



Mmm

mmmmm

Mémoire de

- *Spécialité : Probabilités et Statistiques*
- *Option : Processus Aléatoire et Statistique de la Décision*

Sujet :

MODELES MARKOVIENS A CHANGEMENT DE REGIME

Présenté par :

- *Mme BENSAFI LOUDMILLA*
- *Mme KHEDIM SIHEM*

Encadré par :

- *Pr FELLAG HOCINE*

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier Dieu le tout puissant élément et miséricordieux, pour nous avoir permis d'achever notre travail en ces moment mémorable ou nos études tirent à leur fin.

Nous exprimons en tout premiers lieu notre profonde reconnaissance à notre encadreur **M' FELLAG HOCINE** qui nous a fais l'honneur de diriger et suivre cette étude, ainsi qu'a tout nos enseignants qui étaient la pour nous durant tout notre cursus.

A tous ceux qui nous ont aidé de prés et de loin.

DEDICACES

En témoignage de mon profond attachement je dédie cet ouvrage à ceux qui m'ont donné...

« Amour, Volonté et Espoir »

A mes très chers parents qui m'ont conseillé au long de mes études et leur sacrifices qu'ils ont consenti durant toute ma vie scolaire.

A mes frères LOTFI, RIAD et ma petite sœur RYM que je leur souhaite une bonne réussite pour leurs études.

A mon très cher mari qui m'a soutenu dans des moments difficiles.

Ainsi qu'à tous ceux qui me sont chers et qui m'ont soutenu moralement et qui ont été une aide précieuse dans la réalisation de ce travail.

DEDICACES

En témoignage de mon profond attachement je dédie cet ouvrage à ceux qui m'ont donné...

« Amour, Volonté et Espoir »

A mes très chers parents qui m'ont conseillé au long de mes études et leur sacrifices qu'ils ont consenti durant toute ma vie scolaire.

A mes chers enfants ANIA et ELIANE

A mes frères AMINE et SOFIANE, et mes sœurs NAIMA, SABRINA, NARIMANE, et KAMILIA.

A mon très cher mari qui m'a soutenu dans des moments difficiles.

A mes collègues de travail, ainsi qu'à tous ceux qui me sont chers et qui m'ont soutenu moralement et qui ont été une aide précieuse dans la réalisation de ce travail.

Table des matières

I Introduction générale

1	Introduction	3
2	Quelques notions et définitions	4
2.1	Les processus autorégressifs : AR(P)	4
2.2	Les processus moyenne-mobile : MA(q)	4
2.3	Les modèles ARMA	4
2.4	Les processus ARIMA	5
2.5	Modèles ARCH volatilité stochastique.....	5
2.6	Les processus GARCH	7
2.7	Introduction a la notion de « mémoire longue »	7
2.8	Rappels sur les chaines de Markov	9
2.9	Notion de stationnarité	9
2.10	Densité spectrale	10

II Modèles a changement de régime

1	Introduction.....	13
2	Présentation du modèle	13
3	Procédure de l'estimation du modèle	15

III Le rôle de l'ACF

1	Le lien entre le modèle a changement de régime et le modèle a mémoire longue.....	17
2	Le comportement de l' ACF sous stationnarité locale	17
3	ACF du modèle Markov	19

IV Application

1	Description de données	
1.1	Indices boursiers	21
2	Estimation du modèle et résultats obtenus	26
2.1	Modèles MS-uni varié	26
2.2	Modèles MS-multi varié.....	30
2.3	Test sur les modèles Markov regime swiching	33
2.4	Modèles MS avec d'autre indicateurs	33
3	Conclusion	39
4	Bibliographie	41

Table des matières

Introduction Générale	4
I Eléments de séries chronologiques	6
I.1 Introduction	6
I.2 Quelques notions et définitions	7
I.2.1 Les processus autorégressifs : AR(P)	7
I.2.2 Les processus moyenne-mobile : MA(q)	7
I.2.3 Les modèles ARMA	8
I.2.4 Les processus ARIMA	8
I.2.5 Modèles ARCH volatilité stochastique.....	9
I.2.6 Les processus GARCH	10
I.2.7 Introduction a la notion de « mémoire longue »	11
I.2.8 Rappels sur les chaines de Markov	12
I.2.9 Notion de stationnarité	12
I.2.10 Densité spectrale	14
II Modèles a changement de régime	16
II.1 Introduction.....	16
II.2 Présentation du modèle	16
II.3 Procédure de l'estimation du modèle	18
II.4 Le rôle de l'ACF	20
II.4.1 Le lien entre le modèle a changement de régime et le modèle a mémoire longue.....	20
II.4.2 Le comportement de l' ACF sous stationnarité locale	20
II.4.3 ACF du modèle Markov	22
III Application	24
III.1 Description de données	24
III.2 Estimation du modèle et résultats obtenus	29
III.2.1 Modèles MS-uni varié	29
III.2.2 Modèles MS-multi varié.....	33
III.2.3 Test sur les modèles Markov regime swiching	36
III.2.4 Modèles MS avec d'autre indicateurs	37
III.3 Conclusion	43
Bibliographie	45

Table des matières

Table des matières

MODELES MARKOVIENS A CHANGEMENT DE REGIME

Bensafi Loudmilla *Khedim Sihem*

November 23, 2014

Table des matières

Introduction Générale

Les grandes crises financières marquées par la chute des bourses, le ralentissement des prix immobiliers ou l'effondrement du marché interbancaire sont comme des tremblements de terre dans le secteur financier. Par exemple, la crise de la dette au 20^{ième} siècle en Amérique Latine, la crise du marché des actions et des taux d'intérêt en 1987, la récession américaine de 1991, l'effondrement brutal de la bulle spéculative des valeurs technologiques des années 1998 à 2003, la crise des « subprimes » de 2008 et la crise la plus récente, celle de la dette en Europe. Ces crises ont provoqué en effet une réaction « en chaîne fatale », plus précisément, des faillites de banques financières, suivies des faillites d'entreprises non financières, enfin toutes se terminant par une grave crise économique qui ébranle le monde. Et il semble que les économies peuvent rarement échapper à la récession après qu'elles soient frappées par des chocs financiers. Ainsi généralement, détecter les retournements des activités financières est au centre des préoccupations des chercheurs économistes mais aussi des décideurs politiques. Toutefois, en réalité il n'y a pas une définition précise de la crise financière. A part des notions subjectives, nous avons besoin de formaliser une définition statistique précise des chocs financiers.

Dans cette optique, plusieurs modèles linéaires ont été développés pour essayer d'analyser les séries financières. Pour autant, tel qu'illustré en haut, il existe des événements aléatoires et peu fréquents, par exemple les crises financières, qui auront des impacts dramatiques sur les séries temporelles financières (Jeanne and Masson, 2000; Hamilton, 2005). En observant la conjoncture financière, on remarque que les variables financières se comportent différemment lorsqu'il y a une crise sur le marché financier. Partant de ce constat, afin de bien comprendre les comportements du marché financier, nous avons recours à d'autres approches bien différentes qui seront capables de prendre en compte le caractère non linéaire présent dans les séries temporelles financières.

Chapitre I

Elements de series chronologiques

1 Introduction

Depuis quelques années, la non-linéarité tout comme la non-stationnarité est considérée comme une des propriétés dominantes en économie. En effet, de nombreuses études empiriques ont montré que les modélisations linéaires de type *ARMA* ne permettent pas toujours de caractériser la dynamique d'un processus économique particulier. Les causes de cet échec peuvent être variées, cependant, deux facteurs sont majoritairement évoqués : la présence d'asymétrie dans les données et une instabilité temporelle des relations induites par des changements structurels.

Cette nécessité de prendre en compte la non-linéarité et plus particulièrement les changements de régimes tend à modifier profondément les approches de l'économétrie appliquée. Comme le notent Colletaz & Hurlin (2006b), « cette évolution est sans nul doute comparable à celle qu'a pu connaître la micro-économie lorsque l'on a progressivement abandonné l'univers de référence walrasien, que nous pouvons assimiler à la modélisation linéaire en économétrie, pour s'orienter vers les multiples formes de la concurrence imparfaite, auxquelles nous pouvons assimiler les innombrables modélisations non linéaires ».

De nombreuses pistes ont été explorées pour modéliser la non-linéarité. La voie qui s'est cependant révélée la plus fructueuse est celle des modèles à changements de régimes (*Hamilton* 1989) qui ont l'avantage de fournir une explication économique de la non-linéarité. Comme les modèles autorégressifs à seuil (Lim et Tong, 1980), les modèles à ruptures occasionnelles (Chen et Tiao, 1990 et Engle et Smith, 1999 voir Granger et Hyung, 2000 pour plus de détails sur ces modèles). Ces modèles structurels sont maintenant largement utilisés pour modéliser des séries de taux de change etc. Les séries étudiées sont supposées stationnaires sur tout l'ensemble des observations (globalement stationnaire) et à courte mémoire. En effet, plusieurs études empiriques ont montré l'existence de la mémoire longue sur les séries étudiées. Lobato et Savin (1998) ont montré qu'il existe plusieurs sources de présence de mémoire longue (c'est à dire de la décroissance lente de l'ACF) dans des séries financières présentant des changements structurels. Parmi ces

sources, nous pouvons citer la non stationnarité, l'agrégation des données, la saisonnalité persistente, la déformation en taille, l'inexistence des moments d'ordre supérieur. Par exemple, Breidt and Hsu (2002) ont montré que si les sauts sont rares par rapport à la taille de l'échantillon alors le processus courte mémoire a un comportement proche de celui d'un processus longue mémoire. Il est ainsi possible de détecter une décroissance lente de l'ACF sur une série à caractère courte mémoire. Selon Lamoureux et Lastrapes (1990), les changements (de régime) au niveau de la volatilité non conditionnelle (la non stationnarité) sont une forme de persistance. Récemment, Charfeddine et Guégan (2012) ont étudié le problème de l'estimation du paramètre longue mémoire en considérant des simulations de Monté Carlo lorsque le modèle est mal spécifié. Ils ont montré que l'estimation du paramètre longue mémoire sans tenir compte de changement de régime dans les données peut conduire à une surestimation du vrai paramètre.

2 Quelques notions et définitions

2.1 Les processus autorégressifs : AR(p)

On appelle processus autoregressif d'ordre p, noté AR(p), un processus stationnaire (X_t) vérifiant une relation du type

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}$$

où les ϕ_i sont des réels et les (ε_t) est un bruit blanc de variance σ^2 .

2.2 Les processus moyenne-mobile : MA(q):

On appelle processus moyenne mobile (*'moving average'*) d'ordre q, noté MA(q), un processus stationnaire vérifiant une relation du type

$$X_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}$$

où les θ_i sont des réels et (ε_t) est un bruit blanc de variance σ^2 .

Posons:

$$\Theta(B) = I - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q, \text{ on peut écrire :}$$

$$X_t = \Theta(B) \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

2.3 Les modèles ARMA:

Les modèles ARMA sont un mélange des modèles AR et MA proposés par Yule et Slutsky. Un processus (X_t) est un processus ARMA(p, q) s'il existe un bruit blanc (ε_t) (c'est à dire un processus stationnaire tel que ε_t et ε_{t-k} soient indépendants pour tout k pour tout t) tel que

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \text{ pour tout } t.$$

Sous certaines conditions, ces processus sont stationnaires.

2.4 Les processus ARIMA:

L'estimation des modèles ARIMA suppose que l'on travaille sur une série stationnaire. Ceci signifie que la moyenne de la série est constante dans le temps, ainsi que la variance. La meilleure méthode pour éliminer toute tendance est de différencier, c'est-à-dire de remplacer la série originale par la série des différences adjacentes. Une série temporelle qui a besoin d'être différenciée pour atteindre la stationnarité est considérée comme une version intégrée d'une série stationnaire (d'où le terme Integrated)

Un modèle ARIMA est étiqueté comme modèle ARIMA (p,d,q), dans lequel:
p est le nombre de termes auto-régressifs
d est le nombre de différences
q est le nombre de moyennes mobiles

Les processus FARIMA (ARIMA Fractionnaires) sont une généralisation où l'on considère d a priori quelconque (réel).

Définition: Si on note $\Delta^d X_t$ la différence d'ordre d de X_t c'est à dire $(I - B)^d X_t$, on va s'intéresser aux processus (X_t) satisfaisant

$$\phi(B)\Delta^d X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

où les racines de ϕ et Θ sont de module supérieur à 1 et ε_t est un bruit blanc de variance σ^2 .
On peut écrire aussi :

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t \text{ avec } \Phi(B) = \phi(B)(I - B)^d$$

Cette relation est analogue à la définition d'un ARMA(p + d, q) à la différence importante près que le polynôme Φ admet 1 comme racine d'ordre d .

2.5 Modèles ARCH volatilité stochastique:

Dans les années 80, des développements ont été apportés dans l'étude de la **non-linéarité** de certaines séries, et sur leur modélisation. En 1982, Engle a introduit la classe des modèles ARCH (autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques). Ces modèles ont été introduits pour palier à une observation empirique qui n'était pas prise en compte par les modèles : la volatilité conditionnelle d'une série (Y_t) n'a aucune raison d'être constante. Dans les modèles AR(1), la variance conditionnelle de X_t sachant X_{t-1} est constante :

$$V(X_t/X_{t-1}) = \sigma^2 \text{ ou } V(\varepsilon_t) = \sigma^2 \quad (\text{notion d'homoscedasticité}).$$

Engle a cherché un modèle dans lequel la variance conditionnelle de X_t sachant X_{t-1} dépendrait de X_{t-1} et plus particulièrement

$$V(X_t/X_{t-1}) = [\alpha + \beta X_{t-1}^2] \sigma^2.$$

Pour cela, il a considéré les modèles de la forme :

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}, \text{ où } h_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2$$

Cette classe de modèle, appelée ARCH(1) a été généralisée sous la forme ARCH(p),

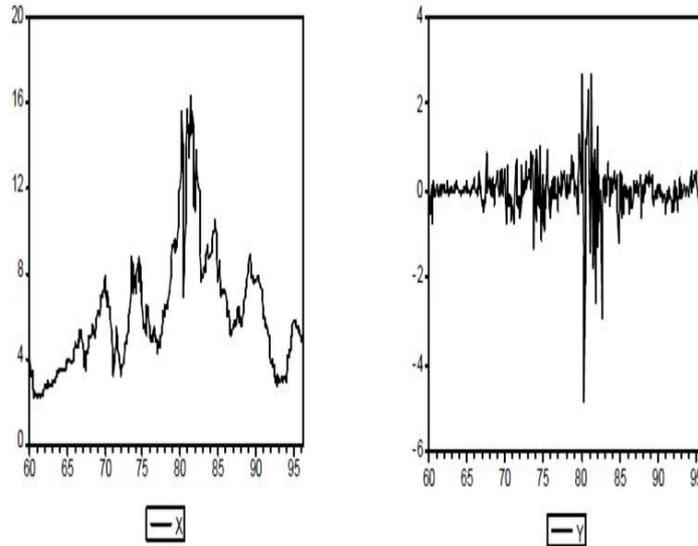
$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}, \text{ où } h_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{t-p}^2$$

Cette forme pour h_t a permis l'analogie entre les modèles AR et les modèles ARCH. De plus, cette classe de modèles ARCH a été généralisée de la même façon que les ARMA généralisent les AR, en considérant des fonctions h_t de la forme:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j}$$

Exemple: Le graphique ci-dessous à gauche correspond à des taux d'intérêt (X_t), et à droite, à la variation de ces taux d'intérêt $Y_t = X_t - X_{t-1}$

Les longues périodes de fortes volatilité (*volatility clustering*) sont une des caractéristiques des modèles ARCH, et c'est, entre autres, pour cela que les modèles ARCH ou GARCH sont énormément utilisés dans les modèles financiers.



2.6 Les processus GARCH

Définition: Un processus $GARCH(p, q)$ [Generalized ARCH] est défini par

$$X_t = \varepsilon_t$$

avec

$$\varepsilon_t / X_{t-1}, X_{t-2}, \dots \sim N(0, \sigma_t^2)$$

et

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2$$

avec

$$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0 \text{ pour } i=1, \dots, p, \beta_j \geq 0 \text{ pour } j=0, \dots, q$$

Un processus $GARCH$ peut être vu comme un processus $ARCH$ d'ordre infini. Ainsi, la généralisation des processus $ARCH$ aux processus $GARCH$ est similaire à la généralisation des processus autorégressifs aux processus $ARMA$. Un processus $GARCH$ peut ainsi représenter formellement de façon plus parcimonieuse un processus $ARCH$ comprenant un nombre élevé de paramètres.

2.7 Introduction à la notion de "mémoire longue":

Les processus ARMA sont souvent appelé "processus à mémoire courte" compte tenu de la décroissance rapide de l'autocorrélation entre X_t et X_{t-h} quand $h \rightarrow \infty$ (décroissance exponentielle de $\rho(h)$).

En fait, il est possible de montrer que, pour un processus ARMA stationnaire, sa fonction d'autocorrélation est bornée,

$$|\rho(h)| \leq Cr^h \text{ pour } h=1,2,\dots$$

Pour une certaine constante $C > 0$ et $0 < r < 1$

Définition: Un processus *stationnaire* sera dit *à mémoire longue* si les autocorrélations satisfont

$$\rho(h) \sim Ch^{2d-1} \text{ quand } h \rightarrow \infty$$

où C est une constante non nulle et $d < 1/2$.

Il est possible de faire une distinction suivant la valeur de d :

- si $d < 0$: mémoire intermédiaire, la série $\rho(h)$ est absolument convergente $\sum |\rho(h)| < \infty$
- si $0 < d < 1/2$: mémoire longue, la série $\rho(h)$ n'est plus absolument convergente $\sum |\rho(h)| = \infty$

On l'écrit également :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(h)}{Ch^{2d-1}} = 1$$

De façon heuristique, une série à mémoire longue est caractérisée par une fonction d'autocorrélation qui décroît lentement lors que le retard h augmente. En terme de fréquence et de densité spectrale, le spectre de telles séries ont un pôle à la fréquence 0. Cette propriété est très fréquente sur les données économiques, à tel point que Granger avait parlé en 1966 de "forme spectrale d'une variable économique", comme le note Valérie Mignon dans "Méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst". Historiquement, le premier processus à mémoire longue est le mouvement brownien fractionnaire, développé par Mandelbrot et Van Ness en 1968. Ce processus est caractérisé par un paramètre appelé exposant de Hurst, noté H , permettant de classer les séries temporelles en fonction de leur structure de dépendance : mémoire courte ou nulle, mémoire longue et positive (appelé phénomène de persistance), et antipersistence. Les séries empiriques étant des processus en temps discret, Mandelbrot et Wallis ont défini, en 1969, l'analogue du mouvement brownien fractionnaire en temps discret, appelé bruit gaussien fractionnaire. Une seconde classe de modèles, liés au bruit gaussien fractionnaire, est constitué des processus ARFIMA (AutoRegressive Fractionnal)

Integrated Moving Average) parfois également appelés FARIMA: Ceux-ci constituent une généralisation des processus ARIMA(p; d; q) standards, dans lesquels le paramètre de différenciation d était un entier. Le paramètre d explique alors le comportement de long terme de la série, le comportement de court terme étant expliqué par les composantes autorégressives et moyennemobiles. Si ces processus sont très présents en économie (comme le notait Granger), ils sont également présents en finance. En 1991, Lo a ainsi étudié les implications des processus à mémoire longue dans la théorie financière, et Mignon a étudié en 1995 l'impact de ce comportement sur l'efficacité des marchés. En effet, on dit que les marchés sont efficaces (efficace d'un point de vue informationnel) si les cours des actifs cotés reflètent toute l'information disponible : il est alors impossible de prévoir les rentabilités futures à partir des rentabilités passées puisque toute l'information (anticipée) est incorporée dans les prix. Mais si les rentabilités ont une structure de dépendance à long terme, alors les observations présentent des autocorrélations significatives. La connaissance du passé fournit alors de l'information pour prévoir les valeurs futures. En fait, Samuelson a montré en 1965 que si un marché est efficace, le prix observé sur le marché correspond à la valeur fondamentale (c'est à dire la somme actualisée des dividendes futurs anticipés par les agents), et la mémoire longue impliquerait un écart durable entre le cours et la valeur fondamentale.

2.8 Rappels sur les Chaînes de Markov:

Définition: Le processus X_t $t \in \mathbb{N}$ est une chaîne de Markov d'ordre p si et seulement si, pour tout t

$$\mathcal{L}(X_t/X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \dots) = \mathcal{L}(X_t/X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$$

2.9 Notions de 'stationnarité' :

Définition: Un processus (X_t) est stationnaire au second ordre si

(i) pour tout t , $\mathbb{E}(X_t^2) < +\infty$

(ii) pour tout t , $\mathbb{E}(X_t) = \mu$, constante indépendante de t ,

(iii) pour tout t et pour tout h , $\text{cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)] = \gamma(h)$, indépendante de t , où $\gamma(h)$ est une fonction d'autocovariance.

Remarque: Une des conséquences est que variance $V(X_t)$ est constante, indépendante de t , $V(X_t) = \gamma(0)$

proposition: Si $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus stationnaire, et si $(a_i, i \in \mathbb{Z})$ est une suite de réels absolument convergente,
 i.e

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_i| < +\infty$$

alors le processus (Y_t) définie par

$$Y_t = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X_{t-i}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z}$$

est un processus stationnaire.

corollaire: En particulier, si $(a_i, i \in \mathbb{Z})$ est une suite de réels finie, la suite Y_t est stationnaire. Par exemple, si $a_0 = a_1 = 1/2$, et $a_i = 0$ pour $i \notin \{0, 1\}$:

$$Y_t = \frac{1}{2}(X_t + X_{t-1}),$$

est stationnaire dès lors que (X_t) est stationnaire. De même pour $Y_t = X_t - X_{t-1}$

Définition: On appelle *bruit blanc* (parfois appelé *bruit blanc faible*) un processus (ε_t) stationnaire dont les autocovariances sont nulles: $\gamma(h) = 0$ pour $h \neq 0$

Fonction d'autocovariance: Pour une série stationnaire (X_t) , on définit la fonction d'autocovariance, pour tout t par

$$h \rightarrow \gamma_x(h) = \text{cov}(X_t, X_{t-h}) = \mathbb{E}(X_t X_{t-h}) - \mathbb{E}(X_t) \cdot \mathbb{E}(X_{t-h})$$

Fonction d'autocorrelation: Pour une série stationnaire (X_t) , on définit la fonction d'autocorrelation, pour tout t par

$$h \rightarrow \rho_x(h) = \text{corr}(X_t, X_{t-h}) = \frac{\text{cov}(X_t, X_{t-h})}{\sqrt{V(X_t)} \sqrt{V(X_{t-h})}} = \frac{\gamma_x(h)}{\gamma_x(0)}$$

Cette fonction $\rho_x(\cdot)$ est à valeurs dans $[-1, 1]$, et $\rho_x(0) = 1$

Définition: Un processus (ε_t) sera appelé bruit blanc (faible) s'il est stationnaire, centré et non-autocorrélé:

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0, V(\varepsilon_t) = \sigma^2 \text{ et } \rho_\varepsilon(h) = 0 \text{ pour } h \neq 0$$

On parlera de bruit blanc fort s'il est indépendant et identiquement distribué (i.i.d.) : la notion d'indépendance est plus forte que la nullité des autocorrélations, et le fait que le processus soit identiquement distribué est plus fort que la stabilité des deux premiers moments

Exemple: Processus MA(1) : $X_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$ où (ε_t) est un bruit blanc centré de variance σ^2 ,

$$\begin{cases} \gamma(0) = [1 + \theta^2] \sigma^2 \\ \gamma(1) = \theta \sigma^2 \\ \gamma(h) = 0 \end{cases} \quad \text{si } |h| \geq 2 \quad \text{soit } \rho(1) = \frac{\theta}{1 + \theta^2} \text{ et } \rho(h) = 0 \text{ pour } |h| \geq 2$$

2.10 Densité spectrale:

L'idée ici est que les coefficients d'autocovariance d'une série stationnaire correspondent aux coefficients de Fourier d'une mesure positive, appelée mesure spectrale du processus. Il est possible de montrer que cette mesure spectrale admet une densité, dite spectrale par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[-\pi, \pi]$, que nous noterons f_x .

Dans le cas où la série des autocovariance est absolument convergente, la densité spectrale est alors définie comme la transformée de Fourier des coefficients d'autocovariance (dans le cas où la somme des $|\gamma_x(h)|$ tend vers l'infini, la somme est à prendre au sens de \mathbb{L}^2): comme l'ont montré Cramér, Kolmogorov, ou encore Wiener, on a les résultats suivants:

(i) la suite des fonctions d'autocovariance $\gamma_x(h)$ d'un processus stationnaire peut être écrit sous la forme

$$\gamma_x(h) = \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(iwh) dF_x(w),$$

où $F_x(w)/\gamma_x(0)$ est une fonction de répartition,

(ii) tout processus stationnaire peut se mettre sous la forme $X_t = \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(iwt) dz(w)$ où $z(w)$ est une fonction aléatoire, complexe, à accroissements non corrélés. Cette représentation est appelée **représentation de Cramér**

définition: Soit (X_t) un processus *stationnaire* de fonction d'autocovariance $\gamma_X(\cdot)$, la **densité spectrale** de (X_t) s'écrit

$$f_X(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_X(h) \exp(iwh).$$

Propriété: Réciproquement, si $f_X(\cdot)$ est la *densité spectrale* de (X_t) alors

$$\gamma_X(h) = \int_{-\pi}^{+\pi} f_X(w) \exp(iwt) dw.$$

Exemple: un *bruit blanc* (ε_t) est caractérisé par

$$\begin{cases} \gamma_\varepsilon(0) = V(\varepsilon_t) = \sigma^2 \\ \gamma_\varepsilon(h) = 0, & \text{pour } h \neq 0, \end{cases}$$

Alors sa densité spectrale est donnée par

$$f_\varepsilon(w) = \frac{\sigma^2}{2\pi} = (\text{constante}).$$

Propriété: Si la densité spectrale d'une série (Z_t) est constante, alors (Z_t) est un bruit blanc.

Preuve: En effet

$$\gamma_Z(h) = \int_{-\pi}^{+\pi} f_z(w) \exp(iwh) dw = K \int_{-\pi}^{+\pi} \underbrace{\exp(iwh) dw}_{(= 0 \text{ sauf si } h = 0)}$$

Cette nullité de la fonction d'autocorrélation est donc une caractéristique du *bruit blanc*

Proposition: Si (X_t) est une *moyenne mobile*,

$$X_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varepsilon_{t-k}, \quad \text{où } (\varepsilon_t) \text{ est un bruit blanc } BB(0, \sigma^2)$$

avec $\sum |a_j| < +\infty$.

Si on considère $Y_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta_j X_{t-j}$ alors, on a la relation suivante

$$f_Y(w) = f_X(w) \cdot \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta_j e^{iwj} \right|^2$$

Exemple: $Y_t = X_t - \phi X_{t-1}$ où $|\phi| < 1$, alors $f_Y(w) = f_X(w) |1 - \phi e^{iw}|^2$.

Chapitre II

Modèles à changement de régime

1 Introduction

Les modèles à changements de régime markoviens ont connu un fort développement depuis leur découverte par James Hamilton à la fin des années 1980. A cette époque, les macro-économètres disposaient de peu d'outils de modélisation des séries temporelles hors des modèles ARIMA. Hamilton (1989), reprenant et améliorant des travaux de Quandt, propose un modèle non-linéaire mais stationnaire du PNB américain, développe la théorie et l'estimation par maximum de vraisemblance. Il expose aussi l'impact de ce nouveau modèle sur la croissance de long-terme, et l'intérêt pour la datation du cycle économique.

Depuis ces travaux, ces modèles ont été employés à des multiples occasions, dans les domaines macro économiques et financiers, et de nombreuses extensions ont été envisagées ; la synthèse avec les modèles facteurs communs, par exemple, est fructueuse. Actuellement, ces modèles sont utilisés par tous les organismes de conjoncture comme un outil indispensable à l'analyse du cycle économique. C'est une technique complémentaires à d'autres, telle que la décomposition entre tendance et cycle.

Les modèles a changement de régimes markoviens ne fournissent que peu d'aide pour décrire le futur à court terme.

2 Présentation du modèle:

Nous considérons une variable r_t qui peut connaître des changements dramatiques au cours du temps Alors sa performance peut être décrite comme:

$$r_t = \beta_0 + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_0^2) \quad (1)$$

Pour $t=1, 2, \dots, t_0$

Supposons ensuite qu'au temps t_0 , le niveau de la série r_t a connu un changement significatif. Par conséquent, après ce changement nous avons une nouvelle formule de la variable r_t qui s'écrira comme :

$$r_t = \beta_1 + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_1^2) \quad (2)$$

Pour $t=t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$,

On écrit aussi

$$\begin{cases} r_t = \beta_0 + \varepsilon_t & \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_0^2) \\ r_t = \beta_1 + \varepsilon_t & \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_1^2) \end{cases} \quad (*)$$

Dans les équations (1) et (2), β_0 et β_1 sont des constantes, et ε_t est un terme d'erreur qui suit une loi normale avec une moyenne nulle et une variance égale à σ_0^2 (avant le changement) ou σ_1^2 (après le changement). Après le changement des états au temps t_0 la valeur de l'interception a changé de β_0 et β_1 pour le nouvel état du marché.

Toutefois, dans ce cas-ci, puisque la date de changement t_0 est connue, la transition des états constitue ainsi un événement déterministe. En réalité, il est impossible de prédire quand il y aura une transition des états du marché ou de prédire l'ampleur de ce changement. Par conséquent, il doit y exister un mécanisme qui peut produire une transition des états de façon endogène. Devant ce constat, nous pouvons combiner les équations (1) et (2) pour obtenir une formule générale du modèle :

$$r_t = \beta_{S_t} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{S_t}^2) \quad (3)$$

Où S_t est une variable aléatoire. En cas d'un changement structurel à la date t_0 , on suppose que :

$S_t = 0$ pour $t = 1, 2, \dots, t_0$

$S_t = 1$ pour $t = t_0 + 1, t_0 + 2$

Selon l'équation (3), β_{S_t} et $\sigma_{S_t}^2$ tous dépendent de l'état du modèle au temps t , il reste ainsi à définir une façon de détection de ces états. Pour ce faire, il convient de donner d'abord la définition d'une chaîne de Markov. En effet, un processus de Markov consiste à un processus stochastique qui possède la propriété :

l'information utile pour la prédiction du futur ne dépend que de l'information de l'état d'aujourd'hui.

Alors, dans les modèles MS, Hamilton a supposé que S_t est gouverné par un processus markovien de premier ordre qui possède les probabilités de transition suivante:

$$P[S_t = j / S_{t-1} = i] = p_{ij} \quad (4)$$

Autrement dit, une chaîne de Markov se caractérise par le fait que son évolution demain (passage de S_{t-1} à S_t) ne dépend que de l'état d'aujourd'hui (S_{t-1}) et pas du passé.

Ici, p_{ij} désigne la probabilité de passer à l'état j sachant qu'on se trouve à l'état i .

Supposons qu'on ne peut pas observer S_t directement, on ne peut le déduire que par les comportements observés de r_t . Par conséquent, les paramètres à estimer dans ce modèle consistent à la variance de l'innovation $\sigma_{S_t}^2$, aux deux interceptions : β_0 et β_1 , et aux deux probabilités de transition des états : p_{00} et p_{11} . En pratique, nous savons que l'impact d'un changement dramatique ne peut pas être permanent. Ainsi, on s'attend à ce que $p_{11} < 1$.

3 Procédure de l'estimation du modèle

Les paramètres intéressés dans les équations (3) et (4) sont estimés par la méthode de maximisation de vraisemblance des paramètres de notre modèle. Supposons d'abord que l'inférence de la valeur de S_t pourrait prendre une forme de probabilité suivante:

$$\xi_{jt} = P[S_t = j / \Omega_t ; \theta] \quad (5)$$

avec $j=0,1$, où $\Omega_t = \{ r_t, r_{t-1}, \dots, r_1, r_0 \}$ représente les observations obtenues à temps t , et $\theta = (\sigma, \beta_0, \beta_1, p_{00}, p_{11})$ désigne le vecteur de tous les paramètres.

En effet, afin d'obtenir l'équation (5), on a besoin de calculer le terme suivant :

$$\xi_{i,t-1} = P[S_{t-1} = i / \Omega_{t-1} ; \theta] \quad (6)$$

Une fois que r_t est observé à la fin du temps t , on peut obtenir l'équation (5).

En effet, l'inférence de la variable non observée (S_t) est réalisée par un algorithme itératif (Hamilton, 1989, 1994).

Toutefois, nous avons besoin d'une valeur initiale de ξ_{i0} pour commencer le processus de l'itération. Hamilton (1994) montre qu'on peut utiliser les probabilités non conditionnelles :

$$\xi_{i0} = P[S_0 = i] = \frac{1-p_{jj}}{2-p_{ii}-p_{jj}}$$

Ensuite, afin d'effectuer cette itération, on a besoin également de la densité conditionnelle de r_t :

$$\eta_{jt} = f[r_t / S_t = j, \Omega_{t-1} ; \theta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left[- \frac{(r_t - \beta_j)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (7)$$

avec $j = 0, 1$

Etant donnée l'équation (6), on peut calculer la densité conditionnelle de la t -ème observation par la formule suivante :

$$f[r_t / \Omega_{t-1} ; \theta] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_{ij} \xi_{i,t-1} \eta_{jt} \quad (8)$$

$$\text{alors,} \quad \xi_{jt} = \frac{\sum_{j=1}^2 p_{ij} \xi_{i,t-1} \eta_{jt}}{f[r_t / \Omega_{t-1}; \theta]} \quad (9)$$

Après l'exécution de cette itération, on obtient enfin la fonction de vraisemblance des données observées

$$\log f (r_1, r_2, \dots, r_T / r_0; \theta) = \sum_{t=1}^T \log f (r_t / \Omega_{t-1} ; \theta) \quad (10)$$

A ce stade, étant donné la fonction de vraisemblance, on cherche à déterminer le paramètre θ qui peut maximiser la log-vraisemblance.

4 Le rôle de l' ACF

4.1 Le lien entre le modèle à changement de régime et le modèle à mémoire longue

Aftalion et Poncet (2004) ont étudié l'existence d'un lien possible entre la volatilité des marchés et le comportement de long terme. Ils ont analysé un grand nombre de documents où, sur différents exemples de données économiques et financières, on montre les changements structurels sur une longue période à partir de chocs économiques, sociaux, politiques, etc. (paragraphe III de Aftalion et Poncet, 2004).

L'approche privilégiée ici est totalement différente de celle de ces deux auteurs. En effet, nous nous questionnons sur les dommages provoqués, en termes de prévisions ou de risques, lorsqu'une confusion dans la modélisation apparaît si volatilité et persistance coexistent. Il s'agit pour nous de savoir si l'on peut modéliser ces deux comportements au sein d'un même modèle. Les précédents auteurs ont d'ailleurs remarqué, qu'à partir d'une modélisation *GARCH*, les changements de régime de la volatilité provoquaient une grande variabilité des paramètres du modèle en question. On pourrait être tenté de prendre en compte cette instabilité par les modèles du type $X(t) = \mu(t) + \varepsilon(t)$ où $\mu(t)$ est une moyenne et $\varepsilon(t)$ un bruit blanc, mais ceux-ci ne résolvent pas, de part leur structure, le problème de la persistance. Plusieurs approches sont alors possibles. C'est à partir d'études empiriques que la forte dépendance des rendements a été mise en évidence, en particulier à partir de transformations telles que la valeur absolue ou le carré de ces rendements, transformations qui ne supprimaient pas les caractéristiques propres de volatilité ("clustering", distributions à queue lente, etc.) Les modèles proposés dans la littérature sont des modèles de type *ARCH* avec une volatilité conditionnelle qui présente un comportement de longue mémoire.

4.2 Le comportement de l' ACF sous stationnarité locale

En théorie la fonction d'autocorrélation de tous les modèles à changement de régime considérés ci-dessus, sous la condition de stationnarité de second ordre, décroît exponentiellement vers zéro et leurs densités spectrales sont bornées, mais en pratique ce n'est pas toujours le cas, voir Guégan et Riou-blanc (2005). Que se passe-t-il pour le calcul de l'ACF, si nous sommes en présence d'une quelconque non stationnarité ?

On suppose que l'on observe un échantillon Y_1, \dots, Y_n constitué de sous échantillons différents de modèles stationnaires distincts.

Soit p_j , $j=1, \dots, r$ des nombres positifs tels que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1 \text{ et } p_0 = 0.$$

Posons $q_j = p_1 + p_2 + \dots + p_j$, $j=1, \dots, r$, $q_j \in [0, 1]$, $[nq_j]$ partie entière de $[nq_j]$.

L'échantillon Y_1, \dots, Y_n peut être écrit comme suit:

$$Y_1^{(1)}, \dots, Y_{[nq_1]}^{(1)}, \dots, Y_{[nq_{r-1}]+1}^{(r)}, \dots, Y_n^{(r)}$$

où les r sous échantillons proviennent des modèles ergodiques distincts stationnaires avec un moment d'ordre deux fini. L'échantillon résultant est alors non stationnaire.

Soit $\gamma_{n,Y}$ la fonction d'autocovariance de l'échantillon d'un processus (Y_t) on a:

$$\tilde{\gamma}_{n,Y}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (Y_t - \bar{Y}_n) (Y_{t+h} - \bar{Y}_n), \quad h \in \mathbb{N} \quad (11)$$

où \bar{Y}_n est la moyenne de l'échantillon.

Et par le théorème ergodique on a, pour $h \geq 0$ quand $n \rightarrow +\infty$

$$\tilde{\gamma}_{n,Y}(h) \rightarrow \sum_{j=1}^r p_j \gamma_{Y^{(j)}}(h) + \sum_{1 \leq i < j \leq r} p_i p_j (EY^{(i)} - EY^{(j)})^2 \quad p.s \quad (12)$$

D'après (12), si on considère une série de données X_1, \dots, X_n , constituée de r sous échantillons disjoints présentant chacun une courte mémoire et suivant un bruit blanc, par exemple r sous échantillons de $GARCH(1, 1)$, donc on a $E(X_k) = 0$ pour tout $k = 1, \dots, r$. Par conséquent en posant $Y = X$, on retrouve

$$\tilde{\gamma}_{n,Y}(h) \rightarrow \sum_{j=1}^r p_j \gamma_{Y^{(k)}}(h) = 0 \text{ quand } h \rightarrow \infty \quad (13)$$

car $\gamma_{Y^{(k)}}(h) \rightarrow 0$ exponentiellement quand $h \rightarrow +\infty$. Ceci est dû à l'hypothèse de courte mémoire des sous échantillons.

On a $E(|X_k|) \neq 0$ et $E(X_k^2) \neq 0$ pour $k = 1, 2, \dots, r$, en posant $Y = |X|$ ou $Y = X^2$,

Donc

$$\tilde{\gamma}_{n,Y}(h) \rightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq r} p_i p_j (EY^{(i)} - EY^{(j)})^2 \text{ quand } h \rightarrow +\infty \quad (14)$$

Ainsi, on voit que l'ACF $\tilde{\gamma}_{n,Y}(h)$ décroît exponentiellement vers 0 pour les petits retards et tend vers une constante positive pour les grands retards. D'où la justification des conclusions de Ding et al. (1993) d'absence de longue mémoire dans les rendements et de présence de longue mémoire dans les rendements absolus et les rendements carrés du S&P 500.

Dans la suite nous allons montrer par des méthodes pratiques que, le comportement de l'ACF des modèles à changement de régime peut être expliqué par la relation (12). Pour voir cette situation de près, nous allons simuler des processus à l'aide des modèles à changement de régime cités ci-dessus. On suppose dans tous les cas que le nombre de régime est égal à 2 et la taille de l'échantillon $T = 1000$.

4.3 ACF du modèle Markov :

Suivant (*), le processus $(r_t)_t$ change du niveau β_0 vers le niveau β_1 suivant la chaîne de Markov. Nous exposons à la Figure 1 le comportement de l'ACF de quelques séries issues du modèle (*).

Markov switching modèle est connu comme étant un modèle de courte mémoire, Tong (1990). Les Figures ci-dessus, à gauche, nous montrent par contre une décroissance lente de l'ACF. Cette décroissance lente d'après le changement au niveau de la moyenne du processus peut être expliquée par le second terme de la relation (12). Pour la Figure de bas sur la colonne droite, nous observons un comportement semblable à celui d'un processus courte mémoire, ARMA par exemple.

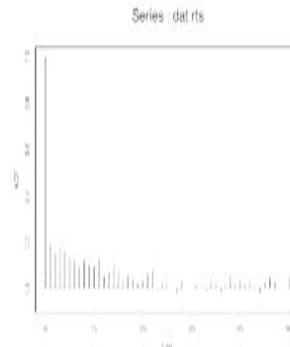
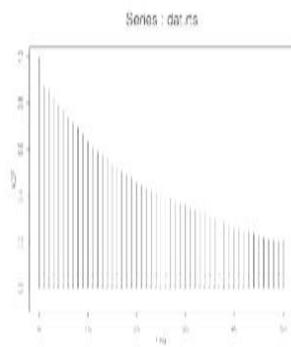
Ces résultats issues de la simulation nous indiquent que le comportement de l'ACF pour le modèle de Marov dépend du couple (p_{00}, p_{11}) mais aussi de la différence $(\beta_1 - \beta_0)$.

Quand $p_{00} = p_{11}$ et s'approche de 1 l'ACF est similaire à celle d'un processus longue mémoire.

Quand $p_{00} \neq p_{11}$ l'ACF se comporte comme celle d'un processus courte mémoire si $|\beta_1 - \beta_0|$ est petit, elle ressemble à celle d'un processus longue mémoire si $|\beta_1 - \beta_0|$ est grand.

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = 3 \\ \beta_1 = -3 \end{array} \right. \quad p_{11} = p_{22} = 0.98$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = 0.5 \\ \beta_1 = -0.5 \end{array} \right. \quad p_{11} = p_{22} = 0.98$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = 3 \\ \beta_1 = -3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} p_{11} = 0.95 \\ p_{22} = 0.99 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = 0.5 \\ \beta_1 = -0.5 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} p_{11} = 0.95 \\ p_{22} = 0.99 \end{array}$$

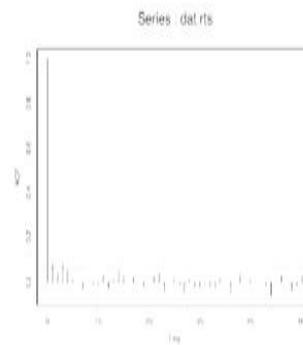
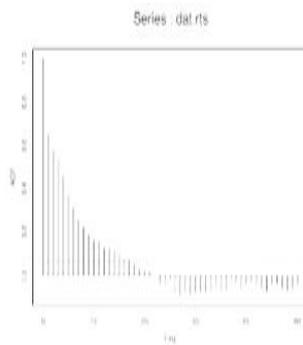


Figure 1: Différents comportements observés des fonctions d'autocorrélation des séries simulées issues du modèle (*)

Chapitre III

Application

1 Description des données :

Par manque de données, on a repris l'application de rapport de recherche sur «Application des Modèles à Changement de régime Markovien» (JIA,JI).

L'objectif de notre recherche consiste à vérifier d'abord l'existence des deux régimes sur le marché financier, et à identifier et détecter ensuite les points de retournements des activités financières sur le marché en utilisant les modèles Markoviens à changements de régimes. Pour atteindre ces objectifs, nous avons utilisé des données financières ainsi que des données macroéconomiques. Dans cette section, nous tentons de présenter toutes les données utilisées dans notre étude.

Indices boursiers

La principale variable qui nous intéresse dans cette recherche est l'indice boursier. Deux indices ont été choisis pour représenter les deux marchés différents de l'Amérique du Nord : soit l'indice boursier américain du Standard & Poor's 500 pour le marché américain, et l'indice boursier canadien du S&P /TSX pour le marché canadien. Ces deux indices permettent de cerner de plus près la performance de grandes entreprises sur le marché financier de l'Amérique du Nord. Les données des deux indices qui ont servi de base à l'identification des crises sont des données boursières mensuelles. La période totale de l'étude s'étale entre janvier 1980 et juin 2011

Les deux graphiques suivants (2 et 3) illustrent les évolutions des prix de l'indice S&P 500 et de l'indice S&P /TSX respectivement. Dans les graphiques, on a montré également leur volatilité historique, qui peut nous permettre d'apprécier l'amplitude des mouvements réalisés sur ces deux indices boursiers.

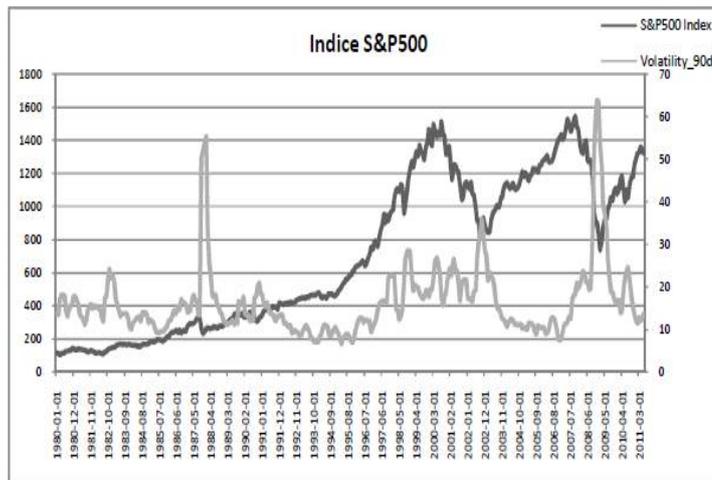


Figure 2: Evolution des prix de l'indice S&P 500

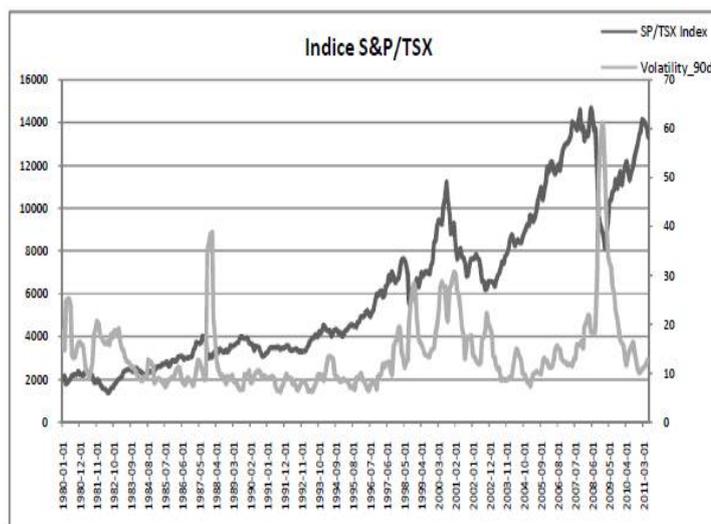


Figure 3: Evolution des prix de l'indice S&P 500/TSX

Tel qu'illustré les deux graphiques, les séries de prix des indices ont des fluctuations qui ne sont pas régulières. En effet, les séries des prix sont non-stationnaires et sans tendance déterministe, plus précisément, elles comportent une tendance stochastique (racine unitaire). Devant ce constat, afin d'obtenir un processus stationnaire, nous avons calculé les rendements des deux indices par la formule suivante :

$$\text{Log de rendement: } r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$$

Les statistiques descriptives des données peuvent se résumer dans le tableau suivant:

il y a au total 378 observations dans notre échantillon.

Log de Rendement	S&P500	S&P/TSX
Moyenne	0.00663	0.00527
Erreur type	0.00233	0.00247
Médiane	0.01081	0.00946
Ecart type	0.04522	0.04794
Variance	0.00204	0.00230
Kurtosis	3.26312	4.75437
Skewness	-0.94719	-1.24334
Minimum	-0.24543	-0.25657
Maximum	0.12378	0.13336
Somme	2.50430	1.99275
Observations	378	378

Figure 4: Statistiques Descriptives

D'après les statistiques descriptives, on remarque que, par rapport à la loi normale, le « kurtosis » des données est plus grand que 3 (excès d'aplatissement) ; et la valeur du « skewness » est négatif. En théorie des probabilités et en statistiques, un excès d'aplatissement correspond à une distribution pointue. Alors que le « skewness », qui mesure l'asymétrie d'une distribution, est négatif si la queue de gauche est plus longue, c'est-à-dire dans notre échantillon, un grand nombre d'observations (log-rendement) ont une valeur négative. Ainsi, la valeur négative du skewness indique que la distribution du rendement des indices est asymétrique (comme montré dans le graphique 5). cette asymétrie montre qu'il existe une différence significative entre deux états du marché : la phase « normale » et la phase de crise. Par conséquent, il est important de tenir compte de l'effet non-linéaire des séries qui est causé par cette différence entre les deux phases. Devant ces constats, nous avons recours à un modèle non-linéaire qui peut faire la distinction entre les deux phases différentes : soit les modèles Markoviens à changements de régimes de Hamilton (1989). Selon la spécification des modèles, l'asymétrie détectée peut être décomposée en un régime linéaire qui correspond à la phase « normale » et un autre régime qui correspond à la phase « crise ».

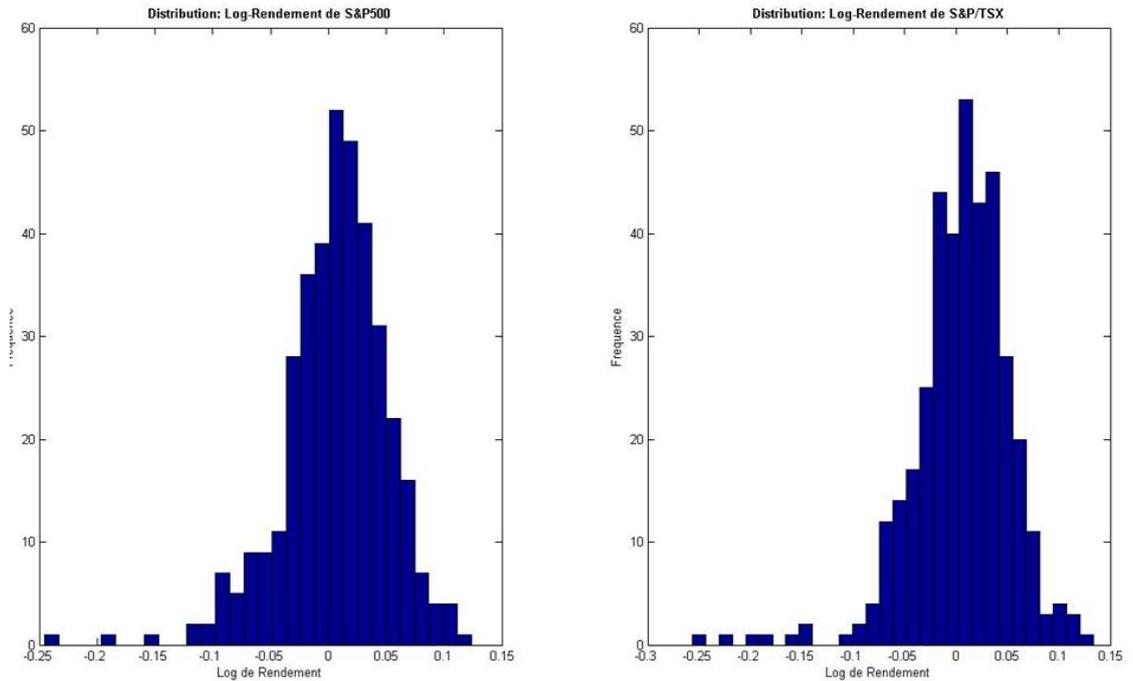


Figure 5: Asymétrie de la distribution des rendements

2 Estimation du modèle et résultats obtenus:

La volatilité historique du prix des indices peut être considérée comme un indicateur du stress financier ou du risque systémique. Les figures 2 et 3 montrés plus haut ont mis en évidence l'existence probable de différents régimes dans la volatilité historique. On remarque que le marché financier a connu souvent une forte volatilité dans un contexte de sortie de crise. Toutefois, à part de ces notions subjectives, nous avons besoin encore d'une identification statistique et plus formelle de la crise financière. Alors, comment détecter les points importants de retournement des perturbations financières sur le marché en utilisant les modèles à changements de régimes markoviens ? Dans cette section, nous tentons en premier lieu de modéliser les évolutions asymétriques des séries de rendements entre la phase « normale » et la phase de « crise » présentées dans les sections précédentes. On s'intéresse d'abord aux résultats sortis par le modèle Markov regime-switching univarié (MS-univarié) ; ensuite nous avons recours au modèle Markov regime-switching multivarié (MS-multivarié) et examinons sa performance. Dans un deuxième temps, nous essayons d'ajouter des indicateurs économiques dans les modèles, et testons s'ils peuvent influencer notre identification des crises.

2.1 Modèles MS-univarié:

Rappelons la spécification du modèle MS-univarié :

$$r_t = \beta_{S_t} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{S_t}^2)$$

Supposons que: $S_t = 0, 1$. Ainsi on a :

$$\text{Pour } S_t=0 : r_t = \beta_0 + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_0^2)$$

$$\text{pour } S_t=1 : r_t = \beta_1 + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_1^2)$$

$$\text{Avec } Pr[S_t=0/S_{t-1}=0] = p$$

$$\text{et } Pr[S_t=1/S_{t-1}=1] = q$$

Ensuite, nous avons utilisé cette spécification du modèle MS-univarié pour étudier respectivement les séries des rendements mensuels du S&P500 et du S&P/TSX. Et les résultats de ces estimations sont fournis dans le tableau suivant:

Paramètres	S&P500	S&P/TSX
β_0	0.0131 (0,0023)	0,0110 (0,0022)
β_1	-0,0145 (0,0077)	-0,0317 (0,0119)
σ_0^2	0,0011 (0,0001)	0,0012 (0,0001)
σ_1^2	0,0045 (0,0007)	0,0069 (0,0014)
p	0,95	0,97
q	0,83	0,83
Log-likelihood	659,48	654,86

Figure 6: Résultats des estimations de MS-univarié

Selon les résultats, six paramètres sont estimés : les espérances de rendement de l'indice, la variance et les probabilités de transition relatives à chaque régime, soit β_0 , σ_0^2 et p pour l'état 0 ; β_1 , σ_1^2 et q pour l'état 1.

Ces résultats nous ont confirmé l'existence de deux régimes différents des séries de rendement pour les deux marchés boursiers durant la période étudiée. Prenons l'exemple de l'indice S&P500, la moyenne du rendement de l'état zéro est positive:

$\beta_0 = 1,31$ %, tant que la moyenne du rendement de l'état un est négative: $\beta_1 = -1,45$ %. Ainsi, on peut constater que le rendement est plus élevé en phase « normale » ($S_t=0$) qu'en phase « crise » ($S_t=1$). Quant à la variance, il est évident que la variance des rendements en phase « crise » est presque quatre fois supérieure à la variance des rendements en phase « normale », soit 0,0045 contre 0,0011. Concernant ensuite les probabilités de transitions, la probabilité de rester en phase « normale » : $p = 0,95$; alors que la probabilité de rester en phase « crise » : $q = 0,83$. Ces deux probabilités très grandes impliquent que les deux régimes sont très persistants.

De ce fait, nous pouvons déterminer un « marché de bull » persistant à

moyenne positive et volatilité faible, ainsi qu'un « marché de bear » relativement moins persistant à moyenne négative et volatilité élevée.

Et par la formule :

$$Pr(S_t = 1) = \frac{1-p}{2-p-q}$$

On peut obtenir les probabilités non-conditionnelles d'être en phase de crise, soit 0,2273 pour le marché américain et 0,15 pour le marché canadien. Ces deux probabilités non-conditionnelles impliquent que dans notre échantillon, 22,73 % d'observations devraient être en phase de crise pour le marché américain, et 15% pour le marché canadien. C'est-à-dire l'état 0 (normal) domine la plupart du temps le marché financier. Ces résultats correspondent bien à la situation réelle sur le marché financier.

Les figures 7 et 8 ci-dessous illustrent l'évolution des probabilités d'être en phase de crise pour les marchés américain et canadien respectivement. Nous avons aussi montré dans les graphiques les volatilités historiques des deux indices concernés. Tel que montré dans ces graphiques, la probabilité est proche de 1 pour les périodes avec une volatilité très forte. Alors, dans ce cas-ci, on pense que le marché a connu une crise financière.

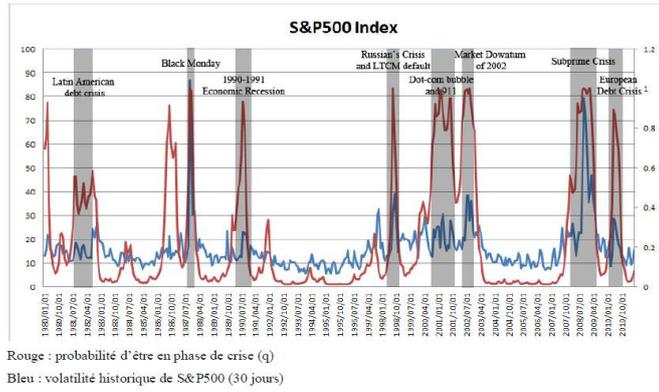


Figure 7: Evolution des probabilités d'être en phase de crise (MS-univarié)

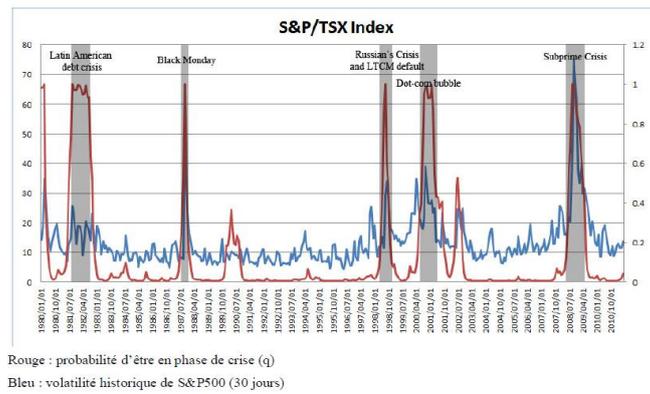


Figure 8: Evolution des probabilités d'être en phase de crise (MS-univarié)

Dans la figure 7, les zones ombrées représentent les principales crises financières durant la période de 1980 à 2011, soit la crise de la dette au 20ième siècle 24 en Amérique Latine, la crise du marché des actions et des taux d'intérêt en 1987, la récession américaine de 1991, la crise financière russe de 1998, l'effondrement brutal de la bulle spéculative des valeurs technologiques des années 1998 à 2003, la crise des subprimes de 2008 et la crise la plus récente, celle de la dette en europe. Nous pouvons remarquer que presque toutes les crises financières ont été détectées par le modèle MS-univarié. Prenons alors l'exemple de la crise des subprimes de 2008. On peut observer qu'après la faillite de la Banque Lehman Brothers le 15 septembre 2008, la volatilité historique a atteint des niveaux records sur les marchés boursiers. Et selon notre modèle, le probabilité d'être en crise à ce moment-là est suffisamment proche de 1. Sur le marché américain, on remarque que l'impact de la crise des subprimes a commencé à partir du juin 2007. De ce fait, le modèle MS-univarié a bien détecter la crise des subprimes. Quant à la crise de la dette en europe, il semble que le modèle a bien saisi cette crise l'avril 2010 sur le marché américain. Toutefois, malgré la bonne performance du modèle sur la détection de certaines crises, il y a aussi de mauvaises détections sur le marché américain, par exemple une détection en 1986, et d'autre détections mais avec des probabilités faibles. Alors que pour le marché canadien (indice S&P/TSX), on peut observer des différences significatives par rapport au marché américain. Premièrement, l'effet de la récession des années 1990 a disparu sur le marché canadien (avec une probabilité moins de 0,4). Deuxièmement, la crise des subprimes déterminée par le modèle a commencé à la fin de l'année 2007 sur le marché américain, comparativement, l'impact de cette crise sur le marché canadien n'a commencé que du mois de juillet 2008, et avec une durée relativement plus courte. Enfin, il semble que la crise de la dette en europe n'a pas d'influence sur le marché canadien. Selon nos résultats, on peut confirmer l'existence des deux régimes distinctes sur le marché boursier. Et lorsque le rendement de l'indice est négatif, c'est que le marché 25 connaît une crise et donc la probabilité de lissage qui correspond à une phase de crise est proche de 1. En plus, le modèle MS-univarié nous permet de bien identifier certaines crises financières durant la période étudiée, mais il produit également de mauvaises détections .

2.2 Modèles MS-multivarié:

A ce stade, on s'intéresse à identifier les crises financières sur le marché de l'Amérique du Nord en utilisant les modèles multivariés à changements de régimes markoviens, plus précisément, on tente de combiner les informations des deux marchés concernés ensemble pour identifier les perturbations financières sur le marché de l'Amérique du Nord.

Pour le modèle MS-multivarié, on utilise le même raisonnement que

le modèle MS-univarié. Mais, dans ce cas-ci, le rendement utilisé dans ce modèle est une matrice avec deux colonnes, soit :

$$R_t = [r_{SP500,t} \ r_{SPTSX,t}]$$

Alors le modèle peut s'écrire comme :

$$R_t = \beta_{S_t} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{S_t}^2) \quad S_t = 0, 1.$$

Les résultats des estimations du modèle MS-multivarié sont présentés dans la figure 9, et les probabilités d'être en phase de crise sont illustrées dans la figure 10.

Paramètres	S&P500	S&P/TSX
β_0	0.0126 (0,0022)	0,0113 (0,0021)
β_1	-0,0172 (0,0084)	-0,0192 (0,0091)
σ_0^2	0,0012 (0,0001)	0,0012 (0,0001)
σ_1^2	0,0046 (0,0007)	0,0058 (0,0009)
p	0,96	
q	0,85	
Log-likelihood	1477,77	

Figure 9: Résultats des estimations de MS-multivarié

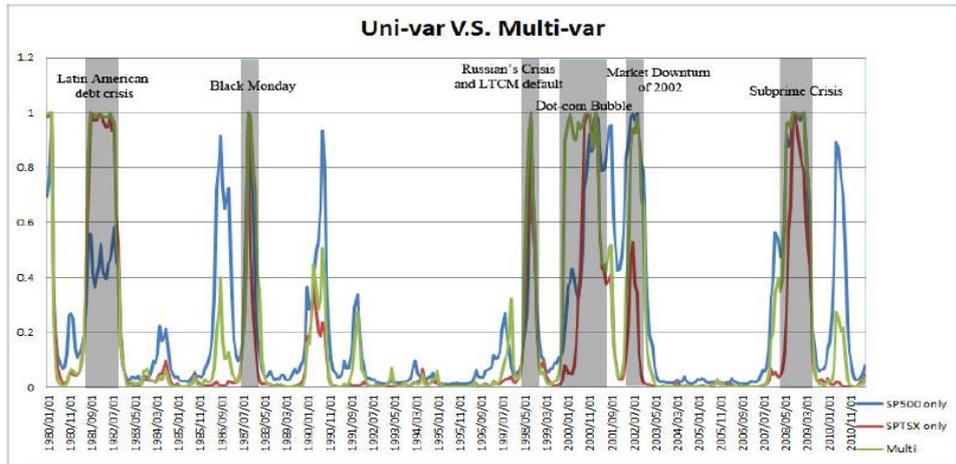


Figure 10: Evolutions des probabilités d'être en phase de crise (MS-multivarié)

A partir de nos résultats, en comparaison avec les résultats du modèle MS-univarié (marqués en rouge et bleu), utiliser le modèle multivarié nous permet d'affiner les détections de changements de régimes et d'éviter de mauvaises détections. Par exemple, tel qu'illustré le graphique ci-haut, la mauvaise détection de l'année 1986 sur le marché américain, qui a été déterminée par le modèle univarié, peut être négligée selon le modèle multivarié. En plus, on remarque que la crise de la dette en Europe n'a pas de grand impact sur le marché de l'Amérique du Nord au total. Devant ces constats, on peut contester que le modèle MS-multivarié peut reproduire des détections plus fidèles.

2.3 Test sur les modèles Markov regime-switching:

Dans notre étude, nous avons employé le test du multiplicateur de Lagrange (LM) pour tester la validité d'introduction du modèle à changements de régimes markoviens, plus précisément, un modèle non linéaire avec l'existence de différents régimes contre un modèle linéaire sans différents régimes.

Pour ce faire, considérons d'abord que l'interception β_{S_t} est composée en deux parties, soit:

$$\beta_{S_t} = \mu + \mu_d S_t$$

Ainsi le modèle peut s'écrire comme : $r_t = \mu + \mu_d S_t + \varepsilon_t$

L'idée de ce test consiste à examiner s'il existe de différents états sur le marché, c'est-à-dire pour tester l'hypothèse nulle qui indique qu'il y a seulement un état du marché ($H_0 = \mu_d = 0$) Formellement parlant, sous l'hypothèse nulle, la composante du régime n'existe pas dans le modèle. La figure 11 présente les résultats du test LM.

S&P500	S&P/TSX	Multi (S&P500, S&P/TSX)
H = 1	H = 1	H = 1
p-Value = 0	p-Value = 0	p-Value = 0
Stat = 258,7	Stat = 254,1	Stat = 200,1
c-Value (DF=1) = 3,84	c-Value (DF=1) = 3,84	c-Value (DF=2) = 5,99

DF : degré de liberté ; c-Value : valeur critique

Figure 11: Résultats du test LM

A partir de ce tableau, on rejette fortement l'hypothèse nulle d'un seul régime (les valeurs statistiques sont beaucoup plus grandes que les valeurs critiques) : $H = 1$. Par conséquent, le résultat du test LM nous a confirmé l'existence de différents régimes sur le marché financiers.

2.4 Modèles MS avec d'autres indicateurs

Dans cette partie, nous tentons d'ajouter des indicateurs économiques dans les modèles et de tester s'ils peuvent améliorer la détection des crises.

A cette fin, les rendements trimestriels des mêmes indices boursiers (S&P500 et S&P/TSX) ont été utilisés. En plus, nous avons préparé des variables candidates, soit (1) VIX (Chicago Board Options Exchange Market Volatility Index) ; (2) le PIB réels des Etats-Unis et du Canada ; (3) l'Indice des prix à la consommation (CPI) aux Etats-Unis/ au Canada ; (4) la production industrielle aux Etats-Unis/ au Canada ; (5) les taux d'intérêt des obligations à long terme du gouvernement des Etat-Unis/ du Canada ; (6) l'écart de rendement entre les obligation d'Etat à 10 ans et à 2 ans (Sell 2 Year & Buy 10 Year) aux Etats-Unis/ au Canada ; (7) l'écart de rendement entre les obligation d'Etat à 10 ans et à 5 ans (Sell 5 Year & Buy 10 Year) aux

Etats-Unis/ au Canada. Et la période totale de l'étude s'étale entre mars 1997 et décembre 2011.

1) Première étape : choix des indicateurs

Avant d'utiliser les modèles à changements de régimes markoviens, il faut d'abord choisir des indicateurs qui peuvent influencer le rendement de chaque indice. Dans cette étude, nous avons recours à la méthode de sélection stepwise, c'est-à-dire la procédure de sélection dite « pas à pas », afin de choisir les variables indépendantes. En effet, la méthode de sélection stepwise consiste à une méthode qui peut sélectionner un groupe de régresseurs automatiquement. Elle consiste en une sélection Forward avec une élimination Backward. C'est-à-dire, à chaque pas on effectue une sélection Forward, en laissant la probabilité de faire sortir du modèle une variable qui est devenue non significative. Alors, à chaque pas, elle permet un réexamen des variables introduites dans le modèle aux pas précédents. En plus, c'est une méthode qui nous permet de tenir compte de l'interaction entre les variables candidates. Les tableaux ci-dessous sont des sorties du STATA, qui peut présenter les résultats de la méthode backward pour chaque indice boursier concerné.

Résultats de méthode Stepwise (S&P500)

```

p = 0.0603 >= 0.0500 removing gdp_us
p = 0.4963 >= 0.0500 removing cpi_us
p = 0.4236 >= 0.0500 removing inter_us
p = 0.5195 >= 0.0500 removing usyc2y10index
p = 0.7010 >= 0.0500 removing usyc5y10index
p = 0.0513 >= 0.0500 removing induspro_us

```

Source	SS	df	MS	Number of obs =	56
Model	.319948134	2	.159974067	F(2, 53) =	51.04
Residual	.166128018	53	.003134434	Pr(> F) =	0.0000
Total	.486076152	55	.008837694	R-squared =	0.6582
				Adj R-squared =	0.6453
				Root MSE =	.05599

sp500_return	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
change_vix	-.0082469	.0010696	-7.76	0.000	-.0104422 - .0061517
_cons	-.0247806	.0100782	-2.46	0.017	-.044995 - .0045662

Figure 12:

Pour l'indice S&P500, on sélectionne parmi les 7 variables candidates ; alors que pour l'indice S&P/TSX, on sélectionne parmi les 6 variables candidates. Il est à noter que le seuil de probabilité « pour éliminer » est de 0,05. Alors, à partir de ces résultats, d'abord, pour l'indice S&P500, la sélection se fait en 6 étapes. Le modèle enfin trouvé est le modèle : Rendement(S&P500) = f(changement de VIX). Même raisonnement pour l'indice S&P/TSX, le modèle enfin sélectionné est le modèle : Rendement(S&P/TSX) = f(changement de Production industrielle).

Résultats de méthode Stepwise (S&P/TSX)

```

p = 0.5674 >= 0.0500 removing cpi_ca
p = 0.3762 >= 0.0500 removing gdp_ca
p = 0.1286 >= 0.0500 removing inter_ca
p = 0.0973 >= 0.0500 removing cayc5y10index
p = 0.7256 >= 0.0500 removing cayc2y10index

```

Source	SS	df	MS			
Model	.061821172	1	.061821172		Number of obs =	56
Residual	.476969768	54	.008832774		F(1, 54) =	7.00
Total	.53879096	55	.009796199		Prob > F =	0.0107
					R-squared =	0.1147
					Adj R-squared =	0.0983
					Root MSE =	.09398

sptsx_return	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
induspro_ca	.012774	.0048284	2.65	0.011	.0030936	.0224544
_cons	.0124133	.0123668	0.99	0.328	-.0128216	.0376482

Figure 13:

2) Deuxième étape :

Après avoir choisi les variables significatives pour chaque indice, nous essayons ensuite de les ajouter dans le modèle à changements de régimes markoviens. Avec des variables indépendantes, les modèles peuvent alors s'écrire comme :

Modèle MS-univarié :

$$r_{SP500,t} = \beta_{S_t} + \alpha_{S_t} \cdot \Delta VIX + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{S_t}^2)$$

Modèle MS-multivarié :

$$r_{SP500,t} = \beta_{1,S_t} + \alpha_{S_t} \cdot \Delta VIX + \varepsilon_{1,t} \quad \varepsilon_{1,t} \sim N(0, \sigma_{S_t}^2)$$

$$r_{SPTSX,t} = \beta_{2,S_t} + \alpha_{S_t} \cdot \Delta IndPro + \varepsilon_{2,t} \quad \varepsilon_{2,t} \sim N(0, \sigma_{S_t}^2)$$

Où ΔVIX représente le changement de l'indice VIX , qui consiste à un indicateur de volatilité du marché financier américain ; et $\Delta IndPro$ représente le changement de l'indice de la production industrielle, qui correspond à un indicateur de l'output du secteur industriel. Les résultats du modèle MS-multivarié avec les deux variables choisies peuvent se résumer dans les figures 14 et 10

Résultats des estimations du modèle MS-multivarié (avec indicateurs)

Paramètres	S&P500 (ΔVIX)	S&P/TSX ($\Delta IndPro$)
β_0	0.0187	0,0375
β_1	-0,2016	-0,2155
α_0	-0,0045	0.0010
α_1	0.0071	-0,0003
σ_0^2	0,0042	0,0047
σ_1^2	0,0123	0,0106
p	0,94	
q	0,37	
Log-likelihood	164.70	

Figure 14:

Evolutions des probabilités d'être en phase de crise

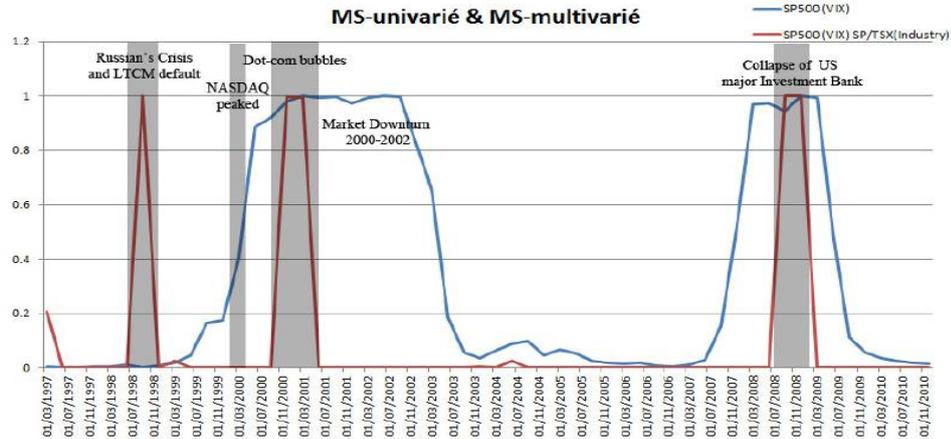


Figure 15:

A partir de la figure 14, on remarque qu'en phase normale, il existe une relation négative ($\alpha_0 = -0,0045$) entre le rendement de l'indice S&P500 et la volatilité du marché (ΔVIX), c'est-à-dire en phase normale, les actifs sont susceptibles de réaliser des rendements plus faibles au moment où le marché est plus volatil. En plus, on observe une relation positive ($\alpha_0 = 0,0010$) entre le rendement de l'indice S&P/TSX et la production industrielle ($\Delta IndPro$) en phase normale, c'est-à-dire le rendement du marché financier est plus élevé avec un niveau élevé de l'output du secteur industriel en phase normale. Par contre, c'est strictement l'inverse dans les deux cas.

Tel qu'illustré dans la figure ci-haut (10), nous pouvons faire une comparaison entre le modèle MS-univarié et le modèle MS-multivarié en ajoutant les deux indicateurs. On remarque que le modèle multivarié détecte seulement la période durant laquelle l'impact de la crise était le plus grave, autrement dit il a réduit la durée d'une crise. Par ailleurs, en comparaison avec les graphiques de modèles sans ajouts des variables, ajouter ces deux variables indépendantes dans le modèle peuvent éviter de mauvaises détections (des détections avec faibles probabilités). Ainsi, on peut avoir une identification plus claire.

En bref, d'abord, nous avons confirmé encore une fois dans cette partie une meilleure performance du modèle MS-multivarié à des fins de détecter les perturbations financières sur le marché. En plus, ajouter des variables significatives peuvent aider à améliorer notre détection de la durée des crises dans une certaine mesure.

3 Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons essayé de modéliser les séries de rendements des indices boursiers à partir de processus markovien, ainsi d'identifier les deux états différents sur le marché financier : « normal » ou « crise ».

A cette fin, nous avons utilisé les rendements mensuels de l'indice boursier américain S&P500, ainsi que de l'indice boursier canadien S&P/TSX. L'existence de l'asymétrie des séries de rendement des indices nous a conduit alors à employer les modèles à changements de régimes markoviens. D'après ces modèles, on suppose que le marché financier peut être se trouver dans deux états différents. Le marché peut alors à tout instant passer d'un état à l'autre état avec une probabilité de transition. Compte tenu de la spécification de la crise financière dans le marché, le modèle à changements de régimes markovien fait du sens. Tenant compte du caractère probabiliste des modèles, on ne peut pas certifier en théorie quelle période est une période de crise ; toutefois on peut espérer en pratique affirmer une période de crise avec une probabilité suffisamment proche de 1. De ce fait, nous pouvons définir les différentes phases des fluctuations financières, et détecter les principales crises financières durant la période étudiée. Les résultats de cette étude sont de trois ordres. D'abord, nous avons employé le test du multiplicateur de Lagrange pour tester la validité d'introduction du modèle à changements de régimes markoviens. Selon les résultats du test, nous avons confirmé l'existence de deux différents régimes sur le marché boursier durant la période étudiée. En plus, à partir de nos résultats, il semble que le modèle MS-univarié et le modèle MS-multivarié peuvent bien détecter les principales crises financières durant la période 1980-2011. Pour autant, le modèle MS-multivarié, selon lequel on tient compte des informations des deux marchés concernés en même temps, peut réduire de mauvaises détections apparues dans le modèle univarié. Le modèle multivarié réussit également à affiner les détections et à produire une identification plus fidèle. Ainsi, on a constaté une meilleure performance du modèle MS-multivarié.

Enfin, comme les marchés financiers sont souvent influencés par de différentes variables, nous avons essayé d'introduire des variables indépendantes dans les modèles à changements de régimes markoviens, afin d'examiner si ces variables peuvent améliorer notre détection. D'après nos résultats, en ajoutant

des variables, le modèle MS-multivarié peut éviter de mauvaises détections (celles avec des probabilités faibles) et reproduire une identification plus claire. De ce fait, on constate que l'ajout des indicateurs peut améliorer la performance des modèles dans une certaine mesure.

En réalité, ces détections obtenues peuvent être utilisées comme un point de référence pour des études de l'analyse des crises financières. Par ailleurs, elles permettent d'évaluer la performance prédictive des indicateurs pour les activités financières. En effet, dans un cadre financier, l'identification de l'état du marché constitue une préoccupation sérieuse pour les investisseurs : leur stratégie d'investissement dépend directement de l'état du marché.

Bibliographie

Breidt and Hsu,2002.

Charfeddine et Guégan,2012.

Chen et Tiao,1990.

Colletaz et Hurlin,2006.

Engel and Smith,1999.

Granger et Hyung,2000.

Hamilton, 2005.

Jeanne and Masson, 2000.

JIA JI,2011,application des modèles a changement de régime Markovien,rapport de recherche,Université de Montérial.

Lamoureux et Lastrapes,1990.

Lobato et Savin,1998.

LUIS MACAVILCA and TAYLOR KUNAL,2012,Application des modèles a changement de régime sur l'indice S&P500,Université de Paris.

NICOLAS BRUNEL,2005,Sur quelques extentions des chaine de Markov cachés et couples,thèse de Doctorat de l'Université Paris 6.

SOULEYMANE FOFANA and Abdou kâ Diongue,2013,comportement de la fonction d'autocorrelation des Modèles a changement de régime,AFRIIKA STATISTIKA.