



Université Mouloud Mammeri de TIZI- OUZOU
Faculté de génie de la construction
Département de génie civil



Mémoire de magister

Spécialité : Génie civil

Option : géotechnique et environnement

Présenté publiquement par

FEKHART KARIMA

Thème :

Simulation numérique du phénomène d'infiltration dans un milieu poreux.

Devant le jury composé de :

M^r MELBOUCI Bachir ProfesseurUMMTOPrésident
M^r HAMZA AliProfesseur.....UMMTO Rapporteur
M^r GABI Smail..... Maître de conférences A.....UMMTO.....Examineur
Mr KADRI Mohamed....Professeur UMBB.....Examineur

Soutenu , le 30 /09 / 2012

Avant propos

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier vivement mes parents qui m ont encouragé à suivre mes études;

A ma sœur Farida et ses enfants (Dihia, Mayes ; Dacine et Amine) ; à mes sœurs Fazia et Djamila.

A mon frère Hakim, Rafik et sa famille (Zohra, Wassim et Maya).

A mon mari et ma très chère fille Katia ;

A ma belle mère et mes belle sœurs (Karima et Fadhila), mes beaux frères.

Aussi je tiens à remercier mon promoteur Mr HAMZA A. qui m'a aidé le long de mon travail. Et je tiens à remercier les membres de jury qui ont donnés la valeur à mon travail

Je tiens à remercier aussi le personnel de la bibliothèque de département génie civil, et à tout le personnel de ce département.

Et à mes collègues Saida et Kahina.

FEKHART KARIMA dit a tous merci.

RESUME

L'objectif technique principal auquel répond ce travail est la simulation numérique d'une infiltration à travers un barrage en terre ; homogène et isotrope, reposent sur une fondation imperméable, soumis aux différents niveaux d'eau au cours du vidange.

La modélisation est faite via un logiciel FLAC^{2D} basé sur la méthode des différences finies, qui nous a permet de déterminer le flux d'infiltration, le débit de fuite et la surface de suintement.

L'objectif numérique est de réduire le temps de calcul pour rendre les études acceptable dans l'industrie.

Mots clés :

Débit de fuite ; barrage en terre, homogène, isotrope, vidange, surface de suintement, infiltration, surface libre d'écoulement.

SAMMURY

The principal technical objective of this work is the numerical simulation of an infiltration through an earth dam which is homogeneous and isotropic and rests on an impermeable foundation, subjected to various water levels during drainage.

The model is simulated using the software $FLAC^{2D}$ based on the method of finite differences, which enable us to determine the flow through the dam (inflow and outflow) and the surface of seepage.

The numerical objective of this work is to reduce the time of calculation to make the studies carried acceptable for the use in industry.

Key words:

Leak-flow; earth dam, homogeneous and isotropic, drainage, seepage face, infiltration, free surface of flow.

Sommaire

Introduction générale.....	1
-----------------------------------	----------

Chapitre I :

Généralité et notions de base

Introduction.....	5
1-Description d'un fluide en mouvement.....	5
1-1-Ecoulements laminaire et turbulent.....	6
1-2-notion de viscosité dans un fluide en mouvement.....	7
2-Etat de l'eau dans le sol	7
2-1- L'eau de constitution	7
2-2- L'eau liée ou absorbé.....	8
2-3- L'eau libre.....	8
2-4- L'eau capillaire.....	8
3-la teneur en eau.....	8
3-1- Teneur en eau pondérale (humidité pondérale) ω	8
3-2- Teneur en eau volumique (humidité volumique) θ	8
4-Degré de saturation S_w	9
5-La porosité.....	9
5-1- Porosité géométrique où porosité totale	10
5-2- Porosité efficace (cinématique)	10
5-3-porosité de drainage	10
6- Indice des vides	10
7-La capacité de rétention	11
8- L'emmagasinement	11
9- Phénomène de succion.....	12
10-Le phénomène de suintement.....	14
11-Contraintes et pressions d'eau dans les sols	15

11-1- Rappels sur la notion de contrainte dans un milieu granulaire	15
11-2- Contraintes totales et contraintes effectives	17
11-2-1- Contraintes totales	17
11-2-2- Pression d'eau et pression d'air.....	17
12-Les courbes caractéristiques	19
12-1-La courbe de rétention $h(\theta)$	19
12-2-Le phénomène d'hystérésis	20
12-3-La courbe de la conductivité hydraulique $K(h)$	22
13 -Sols saturés (Contraintes effectives)	24
13-1-Principe des contraintes effectives.....	24
13-2-Exemple contraintes géostatiques et nappe au repos	26
13-3- Interaction entre les phases solide et liquide	28
14-Expression de la pression d'écoulement.....	28
14-1- Écoulement unidimensionnel.....	28
14-2- Cas général	30
15-la loi d'écoulement de l'eau dans le sol	32
15-1-Charge hydraulique	32
15-2-Gradient hydraulique	33
15-3-Surfaces équipotentiellles et surfaces iso pièzes.....	33
15-4- Vitesse d'écoulement	34
15-5-Lignes et tubes de courant	35
15-6-Réseau d'écoulement.....	36
15-6-1-Calcul des pressions et du gradient hydraulique	36
15-6-2-Calcul des débits	38
15-7- La perméabilité du sol.....	39
15-7-1-Mesure en laboratoire du coefficient de perméabilité du sol.....	41
15-7-2-Mesure en place des coefficients de perméabilité (Essais d'eau)	44
15-8-La loi de Darcy	48
15-8-1- Généralisation de la loi de Darcy.....	50
15-8-2- Limite de validation de la loi de Darcy.....	50

Chapitre II :

Le phénomène de suintement

1-Introduction	52
2-Le concept de porosité de drainage.....	52
3- Simplification des modèles saturés	54
4-Définitions et état des connaissances	55
5-L'hypothèse DF et le phénomène de suintement.....	56
6-Position de l'imperméable	57
7-Mise en évidence de la relation débit / hauteur de suintement.....	61
Conclusion.....	63

Chapitre III :

Etude analytique de la loi d'écoulement

Introduction :	64
1- Définition du système hydraulique et hypothèses du calcul	64
2-La loi d'écoulement dans un milieu homogène et isotrope	65
3-Application de la méthode numérique à l'écoulement permanent.....	71
3-1-Principe des différences finies.....	73
3-2-Déroulement du calcul.....	73
3-3- Discrétisation du domaine.....	73
3-4-Approximation des opérateurs (dérivées) par des formules de Taylor.....	75
3-5-Les expressions aux différences finies	76
3-6-Dérivées d'ordre supérieur	78
3-7-Les différents schémas aux différences.....	78
3-8-Méthodes des directions alternées (MDI).....	82
4-Les conditions aux limites associées	86
5- conditions initiales	89
6-Application de la méthode à la loi d'écoulement	90

6-1-Equation de l'écoulement.....	90
6-2-Ecoulement dans les milieux saturés.....	91
6-3-Approximation par méthode des différences finies.....	98
6-4-Application des conditions aux limites.....	99

Chapitre IV :

modélisation et interprétation des résultats

Introduction.....	100
1-Principe de résolution numérique dans du logiciel FLAC ^{2D}	100
2- Algorithme de calcul.....	100
3-Modélisation par FLAC ^{2D}	102
3-1-Discretisation de la digue du barrage.....	116
3-2-Affectation des propriétés du sol	117
3-3- Les conditions aux limites et les conditions initiales.....	118
4- La surface de suintement	120
5-Le temps caractéristique	121
6-Graphes donnés par FLAC ^{2D} en régime transitoire	121
7-Les graphes en régime permanent	124
8-Interprétation des résultats	128

Chapitre V :

Exemple d'application

1-Exposé de problème	129
2- Application du logiciel à l'exemple de Bear	129
2.1- discrétisation du problème par FLAC.....	130
2.2-Affectation des propriétés du sol	130

2.3- Les conditions aux limites et les conditions initiales	132
4- En régime transitoire	133
4.1-Graphe d'écoulement (flow)	133
4.2-graphe de saturation	134
4.3-graphe de pression de l'eau	134
4.4-les courbes d'écoulement	135
4.5-graphe des équipotentiels et les lignes du charges	135
5-En régime permanent	136
5.1-Le temps caractéristique	136
5.2-graphe d'écoulement (flow)	136
5.3-graphe de saturation	137
5.4-graphe de pression de l'eau	137
5.5-graphe des courbes de l'eau	138
5.6-graphe des lignes du charge et des équipotentiels	139
6- Les résultats trouvés par le logiciel FLAC.....	139
6.1-calcul de la surface de suintement.....	139
6.2- La position de la surface libre	140
7-Les résultats donnés par Bear.....	141
8-Comparaison des résultats.....	141
8.1-la position de la surface libre donnée par le logiciel FLAC.....	142
8.2-La superposition de la surface libre	142
8.2-la hauteur de la surface de suintement	143
Conclusion	143
Conclusion générale.....	144

Liste des figures

Titres	pages
Figure I.1 : interface eau-air.....	13
Figure I.2 : Pression d'eau en fonction de la cote en $x = L$	14
Figure I.3 : Contrainte dans un milieu continu.....	16
Figure I.4 : Courbes de rétention dans le cas d'un sol sableux et d'un sol argileux.....	20
Figure I.5 : Mise en évidence du phénomène d'hystérésis sur la courbe de rétention d'un sol.....	21
Figure I.6 : Courbe de la conductivité hydraulique en fonction de la succion du Sol.....	23
Figure I.7 : Contraintes géostatiques et nappe au repos.....	27
Figure I.8 : poussée d'écoulement (écoulement unidimensionnel).....	28
Figure I.9 : calcul du gradient hydraulique avec 2 piézomètres.....	30
Figure I.10 : pression de l'eau (cas générale).....	31
Figure I.11 : la vitesse d'écoulement.....	34
Figure I.12 : Réseau d'écoulement autour d'une palplanche.....	36
Figure I.13 : écoulement parallèle et perpendiculaire à la stratification.....	40
Figure I.14 : Essai de perméabilité à charge constante	42
Figure I.15 : Essai de perméabilité à charge variable.....	43
Figure I.16 : Essai Lefranc : interprétation.....	46
Figure I.17 : Essai Lugeon : principe.....	47
Figure I.18 : expérience illustrant la loi de Darcy.....	48
Figure II.1 : le phénomène de suintement.....	55
Figure II.2 : Concept de profondeur équivalente (d').....	58
Figure II.3 : nappe dans un barrage en terre.....	59
Figure II.4 : écoulement à partir d'une condition amont parabolique vers un	

drain horizontal.....	60
Figure III.1 : Le système hydraulique.....	64
Figure III.2 : Schéma de discrétisation d'un domaine quelconque.....	73
Figure III.3 : Discrétisation d'un domaine par des mailles rectangulaires.....	74
Figure III.4 : molécule de discrétisation par MDF	75
Figure III.5 : Conditions aux limites d'un écoulement.....	87
Figure III.6 : Condition de continuité des débits à l'interface de deux couches de sol isotrope.....	88
Figure IV.1 : Algorithme de résolution numérique.....	101
Figure IV.2 : La relation entre perméabilité et saturation utilisée	113
Figure IV.3 : la discrétisation a des éléments triangulaires.....	114
Figure IV.4 : les caractéristiques du barrage.....	116
Figure IV.5 : Discrétisation de la digue.....	117
Figure IV.6 : Les propriétés de la digue.....	118
Figure IV.7 : affectation des conditions initiales et aux limites.....	119
Figure IV.8 : Abaque pour la détermination de la surface de suintement d'après Polubarinova-Kochina.....	120
Figure IV.9 : graphe de l'écoulement.....	121
Figure IV.10 : graphe de saturation.....	122
Figure IV. 11 : graphe de pression de l'eau.....	122
Figure IV.12 : graphe s courbes d'écoulement.....	123
Figure IV.13 : les lignes de charges et les équipotentiellles.....	123
Figure IV. 14 : graphe s d'écoulement.....	124
Figure IV.16 : graphes de saturation.....	124
Figure IV.17 : graphes de pression de l'eau.....	125
Figure IV.18 : graphes d'écoulement.....	126
Figure IV.19 : les valeurs du débit entrant.....	126
Figure IV.20 : les valeurs du débit sortant.....	127
Figure IV.21 : les lignes de charges et les équipotentiellles.....	127
Figure V.1 : Discrétisation du problème par le logiciel FLAC.....	130

Figure V.2 : Affectation des propriétés de l'exemple par le FLAC.....	131
Figure V.3 : Affectation des conditions aux limites.....	132
Figure V.4 : graphe d'écoulement.....	133
Figure V.5 : graphe de saturation.....	133
Figure V.6 : graphe de pression de l'eau.....	134
Figure V.7 : graphe d'écoulement.....	135
Figure V.8 : graphe des lignes du charges et des équipotentiellles.....	135
Figure V.9 : graphe d'écoulement.....	136
Figure V.10 : graphe de saturation.....	137
Figure V.11 : graphe de pression de l'eau.....	138
Figure V.12 : graphe d'écoulement.....	138
Figure V.13 : graphe des lignes du charges et des équipotentiellles.....	139
Figure V.14 : la position de la surface de suintement.....	140
Figure V.15 : l'allure de la surface libre.....	140
Figure V.16 : la position de la surface libre donnée par les trois théories.....	141
Figure V.17 : la position de la surface libre.....	142
Figure V.18: la superposition de la surface libre.....	142
 Figure Annexe1.1 : Le bureau de démarrage dans la configuration graphique de FLAC 2D GIIC.....	 145
Figure Annexe1.2 : fenêtre de dialogue « model options »dans la configuration graphique.....	147
Figure Annexe1.3 : Menu déroulant principale dans la configuration graphique.....	148
Figure Annexe1.4 : Menu File dans la configuration graphique.....	150
Figure Annexe1.5 : Menu show dans la configuration graphique.....	151
Figure Annexe1.6 : Menu Tools dans la configuration graphique.....	152
Figure Annexe1.7 : Menu View dans la configuration graphique.....	153
Figure Annexe1.8 : Menu View dans la configuration graphique.....	153
Figure Annexe1.9 : Menu Help dans la configuration graphique.....	154

Figure Annexe1.10 :	Barre d'outils dans la configuration graphique.....	155
Figure Annexe1.11 :	Barre d'outils BUILD dans la configuration graphique.	155
Figure Annexe1.12 :	Barre d'outils ALTER dans la configuration graphique	156
Figure Annexe1.13 :	Barre d'outils MATERIAL	156
Figure Annexe1.14 :	Barre d'outils IN SITU	157
FigureAnexe1.15:	Barre d'outils STRUCTURE	157
Figure Annexe1.16:	Barre d'outils SETTINGS	159
Figure Annexe1.17 :	Barre d'outils SETTINGS	159
Figure Annexe1.18:	Barre d'outils PLOT.....	160
Figure Annexe1.19:	Barre d'outils RUN	160

Liste des tableaux

Titres	pages
Tableau I.1 : quelques valeurs de perméabilité de sol.....	41
Tableau IV.1 : les caractéristiques géométriques de la digue.....	116
Tableau IV.2 : les caractéristiques mécanique de la digue.....	117
Tableau V.1 : les caractéristiques mécanique de la digue.....	131

Liste des paramètres

V : vitesse d'écoulement de l'eau. $[L.T^{-1}]$.

$\vec{V}$: vecteur de la vitesse d'écoulement de l'eau. $[L.T^{-1}]$.

V_x, V_y, V_z : les composantes de vecteur de vitesse $[L.T^{-1}]$.

η : viscosité dynamique $[F.L.T^{-2}]$.

ω : la teneur en eau pondérale (humidité pondérale).

θ : la teneur en eau volumique (humidité volumique).

θ_r : la teneur en eau résiduelle.

θ_s : la teneur en eau à saturation.

v_w : volume d'eau présent dans le sol $[L^3]$.

v_t : volume total apparent dans le sol $[L^3]$.

V_v : volume des vides contient dans le sol $[L^3]$.

S_w : le degré de saturation du sol en eau.

S_r : le degré de saturation résiduelle.

η_t : la porosité totale.

η_e : la porosité efficace (cinématique).

V_m : volume de l'eau mobile à saturation libérée sous l'effet de la gravité $[L^3]$.

η_d : porosité de drainage.

V_g : volume d'eau mobile sous l'effet de gravitation $[L^3]$.

e : indice des vides.

V_s : volume de la phase solide $[L^3]$.

η_{ret} : capacité de retention.

S : le coefficient d'emmagasinement.

S_s : le coefficient d'emmagasinement spécifique.

V : volume de la nappe $[L^3]$.

b : profondeur de la nappe $[L]$.

δv : variation de volume d'eau pour une section unitaire $[L^3]$.

δp : variation de pression d'eau pour une section unitaire $[F.L^{-2}]$.

δh : variation de la charge hydraulique pour une section unitaire [L].

γ : poids spécifique .

Φ : potentiel d'écoulement.

h : pression de l'eau où la charge hydraulique [L].

H : charge hydraulique totale [L].

H_w : niveau d'eau en aval [L].

H_{ss} : La hauteur de suintement [L].

Z : la côte [L].

v : volume du massif du sol [L³].

s : surface du massif du sol [L²].

V_1, v_2 : les deux parties du volume [L³].

$\bar{\sigma}$: tenseur du contrainte [F.L⁻²].

δs : la variation de la section élémentaire [L²].

σ_n : contrainte totale normale [F.L⁻²].

τ : contrainte totale tangentielle [F.L⁻²].

P_a : pression de l'air [F.L⁻²].

P_w : pression de l'eau [F.L⁻²].

P_c : pression capillaire [F.L⁻²].

g : la gravitation [F.T²].

U : pression interstitielle [F.L⁻²].

σ_n' : contrainte normale effective [F.L⁻²].

τ' : contrainte tangentielle effective [F.L⁻²].

σ_v : contrainte verticale [F.L⁻²].

ρ_{sat} : poids volumique de l'eau a saturation [F.L⁻³].

ρ_w : poids volumique de l'eau [F.L⁻³].

γ'_w : la masse volumique déjaugée [kg.L⁻³].

ρ'_w : poids volumique déjaugée de l'eau [F.L⁻³].

i : gradient hydraulique.

Q : le débit total d'écoulement [L³.T⁻¹].

K : le coefficient de perméabilité $[L.T^{-1}]$.

$\overline{K}$: le tenseur de perméabilité $[L.T^{-1}]$.

K_v : le coefficient de perméabilité vertical $[L.T^{-1}]$.

K_{he} : le coefficient de perméabilité horizontal $[L.T^{-1}]$.

Δh : variation totale de la charge $[L]$.

η_c : porosité cinématique $[L.T^{-1}]$.

μ : viscosité dynamique.

introduction générale

Introduction générale

L'équation de l'écoulement est obtenue en combinant l'équation dynamique, qui est la loi de Darcy , écrite dans le cas non saturé avec la loi de conservation de masse, théoriquement, la loi de Darcy dans le cas saturé peut être déduite des équations générales de Navier-Stokes de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible moyennant deux approximations , la première que les forces d'inertie sont négligeable devant les forces visqueuses et la seconde la vitesse de l'écoulement très faible.

Il est aussi à noter que l'équation d'écoulement peut être déterminée par l'équation de Richards , qui est une équation unidimensionnelle et fortement non linéaire compte tenu des variations importantes que subissent la conductivité hydraulique et la succion en fonction de la teneur en eau hydraulique des sols non saturés , pour ces raisons, il est difficile d'atteindre des solutions analytique.

Et aussi la complexité d'appliquer l'équation de Richards réside dans les conditions aux limites inconnues, et de leur variation, sur la surface de suintement du domaine de l'écoulement.

L'équation de l'écoulement est intégrée numériquement par la méthode des différences finies, qui est une technique pour résoudre les équations aux dérivées partielles (équation de l'écoulement) basée sur la discrétisation des opérateurs, et application des conditions aux limites et des conditions initiales on peut aussi déterminer la variation de la charge hydraulique en fonction de temps et de l'espace.

L'existence de surfaces de suintement à l'interface entre des nappes libres et le réseau de surface (ou des faces avals du barrage) est largement évoquée dans la littérature

(Muskat, 1937 ; Schnebelli, 1966 ; Boufadel et al., 1999 ; etc...). La détermination de la hauteur des surfaces de suintement peut par exemple être justifiée pour évaluer la stabilité de certaines structures, et en particulier des barrages en terre, calculer les débits transitant dans des nappes libres drainées (Muskat, 1937) ou encore estimer les hauteurs de nappe dans un système drainé (Youngs, 1990).

La connaissance des débits aussi bien que des hauteurs de nappe est évidemment essentielle dans une perspective de gestion hydraulique des zones humides (Skaggs et al., 1995).

Nous proposons à présent d'investiguer en détail le phénomène de surface de suintement, d'évaluer son importance potentielle et enfin de proposer une méthode simple de correction des modèles reposant sur l'hypothèse de Dupuit-Forchheimer.

On présente un modèle pour simuler les infiltrations de l'eau à travers un corps du barrage en terre homogène et isotrope dans un état de saturation initial puis soumis à un drainage lors d'une vidange, via un logiciel de calcul FLAC^{2D} (Fast Lagrangian Analysis of Continua), développé par un groupe américain ITASCA destiné à modéliser et analyser les problèmes de géo-mécanique en général et de mécanique des sols en particulier.

Le code de logiciel FLAC^{2D} utilisé dans la modélisation est basé sur la méthode des différences finies. Les concepteurs de ce code ont utilisé un concept appelé « méthode des éléments lagrangiens ». Il consiste en une application non traditionnelle de la méthode des différences finies explicite.

Les résultats obtenus par le modèle numérique de FLAC^{2D} ont été comparés aux résultats obtenus par d'autres chercheurs (Dupuit-Forchheimer 1930 ; Baiocchi 1971 ; Knight 2005).

Et nous avons trouvés des résultats similaires avec ceux trouvés par d'autres chercheurs même pour la colonne proche de la surface de suintement, ce qui justifie que le modèle simulé par le logiciel FLAC^{2D} est fiable pour le calcul de la surface de suintement et la position de la surface libre.

Le problème de barrage en terre, soumis à deux hauteurs libres en amont et en aval, est le cas classique connu sous le nom de « problème de Dupuit ». Nous allons appliqué le modèle développé par FLAC^{2D} pour la détermination de débit d'infiltration à travers la digue ainsi que la surface de suintement et la position de la surface libre tout en passant de régime transitoire vers le régime permanent.

Il est à noter que la majorité des approches mathématiques (Dupuit-Forchheimer 1930 ; Baiocchi 1971 ; Knight 2005) sont consacrées pour le régime permanent, les résultats obtenus par le modèle FLAC^{2D} en régime transitoire sont comparés avec celles des auteurs cités ci-dessus lorsque le régime permanent est atteint.

Le mémoire comporte Cinq chapitres répartis comme suit :

Dans le premier chapitre, on a présenté les généralités et les notions de base sur les écoulements souterrains et définit les équations et les paramètres de mouvements.

Dans le deuxième chapitre, on a présenté une étude analytique de la loi d'écoulement et son approximation par la méthode des différences finies.

Dans le troisième chapitre, on a présenté l'étude et la définition du phénomène de suintement tout en définissant les conditions aux limites de flux imposé et de la charge imposée.

Le chapitre IV est consacré à la modélisation numérique par la méthode des différences finies en utilisant le logiciel FLAC, ainsi que les résultats obtenus et leurs interprétations.

Dans le chapitre V on a présenté une comparaison des résultats obtenus par le logiciel FLAC et ceux donnés par d'autres chercheurs en prenant comme modèle l'exemple de Bear(1972) cité par J.Knight(2005).

chapitre I:

Généralités et notions

de base

Introduction:

Pour modéliser le comportement d'un écoulement permanent ou non permanent, dans un milieu saturé ou non saturé, isotrope et homogène, il est important de définir les paramètres intervenant dans la constitution de ce modèle.

1-Description d'un fluide en mouvement:

Le mouvement d'un fluide est un écoulement où il y a une déformation continue du fluide. On peut, de manière analogue à ce que l'on fait en mécanique du solide, isoler (par la pensée où en trouvant un moyen de visualisation, coloration par exemple) une partie restreinte du fluide appelée particule et la suivre au cours du temps c'est à dire connaître à chaque instant sa position. Cette position sera connue, par exemple, par ses coordonnées cartésiennes :

$$x_p(t, x_{0p}, y_{0p}, z_{0p}) ; y_p(t, x_{0p}, y_{0p}, z_{0p}) ; z_p(t, x_{0p}, y_{0p}, z_{0p})$$

Où :

x_{0p}, y_{0p}, z_{0p} : représentent les coordonnées de la particule choisie à l'instant t_0 .

La vitesse de la particule aura pour composantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_x = \frac{\partial x_p}{\partial t} \\ V_y = \frac{\partial y_p}{\partial t} \\ V_z = \frac{\partial z_p}{\partial t} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (I.1) \\ (I.2) \\ (I.3) \end{array}$$

V_x, V_y, V_z : représentent les coordonnées cartésiennes de la vitesse selon x, y, z .

x_p, y_p, z_p : représentent les coordonnées de la particule choisie à l'instant t .

Et au cours du temps, la particule sera en différents points ; l'ensemble des points constituent une trajectoire de la particule.

-L'écoulement du fluide est dit permanent ou stationnaire si ses composantes de vitesse sont indépendantes de la variable temps; il est dit non-permanent ou transitoire si cette condition n'est pas réalisée.

-L'écoulement du fluide est dit uniforme si ses composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées d'espace ; il est non-uniforme si cette condition n'est pas remplie.

-On appelle ligne de courant une courbe dont la direction tangente en chacun de ses points à la direction du vecteur vitesse. L'équation d'une ligne de courant se calcule par intégration de l'équation :

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} \quad (I.4)$$

V_x, V_y, V_z : représentent les coordonnées cartésiennes de la vitesse selon x, y, z .

-Un tube de courant est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.

-On appelle ligne d'émission une courbe constituée par l'ensemble des points atteints à un instant donné par des particules passées antérieurement en un même point.

Trajectoire, ligne de courant et ligne d'émission sont confondues pour un écoulement permanent.

1.1-Ecoulements laminaire et turbulent:

L'introduction de marqueurs (colorant pour les liquides), permet d'observer des différences importantes dans le comportement des écoulements des fluides.

✚ Dans certains écoulements, les particules marquées diffusent très lentement c'est à dire s'écartent peu les unes des autres, les différentes couches (lamelles) glissent les unes par rapport aux autres sans se mélanger : l'écoulement est dit laminaire.

✚ Au contraire dans d'autres écoulements les particules marquées s'éloignent très rapidement de manière " aléatoire, irrégulière dans toutes les directions " les unes des autres, on ne retrouve plus de trace de marquage significative très près de l'endroit où le marqueur a été introduit : l'écoulement est dit turbulent.

Ů Remarques :

1-D'évidence, l'écoulement sera laminaire à faible vitesse alors que les grandes vitesses provoqueront l'instabilité des particules c'est à dire le caractère turbulent de l'écoulement.

2-En fait, la transition entre écoulement laminaire et turbulent dépend de la vitesse, mais aussi des caractéristiques (viscosité) du fluide, de la forme de l'écoulement.

3-Il découle de ces propos que, pour un écoulement turbulent, les variables, en un point donné, qui caractérisent l'écoulement varient de manière aléatoire et que la notion d'écoulement permanent ne peut être comprise qu'en moyenne. Au contraire, pour un écoulement laminaire, les fluctuations des variables sont négligeables, aux limites nulles.

1.2- Notion de viscosité dans un fluide en mouvement :

Lors d'un écoulement d'un fluide, la pression ne suffit pas à expliquer les phénomènes et qu'il convient d'introduire des forces tangentielles qui s'opposent au mouvement du fluide. Ces forces, de type frottement, dues aux interactions entre molécules du fluide, sont appelées forces de viscosité.

2-Etat de l'eau dans le sol :

Selon les forces liant les molécules des particules solides on distingue :

2.1- L'eau de constitution :

C'est l'eau qui entre dans la composition chimique des minéraux dont les particules de sol sont formées.

2.2- L'eau liée ou adsorbée :

A la surface des grains très fins, qui est orientée par les forces d'attraction moléculaire et les forces électrostatiques ; elle a une viscosité élevée et ne transmet pas les pressions.

2.3- L'eau libre :

C'est l'eau qui circule librement dans les pores du sol sous l'effet des forces de pesanteur.

2.4- L'eau capillaire :

C'est l'eau qui, dans les sols non saturés, en présence d'air ou d'autres gaz, est retenue dans les canaux les plus fins du sol par les forces capillaires.

3-La teneur en eau :

3.1- Teneur en eau pondérale (humidité pondérale) ω :

La teneur en eau pondérale est la quantité (masse) d'eau contenue dans un échantillon de sol rapportée à la masse des particules du sol sec.

3.2- Teneur en eau volumique (humidité volumique) θ :

La teneur en eau volumique est le rapport du volume d'eau présent dans le sol au volume apparent de ce sol (volume de sol en place), la teneur en eau volumique varie entre une valeur minimale « teneur en eau résiduelle θ_r » et une valeur maximale « teneur en eau à saturation θ_s » ; celle-ci est en principe égale à la porosité efficace.

$$\theta = \frac{V_w}{V_t} \quad (I.5)$$

$$\text{Où } \theta_r \leq \theta \leq \theta_s$$

θ : la teneur en eau.

θ_r : la teneur en eau résiduelle.

θ_s : la teneur en eau à saturation.

V_w : volume d'eau présent dans le sol.

V_t : volume totale apparent du sol.

4-Degré de saturation S_w :

Le degré de saturation est défini comme le rapport du volume d'eau au volume des pores ; il varie entre un minimum résiduel et 100% .

$$S_w = \frac{V_w}{V_v} \quad (I.6)$$

Où $S_r \leq S_w \leq 100\%$

S_w : degré de saturation du sol en eau.

V_w : volume de l'eau dans le sol.

V_v : volume des vides contenu dans le sol.

S_r : degré de saturation résiduelle.

5-La porosité :

5.1- Porosité géométrique ou porosité totale :

La porosité totale est le rapport du volume des vides accessible à l'air et à l'eau sur le volume total apparent de l'échantillon.

$$\eta_t = \frac{V_v}{V_t} \quad (I.7)$$

η_t : porosité totale.

V_v : volume des vides dans le sol.

V_t : le volume total du massif du sol.

5.2- Porosité efficace (cinématique) :

La porosité efficace correspond au rapport du volume d'eau mobile à saturation libéré sous l'effet de la gravité au volume total du milieu qui le contient , varie généralement entre 10% et 30%

$$\eta_e = \frac{V_m}{V_t} \quad (I.8)$$

η_e : la porosité efficace.

V_m : volume d'eau mobile à saturation libéré sous l'effet de la gravité.

V_t : volume total du sol.

5.3-Porosité de drainage :

La porosité de drainage est la partie de porosité rendue accessible à l'air par le rabattement d'une nappe ; elle correspond à un écoulement rapide.

$$\eta_d = \frac{V_g}{V_t} \quad (I.9)$$

v_g : volume d'eau mobile sous l'effet de gravitation.

V_t : volume total du sol.

6- Indice des vides :

C'est le rapport du volume des vides sur le volume de la phase solide.

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (I.10)$$

V_v : volume des vides.

V_s : volume de la phase solide.

7-La capacité de rétention :

La capacité de rétention est la différence entre la porosité totale et la porosité de drainage, représente la partie du volume des vides non drainés.

$$\eta_{\text{ret}} = \eta_t - \eta_d \quad (\text{I.11})$$

η_d : la porosité de drainage.

η_t : la porosité totale.

η_{ret} : la capacité ou la porosité de rétention.

8- L'emmagasinement :

L'emmagasinement est lié à la compressibilité élastique du milieu et de l'eau, il représente un volume équivalent à la réduction des pores, en milieu d'écoulement à surface libre, il est prouvé que le coefficient d'emmagasinement est égal à la porosité de drainage, en d'autres termes à la porosité du milieu.

Le coefficient d'emmagasinement S est défini comme étant le volume d'eau libéré ou emmagasiné par unité de surface et par unité de rabattement.

Une autre notion généralement utilisée est l'emmagasinement spécifique S_s qui correspond à une valeur normée de l'emmagasinement par unité de profondeur de l'aquifère b .

$$S = S_s \times b \quad (\text{I.12})$$

S : le coefficient d'emmagasinement.

S_s : le coefficient d'emmagasinement spécifique.

Lehman a évalué le coefficient S à partir du coefficient de compressibilité totale de la nappe B_t , et la relation précédente devient :

$$S = B_t \times \gamma \times b \quad (\text{I.13})$$

$$B_t = \frac{S}{b \times \gamma} \quad (I.14)$$

γ : poids spécifique.

Par ailleurs le coefficient de compressibilité peut s'écrire :

$$B_t = \left[\frac{\eta_t}{E_w} + \frac{1}{E_s} \right] \quad (I.15)$$

Où :

E_s : module d'élasticité du sol.

E_w : module d'élasticité de l'eau.

Si on pose

$$\alpha = \frac{1}{E_s} \quad (I.16)$$

$$\beta = \frac{1}{E_w} \quad (I.17)$$

On aura :

$$S_s = (\alpha + \eta_t \times \beta) \times \gamma \quad (I.18)$$

L'ordre de grandeur d'emménagement pour les zones aquifères selon Lehman :

- Un écoulement en charge : $10^{-5} \leq S_s \leq 10^{-3}$
- Un écoulement à surface libre : $0.03 \leq S_s \leq 0.3$

9- Phénomène de succion :

La notion de la succion ou tension capillaire ψ est liée à un milieu non saturé, elle traduit le comportement physique de l'eau dans les pores qui est influencé par le pourcentage de l'air, la pression capillaire n'existe qu'à la présence d'une phase gazeuse puisque elle provient de la tension qui se développe à l'interface air –eau.

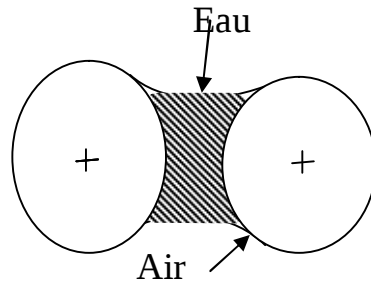


Figure I.1 : interface eau-air

***Potentiel complexe et transformation conforme :**

Pour l'application de la méthode des transformations conformes, on introduit la notion de potentiel d'écoulement $\Phi = -k \times h$, qui est solution de l'équation :

$$\Delta \Phi = 0. \quad (I.19)$$

Φ : potentiel d'écoulement.

La vitesse d'écoulement dérivée du potentiel d'écoulement par l'équation :

$$\vec{V} = \vec{\text{grad}} \Phi \quad (I.20)$$

$\vec{V}$: la vitesse d'écoulement

Dans les problèmes bidimensionnels plans, le potentiel Φ est fonction de deux variables : (x, y) .

On introduit la fonction de courant $\psi(x, y)$, définie par :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (I.21)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (I.22)$$

On montre que :

La ligne « $\psi = \text{constante}$ » est une ligne de courant tangente au vecteur.

La fonction ψ est harmonique : $\Delta\psi = 0$.

10-Le phénomène de suintement :

Le phénomène de suintement se caractérise par l'existence d'une surface à travers laquelle l'eau de la nappe sort du système directement en contact avec l'air. Muskat (1937) montre que cette hauteur existe lorsqu'une nappe est drainée par une digue (un fossé), du fait des pertes de charge verticales dans le système. C'est une conséquence de la convergence des lignes d'écoulement près du bord de la digue.

Cette surface de suintement correspond ainsi à la différence de niveau entre la surface libre de la nappe et le niveau de l'eau dans la digue.

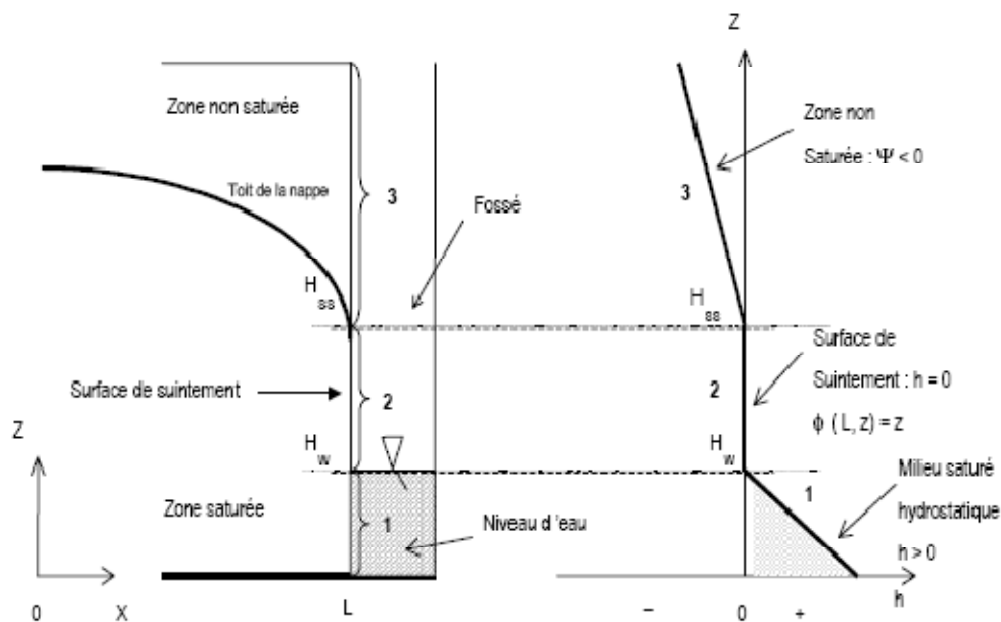


Figure I.2: Pression d'eau en fonction de la cote en $x = L$

Avec :

h : pression d'eau.

$\phi(L,z,t)$: charge hydraulique totale ($\phi = h+z$).

H_w : niveau d'eau dans le fossé aval.

H_{SS} : hauteur de la surface de suintement.

z : la côte.

La surface de suintement constitue une condition à la limite particulière du système, puisqu'il s'agit d'une condition de pression nulle résultant du fonctionnement du système, et non pas d'une condition imposée au système (condition de flux imposé, type Neuman, ou de charge imposée, type Dirichlet). Sa position n'est pas connue a priori.

L'existence de cette surface de suintement a des conséquences directes en termes de prédiction de la position de la surface libre de la nappe, position calculée différemment selon le modèle d'écoulement que l'on choisit. Des solutions analytiques ont été proposées par certains auteurs afin de donner une première approximation de la hauteur de suintement, sans avoir à résoudre les équations complètes d'écoulement en milieu poreux. Ces solutions sont limitées au cas du régime permanent et pour des conditions aux limites particulières. Youngs (1990) propose une synthèse exhaustive du problème de prise en compte de la surface de suintement, et de l'estimation de l'erreur liée à l'hypothèse de Dupuit-Forchheimer sur le calcul de la position de la surface libre de la nappe, mais limitée au régime permanent, dans le cas d'une digue vide.

****Avantage du calcul de la surface de suintement :**

La détermination de la hauteur des surfaces de suintement peut par exemple être justifiée pour évaluer la stabilité de certaines structures, et en particulier des barrages en terre, calculer les débits transitant dans des nappes libres drainées (Muskat, 1937) où encore estimer les hauteurs de nappe dans un système drainé (Youngs, 1990).

11-Contraintes et pressions d'eau dans les sols :

11.1- Rappels sur la notion de contrainte dans un milieu granulaire :

La notion de contrainte appartient à la mécanique des milieux continus, qui est utilisée pour décrire le comportement mécanique des sols.

Les contraintes sont introduites pour assurer l'équilibre interne des massifs de milieux continus : on considère un massif v de milieu continu, de forme quelconque que l'on suppose coupé en deux parties par une surface s Figure (I.3). Si le massif v est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont appliquées, les parties v_1 et v_2 de ce solide sont elles-mêmes en équilibre sous l'action des forces extérieures qui leur sont directement appliquées et des forces internes qui représentent l'effet des forces appliquées par v_2 sur v_1 (et réciproquement). Ces forces internes sont réparties sur la surface s .

Si l'on note $\vec{\delta f}$ la réaction élémentaire qui s'exerce sur un élément δs

Comme la limite du rapport $\frac{\vec{\delta f}}{\delta s}$ lorsque la surface δs tend vers zéro.

$$\vec{\sigma} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{\delta f}}{\delta s} \quad (I.23)$$

Au centre M de la surface S , on définit le vecteur de contrainte $\vec{\sigma}$ figure (I.3)

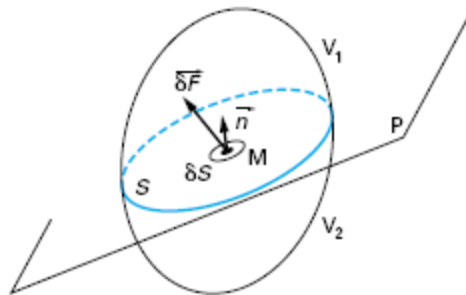


Figure I.3 : Contrainte dans un milieu continu

Et de l'orientation de la surface δS en ce point (repérée par exemple par la direction de sa normale).

Cette définition, qui repose sur l'existence d'une limite lorsque la surface δS devient très petite, se justifie dans un milieu continu à une seule phase. Dans le cas d'un milieu granulaire comportant plusieurs phases, elle risque de ne plus intéresser que l'une des phases du milieu (particule solide, eau ou air, dans le cas d'un sol) quand la

surface δS tend vers zéro. Si l'on ne regarde jamais le comportement d'un sol à l'échelle d'une particule ou d'un pore, la définition de la contrainte peut être étendue au milieu homogène constitué de l'ensemble des constituants du sol, à condition que le nombre des particules dans le volume élémentaire δv où sur la surface élémentaire δs soit assez grand pour qu'on n'ait pas à les distinguer pour décrire le comportement de ce volume élémentaire (où surface élémentaire) de sol. On admet en général qu'il suffit d'une dizaine de particules dans chaque direction de l'espace pour satisfaire cette condition, ce qui est souvent le cas dans la pratique (le problème ne se pose que pour les enrochements où de blocs de rocher).

11.2- Contraintes totales et contraintes effectives :

11.2.1- Contraintes totales :

Dans les sols, le commentaire précédent conduit à introduire un vecteur de contrainte défini sur l'ensemble des phases, noté et appelé « vecteur de contrainte totale ». Le vecteur de contrainte totale peut être projeté sur la normale et sur le plan de la surface δS on définit ainsi :

-La contrainte totale normale σ (où σ_n).

-La contrainte totale tangentielle τ .

Suivant le vecteur unitaire de la normale $\vec{n}$ et dans la direction de la contrainte tangentielle le vecteur unitaire $\vec{t}$ dans le plan de δs .

La contrainte totale normale peut être mesurée en utilisant un capteur de pression mis en contact avec le sol.

11.2.2- Pression d'eau et pression d'air :

Quand deux fluides non miscibles tels que l'eau et l'air coexistent dans un espace poreux, ils sont séparés par des interfaces au travers desquelles apparaît une différence de pression appelée pression capillaire dont la valeur d'après la loi de Laplace dépend de la courbure de la surface. Elle est définie par:

$$p_c = p_a - p_w \quad (I.26)$$

Avec :

p_a et p_w : la pression d'air et l'eau respectivement.

P_c : la pression capillaire.

Le calcul de p_c en fonction des propriétés du milieu poreux, des fluides en présence et du degré de saturation est très difficile à faire à cause de l'hétérogénéité des formes et des dimensions des pores.

La tendance du milieu poreux à retenir l'eau se traduit par une pression négative mais en général il est préférable de définir la pression d'eau de manière positive par :

$$h = \frac{p_w - p_a}{\rho_w \times g} \quad (I.24)$$

p_w : la pression de l'eau.

P_a : la pression de l'air.

ρ_w : la masse volumique de l'eau.

g : la gravitation.

En prenant la pression atmosphérique comme référence ($p_a=0$) alors la succion ou la tension s'exprime par:

$$h = \frac{p_w}{\rho_w \times g} \quad (I.25)$$

p_w : la pression de l'eau.

ρ_w : la masse volumique de l'eau.

g : la gravitation.

La mesure de la pression de l'eau en zone non saturée se fait à l'aide de tensiomètres (Hillel, 1980).

12-Les courbes caractéristiques :

12.1-La courbe de rétention $h(\theta)$:

Considérons un milieu poreux saturé en eau (nappe libre), à sa surface libre la pression hydrostatique est nulle (pression atmosphérique). Si une faible succion est appliquée à la surface libre, aucun écoulement ne se produit jusqu'à ce qu'une valeur critique soit atteinte. Celle-ci correspond à la vidange des pores de plus grands diamètres et la succion correspondante est appelée pression d'entrée d'air h_g . Au fur et à mesure que la succion croît, la quantité d'eau en écoulement devient de plus en plus importante car un nombre supplémentaire de pores de diamètres de plus en plus petits se vident parce qu'ils ne peuvent plus retenir l'eau (la pression capillaire est inversement proportionnelle au rayon du pore). La quantité d'eau disponible dans le sol à l'équilibre est fonction des dimensions et du volume des pores remplis d'eau c'est à dire de la succion matricielle (Bear, 1988).

Quand un échantillon est initialement saturé par un fluide mouillant (eau), le processus par lequel le fluide saturant (eau) est déplacé doucement par le fluide entrant (air) est appelé drainage et la courbe $h = f(\theta)$ qui donne la succion en relation avec la teneur en eau est appelée la courbe de drainage ou courbe de rétention de l'humidité du sol ou courbe caractéristique de l'humidité du sol (Childs, 1940).

Les effets d'adsorption de l'eau à la surface des particules solides du milieu poreux ainsi que la géométrie des pores sont trop complexes pour permettre une modélisation simple de la relation fonctionnelle entre la succion matricielle et l'humidité à partir des caractéristiques fondamentales du sol. Jusqu'à présent il n'existe pas de théorie générale satisfaisante pour prédire la fonctionnelle de la courbe de rétention. Seuls des modèles plus ou moins empiriques existent pour la décrire dans des échelles de succions limitées.

La courbe de rétention est fortement influencée par la texture des sols mais aussi par leur structure du sol (effet du compactage).

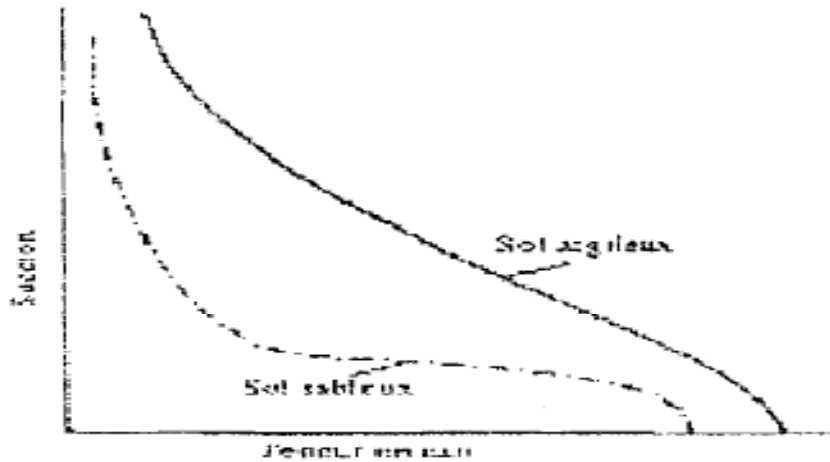


Figure I.4 : Courbes de rétention dans le cas d'un sol sableux et d'un sol Argileux

Le processus par lequel un fluide mouillant (eau) déplace un fluide non mouillant (air) qui saturait initialement un échantillon de milieu poreux est appelé imbibition. L'imbibition est le déplacement dû uniquement aux forces capillaires. Pour un déplacement vertical, l'équilibre est atteint quand le fluide mouillant s'est accumulé dans les pores qui permettent le plus grand rayon de courbure de l'interface entre les deux fluides c'est à dire les plus petits pores. Dans ces conditions les forces capillaires équilibrent les forces de gravité, la courbe décrivant la relation $h = f(\theta)$ pendant l'imbibition est appelée courbe d'humectation.

12.2-Le phénomène d'hystérésis :

La relation $h(\theta)$ est sujette au phénomène d'hystérésis car pour une même teneur en eau θ on peut avoir des valeurs différentes de succion quand l'équilibre est atteint par imbibition ou par drainage. Ainsi la connaissance du degré de saturation ne permet pas seule de connaître la succion et vice versa, sans la connaissance de l'historique d'humectation- dessèchement de l'échantillon étudié.

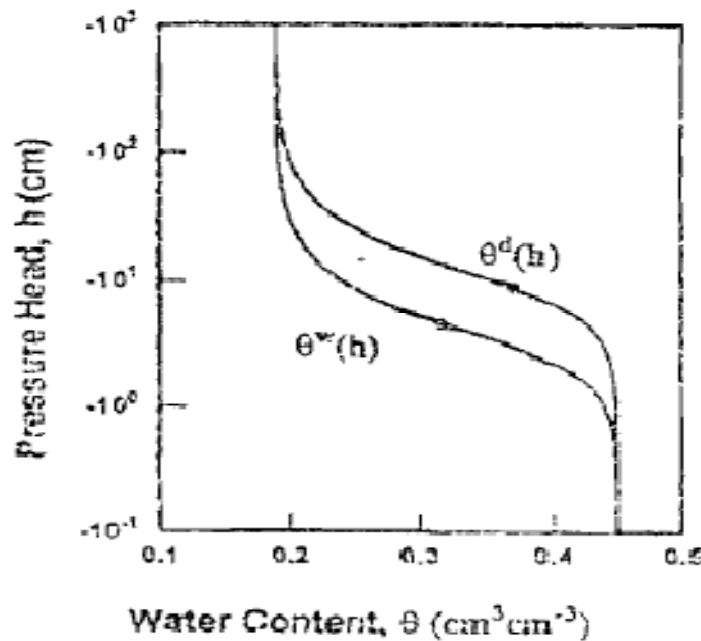


Figure I.5: Mise en évidence du phénomène d'hystérésis sur la courbe de rétention d'un sol

θ^d : courbe de drainage.

θ^w : courbe d'humectation.

La figure (I.5) montre une courbe caractéristique typique avec mise en évidence du phénomène d'hystérésis. Il est possible de commencer le processus d'imbibition à partir de n'importe quel point de la courbe de drainage et vice versa (courbes secondaires), de cette façon, la pression capillaire dépend non seulement de la saturation à un instant donné mais aussi de l'historique de l'échantillon étudié. Pour une pression capillaire donnée, une plus grande valeur de saturation est obtenue pendant le drainage que pendant l'imbibition. L'effet de l'hystérésis en physique du sol peut être attribué à plusieurs facteurs:

- ▼ La non uniformité géométrique des pores individuels (qui sont en général des vides de forme irrégulière interconnectés par des passages plus petits), qui aboutit à l'effet dit de la « bouteille d'encre »

- ▼ L'effet de l'angle de contact dit « effet de la goutte de pluie» pour lequel le rayon de courbure est supérieur pour un ménisque qui humecte que pour celui d'un

ménisque qui draine une teneur en eau donnée, la succion sera donc plus grande en drainage qu'en imbibition.

▼ La présence de poches d'air piégées tend à réduire elle aussi la teneur en eau des sols fraîchement humectés. Pendant le cycle humectation - drainage, l'entrée de l'air peut isoler des gouttes d'eau.

12.3-La courbe de la conductivité hydraulique $K(h)$:

La succion matricielle est due à l'affinité physique de l'eau à la surface des particules du sol et aux faibles diamètres des pores capillaires. Quand un sol est saturé, tous les pores sont remplis d'eau et ont une conductivité hydraulique relative à l'eau maximale. Quand le sol devient non saturé, une partie de l'espace poral se remplit d'air et la surface conductrice d'une section d'écoulement décroît de façon correspondante.

Dans le cas de la zone non saturée nous avons la présence de l'eau et de l'air dans les pores, introduisons la notion de perméabilité relative à l'eau k_{rw} définie par le rapport de la conductivité hydraulique à la teneur en eau θ à celle à la saturation naturelle k_{sat} ($((\theta)_{sat}$ proche de Φ)

$$k_{rw} = \frac{k(\theta)}{k_{sat}} \quad (I.26)$$

k_{rw} : la perméabilité relative à l'eau.

$K(\theta)$: la perméabilité en fonction de la teneur en eau.

K_{sat} : la perméabilité à saturation

La perméabilité relative k_{rw} dépend uniquement de la saturation en eau.

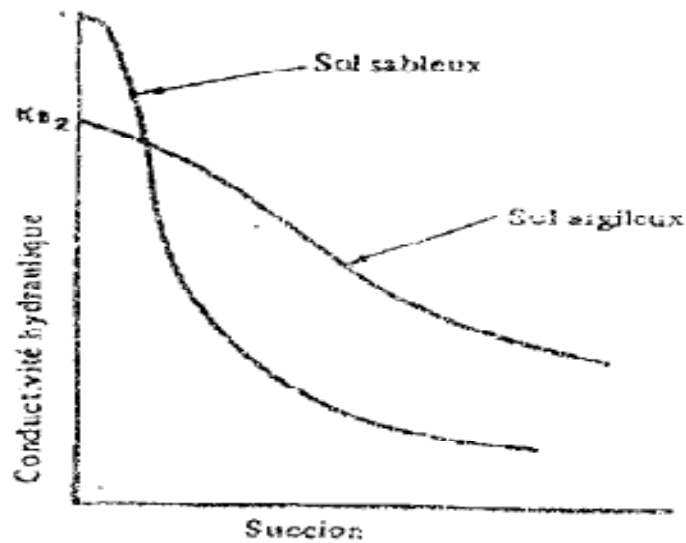


Figure I.6 : Courbe de la conductivité hydraulique en fonction de la succion du sol

La différence la plus importante entre les écoulements non saturé; et saturé réside dans la conductivité hydraulique. En effet, au fur et à mesure que la succion augmente ce sont des pores de plus en plus grands et aussi les plus conducteurs qui se vident les premiers, et laissant l'écoulement se faire uniquement dans les pores plus petits. Les pores vides doivent aussi être contournés ce qui entraîne une augmentation de la tortuosité pendant le drainage.

La perméabilité relative est affectée par l'interférence entre l'eau et l'air dans l'espace poreux à cause de leur différence de viscosité. Cela se traduit par le fait que la somme des perméabilités relatives à l'eau et à l'air n'est pas égale à 1

$(k_{rw} + k_{ra} \neq 1)$ (Bear, 1988).

Dans les sols à texture grossière, presque toute l'eau reste parfois dans les interstices aux points de contact entre les particules formant ainsi des poches d'eau séparées et discontinues. Ceci explique que la transition de la saturation à la non saturation entraîne en général une baisse rapide de la conductivité hydraulique qui peut diminuer de plusieurs ordres de grandeur au fur et à mesure que la succion passe de 0 à 10^5 Pa.

La conductivité des sols sableux non saturés décroît plus vite et devient même inférieure à celle des sols argileux au fur et à mesure que la succion augmente. Il n'existe pas d'équation basée sur des données fondamentales et valable dans tous les cas qui puissent relier la conductivité hydraulique à la succion ou à l'humidité. La relation entre la conductivité hydraulique et la pression dépend aussi du phénomène d'hystérésis car à une même pression d'eau donnée, un sol qui se dessèche contient plus d'eau qu'un sol qui s'humecte. Cependant la relation $K(\theta)$ semble moins affectée par le phénomène de l'hystérésis que la relation $h(\theta)$ (Topp et Miller, 1966 ; Poulvassilis, 1969).

En effet la relation $K(h)$ montre plus d'hystérésis que la relation $K(\theta)$, probablement à cause de l'hystérésis très fort de la relation $h(\theta)$ (Klute, 1967).

13 -Sols saturés (Contraintes effectives) :

13.1-Principe des contraintes effectives :

À l'intérieur d'un massif de sol, la pression de l'eau ou la pression de l'air s'appliquent en chaque point et se combinent aux contraintes totales pour induire le comportement local du sol. Dans les sols saturés (en eau), il est admis depuis la publication du « principe des contraintes effectives » de Terzaghi (1925) que les déformations des sols ne dépendent pas séparément des contraintes totales et des pressions d'eau mais de leur différence.

On introduit pour cette raison un nouveau type de contraintes, appelées « contraintes effectives » et qui sont reliées de la façon suivante aux contraintes totales et pressions interstitielles.

Le vecteur de contrainte effective $\vec{\sigma}'$ est égal à :

$$\vec{\sigma}' = \vec{\sigma} - u \times \vec{n} \quad (I.27)$$

Avec :

$\vec{\sigma}$: Le vecteur de contrainte totale.

$\vec{n}$: Le vecteur unitaire de la normale à la surface δS .

u : La pression interstitielle.

$\vec{\sigma}'$: Le vecteur de contrainte effective

Cette relation s'écrit aussi souvent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma' = \sigma - u \\ \tau' = \tau \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(I.28)} \\ \text{(I.29)} \end{array}$$

Avec :

σ' : contrainte effective normale.

σ : contrainte totale normale.

u : pression interstitielle.

τ : contrainte totale tangentielle.

τ' : contrainte effective tangentielle.

Comme la pression de l'eau n'a pas d'influence sur les contraintes tangentielles,

τ et τ' sont le plus souvent appelées indistinctement « contrainte tangentielle ».

Le principe des contraintes effectives affirme que la contrainte effective ainsi définie détermine le comportement mécanique du sol saturé, ce qui signifie notamment qu'il n'y a pas de déformations sans variations des contraintes effectives et inversement.

Il en résulte qu'une augmentation égale et simultanée de la contrainte totale normale et de la pression interstitielle est sans effet sur l'état de déformation du sol.

Nota1:

Le principe des contraintes effectives est valable lorsque la rigidité de l'empilement des particules qui constitue le squelette du sol est faible devant la rigidité des particules elles-mêmes et celle de l'eau. Il ne s'applique plus en particulier dans le cas des roches et des sols dont les particules sont cimentées.

Nota 2 :

Lorsque les particules des sols sont bien individualisées et ont peu d'interaction avec l'eau interstitielle (graves et sables propres), on peut montrer que les contraintes effectives sont les « contraintes inter granulaires », qui se transmettent par les particules dans la masse du sol. Dans le cas des argiles, cette démonstration n'est pas convaincante et le concept de contraintes effectives doit être admis comme un principe validé par l'expérience.

13.2-Exemple contraintes géostatiques et nappe au repos :

Dans un massif de sol saturé à surface horizontale, baigné par une nappe en équilibre, on peut calculer la contrainte totale verticale σ_v et la pression de l'eau u au point P situé à la profondeur z :

*Pour la contrainte totale verticale, l'équilibre de la couche de sol située au-dessus du point P implique que la contrainte σ_v soit égale à :

$$\sigma_v = \gamma \times g \times z = \rho \times z \quad (I.30)$$

Avec :

γ : masse volumique du sol (saturé).

g : accélération de la pesanteur, habituellement prise égale à 10 m/s^2 en mécanique des sols.

z : profondeur du point P.

ρ : poids volumique du sol (saturé).

*Pour l'eau qui remplit les pores du sol, la distribution des pressions est la même que dans une nappe en équilibre hydrostatique et la pression interstitielle u est égale à :

$$u = \gamma_w \times g \times z = \rho_w \times z \quad (I.31)$$

Avec :

γ_w : masse volumique de l'eau.

g : accélération de la pesanteur.

z : profondeur du point P, comptée à partir de la surface du sol,

ρ_w : poids volumique de l'eau.

Par conséquent, la contrainte effective verticale au point P est égale à :

$$\sigma_v' = \sigma_v - u = (\gamma - \gamma_w)g \times z = (\rho - \rho_w)z \quad (I.32)$$

Où :

$$\sigma_v' = \gamma' \times z = \rho' \times z \quad (I.33)$$

En introduisant les paramètres γ' et ρ' , appelés respectivement masse volumique déjaugée et poids volumique déjaugé et égaux à :

$$\begin{cases} \gamma' = \gamma - \gamma_w \\ \rho' = \rho - \rho_w \end{cases} \quad (I.34)$$

Les contraintes calculées dans l'hypothèse d'un massif homogène à surface horizontale sont appelées contraintes géostatiques.

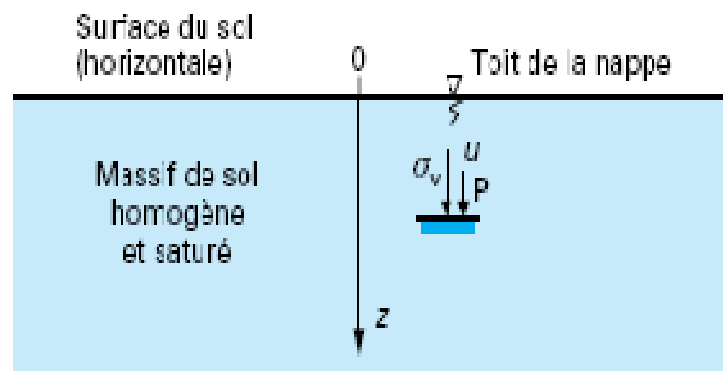


Figure I.7 : Contraintes géostatiques et nappe au repos

13.3- Interaction entre les phases solide et liquide :

La perte de charge suivant l'écoulement de l'eau dans le sol traduit la dissipation d'énergie résultant de l'interaction de l'eau avec les particules du sol. Inversement, l'eau en mouvement exerce sur ces particules une action appelée « pression ou poussée d'écoulement ».

Cette pression d'écoulement s'ajoute à la pression qu'exerce sur le sol l'eau en équilibre hydrostatique (poussée d'Archimède) et qui conduit à calculer dans un sol baigné par une nappe au repos un poids volumique déjaugé.

14-Expression de la pression d'écoulement :

14.1- Écoulement unidimensionnel :

On considère deux massifs de sol identiques, dont l'un est baigné par une nappe au repos et l'autre est le siège d'un écoulement vertical dirigé vers le bas. Dans chaque cas, le sol est recouvert d'une couche d'eau d'épaisseur H . À droite, l'eau s'écoule à travers le sol vers un réservoir, dont le déversoir, situé à la profondeur D sous la surface de l'eau, fixe le niveau de la charge hydraulique à la limite inférieure de la couche de sol.

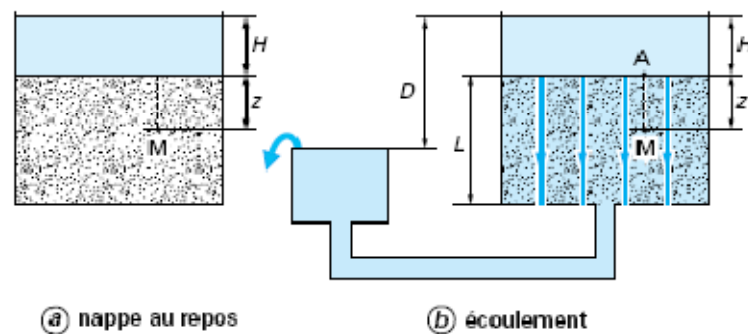


Figure I.8: poussée d'écoulement (écoulement unidimensionnel)

L'axe vertical est dirigé vers le bas et son origine est fixée au niveau du point A, de sorte que la charge hydraulique au point A est égale à H .

En un point M, situé à la profondeur z sous la surface du sol, les contraintes verticales et la pression de l'eau valent :

$$\sigma_v = (\gamma \times z) + (\gamma_w \times H) \quad (I.36)$$

$$u = \gamma_w(z + H) \quad (I.37)$$

$$\sigma_v' = (\gamma - \gamma_w)z \quad (I.38)$$

$$\sigma_v = (\gamma \times z) + (\gamma_w \times H) \quad (I.39)$$

$$u = \gamma_w(z + H - \delta h) \quad (I.40)$$

Avec :

u : la pression interstitielle de l'eau.

σ_v : la contrainte verticale du sol.

σ_v' : la contrainte effective verticale du sol.

γ_w : poids volumique de l'eau.

γ : poids volumique apparent du sol.

z : la profondeur du point P jusqu'à la surface du sol.

δh : perte de charge dans l'écoulement entre les points A et M.

H : perte de charge totale de l'écoulement.

(I.41)

$$\sigma_v' = (\gamma - \gamma_w)z - (\gamma_w \times \delta h) = (\gamma - \gamma_w)z + i \gamma_w \times z$$

On en déduit :

(I.42)

$$i = -\frac{\delta h}{z} = \frac{D}{L}$$

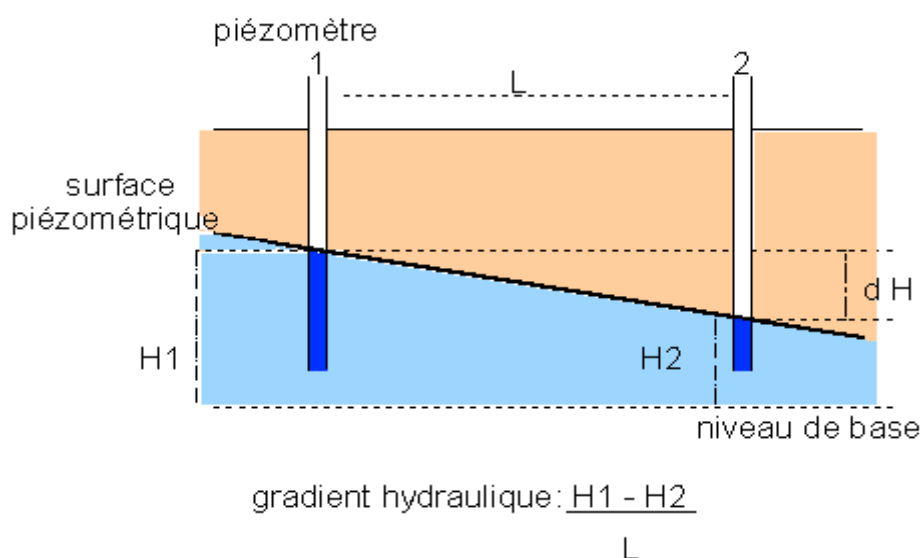


Figure I.9: calcul du gradient hydraulique avec 2 piézomètres

Avec :

i : gradient hydraulique.

D'où :

$$\sigma_v' = (\gamma' + i\gamma_w)z \quad (I.43)$$

L'écoulement fait donc apparaître, en plus du déjaugage, une force volumique égale à $i\gamma_w$ et dirigée dans le sens de l'écoulement.

14.2- Cas général :

On démontre que, dans le cas général, l'écoulement dans un sol saturé a pour effet :

*de déjauger le sol, dont le poids volumique γ est remplacé par le poids volumique déjaugé

$$\gamma' = \gamma - \gamma_w \quad (I.44)$$

*d'exercer sur les particules du sol une pression d'écoulement égale à γ_w par unité de volume, avec le vecteur de gradient hydraulique.

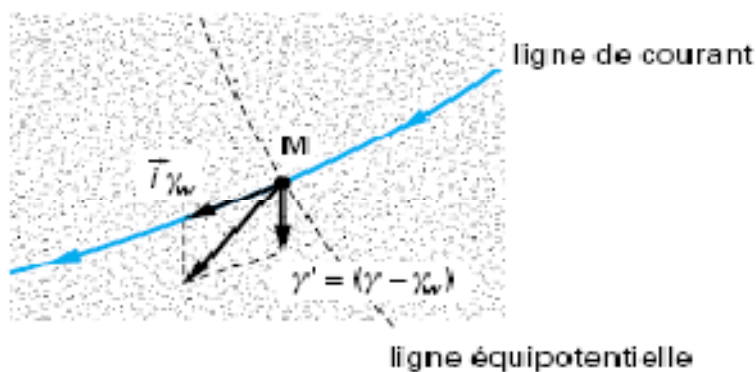


Figure I.10 : pression de l'eau (cas générale)

Le poids volumique du sol déjaugé est donc réduit de $i\gamma_w$. Si la contrainte effective verticale σ_v' vient à s'annuler, pour $i\gamma_w = \gamma'$, le sol perd toute résistance. La valeur correspondant du gradient hydraulique est appelée « gradient hydraulique critique »

Notée i_c :

$$i_c = \frac{\gamma'}{\gamma_w} \quad (I.45)$$

Si l'on se reporte au réseau d'écoulement autour de la palplanche, on a déjà noté que le gradient hydraulique i est maximal au voisinage du pied de la palplanche. Si le gradient hydraulique moyen i_m sur la longueur de la fiche de la palplanche est supérieur au gradient hydraulique critique, c'est-à-dire si :

$$i_m > \frac{\gamma'}{\gamma_w} \quad (I.46)$$

Le sol peut se soulever brusquement avec bouillonnement. Ce phénomène est appelé « Soulèvement hydraulique » où « phénomène de renard ».

Il présente un réel danger auquel il faut prendre garde lors de l'ouverture des fouilles sous la nappe.

15-Loi d'écoulement de l'eau dans le sol :

15.1-Charge hydraulique :

Pour décrire les mouvements des fluides en mécanique des fluides, on utilise la notion de la charge hydraulique ; qui est une énergie potentielle par unité de volume de fluide ; pour l'écoulement de l'eau ; la charge hydraulique h a pour expression (théorème de Bernoulli):

$$h = \frac{u}{\rho_w \times g} + z + \frac{v^2}{2 \times g} \quad (I.47)$$

Avec :

u : pression de l'eau.

ρ_w : masse volumique de l'eau.

g : accélération de la pesanteur.

V : vitesse de l'écoulement de l'eau.

z : côte (altitude) du point considéré, comptée positionnement vers le haut à partir d'un niveau de référence donnée.

La charge hydraulique contient trois termes : les deux premiers correspondent à l'énergie des forces extérieures et le troisième à l'énergie cinétique de l'eau en mouvement.

La vitesse de l'eau dans le sol est en générale très faible, pour cette raison le terme de l'énergie cinétique est négligeable en mécanique des sols.

$$h = \frac{u}{\rho_w g} + z \quad (\text{I.48})$$

h : La charge hydraulique a la dimension d'une longueur et est généralement exprimée en mètre(m).

La pression interstitielle u se déduit de la charge hydraulique par la relation :

$$u = \rho_w g (h - z) \quad (\text{I.49})$$

Remarque :

h : est la côte à laquelle remonterait l'eau dans un tube placé dans le massif de sol.

15.2-Gradient hydraulique :

Le gradient hydraulique est un vecteur défini comme l'opposé du gradient de la charge hydraulique h :

$$\vec{i} = -\vec{\text{grad}} h \quad (\text{I.50})$$

Il a pour composantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} i_x = - \frac{\delta h}{\delta x} \end{array} \right. \quad (I.51)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i_y = - \frac{\delta h}{\delta y} \end{array} \right. \quad (I.52)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i_z = - \frac{\delta h}{\delta z} \end{array} \right. \quad (I.53)$$

15.3-Surfaces équipotentiellles et surfaces iso pièzes :

Les surfaces sur lesquelles la charge hydraulique est constante sont appelées « Surfaces équipotentiellles ».

Les surfaces sur lesquelles la pression de l'eau est constante sont appelées « Surfaces iso pièzes ».

15.4- Vitesse d'écoulement :

Dans un sol (ou milieu poreux), les pores qui séparent les particules et sont offerts à la circulation de l'eau ont des dimensions et des formes très variables. Les molécules d'eau suivent donc une trajectoire sinueuse et irrégulière qu'il n'est pas possible de décrire simplement.

On est donc conduit, faute de pouvoir raisonner sur les vitesses réelles, à introduire une vitesse moyenne dite « vitesse d'écoulement », définie comme la limite du rapport $\frac{dQ}{dS}$ du débit dQ à travers une section dS et de normale $\vec{n}$.

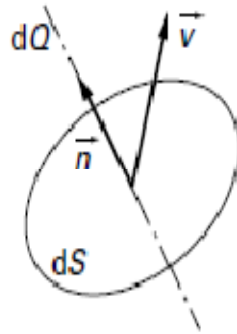


Figure I.11 : La vitesse d'écoulement

On démontre que, dans le cas d'un fluide incompressible, le rapport $\frac{dQ}{dS}$ est de la forme :

$$\frac{dQ}{dS} = \vec{v} \cdot \vec{n} \quad (I.54)$$

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ étant défini, en chaque point, indépendamment de l'orientation de la section dS et de la normale $\vec{n}$ à cette section. Ce vecteur est appelé « vitesse d'écoulement » (ou vitesse de filtration). C'est une vitesse moyenne apparente, le débit étant rapporté à la section totale du sol (particules + vides).

***Cas d'un milieu isotrope :** la relation de la vitesse dans un milieu isotrope et homogène est donnée par :

$$\vec{V} = k \times \vec{\text{grad}} h = k \times \vec{i} \quad (I.55)$$

$\vec{V}$: le vecteur de vitesse d'écoulement.

h : la charge hydraulique.

K : le coefficient de perméabilité du sol ; qui est dans un milieu isotrope $k=c^{ste}$

***Cas d'un milieu anisotrope :** elle est donnée par :

$$\vec{V} = \vec{k} \text{ grad } h = \vec{k} \times \vec{i} \quad (\text{I.56})$$

$\vec{k}$: tenseur de perméabilité a six composantes.

On définit également en chaque point la vitesse moyenne vraie, rapportée à la seule section des vides offerts à l'écoulement et notée $\vec{v}$.

La vitesse moyenne apparente et la vitesse moyenne vraie sont liées par la relation :

$$\vec{v} = \frac{\vec{V}}{\eta} \quad (\text{I.57})$$

Avec :

η : porosité du sol.

La vitesse moyenne vraie est un peu plus grande que la vitesse moyenne apparente.

15.5-Lignes et tubes de courant :

On appelle ligne de courant une courbe tangente en chaque point à la vectrice vitesse d'écoulement en ce point. Il s'agit donc de la trajectoire (moyenne) dans le sol de l'eau qui passe par un point. Si cette courbe est rectiligne, l'écoulement est dit linéaire. Par chaque point d'un massif de sol homogène ne passe qu'une seule ligne de courant.

Les lignes de courant qui partent des points d'une courbe fermée de l'espace délimitent un volume appelé « tube de courant », qui constitue une sorte de tuyau virtuel : l'eau qui entre dans un tube de courant ne peut sortir latéralement de ce volume en coupant les lignes de courant.

15.6-Réseau d'écoulement:

Dans un écoulement bidimensionnel plan en milieu homogène et isotrope, l'ensemble des courbes équipotentielles et des lignes de courant constitue un réseau orthogonal

appelé « réseau d'écoulement ». La figure (I.12) montre le réseau d'écoulement autour d'une palplanche fichée dans un milieu perméable, limité par un substratum imperméable horizontal.

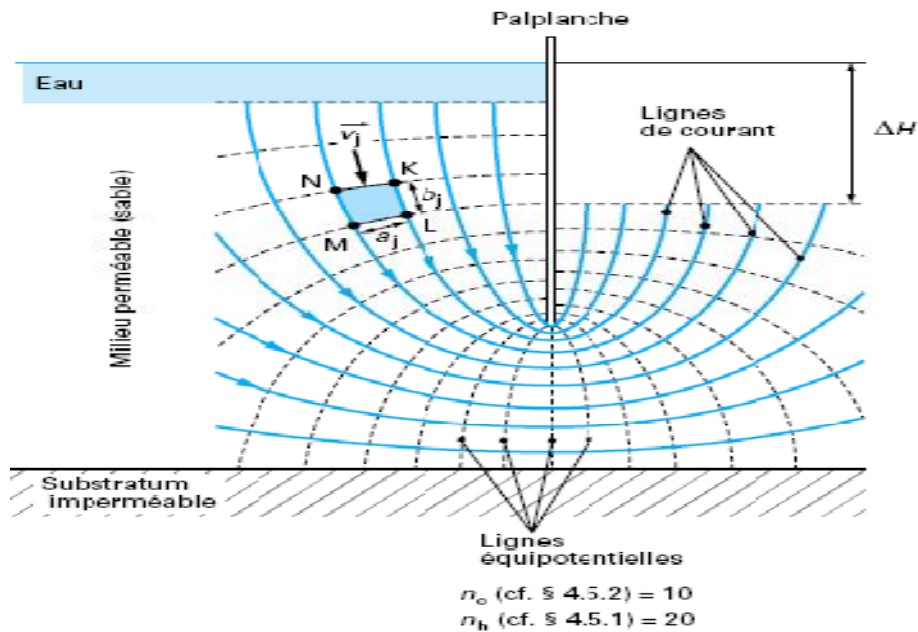


Figure I.12 : Réseau d'écoulement autour d'une palplanche

15.6.1-Calcul des pressions et du gradient hydraulique :

Les lignes équipotentiels du réseau sont habituellement tracées de manière que la perte de charge δh entre deux équipotentiels successives soit constante. Si ΔH est la différence de charge entre la limite horizontale amont et la limite horizontale aval de l'écoulement (supposée nulle) et n_h le nombre d'intervalles entre équipotentiels, la perte de charge δh est égale à :

$$\delta h = \frac{\Delta H}{n_h} \quad (I.58)$$

En un point M du réseau situé sur la j équipotentielle, la charge hydraulique vaut :

$$h(M) = \Delta H - (j - 1) \delta h = \Delta H - \frac{(j-1)\Delta H}{n_h} = \Delta H \left[1 - \frac{(j-1)}{n_h} \right] \quad (I.59)$$

En utilisant la définition de la charge hydraulique :

$$h = \frac{u}{\gamma_w} + z \quad (I.60)$$

On peut déduire de $h(M)$ la valeur de la pression interstitielle au point M, soit :

$$u(M) = \gamma_w [h(M) - z(M)] \quad (I.61)$$

Le gradient hydraulique moyen entre deux points N et M, situés sur une même ligne de courant aux intersections avec deux équipotentiels successives, est approximativement égal à :

$$i_{NM} = \frac{\delta h}{NM} \quad (I.62)$$

Le gradient hydraulique est donc d'autant plus grand que les lignes équipotentiels sont rapprochées. Dans le cas particulier de la palplanche, on constate que les gradients hydrauliques sont les plus élevés au pied de la palplanche.

15.6.2-Calcul des débits :

a-par la loi de Darcy :

Dans un tube de courant limité par deux lignes de courant, le débit est constant. Si l'on note a_i et b_j les côtés de la maille élémentaire KLMN du réseau figure (I.12), q_j le débit dans le tube de courant et v_j la vitesse d'écoulement sur KL, il vient :

$$q_j = v_j \times a_j = k_{ij} \times a_j = k \times \frac{\delta h}{b_j} a_j \quad (I.63)$$

D'où le débit total :

$$Q = k \times \delta h \times \sum \frac{a_j}{b_j} \quad (I.64)$$

On trace aussi en général le réseau d'écoulement de telle manière que le débit soit le même dans chaque tube de courant limité par deux lignes de courant successives

($\frac{a_j}{b_j} = \text{constante}$). Le rapport $\frac{a_j}{b_j}$ est d'ailleurs, en général, pris égal à 1. On obtient alors, en notant n_c le nombre de tubes de courant, l'expression du débit :

$$Q = k \times \delta h \times n_c \quad (I.65)$$

$$Q = k \times \Delta H \times \frac{n_c}{n_h} \quad (I.66)$$

b-Par la formule analytique de Dupuit :

Elle est donnée par la formule analytique suivante :

$$Q = \frac{K_s \times D}{2 \times L} (h_1^2 - h_2^2) \quad (I.67)$$

Tel que :

h_1 : la hauteur de l'eau en amont.

h_2 : la hauteur de l'eau en aval.

Q : le débit total de l'écoulement.

D : un coefficient qui tient compte des caractéristiques hydrauliques du sol et de la géométrie du système d'écoulement ($D = \rho_w \times g$).

D'où :

$$Q = \frac{K_s \times \rho_w \times g}{2 \times L} (h_1^2 - h_2^2) \quad (I.68)$$

15.7- La perméabilité du sol :

La perméabilité est une propriété d'un milieu aquifère de se laisser traverser par l'eau sous pression, elle a une dimension d'une vitesse car le gradient hydraulique i est sans dimension (rapport de deux longueurs), il s'exprime en général en m/s.

Le coefficient de perméabilité (appelé aussi « conductivité hydraulique ») varie largement avec la nature et l'état du sol. Il est donné généralement en puissances de 10 (10^n ou 2×10^n ou $3,5 \times 10^n$, etc.). Ses valeurs vont de 1 m/s pour les graviers très perméables à 10^{-11} m/s pour les argiles très peu perméables.

Le coefficient de perméabilité dépend à la fois des caractéristiques du sol et de celles de l'eau. On montre qu'il est de la forme :

$$k = \frac{K}{\mu} \quad (I.69)$$

Avec :

K : coefficient caractérisant l'empilement des particules du sol (ou le réseau des vides), appelé « perméabilité » ou « perméabilité géométrique » ou « perméabilité intrinsèque » et ayant la dimension d'une surface.

μ : viscosité dynamique de l'eau.

γ_w : poids volumique de l'eau.

****La perméabilité des sols stratifiés :**

Sous forme de couches superposées, sensiblement horizontales et de perméabilités différentes, on peut remplacer cette succession de couches par une couche unique de perméabilité équivalente (donne un même débit sous la même charge) :

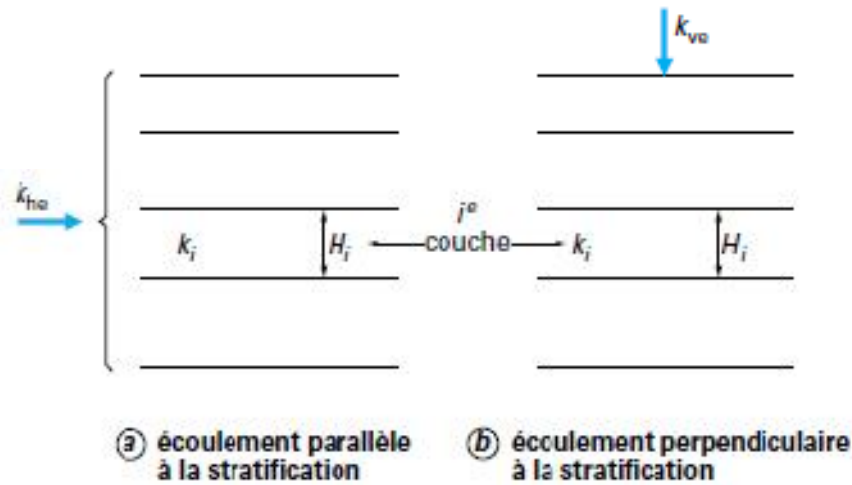


Figure I.13: écoulement parallèle et perpendiculaire a la stratification

1- **Pour un écoulement parallèle à la stratification** : le coefficient de perméabilité équivalent K_{he} :

$$K_{he} = \frac{\sum K_i H_i}{\sum H_i} \quad (I.70)$$

2- **Pour un écoulement perpendiculaire à la stratification** : le coefficient de perméabilité équivalent K_{ve} :

$$K_{ve} = \frac{\sum H_i}{\frac{\sum H_i}{K_i}} \quad (I.71)$$

Ů Remarques :

1- Dans tous les cas : $K_{ve} \leq K_{he}$

2- Le coefficient de perméabilité dépend aussi de la température (une chute de température de 30C° à 5C° engendre une réduction de la perméabilité de 50%) cette réduction peut être constatée dans toutes les nappes superficielles.

Tableau I.1 : quelques valeurs de perméabilité du sol

Nature du sol	Ordre de grandeur de K en m/s	Dégré de perméabilité
Gravier moyen à gros	10^{-3} à 10^{-1}	Très élevés
Petits graviers sable	10^{-3} à 10^{-5}	Assez élevés
Sable très fin sable limoneux	10^{-5} à 10^{-7}	Faible
Limon compact, argile silteuse	10^{-7} à 10^{-9}	Très faible
Argile franche	10^{-9} à 10^{-12}	Pratiquement imperméable

15.7.1-Mesure en laboratoire du coefficient de perméabilité du sol :

Le coefficient de perméabilité des sols peut être mesuré en laboratoire, sur des échantillons de petit volume (quelques centaines de centimètres cubes) où sur le terrain dans des forages. Les essais de laboratoire, qui sont décrits ici, sont habituellement effectués sur des éprouvettes de sol homogène, taillées dans les carottes prélevées sur le terrain. Les essais de terrain, qui peuvent tenir compte des hétérogénéités du massif de sol (présence de strates de matériaux plus ou moins perméables, de fissures, de failles,...) donnent souvent une image différente, à plus grande échelle et plus représentative, de la perméabilité réelle du massif de sol.

La mesure directe de la perméabilité des sols en laboratoire s'effectue selon deux procédures, dites « à charge constante » et « à charge variable ». Les essais à charge constante sont mieux adaptés aux sols de forte perméabilité et les essais à charge variable aux sols de faible perméabilité.

a- Essais à charge constante :

Les essais à charge constante imposent une différence de charge Δh constante entre les deux extrémités d'une éprouvette de sol d'épaisseur L et de section A et l'on mesure la quantité d'eau $V_w(t)$ qui traverse l'éprouvette au cours du temps.

Le coefficient de perméabilité est égale à :

$$k = \frac{\text{vitesse d'écoulement}}{\text{gradient hydraulique}} = \frac{v_w(t_2) - v_w(t_1)}{A(t_2 - t_1)} \times \frac{L}{\Delta h} \quad (I.72)$$

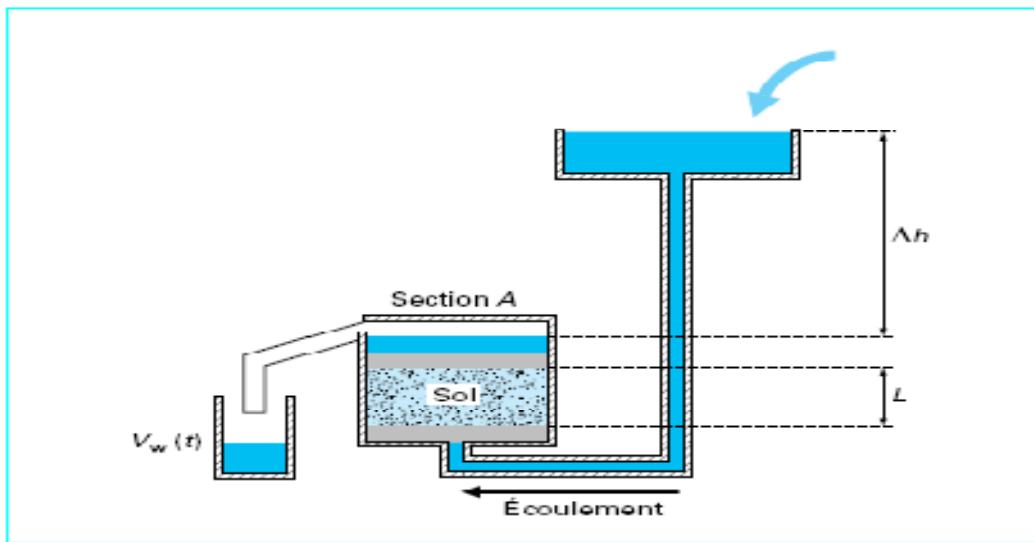


Figure I.14 : Essai de perméabilité à charge constante

Où :

$V_w(t_1)$ et $V_w(t_2)$ sont respectivement les quantités d'eau qui ont traversé l'éprouvette aux temps t_1 et t_2 .

b- Essais à charge variable :

Dans les essais à charge variable, on observe l'écoulement à travers l'éprouvette de l'eau contenue dans un long tube de faible section a . À mesure que l'eau traverse l'éprouvette, la différence de charge entre les deux extrémités diminue et la vitesse d'écoulement diminue également, jusqu'à tendre vers un état d'équilibre. La loi de

Darcy peut s'écrire à chaque instant en fonction de la différence de charge entre les deux extrémités de l'éprouvette :

$$Q(t) = k \times \frac{\Delta h(t)}{L} \times a \quad (I.73)$$

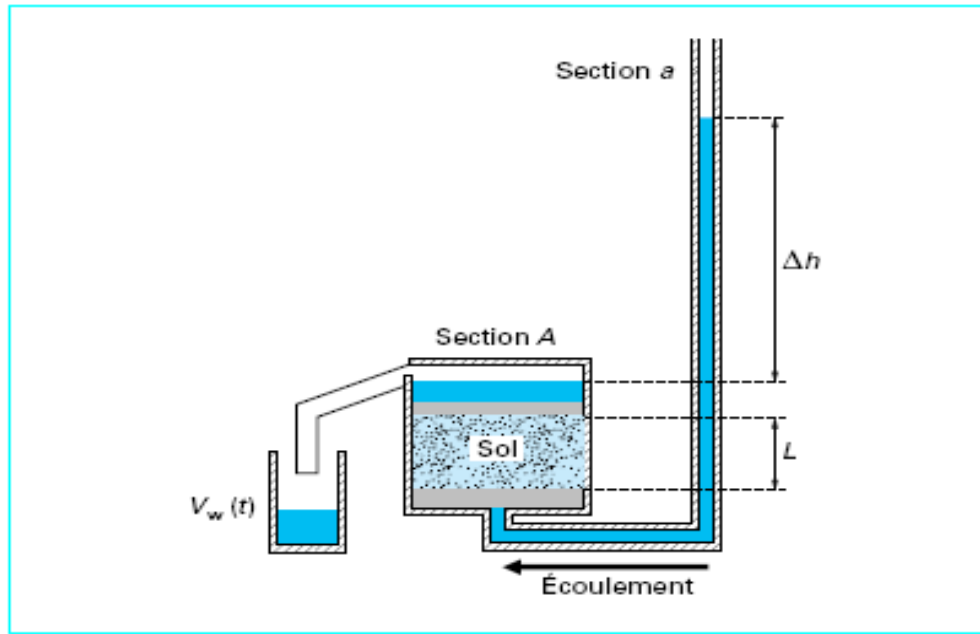


Figure I.15: Essai de perméabilité à charge variable

La différence de charge $\Delta h(t)$ varie avec le débit $Q(t)$ de l'eau qui traverse l'éprouvette :

$$Q(t) = - a \times \frac{d[\Delta h(t)]}{dt} \quad (I.74)$$

On en déduit l'équation différentielle que vérifie la différence de charge $\Delta h(t)$, c'est-à-dire la hauteur d'eau dans le tube :

$$\frac{d[\Delta h(t)]}{dt} = - \frac{A}{a} \times K \times \frac{dt}{L} \quad (I.75)$$

Puis la loi de variation de $\Delta h(t)$ en fonction du temps :

$$\ln \frac{\Delta h(t)}{\Delta h(t_0)} = -\frac{A}{a} \times \frac{K}{L} (t-t_0) \quad (I.76)$$

Où :

$$\Delta h(t) = \Delta h(t_0) \exp\left[-\frac{A}{a} \times \frac{K}{L} (t-t_0)\right] \quad (I.77)$$

Pour déterminer le coefficient de perméabilité k , on peut représenter graphiquement les variations du logarithme de la hauteur d'eau dans le tube en fonction du temps :

k est proportionnel à la pente de la droite qui passe par les points expérimentaux.

On peut aussi calculer directement la valeur de k à partir des valeurs de la hauteur d'eau dans le tube pour deux temps t_0 et t_1 :

$$k = \frac{a \times L}{A} \times \frac{1}{t_1 - t_0} \times \ln \frac{\Delta h_0}{\Delta h_1} = 2,3 \times \frac{a \times L}{A} \times \frac{1}{t_1 - t_0} \times \ln \frac{\Delta h_0}{\Delta h_1} \quad (I.78)$$

15.7.2-Mesure en place des coefficients de perméabilité (Essais d'eau) :

Les mesures de perméabilité à petite échelle donnent souvent une vue biaisée de la perméabilité d'un massif de sol et il est important de réaliser en complément des mesures de perméabilité sur le terrain, dites essais d'eau.

On distingue deux types d'essais de perméabilité en place : l'essai ponctuel et l'essai de pompage.

a-Essai ponctuel (Essai Lefranc) :

L'essai ponctuel de perméabilité, appelé aussi essai Lefranc dans les formations meubles ou peu consolidées, est habituellement exécuté en même temps que le forage dans lequel on le réalise.

Il consiste à injecter ou pomper de l'eau à débit constant dans une cavité, limitée latéralement et à sa partie inférieure par la paroi du forage et, à la partie supérieure, par un bouchon étanche. On crée ainsi une variation de charge hydraulique Δh dans la cavité. Lorsque le régime d'équilibre est atteint, le débit Q est lié à la variation de la charge hydraulique et au coefficient de perméabilité k du massif par la relation linéaire :

$$Q = k \times C \times \Delta h \quad (I.79)$$

Avec :

Q : débit constant.

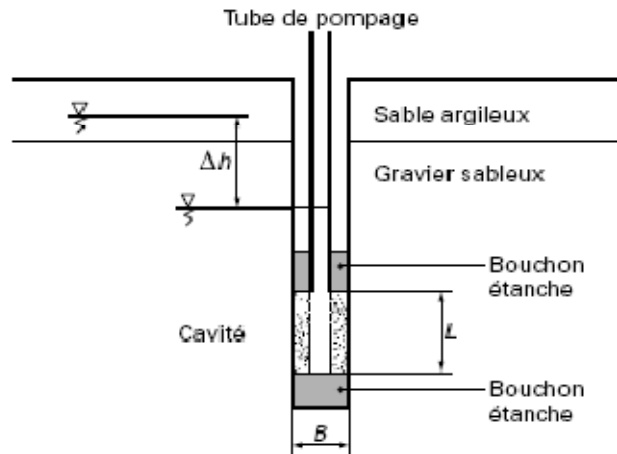
K : coefficient de perméabilité cherché.

C : coefficient dépendant de la forme de cavité.

Δh : variation de charge observée dans la cavité.

En pratique, on assimile la cavité à une sphère de même surface de rayon r . Le coefficient C vaut alors $4\pi r$.

Pour obtenir une meilleure précision, on pompe ou injecte successivement à plusieurs valeurs du débit ; généralement, on préfère injecter.



Caractéristiques de l'essai :

- diamètre de la cavité $B = 400 \text{ mm}$
- hauteur de la cavité $L = 1\,000 \text{ mm}$
- coefficient de forme $C = 3,9$

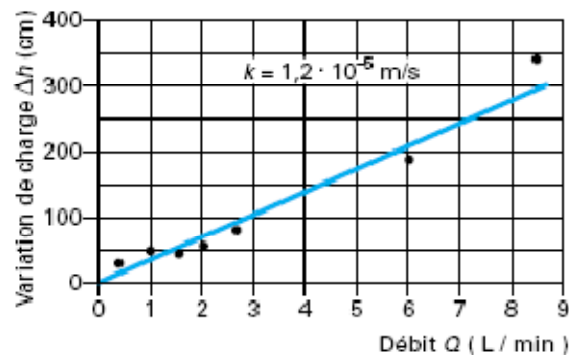


Figure I.16 : Essai Lefranc : interprétation

Dans les terrains peu perméables, on procède d'une manière différente, car les débits sont trop faibles. On augmente ou diminue la charge dans la cavité et on étudie le retour à l'équilibre.

L'essai Lefranc est rapide à réaliser, mais la zone de terrain intéressée par la mesure est peu étendue (de l'ordre de 5 m autour de la cavité). La précision est également faible et il faut réaliser de nombreux essais sur un site pour obtenir la valeur moyenne du coefficient de perméabilité et une idée de l'hétérogénéité du site. L'essai est réalisé soit au fur et à mesure de l'avancement du forage, soit dans les piézomètres.

b- Essai Lugeon :

Dans les formations compactes et fissurées, l'essai ponctuel est réalisé sous pression dans une tranche de forage limitée soit par le fond et un obturateur, soit par deux obturateurs figure (I.17).

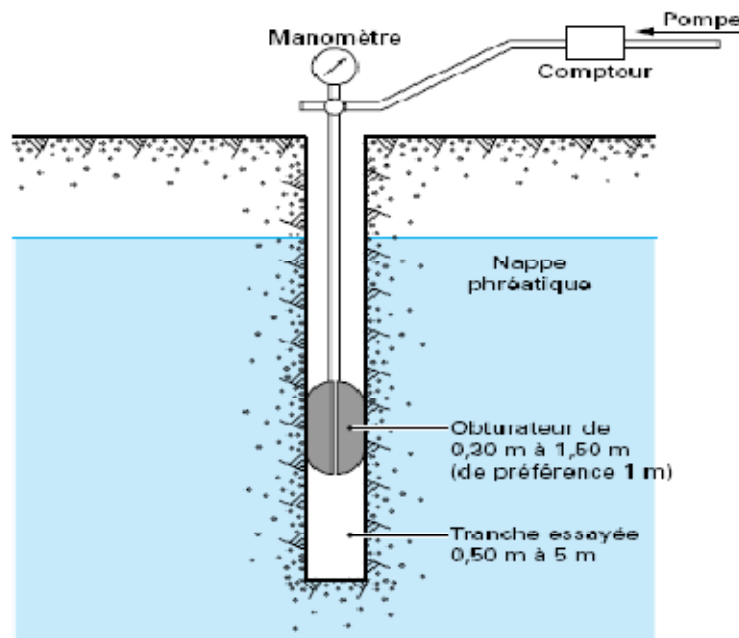


Figure I.17 : Essai Lugeon : principe

Il s'appelle alors essai Lugeon. La réalisation de l'essai Lugeon est délicate. La perméabilité du terrain est exprimée en unités Lugeon.

Elle caractérise surtout l'état de fissuration du massif et la possibilité de circulation de l'eau.

c-Essai de pompage :

L'essai de pompage est destiné à estimer le coefficient de perméabilité global où « en grand » des sols, ainsi que le facteur d'emmagasinement et le rayon d'action du pompage. On le réalise dans un puits de diamètre suffisant pour y descendre une pompe ou une crépine.

Des piézomètres sont disposés autour du puits. On pompe ensuite à débit constant et on suit l'abaissement du niveau de la nappe dans le puits et dans les piézomètres.

15.8-La loi de Darcy :

La loi expérimentale de Darcy a été établie par Henry Darcy (1803-1858).

Elle est notamment utile pour calculer les écoulements souterrains de l'eau ou d'un liquide verticalement à travers le sol vers la nappe ; ou à travers d'un milieu poreux (exemple dans un barrage en terre) Cette loi régissant l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible caractérisé par une viscosité μ à travers d'un milieu poreux caractérisé par une perméabilité K permet notamment de mesurer, modéliser le débit d'eau pouvant (par gravité ou par capillarité) s'écouler à travers un sol ou un échantillon de matériau poreux ; de section A et de longueur L .

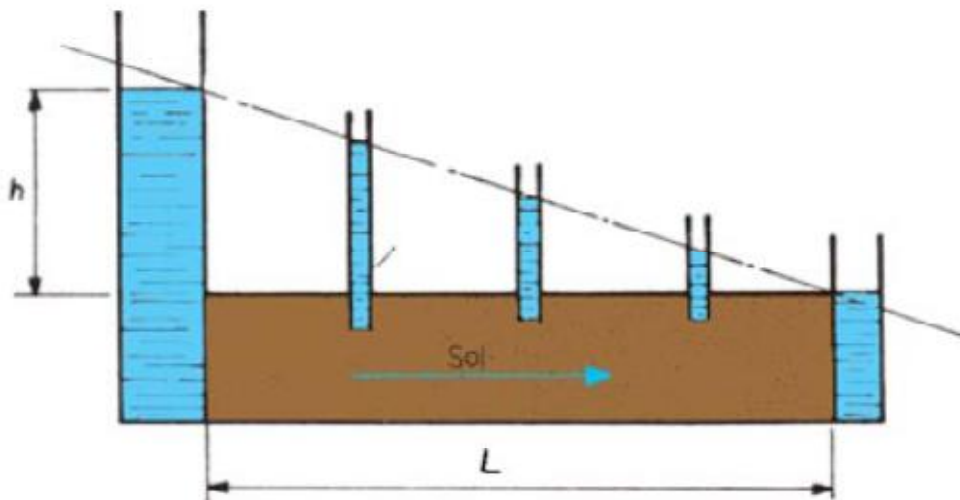


Figure I.18 : expérience illustrant la loi de Darcy

Avec :

$h = \Delta H$: est la différence de hauteur de la nappe phréatique entre les deux extrémités de l'échantillon H_1 et H_2 .

A : est la section de l'échantillon de sol.

La loi de Darcy s'exprime par la formule suivante :

$$Q = K \times A \times \frac{\Delta H}{L} \quad (I.80)$$

Où :

Q : débit volumique.

K : le coefficient de perméabilité ou la conductivité hydraulique de milieu poreux (m/s)

A : la surface de la section étudiée.

$\frac{\Delta H}{L}$: Le gradient hydraulique, où :

ΔH : est la différence des hauteurs piézométrique en amont et en aval de l'échantillon.

L : longueur de l'échantillon.

On a :

$$V = \frac{Q}{A} \quad (I.81)$$

C'est la vitesse de filtration à ne pas confondre avec la vitesse réelle à l'intérieur des pores, cette dernière est donnée par la relation :

$$V_r = \frac{V}{\eta_c} \quad (I.82)$$

η_c : la porosité cinétique.

Du moment que l'énergie cinétique joue un rôle négligeable et que la charge hydraulique se confond pratiquement avec les hauteurs piézométriques, on remplace dans les écoulements en milieux poreux la vitesse moyenne réelle V_r à l'intérieur des pores par la vitesse de filtration v .

Ceci simplifie énormément les calculs, car la vitesse de filtration est une vitesse moyenne macroscopique.

On n'a pas donc à tenir compte des trajectoires réelles des filets liquides qui sont assez complexes du fait de leur tortuosité.

Ceux-ci sont ainsi considérés parallèles et rectilignes, de plus, on peut considérer lors du calcul de débit que l'eau occupe tout le volume du milieu filtrant, y compris celui des grains solides.

15.8.1- Généralisation de la loi de Darcy :

La loi empirique de Darcy a été établie pour un écoulement unidimensionnel dans un milieu poreux isotrope et homogène, ce qui n'est pas toujours le cas, en pratique où la perméabilité horizontale est souvent plus importante que la perméabilité verticale de plus ; pour certains milieux la direction du gradient de la charge ($\vec{i} = -\vec{\text{grad}} h$) n'est pas confondre avec celle de la vitesse d'écoulement $\vec{v}$.

Ainsi pour pouvoir généraliser la loi de Darcy à tous ces cas, on est amené à définir la perméabilité comme une propriété tensorielle, la loi de Darcy généralisée s'écrit alors :

$$\{\vec{V}\} = [K] \{\vec{\text{grad}} h\} \quad (\text{I.83})$$

Où la tenseur de perméabilité $[K]$ est symétrique et de 2^{ème} ordre, de plus il est diagonal par rapport aux directions de ces vecteurs propres.

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{bmatrix}$$

x,y,z, représentent les directions principales d'anisotropie ; elles correspondent aux directions pour lesquelles l'écoulement est effectivement parallèle au gradient de la charge hydraulique.

15.8.2- Limite de validation de la loi de Darcy:

Dans le cas de ces gradients hydrauliques élevés, les calculs sont réalisés grâce à la loi de Darcy généralisée, s'accordent avec les résultats d'expérience.

Cependant, lorsqu'on fait augmenter les valeurs du gradient hydraulique, on observe expérimentalement qu'il n'existe plus de proportionnalité entre ce gradient et la vitesse de filtration, ainsi on est amené à définir un nombre de Reynolds en milieu poreux.

$$R_e = V \frac{d \times \rho}{\mu} \quad (I.84)$$

V : vitesse de filtration.

ρ : masse volumique de fluide.

μ : viscosité dynamique.

d : diamètre moyen des grains (diamètre efficace).

Si :

$1 \leq R_e \leq 10$ Ecoulement purement linéaire.

$10 \leq R_e \leq 100$ Ecoulement transitoire.

$R_e > 100$ Ecoulement turbulent.

Conclusion :

Il est nécessaire de passer par des théories des milieux saturés et non saturés et définir les paramètres intervenant dans la construction du modèle (modèle pour estimer le débit de fuite et la surface de suintement) ainsi que la formule de base nécessaire qui va être utilisée dans l'étude analytique.

chapitre II :

Le phénomène de suintement

Introduction:

L'existence de surfaces de suintement à l'interface entre des nappes libres et le réseau de surface (ou des faces avalées de barrage) est largement évoquée dans la littérature (Muskat, 1937 ; Schneebelli 1966 ; Boufadel et al., 1999 ; etc...). La détermination de la hauteur des surfaces de suintement peut par exemple être justifiée pour évaluer la stabilité de certaines structures, et en particulier des barrages en terre, calculer les débits transitant dans des nappes libres drainées (Muskat, 1937) ou encore estimer les hauteurs de nappe dans un système drainé (Youngs, 1990).

La connaissance des débits aussi bien que des hauteurs de nappe est évidemment essentielle dans une perspective de gestion hydraulique des zones humides (Skaggs et al., 1995).

Nous proposons à présent d'investiguer en détail le phénomène de surface de suintement, d'évaluer son importance potentielle et enfin de proposer une méthode simple de correction des modèles reposant sur l'hypothèse de Dupuit-Forchheimer.

1-Le concept de porosité de drainage :

Dans les modèles saturés, la détermination de la position de la surface libre de la nappe en régime transitoire repose sur l'introduction dans l'équation de continuité d'un paramètre appelé la porosité de drainage.

La définition et la validité de ce paramètre ont fait l'objet de nombreux débats dans la littérature (Youngs, 1960 ; Childs et Pouloussilis, 1962 ; Vachaud, 1968 ; Raats et Gardner, 1974 ; Zimmer, 1988 ; Lehman et al., 1998), et nous renvoyons à la récente contribution de Youngs (1999) pour une synthèse complète.

Historiquement ce paramètre a été considéré comme constant par Boussinesq (1904) ainsi que par les auteurs qui se sont inspirés de son travail. La porosité de drainage est assimilée à la différence entre la teneur en eau à saturation et la capacité de stockage. Ces hypothèses sont en général inexactes.

En effet, lors d'un tarissement vertical monodimensionnel, la teneur en eau de la zone non-saturée au dessus du toit de la nappe évolue au cours du temps : le profil de

teneur en eau de la zone non-saturée n'atteint pas l'équilibre instantanément après chaque mouvement unitaire du toit de la nappe. La porosité de drainage est donc une fonction du temps, de la distance du toit de la nappe à la surface du sol et des conditions initiales d'humidité dans le profil de sol.

Dans l'hypothèse d'un rabattement de nappe lent et long, la valeur de la porosité de drainage tend asymptotiquement vers la différence entre la teneur en eau à saturation et la capacité du stockage (zone non-saturée à l'équilibre). De même, dans le cas de nappes superficielles drainées par un fossé, l'écoulement n'est pas strictement vertical dans la zone non-saturée au dessus de la nappe, et il existe un flux ayant une composante horizontale dans la zone non-saturée. De plus le toit de la nappe a une forme géométrique variable dans le temps et l'espace, ce qui rend la détermination de la porosité de drainage encore plus complexe et nécessiterait un calcul à l'échelle du système des variations de teneur en eau dans la zone non-saturée lors des fluctuations du toit de la nappe.

Enfin, les prélèvements d'eau dans la zone non-saturée et/ou dans la nappe par évapotranspiration posent un autre type de problème. On peut en effet imaginer la situation où la nappe se tarit sous l'effet combiné du drainage gravitaire et de l'évapotranspiration. Comment définir une porosité de « drainage » dans ce contexte Bouarfa (1995) a apporté quelques éléments de réponse en montrant que le terme de porosité de drainage était certes une fonction de la profondeur de la nappe mais aussi de l'intensité du prélèvement. Plus récemment, Chabot (2001) a prolongé cette analyse en s'intéressant aux effets de la répartition spatiale du chevelu racinaire et à la représentation de la fonction « puits » associée.

Dans la pratique, le terme de porosité de drainage peut être réduit à un paramètre de calage du bilan hydrique à la frontière que constitue la surface libre de la nappe. Néanmoins, malgré les lacunes de ce concept en terme de représentativité physique (Vauclin et al., 1976) il reste en revanche très robuste pour un type de sol donné lorsqu'il est utilisé dans une gamme de fonctionnement hydrique bien circonscrite

(Zimmer, 1988). N'étant pas une propriété intrinsèque du sol, son ordre de grandeur doit être déterminé expérimentalement.

2- Simplification des modèles saturés :

Le deuxième niveau de simplification consiste à introduire l'hypothèse de Dupuit-Forchheimer (DF) : la pente de la surface libre de la nappe est supposée faible et l'écoulement strictement horizontal dans le système (i.e. les iso-potentiels sont verticales), ce qui peut se justifier dans le cas de nappe ayant une extension latérale importante, et tant que le rayon de courbure de la surface libre est grand (i.e. l'angle qu'elle fait avec l'horizontale est petit). Cette hypothèse permet une simplification importante de la résolution de l'équation de Laplace aboutissant dans un certain nombre de cas à des solutions analytiques ou numériques simples. Sous ce corps d'hypothèses, l'équation non-linéaire décrivant la surface libre devient l'équation décrivant l'ensemble du système. Elle est alors appelée « équation de Boussinesq » (Youngs, 1999).

Le dernier niveau de simplification consiste à linéariser l'équation de Boussinesq en faisant l'hypothèse que les fluctuations du toit de la nappe sont faibles par rapport à l'épaisseur de celle-ci. On aboutit alors à une équation linéaire de diffusion simple, largement utilisée par les hydrogéologues et connue sous le nom « d'équation de la diffusivité » (Marsily, 1981).

Les modèles développés à partir de l'hypothèse DF sont largement employés dans les calculs de dimensionnement d'ouvrages hydrauliques, en particulier en raison d'un traitement numérique beaucoup plus simple que dans les approches de type « Richards ».

Néanmoins, en ignorant la composante verticale de l'écoulement, l'hypothèse DF engendre des erreurs qui peuvent être significatives dans la détermination des hauteurs de nappe, en particulier proche du bord du fossé où les gradients hydrauliques sont les plus élevés. Ces erreurs peuvent avoir trois origines : (i) la non prise en compte du phénomène de suintement ; (ii) la non prise en compte des

écoulements verticaux sous le fond du fossé si l'imperméable est profond ; (iii) la non prise en compte des composantes verticales dans la zone où elles deviennent non négligeables.

3-Définitions et état des connaissances :

Le phénomène de suintement se caractérise par l'existence d'une surface à travers laquelle l'eau de la nappe sort du système directement en contact avec l'air. Muskat (1937) montre que cette hauteur existe lorsqu'une nappe est drainée par un fossé, du fait des pertes de charge verticales dans le système. C'est une conséquence de la convergence des lignes d'écoulement près du bord du fossé.

Cette surface de suintement correspond ainsi à la différence de niveau entre la surface libre de la nappe et le niveau de l'eau dans la digue.

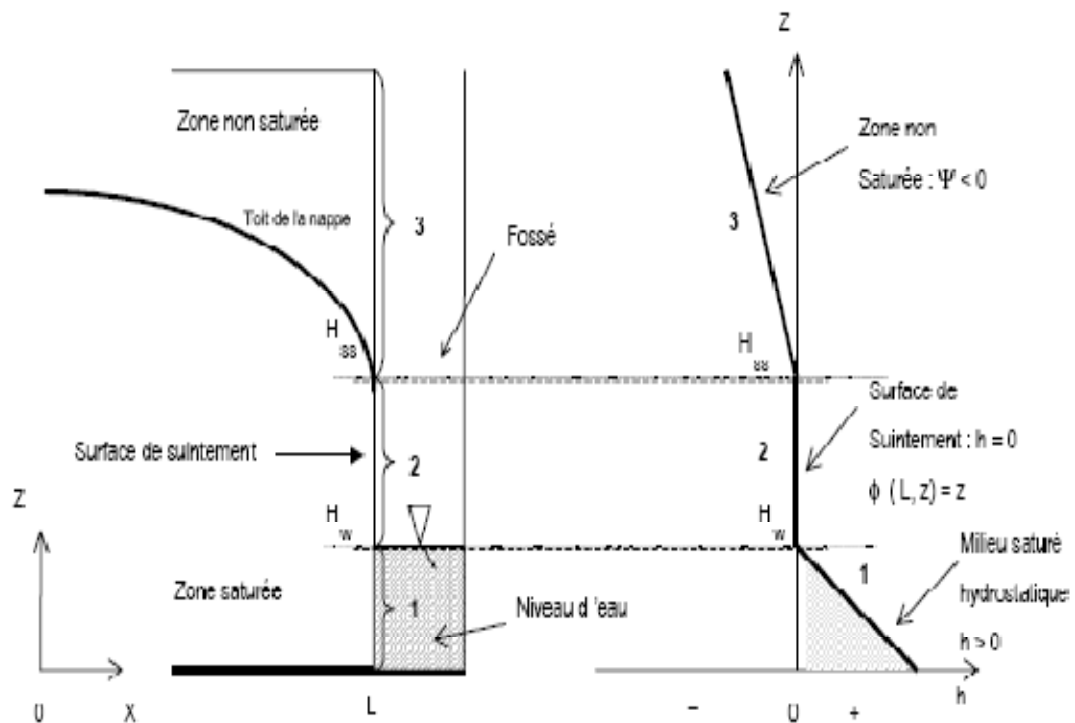


Figure II.1: le phénomène de suintement

La surface de suintement constitue une condition à la limite particulière du système, puisqu'il s'agit d'une condition de pression nulle résultant du fonctionnement du

système, et non pas d'une condition imposée au système (condition de flux imposé, type Neuman, ou de charge imposée, type Dirichlet). Sa position n'est pas connue à priori.

L'existence de cette surface de suintement a des conséquences directes en terme de prédiction de la position de la surface libre de la nappe, position calculée différemment selon le modèle d'écoulement que l'on choisit. Des solutions analytiques ont été proposées par certains auteurs afin de donner une première approximation de la hauteur de suintement, sans avoir à résoudre les équations complètes d'écoulement en milieu poreux. Ces solutions sont limitées au cas du régime permanent et pour des conditions aux limites particulières. Youngs (1990) propose une synthèse exhaustive du problème de prise en compte de la surface de suintement, et de l'estimation de l'erreur liée à l'hypothèse de DF sur le calcul de la position de la surface libre de la nappe, mais limitée au régime permanent, dans le cas d'un fossé vide.

4-L'hypothèse DF et le phénomène de suintement :

L'existence de surfaces de suintement est liée aux pertes de charges verticales dans le système hydraulique, et à la distribution des lignes de courant au voisinage de la condition à la limite aval.

L'extension verticale du suintement dépend de la géométrie du système (dimension latérale), des propriétés hydrodynamiques du sol et du flux transitant dans le système. Vis à vis de la condition aval, la théorie de DF ignore le problème des surfaces de suintement. La surface libre de la nappe est connectée au niveau d'eau libre dans la digue qui tient lieu de drain.

Historiquement, la majorité des travaux reposant sur l'hypothèse de DF se sont intéressés à la prédiction de débits transitant par la nappe, et / ou au calcul de l'élévation maximale de la nappe. En revanche, peu de travaux se sont penchés sur la prédiction de la hauteur de nappe pour tout point x et sur la caractérisation de l'erreur liée à l'hypothèse de DF, en particulier la non prise en compte de la surface de

suintement (Youngs, 1965, 1990) ; la question est de savoir si le fait d'ignorer l'existence d'une surface de suintement introduit une erreur importante dans ce calcul du débit transitant par la nappe. Différents auteurs se sont fait très tôt l'écho de cette question et Muskat (1946) synthétise les différentes approches en régime permanent en concluant que le calcul du débit transitant à travers une nappe, en ignorant le problème du suintement et en supposant l'hypothèse de DF valide, est exact, mais de manière qu'il qualifie de « fortuite » et « surprenante ». Youngs (1965) propose une approche analytique rigoureuse de ce problème, à travers le concept de potentiel de débit unitaire, et montre en régime permanent que l'erreur liée à l'hypothèse de DF est compensée exactement par la non-prise en compte de la surface de suintement sur la condition aval. Ces résultats sont importants car ils valident dans la prédiction des débits l'utilisation d'une approche simplifiée et déjà largement développée.

Si l'approche de DF (et donc la non prise en compte de la surface de suintement) semble efficace en matière de débit (en régime permanent), ce n'est a priori pas le cas pour ce qui est du calcul de la position de la nappe, et ceci d'autant plus que l'on se place en un point proche de la condition de drainage aval. La question qui se pose (en première approche pour le régime permanent) est de savoir si l'on peut caractériser l'erreur faite par l'approche de DF sur le calcul de la hauteur de nappe, ce qui revient à proposer un calcul approché de la hauteur de suintement.

5-Position de l'imperméable :

Lorsque la digue ne repose pas sur l'imperméable du système, l'hypothèse de DF n'est pas acceptable : la convergence des lignes de courants sous le fond de la digue crée une perte de charge additionnelle dans le système et peut donc être à l'origine d'erreurs significatives dans la prédiction des débits et des hauteurs de nappe. Ce problème a été traité en régime permanent par de nombreux auteurs qui proposent une correction géométrique désormais classique et connue depuis les travaux d'Hooghoudt (Ritzema, 1994) sous le nom de « profondeur équivalente ».

Le principe est de remplacer la profondeur réelle de l'imperméable par une profondeur plus faible, équivalente à celle du niveau d'eau dans un fossé qui drainerait la nappe, et pour laquelle la hauteur de nappe à la limite amont (inter-drain) est identique.

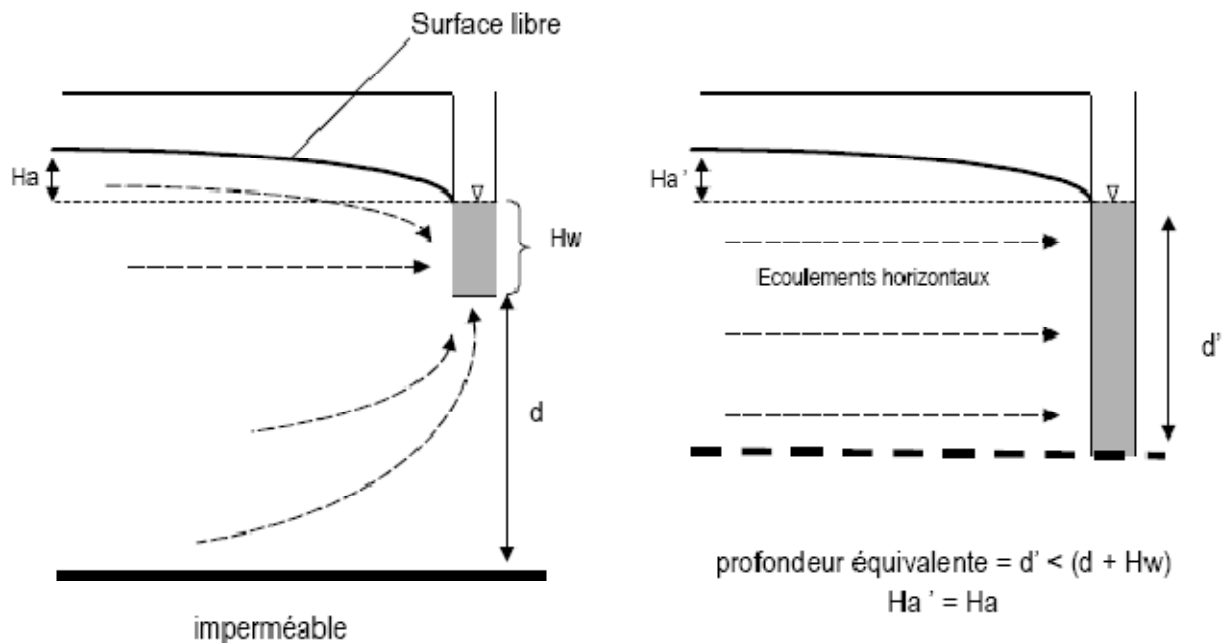


Figure II.2 : Concept de profondeur équivalente (d')

Dans un barrage en terre, soumis à deux hauteurs d'eau libre constantes en amont et en aval, est un cas d'étude classique, connu sous le nom évocateur de « problème de Dupuit ». Le système est présenté en Figure (II.2)

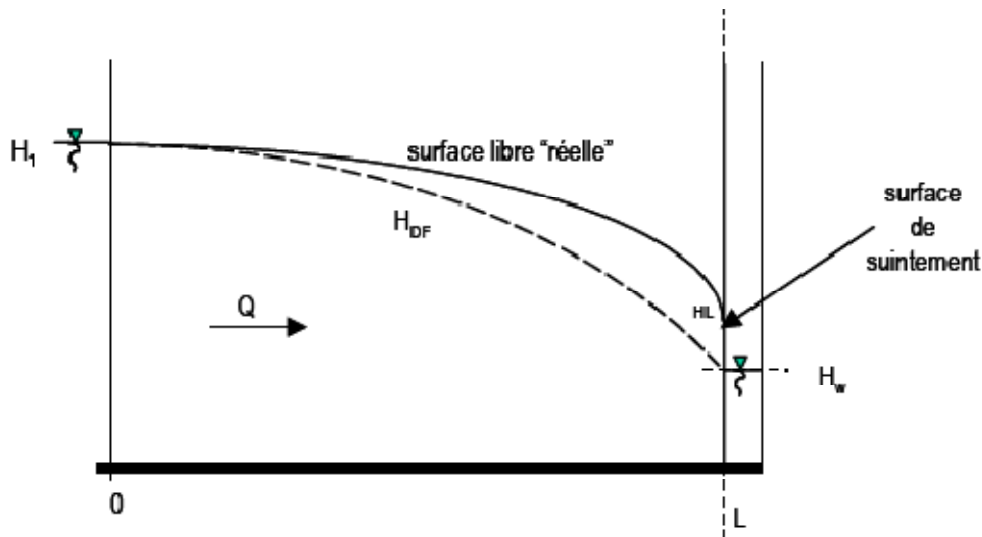


Figure II.3: nappe dans un barrage en terre

Avec :

H_1 : niveau d'eau en amont.

H_w : niveau d'eau en aval.

H_{DF} : niveau de nappe estimé via l'hypothèse de Dupuit-Forchheimer.

En faisant l'hypothèse de DF, le débit transitant à travers le système peut être estimé par la relation connue sous le nom de « formule de Dupuit », et est égal à :

$$Q = \frac{k}{2L}(H_1^2 - H_w^2) \quad (II.1)$$

Youngs (1965) a montré que ce débit en régime permanent est exact, quand bien même la nappe ne se raccorde pas en réalité au niveau d'eau libre aval, H_w . Il est aussi intéressant de noter que ce débit ne dépend que des différences de hauteurs amont et aval.

Dans le cadre des hypothèses de DF, la position de la surface libre de la nappe est donnée par la relation suivante :

$$H_{DF}(x) = \sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{H_w^2}{H_1^2}\right) \frac{x}{L}\right)} \quad (II.2)$$

La hauteur de la nappe ainsi calculée est une sous-estimation de la hauteur de nappe réelle dans la mesure où elle ne prend pas en compte le décalage introduit par l'existence d'une surface de suintement. Une solution exacte peut être approchée par un système hydraulique équivalent, et en particulier pour le cas où le fossé aval est vide (suintement strict). Cette solution est issue des travaux de Kozeny (1931, cités par Muskat, 1946 et Youngs, 1990), qui considère une nappe soumise à une condition amont de charge selon un profil parabolique, et un niveau aval contrôlé par un drain horizontal (« toe drain ») de longueur infinie :

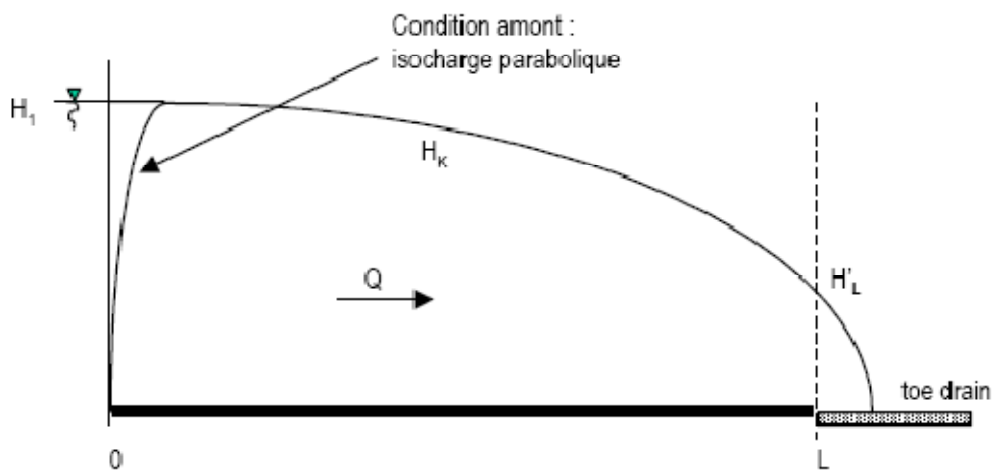


Figure II.4 : écoulement à partir d'une condition amont parabolique vers un drain horizontal

Kozeny calcule de manière analytique la position de la nappe (méthode de l'hodographe), qui a comme expression :

$$L-X = \frac{K \times H_2(x)}{2 \times Q} - \frac{Q}{2 \times K} \quad (\text{II.3})$$

Cette relation, appliquée en L et comparée à la solution de Dupuit, permet de donner une estimation de la hauteur de la surface de suintement identifiée à H'_L :

$$H_L' \approx H_L = \frac{H_1^2}{2 \times L} \quad (\text{II.4})$$

En fait l'analogie entre les deux systèmes n'est pas complète dans la mesure où la nappe considérée par Kozeny a une extension au delà de $x = L$. Ceci a pour conséquence une hauteur de nappe supérieure, pour tout x , à H_{DF} (ce qui est logique vu la prise en compte de la surface de suintement), mais aussi supérieure à la solution exacte pour le système réel. L'estimation de la hauteur de suintement découlant du calcul de Kozeny peut ainsi être considérée comme une valeur limite.

Le principal avantage de l'approche de Kozeny est d'être calculable très simplement, ce qui permet d'évaluer l'ordre de grandeur maximum que peut atteindre la hauteur de suintement, selon des caractéristiques simples du système considéré. L'examen de la relation de Kozeny permet en particulier de montrer que pour des systèmes ayant une extension latérale importante, la hauteur de suintement peut être considérée comme négligeable. Dans ce cas, la position de la nappe estimée par l'approche de DF est une bonne estimation de la réalité.

Enfin, l'approche de Kozeny s'applique au cas particulier où le fossé aval est vide, ce qui est la situation la plus favorable pour l'apparition d'une surface de suintement. En effet, dans le cas où il existe un niveau d'eau libre dans le fossé aval, la surface de suintement va être réduite (Shamshai et Narasimhan, 1991). En imposant un niveau hydrostatique (isopotentielle verticale) dans la partie de la digue remplie d'eau, on se rapproche du domaine de validité de DF, et la hauteur de suintement diminue.

6-Mise en évidence de la relation débit / hauteur de suintement :

Cette section présente des expérimentations numériques menées à partir de modèles fondés sur les équations de Laplace et de Richards.

Ces types de modèles prennent en compte la composante verticale des écoulements dans la nappe et donc le phénomène de suintement. Le but de cette étape est d'investiguer la relation entre le débit drainé par la nappe et l'extension de la surface

de suintement, afin de comprendre la dynamique de ce phénomène à l'échelle du système.

Le modèle d'Engelund (1951) a estimé la hauteur de suintement (H_{ss}) selon la relation suivante, en régime permanent, dans le cas d'une digue vide :

$$H_{ss} = \frac{\frac{L \times R}{K}}{\sqrt{1 - \frac{R}{K}}} \quad (\text{II.5})$$

Avec :

R : débit imposé en surface de la nappe.

K : perméabilité à saturation (milieu homogène et isotrope).

L : longueur du système.

A partir de cette relation, on peut écrire le débit sous la forme d'un polynôme de 2nd degré, et on aboutit à l'expression :

$$q_{out} = K \times \frac{H_{ss}}{2 \times L} \left[-\frac{H_{ss}}{L} + \sqrt{\left(\frac{H_{ss}}{L}\right)^2 + 4} \right] \quad (\text{II.6})$$

Si on considère que la hauteur de suintement est faible par rapport à l'extension horizontale du système, on a : $H_{ss} \ll L$, et donc H_{ss}^2 / L^2 est négligeable. On arrive à la relation simplifiée suivante, pour un sol homogène et isotrope :

$$q_{out} = \frac{k}{L} \times H_{ss} \quad (\text{II.7})$$

Le seul examen de la relation d'Engelund suggère qu'il existe une relation linéaire simple entre le débit et la hauteur de suintement lorsque l'extension verticale du système est faible devant sa longueur. On sait par ailleurs que le modèle d'Engelund surestime la hauteur de suintement, et que ce modèle a été développé pour le cas

particulier d'un régime permanent avec fossé vide, mais il est intéressant de tester numériquement la validité de la relation linéaire établie à partir de ce modèle.

Conclusion :

Dans le cas particulier du régime permanent et pour une digue vide, l'approche de DF peut être considérée comme une bonne approximation de la réalité (et donc le suintement peut être négligé) tout comme dans le cas décrit par Kozeny, la solution de DF est d'autant meilleure que les fossés sont remplis d'eau.

Malgré l'avantage pratique que présentent ces solutions analytiques (simplicité et faible nombre des paramètres utilisés), on peut dire que leur intérêt reste limité. Tout d'abord parce que le nombre de cas où elles sont applicables est a priori réduit, et ensuite parce que la hauteur de suintement ainsi calculée surestime la valeur réelle. Notons qu'aucun auteur, à notre connaissance, n'a tenté de développer ce type de solution analytique pour le cas d'une digue aval avec un niveau d'eau libre, ou pour des cas en régime transitoire.

chapitre III :

Etude analytique de la loi d'écoulement

Introduction :

Un écoulement est régi par une loi basée sur des postulats des formules de base. La loi d'écoulement est donnée en tenant compte l'état de saturation ou non saturation (saturation partielle), homogénéité et isotropie ou le cas contraire.

1- Définition du système hydraulique et hypothèses de calcul :

Le système hydraulique étudié est un barrage en terre homogène, rempli en amont avec une hauteur H^* et en aval avec une hauteur H_w repose sur une base imperméable figure (II.1).

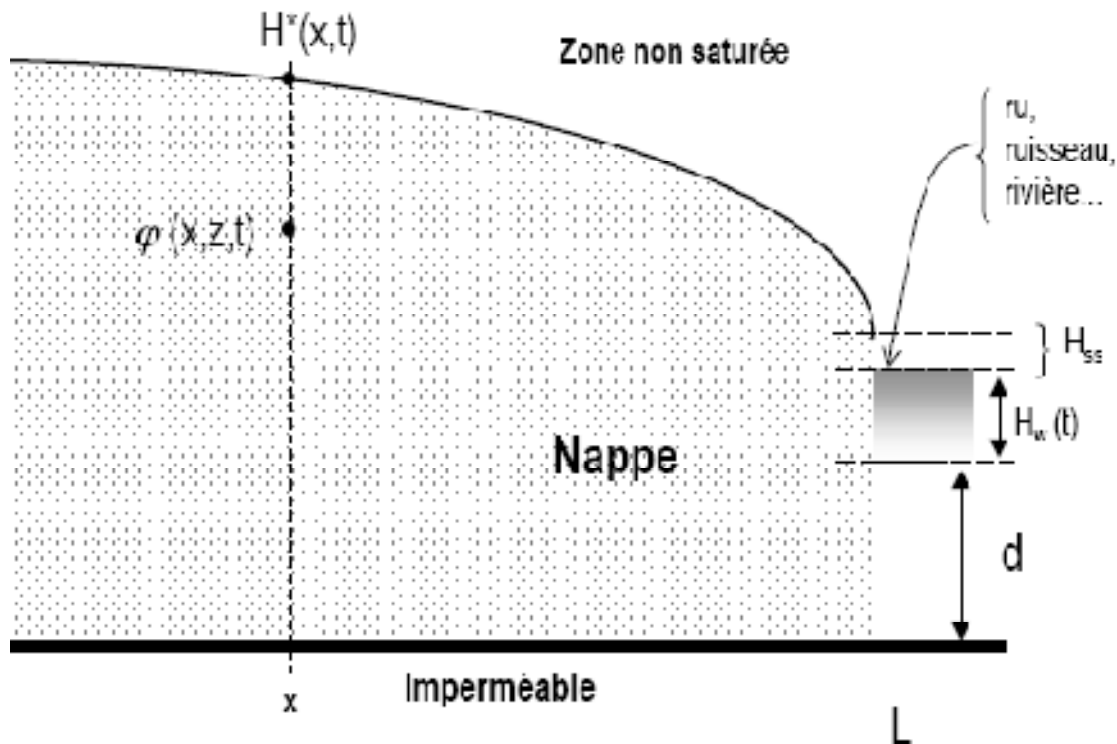


Figure III.1 : Le système hydraulique

Hypothèses :

H1 : La pression atmosphérique est choisie comme pression de référence : $p_{atm} = 0$.

H2 : La masse d'air incluse dans un volume Ω est supposée négligeable devant la masse de l'eau contenue dans ce même volume.

H3 : Aucun transfert de masse, dissolution d'air ou vaporisation d'eau, ne s'effectue

à l'interface entre les deux fluides.

H4 : L'air est supposé se déplacer à la même vitesse que l'eau interstitielle.

H5 : La pression de l'air est supposée être égale à la pression atmosphérique

$$P_a = P_{atm} = 0.$$

H6 : un écoulement bidimensionnel ; dans les barrages le comportement longitudinal est négligeable devant celles d'un plan transversal $h = f(x, z, t)$.

H7 : fluide incompressible et ses propriétés physiques sont invariantes avec la température $\rho = c^{ste}$.

H8 : milieu incompressible.

H9 : Ecoulement laminaire, puisque la vitesse d'écoulement est faible.

H10 : la conductivité hydraulique est une fonction continue dans un milieu saturé.

2-La loi d'écoulement dans un milieu homogène et isotrope :

b-Cas d'un milieu saturé :

Dans ce cas l'équation de continuité s'écrit :

$$\text{div}(\rho_w \times \vec{v}) + \frac{\partial(\rho_w \times \eta)}{\partial t} + \rho_w \times q_0 = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$\text{div}(\rho_w \times \vec{v}) + \rho_w \times q_0 = - \frac{\partial(\rho_w \times \eta)}{\partial t} \quad (\text{III.2})$$

ρ_w : masse volumique de l'eau.

η : la porosité du sol.

$\vec{v}$: la vitesse d'écoulement.

q_0 : l'apport de l'eau.

On développant le terme a droite de l'équation précédente on aura :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial(\rho_w \times \eta)}{\partial t} &= -\left(\eta \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \rho_w \times \frac{\partial \eta}{\partial t}\right) \\
 &= -\left(\eta \frac{\partial \rho_w}{\partial h} \times \frac{\partial h}{\partial t} + \rho_w \frac{\partial \eta}{\partial h} \times \frac{\partial h}{\partial t}\right) \\
 &= -\frac{\partial h}{\partial t} \left(\eta \frac{\partial \rho_w}{\partial h} + \rho_w \times \frac{\partial \eta}{\partial h}\right) \\
 &= -\frac{\partial h}{\partial t} \left(\rho_w \times \eta_e \frac{\partial \rho}{\partial h} + \rho_w \times \frac{\partial \eta}{\partial h}\right) \\
 -\frac{\partial(\rho_w \times \eta)}{\partial t} &= -\frac{\partial h}{\partial t} \rho_w \left(\eta_e \frac{\partial \rho_w}{\partial h} + \frac{\partial \eta}{\partial h}\right) \tag{III.3}
 \end{aligned}$$

h : la charge hydraulique.

On pose:

$$\begin{cases} \beta(p) = \frac{\partial \rho_w}{\partial h} \end{cases} \tag{III.4}$$

$$\begin{cases} \alpha(p) = \frac{\partial \eta}{\partial h} \end{cases} \tag{III.5}$$

On insère (II.4) dans (II.3) aura donc:

$$-\frac{\partial(\rho_w \times \eta)}{\partial t} = -\frac{\partial h}{\partial t} \rho_w (\eta_e B(p) + \alpha(p)) = -\rho_w \times S_s \times \frac{\partial h}{\partial t} \tag{III.6}$$

$$\text{div}(\vec{\rho_w} \times \mathbf{v}) + \rho_w \times q_0 = -\rho_w \times S_s \times \frac{\partial h}{\partial t} \tag{III.7}$$

D'après l'hypothèse que le fluide est incompressible, $\rho = \text{constant}$;

$$\text{div}(\vec{v}) + q_0 = -S_s \times \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III.8})$$

Par la combinaison de la loi de Darcy $\vec{v} = k \vec{\text{grad}} h$, l'équation devient ;

k : coefficient de perméabilité du sol ($k_h = k_v = k$ pour un milieu homogène)

$$\text{div}(k \vec{\text{grad}} h) + q_0 = -S_s \times \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III.9})$$

D'après l'hypothèse que le milieu est isotrope, donc k constant, cette équation à réduite à :

$$\text{div}(\vec{\text{grad}} h) + \frac{q_0}{k} = -\frac{S_s}{k} \times \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III.10})$$

Lorsque l'écoulement est considéré comme stationnaire ; $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$ on aura donc :

$$\text{div}(\vec{\text{grad}} h) + \frac{q_0}{k} = 0 \quad (\text{III.11})$$

$$\text{div}(\vec{\text{grad}} h) = -\frac{q_0}{k} \quad (\text{III.12})$$

Et comme l'écoulement est conservative (l'apport est nul); $\frac{q_0}{k} = 0$; donc :

$$k \text{div}(\vec{\text{grad}} h) = 0 \quad (\text{III.13})$$

D'où:

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad } h})=0 \quad (\text{III.14})$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad } h}) = \nabla^2 h = 0 \quad (\text{III.15})$$

$$\nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{III.16})$$

La solution générale de cette équation est la détermination de la charge hydraulique dans l'espace, elle décrit l'écoulement dans un milieu ayant un emmagasinement spécifique S_s , cette équation est connue sous le nom de l'équation de Laplace.

b-Cas d'un écoulement dans un milieu non saturé :

Dans un milieu non saturé, l'écoulement est influencé par l'effet de succion, on doit considérer un milieu composé de sol-l'eau-l'air en tenant compte des transferts globaux entre ces trois composantes.

La loi de Darcy est toujours applicable ; néanmoins le coefficient de perméabilité devient une fonction directe de la teneur en eau ou de la charge hydraulique.

$$\overrightarrow{V} = -k(\theta) \overrightarrow{\text{grad } h(\theta)} \quad (\text{III.17})$$

$\overrightarrow{V}$: la vitesse d'écoulement.

h : la charge hydraulique.

θ : la teneur en eau.

K : le coefficient de perméabilité.

Nous constatons que la formulation mathématique est similaire au cas précédent à l'exception que l'équation régissant les écoulements dans un milieu à saturation partielle et non linéaire.

Neuwman, Hillel, Van Genchten ont développé l'équation décrivant l'écoulement transitoire en milieu non saturé sous plusieurs formes, soit en fonction de :

*La teneur en eau :

$$\text{div}[D(\theta) \vec{\text{grad}}(\theta)] = \frac{\partial \theta}{\partial t} + q_0 \quad (\text{III.18})$$

-La charge hydraulique :

$$\text{div} [k(h) \times \vec{\text{grad}}h] = c(h) \frac{\partial h}{\partial t} + q_0 \quad (\text{III.19})$$

-par fois, on rencontre une forme mixte (h, θ) :

$$\text{div} [k(h) \times \vec{\text{grad}}h] = \frac{\partial \theta}{\partial t} + q_0 \quad (\text{III.20})$$

Où :

$c(h) = \frac{\partial \theta}{\partial h}$: la porosité de drainage.

$k(h)$: conductivité hydraulique en milieu non saturé.

$D(\theta)$: diffusivité en milieu non saturé.

On remarque que les paramètres de ces équation sont non linéaire, ce qui nécessite une procédure de linéarisation (par le procédé itératif) afin d'effectuer les calculs.

Dans cette étude, nous adopté l'équation de la charge hydraulique, puisque elle s'adapte mieux à une modélisation numérique, cette équation s'écrit

$$\text{div}[k(h) \vec{\text{grad}} h] = c(h) \frac{\partial h}{\partial t} + q_0 \quad (\text{III.21})$$

On la développe pour un problème bidimensionnel:

$$\frac{\partial k}{\partial x} \times \frac{\partial h}{\partial x} + k \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial k}{\partial y} \times \frac{\partial h}{\partial y} + k \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = c(h) \frac{\partial h}{\partial t} + q_0 \quad (\text{III.22})$$

c-Equation de transfert de Richards :

L'équation de continuité dans le cas d'un écoulement en milieu poreux saturé ou non saturé s'écrit en considérant un élément de volume élémentaire et en évaluant le bilan des flux massiques entrants et sortants.

$$M_{\text{in}} - M_{\text{out}} = \frac{\partial M}{\partial t} \quad (\text{III.23})$$

Avec :

M : la masse d'eau stockée dans une colonne de sol de section unitaire et d'épaisseur Δz .

En négligeant la compressibilité de l'eau et de la zone non saturée, nous obtenons:

$$-\frac{\partial Q_z}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (\text{III.24})$$

Introduisons la loi de Darcy pour un écoulement unidirectionnel vertical :

$$Q_z = -k \times \frac{\rho_w \times g}{\mu_w} \times \frac{\partial \left(\frac{\rho_w}{\gamma_w} + z \right)}{\partial z} \quad (\text{III.25})$$

Dans l'équation obtenue ci-dessus, nous obtenons:

$$\frac{\partial}{\partial z} (k_{\text{sat}} \times k_{\text{rw}} \left(\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial z} \right)) = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (\text{III.26})$$

Cette formulation dite mixte, donne une équation contenant les deux variables d'état non indépendantes, θ et h . Il est praticable d'éliminer l'une des deux pour obtenir une seule inconnue. Pour cela on utilise la règle de dérivation de Leibnitz:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial h} \times \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III.27})$$

Avec:

$$C(\theta) = \frac{\partial \theta}{\partial h} \quad (\text{III.28})$$

La capacité capillaire spécifique en eau qui représente la pente de la courbe de rétention pour une valeur particulière de teneur en eau. C'est une propriété importante qui rend compte du stockage et de la disponibilité en eau du sol pour les plantes c'est une fonction de la teneur en eau, de la texture et de l'hystérésis.

Nous obtenons l'équation de Richards (1931) :

$$C \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right) \quad (\text{III.29})$$

C'est une équation différentielle aux dérivées partielles non linéaire en h .

3-Application des méthodes numériques à l'écoulement permanent :

Les méthodes numériques, qui se sont développées sur les quarante dernières années grâce aux progrès des performances informatiques, se proposent de pallier les limitations des approches analytiques, et de fournir des cas de validation pour les méthodes approchées.

L'aspect de validation procuré par une méthode numérique reste un motif important

d'utilisation de telles techniques. De nombreuses études ont comparé des approches asymptotiques où analytiques à des réalisations numériques : approximation de Bear. Nous citons ici quelques méthodes numériques qui ont pu être étudiées dans le contexte de la diffraction par une surface rugueuse : la méthode des moments est une technique de discrétisation d'équations différentielles. Elle a pu être appliquée au problème d'écoulement à surface libre.

La méthode des différences finies dans le domaine temporel quand à elle, est une technique reposant sur l'approximation discrète d'équations différentielles.

Avantage :

Les méthodes numériques sont des outils principaux utilisées pour l'analyse, la conception ; le dimensionnement et l'optimisation des systèmes.

Elles sont largement répondues pour deux raisons principales :

Ø Leur grande capacité de traiter des systèmes très variés avec des géométries et des comportements complexes.

Ø grand progrès dans les moyens informatique permettant de traiter des problèmes a grand nombres de paramètres dans des délais raisonnables.

Elles sont destinées pour résoudre des équations aux dérivées partielles l'exploitation de l'une des méthodes passe par un certain nombre d'étapes :

- 1- Evaluation des dérivées en chaque point.
- 2- Représentation des conditions aux limites et des conditions initiales.
- 3- Constitution d'un système numérique.
- 4- Résolution de ce système.

3.1-Principe des différences finies:

La technique des différences finies est utilisée en analyse numérique lorsque l'on cherche à résoudre une équation aux dérivées partielles. Basé sur la discrétisation géométrique et la discrétisation numérique des opérateurs par la série de Taylor.

3.2-Déroulement du calcul:

Le déroulement pratique du calcul par approximation par différences finies pour l'estimation du débit de fuite à travers le corps d'un barrage est le suivant :

- 1- le domaine spatial de la digue est d'abord échantillonné sous forme de mailles parallélépipédiques.
- 2- Les conditions aux limites ainsi que les conditions initiales sont imposées par fixation des valeurs de pression de l'eau et de la saturation dans le temps.
- 3- Pour chacune des mailles, et pour chaque pas temporel, l'algorithme de Thomas est répété. Après chaque itération, on peut évaluer l'évolution les composantes du champ de la charge hydraulique.

3.3- Discrétisation du domaine:

Soit un domaine plan (pour un phénomène quelconque) décomposé en des sous domaines tel que :

$$\Omega = \sum \Omega_i$$

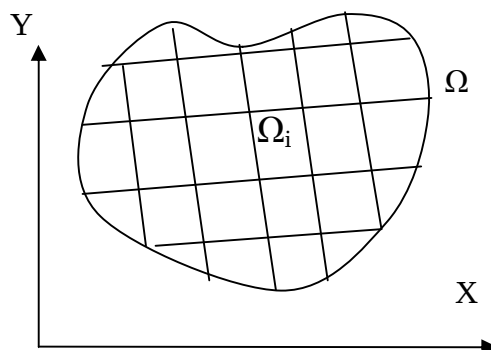


Figure III.2 : Schéma de discrétisation d'un domaine quelconque

Toutes les méthodes numériques présupposent la discrétisation du domaine géométrique afin de passer d'un problème continu à une infinité d'inconnues à un problème discret ne comptant qu'un nombre fini d'inconnues.

Dans le cas de la méthode des différences finies on discrétise l'intervalle ou le domaine en nombre fini de points x_i , y_i chaque maille est définie par ses nœuds de coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i = x_0 + i \Delta x \end{array} \right. \quad (III.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i = y_0 + j \Delta y \end{array} \right. \quad (III.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_k = t_0 + k \Delta t \end{array} \right. \quad (III.32)$$

Avec:

Δx : pas de discrétisation selon l'axe x .

Δy : pas de discrétisation selon l'axe y

Δt : pas de discrétisation dans le temps

x_0 , y_0 , t_0 : positions initiales relatives à un repère donné

i , j , k : indices muets caractérisant les différents pas de discrétisation.

Ů Remarque :

Il est possible d'utiliser un maillage variable dans l'espace et dans le temps en considérant des pas de discrétisation suivant Δx_i , Δy_j , Δt_k

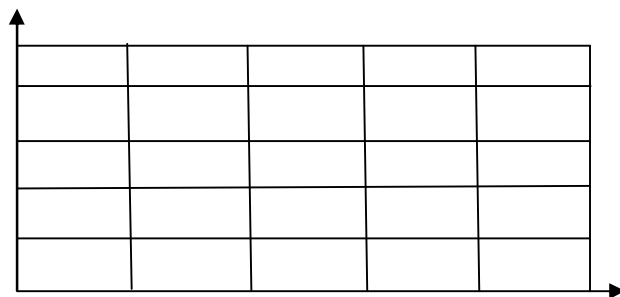


Figure III.3: Discrétisation d'un domaine par des mailles rectangulaires

Chaque nœud est localisé par deux indices i (selon l'axe des x) et j (selon l'axe y)

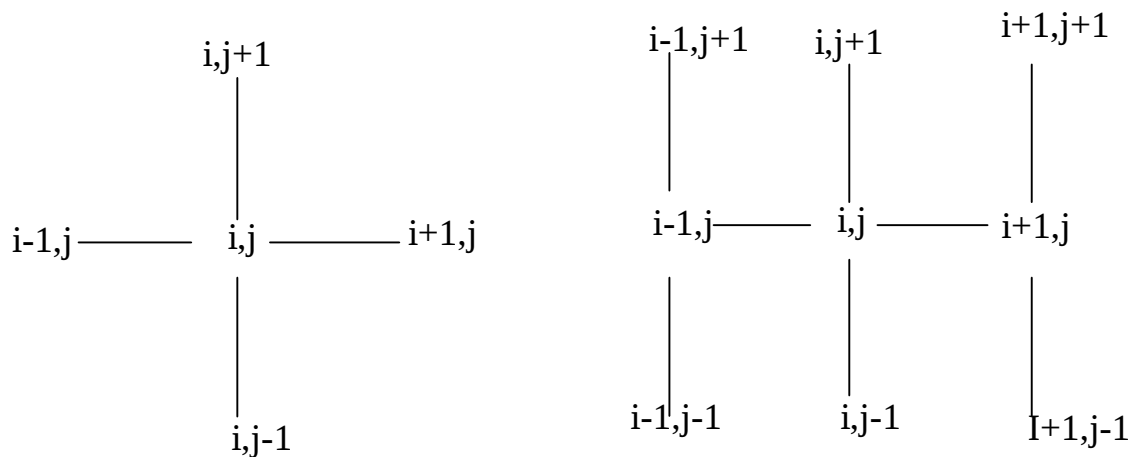


Figure III.4 : molécule de discrétisation par MDF

Signalons que dans cette étude, on a utilisé des mailles quadratiques curvilignes pour les problèmes à géométrie variable (écoulement à surface libre).

3.4-Approximation des opérateurs par des formules de Taylor :

Une discrétisation des opérateurs différentiels (dérivés premières secondes.....etc) peut être obtenue par les formules de Taylor.

La formulation de Taylor – Yong est préférable dans son utilisation simple : et la formulation de Taylor avec le reste intégrale de la Place permet de mésuser les erreurs.

Le développement en série de Taylor d'une fonction $f(x,y)$ s'écrit :

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)=f(x,y)+(\Delta x \times \frac{\partial}{\Delta x} + \Delta y \times \frac{\partial}{\Delta y})f(x,y) + \frac{1}{2!}(\Delta x \times \frac{\partial}{\Delta x} + \Delta y \times \frac{\partial}{\Delta y})^2 f(x,y) + \dots + \frac{1}{n!}(\Delta x \times \frac{\partial}{\Delta x} + \Delta y \times \frac{\partial}{\Delta y})^n f(x,y) \quad (III.33)$$

A parti de cette relation, on exprime les termes des dérivées partielles en fonction de $f(x,y)$; $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$; $f(x-\Delta x, y-\Delta y)$.

v Notation adoptée :

$$f(x)=f_i$$

$$f(y)=f_j$$

$$f(x+\Delta x)=f_{i+1}$$

$$f(y+\Delta y)=f_{j+1}$$

$$f(x,y)=f_{i,j}$$

$$f(x,y+\Delta y)=f_{i,j+1}$$

$$f(x+\Delta x,y)=f_{i+1,j}$$

$$f(x,y-\Delta y)=f_{i,j-1}$$

$$f(x-\Delta x,y)=f_{i-1,j}$$

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f_{i+1,j+1}$$

$$f(x-\Delta x,y-\Delta y)=f_{i-1,j-1}$$

3.5-Les expressions aux différences finies :

Appliquons la relation de l'indice selon l'axe x, on aura :

$$f_{i+1}=f_i+\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + R \quad (\text{III.34})$$

$$f_{i-1}=f_i- \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + R \quad (\text{III.35})$$

R : reste de Taylor.

En combinant ces deux relations, on obtient les expressions des dérivées partielles :

$$\begin{aligned} (\text{III.34})-(\text{III.35}) = f_{i+1}-f_{i-1} &= (f_i+\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + R) - (f_i- \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ &\quad - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + R) = 2 \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

$$f_{i+1}-f_{i-1}=2 \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 2 \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} \quad (\text{III.37})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\Delta x} - 2 \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad (\text{III.38})$$

D'où :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad (\text{III.39})$$

$$\begin{aligned} (\text{II.35}) + (\text{II.36}) = f_{i+1} + f_{i-1} &= (f_i + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + R) + (f_i - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ &\quad - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + R) = 2f_i + 2 \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2R \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{\Delta x^2} + 2R \quad (\text{III.41})$$

ü Remarque :

On néglige le terme d'approximation d'erreur ($R=0(\Delta x^2)$), on procède de même façon pour obtenir les expressions des dérivées selon l'axe des ordonnées on aura :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f_{j+1}-f_{j-1}}{2\Delta y} - \frac{\Delta y^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \quad (\text{III.42})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{j+1} + f_{j-1} - 2f_j}{\Delta y^2} \quad (\text{III.43})$$

***La différence avant (forward difference) :**

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f_{j+1}-f_j}{\Delta y} \quad (\text{III.44})$$

***La différence arrière (backward difference) :**

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta y} \quad (\text{III.45})$$

3.6-Dérivées d'ordre supérieur :

L'approximation des dérivées partielles d'ordre trois et quatre sont données par les relations suivantes en utilisant la différence centrale :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{2\Delta x^3} (f_{i+2} - f_{i+1} + 2f_i - f_{i-1} - f_{i-2}) - \frac{\Delta x^2}{4} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \quad (\text{III.46})$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{1}{\Delta x^4} (f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}) - \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} \quad (\text{III.47})$$

De même pour les dérivées selon y ; seulement en changeant indice i par j et x par y.

ü Remarques :

- Pour des problèmes plan où la fonction f dépend de (x, y) on ajoute un 2^{ème} indice à f aux différentes expressions de l'approximation f(i,j).
- Lorsqu'une limite d'un domaine ne coïncide pas avec les nœuds on doit faire une correction des expressions de l'approximation des dérivées ; en considérant les pas de discrétisation Δx, Δy (compris entre 0 et 1)

3.7-Les différents schémas aux différences :

Il existe trois schémas pour la résolution des équations aux dérivées partielles

- Ø Schéma implicite.
- Ø Schéma explicite.
- Ø Schéma de Taylor Crank-Nickolson.

a/ Schéma explicite :

C'est l'un des schémas numérique ; qui est possible d'ordonner les inconnues de telle sorte que chacune d'elle puisse être déterminée récursivement à partir des précédentes qui sont supposées être déjà calculées (matrice triangulaire).

Connaissant la solution à l'instant $n\Delta t$, on cherche la solution à l'instant $(n+1)\Delta t$; donc il s'agit d'une équation à une seule inconnue.

Ø Exemple donné par la méthode d'Euler explicite :

$$\frac{du}{dt} = f(u, t) \quad (\text{III.48})$$

Où :

f est une fonction connue de u et de t . A noter que la variable indépendante pourrait aussi être x, y ou z .

Principe. Dans la méthode d'Euler explicite, (II.48) est discrétisée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \end{array} \right. \quad (\text{III.49})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(u, t) = f(u^n, t^n) \end{array} \right. \quad (\text{III.50})$$

Où :

u^n est la valeur (connue) de u à la date t^n , u^{n+1} est la valeur (encore inconnue, que l'on désire calculer) de u à la date t^{n+1} , $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ est le pas de temps.

En remplaçant (III.49) et (I50) dans (III.48), il vient :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = f(u^n, t^n) \quad (\text{III.51})$$

Cette équation se réécrit :

$$u^{n+1} = u^n + f(u^n, t^n) \Delta t \quad (\text{III.52})$$

Puisque u^n est connue et que la fonction f l'est aussi, $f(u^n, t^n)$ l'est également.

u^{n+1} peut être déterminée directement d'après u^n . La méthode numérique est dite *explicite* car la valeur de u à la date $n+1$ peut être déterminée explicitement à partir de la valeur de u à la date n .

b/ Schéma implicite :

L'un des schémas numérique : où il est parfois possible d'éviter de résoudre l'ensemble du système de toutes les équations ; c'est en particulier le cas pour un système évolutif dont l'état caractérisé par des variables spéciales ; est défini par des conditions initiales ($t=0$) puis évolué progressivement au cours du temps.

Le schéma numérique reste explicite dans la variable temporelle et son caractère implicite ne concerne que les variables spéciales.

Signalons que l'inconvénient principal de ce schéma est sa stabilité numérique.

Ø Exemple donnée par la méthode d'Euler implicite:

$$\frac{du}{dt} = f(u, t) \quad (\text{III.48})$$

Où :

f est une fonction connue de u et de t . A noter que la variable indépendante pourrait aussi être x , y ou z .

Principe. Dans la méthode d'Euler implicite, (III.48) est discrétisée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \end{array} \right. \quad (III.49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(u, t) = f(u^{n+1}, t^{n+1}) \end{array} \right. \quad (III.53)$$

A la différence de la méthode explicite, f est maintenant calculée à partir de la valeur (inconnue) de u à la date t^{n+1} . En remplaçant (III.49) et (III.53) dans (III.48), il vient :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = f(u^{n+1}, t^{n+1}) \quad (III.54)$$

Cette équation peut être réécrite comme suit :

$$u^{n+1} - f(u^{n+1}, t^{n+1})\Delta t = u^n \quad (III.55)$$

Contrairement au cas explicite, cette formulation lie la valeur (inconnue) u^{n+1} à une fonction de cette valeur même. On dit aussi que u^{n+1} est définie implicitement et la méthode est implicite. En général (sauf expression particulièrement simple de la fonction f), la résolution de (III.55) impose d'avoir recours à des méthodes itératives (de type Newton).

c/ Schéma de Crank-Nicholson :

C'est une combinaison de deux schémas précédents, l'avantage de cette méthode est sa stabilité.

Notons que les trois schémas peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\bar{\omega} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^n (1 - \bar{\omega}) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^{n+1} + \bar{\omega} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + (1 - \bar{\omega}) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^{n+1} = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (III.56)$$

On retrouve sur :

Pour : $\bar{\omega} = 0$, un schéma implicite.

$\bar{\omega} = 1$, un schéma explicite.

$\bar{\omega} = \frac{1}{2}$, un schéma Crank Nicholson.

3.8-Méthodes des directions alternées (MDI) :

La méthode des directions alternées (MDI) est largement utilisée dans la programmation pour la résolution des équations aux dérivées partielles de type parabolique.

Le principe de cette méthode pour un problème bidimensionnel est l'utilisation de deux équations aux différences avec un pas de temps $\frac{\Delta t}{2}$ pour chaque équation.

*La première équation est implicite uniquement en x ; en utilisant l'approximation des termes selon y qui sont déjà connus à l'instant $n\Delta t$.

*La seconde est implicite seulement en y; en utilisant les termes selon x calculés précédemment.

Donc la résolution du problème passe par ces 2 étapes :

1^{ère} étape (implicite en x) :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^* + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^n = \frac{f_{i,j}^* - f_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (\text{III.57})$$

2^{ème} étape (implicite en y) :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^* + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^{n+1} = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (\text{III.58})$$

* : indice indique l'instant intermédiaire $(\frac{n+1}{2})\Delta t$

n : indice indique l'instant explicite.

La résolution est traitée d'une façon itérative ; les inconnues du problème sont :

$$f_{i+1,j}^*, f_{i,j}^*, f_{i-1,j}^*, f_{i,j+1}^{n+1}, f_{i,j}^{n+1}, f_{i,j-1}^{n+1}$$

Nous obtenons un système tri diagonal équations pour les lignes et un système similaire pour les colonnes de forme :

$$A_i \times f_{i-1,j} + B \times f_{i,j} + C_i \times f_{i+1,j} = D_i \quad (\text{III.59})$$

Ce système est obtenu grâce à l'utilisation de MDI : il est facile à résoudre par l'un des algorithmes numériques.

MDI converge et stable pour les valeurs de l'erreur ne soient pas très grandes.

****Algorithme de Thomas :**

La relation (III.59) s'écrit sous forme d'une matrice

$$[A] \{f\} = [D] \quad (\text{III.60})$$

$$\begin{pmatrix}
 b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\
 a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & a_{n-1} & c_{n-1}
 \end{pmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 f_1 \\
 f_2 \\
 f_3 \\
 f_4 \\
 . \\
 . \\
 f_{n-2} \\
 f_{n-1}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 D_1 \\
 D_2 \\
 D_3 \\
 D_4 \\
 . \\
 . \\
 D_{n-2} \\
 D_{n-1}
 \end{Bmatrix}$$

Cette matrice peut être triangularisée par la méthode d'élimination de Gauss : ce qui facilite d'avantage la résolution.

$$\begin{pmatrix}
 1 & \alpha\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & \alpha\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & \alpha\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha\alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha\alpha_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha\alpha_{n-1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 f_1 \\
 f_2 \\
 f_3 \\
 f_4 \\
 f_5 \\
 . \\
 f_{n-2} \\
 f_{n-1}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3 \\
 B_4 \\
 B_5 \\
 . \\
 B_{n-2} \\
 B_{n-1}
 \end{Bmatrix}$$

L'inconnue f_i est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{n-1} = B_{n-1} \end{array} \right. \quad (III.61)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i = B_i - \alpha \alpha_i f_{i+1} \quad (i = n-2, n-3, \dots, 2) \end{array} \right. \quad (III.62)$$

On substitue ces deux relations dans la relation (III.52) on aura :

$$A_i (B_{i-1} - \alpha \alpha_{i-1} f_i) + B_i f_{i,j} + C_i f_{i+1,j} = D_i \quad (III.63)$$

Après l'arrangement des coefficients de la fonction f on aura.

$$f_i = \frac{C_i}{(b_i - \alpha_i \alpha_{i-1}) f_{i+1}} + \frac{d_i - a_i b_{i-1}}{b_i - \alpha_i \alpha_{i-1}} \quad (III.64)$$

Avec $(i = 2, \dots, n-1)$

En comparant (III.55) et (III.56) on déduisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \alpha_i = \frac{C_i}{(b_i - \alpha_i \alpha_{i-1})} \end{array} \right. \quad (III.65)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_i = \frac{d_i - a_i b_{i-1}}{b_i - \alpha_i \alpha_{i-1}} \end{array} \right. \quad (III.66)$$

A partir des conditions aux limites on détermine :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \alpha_2 = \frac{c_2}{d_2} \end{array} \right. \quad (III.67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B B_2 = \frac{d_2}{b_2} \end{array} \right. \quad (III.68)$$

Notons que la matrice $[A]$ est diagonalement dominante ; donc on aura une solution convergente ; et cela pour que les relations suivantes soient vérifiées :

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$$

$$|b_2| > |c_1| \text{ et } |b_{n-1}| > |a_{n-1}|.$$

Remarque :

On calcul les coefficients α_i, BB_i par ordre croissant de i ; Cependant les valeurs de f_i seront calculées par ordre décroissante ($i = n-2, n-1, \dots, 2$) par la relation (III.59)

4-Les conditions aux limites associées :

Les principales conditions aux limites des écoulements sont au nombre de cinq :

1) surface équipotentielle, sur laquelle la charge hydraulique est constante (AB sur la figure(III.5)). Le vecteur de vitesse d'écoulement est normal à cette surface équipotentielle (condition de Dirichlet).

2) le long de la couche imperméable, étant donné qu'il y a pas de débit à travers ces couches, le flux est nul, l'eau ne peut pas traverser, ce qui se traduit par la condition suivante de débit nul. On en déduit que le gradient hydraulique selon la direction perpendiculaire est nul :

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0 \quad (III.69)$$

(Condition de Neuman) ; et que le vecteur de vitesse d'écoulement est parallèle à une telle surface (surface AF sur la figure)

3) surface libre d'écoulement, qui vérifie simultanément deux conditions : elle est tangente au vecteur de vitesse d'écoulement et la pression interstitielle u est égale à la pression atmosphérique (c'est-à-dire à zéro) :

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0 \text{ et } u = 0 \text{ où } h = z \quad (III.70)$$

4) surface de suintement, sur laquelle la pression de l'eau est nulle mais le vecteur de vitesse d'écoulement est dirigé vers l'extérieur du massif :

$$\frac{\partial h}{\partial n} > 0 \text{ et } u = 0 \text{ où } h = z \quad (\text{III.71})$$

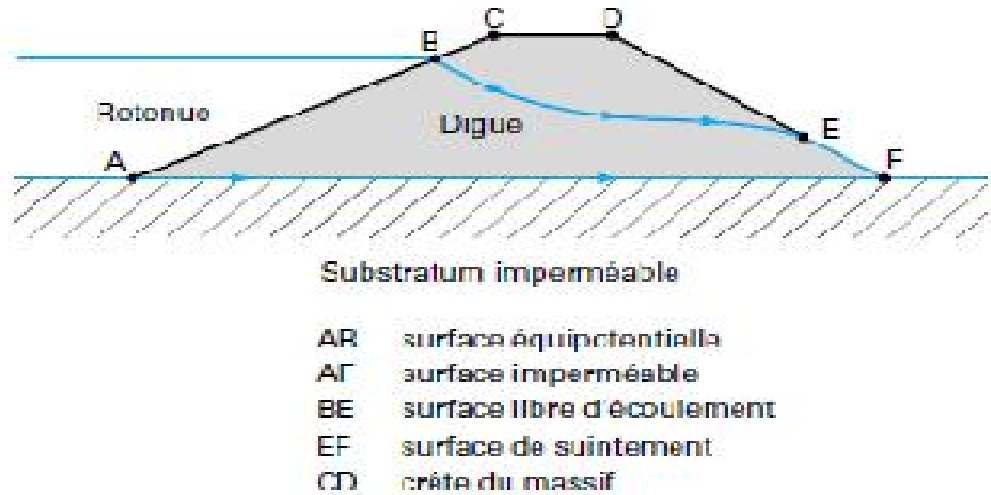


Figure III.5 : Conditions aux limites d'un écoulement

5) Condition de continuité :

Une condition de continuité est imposée pour assurer la continuité de l'écoulement dans un massif de sols, aux interfaces de couches de perméabilités différentes, le débit normal à l'interface est égal dans les deux couches, ce qui se traduit par la condition :

$$V_{n1} = V_{n2} \quad (\text{III.72})$$

Où :

$$K_{1n} \frac{\partial h_1}{\partial n} = K_{2n} \frac{\partial h_2}{\partial n} \quad (\text{III.73})$$

Avec :

v_{n1} , v_{n2} : vitesses d'écoulement normales à l'interface dans les couches 1 et 2 respectivement.

k_{1n} , k_{2n} : coefficients de perméabilité des couches 1 et 2 respectivement, dans la direction normale à l'interface des couches.

h_1 , h_2 : charges hydrauliques dans les couches 1 et 2 respectivement.

n : direction normale à l'interface.

Les composantes des vitesses d'écoulement tangentes à l'interface peuvent être quelconques.

Si les sols des deux couches en contact sont isotropes, alors les pentes des lignes de courant de part et d'autre de l'interface sont dans le rapport inverse des coefficients de

$$\text{perméabilité } \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{k_1}{k_2} \quad (\text{III.74})$$

Et les équipotentiels sont plus rapprochées dans le milieu le moins perméable.

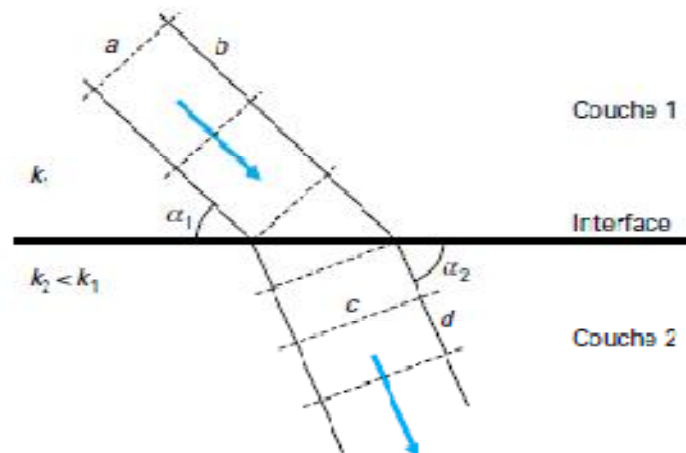


Figure III.6 : Condition de continuité des débits à l'interface de deux couches de sol isotrope

ü Remarque :

a-Interface entre deux domaines, il faut assurer la continuité des flux et des pressions dans les fluides.

b-Conditions aux limites sur la surface de suintement :

Lors de la modélisation de l'écoulement dans les milieux poreux non saturés, la surface de suintement pose un problème particulier : d'une part sa position est inconnue au départ, d'autre part, pendant la vidange et le remplissage du barrage, elle évolue. L'apparition et le déplacement d'une surface de suintement se traduit par un changement de conditions aux limites : d'une condition de flux imposé, on passe à une condition de pression imposée. Une telle surface apparaît le plus souvent sur le parement aval, mais parfois aussi sur le parement amont lors d'une vidange.

De plus, un changement de conditions aux limites se produit également sur la face amont lors du remplissage de la retenue, sans qu'il y ait une surface de suintement.

5- Conditions initiales :

Elles définissent l'état du milieu poreux à l'instant initial. En ce qui concerne les inconnues directes du problème on a :

$$u(x; 0) = u_0(x) \quad (III.75)$$

$$p(x; 0) = p_0(x) \quad x \text{ est dans } \Omega \quad (III.76)$$

Très souvent, on connaît la teneur en eau initiale ou le degré de saturation initial. Il faut alors initialiser les pressions à partir de ces données. S'il s'agit de la mise en place d'un remblai, il faut initialiser l'état de contraintes et les variables d'état du matériau, par exemple la porosité. Pratiquement, nous pouvons toutefois supposer que les contraintes initiales dans une couche au moment de sa pose sont faibles et, pendant l'étape de pose, la couche s'équilibre sous l'effet de son poids propre.

L'initialisation des variables d'état présentes dans la loi de comportement est d'une grande importance à cause du comportement non linéaire des sols, qu'ils soient saturés ou non saturés. Nous supposons avoir à notre disposition les conditions initiales suivantes, statiquement admissibles, dans la partie du domaine existant au départ :

$$u(x; 0) = 0 \quad (\text{III.77})$$

$$p(x; 0) = p_0(x) \quad (\text{III.78})$$

$$\sigma(x; 0) = \sigma_0(x) \quad (\text{III.79})$$

6-Application de la méthode à la loi d'écoulement :

La loi mathématique qui décrit le phénomène est une équation différentielle aux dérivées partielles qui exprime la variation de la pression de l'eau du sol dans le temps et dans l'espace.

L'équation de l'écoulement est intégrée numériquement par la méthode des différences finies. Sa résolution nécessite la connaissance d'une condition initiale et de deux conditions aux limites. En outre, elle suppose connues deux propriétés du sol : la relation entre la pression de l'eau du sol et son humidité, et celle entre l'humidité et la conductivité hydraulique du sol.

Lorsque la connaissance de ces deux relations est approximative, le modèle peut être utilisé pour les affiner : on ajuste les paramètres de ces relations jusqu'à obtenir un accord satisfaisant entre l'expérience et le calcul.

Lorsque ces relations sont connues avec une précision acceptable, le modèle peut être utilisé en prévision : quelle sera la cinétique du phénomène pour un état initial d'humidité différent et/ou pour d'autres conditions aux limites.

6.1-Ecoulement dans les milieux saturés :

L'équation d'écoulement s'écrit par :

$$\text{div}(\vec{K} \times \text{grad } h) - q_0 = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III.72})$$

On dérive cette équation et on l'aura sous la forme développée:

$$\frac{\partial k_x}{\partial x} \times \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial k_y}{\partial y} \times \frac{\partial h}{\partial y} - q_0 = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III.80})$$

Ou encore:

$$\frac{\partial k_x}{\partial x} \times \frac{\partial h}{\partial x} + k_x \times \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial k_y}{\partial y} \times \frac{\partial h}{\partial y} + k_y \times \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - q_0 = S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III.81})$$

6.2-Approximation par méthode des différences finies:

La discrétisation de l'équation (III.72) qui représente le cas général sur tout le domaine conduit à des équations aux différences pour chaque nœuds, j en adoptant la notation ci après :

$$\frac{\partial k_x}{\partial x} \times \frac{\partial h}{\partial x} + k_x \times \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial k_y}{\partial y} \times \frac{\partial h}{\partial y} + k_y \times \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - q_0 = S_s \times \frac{\partial h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\partial t} \quad (\text{III.82})$$

Avec:

$$\frac{\partial k_x}{\partial x} = \frac{k_{x_{i+1,j}} - k_{x_{i,j}}}{\Delta x} \quad (\text{III.83})$$

$$\frac{\partial k_y}{\partial y} = \frac{k_{y_{i+1,j}} - k_{y_{i,j}}}{\Delta y} \quad (\text{III.84})$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{\Delta x} \quad (\text{III.85})$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{\Delta y} \quad (\text{III.86})$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h_{i-1,j} - 2 h_{i,j} + h_{i+1,j}}{\Delta x} \quad (\text{III.87})$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{h_{i,j-1} - 2h_{i,j} + h_{i,j+1}}{\Delta y^2} \quad (\text{III.88})$$

L'utilisation de la MDI conduit à traiter l'équation (III) en deux étapes, avec un demi pas ($\frac{\Delta t}{2}$) pour chacune de ces étapes.

La première étape est implicite en x (toutes les lignes) et la deuxième implicite en y (toutes les colonnes)

$$\frac{\partial k_x}{\partial x} \times \frac{\partial h}{\partial x} + k_x \times \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial k_y}{\partial y} \times \frac{\partial h}{\partial y} + k_y \times \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - q_0 = S_s \times \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III.89})$$

****Etape (1) (implicite en x) :**

$$\frac{\partial k_x^*}{\partial x} \times \frac{\partial h^*}{\partial x} + k_x \times \frac{\partial^2 h^*}{\partial x^2} + \frac{\partial k_y^n}{\partial y} \times \frac{\partial h^n}{\partial y} + k_y \times \frac{\partial^2 h^n}{\partial y^2} - q_0 = S_s \times \frac{\partial h_{i,j}^* - h_{i,j}^n}{\partial t} \quad (\text{III.90})$$

$$\frac{\partial k_x^*}{\partial x} \times \frac{\partial h^*}{\partial x} + k_x \times \frac{\partial^2 h^*}{\partial x^2} + \frac{\partial k_y^{n+1}}{\partial y} \times \frac{\partial h^{n+1}}{\partial y} + k_y \times \frac{\partial^2 h^{n+1}}{\partial y^2} - q_0 = S_s \times \frac{\partial h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^*}{\partial t} \quad (\text{III.91})$$

Dans le cas général, les coefficients S_s , K , q_0 varient dans le temps, on les exprime à des instants explicites afin de surmonter le problème de non linéarité de ces coefficients, en suivant cette procédure :

1-Détermination des coefficients à l'instant n.

2-Calcul de l'inconnu h à l'instant intermédiaire $\frac{n+1}{2}$ par l'équation (III.83).

3-Détermination des coefficients en fonction $h^{n+1/2}$.

4-Evaluation de la charge hydraulique à l'instant (n+1) par l'équation (III.84).

L'avantage d'utiliser la technique d'MDI est d'avoir pour chaque étape un système tri diagonal sous la forme :

$$A_p \times h_{p-1} + B_p \times h_p + C_p \times h_{p+1} = D_p \quad (III.82)$$

p= i dans les lignes

p= j dans les colonnes.

L'équation (II.83) et (II.84) s'écrivent

Etape (1) :

$$\frac{\partial kx^*}{\partial x} \times \frac{\partial h^*}{\partial x} + kx \times \frac{\partial^2 h^*}{\partial x^2} + \frac{\partial ky^n}{\partial y} \times \frac{\partial h^n}{\partial y} + ky \times \frac{\partial^2 h^n}{\partial y^2} - q_0 = S_s \times \frac{\partial h_{i,j}^* - h_{i,j}^n}{\frac{\Delta t}{2}} \quad (III.93)$$

$$\begin{aligned} & \frac{kx_{i+1,j}^* - kx_{i,j}^*}{\Delta x} \times \frac{h_{i+1,j}^* - h_{i,j}^*}{\Delta x} + kx^* \frac{h_{i-1,j}^* - 2h_{i,j}^* + h_{i+1,j}^*}{\Delta x^2} + \frac{ky_{i,j+1}^n - ky_{i,j}^n}{\Delta y} \times \\ & \frac{h_{i+1,j}^n - h_{i,j}^n}{\Delta y} + ky^n \frac{h_{i,j-1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} - q_0 = 2S_s \times \frac{\partial h_{i,j}^* - h_{i,j}^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (III.94)$$

On aura de l'étape (1) :

$$\begin{aligned} 2S_s \times \frac{\partial h_{i,j}^* - h_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta x^2} [(kx_{i+1,j}^* - kx_{i,j}^*) \times (h_{i+1,j}^* - h_{i,j}^*) + kx^* (h_{i-1,j}^* - 2h_{i,j}^* + h_{i+1,j}^*)] \\ &+ \frac{1}{\Delta y^2} [(ky_{i,j+1}^n - ky_{i,j}^n) \times (h_{i+1,j}^n - h_{i,j}^n) + ky^n (h_{i,j-1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j+1}^n)] - q_0 \end{aligned} \quad (III.95)$$

Étape (2) :

$$2S_s \times \frac{\partial h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^*}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x^2} [(kx_{i+1,j}^* - kx_{i,j}^*) \times (h_{i+1,j}^* - h_{i,j}^*) + kx^* (h_{i-1,j}^* - 2h_{i,j}^* + h_{i+1,j}^*)]$$

$$+ \frac{1}{\Delta y^2} [(k y_{i,j+1}^{n+1} - k y_{i,j}^{n+1}) \cdot (h_{i+1,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n+1}) + k y^{n+1} (h_{i,j-1}^{n+1} - 2 h_{i,j}^{n+1} + h_{i,j+1}^{n+1})] - q_0 \quad (\text{III.96})$$

Remarque :

$$k_x^* = k_x^n$$

$$k_y^* = k_y^{n+1}$$

$$q_0^* = q_0^n$$

$$q_0^* = q_0^{n+1}$$

$h_{i,j}^*$: est la charge intermédiaire (fin de 1ère étape et début de 2^{ème} étape)

Détermination des coefficients de cette équation :

$$A_p \times h_{p-1} + B_p \times h_p + C_p \times h_{p+1} = D_p \quad (\text{III.97})$$

Etape (1) :

$$A_i \times h_{i-1} + B_i \times h_i + C_i \times h_{i+1} = D_i \quad (\text{III.100})$$

Avec :

$$A_i = - \frac{k_x \left(\frac{i-1}{2}, j \right)}{\Delta x^2} \quad (\text{III.101})$$

$$B_i = 2 \frac{S_s}{\Delta t} + \frac{k_x \left(\frac{i+1}{2}, j \right) + k_x \left(\frac{i-1}{2}, j \right)}{\Delta x^2} \quad (\text{III.102})$$

$$C_i = - \frac{k_x \left(\frac{i+1}{2}, j \right)}{\Delta x^2} \quad (\text{III.103})$$

$$D_i = 2 \frac{S_s}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta y^2} [(k y_{i,j+1/2} (h_{i,j+1} - h_{i,j}) - k y_{i,j-1/2} (h_{i,j} - h_{i,j-1}))] + q_0 \quad (\text{III.104})$$

Où :

$$k x_{i\pm 1/2,j} = \frac{k x_{i\pm 1,j} + k x_{i,j}}{2} \quad (\text{III.105})$$

$$k y_{i,j\pm 1/2} = \frac{k y_{i,j+1} + k y_{i,j}}{2} \quad (\text{III.106})$$

L'indice i varie de 1 à n

Étape (2) :

$$A_j \times h_{j-1} + B_j \times h_j + C_j \times h_{j+1} = D_j \quad (\text{III.107})$$

On aura :

$$A_j = - \frac{k y_{i, \frac{j-1}{2}}}{\Delta y^2} \quad (\text{III.108})$$

$$B_j = 2 \frac{S_s}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta y^2} [(k y_{i,j+1/2} + k y_{i,j-1/2})] \quad (\text{III.109})$$

$$C_j = - \frac{1}{\Delta y^2} k y_{i,j+1/2} \quad (\text{III.110})$$

$$D_j = 2 \frac{S_s}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2} [(k x_{i+1,j} (h_{i+1,j} - h_{i,j}) - k x_{i-1,j-1/2} (h_{i,j} - h_{i-1,j}))] + q_0 \quad (\text{III.111})$$

L'indice j varie de 1 à m.

Considérons un milieu anisotrope :

$$K_{x_{i,j}}=k_{xx}=c^{ste} \text{ et } k_{y_{i,j}}=k_{yy}=c^{ste})$$

Nous aurons une forme simplifiée des coefficients :

$$A_i = -\frac{k_{xx}}{\Delta x^2} \quad (III.112)$$

$$B_i = 2\frac{Ss}{\Delta t} + 2\frac{k_{xx}}{\Delta x^2} \quad (III.113)$$

$$C_i = -\frac{k_{xx}}{\Delta x^2} \quad (III.114)$$

$$D_i = 2\frac{Ss}{\Delta t} h_{i,j}^n + \frac{k_{yy}}{\Delta y^2}(h_{i,j-1} - 2h_{i,j} + h_{i,j+1}) + q_0 \quad (III.115)$$

$$A_j = -\frac{k_{yy}}{\Delta y^2} \quad (III.116)$$

$$B_j = 2\frac{Ss}{\Delta t} + 2\frac{k_{yy}}{\Delta y^2} \quad (III.117)$$

$$C_j = -\frac{k_{yy}}{\Delta y^2} \quad (III.118)$$

$$D_j = 2\frac{Ss}{\Delta t} h_{i,j}^* + \frac{k_{xx}}{\Delta x^2}(h_{i-1,j} - 2h_{i,j} + h_{i+1,j}) + q_0 \quad (III.119)$$

Dans chaque instant, il s'agit de résoudre un système tri diagonal pour chacune des deux étapes et à chaque instant en tenant compte des conditions aux limites et des conditions initiales.

$$A_p \times h_{p-1} + B_p \times h_p + C_p \times h_{p+1} = D_p \quad (\text{III.120})$$

Cette relation s'écrit sous forme matricielle :

$$[A].\{h\} = \{D\} \quad (\text{III.121})$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & c_5 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{n-2} \\ h_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

[A] : définie comme une matrice diagonale positive ;(elle est symétrique dans le cas d'un milieu homogène) , elle contient des coefficients du système dépendent de la perméabilité.

h : représente le vecteur de la charge hydraulique aux nœuds du domaine.

D : est le vecteur contenant des termes connus tel que les charges spécifiées par les conditions aux limites et le coefficient d'emménagement spécifique ainsi que le débit volumique q_0 .

6.4-Application des conditions aux limites :

1-Condition de Dirichlet :

L'équation (III.82) s'écrit par l'indice $p=2$

$$A_2 \times h_1 + B_2 \times h_2 + C_2 \times h_3 = D_2$$

$$B_2 \times h_2 + C_2 \times h_3 = D_2 - A_2 \times h_1 = D_2$$

$p=n-1$ l'équation (II.82) deviant:

$$A_{n-1} \times h_{n-2} + B_{n-1} \times h_{n-1} + C_{n-1} \times h_n = D_{n-1}$$

$$A_{n-1} \times h_{n-2} + B_{n-1} \times h_{n-1} = D_{n-1} - C_{n-1} \times h_n$$

2-Condition de Neuwman:

Dans le cas où la limite d'un domaine est imperméable ($\frac{\partial h}{\partial n} = 0$ où $h_{p+1} = h_p$)

La 1^{ère} équation du système de la matrice s'écrit :

$$(a_2 + b_2) h_2 + c_2 \times h_3 = d_2$$

De même pour la dernière équation (n-1)

$$A_{n-1} \times h_{n-1} + (b_{n-1} + c_{n-1}) h_n = d_{n-1}$$

Donc cette condition influe sur les coefficients b_2 et b_{n-1}

Conclusion :

L'étude analytique nous a permis d'évaluer numériquement la loi d'écoulement et d'arriver à un algorithme (algorithme de Thomas), cette algorithme donne des résultats d'infiltration à travers une digue d'un barrage homogène en terre.

Cette approche numérique (méthode des différences finies) est considérée comme une base sur laquelle le logiciel de calcul (FLAC) est fondé.

chapitre IV :

Modélisation et interpretation des résultats

Introduction:

On va présenter un modèle pour simuler les infiltrations de l'eau à travers une digue homogène, isotrope, via le logiciel du calcul FLAC^{2D} (Fast Lagrangian Analysis of Continua), développé par la société américaine ITASCA Consulting group, et spécialement conçu pour les problèmes de géo-mécanique en général, et pour les problèmes de mécanique des sols en particulier.

Le code de calcul FLAC^{2D} utilisé dans nos modélisations est basé sur la méthode des différences finies. Les concepteurs de ce code ont utilisés un concept appelé « méthode des éléments lagrangiens ». Il consiste en une application non traditionnelle de la méthode des différences finies explicites.

1-Principe de résolution numérique dans le logiciel FLAC^{2D} :

FLAC^{2D} est un logiciel de modélisation mécanique de problèmes géotechniques.

Contrairement à la plupart des autres codes basés sur la méthode des éléments finis, FLAC^{2D} utilise une formulation explicite en différences finies, nécessitant une faible puissance de calcul, peu de ressources mémoires ; mais un grand nombre d'itération, Ce code a été développé pour traiter les problèmes non linéaires de la mécanique appliquée à la géotechnique, intégrant un mode de résolution explicite des équations de la mécanique.

2- Algorithme de calcul:

Nous présentons, ci-dessous, un algorithme de calcul qui montre les différentes étapes de la résolution numérique du problème.

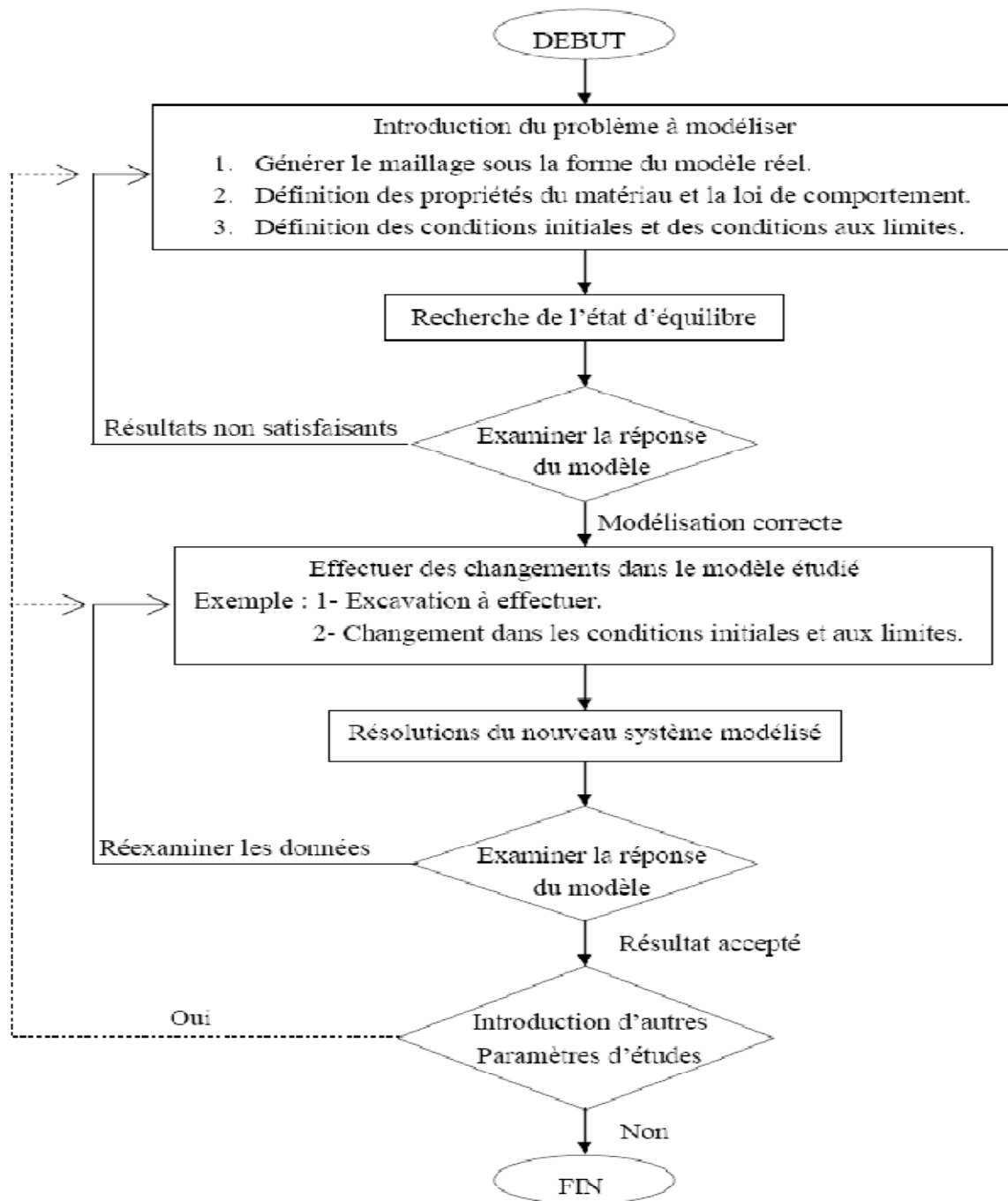


Figure IV.1: Algorithme de résolution numérique

3-Modélisation par FLAC^{2D}:

La modélisation d'écoulement d'un fluide à travers un solide perméable tel que le sol se fait par FLAC^{2D}.

Les caractéristiques suivantes sont utilisées pour constituer un modèle d'écoulement :

- 1-La loi d'écoulement correspond à la perméabilité isotrope et anisotrope.
- 2- Les différentes propriétés du fluide (masse volumique, densité , ...etc)
- 3-Pression du flux du liquide, et des états de frontières imperméable.
- 4-Le schéma explicite est utilisé.

Les paramètres utilisés par FLAC^{2D} :

Les propriétés concernant le flux de fluide utilisées dans FLAC^{2D} sont :

a-Perméabilité :

La perméabilité requise par FLAC^{2D} est appelée coefficient de mobilité (coefficient de pression des pores pour la relation de Darcy). La relation entre la conductivité hydraulique K_H (donnée en m/s) généralement utilisée quand la loi de Darcy est exprimée en charge et perméabilité du sol ($m^2/pa.sec$) est :

$$K = \frac{K_H}{g \times \rho_w} \quad (IV.1)$$

k_H : la conductivité hydraulique.

K : la perméabilité du sol.

g : accélération de gravitation.

ρ_w : masse volumique.

La perméabilité intrinsèque est reliée à k et K_H par :

$$k(m^2) = \frac{\mu \times K_H}{g \times \rho_w} \quad (IV.2)$$

μ : la viscosité dynamique.

Dans la discussion précédente, le coefficient de perméabilité est utilisé dans le cas du sol isotrope.

Dans le cas du sol anisotrope, le coefficient de perméabilité est un tenseur à trois directions principales, donc on doit spécifier K_{xx} , K_{yy} , K_{zz} lors d'une modélisation.

b-Densité de l'eau et du sol :

Trois densités différentes peuvent être indiquées comme données à FLAC^{2D} dans différentes circonstances :

1-La densité sèche du sol ρ_d .

2-La densité saturée du sol ρ_s .

3-La densité de l'eau ρ_w .

Notant que les densités sont seulement exigées si le chargement de la gravité est indiqué.

Le FLAC^{2D} calculera la densité saturée de chaque élément en utilisant la densité connue du fluide, la porosité η et la saturation S :

$$\rho_s = \rho_d + \eta \times S \times \rho_w \quad (\text{IV.3})$$

c-Saturation:

La saturation S est définie comme le rapport de volume de pore occupé par le fluide au volume des pores.

La formulation standard de FLAC^{2D}, la pression des pores est placée identiquement à zéro si la saturation à un point quelconque est moins qu'exactement 1. On peut permettre l'effet d'air dissous et emprisonné en réduisant le module local du liquide, tout en gardant la saturation à 1. Bien qu'aucune pression de pore ne soit présente dans la saturation partielle de la région.

Le fluide résiduel a toujours le poids, et les mouvements du liquide sous l'action de pesanteur (a une perméabilité apparente réduite).

La saturation peut également être déclarée pour être fixée à n'importe quelle maille.

d-Tension limite de fluide :

Dans les sols fins, l'eau interstitielle peut pouvoir soutenir une tension significative, l'utilisateur peut fixer une limitation de la tension T_f . La tension limite est toujours un nombre négatif ou zéro ; quand la pression de liquide essaye de tomber au dessous de la limite fixée, la cavitation se produit et la pression est alors placée à zéro. La saturation peut alors également baissée en dessous de 1 selon les conditions.

Si les restes de saturation sont égaux à 1, davantage d'expansion de volume des pores causera des pressions négatives qui se cumulent encore.

Notez qu'un pore est négatif si la pression n'est pas identique à 1, la tension due à des forces capillaires, électriques ou chimiques.

e-Les modules employés par FLAC^{2D} :

Le coefficient de Biot α est défini comme rapport du volume liquide gagné (ou perdu) dans un élément du sol au changement de volume de cet élément quand la pression des pores est changée. Il varie entre $\frac{3\eta}{2+\eta}$ et 1.

Avec :

η : c'est la porosité de l'élément du sol.

Dans le cas particulier d'un constituant incompressible $\alpha=1$, cette valeur est la valeur par défaut adopté par FLAC^{2D} pour un sol poreux, le coefficient de Biot est lié au module de compressibilité du sol K_s comme suit :

$$\alpha = 1 - \frac{K}{K_s} \quad (IV.4)$$

k : la perméabilité du sol.

k_s : le module de compressibilité du sol.

Le module de Biot est défini comme suit :

$$M = \frac{K_u - K}{\alpha^2} \quad (\text{IV.5})$$

M : le module de Biot.

k_u : le module de compressibilité du sol non drainé.

k : la perméabilité du sol.

α : le coefficient de Biot.

Pour un sol poreux, le module de Biot est relié au module de compressibilité de l'eau K_w par la relation suivante :

$$M = \frac{K_w}{\eta + \frac{((\alpha - \eta)(1 - \alpha))K_w}{k}} \quad (\text{IV.6})$$

Pour un fluide incompressible $\alpha = 1$

$$M = \frac{K_w}{\eta} \quad (\text{IV.7})$$

k_w : le coefficient de compressibilité de l'eau.

η : la porosité du sol.

f-La porosité :

La porosité η est un nombre dit non dimensionnel défini comme le rapport de volume des vides au volume total de l'élément, donné en fonction de l'indice des vides par la relation suivante :

$$\eta = \frac{e}{1 + e} \quad (\text{IV.8})$$

e : l'indice des vides.

La valeur par défaut de η si non indiqué est 0,5, il devrait être indiquée comme nombre positif entre 0 et 1, mais des petites valeurs (dite moins de 0,2) devrait employé avec la grande attention parce que pour $\alpha=1$, la rigidité apparente du fluide de pore est proportionnelle à $\frac{k_w}{\eta}$.

Pour des valeurs faibles de η , la rigidité peut devenu très grande par rapport à la rigidité du sol, causant la solution de FLAC^{2D} avec une bonne convergence.

Notez que FLAC^{2D} prend la porosité comme une variable principale, la variation de pression est liée directement au changement de volume mais pas au changement de porosité.

Par défaut FLAC^{2D} ne met pas à jour la porosité pendant le cycle de calcul ; depuis le processus prend du temps

Cependant, si le changement de la porosité est important dans une application particulière, ils peuvent être inclus par l'utilisation d'un tableau de valeur.

g-Le facteur temps :

Des échelles de temps peuvent être appréciées en utilisant des définitions du temps caractéristique donnees ci-dessous :

$$t_c^m = \sqrt{\frac{\rho}{K_u + \frac{4}{3}G}} \times L_c \quad (IV.9)$$

t_c^m : le temps caractéristique de processus mécanique.

k_u : le module de compressibilité du sol non drainé.

G : le module de cisaillement.

ρ : densité massique.

L_c : longueur caractéristique.

La période caractéristique du procédé de diffusion :

$$t_c^f = \frac{Lc^2}{C} \quad (IV.10)$$

t_c^f : le temps caractéristique de diffusion.

C : la diffusivité, définie comme coefficient de mobilité K divisé par l'emmagasinement S :

$$C = \frac{K}{S} \quad (IV.11)$$

Il y a différentes formes d'emmagasinement qui s'appliquent dans le FLAC^{2D} selon le processus de contrôle :

1-l'emmagasinement liquide :

$$S = \frac{1}{M} = \frac{\eta}{K_w} \quad \text{si } \alpha=1 \quad (IV.12)$$

S : le coefficient d'emmagasinement.

M : le module de Biot.

η : la porosité du sol.

K_w : le coefficient de compressibilité de l'eau.

α : le coefficient de Biot.

2-l'emmagasinement phréatique :

$$S = \frac{1}{M} + \frac{\eta}{\rho_w \times g \times L_p} = \frac{\rho}{K_w} + \frac{\eta}{\rho_w \times g \times L_p} \quad \text{si } \alpha=1 \quad (IV.13)$$

L_p : la longueur caractéristique d'emmagasinement.

g : accélération de pesanteur.

ρ_w : densité massique de l'eau.

3-l'emmagasinement élastique :

$$S = \frac{\frac{1}{M} + \alpha^2}{K + \frac{4}{3G}} \quad \text{si } \alpha=1 \quad (\text{IV.14})$$

K : le coefficient de perméabilité du sol.

G : le module de cisaillement.

Dans le cas de saturation totale, la diffusivité C s'écrit :

$$C = K \times M = \frac{K \times K_w}{\eta} \quad \text{si } \alpha=1 \quad (\text{IV.15})$$

Dans le cas de saturation partielle :

$$C = \frac{K}{\frac{1}{M} + \left(\frac{\eta}{\rho_w \times g \times L_p} \right)} = \frac{K}{\eta \left[\frac{1}{K_w} + \left(\frac{1}{\rho_w \times g \times L_p} \right) \right]} \quad \text{si } \alpha=1 \quad (\text{IV.16})$$

H- Effet du facteur temps :

Nous considérons d'abord le facteur temps en mesurant le temps de déclenchement d'une perturbation, nous définissant t_s comme échelle de temps requise de l'analyse et t_c comme période caractéristique du procédé de diffusion.

h.1-Le comportement à court terme :

Si t_s est très court comparé au temps caractéristique t_c du procédé de diffusion, l'influence de flux de fluide sur les résultats de simulation sera probablement négligeable et la simulation à saturation partielle peut être exécutée avec FLAC^{2D}.

Le temps sera impliqué dans la simulation numérique ($t_s < t_c$) mais la pression des pores changera en raison de la tension volumique si le module de compressibilité du liquide est donné une valeur réaliste.

h.2-comportement à long terme :

En cas ($t_s > t_c$) et pour le cas d'une vidange ($t = t_s$), alors le champ de pression de pore peut désaccoupler du champ mécanique. Le champ de pression de pore équilibré peut être employé pour déterminer l'écoulement, seulement la simulation et le champ mécanique peut être déterminé après l'équilibre en mode mécanique.

$$M=0 \text{ et } K_w=0$$

i-Les forces utilisées par FLAC 2D :

Quand le fluide traverse un milieu poreux, il y a d'après Terzaghi (1943) et Taylor (1948), trois forces agissantes, par volume unitaire sur le sol :

Le poids propre du sol, la flottabilité et les forces de dragages où d'infiltration Bear (1972), ces forces sont automatiquement prise en compte lors de la modélisation par FLAC^{2D}. L'équilibre est exprimé en utilisant l'effort total :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho_s \times g_i = 0 \quad (\text{IV.17})$$

En utilisant l'expression:

$$\rho_s = \rho_d + \eta \times s \times \rho_w \quad (\text{IV.18})$$

On définit la contrainte effective comme:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho \times \delta_{ij} \quad (\text{IV.19})$$

En substituant (IV.19) et (IV.18) dans (IV.17) :

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + \rho_d \times g_i - (1-\eta) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} - \eta \times \gamma_w \times \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{IV.20})$$

Où :

$$\gamma_w = \rho_w \times g \quad (\text{IV.21})$$

$$\Phi = \frac{\rho}{\rho_w \times g} - \frac{X_k \times g_k}{g} \quad (\text{IV.22})$$

j-Les formulations de FLAC^{2D} :

La formulation des processus fluide-mécanique couplés dans FLAC^{2D} est faite dans le cadre de la théorie quasi statique de Biot et peut être appliquée au problème comportant l'écoulement monophasé de Darcy pour un milieu poreux, pour différents types de fluides (y compris le gaz et l'eau).

j.1-Expression de continuité :

La formulation des mécanismes couplés de fluide-déformation dans FLAC^{2D} est basée sur la théorie de consolidation de Biot. L'exécution numérique de l'équation différentielle d'écoulement est faite par FLAC^{2D}, et les expressions régissant l'écoulement sont discutées ci-dessous :

j.1.1-la loi d'écoulement :

La loi d'écoulement est décrite par la loi de Darcy :

$$q_i = -k_{ij} \times K(s) \frac{\partial}{\partial x_j} (p - \rho_w \times g_k \times x_k) \quad (\text{IV.23})$$

q_i : vecteur de débit.

K_{ij} : tenseur de perméabilité défini par le FLAC^{2D}.

$K(s)$: perméabilité relative, où il est une fonction de saturation s .

P : la pression de fluide.

ρ_w :masse volumique de l'eau.

Le fluide en équilibre est régit par la formule suivante :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_v \quad (IV.24)$$

ξ :est la variation de fluide contenant.

q_v : intensité volumique.

L'équilibre des moments a la forme :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \times g_i = \rho \frac{du_i}{dt} \quad (IV.25)$$

Où :

$$\rho = (1-\eta)\rho_s + \eta \times \rho_w \quad (IV.26)$$

Avec :

ρ : le module de la densité du solide.

ρ_w, ρ_s : masse volumique du phase solide et liquide .

η : la porosité.

On note que :

$(1-\eta)\rho_s$:correspond à la densité en bloc de la matrice sèche, (veut dire $\rho = \rho_d + \eta \times \rho_w$)

j.1.2-la loi constitutive :

L'équation de réponse pour le fluide de pore dépend de la valeur de la saturation ; a la saturation totale :

$$\begin{cases} S=1 \\ K_{ij}(s)=k_{ij} \end{cases}$$

Et le fluide peuvent soutenir une tension jusqu'à une limite T_f ; pour $S=1$; l'équation de la réponse est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = M \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right) \quad (IV.27)$$

M : module de Biot.

α : coefficient de Biot.

ϵ : est la contrainte volumique.

Pour $s < 1$ la réponse constitutive des pores de fluide est donne par :

a)- équation de saturation :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \left(\frac{1}{\eta} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right) \quad (IV.28)$$

b)-une relation entre saturation et pression :

$$p=h(s) \quad (IV.29)$$

Dans le FLAC^{2D}, $h(s) = 0$ dans les zones de saturation partielle et l'écoulement se fait par gravitation.

c)-la relation entre la perméabilité et la saturation :

$$k(s)=S^2(3-2S)$$

cette relation utilisé par le FLAC^{2D} déduit par la figure (IV.2) pour les petites contraintes constituées la réponse de la phase solide :

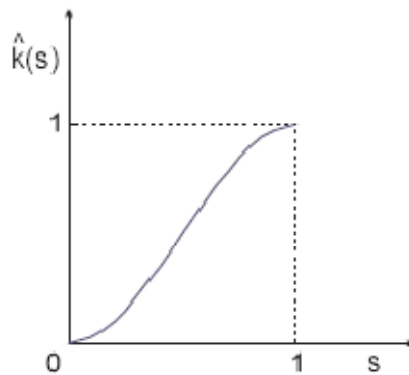


Figure IV.2 : La relation entre perméabilité et saturation utilisée par le FLAC

$$\frac{d}{dt}(\sigma_{ij} + \alpha \times \rho \times \delta_{ij}) = H(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, k) \quad (IV.30)$$

k-Frontières de flux de fluide et conditions initiales :

Par défaut, dans FLAC^{2D} la pression initiale de pore est zéro et la saturation est égale à 1, différentes conditions initiales peuvent être fournis mais elles doivent être conformes à la formulation de FLAC^{2D}.

La pression de pore doit être zéro si la saturation est inférieur à 1 et vice versa.

Quatre types d'états de frontières sont imposés :

- 1-pression constante de pore.
- 2-décharge spécifique constante.
- 3-frontière perméable.
- 4-frontière imperméable (état de défaut)

Un état de frontière perméable a la forme :

$$q_n = h (p - p_e)$$

q_n : est la composante du spécifique décharge normale à la frontière dans la direction de la normale extérieure.

h : le coefficient de fuite.

P : la pression des pores calculés par FLAC sur la surface de frontière

p_e : pression connue de pore dans la région à où de laquelle on assure que la fuite se produit.

Ces équations vont être résolues par le FLAC en utilisant la méthode des différences finies, basée sur la discrétisation à des mailles triangulaires ; la pression des pores change linéairement dans le triangle, assurant une décharge spécifique uniforme dans le triangle :

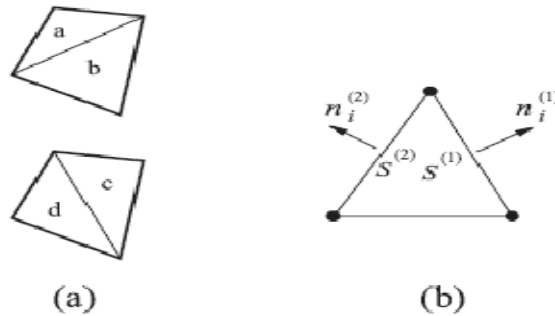


Figure IV.3 : la discrétisation a des éléments triangulaires

Deux types de formulations utilisées par le FLAC sont :

- 1-l'équation de l'écoulement et les conditions aux limites utilisées par le FLAC sont des expressions en fonction de pression des pores (cas des mécaniques des sols)
- 2-la perméabilité utilisée par le FLAC est dite un coefficient de mobilité ; elle est définie comme rapport de la perméabilité intrinsèque à la viscosité dynamique de liquide.

1-La loi constitutive : Dérivation d'élément « matrice rigidité »

Négligeant la pesanteur ; la loi de Darcy pour un milieu poreux anisotrope est réduite à :

$$q_i = k_{ij} \times \frac{\partial p}{\partial x_j} \quad (\text{IV.31})$$

Chaque élément quadrilatéral est divisé en triangle de deux manières différentes ; pore de la pression est assumé de changer linéairement dans un triangle, et le vecteur

qi est divisé pour un triangle générique de secteur A par l'application du théorème de divergence de Gauss, par référence on obtient :

$$q_i = \frac{K_{ij}}{A} \times \sum p_{nj} \times s \quad (IV.32)$$

les expressions semblables s'appliquent aux noeuds (b) et (c) dans la figure (IV.3) des débits nodaux sont ajoutés des trois tringles se réunissant au nœud et divise par deux, puisque la somme d'écoulement vient de deux grilles de recouvrement.

La matrice de rigidité M de l'écoulement de l'élément quadrilatéral est défini en terme de relation entre les pressions des quatres nœuds et les quatres débits nodaux comme suit :

$$\{Q\} = [M]\{p\} \quad (IV.33)$$

Pour le cas spécial d'une zone carré, la matrice de rigidité a la forme :

$$[M] = -\frac{K}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

K : coefficient de perméabilité pour un milieu isotrope

C'est la matrice identique à celle qui serait obtenue par la méthode des différences finies.

L'effet de pesanteur serait incorporé comme suit :

Si la pression des pores autour d'une zone conforme au gradient $\frac{\partial p}{\partial x_i} = g_i \times \rho_w$ et $\{Q\} = 0$,

alors les modifications :

$$\{Q\}=[M]\{p-(x_i-x_i^{(1)})\times g_i \times \rho_w\} \quad (IV.34)$$

g_i : vecteur de l'accélération par gravitation.

3.1-Discrétisation de la digue du barrage :

Les caractéristiques de la digue de notre barrage sont :

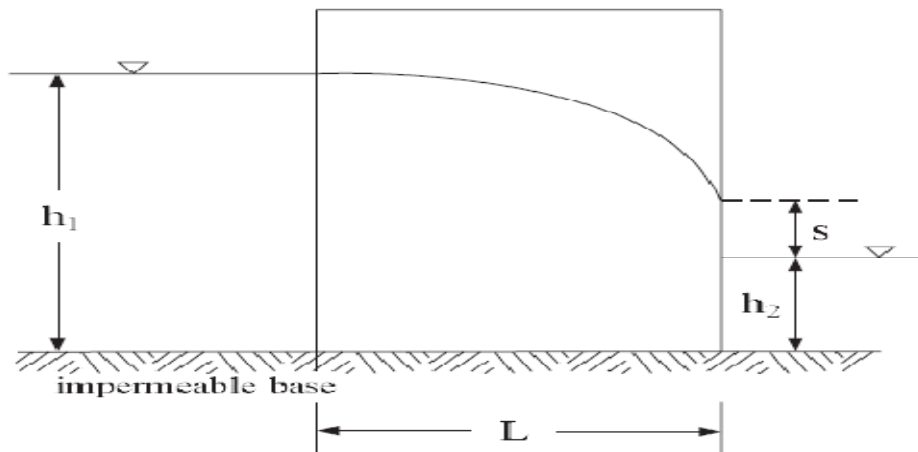


Figure IV.4 : les caractéristiques du barrage

Tableau IV.1 : les caractéristiques géométriques de la digue

L(m)	h_1 (m)	h_2 (m)
9	6	1,2

L : la largeur de la base de la digue.

h_1 : le niveau de l'eau en amont.

h_2 : le niveau de l'eau en aval.

S : la surface de suintement.

La discrétisation se fait par des mailles rectangulaires (30 ; 20) selon (x ; y) avec un espacement entre maille de 0.3m (Grid spacing =0.3)

Selon x : $(0.3 \times 10) \times 3 = 3 \times 3 = 9$ m sur la base.

Selon y : $(0.3 \times 10) \times 2 = 3 \times 2 = 6$ m sur la hauteur h_1 .

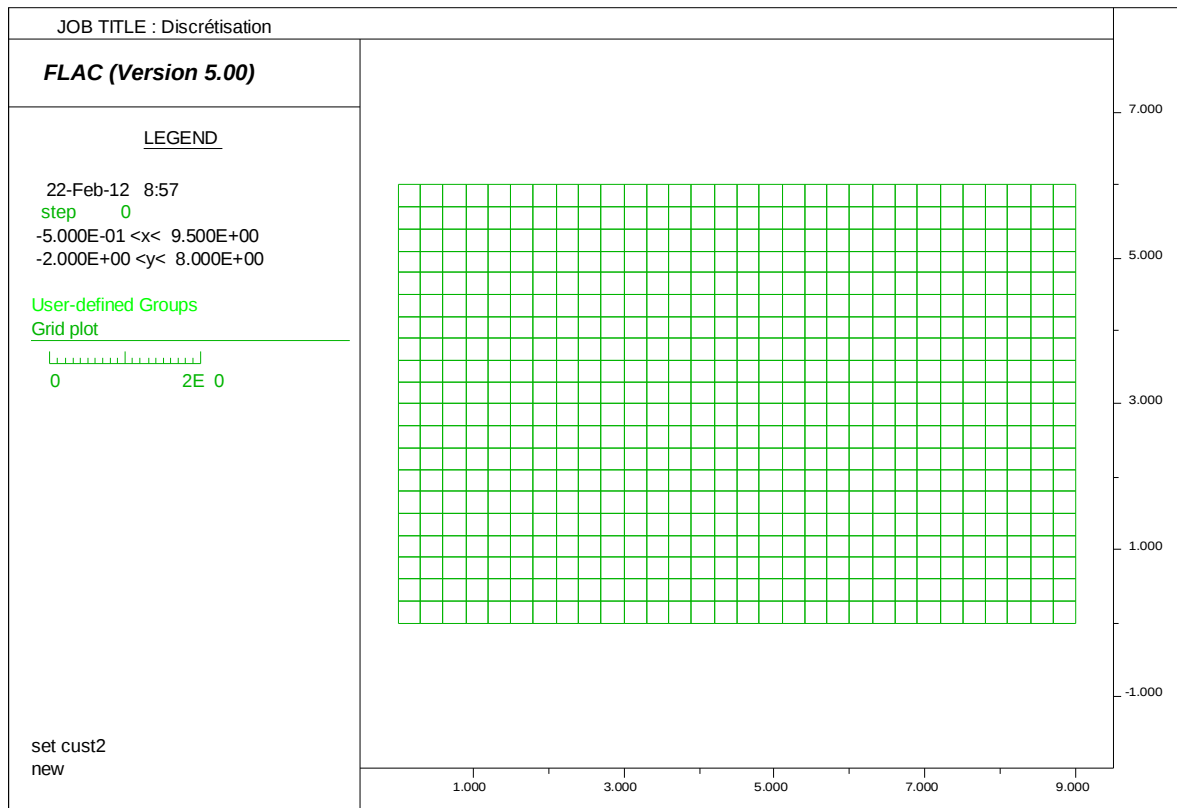


Figure IV.5 : Discretisation de la digue

3.2-Affectation des propriétés du sol :

La digue est homogène et isotrope, dont elle possède les caractéristiques suivantes :

Tableau IV.2 : les caractéristiques mécanique de la digue

Perméabilité (k) (m/s)/(pa/m)	Porosité (η)	Densité de l'eau (ρ_w) kg/m ³	Densité sec du sol (ρ) kg/m ³	Gravité (g) m/s ²
10^{-10}	0.3	1000	2000	10

* Les propriétés de l'eau :

Densité de l'eau (ρ_w) = 1000 kg/m³

Module de compressibilité de l'eau K_w = 1000(m/s)/(Pa/m)

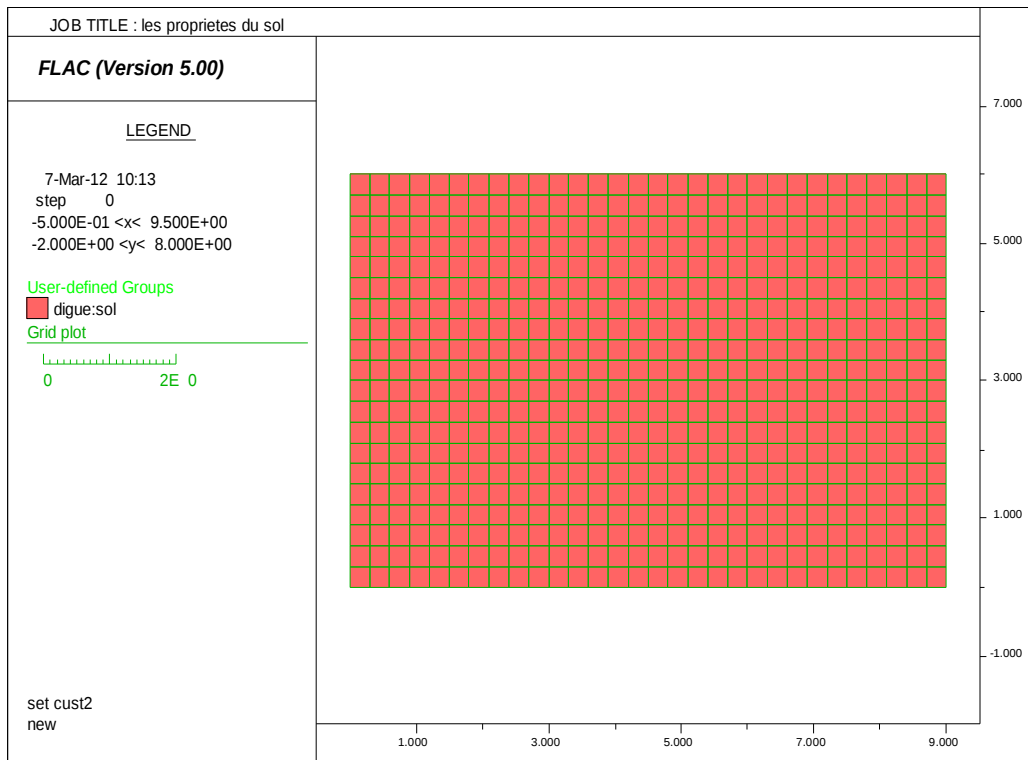


Figure IV.6 : Les propriétés de la digue

3.3- Les conditions aux limites et les conditions initiales :

On doit estimer le débit de fuite à travers le corps du barrage au cours de la vidange. Le barrage est initialement rempli (saturé), c'est-à-dire, initialement, le degré de saturation =100%

a-La pression de l'eau :

****Côté amont :***

$$P = \rho_w \times g \times h \quad (h = h_1 = 6\text{m}) = 1000 \times 10 \times 6 = 60000 \text{ Pa.}$$

****Côté aval :***

$$P = \rho_w \times g \times h \quad (h = h_2 = 1,2\text{m})$$

$$= 1000 \times 10 \times 1,2 = 12000 \text{ Pa.}$$

P : la pression de l'eau.

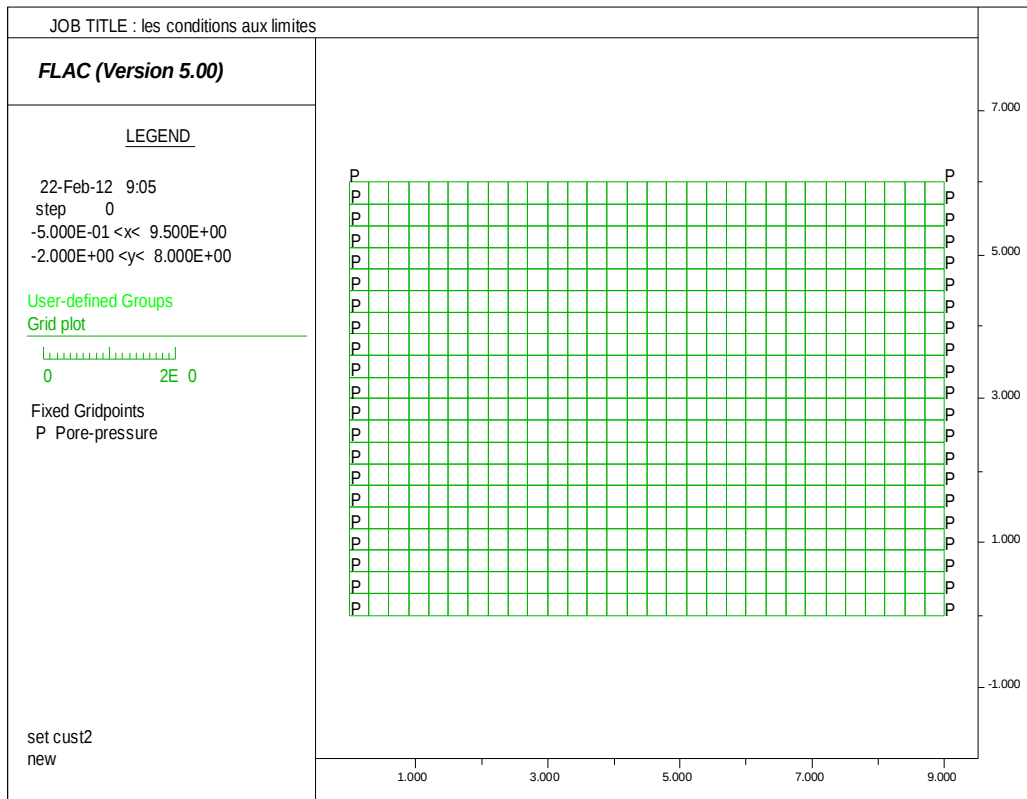


Figure IV.7 : affectation des conditions initiales et aux limites

b-Le débit :

Il est calculé par la formule analytique de Dupuit :

$$q_t = k \times \rho_w \times g \times \frac{h_1^2 - h_2^2}{2 \times L}$$

Dans notre cas $h_1=6\text{m}$ et $h_2=1,2\text{ m}$, on obtient une valeur du débit total de

$$q_t = 1,92 \times 10^{-6} \text{m}^3/\text{s}.$$

q_t : le débit total qui traverse la digue.

4- La surface de suintement :

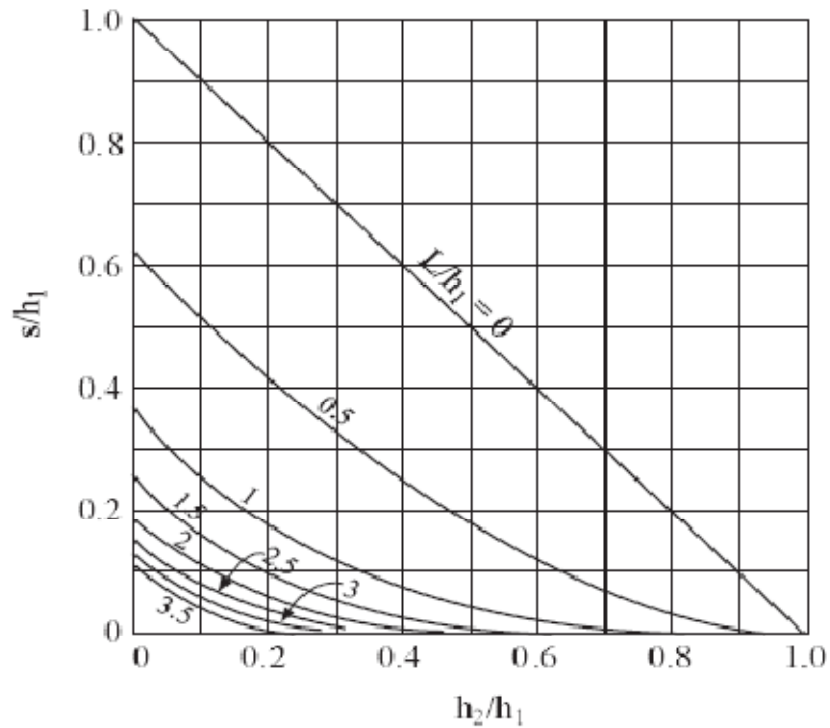


Figure IV.8: Abaque pour la détermination de la surface de suintement d'après Polubarinova-Kochina

$$\frac{L}{h_1} = \frac{9}{6} = 1,5$$

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1,2}{6} = 0,2$$

D'après l'abaque de Polubarinova-Kochina on aura :

$$\frac{s}{h_1} = 0,1$$

D'où la surface de suintement est $S = 0,1 \times h_1 = 0,1 \times 6 = 0,6\text{m}$

$S = 0,6\text{m}$ est la valeur exacte de la surface de suintement donnée analytiquement.

5-Le temps caractéristique :

Le temps caractéristique est le temps nécessaire pour atteindre un régime permanent lors d'une vidange du barrage, il est calculé par la formule analytique suivante :

$$t_c = \frac{L_c^2}{C}$$

$$C = \frac{k \times k_w}{\eta} = \frac{10^{-10} \times 1000}{0.3} = 3.33 \times 10^{-7}$$

$$t_c = \frac{(9)^2}{3.33 \times 10^{-7}} = 2.43 \times 10^8 \text{ seconde.}$$

6-Graphes donnés par FLAC^{2D} en régime transitoire :

6.1- Ecoulement (Flow) :

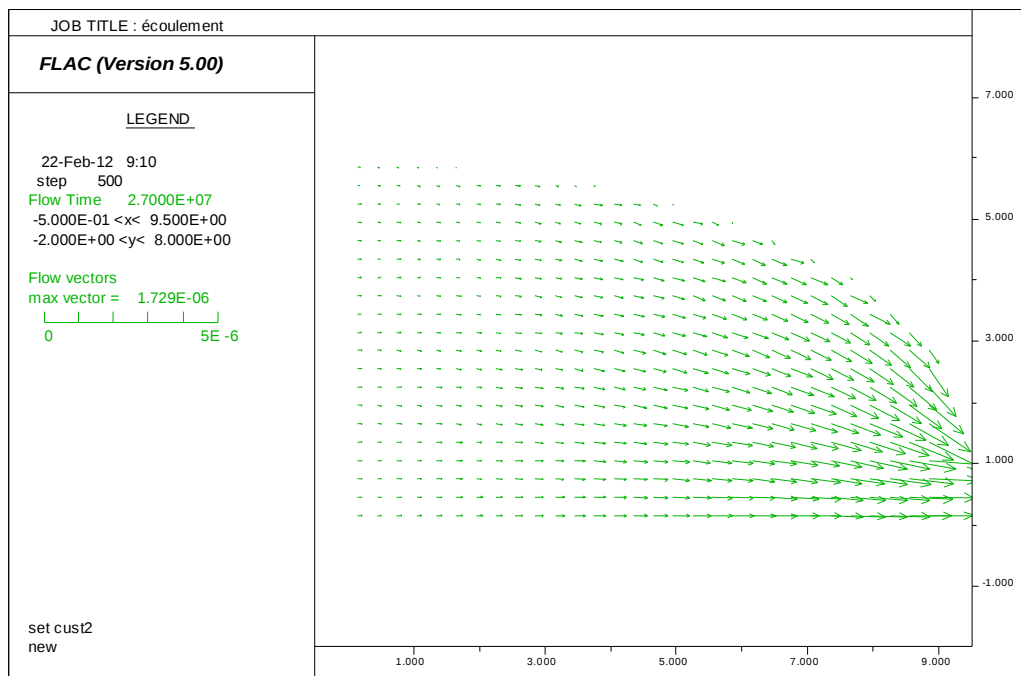


Figure IV.9 : graphe de l'écoulement

La figure (IV.9) présentée ci dessus donne les vecteurs de vitesse d'écoulement après un temps d'exécution de $2,7 \times 10^7$ s (régime transitoire) et une valeur maximale de $1,729 \times 10^{-6}$ m/s.

6.2-Saturation :

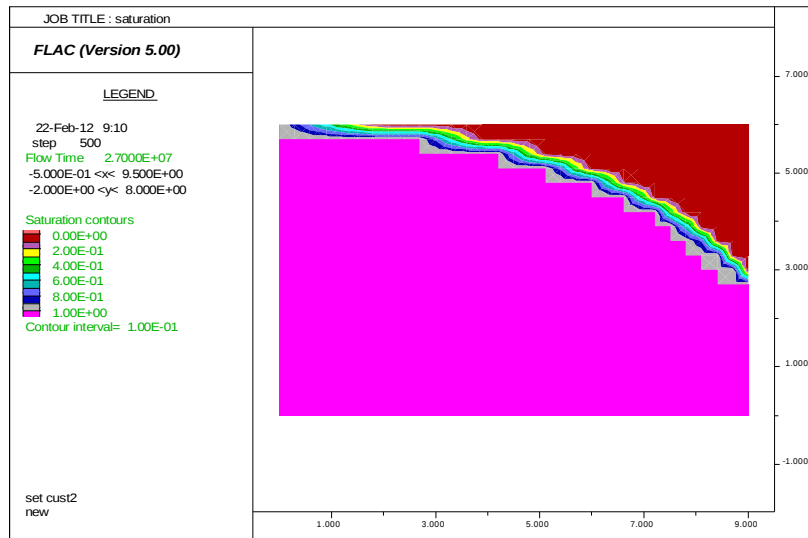


Figure IV.10 : graphe de saturation

La figure (IV.10) présente la valeur de la ligne de saturation qui varie entre une saturation totale (valeur de saturation égale à 1) et une saturation nulle (valeur de saturation égale à 0) et un contour dégradé de 2.10^{-1} .

6.3-pression de l'eau :

La figure (IV.11) présente les valeurs de la pression d'eau varie entre une valeur maximale de 6.10^4 Pa et une valeur minimale nulle.

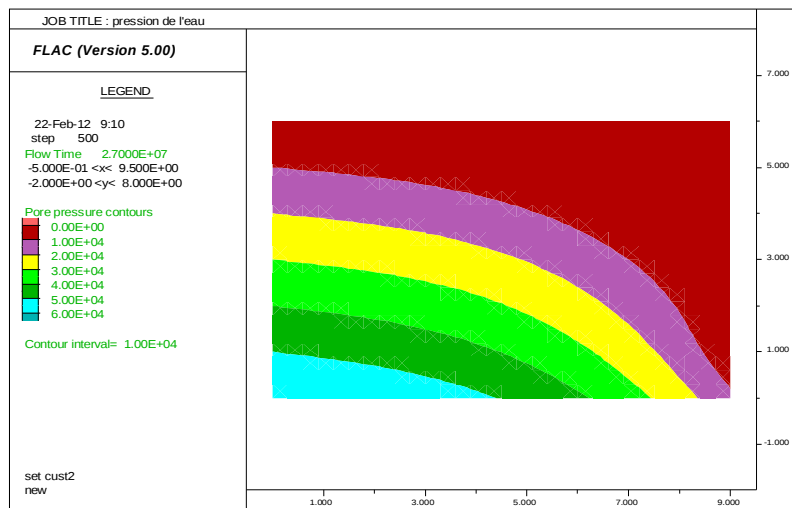


Figure IV. 11 : graphe de pression de l'eau

6.4-Les courbes d'écoulement :

La figure (IV.12) présente les courbes d'écoulement en régime transitoire qui présente les valeurs de débit entrant et les valeurs de débit sortant.

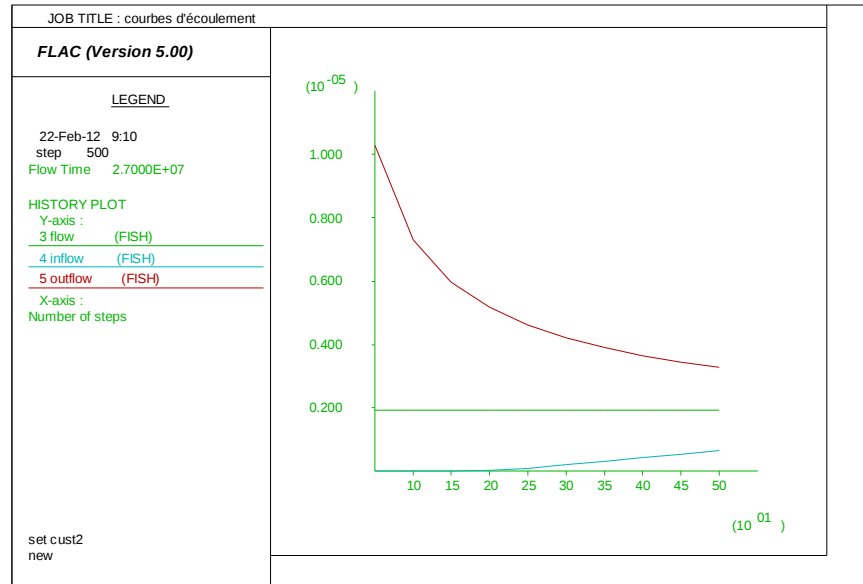


Figure IV.12: graphe d'écoulement

6.5-Le réseau d'écoulement :

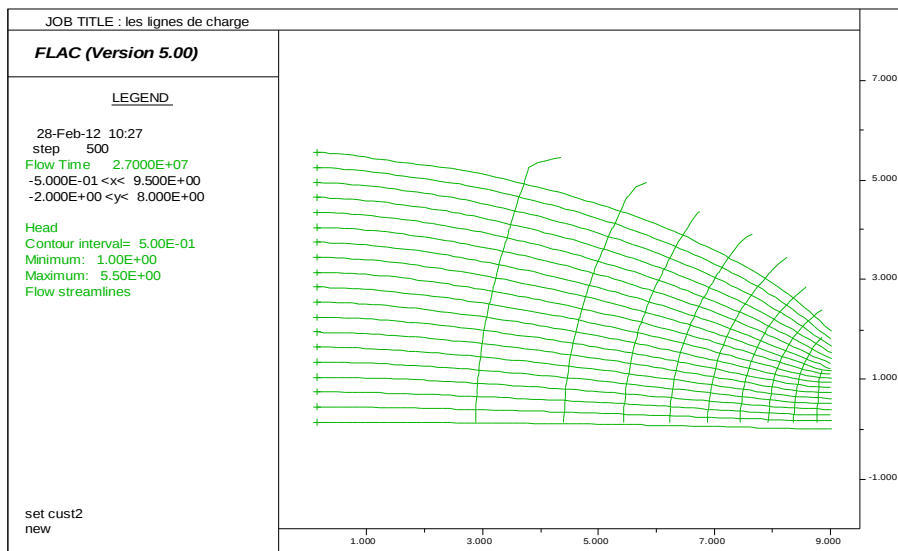


Figure IV.13: les lignes de charges et les équipotentielles

7-Les graphes en régime permanent:

7.1-écoulement de l'eau :

La figure (IV.14) présente le graphe d'écoulement en régime permanent dont les vecteurs de vitesse convergent vers le côté aval.

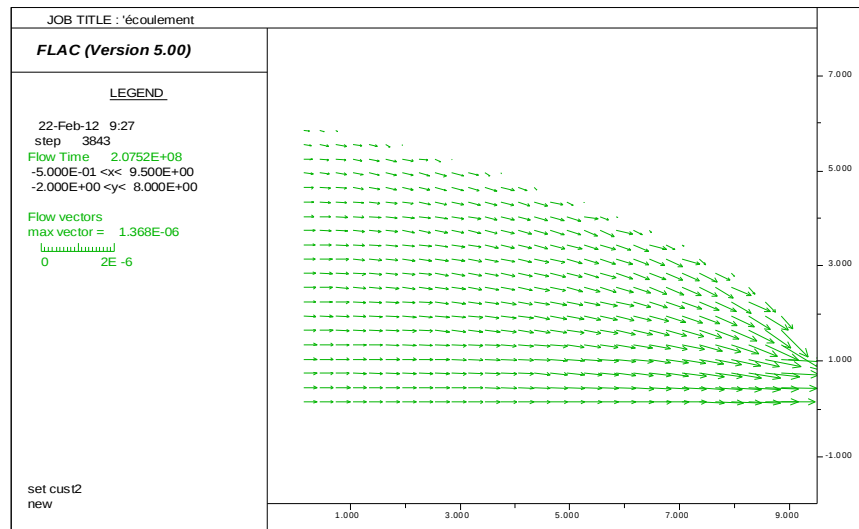


Figure IV. 14: graphe d'écoulement

7.2-saturation :

La figure (IV.16) présente les valeurs de pression ; à la même courbure et la même valeur de pression de l'eau mais avec un abaissement dans la hauteur par rapport au régime transitoire.

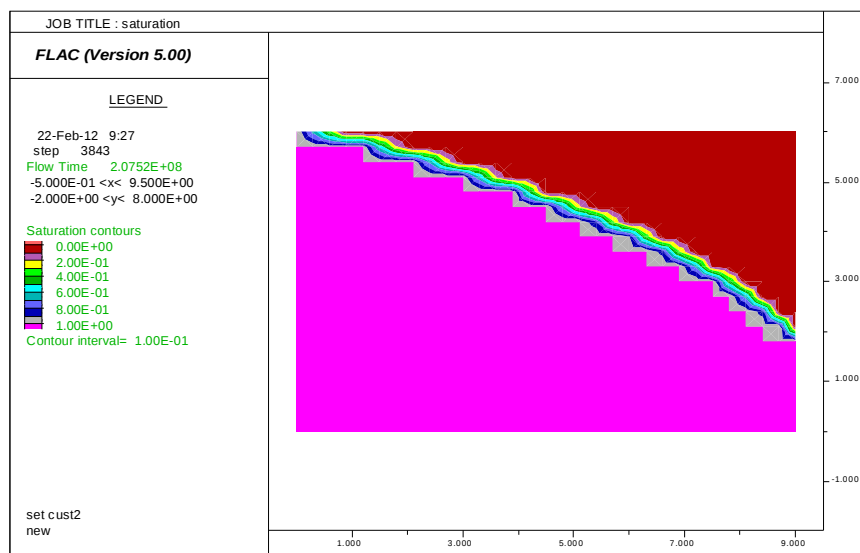


Figure IV.16 : graphe de saturation

7.3-la pression de l'eau :

La figure (IV.17) présente les valeurs de pression qui sont les mêmes que le régime transitoire mais avec une réduction dans la surface de pression par rapport au régime transitoire.

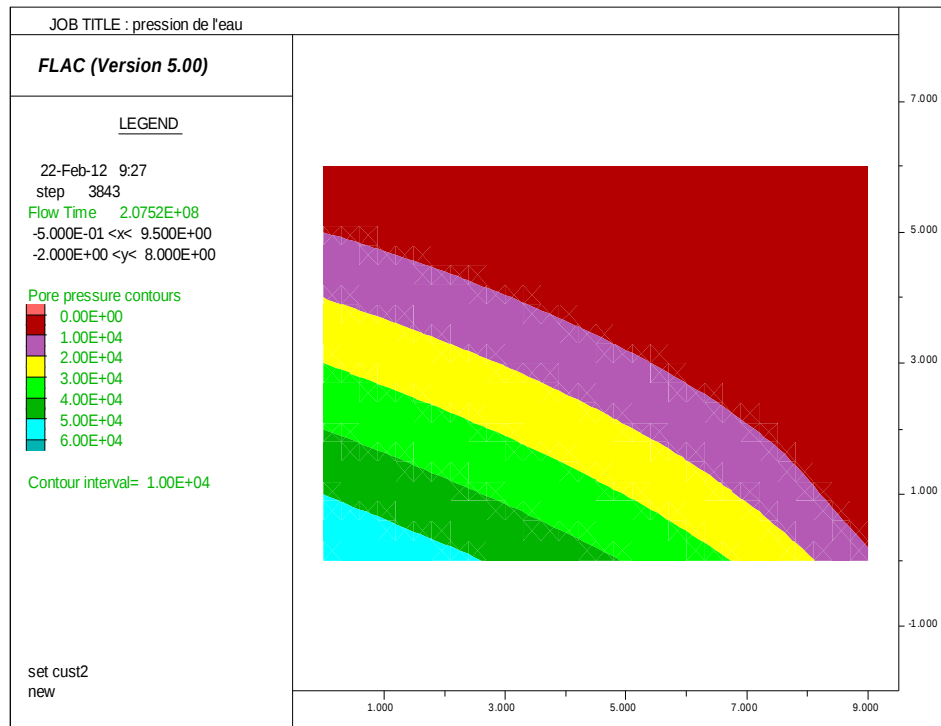


Figure IV.17 : graphe de pression de l'eau

7.4-Les courbes d'écoulement :

La figure (IV.18) présente les courbes de débit entrant et de débit sortant en régime permanent qui tend asymptotiquement jusqu'à atteindre la valeur de débit d'écoulement.

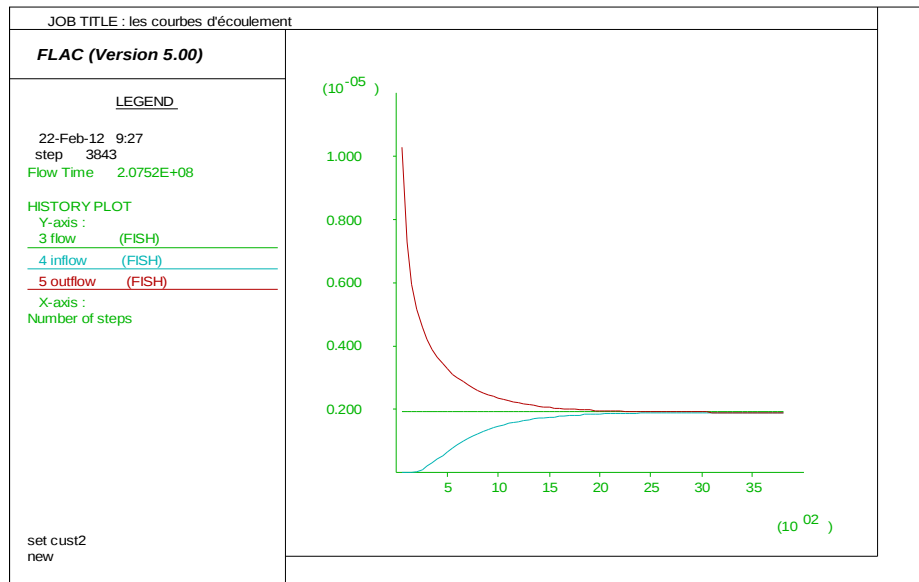


Figure IV.18: graphe d'écoulement

7.5- graphe de valeur de débit entrant :

La figure (IV.19) présente la valeur du débit entrant en régime permanent, qui augmente progressivement jusqu'à atteindre une valeur de débit d'écoulement.

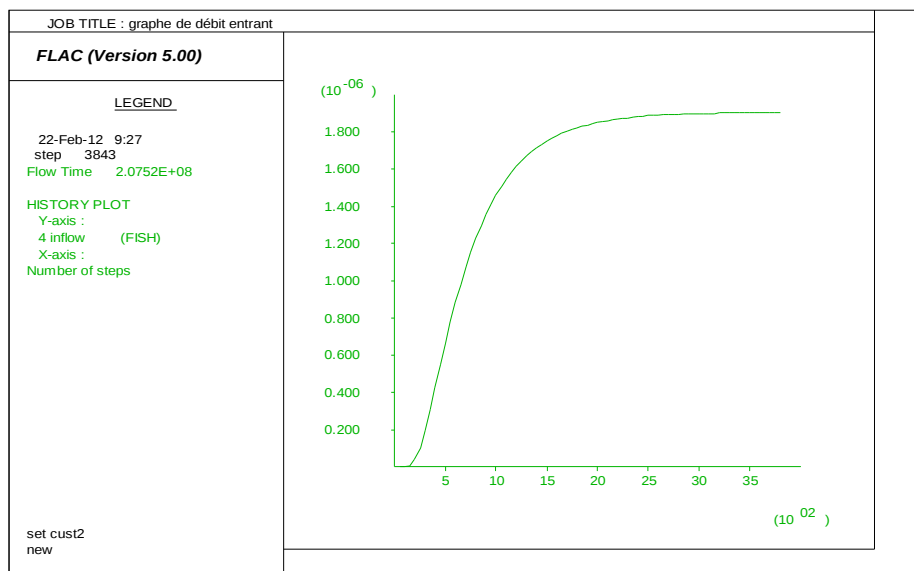


Figure IV.19: les valeurs du débit entrant en fonction de nombre d'itération

7.6-graphe de valeur de débit sortant :

La figure (IV.19) présente la valeur du débit sortant en régime permanent, qui diminue progressivement jusqu'à atteindre une valeur de débit d'écoulement.

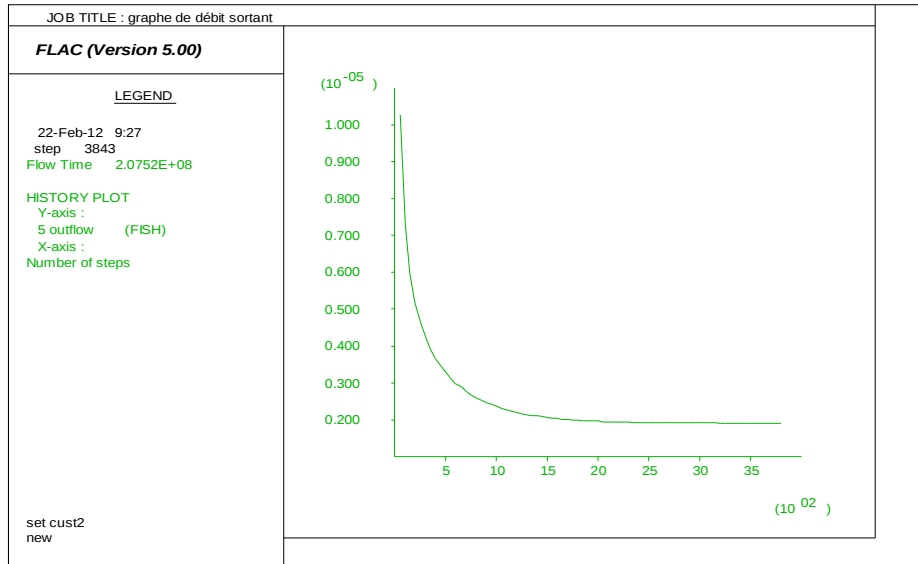


Figure IV.20: les valeurs du débit sortant en fonction du nombre d'itération

7.7-Le réseau d'écoulement :

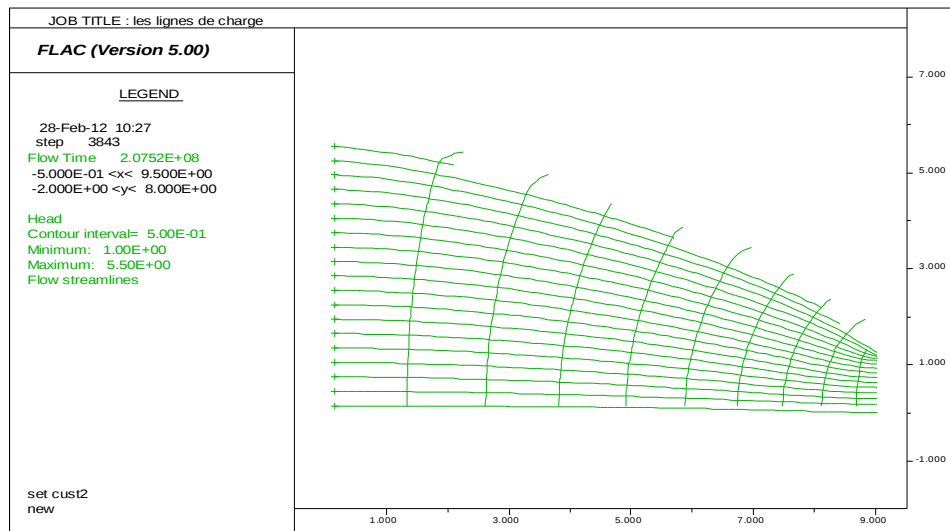


Figure IV.21: les lignes de charges et les équipotentiels

La figure (IV.21) présente un réseau d'écoulement avec une valeur maximale et une valeur minimale pour un régime permanent.

8-Interprétation des résultats :

D'après les figures(IV.9), (IV.10), (IV.11) on voit qu'il y a une réduction dans la ligne de saturation et dans la surface occupée par la zone de pression, en passant du régime transitoire au régime permanent (figures (IV.14), (IV.15), (IV.16)) et cela est due au rabattement de niveau d'eau (vidange) dans les pores.

Le débit entrant augmente et le débit sortant diminue, jusqu'à atteindre la valeur numérique de l'écoulement en régime permanent, donné par la figure (IV.18).

La hauteur de la surface de suintement calculée analytiquement à partir de l'abaque Polubarinova-Kochina (Figure (IV.6)) est de $s=0.6m$.

Sur la figure (IV.11) on peut déterminer la surface de suintement qui déduite par un calcul d'échelle est trouvée égale à $s=0.6m$ une fois que le régime permanent est atteint.

On conclue par rapport à la surface de suintement que le logiciel FLAC^{2D} donne les mêmes résultats que l'abaque Polubarinova-Kochina, donc il est fiable et exacte pour la résolution du problème d'infiltration à travers un barrage en terre lors d'une vidange.

chapitre V :

Exemple d'application

Introduction :

Dans cette partie, nous comparons les résultats obtenus par le logiciel FLAC avec les différents résultats obtenus par d'autres chercheurs à l'aide des différentes méthodes en appliquant l'exemple « modèle » de Bear (1972) , cité par J.Knight (2005).

1-Exposé du problème :

On considère un barrage rectangulaire poreux, homogène avec une conductivité K et une base imperméable, la charge piézométrique h satisfait l'équation de Laplace

$$\nabla^2 h = 0$$

Dans les coordonnées cartésiennes à deux dimensions elle s'écrit par :

$$\nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

h: la charge hydraulique.

x, y: les coordonnées cartésiennes selon les axes x et y.

L'équation différentielle de la surface libre est donnée par:

$$\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 = \frac{\eta^2 - h_1^2 - \left(\frac{x}{a}\right)(h_2^2 - h_1^2)}{h_1^2 + \left(\frac{x}{a}\right)(h_2^2 - h_1^2) - \frac{\eta^2}{3}} \quad (V.1)$$

La position de la surface libre calculée par l'hypothèse de Dupuit-Forchheimer:

$$\eta^2 = h_1^2 + \frac{x}{a}(h_2^2 - h_1^2) \quad (V.2)$$

η : la porosité.

h_1 : la hauteur de l'eau en amont.

h_2 : la hauteur de l'eau en aval.

2- Application du logiciel à l'exemple de Bear (1972) cité par J.Knight (2005):

Bear (1972) a modélisé un rectangle poreux d'un barrage homogène et isotrope, avec une accélération nulle sur la surface d'écoulement, et une base imperméable; avec une hauteur de l'eau en amont de $h_1=1\text{m}$ et une base de $b_1=1\text{m}$ et une hauteur de l'eau en aval de $h_2=0.25\text{m}$.

2.1- discrétisation du problème par FLAC^{2D}:

La discrétisation se fait par des mailles quadrilatérales dont le nombre est de 40×40 et une dimension de 0.025 pour chaque maille.

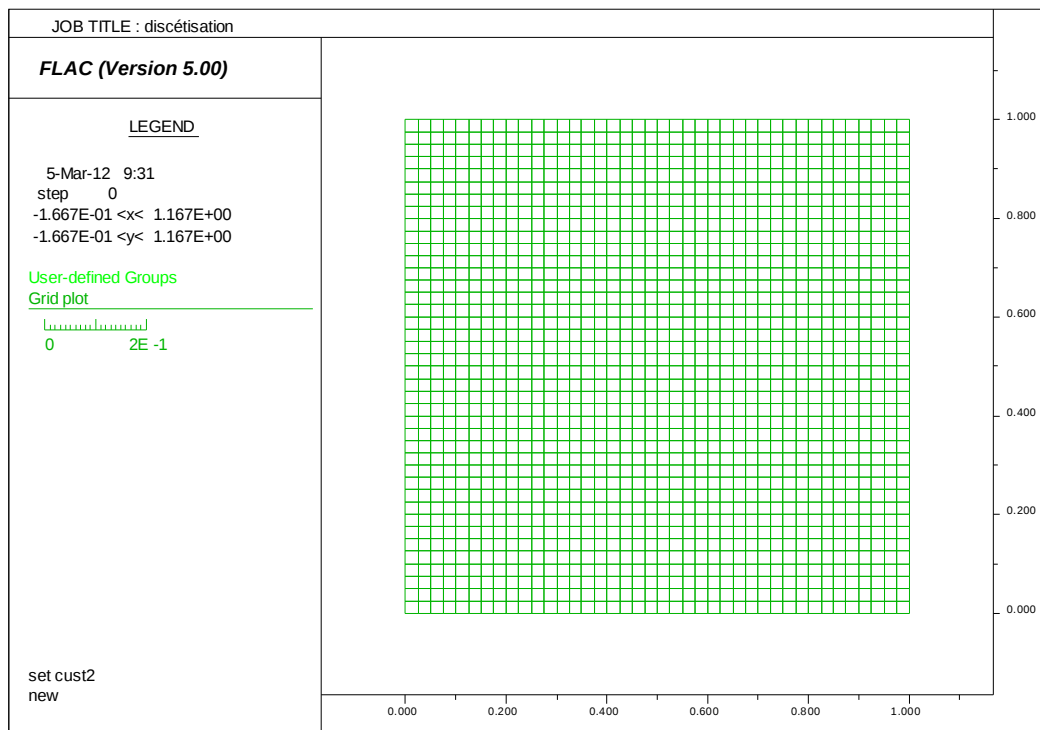


Figure V.1: Discrétisation du problème par le logiciel FLAC^{2D}

2.2-Affectation des propriétés du sol :

La digue est homogène et isotrope. Elle possède les caractéristiques suivantes :

Tableau V.1: les caractéristiques mécanique de la digue

Perméabilité (k) (m/s)/(pa/m)	Porosité (η)	Densité de l'eau (ρ_w) kg/m ³	Densité sec du sol (ρ) kg/m ³	Gravité (g) m/s ²
10^{-10}	0.3	1000	2000	10

*** Les propriétés de l'eau :**

Densité de l'eau (ρ_w) = 1000 kg/m³

Module de compressibilité de l'eau K_w = 1000(m/s)/(Pa/m)

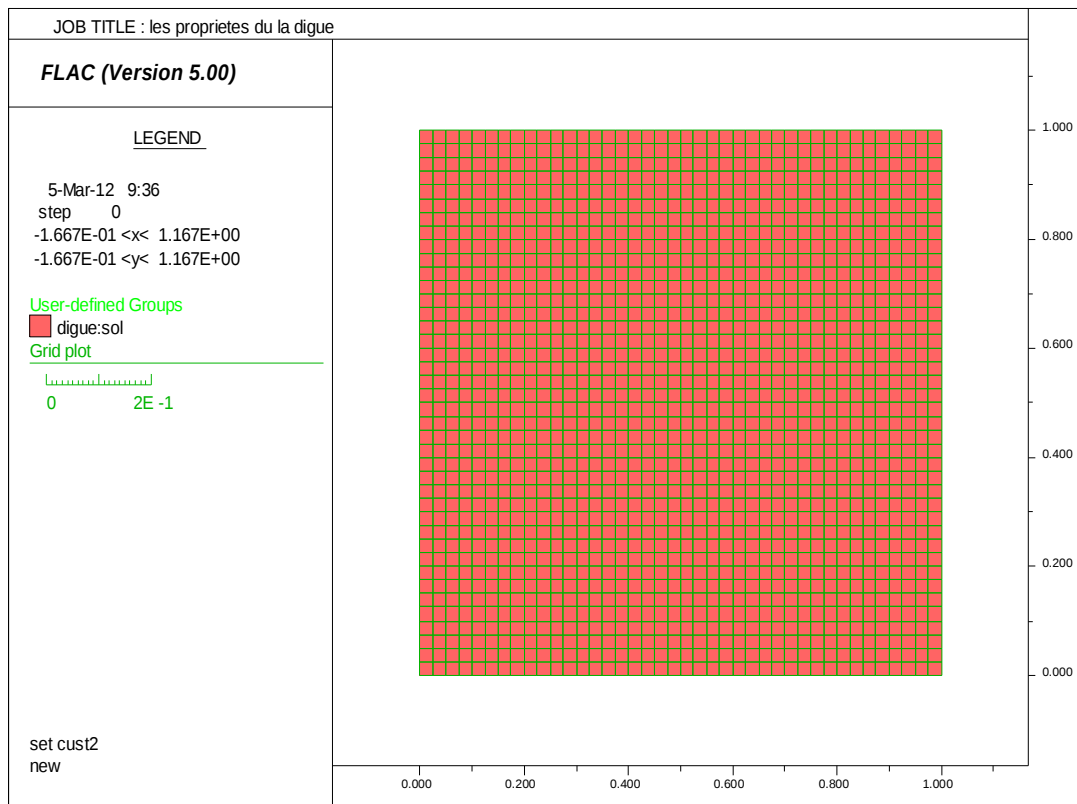


Figure V.2 : Affectation des propriétés de l'exemple par le FLAC^{2D}

2.3- Les conditions aux limites et les conditions initiales :

a-La pression de l'eau :

*Côté amont :

$$P = \rho_w \times g \times h \quad (h = h_1 = 1\text{m}) = 1000 \times 10 \times 1 = 10000 \text{ Pa.}$$

*Côté aval :

$$P = \rho_w \times g \times h \quad (h = h_2 = 0.25\text{m})$$

$$= 1000 \times 10 \times 0.25 = 2500 \text{ Pa.}$$

P : la pression de l'eau.

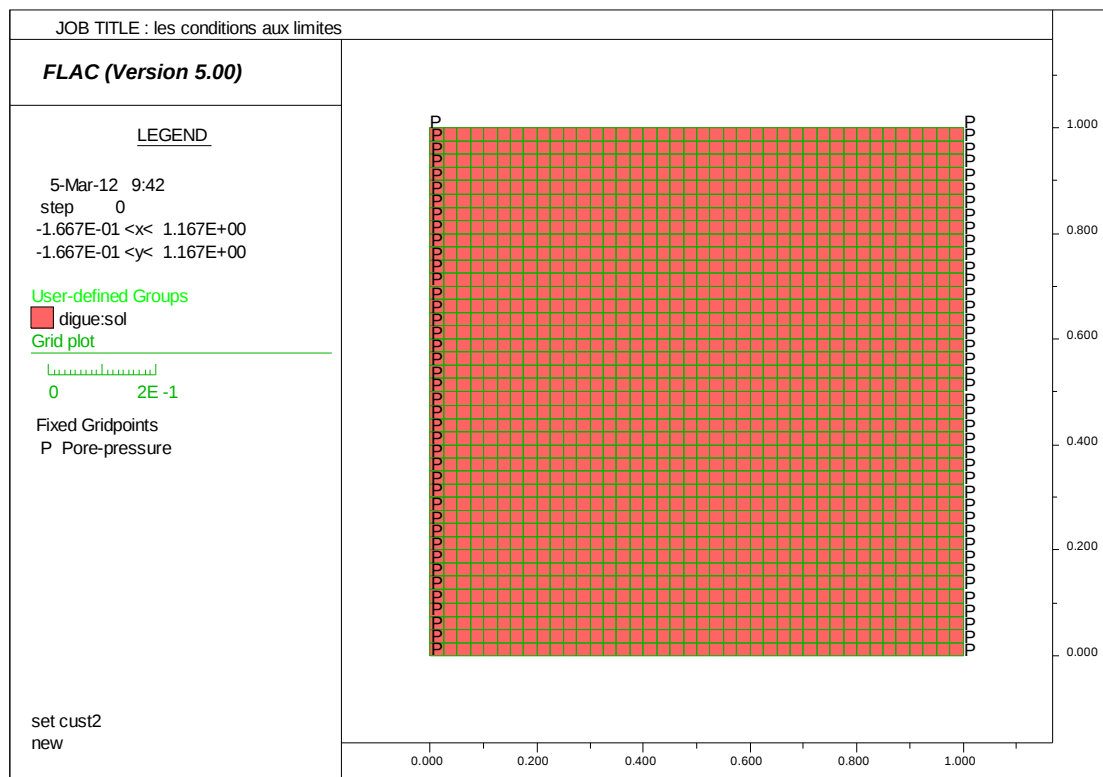


Figure V.3 : Affectation des conditions aux limites

Après l'exécution du logiciel on aurait Les résultats suivants :

4- En régime transitoire :

4.1-graphe d'écoulement (flow) :

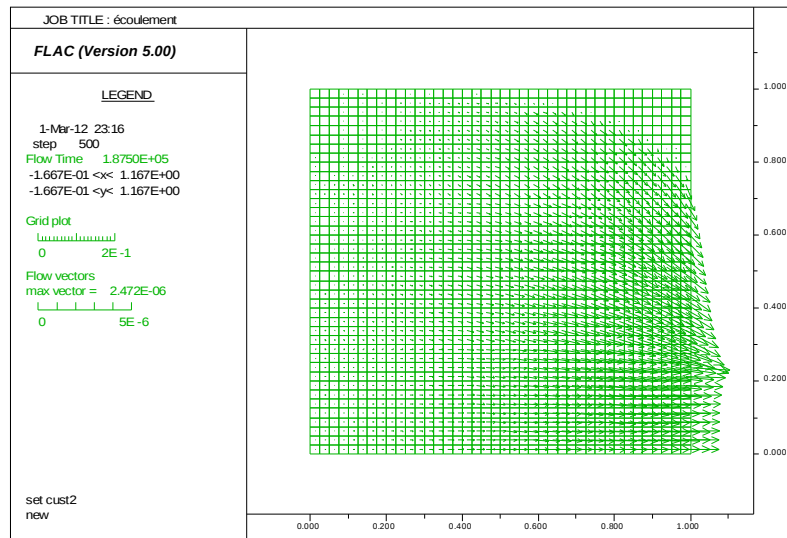


Figure V.4 : graphe d'écoulement.

La figure (V.4) présentée ci dessus donne les vecteurs de vitesse d'écoulement après un temps d'exécution de $1.875 \cdot 10^5$ s (le régime transitoire) et une valeur maximale de $2,472 \cdot 10^{-6}$ m/s.

4.2-graphe de saturation :

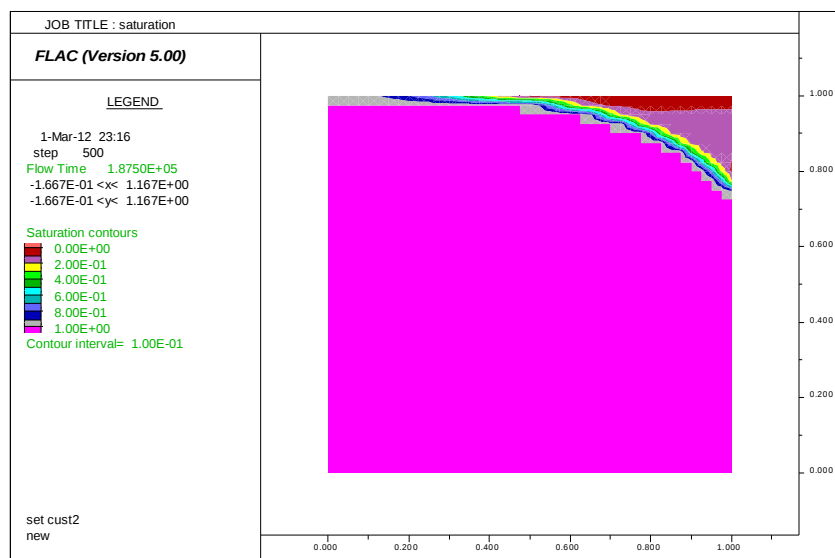


Figure V.5 : graphe de saturation.

La figure (V.5) présente la valeur de la ligne de saturation qui varie entre une saturation totale (valeur de saturation égale à 1) et une saturation nulle (valeur de saturation égale à 0) et un contour dégradé de 2.10^{-1} .

4.3-graphe de pression de l'eau :

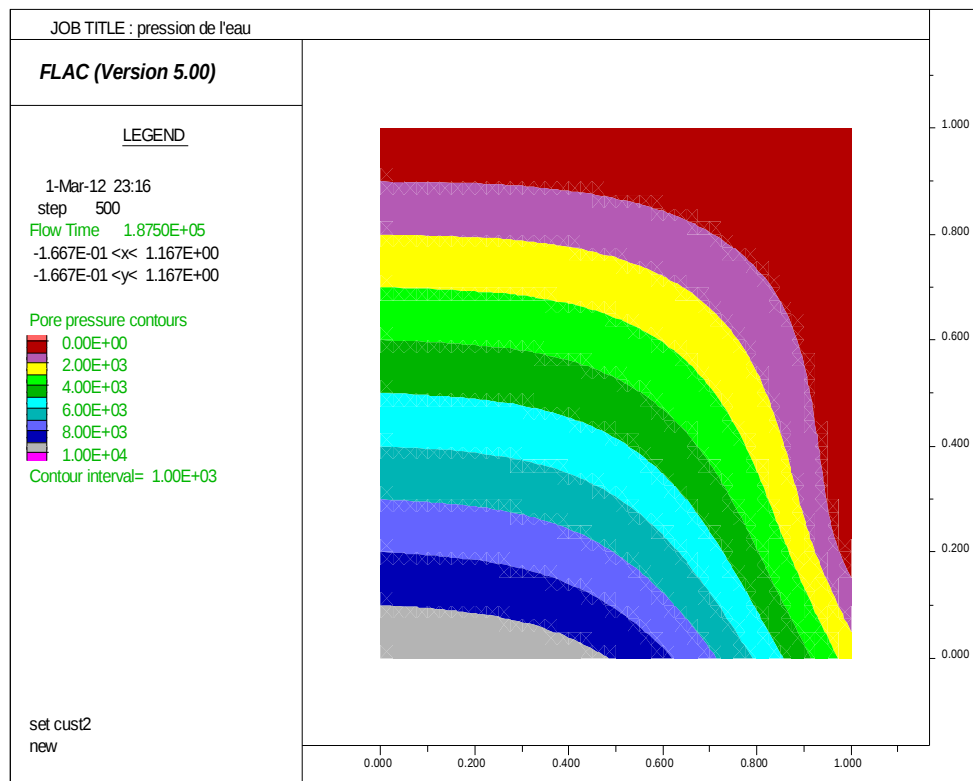


Figure V.6 : graphe de pression de l'eau.

La figure (V.6) présente les contours des valeurs de pression d'eau qui varie entre une valeur maximale de 1.10^4 Pa et une valeur minimale nulle.

4.4-les courbes d'écoulement :

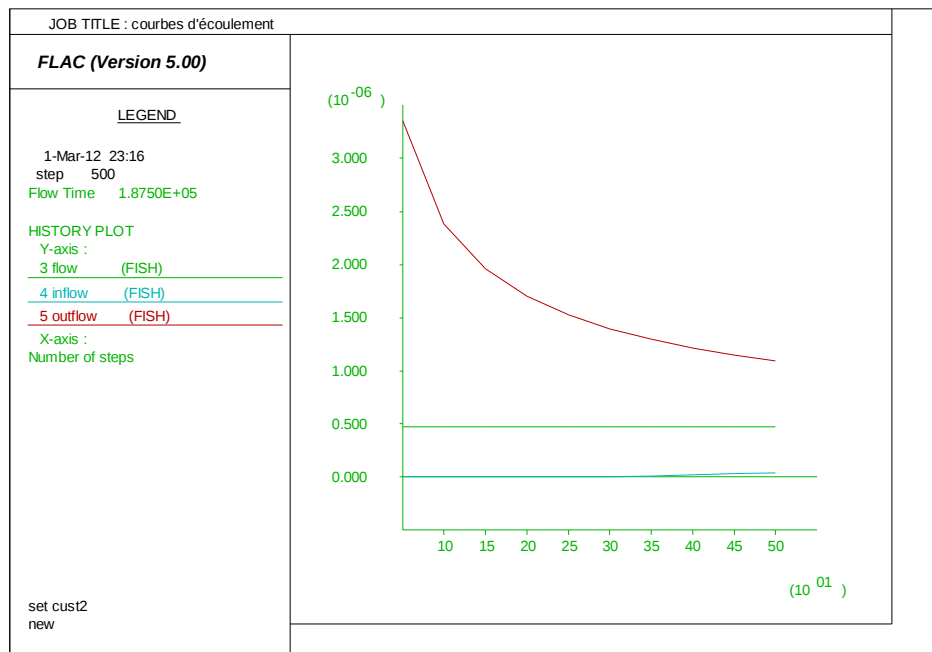


Figure V.7 : graphe d'écoulement

La figure (V.7) présente les courbes d'écoulement en régime transitoire qui donnent les valeurs de débit entrant et les valeurs de débit sortant.

4.5-graphe des équipotentiellles et les lignes de charges :

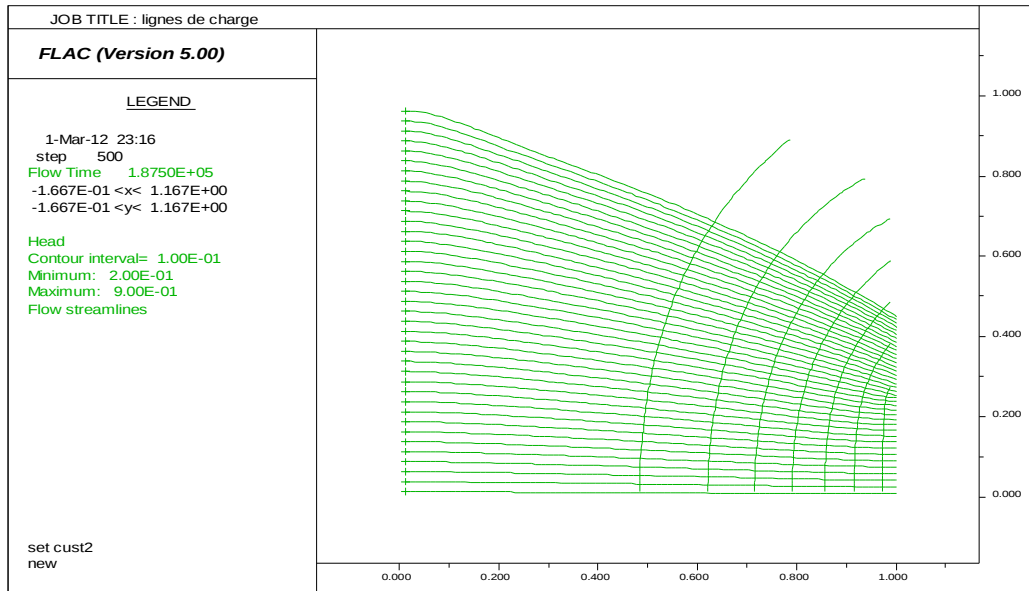


Figure V.8 : graphe des lignes de charges et des équipotentiels.

La figure (V.8) présente un réseau d'écoulement avec une valeur maximale et une valeur minimale pour un régime transitoire.

5-En régime permanent :

5.1-Le temps caractéristique :

Le temps caractéristique c'est le temps nécessaire pour atteindre un régime permanent lors de vidange du barrage, il est calculé par la formule analytique suivante :

$$t_c = \frac{L_c^2}{C}$$

$$C = \frac{k \times k_w}{\eta} = \frac{10^{-10} \times 1000}{0.3} = 3.33 \times 10^{-7}$$

$$t_c = \frac{(1)^2}{3.33 \times 10^{-7}} = 3.003 \times 10^6 \text{ seconde.}$$

5.2-graphe d'écoulement (flow) :

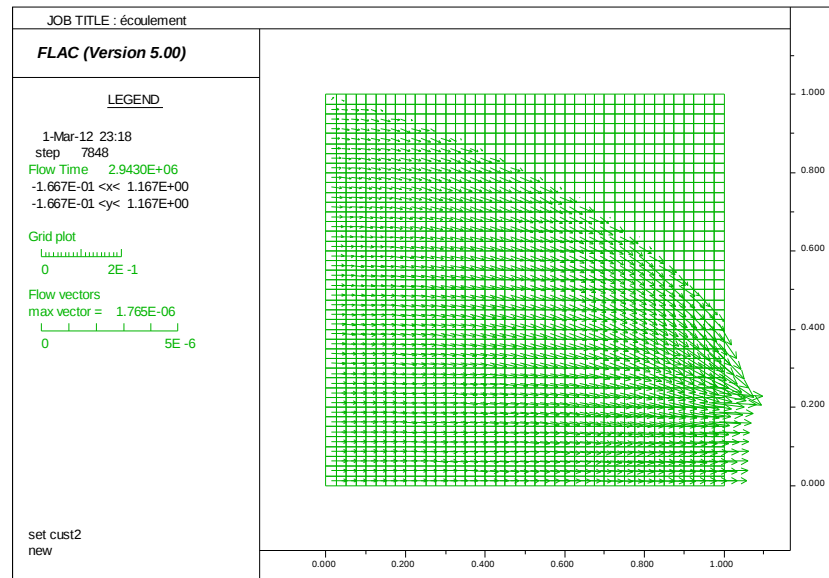


Figure V.9 : graphe d'écoulement.

La figure (V.9) présente le graphe d'écoulement en régime permanent dont les vecteurs de vitesse convergent vers le côté aval.

5.3-graphe de saturation :

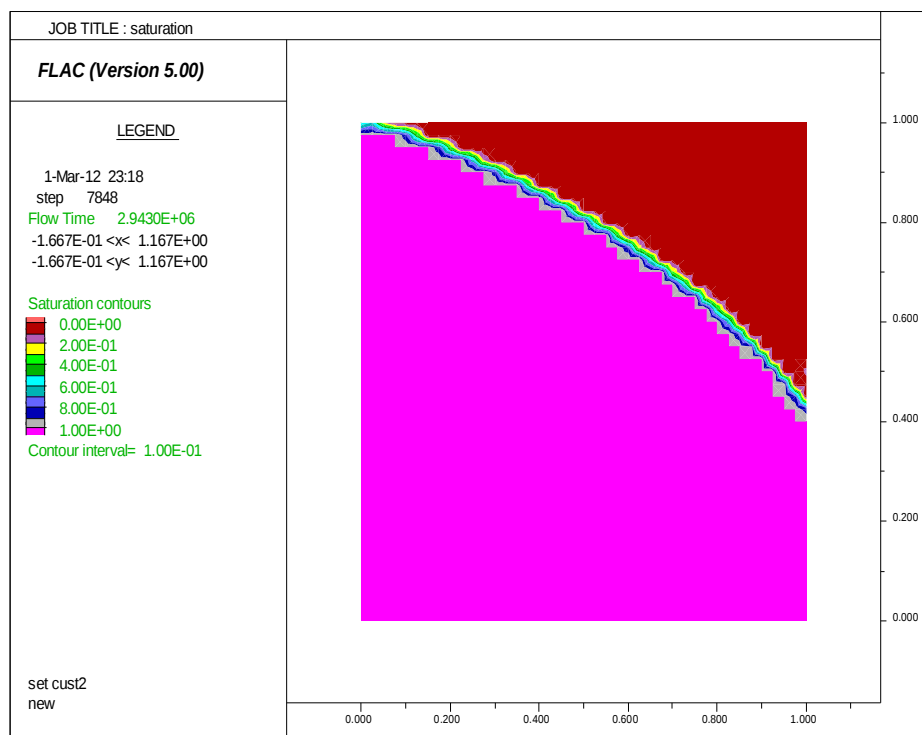


Figure V.10 : graphe de saturation

La figure (V.10) présente les valeurs de pression ; à la même courbure et la même valeur de pression de l'eau mais avec un abaissement dans la hauteur par rapport au régime transitoire.

5.4-graphe de pression de l'eau :

La figure (V.11) présente les valeurs de pression qui sont les mêmes que le régime transitoire mais avec une réduction dans la surface de pression par rapport au régime transitoire.

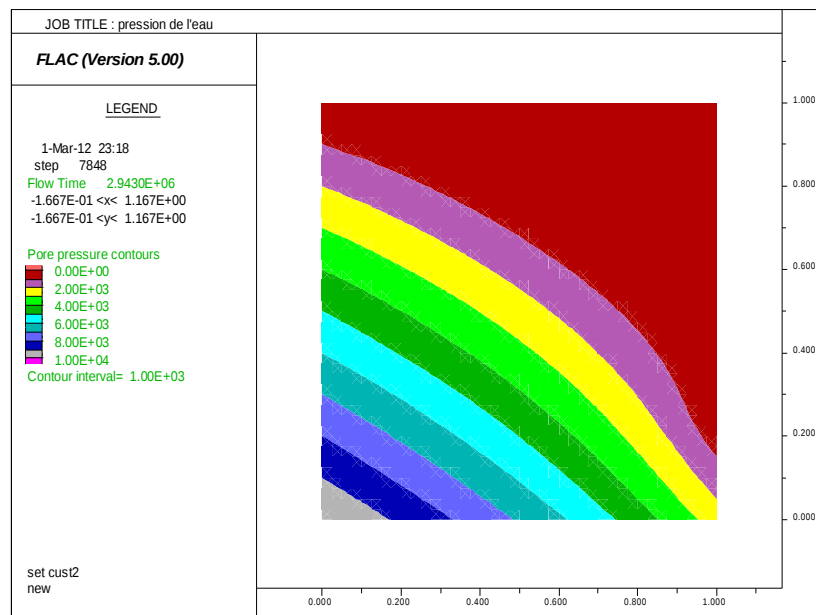


Figure V.11 : graphe de pression de l'eau.

5.5-graphe des courbes de l'eau :

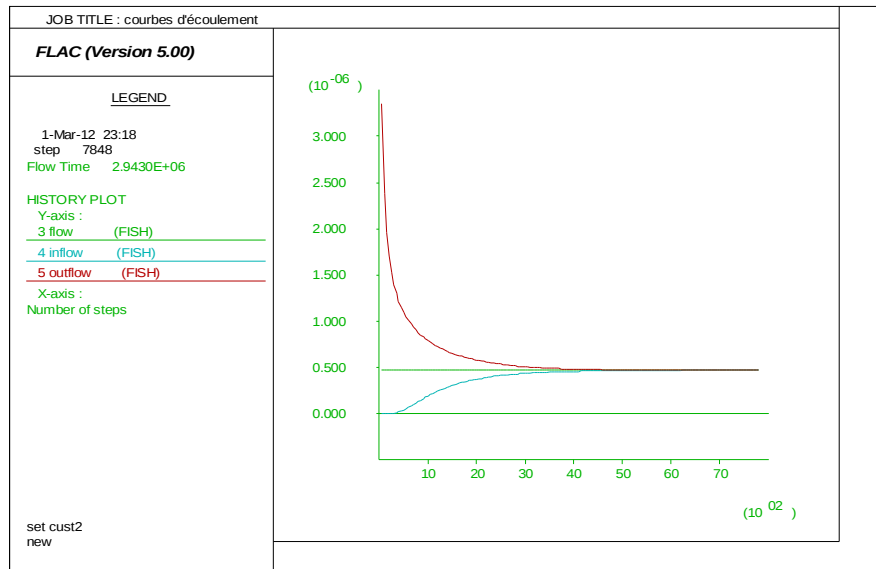


Figure V.12 : graphe des courbes de l'écoulement.

La figure (V.12) présente les courbes de débit entrant et de débit sortant en régime permanent qui tend asymptotiquement jusqu'à atteindre la valeur de débit d'écoulement.

5.6-graphe des lignes du charge et des équipotentiellles :

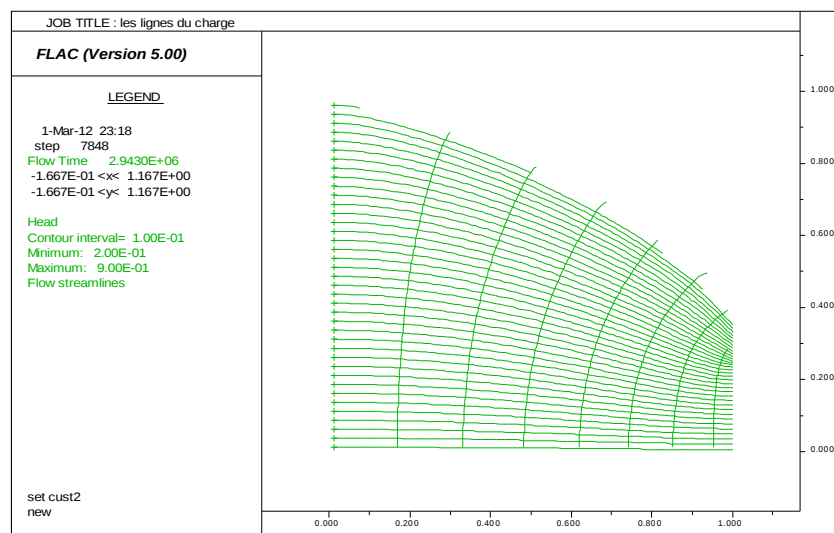


Figure V.13 : graphe des charges et des équipotentiellles.

La figure (V.13) présente un réseau d'écoulement avec une valeur maximale et une valeur minimale pour un régime permanent.

6- La validation des résultats trouvés ::

Pour comparer les résultats trouvés par le logiciel FLAC^{2D} et ceux trouvés par Bear, on calcule la hauteur de la surface de suintement et la position de la surface libre.

6.1-calcul de la surface de suintement :

La surface de suintement est la différence entre la hauteur de la surface libre et la hauteur d'eau dans le côté aval. Pour cela on utilise le graphe d'écoulement de la figure (V.9).

$$H_{ss}=0,025 \times 7=0,175\text{m}$$

La hauteur à partir de la base correspondante à 0,425m

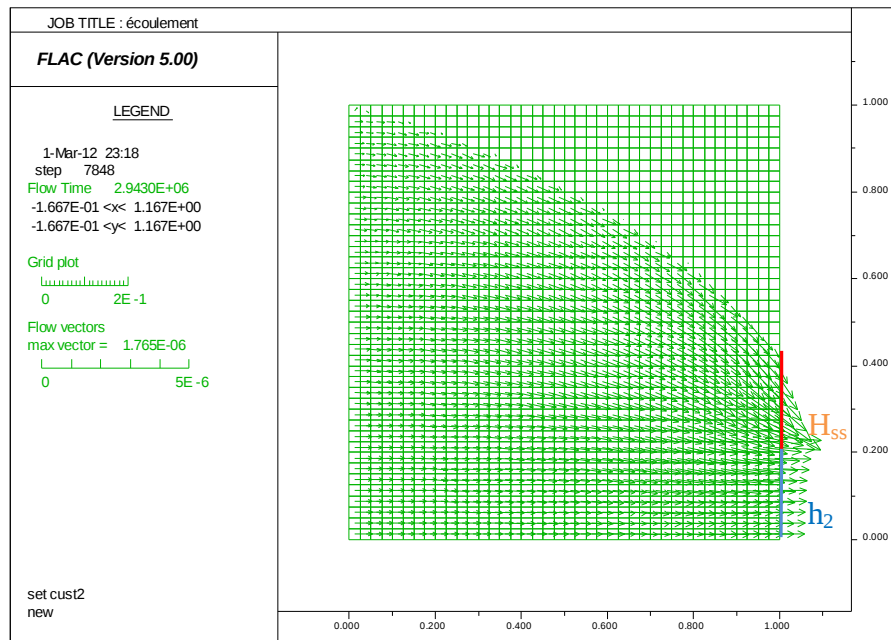


Figure V.14 : la position de la surface de suintement

6.2- La position de la surface libre :

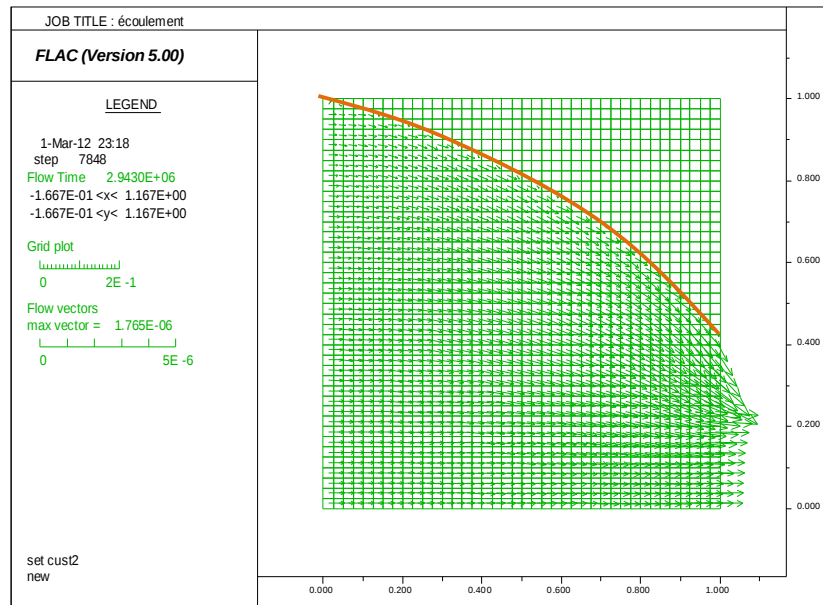


Figure V.15 : l'allure de la surface libre.

7-Les résultats donnés dans l'exemple modèle de Bear(1972) cité par J.Knight (2005):

J.Knight (2005) a pris comme modèle l'exemple de Bear (1972) et il a présenté dans une comparaison d'une solution approximative d'un barrage à surface libre avec une hauteur en aval non nulle, où il compare la solution des trois théories, l'hypothèse de Dupuit-Forchheimer et la théorie de Baiocchi et la solution trouvée par la méthode des différences finies.

Il a donné la position de la surface libre par la figure (V.16)

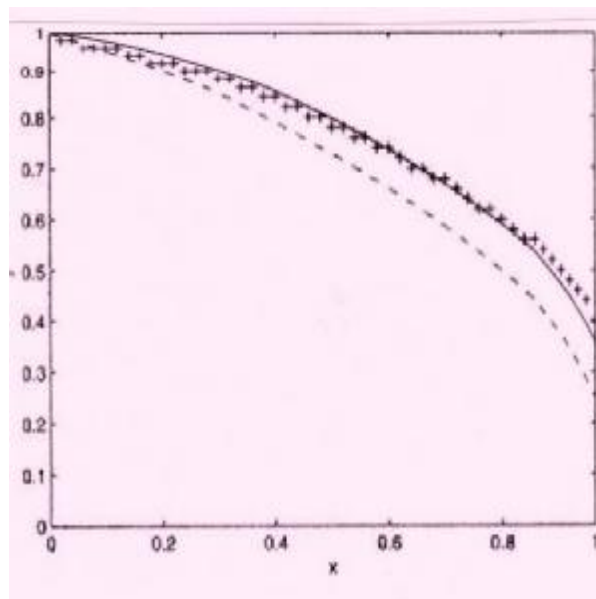


Figure V.16 : la position de la surface libre donnée par les trois théories

- Ligne continue : présente la solution donnée par la méthode des différences finies.
- Ligne discontinue : présente la solution donnée par Dupuit-Forchheimer.
- Ligne en croix : présente la solution donnée par Baiocchi.

A partir de ces courbes, la valeur de la hauteur de la surface de suintement est trouvée égale à :

$H_{ss}=0$; à partir de l'approximation de Dupuit-Forchheimer.

$H_{ss}=0.4\text{m}$; donnée par l'approximation de Baiocchi.

$H_{ss}=0.36\text{m}$; donnée par la méthode des différences finies.

8-Comparaison des résultats :

8.1-la position de la surface libre donnée par le logiciel FLAC^{2D}:

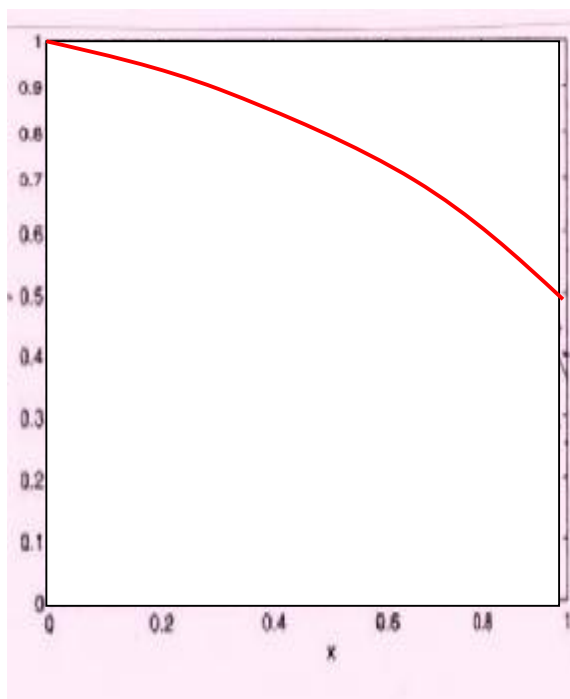


Figure V.17 : la position de la surface libre

8.2-La superposition de la surface libre :

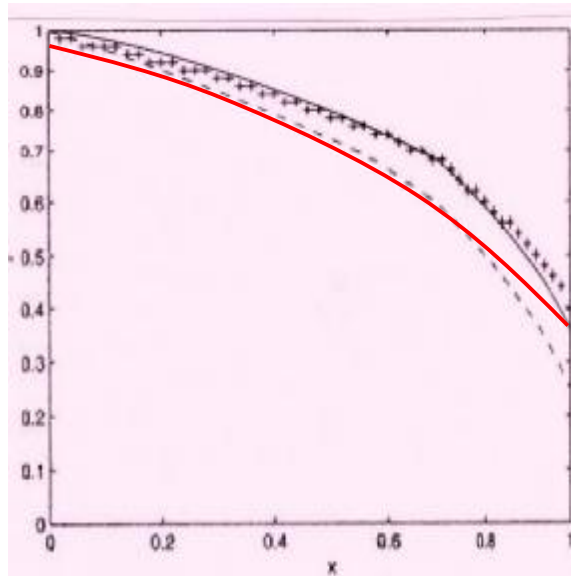


Figure V.18: la superposition de la surface libre

8.2-la hauteur de la surface de suintement :

La valeur de la hauteur de la surface de suintement trouvée par la simulation numérique du logiciel FLAC une fois que le régime permanent est atteint est égale à 0.425m. Cette valeur est supérieure aux hauteurs des surfaces de suintement trouvées par les trois méthodes.

Conclusion :

On conclue que la position de la surface libre et la hauteur de la surface de suintement trouvées par le logiciel FLAC sont plus exacte que les trois théories citées par J.Knight (2005) (largement supérieure à la valeur donnée par l'hypothèse de Dupuit-Forchheimer, moyennement supérieure à celle donnée par méthode des différences finies et proche de celle donnée par Baiocchi), car celui-ci prend en compte la présence de la zone de non saturation.

On dira alors que le logiciel est fiable pour la résolution des problèmes des écoulements dans les sols, tels que les barrages, les chaussées...etc.

Conclusion générale

conclusion générale

Les écoulements en milieux poreux jouent un rôle prépondérant dans différents domaines des sciences et de l'ingénierie. La variété de problèmes provoqués par l'écoulement de l'eau dans le sol est vaste et sa multiplicité d'application est d'une importance considérable pour le concepteur afin d'améliorer les conditions d'exécution des travaux et d'assurer la stabilité hydraulique des ouvrages.

Dans le domaine des écoulements souterrains, l'utilisation des équations de continuité et de conservation a contribué au développement de modèles numériques performants en terme de compréhension physique et de la simulation prévisionnelles. La première étape dans cette démarche de simulation consiste à caractériser le domaine d'étude ; le milieu poreux, puis à développer les équations permettant de représenter son état et son évolution.

Au terme de ce travail, on peut conclure que les résultats numériques obtenus par le modèle développé, représentatif des écoulements permanents en sols saturés et non saturés, sont très satisfaisants du moment qu'ils concordent bien avec les résultats trouvés par d'autres chercheurs.

Le modèle proposé a été comparé une fois que le régime permanent est atteint aux méthodes analytiques (Dupuit-Forchheimer 1930 ; la méthode des différences finies) et aux méthodes semi analytique (Baiocchi 1971) cité par J. Knight (2005).

La valeur de la hauteur de suintement et la position de la surface libre trouvée par le modèle, dans ce travail, a été confirmée par les valeurs analytiques trouvées par l'exemple de comparaison des trois théories (méthode des différences finies, la théorie de Baiocchi et hypothèse de Dupuit-Forchheimer) dans l'exemple de Bear (1972) cité par J.Knight(2005).

L'apparition de la surface de suintement sur le côté aval du domaine d'écoulement montre l'existence d'un écoulement dont l'intensité affecte directement la hauteur de celle-ci. On remarque que la hauteur de la surface de suintement est aussi affectée par les conditions aux limites, à l'amont, du domaine d'écoulement et par le niveau d'eau en celui-ci.

Malgré les nettes améliorations des méthodes classiques des écoulements à surface libre, celle-ci font une approximation en représentant la surface de suintement comme une zone de contact avec l'air et l'effet de pression de l'eau est négligée dans cette zone.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **Abdelhamid Messameh (1997)** ; « simulation numérique des écoulements souterrains en régime transitoire- application au barrage zone de Biskra -> thèse du magister à université de Biskra.
- [2] **Abdelghafour Aït Alaïwa & Nadia Saiyouri (2004)** ;
« Caractérisation des sols injectés par mesure de perméabilité au gaz et de porosité au mercure » Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM) – Ecole Centrale de Nantes ; revue ; Volume X – n° x/année, pages 1 à X.
- [3] **Alain Curnier (1993)** ; « méthodes numériques en mécanique des solides » Romandes.
- [4] **André Fortin (2008)** ; « analyse numérique pour l'ingénieur ».
- [5] **Babacar Ndiaye (2000)** ; « Étude expérimentale des propriétés hydrodynamiques des sols cultivés par la méthode Wind » rapport de stage de recherches au laboratoire d'étude des transferts en- hydrologie et environnement (LT Grenoble) du 01 /10/ 1999 au 30/03 /2000.
- [6] **Bear ,J.1979** « hydraulics of ground water » édition Mc Graw-Hill ; series in water of resources and environmental engineering ; printed in USA.
- [7] **Baiocchi ; C.(1971)** « sur un problème à frontière libre traduisant le filtrage de liquides à travers des milieux poreux.C.R.ACAD.SC ;paris ; serie A,273 :1215-7
- [8] **Boufadel ; M.C. ;Suidan ; M.T. ; VENOSA ;A.D. ;Bowers,M.T.(1999)** « steady seepage in trenches and dams : effect of capillarity flow.J.Hydraul.Eng.,125(3)286-294.
- [9] **Boussinesq,J.(1904).** Recherche théorique sur l'écoulement des nappes infiltrées dans le sol ; compléments, journal de mathématiques pures et appliquées, 10(1), 5-78et 10(4), 63-394.
- [10] **Bear ,J.1972** « Dynamics of fluids in porous media » New york ; Ny : Elsevier.
- [11] **Buta,C. & Maftei, C.and Ciurea, C. (2011)**; « Data acquisition system for an experimental setup used for measuring the soil drainage's parameters » international journal of systems applications, engineering & development issue 6, volume 5, 2011
- [12] **Buta, C.& Maftei,C. ,& Ciurea, C.& Bucur, C.& Balasa,L.**
« Using NI Lab VIEW to automate analyses of water flow to a subsurface drain in a layered Soil » Computational Engineering in Systems Applications (Volume II) Mechanical, Industrial and Maritime Engineering Faculty Ovidius University of Constanta
- [13] **Coussy, O. & Fleureau, J. M. (2002)** ; « mécanique et ingénierie des

- matériaux » lavoisier. Essais Proctor, CBR. . .
- [14] **Coussy ,O.(1991) ;** « mécanique des milieux poreux » paris.
 - [15] **DE MARSILY, G.** « Hydrogéologie quantitative » , Editions Masson, 1981
 - [16] **DE MARSILY, G.** « Hydrogéologie quantitative » , Editions Masson, 1982
 - [17] **DE MARSILY ,G.** « Hydrogéologie :comprendre et estimer les écoulements souterraines et le transports des polluants. supports de cours ; ENSMP. 237 P + annexes» 1994.
 - [18] **Deleporte, E. (2003);** « Ecoulements dans les milieux poreux – Loi de Darcy »
 - [19] **Degoute, G.& Paul, R. (1995);** « *Aide mémoire de mécanique des sols*». Les publications de l'ENGREF
 - [20] **Euvrard, D. (1994);** « résolution numérique des équations aux dérivées partielles : différence finies et éléments finis »
 - [21] **Fleureau ,J.M. & Verbrugge, J.C.;** « Aspects expérimentaux du comportement des sols non saturés » université libre de Bruxelles et faculté des sciences agronomiques de gembloux, Belgique.
 - [22] **HILLEL, D. (1988)** « l'eau et les sols ; principe et processus physiques » Louvain-La-Neuve ; Academia. ISBN :2-87209-015-0 .collection PEDASUP .288P.
 - [23] **HILLEL, D. (1988)** « l'eau et les sols » édition Tezierski ; Belgique 1984.
 - [24] **HILLEL ,D. (198')** « l'eau et le sol- principe et processus physiques » édition CABAY ; France.
 - [25] **Hachemi, A., Bengueddach,B.et Remini, B.;** « calcul numérique de l'écoulement permanent dans les barrages en terre » thèse du magister école Nationale Supérieure de l'Hydraulique de Blida.
 - [26] **Hamza,A. (2007) ;** « simulation des écoulements transitoires en milieux saturés et non saturés » thèse pour l'obtention du grade de docteur d'état à université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou .
 - [27] **Itasca Consulting Group, Inc. (2005);** « Fast Lagrangian Analysis of Continua (FLAC), Command Reference ». Minneapolis; Itasca Consulting Group, Inc.
 - [28] **Itasca Consulting Group, Inc. (2005);** « Fast Lagrangian Analysis of Continua (FLAC), User's Guide ». Minneapolis; Itasca Consulting Group, Inc.
 - [29] **Itasca Consulting Group, Inc. (2005);** « Fast Lagrangian Analysis of Continua (FLAC), Fish in FLAC ». Minneapolis; Itasca Consulting Group, Inc.
 - [30] **Itasca Consulting Group, Inc. (2005);** « Fast Lagrangian Analysis of Continua (FLAC), Theory and Background ». Minneapolis; Itasca Consulting Group, Inc.

- [31] **Itasca Consulting Group, Inc. (2005)**; « Fast Lagrangian Analysis of Continua (FLAC), GIIC Reference ». Minneapolis; Itasca Consulting Group, Inc.
- [32] **Itasca Consulting Group, Inc. (2005)**; « Fast Lagrangian Analysis of Continua (FLAC), Command and Fish Reference Summery». Minneapolis; Itasca Consulting Group, Inc.
- [33] **Itasca Consulting Group, Inc. (2005)**; « Fast Lagrangian Analysis of Continua (FLAC), Optional Feature». Minneapolis; Itasca Consulting Group, Inc.
- [34] **Itasca Consulting Group, Inc. (2005)**; « Fast Lagrangian Analysis of Continua (FLAC), Example Applications». Minneapolis; Itasca Consulting Group, Inc.
- [35] **Kao,C. (2002)** ; « Fonctionnement hydraulique des nappes superficielles de fonds de vallées en interaction avec le réseau hydrographique » école nationale du génie rural, des eaux et des forêts ; thèse pour obtenir le grade *de* docteur de L'ENGREF
- [36] **Knight, J.H. (2005)** « improving the Dupuit-Forchheimer ground water free surface approximation » advances in water Resources, 28,1048-1056.
Spécialité : sciences de l'eau ; paris.
- [37] **Laforest, M. & Jalliffier-Verne,I. (2009)** ; « Applications des mathématiques: La loi de Darcy » école technique Montréal.
- [38] **Pernes-Debuyser, A.& Tessier, D. (2002)** ; « Etude et gestion des sols, volume 9, 3,2002-pages 177 à 186 » Cas des 42 parcelles de l'INRA à Versailles.
- [39] **Magnan, J.P.**; « L'eau dans le sol » l'école nationale des ponts et chaussées paris
- [40] **Martin, P. (1992)**; « geomécanique appliquée au BTP » Eyrolles.
- [41] **MUSKAT,M.(1946)** « the flow of homogeneous fluids through porous media. J.W.Edwards ; Inc. (Publ.) ; Ann Arbor ; Michigan ; 712P.
- [42] **Müller,D. (1996)**; « Techniques informatiques efficaces pour la simulation de milieux granulaires par des méthodes d'éléments distincts » Thèse N° 1545 (1996) présentée au département de mathématiques école polytechnique fédérale de Lausanne pour l'obtention du grade de docteur des sciences
- [43] **Neuman ; S.P.(1973)** « saturated_ unsaturated seepage by finite elements » journal of the hydraulics Division ;ASCE.VOL.99.HY 12 ;1973 PP.2233_2250.
- [44] **Oulamy,M. & magnan,J.P. (1990)** ; « modélisation numérique des écoulements et des déformations dans les barrages en terres construits sous des sols mous »
- [45] **Plumelle, C. (2002)** ; « Géotechnique B6/ chapitre 13 (version du 17/12/02) Cnam »Paris
- [46] **polubarinova_Kochina , P.Ya.(1962)** « theory of ground water mouvement-Princeton »

- university press
- [47] **Richards ; L.A (1931)** « capillary conduction of liquids through porous meduim physics vol.1 PP.318-333.
 - [48] **Schneebeli , G.** « hydraulique souterraine » Editions Eyrolles ; 1978.
 - [49] **Schneebeli , G.** « hydraulique souterraine » Collection du centre de recherche et d'essais du chaton .Eyrolles , 5 Publ ; paris 357 P ; 1966.
 - [50] **Schneebeli , G.** « hydraulique souterraine » Editions Eyrolles ; 1987.
 - [51] **Schneebeli, G. (1987);** « hydraulique souterraine » Eyrolles France.
 - [52] **Schneebeli, G. (1996) ;** « hydraulique souterraine » Eyrolles France.
 - [53] **Simon Bernard ;** « la connaissance des sols aux activités de gestionnaire de l'eau de l'établissement public Dordogne & Etat des connaissances et disponibilité des données pédologiques » Rapport résultant d'un stage d'une durée de deux mois.
 - [54] **Si Smail Ali (1997) ;** « simulation numérique des écoulements permanents et transitoires autour d'un puits parfaits dans une nappe phréatique » thèse de magister, université de Skikda.
 - [55] **Sigala, F.& Jean Claude Fies & Guennelon, R.**
« Tests de comportement des sols salés ou non salés vis-à-vis de l'eau » Institut National de la Recherche Agronomique (INRA) Science du Sol - Avignon – France
 - [56] **Touma, J.;** « La modélisation: aspects pratiques et méthodologie ; Modélisation de l'infiltration dans les sols non satures »
 - [57] **Taylor, D.W. (1948)** « fundamentals of soil mechanics ; Wiley » new_york
 - [58] **Technosup (2005) ;** « comprendre les éléments finis Principe, formulation et exercice corrigés» Ellipses
 - [59] **Youngs .E.G(1971)** « seepage through unconfined aquifers with lower boundaries of any shape » water Res-rescarch.vol.7 ; No3 ;PP624-639.
 - [60] **Youngs .E.G(1999)** « non steady flow to drains »in « agricultural drainage »
 - [61] **Zeidler ,R.B. & Balkema, A.A. (1983) ;** « groundwater flow in saturated and insaturated soil »