} dx dy = 0 \\ \frac{E}{1-2\nu} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) dx dy - \frac{E}{1-2\nu} \int_{\Gamma} \alpha_i \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) d\Gamma + \frac{E}{2(1-\nu)} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dx dy \\ - \frac{E}{2(1-\nu)} \int_{\Gamma} \alpha_i \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \left( \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\Gamma} \left( \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \alpha_i \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) d\Gamma \\ + \int_{\Omega} \left( \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dx dy - \int_{\Gamma} \left( \frac{E}{2(1-\nu)} \alpha_i \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \alpha_i f_x dx dy + \int_{\Omega} \alpha_i \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} dx dy = 0 \end{cases} \quad (II-23)$$

L'inconnu u est approximé par la fonction d'interpolation :

$$u = \sum_j \alpha_j(x, y) u_j \quad (II.24)$$

ce qui permet d'écrire le système (II.23) précédent sous la forme :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{nn} \left\{ \int_{\Omega} \left( \frac{E}{1-2\nu} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right) u_{j_x} dx dy + \int_{\Omega} \alpha_i \rho \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial t^2} u_j dx dy \right\} \\ + \sum_{j=1}^{nn} \left\{ \int_{\Omega} \left( \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) u_{j_y} dx dy \right\} - \int_{\Omega} \alpha_i f_x dx dy = 0 \\ \sum_{j=1}^{nn} \left\{ \int_{\Omega} \left( \frac{E}{1-2\nu} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) u_{j_y} dx dy + \int_{\Omega} \alpha_i \rho \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial t^2} u_j dx dy \right\} \\ + \sum_{j=1}^{nn} \left\{ \int_{\Omega} \left( \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) u_{j_x} dx dy \right\} - \int_{\Omega} \alpha_i f_x dx dy = 0 \end{cases} \quad (II.25)$$

Les intégrants matriciels sont données selon les expressions suivantes :

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \left( \frac{E}{1-2\nu} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right) dx dy \\ \int_{\Omega} \left( \frac{E}{1-2\nu} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) dx dy \end{bmatrix}$$

$$N_{ij} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \left( \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) dx dy \\ \int_{\Omega} \left( \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) dx dy \end{bmatrix},$$

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \rho \alpha_i \alpha_j dx dy \\ \int_{\Omega} \rho \alpha_i \alpha_j dx dy \end{bmatrix}, F_i = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \alpha_i f_x dx dy \\ \int_{\Omega} \alpha_i f_y dx dy \end{bmatrix}$$

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \left( \frac{E}{1-2\nu} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right) dx dy & \int_{\Omega} \left( \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) dx dy \\ \int_{\Omega} \left( \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) dx dy & \int_{\Omega} \left( \frac{E}{1-2\nu} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) dx dy \end{bmatrix}$$

### b-Dans le cas de Contraintes planes

le système d'équations à résoudre par la méthode des éléments finis est le suivant

$$\begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + f_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} + f_y = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \end{cases} \quad (II.26)$$

L'intégration par partie du système d'équations (II-26) conduit au résultat suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{E}{1-\nu^2} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dx dy - \frac{E}{1-\nu^2} \int_{\Gamma} \alpha_i \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) d\Gamma + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dx dy \\
 - \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{\Gamma} \alpha_i \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\Gamma} \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} \alpha_i \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) d\Gamma \\
 + \int_{\Omega} \left( \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dx dy - \int_{\Gamma} \left( \frac{E}{2(1+\nu)} \alpha_i \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \alpha_i f_x dx dy + \int_{\Omega} \alpha_i \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} dx dy = 0 \\
 \frac{E}{1-\nu^2} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) dx dy - \frac{E}{1-\nu^2} \int_{\Gamma} \alpha_i \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) d\Gamma + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dx dy \\
 - \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{\Gamma} \alpha_i \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\Gamma} \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} \alpha_i \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) d\Gamma \\
 + \int_{\Omega} \left( \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dx dy - \int_{\Gamma} \left( \frac{E}{2(1+\nu)} \alpha_i \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \alpha_i f_x dx dy + \int_{\Omega} \alpha_i \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} dx dy = 0
 \end{array} \right. \quad (II.27)$$

L'inconnu u est approximé par la fonction d'interpolation :

$$u = \sum_j \alpha_j(x, y) u_j \quad (II.28)$$

En remplaçant l'inconnue u par son expression dans le système (II.27) on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{j=1}^{mn} \left\{ \int_{\Omega} \left( \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right) u_{jx} dx dy + \int_{\Omega} \alpha_i \rho \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial t^2} u_j dx dy \right\} \\
 + \sum_{j=1}^{mn} \left\{ \int_{\Omega} \left( \frac{\nu E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) u_{jy} dx dy \right\} - \int_{\Omega} \alpha_i f_x dx dy = 0 \\
 \sum_{j=1}^{mn} \left\{ \int_{\Omega} \left( \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) u_{jy} dx dy + \int_{\Omega} \alpha_i \rho \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial t^2} u_j dx dy \right\} \\
 + \sum_{j=1}^{mn} \left\{ \int_{\Omega} \left( \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) u_{jx} dx dy \right\} - \int_{\Omega} \alpha_i f_x dx dy = 0
 \end{array} \right. \quad (II.29)$$

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \left( \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right) dx dy \\ \int_{\Omega} \left( \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) dx dy \end{bmatrix}$$

$$N_{ij} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \left( \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) dx dy \\ \int_{\Omega} \left( \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) dx dy \end{bmatrix},$$

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \rho \alpha_i \alpha_j \, dx dy \\ \int_{\Omega} \rho \alpha_i \alpha_j \, dx dy \end{bmatrix}, F_i = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \alpha_i f_x \, dx dy \\ \int_{\Omega} \alpha_i f_y \, dx dy \end{bmatrix}$$

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \left( \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right) dx dy & \int_{\Omega} \left( \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) dx dy \\ \int_{\Omega} \left( \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) dx dy & \int_{\Omega} \left( \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) dx dy \end{bmatrix}$$

Le système algébrique à résoudre est sous la forme :

$$[M] \{U\} + [K] \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right\} = \{F\} \quad (\text{II.30})$$

## II.5 La méthode d'intégrales de frontières

C'est la dernière née des méthodes numériques en électrotechnique, elle consiste à ramener le problème sur les frontières du domaine d'étude, donc on n'a pas à mailler à l'extérieur du dispositif. Ceci représente un gain considérable en nombre de variables à calculer [22].

La méthode d'intégrale de frontière est basée sur une transformation de Green qui permet de ramener la résolution du domaine d'étude vers la frontière [22].

Cette méthode trouve son application lorsque les fréquences de travail sont très importantes car la profondeur de pénétration devient très faible vis-à-vis des autres dimensions géométriques du dispositif étudié et une discrétisation en éléments finis ferait aboutir à des difficultés insurmontables à cause du grand nombre d'éléments nécessaires à cette discrétisation [22].

Avantages de la méthode [22] :

- Prise en compte de domaines infinis.
- Temps de calcul relativement réduit.
- Taille des systèmes algébriques réduites.

Inconvénients de la méthode [22] :

- Ne résout que les problèmes linéaires.
- Imprécision due à la considération de courants surfaciques (profondeur de pénétration nulle).

- Le système algébrique obtenu n'est pas symétrique.

## II.6 Discrétisation temporelle

Pour résoudre les équations différentielles, nous avons plusieurs méthodes proposées parmi elles [24], [30] :

- Méthode d'Euler explicite.
- Méthode d'Euler implicite.
- Méthode de Newmark.
- Méthode proposée
- Méthode de Runge-Kutta.

### II.6.1 Méthode d'Euler explicite

Cette méthode n'est appliquée qu'aux équations du premier ordre. Elle est définie de la façon suivante :

$$\text{Si } y'(t) = f(t, y) \quad (\text{II.31})$$

Alors l'approximation de la dérivée de la fonction est la suivante :

$$y_{n+1} - y_n = \Delta t \cdot f_n \quad (\text{II.32})$$

$\Delta t$  est le pas de temps

Dans ce cas la valeur de la fonction  $f_n$  est prise explicitement à l'instant  $t$ . Cette méthode n'est pas toujours stable.

### II.6.2 Méthode d'Euler implicite

Dans ce cas l'approximation est donnée par :

$$y_{n+1} - y_n = \Delta t \cdot f_{n+1} \quad (\text{II.33})$$

Dans ce cas la valeur de  $f_n$  est prise implicitement à l'instant  $t$ .

La méthode d'Euler implicite est stable quelque soit la valeur de  $\Delta t$ . La précision sera d'autant meilleur que  $\Delta t$  sera faible.

### II.6.3 Méthode de Newmark

Dans le cas d'une équation du second ordre par rapport au temps il est nécessaire d'utiliser une autre approximation.

Si l'équation est de la forme suivante [30] :

$$y''(t) + cy'(t) = f(t, y) \quad (\text{II.34})$$

$y''(t)$  : dérivée d'ordre 2 de l'inconnue.

$y'(t)$  : dérivée d'ordre 1.

c: constante.

f(t,y): une fonction variable.

Alors il existe une approximation dont la formule est donnée par :

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n + \Delta t.c.\left(\frac{1}{2}y_{n+2} - \frac{1}{2}y_n\right) = \Delta t^2\left(\frac{1}{4}f_{n+2} + \frac{1}{2}f_{n+1} + \frac{1}{4}f_n\right) \quad (\text{II.35})$$

#### II.6.4 Méthode proposée basée sur un schéma différences finis

La méthode proposée consiste à utiliser l'approximation différences finis pour la discrétisation de dérivée temporelle d'ordre 2 par rapport au temps.

- Dérivée d'ordre 1

Soit  $u(x,y,t)$  la fonction inconnue , la discrétisation de la dérivée d'ordre 1 sera donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} \quad (\text{II.36})$$

- Dérivée du second ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u(t + 2\Delta t) - 2u(t) + u(t - \Delta t)}{\Delta t^2} \quad (\text{II.37})$$

$\Delta t$  est le pas de temps

#### II.6.5 Méthode de Runge-Kutta

On considère une équation différentielle temporelle donnée par :

$$y'(t) = f(t, y) \quad (\text{II.38})$$

La formule du type Runge-Kutta la plus utilisée est celle d'ordre 4, appelée généralement formule de Runge-Kutta.

L'approximation de la solution est la suivante [33] :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] \quad (\text{II.39})$$

tels que :

$$K_1 = \Delta t . f(y_n, t_n) \quad (\text{II.40})$$

$$K_2 = \Delta t . f\left(y_n + \frac{1}{2}K_1, t_{n+\frac{1}{2}}\right) \quad (\text{II.41})$$

$$K_3 = \Delta t \cdot f\left(y_n + \frac{1}{2}K_2, t_{n+\frac{1}{2}}\right) \quad (\text{II.42})$$

$$K_4 = \Delta t \cdot f(y_n + K_3, t_{n+1}) \quad (\text{II.43})$$

Cette formule nécessite quatre évaluations de la fonction  $f$ , elle est précise et exacte, mais elle est pénalisante en terme de temps de calcul.

## II.7 Méthodes de calcul de la force

En génie électrique, le calcul des forces magnétiques globales qui agissent sur les parties mobiles est d'un grand intérêt, car elles jouent un rôle déterminant dans tout système électromagnétique- mécanique en terme de déformation ou de déplacement.

Pour évaluer les forces magnétiques, nous pouvons procéder par diverses méthodes, parmi celles-ci :

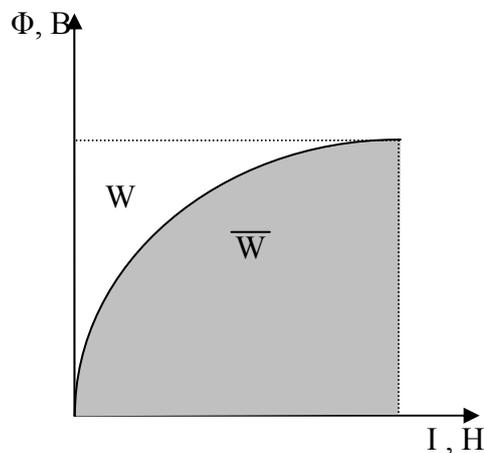
- La méthode de variation de l'énergie et de la coénergie magnétiques.
- La méthode des travaux virtuels.
- La méthode basée sur la force de Lorentz.
- La méthode du tenseur de Maxwell.

### II.7.1 Méthode de variation de la coénergie et de l'énergie magnétiques

#### Principe de la méthode

La force magnétique dans ce cas est la dérivée de l'énergie magnétique par rapport au déplacement à flux constant ou c'est la dérivée de la coénergie magnétique à courant constant.

Si  $F_s$  représente la composante de la force magnétique totale suivant une direction donnée  $S$  on aura :



**Figure II.2** Courbe d'aimantation

$$\mathbf{Fs} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{S}} /_{i=\text{cste}} \quad (\text{II.44})$$

$$\mathbf{Fs} = - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{S}} /_{\Phi=\text{cste}} \quad (\text{II.45})$$

$$\bar{W} = \int_{\Omega} \left( \int_0^H \mathbf{B} dH \right) d\Omega \quad (\text{II.46})$$

$$W = \int_{\Omega} \left( \int_0^B \mathbf{H} dB \right) d\Omega \quad (\text{II.47})$$

Numériquement, les dérivations peuvent être obtenues par les relations suivantes :

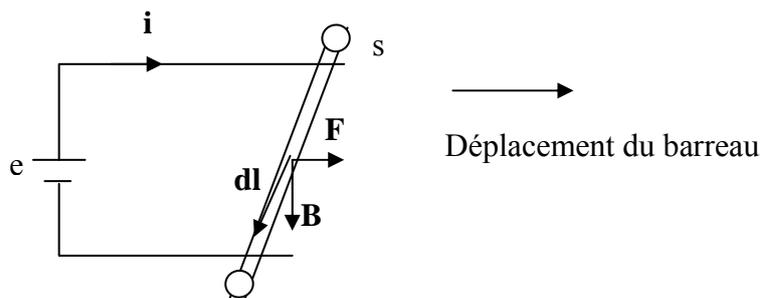
$$F_S = \frac{\bar{W}_{S+\Delta S} - \bar{W}_S}{\Delta S} /_{i=\text{cste}} \quad (\text{II.48})$$

$$F_S = - \frac{W_{S+\Delta S} - W_S}{\Delta S} /_{\Phi=\text{cste}} \quad (\text{II.49})$$

$\Delta S$  est le pas de déplacement.

### II.7.2 La méthode basée sur la force de Lorentz.

Considérant un barreau conducteur parcouru par un courant  $i$ , ce barreau est placé dans une zone où règne un champ magnétique en vertu de la loi de Laplace ce barreau sera soumis à une force magnétique découlant de l'interaction entre le courant circulant dans le barreau et le champ magnétique extérieur (fig.II.3).



**Figure II.3** Principe de la loi de Laplace

$s$  : la section du barreau

$dl$ : élément de longueur

L'équation de Laplace donne l'expression de la force s'exerçant sur un conducteur idéal placé dans un champ d'induction magnétique.

$$d\mathbf{F} = i d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B} \quad (\text{II.50})$$

Cette équation peut être exprimée sous sa forme locale  $\mathbf{f}$  donnée par :

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{V}} = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} \quad (\text{II.51})$$

La force globale est présentée par :

$$\mathbf{F} = \int_{\mathbf{V}} \mathbf{f} d\mathbf{V} = \int_{\mathbf{V}} (\mathbf{J} \wedge \mathbf{B}) d\mathbf{V} \quad (\text{II.52})$$

### II.7.3 Méthode du tenseur de Maxwell

En utilisant l'équation de Maxwell (I.2) nous aurons :

$$\mathbf{f} = \nabla \wedge \mathbf{H} \wedge \mathbf{B} = \mu \nabla \wedge \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} \quad (\text{II.53})$$

En utilisant le symbole nabla ( $\nabla$ ) l'équation (II.53) devient :

$$\mathbf{f} = \mu \left\{ (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{H}^2) \right\} \quad (\text{II.54})$$

Pour la composante  $f_x$  nous avons :

$$f_x = \mu \left\{ H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) \right\} \quad (\text{II.55})$$

Le tenseur de Maxwell permettra d'étudier la force s'exerçant sur un matériau de volume  $V$ , en connaissant seulement la répartition du champ aux différents points d'une surface fermée entourant le volume  $V$ .

$$F_x = \int_{\mathbf{V}} \nabla \cdot \mathbf{T}_1 d\mathbf{V} \quad (\text{II.56})$$

$T_1$  est l'une des composantes du tenseur de Maxwell.

En transformant l'intégrale de volume en une intégrale de surface en exploitant le théorème de la divergence nous aurons :

$$F_x = \oint_S \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{n} ds \quad (\text{II.57})$$

$\mathbf{n}$  : vecteur normal à la surface  $s$  entourant le volume  $V$ .

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \end{pmatrix} \quad (\text{II.58})$$

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \mu H_x^2 - \frac{1}{2} H^2 \\ \tau_{12} &= \mu H_x H_y \\ \tau_{13} &= \mu H_x H_z \end{aligned} \quad (\text{II.59})$$

$$F_x = \oint_s \left\{ \left( \mu H_x^2 - \frac{1}{2} H^2 \right) n_x + \mu H_x H_y n_y + \mu H_x H_z n_z \right\} ds \quad (\text{II.60})$$

où  $(n_x, n_y, n_z)$  sont les composantes du vecteur unitaire  $\vec{n}$

La formule générale de la force est donc :

$$\mathbf{F} = \oint_s \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} ds \quad (\text{II.61})$$

tel que  $\mathbf{T}$  est le tenseur de Maxwell :

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.62})$$

La méthode du tenseur de Maxwell est économique et rapide puisque la force est calculée seulement sur la surface fermée, qu'on choisit arbitrairement, entourant l'objet à étudier. Cette méthode ne tient pas compte de la saturation [24].

#### II.7.4 Méthode des travaux virtuels

Elle est basée sur la méthode des éléments finis pour évaluer directement la force magnétique totale. Le domaine  $V_d$  déformé est décomposé en sous domaines  $V_e$  (éléments finis) sur lesquels, toute intégration est conduite en fonction des coordonnées locales  $(u, v, w)$ .

En faisant appel à la coénergie [28], [31] :

$$\mathbf{F}_s = \frac{\partial}{\partial \mathbf{S}} \left( \int_0^{\mathbf{H}} \left( \int_V \mathbf{B} d\mathbf{H} \right) d\mathbf{V} \right) \quad (\text{II.63})$$

$$F_s = \frac{\partial}{\partial S} \sum_e \left( \int_{V_e} \left( \int_0^H B dH \right) d\Omega_e \right) \quad (\text{II.64})$$

en introduisant le système de coordonnées locales l'équation (II.64) devient [30 ], [31 ] :

$$F_s = \frac{\partial}{\partial S} \sum_e \left( \int_{V_{e\text{local}}} \left( \int_0^H B dH \right) |G| d u d v d w \right) \quad (\text{II.65})$$

$|G|$  est le déterminant de la matrice Jacobienne de transformation de coordonnées.

Un arrangement de (II.65) permet d'obtenir l'expression suivante [22] :

$$F_s = \sum_e \int_{V_{e\text{local}}} \left[ -B^T \cdot G^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial S} \cdot H + \int_0^H B dH \cdot |G|^{-1} \frac{\partial |G|}{\partial S} \right] d u d v d w \quad (\text{II.66})$$

Seule la matrice Jacobienne et son déterminant varient en fonction du déplacement.

La méthode des travaux virtuels a été prouvée rapide, exact et fiable [24].

## II.8 Méthodes de Prise en compte du mouvement

Les méthodes numériques utilisées sont principalement le remaillage du domaine , la technique de la bande de mouvement , la méthode utilisant des maillages séparés et réalisant la connexion en utilisant le multiplicateur de Lagrange.

Les méthodes hybrides sont basées sur l'association de deux méthodes telles que la technique de la surface de glissement, la méthode utilisant, la méthode éléments finis- macro-élément [22].

### II.8.1 Méthode de Remaillage du domaine

Le remaillage consiste à modifier le maillage du domaine de résolution pour chaque pas de déplacement. Cette méthode a la particularité d'être facile à mettre en œuvre et s'avère efficace.

### II.8.2 Méthode de la bande de mouvement

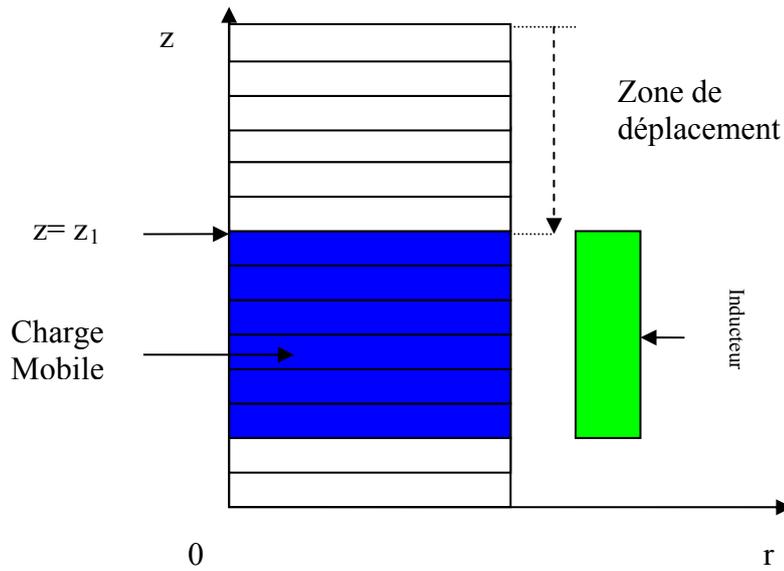
#### a- Cas d'un déplacement vertical

Le principe de la méthode consiste à créer une bande géométrique au sein du modèle d'étude et subdiviser en sous-régions élémentaires définissant tout le noyau et une partie de la région de l'air.

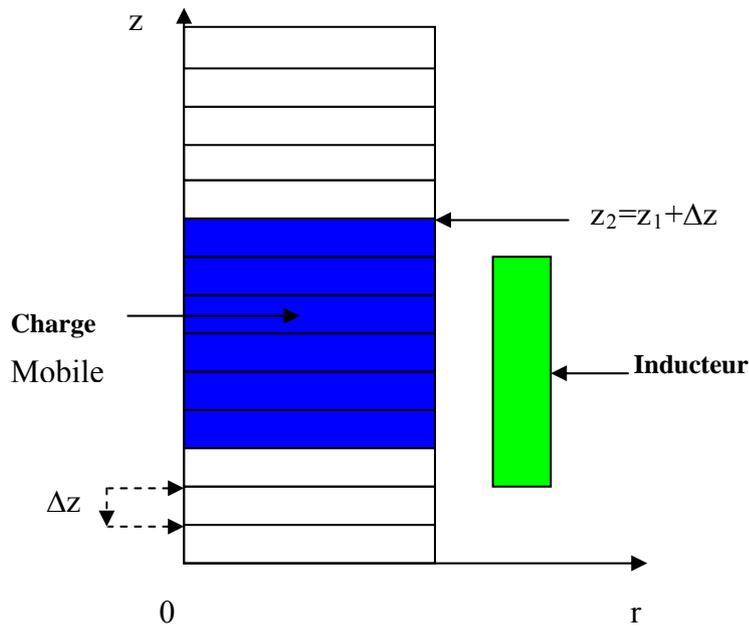
Les sous-régions ainsi définies seront affectées de leurs propriétés respectives à savoir :

- Pour le noyau, les propriétés physiques  $\sigma$  et  $\mu$ .

• Pour l'air, les propriétés physiques  $\sigma = 0$  et  $\mu = \mu_0$ .



**Figure II.4** Simulation du mouvement dans le cas de parties mobiles suivant la direction vertical ( $z = z_1$ )



**Figure II.5** Simulation du mouvement dans le cas de parties mobiles suivant la direction verticale ( $z = z_1 + \Delta z$ )

Les propriétés aux sous-régions seront modifiées selon l'appartenance de la sous-région lorsque le noyau est déplacé d'une distance correspondant à une sous-région,.

La modification des propriétés affectées aux sous-régions est liée au saut de la charge qui induit un déplacement  $\Delta z$  (Fig. II. 5).

Les déplacements successifs de la charge permettent ainsi de simuler le mouvement en gardant le maillage initial inchangé.

L'équation dans la charge est :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{r}} \frac{\partial(\mathbf{r}\mathbf{A}_\varphi)}{\partial \mathbf{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left( \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{r}} \frac{\partial(\mathbf{r}\mathbf{A}_\varphi)}{\partial \mathbf{z}} \right) - \sigma \frac{\mathbf{D}\mathbf{A}_\varphi}{\mathbf{D}t} = 0 \quad (\text{II.67})$$

La prise en compte des courants induits résultant du mouvement du milieu induit est effectuée en calculant la dérivée par rapport au temps à l'instant  $t$  du terme  $\frac{\mathbf{D}\mathbf{A}}{\mathbf{D}t}$  par la méthode d'Euler implicite. La discrétisation dans le temps est liée à la discrétisation dans l'espace de la zone de mouvement par la présente expression :

$$\frac{\mathbf{D}\mathbf{A}_\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{z})}{\mathbf{D}t} = \frac{\mathbf{A}_\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{z}_2)^{t+\Delta t} - \mathbf{A}_\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{z}_1)^t}{\Delta t} \quad (\text{II.68})$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_1 + \Delta \mathbf{z} \quad (\text{II.69})$$

$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{z}_2)^{t+\Delta t}$  : Potentiel vecteur magnétique à l'instant  $(t+\Delta t)$  et à la position  $z_2 = z_1 + \Delta z$ .

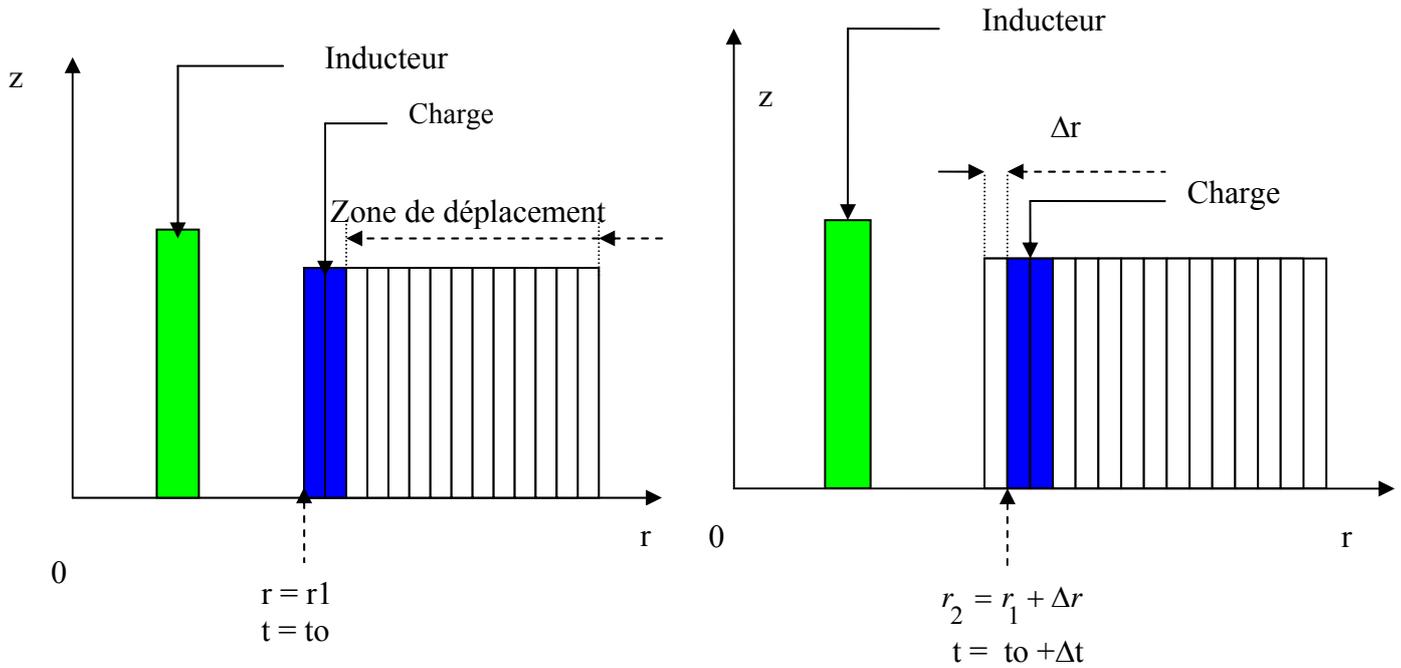
$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{z}_1)^t$  : Potentiel vecteur magnétique à l'instant  $t$  et à la position  $z = z_1$ .

$\Delta t$ : Pas de temps.

$\Delta z$ : Pas de déplacement entre les points successifs de coordonnées  $(r, z_1)$  et  $(r, z_2)$ .

### b. Cas d'un déplacement dans la direction radiale

La méthode a fait l'objet d'une mise en œuvre pour l'étude de dispositifs de magnétoformages [68], et peut s'adapter au traitement d'autres dispositifs. La prise en compte du mouvement dans le cas d'un dispositif comportant un induit en mouvement ( ou bien se déformant ) dans la direction radiale se fait en définissant une zone de déplacement, appelée bande de mouvement, comportant la région de l'air et le milieu induit. Le modèle géométrique associé à l'application de la méthode est représenté par la figure suivante:

Figure II.6 Induit à la position initiale  $r = r_1$ Figure II.7 Induit à la position  $r_2$ 

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r} \quad (\text{II.70})$$

La considération des courants induits dans les parties mobiles du système à étudier est effectuée en intégrant l'effet de la vitesse de manière implicite dans l'expression du terme induit suivante:

$$\frac{D\vec{\mathbf{A}}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{B}} \quad (\text{II.71})$$

L'équation des courants induits dans la charge est :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{r}} \frac{\partial (\mathbf{r} \mathbf{A}_\varphi)}{\partial \mathbf{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left( \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{r}} \frac{\partial (\mathbf{r} \mathbf{A}_\varphi)}{\partial \mathbf{z}} \right) - \sigma \frac{D\mathbf{A}_\varphi}{Dt} = 0 \quad (\text{II.72})$$

La discrétisation dans le temps est liée à la discrétisation dans l'espace de la zone de mouvement par la présente expression:

$$\frac{D\mathbf{A}_\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{z})}{Dt} = \frac{\mathbf{A}_\varphi(\mathbf{r}_2, \mathbf{z})^{\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}} - \mathbf{A}_\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{z})^{\mathbf{t}}}{\Delta \mathbf{t}} \quad (\text{II.73})$$

avec:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r} \quad (\text{II.74})$$

$\Delta r$  est le pas de déplacement de la position  $r = r_1$  à la position  $r_2 = r_1 + \Delta r$  pour un pas de temps  $\Delta t$ .

$A(r_2, z)^{t+\Delta t}$  : Potentiel vecteur magnétique à l'instant  $(t+\Delta t)$  et à la position  $r_2 = r_1 + \Delta r$ .

$A(r_1, z)^t$  : Potentiel vecteur magnétique à l'instant  $t$  et à la position  $r = r_1$ .

La solution de l'équation électromagnétique dépend ainsi de l'instant et du pas précédent.

La densité de courant s'en déduit alors par :

$$\mathbf{J}_{\text{ind}} = -\sigma \frac{\mathbf{A}_\varphi(r_2, z)^{t+\Delta t} - \mathbf{A}_\varphi(r_1, z)^t}{\Delta t} \quad (\text{II.75})$$

$J_{\text{ind}}$  : Densité des courants induits dans la charge en mouvement.

La méthode utilisée précédemment est adaptée en utilisant un référentiel lié à la partie mobile; ce qui conduit à la prise en compte du terme induit de manière implicite par déplacement des valeurs de  $A$  calculées à l'instant précédent à chaque pas du mouvement.

Le déplacement du potentiel est effectué en même temps que la modification des propriétés physiques [22].

### II.8.3 Méthode de la bande infinie

Dans la méthode de la bande infinie tous les calculs sont effectués dans le repère lié au milieu induit en mouvement.

La bobine inductrice est représentée par des sources de courant ponctuelles et uniformes qui se déplacent en fonction du temps afin d'assurer l'uniformité du courant dans la bobine inductrice.

#### 1. Géométrie du problème

La bande infinie construite correspond à l'ensemble des positions que prendra cette bobine au cours du temps (figure II.8).

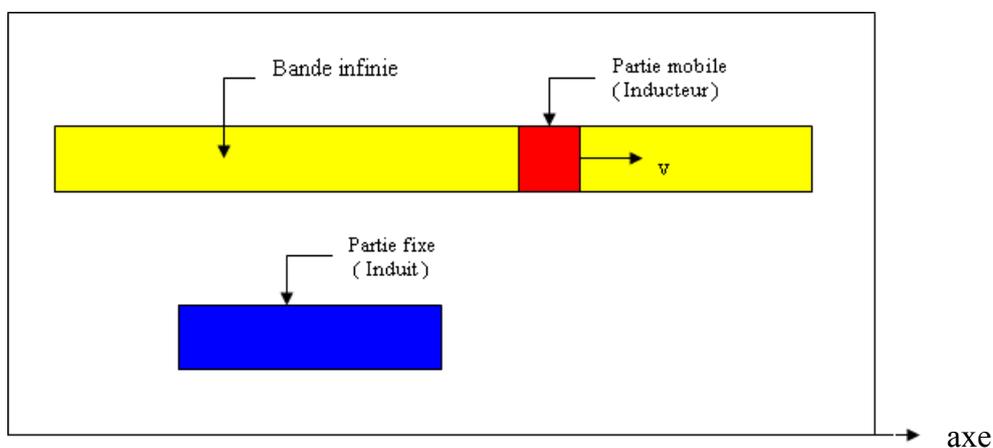


Figure II.8 Modèle géométrique pour un repère lié au milieu induit

La bande infinie est constituée du vide et d'une source de courant dont la position est déterminée par le calcul du déplacement.

Les propriétés physiques et les sources de courant sont affectées après avoir défini les régions appartenant à l'air et celles appartenant à l'inducteur.

La région appartenant à l'inducteur est déterminée pour chaque pas de temps à partir de l'équation mécanique.

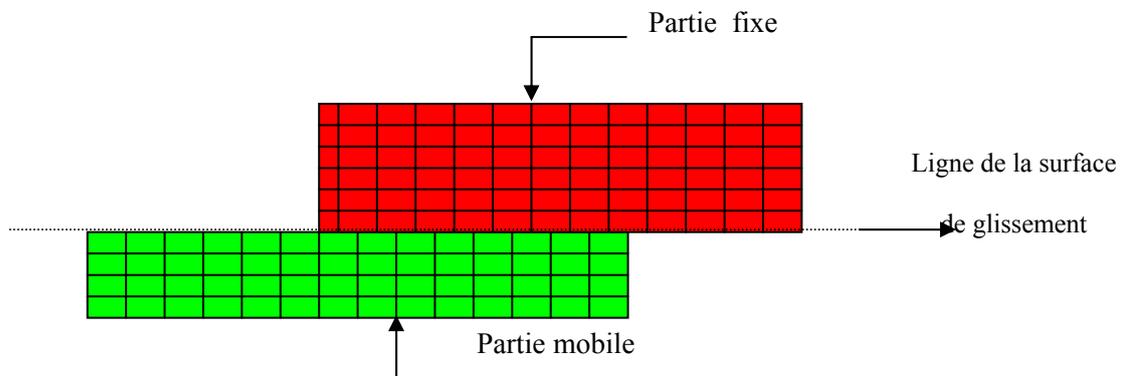
Le déplacement réel de l'induit par rapport à la bobine inductrice est obtenu en intégrant la force de Lorentz dans la région de la partie mobile.

L'utilisation de la méthode de la bande infinie permet de garder le même maillage durant la résolution. Cette méthode permet la considération d'un inducteur comportant plusieurs bobines

L'utilisation de la méthode se limite à la considération de problèmes d'attaque en courant. Elle nécessite aussi le transfert de données d'une sous-région à une autre [22].

#### II.8.4. Méthode avec surface de glissement

L'introduction du multiplicateur de Lagrange permet d'assurer la connexion de deux maillages indépendants glissant l'un par rapport à l'autre.



**Figure II.9** Maillage utilisé dans le cas de la méthode de la surface de glissement

La fonctionnelle d'énergie utilisée pour la minimisation est dans ce cas donnée par:

$$F(\mathbf{A}) = \int_{\Omega} \left( \int_0^B \mathbf{H} \, db \right) d\Omega \quad (\text{II.76})$$

$F(\mathbf{A})$ : fonctionnelle d'énergie.

$\mathbf{A}$ : potentiel vecteur magnétique.

Lors du mouvement le maillage n'est pas déformé, ce qui constitue un avantage pour la méthode.

L'inconvénient de la méthode est le mauvais conditionnement de la matrice du système à résoudre [22].

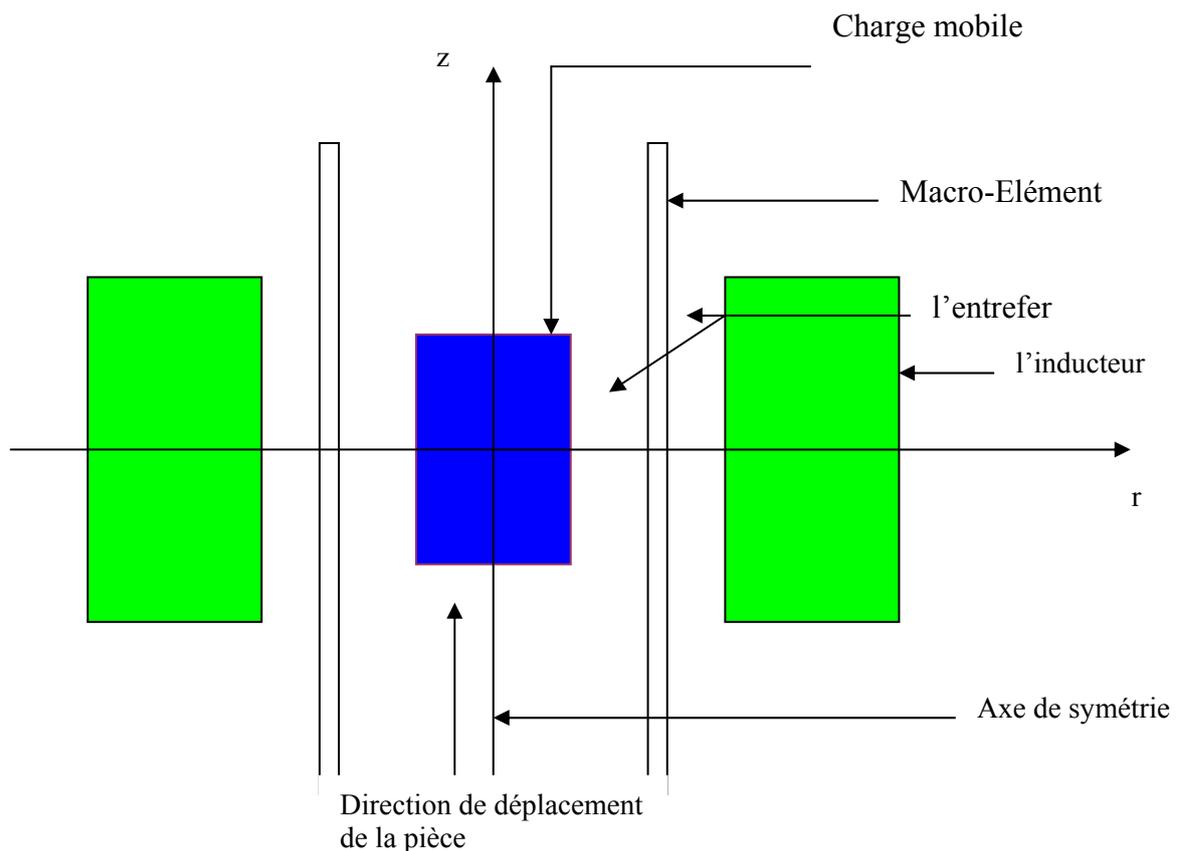
### II.8.5 Méthode éléments finis-Macro-Elément

Le Macro-Elément a été utilisé en association avec la méthode des éléments finis pour la simulation du mouvement de rotation d'une machine électrique afin de construire le premier modèle couplé éléments finis-macro-Elément.

#### 1. Géométrie du problème

La simulation du mouvement dans le traitement d'un problème électromagnétique traitement d'un problème électromagnétique en utilisant un modèle couplé éléments finis- Macro-Eléments permet d'isoler la partie fixe de a partie mobile et de garde ainsi le maillage du domaine d'étude inchangé.

Pour une structure axisymétrique, par le schéma de la figure II. 10 illustre le cas.



**Figure II.10** Domaine de résolution utilisant la technique du Macro-Elément associé aux éléments finis

## 2. Equation électromagnétique 2D axisymétrique

### a. Dans la région air

L'équation à résoudre dans la région de l'air comprenant le Macro-Elément est :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{\nu}{\mathbf{r}} \frac{\partial(\mathbf{r}\mathbf{A}_\varphi)}{\partial \mathbf{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left( \frac{\nu}{\mathbf{r}} \frac{\partial(\mathbf{r}\mathbf{A}_\varphi)}{\partial \mathbf{z}} \right) = 0 \quad (\text{II.77})$$

avec :  $\mathbf{A} = (0, \mathbf{A}_\varphi, 0)$

Dans la région du Macro-Elément, l'équation précédente est résolue en utilisant une méthode analytique

### b. Dans la région induit

Au niveau de l'induit, l'équation à associer au phénomène physique à traiter peut être :

- Magnétostatique,
- Harmonique,
- Transitoire.

Dans le cas d'un problème magnétostatique, l'équation électromagnétique à considérer est celle de la région de l'air:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{\nu}{\mathbf{r}} \frac{\partial(\mathbf{r}\mathbf{A}_\varphi)}{\partial \mathbf{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left( \frac{\nu}{\mathbf{r}} \frac{\partial(\mathbf{r}\mathbf{A}_\varphi)}{\partial \mathbf{z}} \right) = 0 \quad (\text{II.78})$$

Dans le cas harmonique, l'équation sera donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{\nu}{\mathbf{r}} \frac{\partial(\mathbf{r}\mathbf{A}_\varphi)}{\partial \mathbf{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left( \frac{\nu}{\mathbf{r}} \frac{\partial(\mathbf{r}\mathbf{A}_\varphi)}{\partial \mathbf{z}} \right) - \mathbf{j}\sigma\omega\mathbf{A}_\varphi = 0 \quad (\text{II.79})$$

En régime transitoire, la résolution concernera l'équation magnétodynamique suivante:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{\nu}{\mathbf{r}} \frac{\partial(\mathbf{r}\mathbf{A}_\varphi)}{\partial \mathbf{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left( \frac{\nu}{\mathbf{r}} \frac{\partial(\mathbf{r}\mathbf{A}_\varphi)}{\partial \mathbf{z}} \right) - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}_\varphi}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.80})$$

Le terme source à considérer dépendra du type d'alimentation qui peut être soit une alimentation en courant soit une alimentation en tension.

La simulation du mouvement est réalisée en procédant au déplacement des nœuds situés sur la frontière du Macro-Elément [22].

**c. Dans la région inductrice**

L'équation électromagnétique associée à l'inducteur, en négligeant les courants induits, sera de la forme:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{r}} \frac{\partial(\mathbf{r}\mathbf{A}_\varphi)}{\partial \mathbf{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left( \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{r}} \frac{\partial(\mathbf{r}\mathbf{A}_\varphi)}{\partial \mathbf{z}} \right) = -\mathbf{J}_{s\varphi} \quad (\text{II.81})$$

$J_{s\varphi}$  représente la composante de la densité de courant suivant la direction azimutale.

**CHAPITRE III**  
**MODELES COUPLES ET APPLICATIONS**

### III.1 Modèle de Couplage Magnéto-élastique pour l'étude des Vibrations d'une Plaque

Cette étude concerne l'analyse des phénomènes magnéto-élastiques dans une plaque rectangulaire conductrice, placée dans un champs magnétique variable crée par une bobine parcourue par un courant variable dans le temps. La variation dans le temps du champs magnétique va produire des courants dans la plaque laquelle placée dans un champs magnétique va subir l'action des forces créées par la coexistence de ces deux phénomènes.

Le modèle de couplage mis en œuvre permet d'obtenir des évolutions telles que les courants induits ainsi que les modes de vibration de la plaque et la densité de force [60].

Dans le cas où les sources dépendent du temps, les champs magnétique et électrique sont couplés par la présence des courants induits.

L'équation magnétodynamique en termes de potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  est:

$$\nabla \wedge (\mathbf{v} \nabla \wedge \mathbf{A}) + \sigma \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) = \mathbf{J}_s \quad (\text{III.1})$$

$\mathbf{J}_s$ ,  $\sigma$  et  $\mathbf{v}$ , sont respectivement la densité de courant source, la conductivité électrique et la réluctivité magnétique.

la résolution de l'équation a été effectuée en pas à pas dans le temps, en utilisant la méthode des éléments finis. le potentiel vecteur magnétique est approximé par:

$$\mathbf{A} = \sum_j \alpha_j(x, y) \mathbf{A}_j \quad (\text{III.2})$$

$\alpha_j$  et  $\mathbf{A}_j$  sont la fonction de forme et la valeur de l'inconnu au point  $j$ .

La discrétisation spatiale de l'équation (III.1) en utilisant la méthode de Galerkin et en considérant les conditions aux limites naturelles, conduit :

$$\iint_{\Omega} \mathbf{v} \nabla \alpha_i \cdot \nabla \left( \sum_j \alpha_j \mathbf{A}_j \right) dx dy + \iint_{\Omega} \sigma \alpha_i \frac{\partial \left( \sum_j \alpha_j \mathbf{A}_j \right)}{\partial t} dx dy = \iint_{\Omega} \mathbf{J}_s \alpha_i dx dy \quad (\text{III.3})$$

$\alpha_i$  est la fonction de projection.

L'interaction entre les courants induits et le champ magnétique source donne naissance à des forces d'origine magnétiques qu'on calcul à partir de la force de Lorentz.

La méthode de calcul de la force magnétique utilisée est la méthode de Lorentz, cette méthode utilise l'induction ainsi que la densité de courant induit, qui dépendent à leur tour du potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$ .

La densité de force dans ce cas est donnée comme suit :

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} \quad (\text{III.4})$$

$\mathbf{J}$  est la densité de courant induit et  $\mathbf{B}$  représente l'induction magnétique.

La densité de courant  $\mathbf{J}$  est calculée en utilisant la méthode d'Euler [35]

$$\mathbf{J} = -\sigma \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} \quad (\text{III.5})$$

$\Delta t$  représente le pas de temps.

Les forces d'origine magnétiques obtenues dans le calcul électromagnétique seront introduites dans la résolution du problème mécanique, dans ces conditions pour un solide soumis à l'action des forces de volume, l'équation d'équilibre s'écrit:

$$\mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (\text{III.6})$$

$\rho$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{u}$  sont respectivement la densité de masse volumique du matériau la densité de force, la contrainte mécanique et le champ de déplacement.

La discrétisation de l'équation (III.6) par la méthode des éléments finis donne , le système algébrique suivant:

$$[\mathbf{M}] \frac{d^2}{dt^2} \{\mathbf{u}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}(t)\} \quad (\text{III.7})$$

$[\mathbf{M}]$  est la matrice dynamique,  $[\mathbf{K}]$  est la matrice raideur,  $\{\mathbf{u}\}$  est le vecteur déplacement et  $\{\mathbf{F}(t)\}$  est le vecteur force représentant le terme source.

Pour résoudre le système algébrique deux méthodes peuvent être utilisés :

- méthodes directes d'intégration pas à pas (Méthode d'Euler, Runge-Kutta..).
- Méthode de décomposition spectrale.

La recherche des modes de vibration constitue une phase importante dans l'étude des vibrations d'un système donné [34], [36].

Le calcul des modes propres de la structure considérée est régie par l'équation ci-dessous : [33], [34]

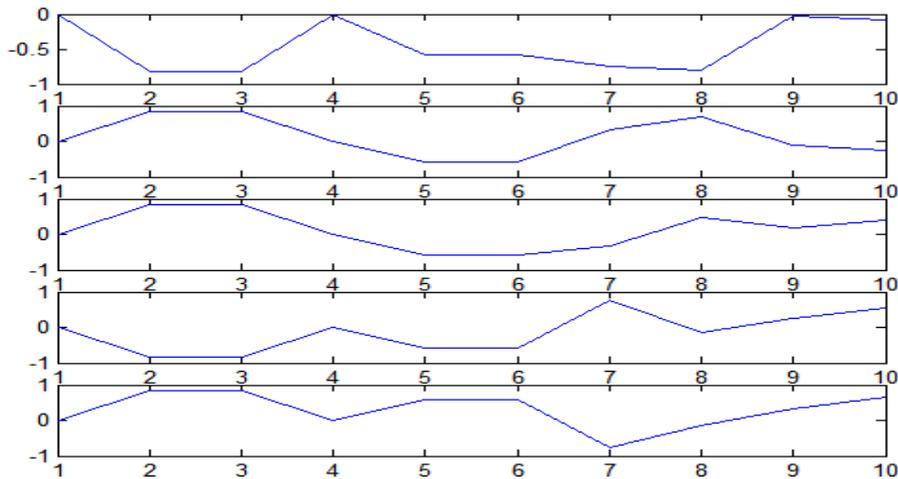
$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = w^2 [\mathbf{M}]\{\mathbf{u}\} \quad (\text{III.8})$$

Le système d'équations (III.8) possède n valeurs propres qui représentent les carrées des pulsations :

$$\lambda_1 = \omega_1^2, \lambda_2 = \omega_2^2, \dots, \lambda_n = \omega_n^2 \quad (\text{III.9})$$

Les  $n$  vecteurs propres correspondent aux  $n$  modes de vibration du système:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$$



**Figure 1** Les modes propres de la plaque

La figure (1) représente les 5 premiers modes propres de vibrations.

Les modes propres représentent les modalités dans lesquelles la structure étudiée peut vibrer en mode résonant. La méthode de décomposition spectrale présente l'avantage de calculer une seule fois, au début des calculs, le comportement mécanique de la plaque.

### III.1.1 Le dispositif d'étude

Une plaque en cuivre rectangulaire de dimensions 105 mm \* 40 mm\*0.3 mm, encasté, est placée dans un environnement où régné un champ magnétique créé par une bobine de diamètre intérieur 20 mm et diamètre extérieur 22 mm, hauteur= 242 mm, ayant 27 spires et étant parcourue par un courant avec une variation linéaire de 0 à 665 A les premières  $5.1 \cdot 10^{-4}$  secondes et de  $665 \cdot \exp(-t/2.62 \cdot 10^{-3})$  A ensuite. L'interaction entre les courants induits et les champs magnétiques, produits des forces qui déplacent la plaque suivant la direction normale [33].

Les constantes du matériau de la plaque sont :

La conductivité électrique  $\sigma = 5.7 \cdot 10^7 \text{ } (\Omega / m)^{-1}$

La masse volumique  $\rho = 8912 \text{ kg} / \text{m}^3$

Le module de Young  $E = 1.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$

Le coefficient de poisson  $\nu = 0.34$

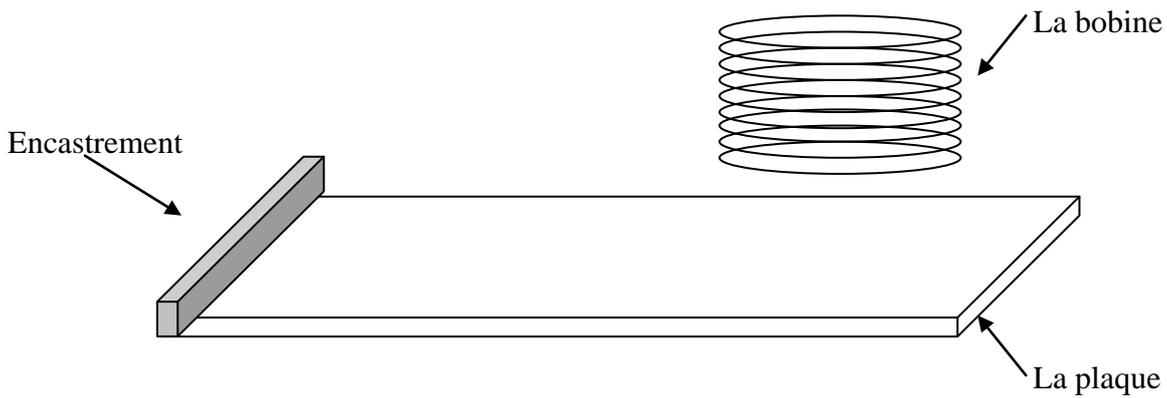


Figure 2 . Dispositif d'étude

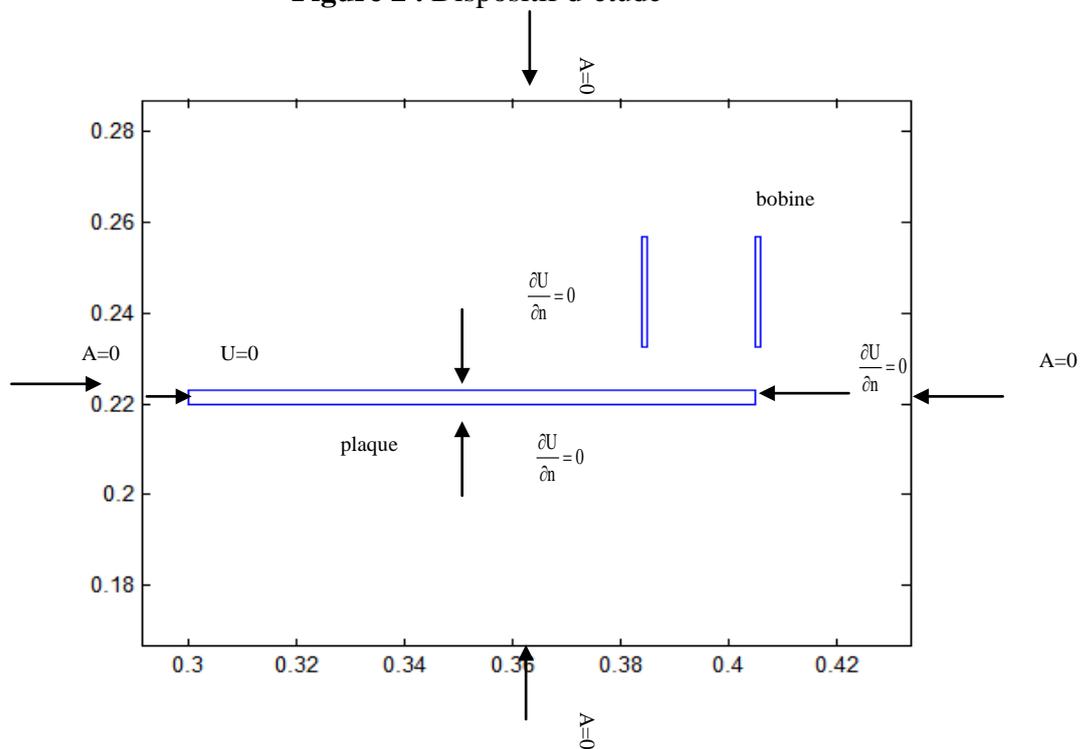


Figure 3. Domaine d'étude et conditions aux limites

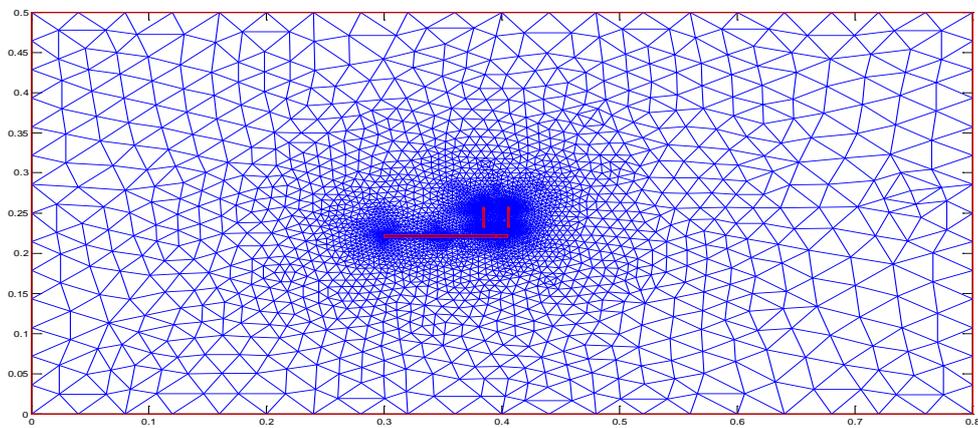
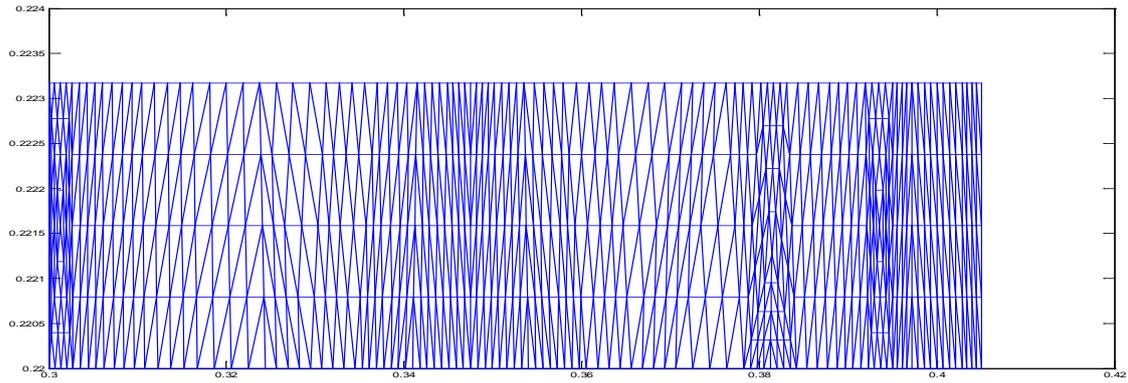
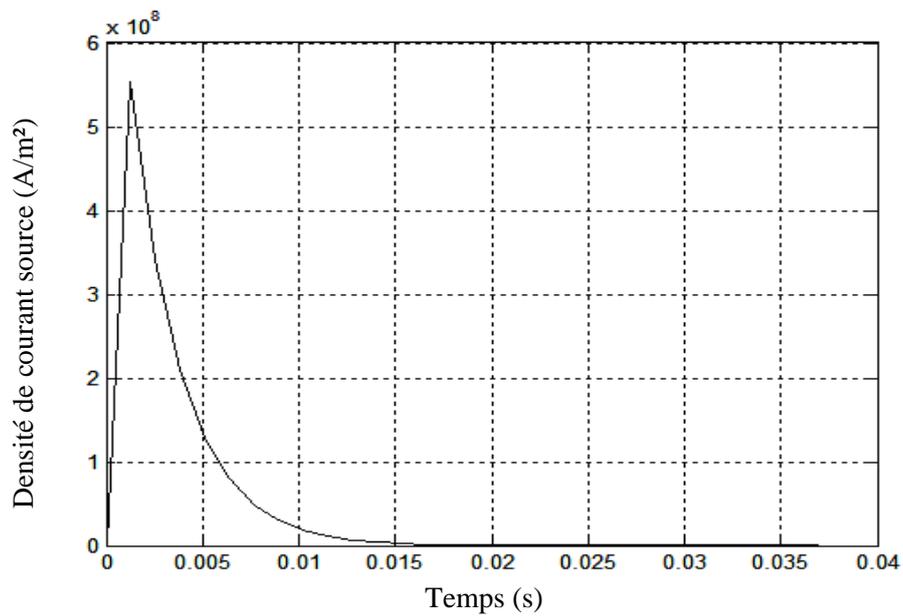


Figure 4. Maillage du domaine électromagnétique avec 5041 nœuds et 10012 triangles



**Figure 5.** Maillage du domaine mécanique avec 573 nœuds et 928 triangles

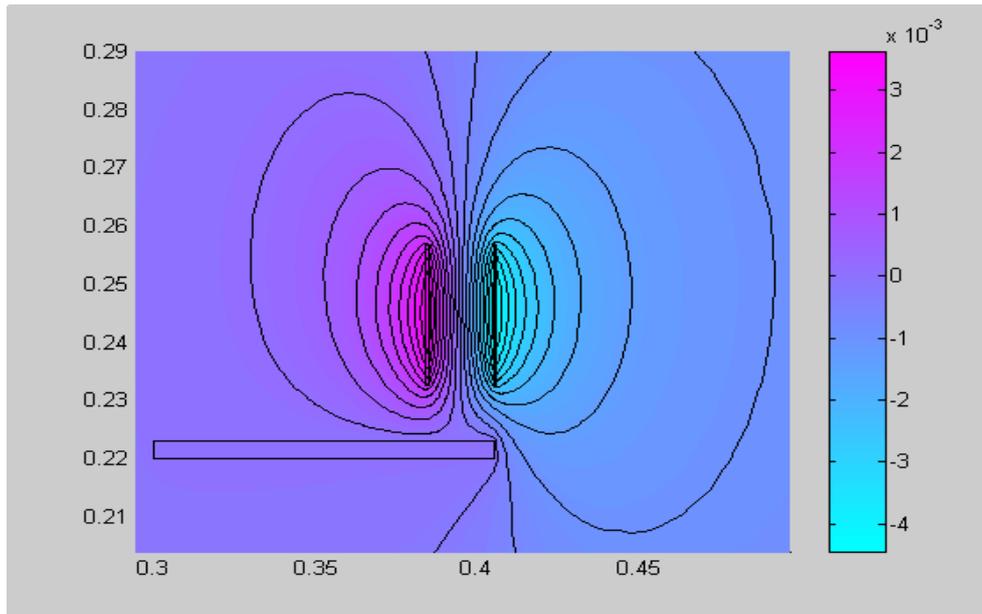
### III.1.2 Résultats et discussions



**Figure 6.** Densité de courant source en fonction du temps

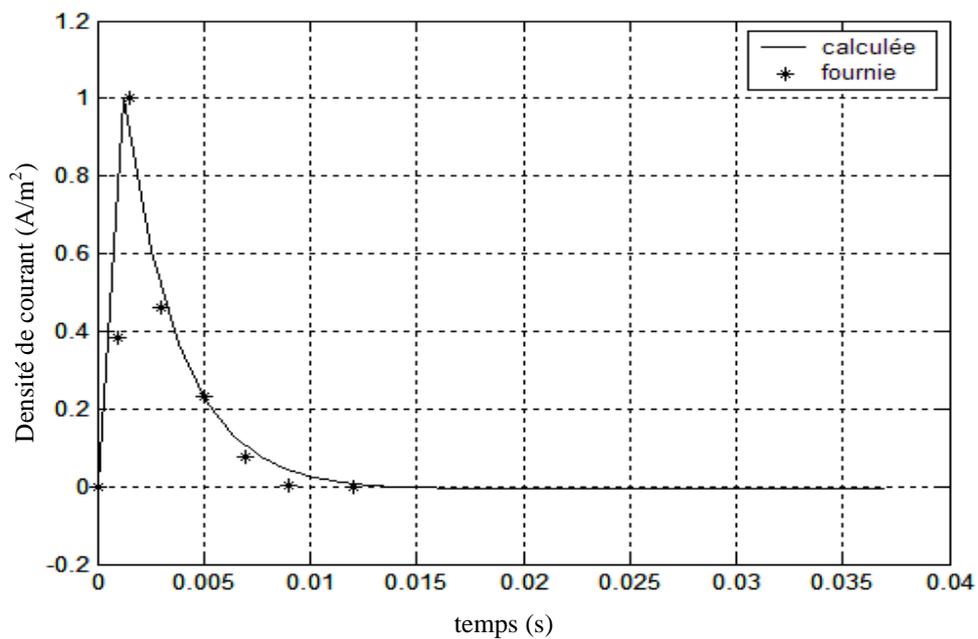
La figure (6) représente la densité de courant imposée au niveau de la bobine.

Le domaine de résolution du problème (figure 3) concerne la moitié du dispositif auquel sont associés des conditions aux limites sur les frontières du domaine.

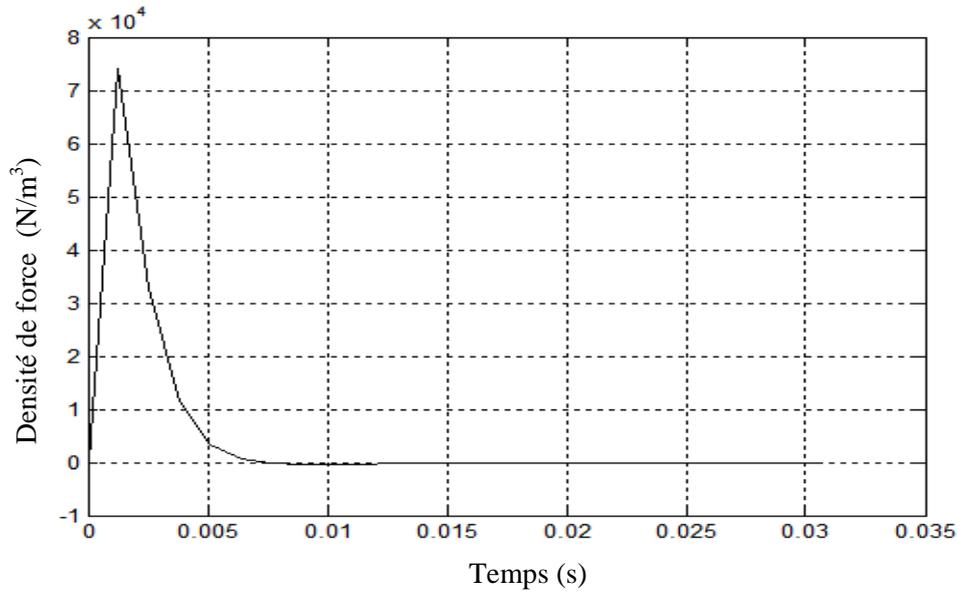


**Figure 7.** isovaleurs du potentiel vecteur magnétique

La figure (8) représente la densité de courant induit en valeur relative comparée qualitativement à la densité de courant fournie en [33], nous remarquons une bonne concordance des deux résultats.

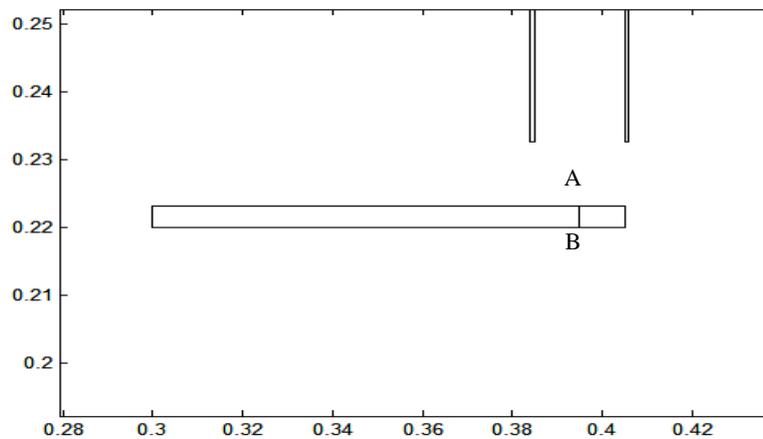


**Figure 8.** Densité de courant induit dans la plaque

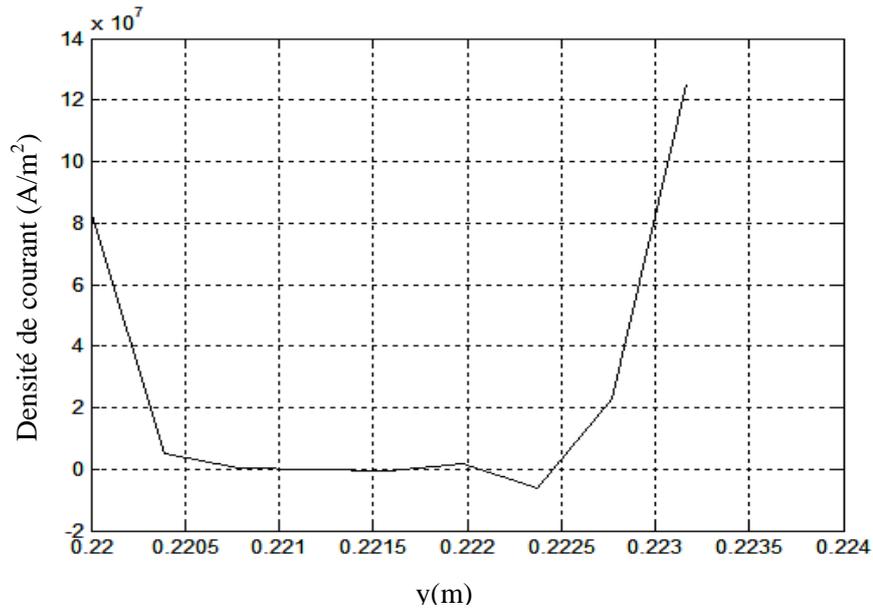


**Figure 9.** Densité de force agissant sur la plaque.

Pour voir l'évolution des courants de Foucault dans la plaque, nous avons considéré un segment AB suivant l'épaisseur figure 10



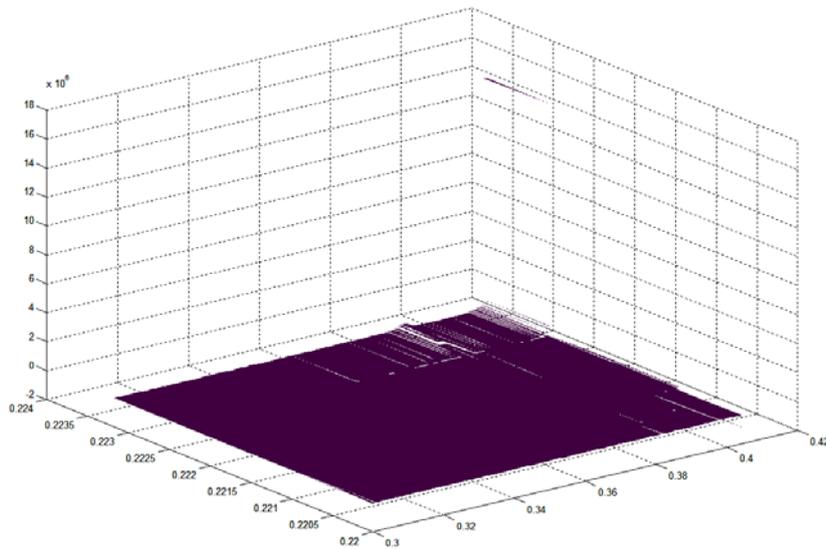
**Figure 10.** le segment AB le long de l'épaisseur de la plaque



**Figure 11.** Densité de courant induit le long du segment AB

La figure (11) montre la distribution de la densité de courant induit dans la plaque le long du segment AB à 0,0025 secondes.

La figure (12) montre la distribution de la densité de force dans l'épaisseur de la plaque. On remarque une augmentation des valeurs de la densité de force en s'approchant de l'extrémité libre.



**Figure 12.** Distribution de la densité de force.

### III.1.3 Conclusion

Cette application présente un modèle de couplage des phénomènes magnéto-élastiques dans une plaque conductrice placée dans un champ magnétique variable dans le temps. Pour le traitement du problème nous avons utilisé la méthode des éléments finis en hypothèse bidimensionnelle. Le modèle mis en œuvre contrairement, aux autres modèles, prend en considération l'épaisseur de la plaque mince donc des courants qui y sont induits.

Le modèle de couplage magnéto-élastique mis en œuvre sous environnement Matlab a permis d'obtenir des résultats qui reproduisent d'une manière qualitative ceux fournis dans la littérature. Ceci permet de conclure à la validité du modèle proposé.

### III.2 Modèle magnéto-élastique de la plaque ferromagnétique

Dans les dispositifs Electromagnétiques, les matériaux magnétiques sont soumis à une déformation élastique sous l'action des forces magnétiques et de magnétostriction. Le champ magnétique ainsi que la répartition de la force sont plus ou moins influencées par la déformation. L'étude d'une telle interaction nécessite une prise en compte simultanée des champs magnétiques et mécaniques. La déformation mécanique induit le mouvement et le changement de la géométrie due à la modification de distribution du champ magnétique. Afin de déterminer ces effets mécaniques, le développement de modèles couplés est nécessaire. Plusieurs études ont déjà été effectuées [40], [41], [42]. Le modèle proposé présente une approche plus simple pour prendre en compte les effets de magnétostriction en utilisant un schéma de type différences finies pour la discrétisation du terme "dynamique" dans l'équation élastique [58], [61].

L'équation électromagnétique 2D est exprimée en terme du potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$

$$-\nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{A}) + \sigma \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{J}_s \quad (\text{III.18})$$

La densité de courants induits est calculée en utilisant le schéma d'Euler

$$\mathbf{J} = \sigma \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} \quad (\text{III.19})$$

La réductivité magnétique  $\nu$  est définie à partir des caractéristiques non linéaires du matériau ferromagnétique.

En utilisant la méthode des éléments finis de Galerkin pour la discrétisation dans l'espace de l'équation (III.18), et en tenant compte des conditions aux limites naturelles on retrouve

$$\iint_{\Omega} \nabla \alpha_i \cdot \nu(\mathbf{B}) \nabla \left( \sum_j \alpha_j \cdot \mathbf{A}_j \right) dx dy + \iint_{\Omega} \sigma \alpha_j \frac{\partial \left( \sum_j \alpha_j \cdot \mathbf{A}_j \right)}{\partial t} dx dy = \iint_{\Omega} \mathbf{J}_s \cdot \alpha_i dx dy \quad (\text{III.20})$$

$\alpha_i$  est la fonction de projection au noeud  $i$ ,  $\alpha_j$  sont les fonctions d'interpolation au noeud  $j$  et  $\mathbf{B}$  est le module de l'induction magnétique.

Le problème élastique est régie par un système d'équations aux dérivées partielles donnée par

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i^v = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} \quad (\text{III.21})$$

$\sigma_{ij}, \rho, f_i^v$  and  $U_i$  sont respectivement le tenseur contraintes mécaniques [Pa], la densité de masse volumique [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ], la densité de force [ $\text{N}/\text{m}^3$ ] et le déplacement mécanique [m].

Le tenseur des contraintes est lié au tenseur des déformations par la relation

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{III.22})$$

L'équation (III.22) est la loi de Hook généralisée ou  $C_{ijkl}$  est le tenseur d'élasticité et  $\varepsilon_{kl}$  est le tenseur des déformations.

$$C_{ijkl} = \frac{E}{1 + \nu} \left( \frac{\nu}{1 - 2\nu} \delta_{kl} \delta_{ij} + \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right) \quad (\text{III.23})$$

$E, \nu$  et  $\delta$  sont respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson et le symbole de Kronecker.

En utilisant la méthode de Galerkin pour la résolution du système d'équations (III.21), le système algébrique à résoudre

$$[\mathbf{M}] \frac{\partial^2 \{U_i\}}{\partial t^2} + [\mathbf{K}] \{U_i\} = F^m + F^{mf} \quad (\text{III.24})$$

$[\mathbf{M}]$  est la matrice de masse et  $[\mathbf{K}]$  est la matrice de rigidité,  $F^{mf}$  représente les forces dues aux effets de magnétostriction et,  $F^m$  sont les forces d'origine magnétiques. Ces forces sont calculées en utilisant la méthode de variation de l'énergie. Le tenseur des contraintes de magnétostriction est calculé à partir du tenseur de déformation du matériau magnétique due à l'effet magnétostrictif ( $\varepsilon^m$ ) et qui dépend du champ magnétique.

Le couplage entre la déformation et l'intensité du champ magnétique peut être obtenu à partir des fonctions potentiels thermodynamiques tels que proposé en [43]

$$\varepsilon^m = c_1 H + c_2 H^2 \quad (\text{III.25})$$

$c_1$  définit l'effet piézo-magnétique alors que  $c_2$  est le paramètre de magnétostriction. En supposant la condition d'isotropie [43] le coefficient  $c_1$  doit disparaître et le coefficient  $c_2$  pourrait être calculé en utilisant la méthode des moindres carrés.

Pour la dérivée seconde de l'équation (III.24) on propose le schéma de discrétisation basée sur le schéma 'différences finies' appliquées aux dérivées spatiales [44].

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \approx \frac{U^{t+1} - 2U^t + U^{t-1}}{\Delta t^2} \quad (\text{III.26})$$

$\Delta t$  est le pas de temps

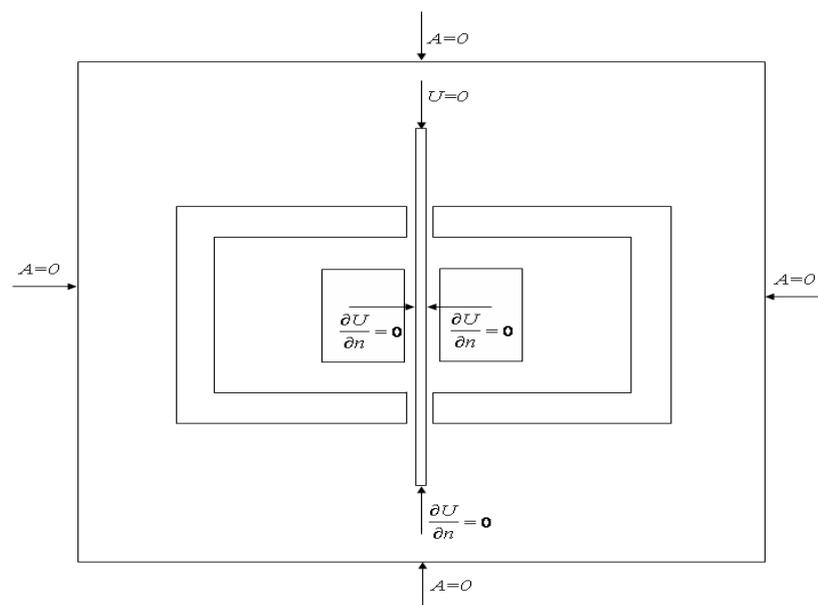
Pour résoudre les problèmes magnétique et mécanique, la méthode des éléments finis en hypothèse bidimensionnelle est utilisée. Le couplage magnéto-élastique est effectué en pas à pas dans le temps, la technique de remaillage est utilisée pour la prise en compte des déformations de la géométrie.

Les problèmes magnétiques et élastiques sont indirectement couplés, ce couplage est basé sur l'interdépendance entre les champs magnétique et élastique, C'est à dire la solution du champ magnétique dépend de la géométrie du système, et la solution du problème élastique dépend des forces qui sont elles mêmes en fonction du champ magnétique.

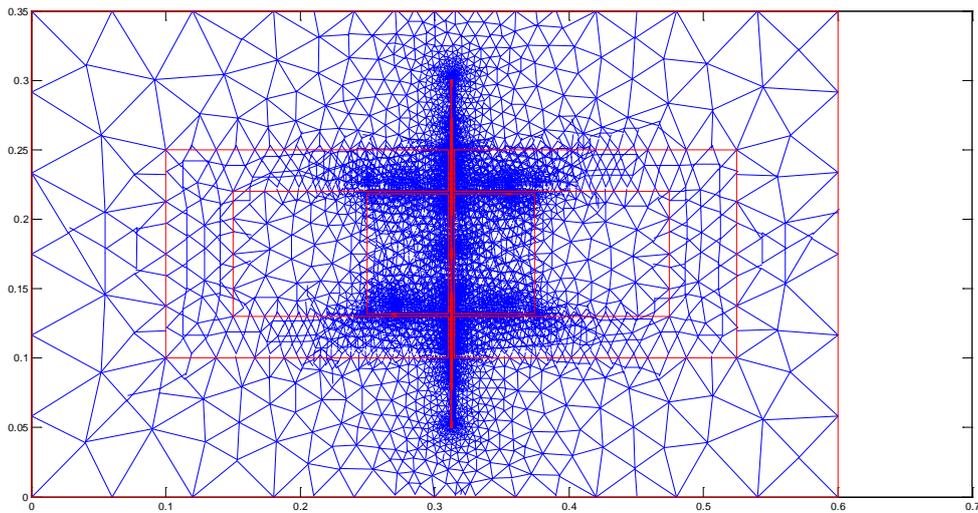
### III.2.1 Application du modèle magnéto-élastique

#### III.2.1.1 Dispositif d'étude

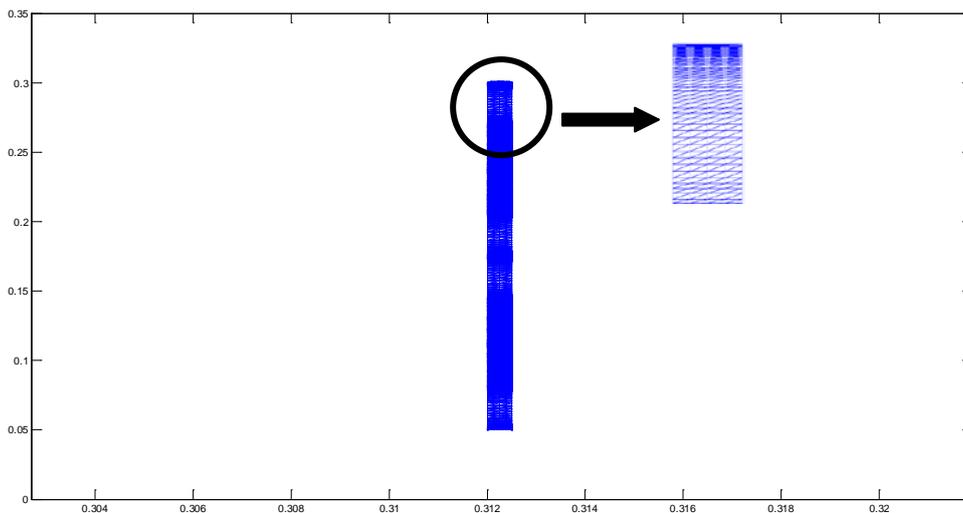
Le système électromagnétique à étudier est composé de deux culasses en ferrite en forme de U et une bobine entourant une plaque ferromagnétique de 250 mm de longueur, 12,5 mm de largeur et 0,5 mm d'épaisseur comme le montre la figure (13). Le champ magnétique est considéré comme uniforme dans la zone centrale de la tôle magnétique. Cette application a fait l'objet d'étude dans des travaux antérieurs [40]



**Figure 13.** Domaine d'étude, conditions aux limites magnétiques et mécaniques



**Figure 14.** Maillage du domaine magnétique avec 22323 nœuds et 44593 triangles

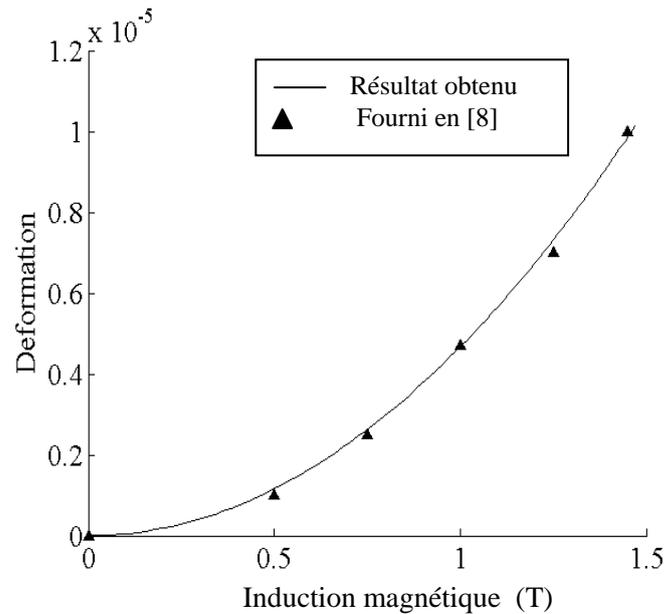


**Figure 15.** Maillage du domaine mécanique avec 6971 nœuds et 11280 triangles

### III.2.1.2 Résultats et discussions

Le calcul de la déformation est observé dans la zone centrale de la tôle magnétique où la distribution de l'induction magnétique est uniforme.

Les résultats obtenus ont été comparés à ceux fournis dans la littérature scientifique et qui sont obtenus expérimentalement en considérant le même dispositif. On constate une bonne correspondance des résultats remarque un bon accord des résultats (fig.16).



**Figure 16.** La déformation en fonction de l'induction magnétique

Une comparaison, en terme de temps de calcul, entre la méthode de discrétisation de la dérivée d'ordre 2 par rapport au temps proposée basée sur un schéma différences finies et la méthode de New Mark pour  $\frac{1}{4}$  de la période de l'induction magnétique, ces résultats sont donnés au tableau 1.

Méthode de Resolution	Temps de calcul (s)
New Mark	467.98
Différences finis	400.35

**Tableau 1.** Comparaison des résultats

On remarque une différence considérable en termes de temps de calcul entre les deux méthodes. Ceci est principalement dû au grand nombre de termes à calculer dans le cas de la méthode de New Mark. Les calculs sont effectués sur un PC de fréquence 3,4 GHz et une mémoire RAM de 1,99 Go.

### III.2.2 Modèle inverse de Jiles Atherton

Le Modèle inverse Jiles-Atherton est mis en œuvre et utilisé afin de tenir compte de la non-linéarité et l'effet d'hystérésis [45], [46]. Toutefois, en raison de la faible amplitude des déformations, l'effet du champ magnétique a été négligé.

Dans le modèle de Jiles-Atherton l'aimantation  $M$  est décomposée en une composante réversible  $M_{rev}$  et une composante irréversible  $M_{irr}$ . La composante réversible représente la translation et la rotation réversible des parois au sein des matériaux ferromagnétiques. Par

contre, la composante irréversible représente le déplacement irréversible des domaines magnétiques. Dans ce modèle, l'aimantation  $M$  est calculée en utilisant le champ d'excitation magnétique  $H$  comme variable indépendante [57].

$$M = M_{\text{rev}} + M_{\text{irr}} \quad (\text{III-27})$$

L'aimantation anhystérétique  $M_{\text{an}}$  est donnée par la fonction de Langevin

$$M_{\text{an}} = M_s \left( \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) - \frac{a}{H_e} \right) \quad (\text{III-28})$$

$a$  est le facteur de forme,  $M_s$  est l'aimantation à saturation du matériau et  $H_e$  est le champ effectif donné par :

$$H_e = H + \alpha M \quad (\text{III.29})$$

$\alpha M$  représente le champ magnétique du aux interactions entre les moments magnétiques

L'équation d'hystérésis pour la composante irréversible de l'aimantation est donnée par :

$$\frac{dM_{\text{irr}}}{dH_e} = \frac{M_{\text{an}}(H_e) - M_{\text{irr}}}{k \delta} \quad (\text{III-30})$$

La constante  $k$  est liée à la densité d'énergie moyenne d'ancrage des parois. Le paramètre  $\delta$  prend la valeur  $+1$  quand  $dH/dt > 0$  et la valeur  $-1$  quand  $dH/dt < 0$ . L'aimantation réversible est proportionnelle à la différence entre l'aimantation anhystérétique et l'aimantation irréversible.

$$M_{\text{rev}} = c(M_{\text{an}} - M_{\text{irr}}) \quad (\text{II.31})$$

$c$  est un coefficient de réversibilité tel que  $c \in [0, 1]$ .

En remplaçant (III-31) dans (III-27) nous aurons :

$$M = (1 - c)M_{\text{irr}} + cM_{\text{an}} \quad (\text{III-32})$$

En manipulant les équations (III-29), (III-30) et (III-32), on obtient l'expression de la susceptibilité différentielle totale comme suit :

$$\frac{dM}{dH} = \frac{(1 - c)(M_{\text{an}} - M_{\text{irr}}) + kc\delta \frac{dM_{\text{an}}}{dH_e}}{k\delta - \alpha(1 - c)(M_{\text{an}} - M_{\text{irr}}) - kc\alpha\delta \frac{dM_{\text{an}}}{dH_e}} \quad (\text{III-33})$$

avec

$$\frac{dM_{an}}{dH_e} = \frac{M_s}{a} \left( 1 - \coth^2 \left( \frac{H_e}{a} \right) + \left( \frac{a}{H_e} \right)^2 \right) \quad (\text{III-34})$$

Pour obtenir le modèle inverse de Jiles-Atherton, nous écrivons d'abord (Bastos and al., 2003)

$$\frac{dM}{dH} = \frac{dM}{dB} \frac{dB}{dH} \quad (\text{III-35})$$

En outre, la loi du milieu dans le cas d'un matériau magnétique s'écrit :

$$B = \mu_0 (H + M) \quad (\text{III-36})$$

Ce qui donne la dérivée de l'aimantation totale par rapport à l'induction magnétique  $B$  :

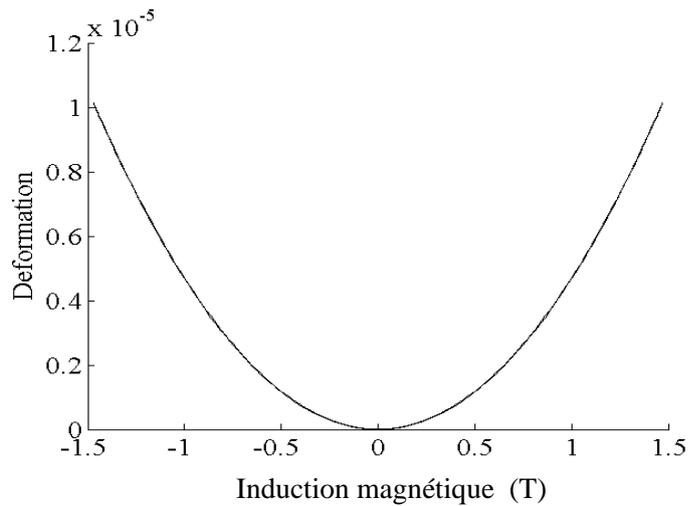
$$\frac{dM}{dB} = \frac{\frac{dM}{dH}}{\mu_0 \left( 1 + \frac{dM}{dH} \right)} \quad (\text{III-37})$$

En remplaçant  $dM/dH$  par son expression dans l'équation (III-37) on aura :

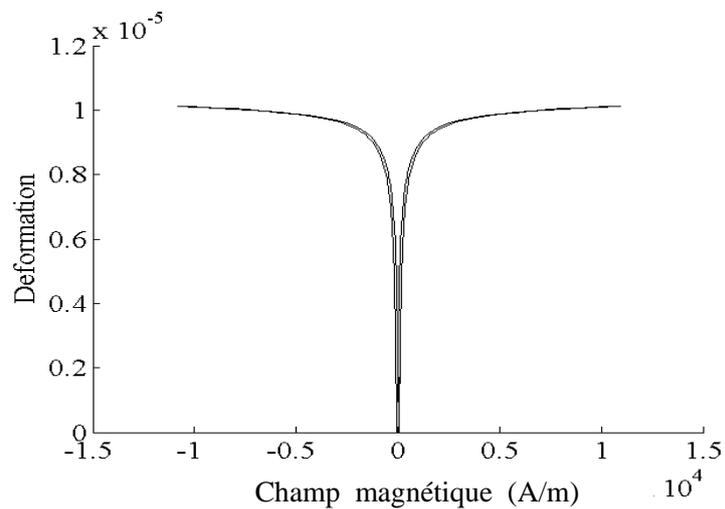
$$\frac{dM}{dB} = \frac{(1-c) \frac{dM_{irr}}{dB_e} + \frac{c}{\mu_0} \frac{dM_{an}}{dH_e}}{1 + c(1-\alpha) \frac{dM_{an}}{dH_e} + \mu_0(1-c)(1-\alpha) \frac{dM_{irr}}{dB_e}} \quad (\text{III.38})$$

$M_{irr}$ ,  $M_{an}$ ,  $M$ , sont respectivement sont les aimantations irréversible, an hystérétique et totale.  $H_e$  et  $B_e$  sont le champ effectif et l'induction effective.

$a = 73.5$  A/m,  $c = 0.02$ ,  $k = 54$ ,  $\alpha = 1.5 \times 10^{-4}$  et  $M_s = 1.166 \times 10^6$  A/m, sont les paramètres de Jiles qui sont déterminés à partir d'un cycle d'hystérésis expérimental [47].

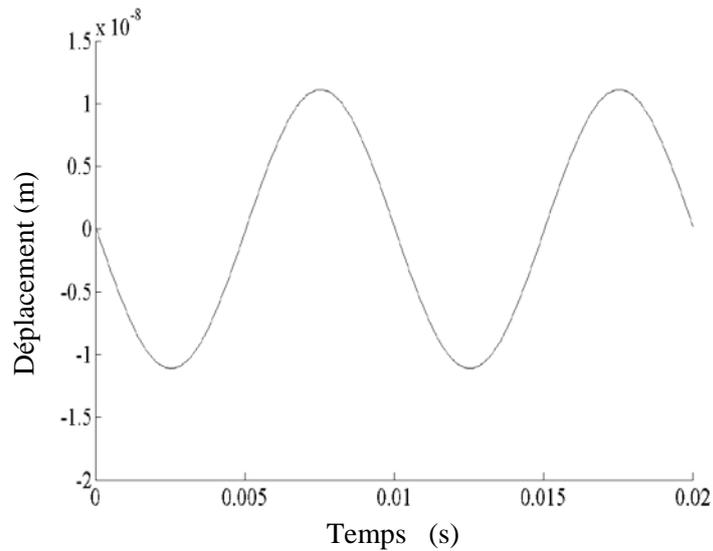


**Figure 17.** Déformation en fonction de l'induction



**Figure 18.** Déformation en fonction du champ magnétique

Les Figure (17) et (18) montrent l'hystérésis magnéto-élastique c'est à dire la déformation en fonction de l'induction et du champ magnétique. La saturation est atteinte pour une valeur de la déformation relative d'environ  $1,05 \cdot 10^{-5}$  et pour un champ coercitif  $H_c = 50,6 \text{ A / m}$ . Dans notre modèle l'effet de la déformation sur la distribution du champ est négligé. Cela est dû à la faible amplitude de la déformation.



**Figure 19.** Déplacement en fonction du temps

La figure (19) présente un déplacement le long de la direction "y" à un point situé au milieu de la plaque, causée uniquement par les forces dues aux champs magnétiques. L'amplitude de déplacement induit par la force magnétique est très insignifiante par rapport au déplacement magnétostrictif qui est autour de  $2,6 \cdot 10^{-5}$  m.

### III.2.3 Conclusion

Nous avons proposé un modèle de couplage dynamique pour les équations électromagnétiques et élastique. Un tel modèle permet de prendre en compte à la fois de l'effet de magnétostriction et le terme "dynamique" de l'équation élastique. Le modèle inverse de Jiles-Atherton a été mis en œuvre pour tenir compte de la non-linéarité et l'effet de l'hystérésis. Les résultats, exprimés en termes de déformation, sont en bon accord avec les données fournies dans la littérature scientifique [10].

### III.3 Application du Modèle de Jiles-Atherton Inverse pour les matériaux à magnétostriction géante

Ces dernières années la demande du positionnement à haute précision a augmenté dans différents secteurs allant de la biologie à l'usinage. Les actionneurs linéaires sont améliorés dans la précision de position de plusieurs dizaines de micromètres dans les années 1920-1930 à des dizaines de nanomètres dans les années 1980 à 1990. Au 21<sup>ème</sup> siècle, l'exactitude de la position des actionneurs linéaires devrait être inférieure à 1 nm [48], [67].

Les systèmes classiques de l'électromécanique ont des difficultés à contrôler pour des précisions de quelques nanomètres, de nombreuses recherches sur les actionneurs intelligents ont été entreprises. L'avènement des matériaux magnétostrictifs à haute précision a changé la donne [67], [68], [69].

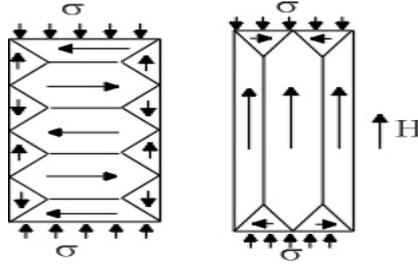
Un matériau magnétostrictif est un matériau dont les propriétés magnétiques et mécaniques sont étroitement couplées au sein même de la matière: lorsque l'on change son état magnétique (généralement en aimantant le matériau grâce à une bobine parcourue par un courant électrique), son état de déformation mécanique est modifié. Cela se traduit par une légère elongation du matériau accompagné d'une force importante. Plusieurs familles de matériaux magnétostrictifs existent. Les plus puissants sont les alliages aux terres rares, du type Terbium Dysprosium Fer, commercialement appelés Terfenol-D [49].

La forme de la courbe d'hystérésis change de façon significative si la charge mécanique est modifiée. Il est connu depuis de nombreuses années que l'application de la contrainte d'un matériau ferromagnétique peut causer des changements dans l'aimantation [50],[70].

Dans le présent travail il a été mis en évidence l'influence de la contrainte sur l'aimantation et cela pour différentes valeurs de la contrainte mécanique. Nous avons considéré deux modèles de la déformation en fonction de l'aimantation et cela en fonction de la charge mécanique appliquée.

#### III.3.1 Modèle Etendu de Jiles-Atherton

La magnétostriction est le changement des dimensions d'un matériau en réponse à l'évolution de son aimantation. Autrement dit, un matériau magnétostrictif change de forme quand il est soumis à un champ magnétique. Les matériaux magnétostrictifs sont généralement chargés mécaniquement en fonctionnement normal. Une charge de compression est appliquée au matériau, qui en raison du couplage magnéto-élastique, les forces de la structure du domaine s'orientent perpendiculairement à la force appliquée. Alors qu'un champ magnétique est appliqué, la structure du domaine tourne pour produire une déformation dans le matériau [51].



**Figure 20.** Illustration de la magnétostriction

Le modèle de Jiles-Atherton est étendu pour tenir compte de l'effet d'une contrainte sur le champ magnétique, cela se traduit par l'ajout d'un champ magnétique.

Dans l'hypothèse de température fixe, le champ magnétique effectif est modélisé par

$$H^e = H + \alpha M + H^\sigma \quad (\text{III.39})$$

où  $H$  est le champ magnétique appliqué,  $\alpha M$  représente le champ magnétique due aux interactions entre les moments magnétiques, et  $H^\sigma$  est le champ due aux interactions magnéto-élastiques des domaines. Le paramètre  $\alpha$  est le taux d'interaction des domaines.

En utilisant les lois de la thermodynamique  $H^\sigma$  obtenue à partir de l'expression suivante [52]

$$H^\sigma = \frac{3}{2} \frac{\sigma}{\mu_0} \frac{\partial \lambda}{\partial M} \quad (\text{III.40})$$

$\sigma$  représente la contrainte à laquelle est soumis le matériau,  $\lambda$  est la magnétostriction ou c'est la déformation relative,  $M$  est l'aimantation et  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide.

$\lambda(\sigma, M)$  représente le coefficient de magnétostriction

$$\frac{dM}{dH} = \frac{(1-c) \frac{dM_{irr}}{dH_e} + c \frac{dMan}{dH_e}}{1 - (1-c) \left( \alpha + \frac{dH_\sigma}{dM} \right) \frac{dM_{irr}}{dH_e} - c \left( \alpha + \frac{dH_\sigma}{dM} \right) \frac{dMan}{dH_e}} \quad (\text{III.41})$$

Pour le modèle inverse de Jiles on procédera comme suit :

Nous posons  $\frac{dM}{dH} = \frac{dM}{dB} \frac{dB}{dH}$  et on déduit l'expression de  $\frac{dM}{dB}$

$$\frac{dM}{dB} = \frac{\frac{dM}{dH}}{\frac{dB}{dH}} = \frac{\frac{dM}{dH}}{\mu_0(1 + \frac{dM}{dH})} = \frac{\frac{(1-c)}{\mu_0} \frac{dM_{irr}}{dH_e} + \frac{c}{\mu_0} \frac{dM_{an}}{dH_e}}{1 + (1-c)(1 - (\alpha + \frac{dH_\sigma}{dM})) \frac{dM_{irr}}{dH_e} + (1 - (\alpha + \frac{dH_\sigma}{dM}))c \frac{dM_{an}}{dH_e}} \quad (III.42)$$

$\lambda(\sigma, M)$  représente le coefficient de magnétostriction, fonction de la contrainte  $\sigma$  et de l'aimantation  $M$ . L'expression analytique de cette fonction étant inconnue pour l'échantillon, elle est approximée par un polynôme [53], [71]:

$$\lambda = \gamma_1(\sigma)M^2 + \gamma_2(\sigma)M^4 \quad (III.43)$$

Cette expression quantifie la magnétostriction découlant de la réorientation des domaines magnétiques qui se produit lorsqu'un champ est appliqué.

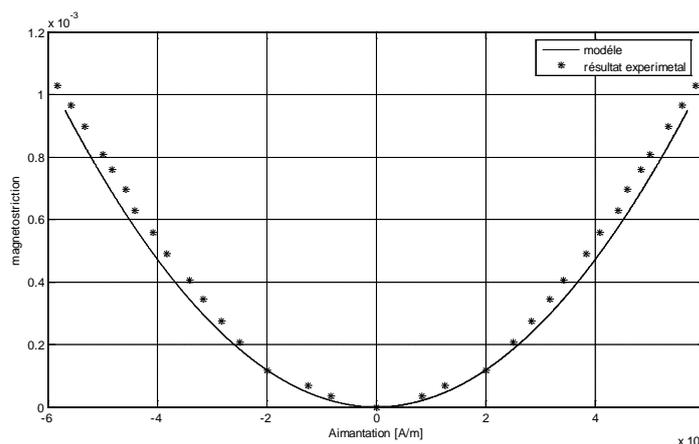
$\gamma_1(\sigma)$  et  $\gamma_2(\sigma)$  sont des fonctions des contraintes, ils définissent de combien les allures changent lorsque la contrainte varie.

On considère que la relation entre  $\gamma_i(\sigma)$  et  $\sigma$  est linéaire :

$$\gamma_1(\sigma) = \gamma_1(0) + \sigma \gamma_1'(0) \quad (III.44-a)$$

$$\gamma_2(\sigma) = \gamma_2(0) + \sigma \gamma_2'(0) \quad (III.44-b)$$

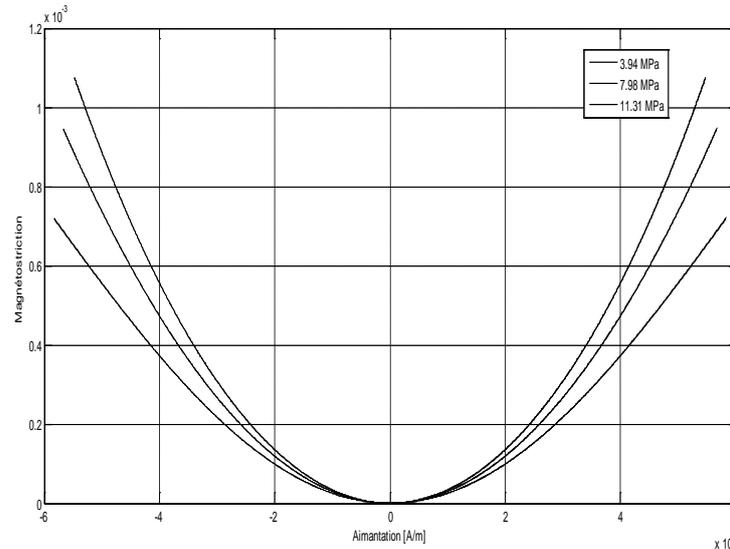
Les paramètres  $\gamma_1(0)$ ,  $\gamma_1'(0)$ ,  $\gamma_2(0)$ ,  $\gamma_2'(0)$  sont des constantes qui sont déterminées à partir des courbes expérimentales [53].



**Figure 21.** La magnétostriction en fonction de l'aimantation pour une contrainte de 7.98 MPa

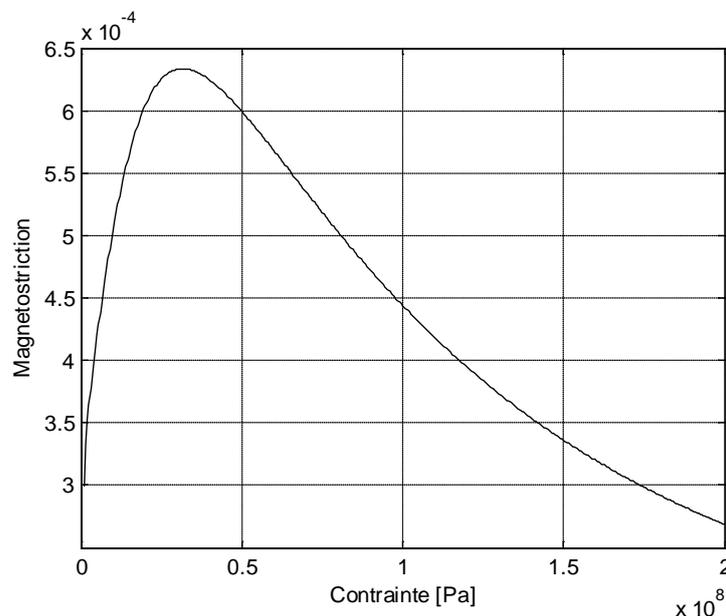
L'utilisation du modèle donné en (III.43) fourni une bonne concordance des résultats tel que l'erreur ne dépasse pas les 8 %.

Afin de voir l'influence de la contrainte, nous avons soumis le matériau à différentes contraintes :



**Figure 22.** La magnétostriction en fonction de l'aimantation pour différentes contraintes

Ce résultat démontre que lorsqu'on augmente la contrainte la magnétostriction augmente elle aussi, pour mettre en évidence la contrainte maximale appliquée pour atteindre la saturation nous avons représenté la variation de la magnétostriction en fonction de la contrainte appliquée.

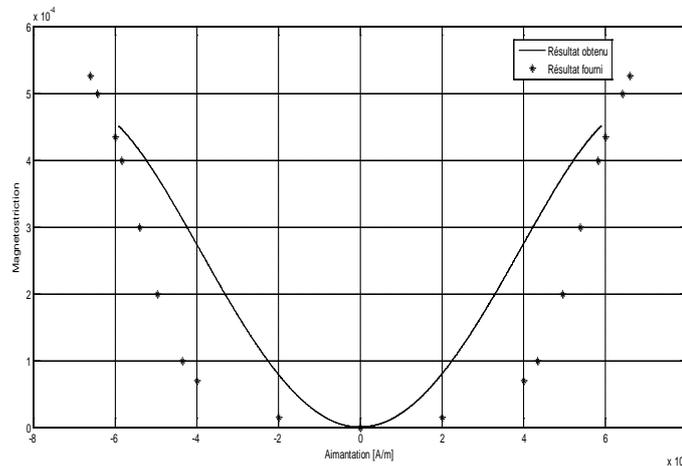


**Figure 23.** Variation de la Magnétostriction en fonction de la contrainte (voir annexe)

De la figure 23 on voit clairement que la magnétostriction augmente avec l'augmentation de la contrainte. Le comportement est non linéaire, tel que la magnétostriction cesse d'évoluer

entre 25 MPa et 35 MPa, puis le matériau subit une décompression due aux fortes contraintes appliquées.

Pour les faibles contraintes ( $< 1$  MPa) nous avons utilisé le modèle donné en (III.43), comme exemple on prend une contrainte de 0.57 MPa la comparaison des résultats retrouvés en utilisant le modèle de l'équation (III.43) et les résultats pratiques [53] donnent :



**Figure 24.** La Magnétostriction en fonction de l'aimantation pour une contrainte de 0.57 MPa. Nous remarquons un grand écart entre les deux courbes, le modèle précédent n'est pas représentatif pour ces valeurs de contraintes.

Deux approches ont été adoptées pour corriger l'écart remarqué dans le cas des faibles contraintes :

### III.3.2 1<sup>ère</sup> approche: Proposition d'un modèle pour les faibles contraintes [59],[63]

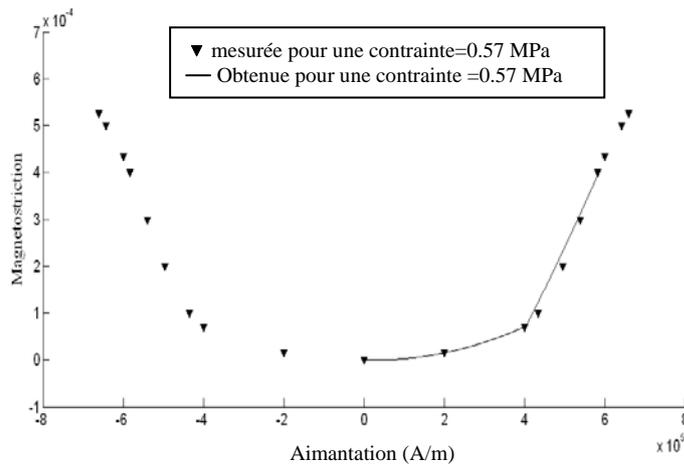
Le coefficient de magnétostriction  $\lambda(\sigma, M)$ , fonction de la contrainte  $\sigma$  et de l'aimantation  $M$ , a été traité pour deux cas de contraintes ( $\sigma > 1$  MPa) et ( $\sigma < 1$  MPa), les résultats obtenus en figure 24 attestent que le modèle donné par l'équation (III.43) n'est pas représentatif pour les faibles contraintes.

Un autre modèle a été proposé pour les faibles charges, il tient compte de l'effet piézomagnétique. Ce modèle est une projection du modèle donné par [54].

$$\lambda = c_1 M^2 + c_2 M \quad (\text{III.45})$$

$c_1$  et  $c_2$  sont des constantes. Elles sont déterminées par la méthode des moindres carrés

Le résultat obtenu en figure 25 pour un quart d'une période, l'écart entre la courbe expérimentale et le résultat obtenu est estimé à 2.44 %.



**Figure 25.** La magnétostriction en fonction de l'aimantation pour une contrainte de 0.57 MPa

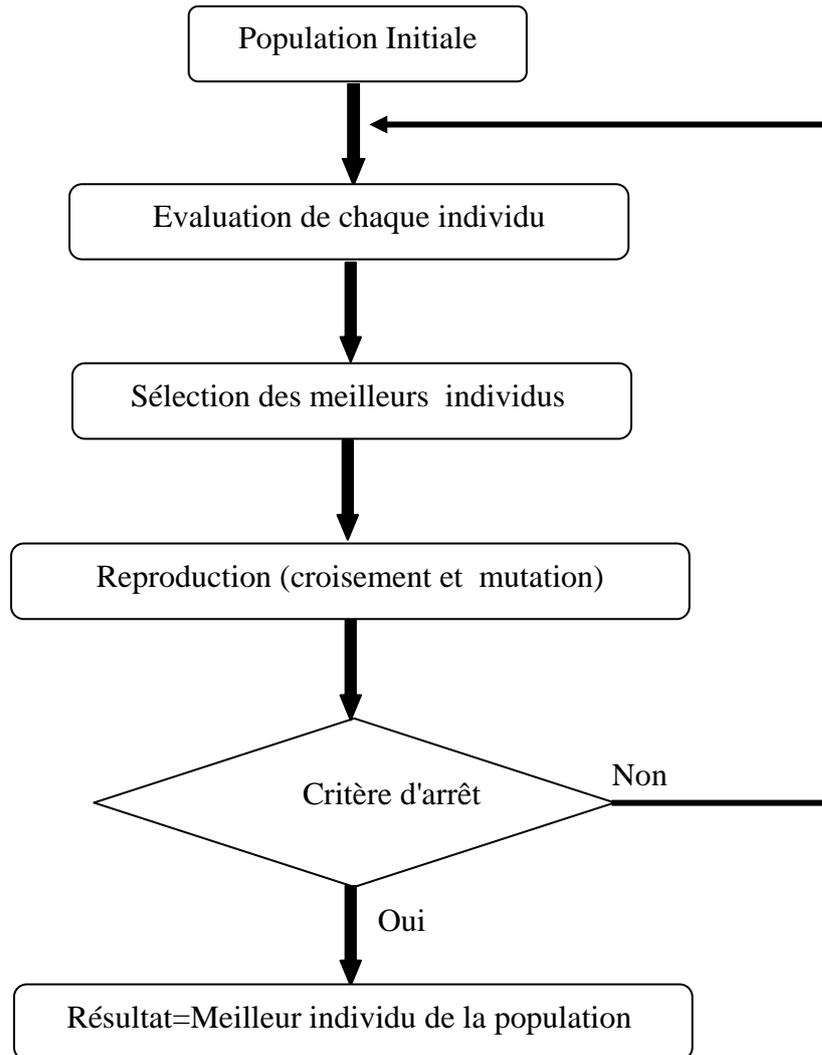
### III.3.3 2<sup>ème</sup> approche: Utilisation de la méthode des algorithmes génétiques [62]

Afin d'identifier les paramètres des équations (44.a) et (44.b) la technique des algorithmes génétiques (AG) est utilisée.

Les algorithmes génétiques (AG) est une technique d'optimisation et de recherche basée sur les principes de la génétique et la sélection naturelle. Un algorithme génétique (GA) permet à une population composée de nombreuses personnes d'évoluer selon les règles de sélections spécifiées à un état qui maximise le "fitness" (c'est-à-dire minimise la fonction coût). La méthode a été développée par John Holland (1975) au cours des années 1960 et 1970 et, enfin, popularisée par un de ses élèves, David Goldberg [55],[56].

La méthode des algorithmes génétiques a plusieurs avantages par rapport aux approches numériques traditionnelles d'optimisation, elle peut être utilisée avec des paramètres continus ou discrets, n'exige pas l'information sur la dérivée, elle fournit une liste de paramètres optimaux pas seulement une solution.

Cet algorithme commence par créer la population initiale et se termine par la convergence vers le meilleur individu de la population correspondant à la solution du problème d'optimisation. La progression d'un état à un autre se fait par des opérateurs stochastiques tels que la sélection, le croisement et la mutation. La structure de l'algorithme est donnée par l'organigramme de la figure 26



**Figure 26.** Structure de l'algorithme

Les valeurs des paramètres sont bornées dans un intervalle [pmin pmax]. La principale raison d'établir de telles limites est de rendre le processus de recherche plus efficace en réduisant son espace.

La fonction cout à minimiser est

$$J = \sqrt{\sum_{i=0}^n (M_{ex} - M)^2 / n} \quad (\text{III.46})$$

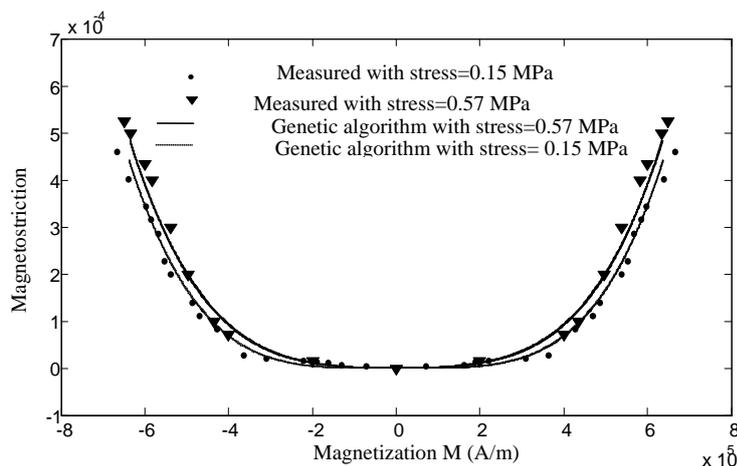
$M_{ex}$  est la valeur de l'aimantation donnée par l'expérience,  $M$  est l'aimantation calculée.

Les paramètres obtenus dans ce cas sont répertoriés dans le tableau 2.

Paramètre	$\gamma_1(0)$	$\gamma_1'(0)$	$\gamma_2(0)$	$\gamma_2'(0)$
Unité	$\left(\frac{m}{A}\right)^2$	$\left(\frac{m}{A}\right)^2 Pa^{-1}$	$\left(\frac{m}{A}\right)^4$	$\left(\frac{m}{A}\right)^4 Pa^{-1}$
Valeur	$-6.17 \cdot 10^{-17}$	$-4.12 \cdot 10^{-22}$	$2.72 \cdot 10^{-27}$	$3.41 \cdot 10^{-34}$

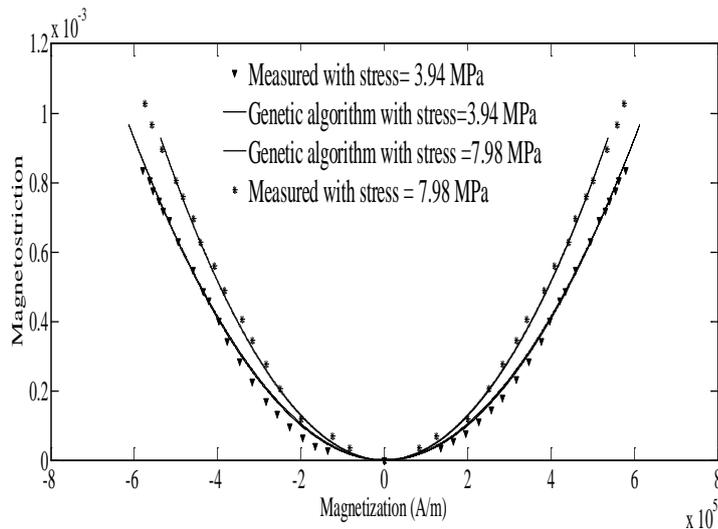
**Tableau 2.** Paramètres de magnétostriction pour le Terfenol-D

En utilisant les coefficients du tableau 2, le calcul de la magnétostriction en fonction de l'aimantation donnée par l'équation (III.43) avec la minimisation de la fonction coût (equ. III.46) permet d'obtenir les résultats donnés par la figure 27 pour deux valeurs de faibles contraintes. Nous pouvons noter que les résultats obtenus en utilisant la méthode des algorithmes génétiques sont plus précis que les résultats obtenus précédemment (figure 24). Dans le cas de fortes contraintes (Figure 28), les résultats montrent des courbes paraboliques avec un bon accord entre les données calculées et mesurées. Ces résultats démontrent l'efficacité de la méthode d'optimisation utilisée comparativement à l'approximation polynomiale.



**Figure 27.** La magnétostriction en fonction de l'aimantation

L'erreur dans les résultats de la figure 21 est de 8%, alors que l'erreur ne dépasse pas les 2% dans les résultats de la figure 28. En analysant les résultats, nous pouvons conclure que l'efficacité des algorithmes génétiques (GA) est bien vérifiée.



**Figure 28.** La magnétostriction en fonction de l'aimantation

Le modèle étendu de Jiles-Atherton est appliqué avec succès pour représenter le comportement magnétique des matériaux magnétostrictifs. Les algorithmes génétiques peuvent constituer une alternative intéressante, si les méthodes d'optimisation classiques (entre autres les moindres carrés), ne parviennent pas à fournir des résultats fiables de manière efficace. L'application des algorithmes génétiques pour la détermination des paramètres de magnétostriction a montré son efficacité et sa généralisation dans les deux cas de faibles et fortes contraintes.

# **CONCLUSION**

La première partie de notre travail concerne l'étude du couplage magnéto-élastique dans le cas d'une plaque rectangulaire conductrice soumise à un champ magnétique variable dans le temps. Cette étude présente un modèle de couplage des phénomènes magnéto-élastiques dans une plaque conductrice placée dans un champ magnétique variable dans le temps. Pour le traitement du problème nous avons utilisé la méthode des éléments finis en hypothèse bidimensionnelle. Le modèle mis en œuvre contrairement aux autres modèles prend en considération l'épaisseur de la plaque mince donc des courants qui y sont induits. Le modèle de couplage magnéto-élastique mis en œuvre sous environnement Matlab a permis d'obtenir des résultats qui reproduisent d'une manière qualitative ceux fournis dans la littérature. Ceci permet de conclure à la validité du modèle proposé.

Un autre aspect du couplage magnéto-élastique a été traité dans la deuxième application en plus des forces magnétiques les matériaux magnétiques sont soumis à des forces dites de magnétostriction. Le dispositif d'étude est composé de deux culasses en ferrite en forme de U et une bobine entourant une plaque ferromagnétique. Deux modèles éléments finis en hypothèse bidimensionnelle ont été utilisés pour la résolution des équations électromagnétique et mécanique, Le couplage magnéto-élastique est effectué en pas à pas dans le temps, la technique de remaillage est utilisée pour la prise en compte des déformations de la plaque. Une comparaison a été effectuée en terme de temps de calcul pour résoudre l'équation mécanique il s'agit du schéma type différences finis et de la méthode de Newmark, vu le nombre important de termes à calculer dans cette dernière le temps de calcul est important comparativement au premier schéma. Un modèle simplifiée de la magnétostriction en fonction du champ magnétique a été utilisé le paramètre liant ces deux grandeurs est identifié par la méthode des moindres carrés, en comparant les résultats de la déformation en fonction de l'induction magnétique aux résultats expérimentaux nous avons constaté une bonne concordance des résultats obtenus et ceux fournis. Afin de tenir compte de la non linéarité nous avons introduit dans le processus de calcul le modèle d'hystérésis de Jiles-Atherton, à cause des petites valeurs des déformations induites nous avons négligé l'effet de ces dernières sur la répartition du champ magnétique. Enfin les déplacements dus aux forces magnétiques seules en fonction du temps ont été représentés et nous avons constaté qu'ils sont insignifiants devant les déplacements causés par les forces d'origines magnétostrictives.

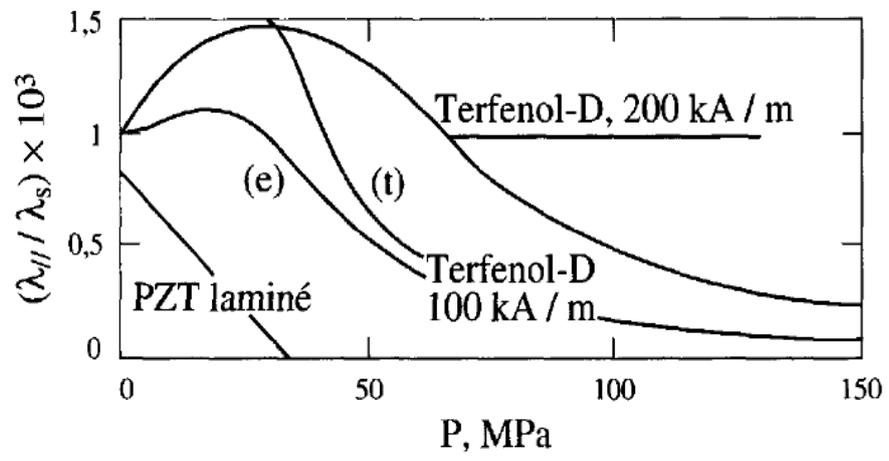
Le modèle de Jiles-Atherton est étendu par l'ajout d'un champ magnétique pour tenir compte de l'effet de la déformation d'un barreau magnétostrictif (Terfenol-D) sur le champ magnétique. L'étude a conduit à proposer deux modèles distincts de la magnétostriction en fonction de l'aimantation pour les fortes et faibles contraintes. Un modèle analytique polynomial de degré

quatre à coefficient non constant est utilisé pour représenter le comportement non linéaire de la magnétostriction, ce modèle est utilisé dans le cas des faibles et fortes contraintes. La résolution de ce modèle en utilisant la méthode des moindres carrés donne de meilleurs résultats pour les fortes contraintes, mais il n'est pas représentatif pour les faibles contraintes. Un modèle quadratique qui tient compte de l'effet piezomagnétique, c'est à dire de l'effet linéaire de la magnétostriction, est proposé dans le cas des faibles contraintes.

L'utilisation de la méthode des algorithmes génétiques pour l'identification des paramètres magnétostrictifs a montré son efficacité et sa généralisation dans les deux cas de faibles et fortes contraintes.

Comme perspective à ce travail on peut citer:

- Implémenter le modèle étendu de Jiles-Atherton dans un problème globale éléments finis.
- Association de la commande dans le couplage magnéto-élastique.
- Envisagé une étude 3D du modèle de couplage magnéto-élastique.



# **BIBLIOGRAPHIE**

- 
- [1] Anouar Belahcen, Magnetoelastic Coupling in Rotating Electrical Machines, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 41, N°5, MAY 2005.
  - [2] G.Reyne, G.Meunier,J.F. Imhoff, E. Euxibie, Magnetic forces and mechanical behavior of ferromagnetic materials. Presentation and results on the theoretical, experimental and numerical approaches, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, p 234-237,Jan 1988.
  - [3] Javadi H., Lefevre Y., Clenet S. and Lajoie Mazenec M., Electro-magneto-mechanical Characterisations of the Vibration of Magnetic Origin of Electrical Machines, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 31, N°3, May 1995.
  - [4] M. Besbes, C. Picod, F.Camus, M.Gabsi, Influence of stator geometry upon vibratory Behaviour and Electromagnetic Performances of Switched Reluctance Motors, IEE Proc-Electr Power Appl, Vol. 145, N°5, September 1998.
  - [5] M.Gabsi, F.Camus and M.Besbes, Computation and measurement of magnetically induced vibrations of a switched reluctance machine, IEE Proc.-Electr. Power Appl.. Vol. 146, N° 5, September 1999.
  - [6] Joon-Ho Lee, Young-Hwan Lee, Dong-Hun Kim, Ki-Sik Lee, and Il-Han Park, Dynamic Vibration Analysis of Switched Reluctance Motor Using Magnetic Charge Force Density and Mechanical Analysis, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, Vol.12, N°1,pp 1511-1514 March 2002
  - [7] Ch. Picod, M.Besbes, M. Gabsi and E. Pelle ,Study of The Vibratory Behaviour of Synchronous Motors, Electric Machines and Drives, 1999. International Conference IEMD '99.
  - [8] Joksimovic G.M., Durovic, M.D.; Penman J., Arthur, N. , Dynamic simulation of dynamic eccentricity in induction machines-finding function approach, Energy Conversion, IEEE Transactions on Energy conversion, Vol. N° 15 pp 143 - 148 Jun 2000
  - [9] Jawad Faiz, Bashir Mahdi Ebrahimi, Bilal Akin, and Hamid A. Toliyat, Finite-Element Transient Analysis of Induction Motors Under Mixed Eccentricity Fault, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 44, N°1,pp 66-74 January 2008.
  - [10] N. Galopin, K. Azoum, M. Besbes, F. Bouillault, L. Daniel, O. Hubert, F. Alves, Caractérisation et Modélisation des Déformations Induites par les Forces Magnétiques et par la Magnétostriktion, MGE 2005.
  - [11] Anders Lundgren ,On measurement and modelling of 2D magnetization and magnetostriction of SiFe sheets, Royal Institute of Technology, Electric Power Engineering, ISSN 1100-1593, Stockholm 1999.
  - [12] Etienne du Tremolet de Laheisserie , Magnétisme: Matériaux et Applications, EDP Science, 2000.
  - [13] Jiles D.C , Theory of the Magnetomechanical Effect, Journal of physics D: Applied Physics, Vol. 28, pp. 1537-1546, 1995
  - [14] Martin J. Sablik and David C. Jiles, Coupled Magnetoelastic Theory of Magnetic and Magnetostrictive Hysteresis, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, N°3, pp. 2113-2123 July 1993.
  - [15] Jiles D. C. , Devine M. K. ,Recent developments in modeling of the stress derivative of magnetization in ferromagnetic materials, Journal of Applied Physics, Vol. 76, N°. 10, pp. 7015-7017, November 1994.
  - [16] Martin J. Sablik and David C. Jiles,Modeling the Effects of Torsional Stress on Hysteretic Magnetization, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 35, N°1, pp. 498-504 January 1999.
  - [17] J. F. Imhoff, G. Reyne, A. Foggia et J. C. Sabonnadière, Modélisation des phénomènes électromagnétiques et mécaniques couples : application à l'analyse vibratoire des machines électriques, Revue Phys. Appl. N° 25, pp. 627-648, July 1990.

- 
- [18] Yoshimitsu Kikuchi, Magnetostrictive Materials and Applications, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. Mag-4, N°2, pp. 107-117 June 1968.
- [19] Marcelo Jorge Dapino, Nonlinear and hysteretic magnetomechanical model for magnetostrictive transducers, Doctorat Thesis, Iowa State University, 1999.
- [20] Sina Valadkhan, Nano Positioning Control Using Magnetostrictive Actuators, thèse de Doctorat, Waterloo, Ontario, Canada, 2007.
- [21] M. J.Dapino, R.C. Smith and A. B. Flatau , Structural Magnetic Strain Model for Magnetostrictive Transducers, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 36, N°3, pp. 545-556 May 2000.
- [22] H. Mohellebi 'Elaboration de Modèles 2D Analytico-Numériques pour L'étude de Systèmes Electromagnétiques comportant des Pièces en mouvement' Thèse de Doctorat d'Etat, UMMTO, 2001.
- [23] J.A.Straton ,Théorie de l'Electromagnétisme, édition Dunod.
- [24] K.Srairi ,Modélisation D'actionneurs Eléctromagnétiques Alimentés en Régime Transitoire, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 1997, France.
- [25] A.Kennane ,Méthode des éléments Finis , Office des publications universitaires, OPU, 1995.
- [26] Alexandre Ern, Jean-Luc Guermond, Éléments finis: théorie, applications, mise en oeuvre, Springer, 2000.
- [27] DHATT.G ; TOUZOT.G ,Une présentation de la méthode des éléments finis, MaloineS.A Editeur 1984.
- [28] J.L.Coulomb et J.C Sabonnadiere ,CAO en électrotechnique, Hermès publishing 1985.
- [29] X.N. LU, E. Levi, Z. Zabar and L. Birenbaum ,Behavior of Azimuthal Currents Induced in the Projectile of the Linear Induction Launcher [LIL], IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, No. 1, January 1993.
- [30] O.Letailleur , Modélisation des Systèmes Magnéto-Mécaniques Couplés Par La Méthode De Paramétrisation , Rapport de stage du D.E.A Génie électrique de l'Université Paris VI et ParisXI .
- [31] J.P.Nougier ,Méthodes de calcul numériques, Edition Masson. 1987.
- [32] E.Cagniot ,Algorithmes Data-Parallèles Irréguliers Appliqués à la simulation Electromagnétique Tridimensionnelle, Thèse de Doctorat de L'université des Sciences et Technologie de Lille.
- [33] D.Mirescu, Contribution à la Modélisation numérique de phénomènes couplés magnétique- mécanique, Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1996.
- [34] Y. Shendo and T. Renyuan, Electromagnetic and Mechanical Charactrizations of Noise and vibration in Permanent Magnet Synchronous machines, IEEE Transaction on Magnetics. Vol. 42, N°. 4, pp. 1335-1338, April 2006
- [35] N. Sadowski, Y. Lefèvre, C.G.C. Neves, R. Carlson, Finite Element Coupled to Electrical Circuit Equations in the Simulation of Switced Reluctance Drives : Attention to Mechanical Behaviour, IEEE Transaction on Magnetics. Vol. 32, N°. 3, pp. 1086-1089. May 1996.
- [36] H. Javadi, Y. Lefevre S. Clenet and M. Lajoie Mazenc, Electro-Magneto-Mechanical Characterisations of Vibration of Magnetic Origin of Electrical Machines, IEEE Transaction on Magnetics. Vol. 31, N°. 3, pp. 1892-1895, May 1995.
- [37] M. Besbes, Z. Ren and A. Razek, Finite Element Analysis of Magneto-Mechanical Coupled Phenomena in Magnetostrictive Materials, IEEE Transaction on Magnetics. Vol. 32, N°. 3, pp. 1058-1061, May 1996.
- [38] Z. Ren, B. Ionescu, M. Besbes and A. Razek, Calculation of Mechanical Deformation of Magnetic Materials in Electromagnetic Devices, IEEE Transaction on Magnetics. Vol. 31, N°. 3, pp. 1873-1876, May 1995.

- 
- [39] M. G. Pantelyat and M. Feliachi, Magneto-Thermo-Elastic-Plastic Simulation of Heating of Metals, *The European Physical Journal Applied Physics*, pp. 29-33, April 2002.
- [40] N. Galopin, K. Azoum, M. Besbes, F. Bouillault, L. Daniel, O. Hubert, F. Alves, Caractérisation et modélisation des déformations induites par les forces magnétiques et par la magnétostriction, *Revue Internationale du génie électrique-RS RIGE* vol. 9 N° 4-5 (2006), 499-514.
- [41] A. Belahcen, Vibrations of Rotating Electrical Machines Due to Magnetomechanical Coupling and Magnetostriction, *IEEE Transactions on Magnetics*, 42 (2006), 971-974.
- [42] X. Minniger, N. Galopin, F. Bouillault, and M. Gabsi, Analysis of electromagnetic strains on a structure such as switched reluctance machine, *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* 39 (2007), 191-196.
- [43] J. L. Pons, *Emerging Actuator Technologies ,A Micromechatronic Approach*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2005.
- [44] A. Vorst, *Electromagnétisme, Champ, Forces et Circuits*, Université catholique de Louvain, 1980.
- [45] J. Pedro A. Bastos, N. Sadowski, *Electromagnetic modelling by finite Element Methods*, Universidade Fedral de Santa Catrina, Brazil,2003.
- [46] M. J. Sablik, D. C. Jiles, Coupled Magnetoelastic Theory of Magnetic and Magnetostrictive Hysteresis, *IEEE Transactions on Magnetics* 29 (1993), 2113-2123.
- [47] A. Benabou, Contribution à la caractérisation et à la modélisation de matériaux magnétiques en vue d'une implantation dans un code de calcul de champ, Thèse, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2002.
- [48] Jong-Kwan Jung and Young-Woo Park ,Hysteresis Modeling and Compensation in a Magnetostrictive Actuator, *International Conference on Control, Automation and Systems* 2008 Oct. 14-17, 2008 in COEX, Seoul, Korea
- [49] Xiabo Tan, John S. Baras , Modeling and control of hysteresis in magnetostrictive actuators, *Automatica* 40 (2004) 1469-1480 Elsevier.
- [50] David L. Atherton and Vi Ton , The effects of stress on a ferromagnetic on a minor hysteresis loop, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 26 N° 3, May 1990.
- [51] Geoffrey P. McKnight ,*Magnetostrictive Materials Background*, UCLA – Active Materials Lab 2002.
- [52] P. Garikepati, T. T. Chang, D. C. Jilest ,Theory of Ferromagnetic Hysteresis: Evaluation of Stress from Hysteresis Curves, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 24, N°. 6, November 1988.
- [53] Sina Valadkhan ,*Nano Positioning Control Using Magnetostrictive Actuators*, Mechanical Engineering Waterloo, Ontario, Canada, 2007
- [54] José L. Pons, *Emerging Actuator Technologies ,A Micromechatronic Approach*, edition John Wiley & Sons Ltd, ISBN 0-470-09197-5, Copyright 2005.
- [55] Sivanandan S.N., Deeps S.N.,*Introduction to Genetic Algorithms''*, Springer. (2008).
- [56] Haupt R. L., Haupt S. E., *Practical Genetic Algorithms*, Wiley-Interscience, (2004).
- [57] D. C. Jiles, D. L. Atherton, "Theory of Ferromagnetic Hysteresis," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 61, pp 48-60, 1986.
- [58] Farid Hocini, Hassane Mohellebi, Samy Hassani Ould Ouali, Mouloud Féliachi, Dynamic Magneto-elastic Coupling Model Applied to Thin Ferromagnetic Plate, *Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics, Computer Field Models of Electromagnetic Devices*, pp 836-841, Volume 34, ISSN:1383-7281 2010.
- [59] F. Hocini, H. Mohellebi, R. Chaibi, M. Féliachi, Modèle Inverse de Jiles-Atherton pour les matériaux Magnétostrictifs : Application au Terfenol-D, *European Journal of*

- Electrical Engineering (EJEE), Vol 15 , pp.195-202, doi:10.3166 /ejee.15.195-202, 2012.
- [60] F. Hocini , H. Mohellebi, M. Féliachi “Magneto-elastic Coupling Model for the Study of Vibrations in a Thin Plate” XVII International Conference on Electrical Machines, (ICEM2006), Chania 2-6 septembre 2006, Greece.
- [61] Farid Hocini, Hassane Mohellebi, Samy Hassani Ould Ouali, Mouloud Féliachi, “Dynamic Magneto-élastic Coupling Model Applied to Thin Ferromagnetic Plate” “XIV<sup>ème</sup> International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics Electrical and Electronic Engineering , ISEF2009, ARRAS, France, Septembre 2009.
- [62] Farid Hocini, Mourad Hamimid, Hassane Mohellebi, Mouloud Féliachi , Rachid Chaibi, Parameters Identification For Non Linear Magnetostrictive Materials Using Genetic Algorithms, XXI Symposium on Electromagnetic Phenomena in Nonlinear Circuits (EPNC 2010), ESSEN, Allemagne, Juillet 2010
- [63] F. Hocini, H. Mohellebi, R. Chaibi, M. Féliachi, Modèle Inverse de Jiles-Atherton pour les matériaux Magnétostrictifs : Application au Terfenol-D, MGE2010, Matériaux de Génie Electrique, Montpellier, septembre 2010.
- [64] J.F. Imbert, Analyse des structures par éléments finis , Cepadues 1979.
- [65] J. L. Butler and S. J. Ciosek , Rare earth iron octagonal transducer, Journal of the Acoustical Society of America, Volume 67, Issue 5, pp. 1809-1811, 1980
- [66] B. Bendjima, K.Srairi et M.Feliachi ‘A Coupling Model for Analysing Dynamical Behaviours of an Electromagnetic Forming System’ IEEE transactions on magnetics vol 33 n°2 march 1997.
- [67] Bottauscio O., Roccatò, P.E. , Zucca, M. , Modeling the Dynamic Behavior of Magnetostrictive Actuators , IEEE transactions on magnetics vol 46 ,pp. 3022 - 3028 Juillet 2010.
- [68] Yuemin Wang , Longxiang Zhu, Chuanjun Shen, Fengrui SunA, theoretical computation model of magnetostrictive guided waves NDT output signals in ferromagnetic cylinder , International Conference on Information Science and Technology (ICIST), pp.648 - 650, Hubei, 23-25 Mars 2012.
- [69] Dezza F.C., Cinquemani S. , Mauri M. , Maglio M. , Resta F. A model of magnetostrictive actuators for active vibration control, IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE), pp.847 - 852, Gdansk, 27-30 June 2011.
- [70] H. ElBidweihy, E. Della Torre, Y. Jin, L. H. Bennett and M. Ghahremani, A Preisach-type Magnetostriction Model for Materials Exhibiting Villari Reversal, IEEE Transactions on Magnetism, Vol 48, pp. 3360-3362 , Nov. 2012.
- [71] Sina Valadkhan, Kirsten Morris, Alex Shum, A New Load-Dependent Hysteresis Model for Magnetostrictive Materials, Smart Materials and Structures IOP Science, Vol 19, 10 pp, Oct. 2010.

# **TRAVAUX SCIENTIFIQUES**

## PUBLICATIONS

- [1] **Farid Hocini, Hassane Mohellebi, Samy Hassani Ould Ouali, Mouloud Féliachi**, "Dynamic Magneto-élastic Coupling Model Applied to Thin Ferromagnetic Plate" **Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics, Computer Field Models of Electromagnetic Devices**, pp 836-841, Volume 34, ISSN:1383-7281 2010.
- [2] **S. H. Ould Ouali, H. Mohellebi, F. Hocini, R. Chaibi, M. Féliachi**, " Eddy Currents and Hysteresis Losses Evaluation Using Dynamic Preisach Model," **Journal of Optoelectronic and Advanced Material**, Vol. 10, Issue 5, ISSN:1454-4164, May 2008, pp.1093-1097.
- [3] **F. Hocini, H. Mohellebi, R. Chaibi, M. Féliachi**, Modèle Inverse de Jiles-Atherton pour les matériaux Magnétostrictifs : Application au Terfenol-D, **European Journal of Electrical Engineering (EJEE)**, Vol 15 , pp.195-202, doi:10.3166 /ejee.15.195-202, 2012.
- [4] **Ammar Hamel, Hassane Mohellebi Mouloud Féliachi, Farid Hocini**, "Particle Swarm Optimization for Reconstitution of Two-Dimensional Groove Profiles in Non Destructive Evaluation," "Computational Methods for the Innovative Design of Electrical Devices", Series : **Studies in Computational Intelligence, Volume 327**, Springer, ISSN : 1860-949X, ISBN:978-3-642-16224-4, 2011.

## COMMUNICATIONS NATIONALES ET INTERNATIONALES

- [1] **F.HOCINI , H. MOHELLEBI, M. FELIACHI** "Magneto-elastic Coupling Model for the Study of Vibrations in a Thin Plate" **XVII International Conference on Electrical Machines, (ICEM2006)**, Chania 2-6 septembre 2006, Greece.
- [2] **Farid Hocini, Hassane Mohellebi, Samy Hassani Ould Ouali, Mouloud Féliachi**, "Dynamic Magneto-élastic Coupling Model Applied to Thin Ferromagnetic Plate" **XIV<sup>ème</sup> International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics Electrical and Electronic Engineering , ISEF2009, ARRAS, France, Septembre 2009.**
- [3] **H. Mohellebi, M. Chérifi, S. H. Ould Ouali, G. Yousfi, and F. Hocini**, Etude des Caractéristiques de Dispositifs à Supraconducteurs Destinés à la Lévitiation Magnétique et Effet de la Température, **MGE2010, Matériaux de Génie Electrique, 30 -31 Aout et 1 septembre 2010.**
- [4] **Farid Hocini, Mourad Hamimid, Hassane Mohellebi, Mouloud Féliachi, Rachid Chaibi**, Parameters Identification For Non Linear Magnetostrictive Materials Using Genetic Algorithms, **XXI Symposium on Electromagnetic Phenomena in Nonlinear Circuits (EPNC 2010)**, ESSEN, Allemagne, Juillet 2010
- [5] **F. Hocini, H. Mohellebi, R. Chaibi, M. Féliachi**, Modèle Inverse de Jiles-Atherton pour les matériaux Magnétostrictifs : Application au Terfenol-D, **MGE2010, Matériaux de Génie Electrique, Montpellier, septembre 2010.**
- [6] **M. ZAOUIA, F. HOCINI, M. ABDELLAH, H. MOHELLEBI**, " Electric-Magnetic-Mechanical Coupled Model for Transient Analysis of Three Phases Axisymmetric Electromagnetic Launcher" **Conférence Européenne, NUMELEC 2003, Toulouse 28-30 Octobre 2003, pp. 189-190, France.**

- [7] **F.HOCINI , M. ZAOUIA, , H. MOHELLEBI, M. ABDELLAH** “Analyse Par Eléments finis de la Déformation Plastique Dans un Lanceur Electromagnétique en Régime Transitoire”. **2<sup>ème</sup> Conférence sur le Génie Electrique, CGE’02, Ecole Polytechnique, Alger.**
- [8] **F. HOCINI, M. ABDELLAH, M. ZAOUIA, H. MOHELLEBI,**” Modèle de couplage Electromagnétique-mécanique pour l’Etude en Régime Dynamique d’un Système Electromagnétique” Première Conférence Nationale sur l’Electrotechnique et ses Applications, **CNEA’04, Sidi Bel Abbès, 24-25 Mai 2004, ALGERIE.**
- [9] **F.HOCINI , H. MOHELLEBI, M. ABDELLAH** “ Etude Théorique et Expérimentale des Caractéristiques Dynamiques d’un Lanceur Electromagnétique”  
**4<sup>ème</sup> Conférence sur le Génie Electrique, CGE’04, Ecole Polytechnique, Alger.**
- [10] **M. ZAOUIA, F.HOCINI , H. MOHELLEBI, M. ABDELLAH** ‘Analyse du Couplage Electrique- Magnétique- Mécanique d’un Lanceur Electromagnétique en Régime Transitoire Alimenté par Décharge Capacitive’ **2<sup>ème</sup> conférence sur le génie électrique, CGE’02, Ecole Militaire Polytechnique, Alger.**

## Résumé

Le travail entrepris dans cette thèse est l'étude des phénomènes couplés magnéto-élastiques et vibratoires dans les systèmes électrotechniques, pour l'investigation nous avons utilisé la méthode des éléments finis en hypothèse bidimensionnel. Ce modèle de couplage est appliqué dans le cas des matériaux conducteurs et magnétiques. Le modèle de Jiles-Atherton est associé pour tenir compte des non linéarités et de l'hystérésis magnétique, notamment pour les matériaux à magnétostriction géante ou ce modèle a été étendu par l'ajout d'un champ magnétique qui est due aux interactions magnéto-élastiques des domaines.

mots clés: Couplage magnéto-élastique, éléments finis, Déformation, Magnétostriction, Terfenol-D.

## Abstract

The work undertaken in this thesis is the study of the magneto-elastic and vibratory phenomena coupled in the electrical engineering systems, for the investigation we used the finite element method in two-dimensional hypothesis. This coupling model is applied in the case of conducting and magnetic materials. The Jiles-Atherton model is associated to take account of the non linearity's and from magnetic hysteresis, in particular for materials with giant magnetostriction where this model was extended by the addition of a magnetic field which is due to the magneto-elastic interactions of the domains.

Key words: Magneto-elastic coupling, Finites elements, Deformation, Magnetostriction, Terfenol-D.